UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Geometría diferencial tropical

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR A EN CIENCIAS Matemáticas

PRESENTA:

Zeinab Toghani

TUTOR O TUTORES PRINCIPALES
Dra. Fuensanta Aroca ,
Instituto matemáticas unidad Cuernavaca, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dr. Pedro Luis Del Ángel Rodríguez,
Centro de investigación en matemáticas A.C. (CIMAT)

Dr. José Antonio Seade
Instituto matemáticas, UNAM

Ciudad de México, Marzo , 2017

Agradecimiento

Quiero agradecer a mi familia y mis amigos, por estar en el mundo y en mi vida. Y gracias a todos los que estuvieron en esta etapa de mi vida y a los que están.

En particular quiero agradecerle a la Dra. Fuensanta Aroca por haber dirigido este trabajo, por haber tenido la paciencia en formarme como matemático y además brindarme su amistad. A mis sinodales y a mi comité tutoral, al Dr. Jose Seade por sus apoyos y al Dr. Mark Spivakovsky por todos sus comentarios, al Dr. Cristhian Garay por sus guías, que además de mejorar sustancialmente el trabajo me ayudaron a ver mis errores.

También agradezco los apoyos otorgados por las siguientes instituciones:

1-Beca otorgada por la Secretaría de Relaciones Exteriores para realizar estudios de Posgrado.

2-Beca de Excelencia Académica otorgada por CONACyT, para realizar estudios de Posgrado.

3-Beca por Proyecto PAPIIT IN104713 y IN108216, ECOS M14M03 y LAISLA.

Índice general

1. Introducción **7**

2. Geometría Algebraica **9**
2.1. Anillo de polinomios y conjuntos algebraicos 9
2.2. Anillo de polinomios de Laurent 12
2.3. Anillo de polinomios con infinitas variables 13
2.4. Anillo de series de potencias 15
2.5. Límite inverso 16
2.6. Conjuntos constructibles y morfismos 18
2.7. Valoraciones 20
2.8. Homogeneización 22

3. Conceptos básicos de geometría tropical **23**
3.1. Semi-anillo Tropical 23
3.2. Tropicalización de un polinomio 26
3.3. Hipersuperficies tropicales 30
3.4. Variedades tropicales 33

4. Álgebra diferencial **37**
4.1. Anillo diferencial 37
4.2. Anillo diferencial de series de potencias 38
4.3. Polinomios diferenciales 39
4.4. Soluciones de polinomios diferenciales 41
4.5. Base de un ideal diferencial 42
4.6. Sistema de ecuaciones diferenciales 44

5. Espacio de arcos **45**
5.1. El espacio de arcos de una hipersuperficie 45
5.2. El espacio de arcos de una variedad 49

6. Geometría diferencial tropical **55**
6.1. Semi-anillo diferencial tropical 55
6.2. Soluciones de un polinomio diferencial tropical 57
6.3. Tropicalización de polinomios diferenciales 64

7. Conjunto de soluciones de un ideal diferencial. 69

8. Teorema fundamental de la geometría diferencial tropical 77

9. Problemas abiertos 81

Bibliografia 83

Capítulo 1

Introducción

La geometría tropical es un área que ha tenido un fuerte desarrollo en la última década, con aplicaciones en otras áreas de la Matemática y de la Física. El teorema fundamental de la geometría tropical para hipersuperficies fue demostrado por Kapranov en un preprint en 2003 y apareció publicado en 2006 [EKL06]. Distintas extensiones para ideales son posteriores a 2008 [AILdM10, JMM08].

La geometría tropical es el dual de las técnicas del polígono de Newton, que aparece por primera vez para el estudio de curvas algebraicas planas en 1850 [Pui50]. En 1889, Fine extiende el polígono de Newton a ecuaciones diferenciales [Fin89]. Tanto la extensión del polígono como la del poliedro han dado algoritmos para el cálculo de soluciones [Can93, AC01, ACJ03]. En 2015 Grigoriev ha propuesto una definición de "ecuación diferencial tropical" [Gri15]. Esta propuesta abre una nueva linea de investigación en singularidades de ecuaciones diferenciales. El hizo una propuesta para extender el concepto de variedad tropical a ideales diferenciales [Gri15]. Su preprint fue claro en el caso lineal pero no dió el formalismo para el caso no lineal. Sugirió varias líneas de investigación y planteó la pregunta:

¿Es verdad que para cada ideal diferencial I en n-variables independientes y una familia $S_1, \ldots, S_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que sea una solución de la tropicalización de I, existe una solución en serie de potencias de I cuya tropicalización es igual a $(S_1, \ldots, S_n)$?

Para responder a esta pregunta, hemos intentado encontrar un contra ejemplo, pero no hemos encontrado ningún contra ejemplo para tener respuesta negativa a la pregunta de Dima Grigoriev. Así que empezamos a extender las herramientas de geometría tropical clásica al caso diferencial.

Espacio de arcos asociado a una variedad es análogo al conjunto de soluciones de un ideal diferencial. Así que surgió la idea de extender algunos resultados de espacio de arcos al conjunto de soluciones de un ideal diferencial. Finalmente pudimos dar una respuesta afirmativa a la pregunta de Dima Grigoriev y pudimos probar lo reciproco de su pregunta. Extendemos el teorema fundamental de geometría tropical al caso diferencial.

Capítulo 2

Geometría Algebraica

En este capítulo introducimos los conceptos básicos necesarios para, más adelante, introducir el espacio de arcos, la geometría tropical y la geometría diferencial tropical.

2.1. Anillo de polinomios y conjuntos algebraicos

El anillo de polinomios en n variables $x_1, \ldots, x_n$ y coeficientes en el anillo R se denota por $R[x_1, \ldots, x_n]$. Es decir, los elementos de $R[x_1, \ldots, x_n]$ son expresiones de la forma:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{\Lambda}} c_\alpha x^\alpha, \tag{2.1}$$

donde x representa las variables $(x_1, \ldots, x_n)$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $c_\alpha \in R$, $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ y $\sharp(\mathbf{\Lambda})^1 < \infty$. El polinomio en (2.1) induce una aplicación

$$\begin{array}{cccc} f: & R^n & \longrightarrow & R \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbf{\Lambda}} c_\alpha a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}. \end{array}$$

Sea f un polinomio como en (2.1). Una n-ada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ es un **cero del polinomio** f si $f(a) = 0$.

La **variedad(hipersuperficie) asociada al polinomio** f es el conjunto:

$$V(f) := \{a \in R^n \mid f(a) = 0\}.$$

La **variedad asociada al conjunto de polinomios** $\{f_1, \ldots, f_r\}$ en $R[x_1, \ldots, x_n]$ es el conjunto:

$$V(f_1, \ldots, f_r) := \{a \in R^n \mid f_i(a) = 0, \quad \forall i, 1 \leq i \leq r\}.$$

[1] $\sharp(\Lambda)$ =Cardinalidad de Λ

Sea I un ideal del anillo $R[x_1, \ldots, x_n]$, la **variedad asociada al ideal** I es el conjunto:

$$V(I) := \{a \in R^n \mid f(a) = 0, \forall f \in I\}.$$

Sea $S \subset R$ un subconjunto, el ideal generado por S es la intersección de todos los ideales de R que contienen a S. Usaremos la notación $\langle S \rangle$ para el ideal generado por S:

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i \in \Lambda} a_i s_i \mid \sharp(\Lambda) < \infty, a_i \in R, s_i \in S \right\}.$$

Observación 2.1. *Sea $\{f_1, \ldots, f_r\}$ un conjunto de polinomios en $R[x_1, \ldots, x_n]$, la variedad asociada a $f_1, \ldots, f_r$ es igual a la variedad asociada al ideal generado por $f_1, \ldots, f_r$, es decir*

$$V(f_1, \ldots, f_r) = V(\langle f_1, \ldots, f_r \rangle).$$

Sea R un anillo, un subconjunto de R^n es un conjunto algebraico si es la variedad asociada a un conjunto de polinomios.

Un conjunto algebraico X se dice **irreducible** si no se puede escribir como unión de dos subconjuntos algebraicos propios de X.

Sea $\mathbb{K}$ un campo, sean $X_1 \subset \mathbb{K}^r, X_2 \subset \mathbb{K}^s$ subconjuntos algebraicos irreducibles, donde r, s son números naturales. Un mapeo

$$\psi : X_1 \longrightarrow X_2,$$

es un **morfismo regular** si existen polinomios $f_1, \ldots, f_s$ en las variables $x_1, ..., x_r$ tales que

$$\psi(x_1, \ldots, x_r) = (f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_r)), \quad \forall (x_1, ..., x_r) \in X_1.$$

Un anillo R es **noetheriano** si todos sus ideales son finitamente generados.

Lema 2.2. *Sea R un anillo conmutativo y noetheriano, entonces $R[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo noetheriano.*

Demostración. Ver por ejemplo [Lan93, teorema 4.1, p.186]. □

Lema 2.3. *Sea $\mathbb{K}$ un campo, sea*

$$\cdots Y_3 \subset Y_2 \subset Y_1 \subset \mathbb{K}^n,$$

una secuencia de subconjuntos algebraicos en $\mathbb{K}^n$, entonces existe r tal que

$$Y_r = Y_{r+1} = \cdots.$$

Demostración. Ver por ejemplo [Har77, ejemplo 1.4.7, p.5]. □

Proposición 2.4. *Sea $\mathbb{K}$ un campo no numerable y sea $X \subset \mathbb{K}^n$ una variedad irreducible. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ una familia de subvariedades propios de X, entonces*

$$X \neq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha.$$

Demostración. Supongamos $X = \mathbb{K}^n$, probamos el resultado por inducción en $n \in \mathbb{N}$.

Caso base:

Para $n = 1$, $\mathbb{K}$ es un campo no numerable entonces $\mathbb{K} \neq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha$, ya que cada V_α es finito.

Paso de inducción:

Sea $n = r - 1 \in \mathbb{N}$, suponemos que $\mathbb{K}^{r-1} \neq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha$. Vamos a probar la afirmación para $n = r$.

Consideremos la proyección natural

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbb{K}^r & \to & \mathbb{K}^{r-1} \\ & (c_1, \ldots, c_r) & \mapsto & (c_1, \ldots, c_{r-1}) \end{array}$$

Supomgamos $V_\alpha = V\left(\{f_{i\alpha}\}_i\right)$. Podemos escribir

$$f_{i\alpha} = \sum_{j=0} a_{ij\alpha}(x) x_r^j,$$

donde $a_{ij\alpha}(x) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Por la hipótesis de inducción tenemos

$$\mathbb{K}^{r-1} \neq \cup_{i,j,\alpha} V(a_{ij\alpha}),$$

donde la unión se toma sobre todos los coeficientes no nulos $a_{ij\alpha}$. Entonces

$$\exists b = (b_1, \ldots, b_{r-1}) \in \mathbb{K}^{r-1} \quad \textit{tal que} \quad \forall i \forall j \forall \alpha \quad \textit{tenemos} \quad a_{ij\alpha}(b) \neq 0.$$

Entonces para cada α tenemos $\pi^{-1}(b) \nsubseteq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha$, por lo tanto tenemos

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha \subsetneqq \mathbb{K}^r.$$

Esto termina la demostración en el caso $X = \mathbb{K}^n$.

Sea $X \subset \mathbb{K}^r$. Por el teorema de normalización de Noether existe un morfismo finito sobreyectivo $f : X \to \mathbb{K}^d$ donde $d = \dim(X)$. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha=0}^{\infty}$ una familia de subvariedades propias en X. Ya que $\dim(V_\alpha) < d$, f es un morfismo propio, podemos concluir que $f(V_\alpha)$ es una subvariedad propia de $\mathbb{K}^d$ con $\dim(f(V_\alpha)) < d, \forall \alpha$.

Por parte anterior tenemos

$$\mathbb{K}^d \neq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} f(V_\alpha),$$

esto implica que $X \neq \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_\alpha$. $\square$

Lema 2.5. *Sea X una variedad y X_1 una componente irreducible de X. Si Y es un subconjunto denso en X, entonces $Y \cap X_1$ es denso en X_1.*

Demostración. Podemos escribir $X = X_1 \cup Z$ donde $Z \subsetneqq X$. Ya que X_1 es una componente irreducible de X tenemos $Z \cap X_1 \subsetneq X_1$. Supongamos que $Y \cap X_1$ no es denso en X_1, entonces $\overline{Y \cap X_1} \subsetneq X_1$. Tenemos

$$Y = (Z \cap Y) \cup (X_1 \cap Y) \subset Z \cup (\overline{Y \cap X_1}),$$

entonces

$$Y \subset Z \cup (\overline{Y \cap X_1}) \subset X \setminus \left(X_1 \setminus \left((X_1 \cap Z) \cup (\overline{X_1 \cap Y})\right)\right).$$

El conjunto $(X_1 \cap Z) \cup (\overline{X_1 \cap Y})$ es conjunto cerrado en X_1 entonces el conjunto $X_1 \setminus \left((X_1 \cap Z) \cup (\overline{X_1 \cap Y}\right)$ es conjunto abierto en $X_1 \setminus Z$, ya que $X \setminus Z = X_1 \setminus Z$, entonces el conjunto $X \setminus \left(X_1 \setminus \left((X_1 \cap Z) \cup (\overline{X_1 \cap Y})\right)\right)$ es conjunto cerrado propio de X. Tenemos

$$Y \subset \overline{Y} \subsetneqq X,$$

esto es una contradicción. □

2.2. Anillo de polinomios de Laurent

Sea $\mathbb{K}$ un campo, el anillo de polinomios de Laurent en n variables $x_1, \ldots, x_n$ y coeficientes en el anillo $\mathbb{K}$ se denota por $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$. Es decir, los elementos de $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$ son expresiones de la forma:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{\Lambda}} a_\alpha x^\alpha, \tag{2.2}$$

donde x representa las variables $(x_1, \ldots, x_n)$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $a_\alpha \in R$, $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{Z}^n$ y $\sharp(\mathbf{\Lambda}) < \infty$.

El polinomio en (2.2) induce una aplicación

$$\begin{array}{cccc} f: & (\mathbb{K}^\star)^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_n). \end{array}$$

donde $\mathbb{K}^\star = \mathbb{K} \setminus 0$.

Sea f un polinomio de Laurent como en (2.2). Una n-ada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{K}^\star)^n$ es un **cero del polinomio de Laurent** f si $f(a) = 0$.

La **variedad (hipersuperficie) asociada al polinomio de Laurent** f es el conjunto:

$$V(f) := \{a \in (\mathbb{K}^\star)^n \mid f(a) = 0\}.$$

La **variedad asociada al conjunto de polinomios de Laurent** $\{f_1, \ldots, f_r\}$ en $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$ es el conjunto:

$$V(f_1, \ldots, f_r) := \{a \in (\mathbb{K}^\star)^n \mid f_i(a) = 0, \quad \forall i, 1 \leq i \leq r\}.$$

Sea I un ideal del anillo $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$, la **variedad asociada al ideal** I es el conjunto:

$$V(I) := \{a \in (\mathbb{K}^\star)^n \mid f(a) = 0, \forall f \in I\}.$$

2.3. Anillo de polinomios con infinitas variables

Sea S un conjunto arbitario y sea $\{A_s\}_{s\in S}$ una colección de conjuntos, **el producto directo** de las A_s es:

$$\prod_{s\in S} A_s := \{(\alpha_s)_{s\in S} \mid \alpha_s \in A_s\}.$$

Cuando $A_s = R, \forall s \in S$ escriberemos

$$R^S := \prod_{s\in S} R,$$

y también, cuando no cree confusión denotaremos $R^{\sharp S} := R^S$

La **suma directa** de las A_s es el subconjunto del producto directo dado por:

$$\bigoplus_{s\in S} A_s := \{(\alpha_s)_{s\in S} \mid \alpha_s \in A_s, \sharp(\{\alpha_s \mid \alpha_s \neq 0\}) < \infty\}.$$

Si las A_s tienen estructura de anillo entonces $\bigoplus_{s\in S} A_s$ tiene estructura de anillo.

Sea S un conjunto arbitrario, el anillo de polinomios en variables

$$\{x_s \mid s \in S\}$$

es el conjunto

$$R[x_s \mid s \in S] := \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha x^\alpha \mid \Lambda \subset \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_\alpha \in R, \sharp(\Lambda) < \infty \right\}.$$

donde $x^\alpha := \sqcap_{s\in S} x^{\alpha_s}$.

Sea f un polinomio

$$f = \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha x^\alpha \in R[x_s \mid s \in S]. \tag{2.3}$$

El polinomio f induce una aplicación

$$\begin{array}{cccc} f: & R^S & \longrightarrow & R \\ & (y_s)_{s\in S} & \mapsto & f\left((y_s)_{s\in S}\right). \end{array}$$

El soporte de f se define de la siguiente manera

$$\mathrm{Supp}(f) = \left\{ \alpha \in \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid c_\alpha \neq 0 \right\}.$$

Si f es un polinomio tenemos $\sharp\left(\mathrm{Supp}(f)\right)) < \infty$.

Sea f un polinomio como en (2.3). Un elemento $a = (a_s)_{s\in S} \in R^S$ es un **cero del polinomio** f si $f(a) = 0$.

La **variedad asociada a** f es el conjunto:

$$V(f) := \{a = (a_s)_{s \in S} \in R^S \mid f(a) = 0\}.$$

Sea I un ideal del anillo $R[x_s \mid s \in S]$, la **variedad asociada al ideal** I es el conjunto

$$V(I) := \{a = (a_s)_{s \in S} \in R^S \mid f(a) = 0, \forall f \in I\}.$$

Ejemplo 2.6. Sea S un conjunto, sea $I \subset R[x_s \mid s \in S]$ el ideal

$$I = \langle \{x_s\}_{s \in S} \rangle.$$

La variedad asociada a I es:

$$V(I) = \{(0, 0, \ldots) \in R^S\}.$$

Observerse que si $\sharp(S) \geq \sharp(\mathbb{N})$, el ideal I no es finitamente generado.

Observación 2.7. *Por el ejemplo anterior el anillo de polinomios* $R[x_s \mid s \in S]$ *no es notheriano si* $\sharp(S) \not< \sharp(\mathbb{N})$.

Ejemplo 2.8. Sea $S = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El anillo de polinomios en las variables $\{x_s \mid s \in S\}$ es

$$R[x_s \mid s \in S] = R[x_1, \ldots, x_n].$$

Ejemplo 2.9. Sea $S = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, j \geq 0\}$, los elementos de $R[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, j \geq 0]$ son expresiones de la forma:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha \sqcap_{i,j} x_{ij}^{\alpha_{ij}} \tag{2.4}$$

donde $c_\alpha \in R$, $\Lambda \subset \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sharp(\Lambda) < \infty$.

El polinomio en (2.4) induce una aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & R^{n(\mathbb{Z}_{\geq 0})} & \longrightarrow & R \\ & & & \\ & (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} & \mapsto & f\left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \right). \end{array}$$

Ejemplo 2.10. Sea $I \subset R[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq 2, j \geq 0]$. Sea I el ideal

$$I = \langle \{x_{1j} + x_{2j}\}_{j \geq 0} \rangle,$$

la variedad asociada a I es el conjunto

$$V(I) = \{a = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots) \in R^{2(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \mid f(a) = 0, \forall f \in I\} = \\ \{(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, -a_{11}, -a_{12}, -a_{13}, \ldots) \in R^{2(\mathbb{Z}_{\geq 0})}\}.$$

2.4. Anillo de series de potencias

El anillo de series potencias en la variable t con coeficientes en el campo $\mathbb{K}$ se denota por $\mathbb{K}[[t]]$. Los elementos de $\mathbb{K}[[t]]$ son expresiones de la forma:

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \tag{2.5}$$

donde $a_i \in \mathbb{K}$, para $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

El **soporte** de φ es el conjunto

$$\mathrm{Supp}(\varphi) := \{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \ a_i \neq 0\}, \tag{2.6}$$

el **orden** de φ sobre $\mathbb{K}[[t]]$ es dado por:

$$\mathrm{ord}(\varphi) = \mathrm{mín}\,\mathrm{Supp}(\varphi).$$

Consideremos la series de potencias

$$\varphi(t) = at^2 + bt^5 + ct^6 \in \mathbb{K}[[t]],$$

donde $a, b, c \neq 0$. El orden de φ es:

$$\mathrm{ord}(\varphi(t)) = 2.$$

El campo de fracciones de $\mathbb{K}[[t]]$ se denota por $\mathbb{K}((t))$, los elementos de $\mathbb{K}((t))$ se pueden escribir de la forma:

$$\phi(t) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{K}[[t]]$, con $\varphi_2 \neq 0$.

El orden en el anillo $\mathbb{K}[[t]]$ se extiende al campo fracciones $\mathbb{K}((t))$ de la forma natural:

$$ord\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = ord(\varphi_1) - ord(\varphi_2). \tag{2.7}$$

Para cada serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ con $b_0 \neq 0$ se puede encontrar una serie $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ tal que

$$(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i)(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i) = 1.$$

Cuando $b_0 = 0$, tenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = t^r \sum_{i=0}^{\infty} b'_i t^i,$$

donde $r = ord(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i)$, $b'_0 \neq 0$. Entonces se puede encontrar una serie de la forma $\sum_{i=r\in\mathbb{Z}}^{\infty} c_i t^i$ tal que

$$(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i)(\sum_{i=r\in\mathbb{Z}}^{\infty} c_i t^i) = 1.$$

Por lo tanto los elementos de $\mathbb{K}((t))$ se pueden escribir de la forma

$$\phi(t) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i} = (\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i})(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i) = (\sum_{i=r_1\in\mathbb{Z}}^{\infty} c_i t^i)(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i) = \sum_{i=r_2\in\mathbb{Z}}^{\infty} d_i t^i.$$

Los elementos de $(\mathbb{K}[[t]])^n$ para $n \in \mathbb{N}$ son las n-adas de la forma:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

donde $\varphi_i(t) \in \mathbb{K}[[t]]$.

La biyección entre $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ y $\mathbb{K}[[t]]$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ & \underline{a} = (a_j)_{j\geq 0} & \mapsto & \sum_{j\geq 0} a_j t^j, \end{array} \tag{2.8}$$

nos permite identificar los puntos de $\mathbb{K}[[t]]$ con puntos de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

El campo de **series de Puiseux** es

$$\mathbb{K}\{\{t\}\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{K}\left(\left(t^{\frac{1}{N}}\right)\right).$$

Los elementos de este campo son series de potencias

$$c(t) = c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2} + c_3 t^{a_3} + \cdots,$$

donde $c_i \in \mathbb{K}$ y $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ son números racionales con denominador comunes. El orden de $c(t)$ se define como

$$ord(c(t)) = a_1. \tag{2.9}$$

Observación 2.11. *El campo de series de Puiseux es el cierre algebraico de $\mathbb{K}((t))$.*

Demostración. Ver [Pui50]. □

2.5. Límite inverso

Consideremos B un conjunto, una relación binaria en un conjunto B es **una relación de orden** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto que está equipado con una relación de orden es un **conjunto ordenado**.

Sea Λ un conjunto ordenado con la relación binaria $\leq$. Sea $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos indexada por Λ, sea $\{\pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leq\beta\in\Lambda}$ una colección de mapeos

$$\pi_{\alpha\beta} : A_\beta \longrightarrow A_\alpha.$$

Si $\pi_{\alpha\beta}$ satisface las condiciones siguientes:

1. La relación $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ implica $\pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma}$,

2. $\forall \alpha \in \Lambda, \quad \pi_{\alpha\alpha}$ es identidad

decimos que el sistema $((A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha\leq\beta\in\Lambda})$ es un **sistema inverso** de conjuntos y morfismos sobre Λ. El **límite inverso** del sistema $((A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha\leq\beta\in\Lambda})$ es el conjunto:

$$\varprojlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha := \Big\{(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \mid a_\alpha = \pi_{\alpha\beta}(a_\beta), \text{ for all } \alpha \leq \beta \text{ in } \Lambda\Big\}.$$

Si este conjunto no es vacío $\forall \alpha \in \Lambda$, $A_\alpha \neq \emptyset$, denotamos el mapeo natural por

$$\pi_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda.$$

Ejemplo 2.12. Sea $\Lambda = \mathbb{N}$, sea $A_m = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, donde p es un número primo, $\forall m \geq m' \in \Lambda$, sea $\pi_{(m,m')}$ el morfismo natural

$$\pi_{mm'} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z},$$

el sistema $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \pi_{mm'})_{m\geq m'\in\Lambda}$ es un sistema inverso. El límite inverso de este sistema es

$$\varprojlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \Big\{(x_n) \in \prod_{n\in\Lambda} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \quad x_{m'} = \pi_{mm'}(x_m), \text{ for all } m \geq m'\Big\}.$$

Existe una biyección entre $\varprojlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y el conjunto

$$B = \Big\{(b_r)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mid b_r \in \{0,\ldots,p-1\}, \forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Big\}.$$

Pues tenemos la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & B & \longrightarrow & \varprojlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \\ & (b_r)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} & \mapsto & \left(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_{r-1}p^{r-1}\right)_{r\in\mathbb{N}} \end{array}$$

que es injectiva: sea $(b_r)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \in B$, sea $\Phi\left((b_r)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right) = 0$ entonces $\forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall i, 1 \leq i \leq r$, tenemos $b_i = 0$, por lo tanto $(b_r)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} = 0$.

La aplicación es sobreyectiva: sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, por la defnción tenemos

$$\begin{array}{c} a_m \equiv a_{m-1} \quad mod \quad p^{m-1} \Longrightarrow \exists \alpha_{m-1} \in \{0,\ldots,p-1\} \quad tal\ que \\ a_m = p^{m-1}\alpha_{m-1} + a_{m-1}. \end{array}$$

tenemos $\Phi\left((\alpha_r)_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \cdots + \alpha_{r-1}p^{r-1}\right)_{r\in\mathbb{N}} = (a_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

Sea A un conjunto y sea $\leq$ una relación binaria en A, se dice que un subconjunto B de A es **cofinal** si satisface la siguiente condición:

Por cada $a \in A$, existe algún $b \in B$ tal que $a \leq b$.

Proposición 2.13. *Sea Λ un conjunto ordenado que contiene un subconjunto cofinal numerable, sea $((A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha\geq\beta\in\Lambda})$ un sistema inverso y sea el conjunto A el límite inverso de este sistema que no es vació. Si los mapeos $\pi_{\alpha\beta}$ son sobreyectivos para cada $\alpha \geq \beta \in \Lambda$, entonces las proyecciones naturales*

$$A \to A_\alpha,$$

son sobreyectivas, $\forall \alpha \in \Lambda$.

Demostración. Ver por ejemplo [Bou04, proposición 5, p.198] . □

El tema de límite inverso se puede encontrar también en [BČMM15].

2.6. Conjuntos constructibles y morfismos

Un conjunto se dice **localmente cerrado** si es un abierto de su cerradura, es decir, el conjunto A es localmente cerrado si se puede escribir como la intersección de su cerradura con algún conjunto abierto i.e. $A = \overline{A} \cap U$, donde U es un conjunto abierto.

Una unión finita de conjuntos localmentes cerrados es un **conjunto constructible**. Los conjuntos constructibles forman una algebra booleana.

Ejemplo 2.14. En la recta real con la topología usual un ejemplo de conjunto constructible es el intervalo $A = (0, 3] \subset \mathbb{R}$ que se puede escribir como la intersección de su cerradura $\overline{A} = [0, 3]$ con el conjunto abierto $U = (0, 4)$,

$$A = (0, 3] = [0, 3] \cap (0, 4).$$

Ejemplo 2.15. En el plano real con la topología usual un ejemplo de conjunto constructible es

$$C = \{(x, y) \in (\mathbb{R})^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$$

que se puede escribir como la intersección de su cerradura $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R})^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ con el conjunto abierto $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R})^2 \mid x^2 + y^2 < 2\}$.

Ejemplo 2.16. Sea $\mathbb{K}$ un campo, sean X , $Y \subset \mathbb{K}^n$ subconjuntos algebraicos irreducibles, con la topología de Zariski son conjuntos cerrados, entonces son conjuntos costructibles.

Corolario 2.17. *(***Chevalley***) Sea $\mathbb{K}$ un campo, sean X , $Y \subset \mathbb{K}^n$ subconjuntos algebraicos irreducibles. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular, entonces la imagen de f es un conjunto constructible en Y. En general f manda cada conjunto constructible en X a un conjunto constructible en Y.*

Demostración. Ver por ejemplo [Mum99, Corolario 2, p.51]. □

Lema 2.18. *Sea X una variedad algebraica irreducible y sea Y un subconjunto constructible de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Y es denso en X,*

2. *Y contiene un subconjunto abierto no vacío de X,*

3. $\overline{X \setminus Y} \subsetneq X$.

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$. Por la definición de conjuntos constructibles podemos escribir

$$Y = \bigcup_{i=1}^{l} (Y_i \setminus Z_i),$$

donde Z_i y Y_i son conjuntos cerrados, $\forall i, 1 \leq i \leq l$.

Si $\forall i$, $Y_i \subsetneq X$ entonces $\dim Y_i < \dim X, \forall i$, podemos concluir que $\overline{Y} \subset \cup_{i=1}^{l} Y_i \subsetneq X$. Tenemos una contradicción, ya que Y es denso en X.

Entonces $\exists i$ tal que $Y_i = X$, tenemos $U = Y_i \setminus Z_i$ que es un abierto y denso en X.

$2 \Longrightarrow 3$. Sea $U \subset Y$ un abierto de X, entonces tenemos

$$X \setminus Y \subset X \setminus U \subsetneq X.$$

Consideramos su cerradura, tenemos

$$\overline{X \setminus Y} \subset X \setminus U \subsetneq X.$$

$3 \Longrightarrow 2$. Consideramos el conjunto abierto $U = X \setminus (\overline{X \setminus Y})$ que está en Y. $2 \Longrightarrow 1$. Ver por ejemplo [Har77, Ejemplo 1.1.3, p.3]. Que el hecho que esta linea es el único sitio en la demostración donde utilizamos la hipótesis que X es irreducible. □

Proposición 2.19. *Sea $\mathbb{K}$ un campo no numerable algebraicamente cerrado de caracteristica cero. Sea $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ una familia creciente de conjuntos constructibles en $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}^n = \bigcup_\alpha E_\alpha$. Entonces existe α tal que $\mathbb{K}^n = E_\alpha$.*

Demostración. Supongamos $E_\alpha \subsetneq \mathbb{K}^n$ para cada α. La familia creciente de conjuntos constructibles

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{K}^n \tag{2.10}$$

da una secuencia anidada de conjuntos constructibles

$$\mathbb{K}^n \setminus E_1 \supset \mathbb{K}^n \setminus E_2 \supset ... \quad . \tag{2.11}$$

Tomando el cierre en (2.11), obtenemos una secuencia anidada de subvariedades algebraicas

$$\overline{\mathbb{K}^n \setminus E_1} \supset \overline{\mathbb{K}^n \setminus E_2} \supset ... \quad .$$

Por lo tanto, hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathbb{K}^n \setminus E_\alpha} = \overline{\mathbb{K}^n \setminus E_m}$ para cada $\alpha \geq m$.

Sea $\widehat{X} = \overline{\mathbb{K}^n \setminus E_\alpha}$ para $\alpha \geq m$ y sea X_1 una componente irreducible de $\widehat{X}$. Entonces por el lema 2.5 $(\mathbb{K}^n \setminus E_\alpha) \cap X_1$ es denso en X_1 para $\alpha \geq m$ y por el lema 2.18, contiene un conjunto abierto no vacío U_α de X_1.

$$F_\alpha = X_1 \setminus U_\alpha.$$

Obtenemos $E_\alpha \cap X_1 \subset F_\alpha \subsetneq X_1$, así por la proposición 2.4

$$\cup_{\alpha=1}^{\infty} F_\alpha \subsetneq X_1.$$

Esto implica que $\cup_{\alpha=1}^{\infty} E_\alpha$ no contiene $X_1 \setminus \cup_{\alpha=1}^{\infty} F_\alpha \subset \mathbb{K}^n$. Tenemos una contradicción. □

2.7. Valoraciones

Sea R un anillo, un ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ es un **ideal maximal** si para cada ideal I con $\mathfrak{m} \subset I \subset R$ tenemos $I = \mathfrak{m}$ o $I = R$.

Un anillo R es un **anillo local** si tiene un único ideal maximal.

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Una **valoración** sobre $\mathbb{K}$ es una función $\nu : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\nu(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$,
2. $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,
3. $\nu(a + b) \geq min(\nu(a), \nu(b))$, $\forall a, b \in \mathbb{K}^*$.

La imagen de la valoración ν es el **grupo valores** de ν y lo denotamos por Γ_ν.

Un campo $\mathbb{K}$ con una valoración ν se dice **campo valorado** y lo denotamos por $(\mathbb{K}, \nu)$.

Lema 2.20. *Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado entonces la sobreyección $\mathbb{K}^\star \to \Gamma_\nu$ se escinde, es decir, existe un homomorfismo de grupos $\Omega : \Gamma_\nu \to \mathbb{K}^\star$ con $\nu(\Omega(w)) = w$.*

Demostración. Ver por ejemplo [MS15, lema 2.1.15, p.54]. □

El conjunto de los elementos de $\mathbb{K}$ con valor no negativo

$$R_\nu := \{c \in \mathbb{K} : \nu(c) \geq 0\}, \tag{2.12}$$

es un anillo de valoración asociada a $(\mathbb{K}, \nu)$ con ideal maximal

$$\mathfrak{m}_\nu := \{c \in \mathbb{K} : \nu(c) > 0\}.$$

El anillo cociente

$$K := R_\nu / \mathfrak{m}_\nu,$$

es un campo que se llama el **campo residual**.

Ejemplo 2.21. Consideremos el campo de series de potencias $\mathbb{K}((t))$. El orden definido en (2.7) es una valoración en este campo.

El anillo de series de potencias $\mathbb{K}[[t]]$ se puede escribir de la forma:

$$\mathbb{K}[[t]] = \{\phi(t) \in \mathbb{K}((t)) \mid \nu(\phi) \geq 0\},$$

que es exactamente el anillo de valoración asociada a $(\mathbb{K}((t)),\nu)$. Su ideal maximal es:

$$\mathfrak{m}_\nu = \{\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \mid c_0 = 0\}.$$

y el campo residual es el campo $\mathbb{K}$.

Ejemplo 2.22. Consideremos $\mathbb{K}((t))$ el campo de series de potencias. La aplicación canónica

$$\begin{aligned}\Omega:\quad \Gamma_\nu &\to \mathbb{K}((t))^* \\ w &\mapsto t^w,\end{aligned}$$

es una escisión.

Ejemplo 2.23. Consideremos el campo de números racionales, para p número primo definimos la valoración

$$\nu_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

dada por $\nu_p(q) = k$ para $q = p^k a/b$, donde p no divide ni a ni b. Se dice que ν_p es la valoración p-ádica.

Por ejemplo cuando p=3 tenemos

$$\nu_3(2/9) = -2.$$

El anillo de valoraciones es

$$R_{\nu_p} = \{c/d \mid c, d \in \mathbb{Z}, p \nmid d\},$$

el ideal maximal es

$$\mathfrak{m}_{\nu_p} = \{c/d \mid c, d \in \mathbb{Z}, p \mid c, p \nmid d\}.$$

El campo residual $R_{\nu_p}/\mathfrak{m}_{\nu_p}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. En efecto, consideremos el homomorfismo f dado por

$$\begin{array}{cccc} f: & R_{\nu_p}: & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p \\ & c/d & \mapsto & [c][d]^{-1} \end{array}$$

donde para cada $a \in \mathbb{Z}$, $[a]$ es la clase de congruencia en $\mathbb{Z}_p$.

El núcleo de f es $\mathfrak{m}_{\nu_p}$ y por el teorema de isomorfía tenemos:

$$K = R_{\nu_p}/\mathfrak{m}_{\nu_p} \cong \mathbb{Z}_p.$$

Ejemplo 2.24. Sea $\mathbb{K}\{\{t\}\}$ el campo de series de Puiseux, el orden definido en (2.9) es una valoración en este campo. El anillo de valoración en (2.12) es

$$R_\nu := \{c(t) \in \mathbb{K}\{\{t\}\} \mid ord\,(c(t)) \geq 0\}, \tag{2.13}$$

el ideal maximal es

$$\mathfrak{m}_\nu := \{c(t) \in \mathbb{K}\{\{t\}\} \mid ord\,(c(t)) > 0\},$$

el campo residual es el campo $\mathbb{K}$.

Sea $(\mathbb{K}, \nu)$ un campo valorado. La valoración inducida sobre $(\mathbb{K})^n$ es:

$$\begin{array}{cccc} \nu : & (\mathbb{K})^n & \longrightarrow & (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^n \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & (\nu(a_1), \ldots, \nu(a_n)). \end{array}$$

2.8. Homogeneización

Sea $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio. El grado de f es

$$d = \max_{\alpha \in \Lambda} \{\mid \alpha \mid \quad \mid c_\alpha \neq 0\},$$

donde $\mid \alpha \mid = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i$.

Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio de grado d. Se dice que f es un **polinomio homogéneo** de grado d si cada término de f tiene grado d.

Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Se dice que I es un **ideal homogéneo** si cada elemento de I es suma de un número finito de elementos homogéneos que están en I.

Sea $f = \Sigma c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio de grado d. La **homogeneización** de f es el polinomio:

$$\widehat{f} := \Sigma c_\alpha x_0^{d - |\alpha|} x^\alpha \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Ejemplo 2.25. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de potencias, sea $f(x) = tx_1^3 + (t^2 + 1)x_1x_2 - x_1^4x_3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. El grado de f es $d = 5$ y la homogeneización de f es el polinomio

$$\widehat{f} = tx_0^2x_1^3 + (t^2 + 1)x_0^3x_1x_2 - x_1^4x_3.$$

Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, la **homogeneización de** I es el ideal generado por la homogeneización de sus elementos,

$$I^h := < \widehat{f}, f \in I > \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

A esta valoración inducida la notamos también por ν por abuso de notación.

Capítulo 3

Conceptos básicos de geometría tropical

En álgebra tropical, la suma de dos números es su mínimo y el producto de dos números es su suma. Esta estructura algebraica es conocida como el semianillo tropical. La geometría algebraica tropical es la geometría algebraica sobre el semianillo tropical.

Los orígenes de la geometría algebraica se encuentran en el estudio de los ceros de conjuntos de polinomios. Estos objetos son variedades algebraicas como por ejemplo curvas planas y superficies en el espacio tri-dimensional. Tiene sentido definir polinomios y funciones racionales sobre el semianillo tropical. Estas funciones son lineales a trozos. Las variedades algebraicas también se pueden definir en el entorno tropical. Son ahora subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que se componen de poliedros convexos. Por lo tanto, la geometría algebraica tropical es una versión lineal a trozos de la geometría algebraica.

Los resultados de este capítulo se pueden consultar en el libro 'Introduction to tropical geometry' by D.Maclagan, B.Sturmfels [MS15] y en [Stu02], [SS04], [EKL06], [JMM08],[IMS09], [Aro10a], [Aro10b], [ABF13], [BIMS15].

3.1. Semi-anillo Tropical

El **semi-anillo tropical** es el conjunto $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con:

1. La operación $\oplus$ llamada la **adición tropical**,

$$x \oplus y := \min\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{T}.$$

2. La operación $\odot$ llamada la **multiplicación tropical**,

$$x \odot y := x + y, \forall x, y \in \mathbb{T}.$$

Dado $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos $x^{\odot a} = \overbrace{x \odot \cdots \odot x}^{a\ veces} = ax$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tenemos

$$x^{\odot \alpha} = x_1^{\odot \alpha_1} \odot \cdots \odot x_n^{\odot \alpha_n} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{3.1}$$

$$x^{\odot(\alpha+\beta)} = x_1^{\odot(\alpha_1+\beta_1)} \odot \cdots \odot x_n^{\odot(\alpha_n+\beta_n)} = (\alpha_1+\beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n)x_n = x^{\odot\alpha} \odot x^{\odot\beta}.$$

Cuando no cree confusión escribiremos x^α en lugar de $x^{\odot\alpha}$.

Un **polinomio tropical en n variables** es una expresión de la forma

$$P(x) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} m_\alpha \odot x^{\odot\alpha} \tag{3.2}$$

donde x representa las variables $(x_1, \ldots, x_n)$, $m_\alpha \in \mathbb{T}$, $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{Z}^n$, $\sharp(\mathbf{\Lambda}) < \infty$.

El polinomio tropical en (3.2) induce una aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha \odot w^{\odot\alpha}, \end{array}$$

Esta aplicación es lineal a trozos pues por (3.1), se puede escribir de la forma

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & \text{mín}_{\alpha\in\Lambda}\{m_\alpha + < w, \alpha >\}, \end{array}$$

donde $< \alpha, w >= \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$.

Ejemplo 3.1. Consideremos los polinomios tropicales siguientes:

1. $P(x) = 1 \oplus (1 \odot x)$ es un polinomio tropical que induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{mín}\{x+1, 1\}. \end{array}$$

Por ejemplo tenemos $P(-2) = \text{mín}\{-1, 1\} = -1$. Para graficar esta función dibujamos dos líneas en el plano de coordenadas (x_1, x_2),

$$x_2 = x_1 + 1, x_2 = 1,$$

el valor de $p(x)$ es el mínimo x_2 tal que (x_1, x_2) pertenece a alguna de estas líneas. El grafico de $P(x)$ es el dibujo (1).

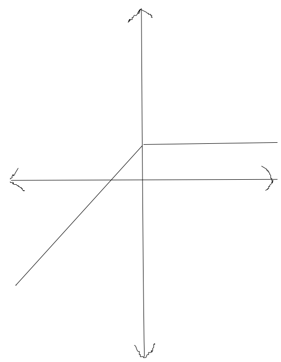
2. $P(x) = (3 \odot x^2) \oplus (2 \odot x) \oplus 5$ es un polinomio tropical que induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{mín}\{3+2x, 2+x, 5\}. \end{array}$$

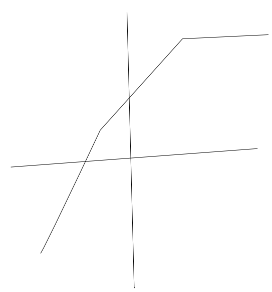
Para graficar esta función dibujamos tres líneas en el plano de coordenados (x_1, x_2),

$$x_2 = 2x_1 + 3, x_2 = 2 + x_1, x_2 = 5,$$

el valor de $p(x)$ es el mínimo x_2 tal que (x_1, x_2) pertenece a alguna de estas líneas. El gráfico de $P(x)$ es el dibujo (2).



(1)



(2)

3. $P(x_1, x_2) = (4 \odot x_1) \oplus (3 \odot x_2) \oplus 1$ es un polinomio lineal tropical , que induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{mín}\{4 + x_1, 3 + x_2, 1\}, \end{array}$$

Para graficar esta función dibujamos tres planos en el espacio de coordenadas (x_1, x_2, x_2),

$$x_3 = x_1 + 4, x_3 = 3 + x_2, x_3 = 1,$$

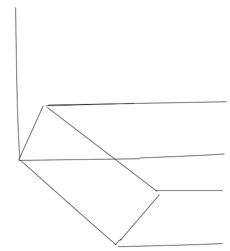
el valor de $p(x)$ es el mínimo x_3 tal que (x_1, x_2, x_3) pertenece a alguna de estos planos. El gráfico de $P(x)$ es el dibujo (3).

Sea $P(x)$ el polinomio tropical en (3.2). La **variedad asociada a** P es el lugar no linealidad del grafo P, es decir,

$$V(P) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbf{\Lambda}, \alpha \neq \beta, \quad P(x) = m_\alpha \odot x^\alpha = m_\beta \odot x^\beta \right\}. \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.2. 1. Consideremos el polinomio tropical $P(x) = 1 \oplus (x \odot 1)$, la variedad asociada a P es :

$$\mathsf{V}(P) = \{0\}.$$



(3)

2. Consideremos el polinomio tropical $P(x) = (3 \odot x^2) \oplus (2 \odot x) \oplus 5$, la variedad asociada a P es:

$$\mathsf{V}(P) = \{-1, 3\}.$$

3. Consideremos el polinomio tropical $P(x_1, x_2) = x_1^{-1} \oplus x_2 \oplus 1$, la variedad asociada a P es:

$$\mathsf{V}(P) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -x_1 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1 \leq -x_1\} \\ \cup\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = -x_1 \leq x_2\}.$$

El conjunto de polinomios tropicales es un semianillo. Denotaremos por $\mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$.

3.2. Tropicalización de un polinomio

En lo que sigue, vamos a trabajar con un campo valorado $(\mathbb{K}, \nu)$.

Sea $f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$, donde $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{Z}^n, \sharp(\Lambda) < \infty$. La **tropicalización** de $f(x)$ es el polinomio tropical

$$trop(f) := \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \nu(a_\alpha) \odot x^\alpha.$$

que induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} trop(f): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \min_{\alpha \in \Lambda}\{\nu(a_\alpha) + < \alpha, x >\}. \end{array}$$

Ejemplo 3.3. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de Puiseux con coeficientes complejos, sea $f(x) = (\frac{t^2}{t^4+t^3})x_1^3 - \frac{1}{t^2}x_2^{-2} + t^2 - 2t^5 \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$, la tropicalización de f es

$$trop(f) = \Big(\nu(\tfrac{t^2}{1+t^3}) \odot x_1^3\Big) \oplus \big(\nu(\tfrac{1}{t^2}) \odot x_2^{-2}\big) \oplus \nu(t^2 - 2t^5) = \\ \big(-1 \odot x_1^3\big) \oplus \big(-2 \odot x_2^{-2}\big) \oplus (2),$$

que induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} trop(f): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{mín}_{\alpha\in\Lambda}\{-1+3x_1,-2-2x_2,2\}, \end{array}$$

por ejemplo cuando $x=(1,2)$ tenemos $trop(f)(x)=-6$.

Lema 3.4. *Sean $f,g\in\mathbb{K}[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm n}]$. Tenemos*

$$trop(fg)(w)=trop(f)(w)\odot trop(g)(w).$$

Demostración. Podemos escribir los polinomios f y g de la forma

$$f(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda}a_\alpha x^\alpha,\ g(x)=\sum_{\beta\in\Lambda'}b_\beta x^\beta.$$

Tenemos

$$fg=\sum_{\delta\in\Lambda+\Lambda'}\sum_{\delta=\alpha+\beta}a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta}.$$

Sea $w\in\Gamma_\nu^n$. Tenemos

$$trop(fg)(w)=\text{mín}_{\delta\in\Lambda+\Lambda'}\left\{\text{mín}_{\substack{\alpha+\beta=\delta\\ \alpha\in\Lambda,\beta\in\Lambda'}}\{\nu(a_\alpha b_\beta)+\langle w,\alpha+\beta\rangle\}\right\}=$$
$$\text{mín}_{\delta\in\Lambda+\Lambda'}\left\{\text{mín}_{\substack{\alpha+\beta=\delta\\ \alpha\in\Lambda,\beta\in\Lambda'}}\{\nu(a_\alpha)+\nu(b_\beta)+\langle w,\alpha\rangle+\langle w,\beta\rangle\}\right\}.$$

Por otro lado tenemos

$$trop(f)(w)+trop(g)(w)=\text{mín}_{\alpha\in\Lambda}\{\nu(a_\alpha)+\langle w,\alpha\rangle\}+\text{mín}_{\beta\in\Lambda'}\{\nu(b_\beta)+\langle w,\beta\rangle\}=$$
$$\text{mín}_{\alpha\in\Lambda}\{\nu(a_\alpha)+\langle w,\alpha\rangle+\text{mín}_{\beta\in\Lambda'}\{\nu(b_\beta)+\langle w,\beta\rangle\}\}=$$
$$\text{mín}_{\alpha\in\Lambda}\,\text{mín}_{\beta\in\Lambda'}\{\nu(a_\alpha)+\langle w,\alpha\rangle+\nu(b_\beta)+\langle w,\beta\rangle\}=$$
$$\text{mín}_{\delta\in\Lambda+\Lambda'}\left\{\text{mín}_{\substack{\alpha+\beta=\delta\\ \alpha\in\Lambda,\beta\in\Lambda'}}\{\nu(a_\alpha)+\nu(b_\beta)+\langle w,\alpha\rangle+\langle w,\beta\rangle\}\right\}.$$

□

Sea $I\subset\mathbb{K}[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm n}]$. La **tropicalización de** I es el conjunto de polinomios tropicales:

$$trop(I):=\{trop(f)\mid f\in I\}.$$

Sea $(\mathbb{K},\nu)$ un campo valorado. Supongamos que el grupo de valores Γ_ν es denso en $\mathbb{R}$. Supongamos que existe una escisión $\Phi:\Gamma_\nu\to\mathbb{K}^*$ con $\Phi(\zeta)=t^\zeta$ y $t\in\mathbb{K}^*$ y $\nu(t)=1$. En esta sección introduciremos el concepto de parte $w-$inicial de un polinomio.

Lema 3.5. *Sea $f(x)=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha\in\mathbb{K}[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm1}]$, sea $w=(w_1,\ldots,w_n)\in(\Gamma_\nu)^n$. Entonces el polinomio*

$$f_w(x)=t^{-trop(f)(w)}f(t^{w_1}x_1,\ldots,t^{w_n}x_n),$$

está en el anillo $R_\nu[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm1}]$ de $(\mathbb{K},\nu)$, donde R_ν es el anillo local. Es decir, todos los coeficientes de $P_w(x)$ tienen valor mayor o igual a cero.

Demostración. Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned}
&f_w(x) = t^{-trop(f)(w)} f(t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n)\\
&= t^{-trop(f)(w)} \textstyle\sum_\alpha c_\alpha (t^{w_1}x_1)^{\alpha_1} \cdots (t^{w_n}x_n)^{\alpha_n}\\
&= t^{-trop(f)(w)} \textstyle\sum_\alpha c_\alpha (t^{w_1\alpha_1+\cdots+w_n\alpha_n}) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\\
&= \textstyle\sum_\alpha c_\alpha t^{-trop(f)(w)+<\alpha,w>} x^\alpha.
\end{aligned}$$

Para cada α tenemos

$$trop(f)(w) \leq < \alpha, w > +\nu(c_\alpha),$$

entonces la valoración del coeficiente $c_\alpha t^{-trop(f)(w)+<\alpha,w>}$ es

$$\begin{aligned}
&\nu(c_\alpha t^{-trop(f)(w)+<\alpha,w>}) = \nu(t^{-trop(f)(w)+<\alpha,w>}) + \nu(c_\alpha) =\\
&-trop(f)(w) + < \alpha, w > +\nu(c_\alpha) \geq -\nu(c_\alpha) + \nu(c_\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes de $f_w(x)$ están en el anillo local R_ν, por lo tanto

$$f_w(x) \in R_\nu[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}].$$

□

Sea $f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in R_\nu[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, definimos

$$\overline{f} = \sum_\alpha \overline{c_\alpha} x^\alpha,$$

donde $\overline{c_\alpha}$ denota la clase de c_α en el campo residual. Así

$$\overline{f} \in K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}],$$

donde K es el campo residual.

Lema 3.6. *Sea $f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, sea $w \in (\Gamma_\nu)^n$ entonces*

$$\overline{f_w(x)} \neq 0.$$

Demostración. Por la demostración del lema 3.5 tenemos

$$\overline{f_w(x)} = \sum_\alpha c_\alpha t^{-trop(f)(w)+<\alpha,w>} x^\alpha,$$

el valor de algunos coeficientes son cero, pues $\exists \beta$ tal que

$$trop(f)(w) = \nu(c_\beta) + < \beta, w > .$$

Entonces $t^{-\nu(c_\alpha)} c_\alpha \in R_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$, por lo tanto

$$\overline{t^{-\nu(c_\beta)} c_\beta} \in K$$

donde K es el campo residual.

□

Sea $f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, dado $w = (w_1, \ldots, w_n) \in (\Gamma_\nu)^n$, la parte $w-$**inicial de** f es

$$in_w(f) := \overline{t^{-trop(f)(w)} f(t^{w_0}x_0, \ldots, t^{w_n}x_n)} = \overline{t^{-trop(f)(w)} \sum_\alpha c_\alpha t^{\alpha.w} x^\alpha}$$
$$= \sum_{trop(f)(w)=\nu(c_\alpha)+w.\alpha} \overline{t^{-\nu(c_\alpha)} c_\alpha} x^\alpha,$$

donde $\overline{a}$ denota la imagen de a en el campo residual R_ν. La definición de parte $w-$inicial depende de la escisión elegida.

Ejemplo 3.7. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de Puiseux con coeficientes complejos, sea $f(x) = (t^3 - t^4)x_1 + (t^2 - t)x_2 + x_3 + t^3 - t^5 \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}]$, la tropicalización de f es

$$trop(f) = (3 \odot x_1) \oplus (1 \odot x_2) \oplus x_3 \oplus 3,$$

sea $w = (0, 3, 5) \in (\Gamma_\nu)^3$ tenemos $trop(f)(w) = 3$, entonces la parte $w-$inicial de f con la escisión canónica (ejemplo2.22) es

$$in_w(f) = \overline{t^{-3}\left((t^3 - t^4)\right)}x_1 + \overline{t^{-3}(t^3 - t^5)} = \overline{(1-t)}x_1 + \overline{1 - t^2} = x_1 + 1.$$

Consideremos la escisión $\Phi(\zeta) = (3t)^\zeta$ la parte $w-$inicial de f con esta escisión es

$$in_w(f) = \overline{(3t)^{-3}(t^3 - t^4)}x_1 + \overline{(3t)^{-3}(t^3 - t^5)} = \frac{1}{27}\left(\overline{(1-t)}x_1 + \overline{1 - t^2}\right) = \frac{1}{27}(x_1 + 1).$$

Consideremos la escisión $\Phi(\zeta) = (t + t^2)^\zeta$, la parte $w-$inicial de f con esta escisión es

$$in_w(f) = \overline{(t + t^2)^{-3}(t^3 - t^4)}x_1 + \overline{(t + t^2)^{-3}(t^3 - t^5)} = \left(\overline{\frac{1-t}{t+1}}x_1 + \overline{1 - t}\right) = 1.x_1 + 1.$$

Cuando trabajamos con el campo de series de Puiseux utilizamos la escisión canónica

$$\Phi : \zeta \to t^\zeta.$$

Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal, el **ideal** $w-$**inicial asociado a** I es

$$in_w(I) := \langle in_w(f), f \in I \rangle.$$

Ejemplo 3.8. Sea $\mathbb{Q}$ el campo de los números racionales con la valoración 2-adica, sea $I =< x_1 + 2x_2, x_2 + 4x_3 >\subseteq \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}]$, tenemos las tropicalizaciones

$$trop(x_1 + 2x_2) = x_1 \oplus (1 \odot x_2), \quad trop(x_2 + 4x_3) = x_2 \oplus (2 \odot x_3),$$

sea $w = (1, 1, 1) \in (\Gamma_\nu)^3$, tenemos

$$trop(x_1 + 2x_2)(w) = 1, trop(x_2 + 4x_3)(w) = 1,$$

las partes $w-$iniciales de los generadores de I son

$$in_w(x_1 + 2x_2) = x_1, in_w(x_2 + 4x_3) = x_2,$$

el ideal $w-$inicial asociada a I contiene

$$\langle x_1, x_2 \rangle \subseteq in_w(I).$$

De hecho para igualdad tiene que usar el teoría de base de Grobner.

Lema 3.9. *Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal, sea $w \in \Gamma_\nu^n$. Si $g \in in_w(I)$ entonces $g = in_w(f)$ para algún $f \in I$.*

Demostración. Ver por ejemplo [MS15, lemma 2.6.3, p.83]. $\square$

3.3. Hipersuperficies tropicales

Sea $f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm n}]$. La **hipersuperficie tropical** asociada a f es la variedad asociada a la tropicalización de f. Es decir

$$V_T(f) := \mathsf{V}(trop(f)).$$

Ejemplo 3.10. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de Puiseux con coeficientes complejos.

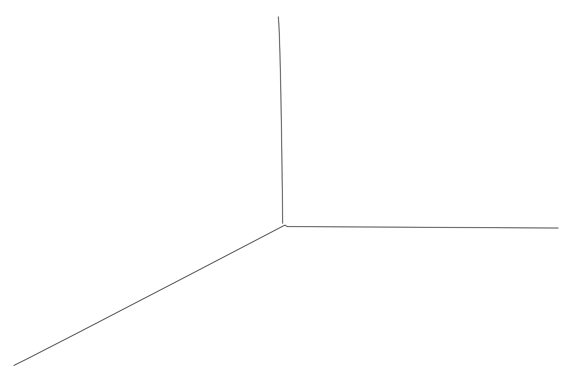
1. Sea $f(x_1, x_2) = tx_1 + t^2 x_2 + t^3 + t^5 \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$. La tropicalización de f es:

$$trop(f) = (1 \odot x_1) \oplus (2 \odot x_2) \oplus 3,$$

la hipersuperficie tropical asociada a f es el conjunto

$$V_T(f) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x_1 = 2 + x_2 \leq 3\right\} \cup$$
$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 1 = 3 \leq x_2 + 2\right\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 + x_2 = 3 \leq x_1 + 1\right\}.$$

Ver la figura (1).



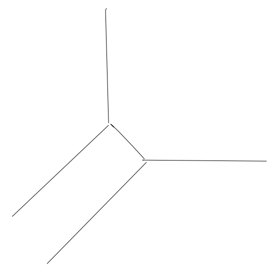
(1)

2. Sea $f(x_1, x_2) = tx_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 8 \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$, la tropicalización de f es:

$$trop(f) = (1 \odot 2x_1) \oplus (x_1 \odot x_2) \oplus 2x_2 \oplus 0,$$

la hipersuperficie tropical asociada a f es:

$$\begin{aligned} &V_T(f) = \\ &\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x_1 = x_1 + x_2 \leq 2x_2, 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x_1 = 2x_2 \leq x_1 + x_2, 0\} \cup \\ &\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x_1 = 0 \leq x_1 + x_2, 2x_2\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 2x_2 \leq 1 + 2x_1, 0\} \cup \\ &\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0 \leq 2x_2, 1 + 2x_1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_2 = 0 \leq 1 + 2x_1, x_1 + x_2\}. \end{aligned}$$



(2)

Ver la figura (2).

3. Sea $f(x_1, x_2) = t^3x_1^2 + x_1x_2 + tx_2^2 + tx_1 + x_2 + 1 \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$, la tropicalización de f es:

$$trop(f) = (3 \odot 2x_1) \oplus (x_1 \odot x_2) \oplus (1 + 2x_2) \oplus (1 + x_1) \oplus x_2 \oplus 0,$$

la hipersuperficie tropical asociada a f es:

$$\begin{array}{l}
V_T(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 + 2x_1 = x_1 + x_2 \leq 1 + 2x_2, 1 + x_1, x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 + 2x_1 = 1 + 2x_2 \leq x_1 + x_2, 1 + x_1, x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 + 2x_1 = 1 + x_1 \leq x_1 + x_2, 1 + 2x_2, x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 + 2x_1 = x_2 \leq x_1 + x_2, 1 + 2x_2, 1 + x_1, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 + 2x_1 = 0 \leq x_1 + x_2, 1 + 2x_2, 1 + x_1, x_2\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1 + 2x_2 \leq 3 + 2x_1, 1 + x_1, x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1 + x_1 \leq 3 + 2x_1, 1 + 2x_2, x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = x_2 \leq 3 + 2x_1, 1 + 2x_2, 1 + x_1, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0 \leq 3 + 2x_1, 1 + 2x_2, 1 + x_1, x_2\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x_2 = 1 + x_1 \leq 3 + 2x_1, x_1 + x_2, x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x_2 = x_2 \leq 3 + 2x_1, x_1 + x_2, 1 + x_1, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2x_2 = 0 \leq 3 + 2x_1, x_1 + x_2, 1 + x_1, x_2\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x_1 = x_2 \leq 3 + 2x_1, x_1 + x_2, 1 + 2x_2, 0\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x_1 = 0 \leq 3 + 2x_1, x_1 + x_2, 1 + 2x_2, x_2\} \cup \\
\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \leq 3 + 2x_1, x_1 + x_2, 1 + 2x_2, 1 + x_1\}.
\end{array}$$

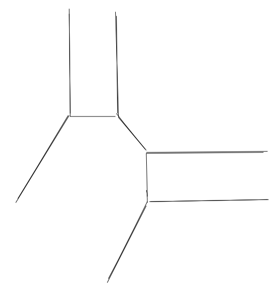
Ver la figura (3).

Ejemplo 3.11. Sea $\mathbb{Q}$ el campo de números racionales con la valoración 2-adica, sea $f = 2 + 3x + 4x^2 + (1/4)x^4 \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}]$. La tropicalización de f es:

$$trop(f) = 1 \oplus x \oplus (2 \odot x^2) \oplus (-2 \odot x^4).$$

La hipersuperficie tropical asociada a f es:

$$V_T(f) = \{2/3, 1\}.$$



(3)

Sea $f(x) \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio. Consideremos la hipersuperficie asociada a f

$$V(f) = \{x \in (\mathbb{K}^\star)^n \mid f(x) = 0\},$$

vamos a relacionar la hipersuperficie algebraica con la hipersuperficie tropical. Para esto consideremos el operador

$$\begin{array}{cccc} trop(V(f)) : & \mathbb{K}^n & \to & \Gamma^n \\ & (\delta_1, \ldots, \delta_n) & \mapsto & (\nu(\delta_1), \ldots, \nu(\delta_n)). \end{array} \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.12. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de Puiseux con coeficientes complejos, sea $f = (t+3)x + t^2 \in \mathbb{K}[x]$. La hipersuperficie asociada a f es el punto

$$V(f) = \{\frac{-t^2}{t+3}\}.$$

Tenemos

$$trop(V(f)) = \{\nu(\frac{-t^2}{t+3})\} = \{1\}.$$

Teorema 3.13. *(Kapranov) Sea $(\mathbb{K}, \nu)$ un campo valorado algebraicamente cerrado con característica cero. Sea $f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, los siguientes conjuntos son iguales.*

1. *La hipersuperficie tropical $V_T(f)$ en $\mathbb{R}^n$,*

2. *La clausura de conjunto $A = \{w \in (\Gamma_\nu)^n \mid in_w(f) \text{ no es un monomio } \}$ en $\mathbb{R}^n$,*

3. *La clasura de $trop(V(f))$ en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ver por ejemplo [EKL06]. □

3.4. Variedades tropicales

Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal. La **variedad tropical** asociada a I es el conjunto

$$V_T(I) := \mathsf{V}(trop(I)) = \bigcap_{f \in I} V_T(f).$$

Si $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ se tiene que

$$V_T(I) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} V_T(f_i).$$

La contención inversa no es siempre cierta, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de Puiseux con coeficientes complejos, sea $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}]$ el ideal generado por

$$I = \langle t^3 x_1 + 2x_2 - 3x_3, 4x_2 - x_3 \rangle.$$

La hipersuperficie tropical asociada a $f_1 = t^3 x_1 + 2x_2 - 3x_3$ es

$$V_T(f_1) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3 + x_1 = x_2 \leq x_3\right\} \cup \\ \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3 = x_3 \leq x_2\right\} \cup \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 \leq x_1 + 3\right\},$$

y la hipersuperficie tropical asociada a $f_2 = 4x_2 - x_3$ es

$$V_T(f_2) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\right\}.$$

La intersección de estas hipersuperficies tropicales es el conjunto

$$V_T(f_1) \cap V_T(f_2) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 \leq x_1 + 3\right\}.$$

La variedad tropical asociada a I verifica

$$V_T(I) \subset V_T(f_1) \cap V_T(f_2).$$

Consideremos el polinomios $f = 2f_1 - f_2 = 2t^3 x_1 + 5x_3 \in I$. La hipersuperficie tropical asociada a f es

$$V_T(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3 = x_3\right\}.$$

Podemos concluir que

$$V_T(I) \subset V_T(f_1) \cap V_T(f_2) \cap V_T(f) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3 = x_2 = x_3\right\}.$$

Por lo tanto

$$V_T(I) \neq \bigcap_{i=1}^{2} V_T(f_i).$$

Un conjunto de generadores $\tau = \{f_1, \ldots, f_r\}$ de I se llama una **base tropical** de I, si

$$V_T(I) = \bigcap_{i=1}^{r} V_T(f_i).$$

Lema 3.15. *Sea $\tau = \{f_1, \ldots, f_r\}$ una base tropical de I, entonces para cada $w \in (\Gamma_\nu)^n$, el ideal inicial $in_w(I)$ contiene una unidad si y solo si $in_w(\tau) = \{in_w(f), f \in \tau\}$ contiene una unidad.*

Demostración. Vamos a probar que para cada $w \in \mathbb{R}^n$, si $in_w(I)$ contiene una unidad, entonces $in_w(\tau)$ contiene una unidad. Supongamos que $in_w(I)$ contiene una unidad, entonces existe un polinomio $f \in I$, tal que $in_w(f)$ es un monomio. Por el teorema 3.13 $w \notin V_T(I) = \bigcap_{i=1}^{r} V_T(f_i)$, entonces $\exists i, 1 \leq i \leq r$ tal que $w \notin V_T(f_i)$, por lo tanto $in_w(\tau)$ tiene unidad. □

Teorema 3.16. *Cada ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ tiene una base tropical.*

Demostración. Ver [RGST05]. □

Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal, para relacionar la variedad algebraica asociada a I con la variedad tropical asociada a I definimos el conjunto

$$trop(V(I)) := \{(\nu(\delta_1), \ldots, \nu(\delta_n)) \mid (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in V(I)\}.$$

Ejemplo 3.17. Sea $\mathbb{K}$ campo de series de potencias. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ el ideal generado por

$$I = \langle x_1 + x_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

La variedad asociada a I es

$$V(I) = \{(a, -a), (b, b) \mid a, b \in \mathbb{K}^\star\},$$

tenemos el conjunto

$$trop(V(I)) := \{(\nu(a), \nu(-a)), (\nu(b), \nu(b)) \mid a, b \in \mathbb{K}^\star\} = \{(r, -r), (s, s) \mid r, s \in \mathbb{Z}\}.$$

El teorema fundamental de la geometría algebraica tropical establece una estrecha relación entre las variedades algebraicas y variedades tropicales.

Teorema 3.18. *(***Teorema Fundamental de geometría tropical** *) Sea $(\mathbb{K}, \nu)$ un campo valorado algebraicamente cerrado con $car(\mathbb{K}) = 0$. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal, entonces los conjuntos siguientes son iguales:*

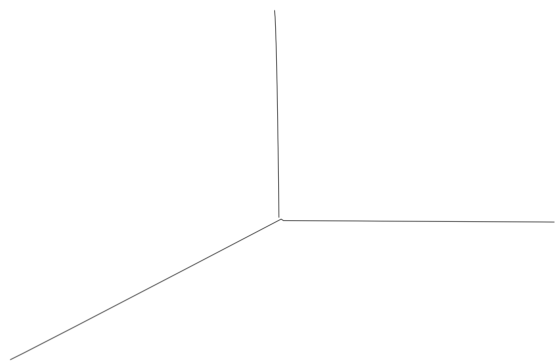
1. *La variedad tropical $V_T(I)$ en $\mathbb{R}^n$.*
2. *La clausura del conjunto $A = \{w \in (\Gamma_{val})^n \mid in_w(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ en $\mathbb{R}^n$.*
3. *La clausura de $trop(V(I))$ en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ver por ejemplo [SS04]. □

Ejemplo 3.19. Sea $\mathbb{K}$ el campo de series de Puiseux con coeficientes complejos, sea $f = 3x_1 + t^2x_2 + 2t \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ y $I = \langle 3x_1 + t^2x_2 + 2t\rangle$ el ideal generado por f. La variedad tropical asociada a I es

$$V_T(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 + 2 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 \leq x_2 + 2\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 + 2 = 1 \leq x_1\}.$$

El grafo de la hipersuperficie tropical es el dibujo (3.19).



(3.19)

La variedad asociada a I es

$$V(I) = \{(-\frac{t^2a + 2t}{3}, a) \in \mathbb{K}^\star \mid a \in \mathbb{K}^\star, a \neq \frac{-2}{t}\}.$$

Agarramos $\rho = (t^2 - \frac{2}{3}t, -3) \in V(I)$ tenemos

$$trop(\rho) = trop(t^2 - \frac{2}{3}t, -3) = (1, 0) \in trop(V(I)).$$

En el grafo podemos ver que $trop(\rho) = (1, 0) \in V_T(trop(f))$, así podemos ver como dice el Teorema 3.18 que

$$trop(V(I)) \subseteq V_T(I).$$

Por la definición tenemos

$$trop(V(I)) = \left\{ \left(\nu(-\frac{t^2a + 2t}{3}), \nu(a) \right) \mid a \in \mathbb{K}^\star, a \neq \frac{-2}{t} \right\},$$

tenemos

$$(\nu(-\frac{t^2a + 2t}{3}), \nu(a)) = \begin{cases} (1, \nu(a)), & \text{si } \nu(t^2a) > 1, \\ (2 + \nu(a), \nu(a)), & \text{si } \nu(t^2a) < 1, \\ (\nu(b), -1), & \text{si } \nu(t^2a) = 1, b = t^2a + 2t. \\ (0, 0), & \text{En todos los demás casos} \end{cases} \tag{3.5}$$

La clausura de la unión de estos conjuntos es, precisamente, $V_T(I)$.
El ideal inicial $in_w(I)$ no es un ideal monomial si:

1. $w = \lambda(1, -1)$,$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$,
2. $w = \lambda(b, b-2)$,$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$, tal que $b \leq 1$,
3. $w = (1, b), (b, -1)$, tal que $b \geq 1$.

La línea tropical $V_T(I)$ es el conjunto de todos los w que verifican una de las condiciones $1, 2, 3$.

Capítulo 4

Álgebra diferencial

Álgebra diferencial fue introducido por Ritt y Kolchin [RR39], [Rit50], [Kol73]. En los capítulos anteriores trabajamos con dos operaciones adición y multiplicación, en este capítulo trabajaremos con tres operaciones adición, multiplicación y derivación.

La mayoría de los resultados de este capítulo se pueden consultar en el libro Álgebra diferencial por Ritt [Rit50], [Kol73].

4.1. Anillo diferencial

Sea R un anillo conmutativo con unidad. Una derivación en R es un mapeo

$$d : R \longrightarrow R,$$

que satisface

1. $d(a+b) = d(a) + d(b), \forall a, b \in R,$
2. $d(ab) = d(a)b + ad(b), \forall a, b \in R.$

Se dice que la pareja (R, d) es un **anillo diferencial**. Se dice que la pareja (R, d) es un **campo diferencial** si R es un campo.

Ejemplo 4.1. Todo anillo conmutativo R con unidad puede convertirse en anillo diferencial con la derivación trivial. La derivación trivial envía cada elemento a cero.

Ejemplo 4.2. Sea $C^\infty(a, b)$ el anillo de las funciones diferenciables con valores reales en el intervalo abierto (a, b). Entonces

$$\begin{array}{rccc} D: & C^\infty(a,b) & \longrightarrow & C^\infty(a,b) \\ & f & \mapsto & f', \end{array}$$

es una derivación. Por lo tanto $C^\infty(a, b)$ tiene estructura de anillo diferencial.

Sea (R, d) un anillo diferencial. Un ideal $I \subset R$ se dice un **ideal diferencial** si es cerrado bajo la derivación.

Sea I un ideal diferencial en el anillo diferencial (R, d). El anillo cociente R/I es un anillo diferencial con operador derivación

$$\begin{array}{rccc} d/I: & R/I & \longrightarrow & R/I \\ & a+I & \mapsto & d(a)+I, \end{array}$$

Sea (R, d) un anillo diferencial, sea $I \subset R$ un ideal. El **ideal diferencial generado por** I es la intersección de todos los ideales diferenciales que contienen a I, lo denotamos por $\langle I\rangle_d$. El ideal diferencial generado por $f_1, \ldots, f_s \in R$ es

$$\langle f_1, \ldots, f_s\rangle_d = \langle f_1, df_1, d^2 f_1, \ldots, f_s, df_s, d^2 f_s, \ldots\rangle,$$

donde d^i es la composición de d consigo mismo i veces.

4.2. Anillo diferencial de series de potencias

Sea $\mathbb{K}$ un campo diferencial. El anillo de series de potencias $\mathbb{K}[[t]]$ con la derivación

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{K}[[t]] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ & \varphi(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_j t^j & \mapsto & d(\varphi(t)) = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_j j t^{j-1}, \end{array}$$

es un anillo diferencial, lo denotamos por $(\mathbb{K}[[t]], d)$.

Sea $\varphi = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_j t^j \in \mathbb{K}[[t]]$. La $k-$esíma derivación de φ es

$$\begin{aligned} d^k\varphi = d^k\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right) &= \sum_{j=k}^{\infty}(j)(j-1)\cdots(j-k+1)a_j t^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty}\frac{j!}{k!}a_j t^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{k!}a_{j+k}t^j. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3. Sea $\mathbb{K}$ un campo, sea $\varphi = t^3 + t^4 + 2t^6 - 5t^8 + t^9 \in \mathbb{K}[[t]]$, la derivación de φ es

$$d(\varphi) = 3t^2 + 4t^3 + 12t^5 - 40t^7 + 9t^8.$$

Cuando tenemos una serie de potencias de la forma $\psi(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{1}{j!}a_j t^j \in \mathbb{K}[[t]]$ tenemos

$$d(\psi) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}ja_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}ja_{(j+1)}t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}a_{(j+1)}t^j,$$

$$d^2(\psi) = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}j(j-1)a_j t^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+2)!}j(j-1)a_{(j+2)}t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}a_{(j+2)}t^j,$$

.

.

.

$$d^k(\psi) = \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!}j(j-1)\cdots(j-k+1)a_j t^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+k)!}j(j-1)\cdots(j-k+1)a_{(j+k)}t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}a_{(j+k)}t^j.$$

En los capítulos siguientes usaremos la biyección siguiente en lugar de la dada en (2.8).

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ & \underline{a} = (a_j)_{j\geq 0} & \mapsto & \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} a_j t^j, \end{array} \tag{4.1}$$

El mapeo ψ tiene la siguiente propiedad:

$$d^k \psi(\underline{a}) = \sum_{j\geq 0} \frac{a_{k+j}}{j!} t^j \tag{4.2}$$

lo que implica

$$d^k \Psi(\underline{a})|_{t=0} = a_k \tag{4.3}$$

y entonces

$$\underline{a} = (\, d^k \psi(\underline{a})\big|_{t=0})_{k\geq 0}. \tag{4.4}$$

4.3. Polinomios diferenciales

Sea x una indeterminada. Consideremos la secuencia infinita

$$x, x', x'', \ldots, x^{(p)}, \ldots.$$

Estos símbolos se van a utilizar para construir los polinomios diferenciales. Cada polinomio diferencial contiene un número finito de estos símbolos. El símbolo x se llama **indeterminado diferencial** y el símbolo $x^{(p)}$ se dice la $p-$ésima derivada de x. Cuando tenemos $n-$indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ denotamos la $j-$ésima derivación de x_i por x_{ij}, podemos decir que x_i es la $0-$ésima derivación de x_i. Sea (R, d) un anillo diferencial, sean $x_1, \ldots, x_n$ indeterminadas. El conjunto de los polinomios con coeficientes en R en las variables $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, j \geq 0\}$ es un anillo que denotamos por

$$R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle. \tag{4.5}$$

La derivación d sobre R se puede extender a una derivación D de $R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ dada por

1. $D(x_{ij}) = x_{i(j+1)}$ para $i = 1, \ldots, n$ y $j \geq 0$,
2. $D(a) = d(a), \forall a \in \mathbb{K}$.

El par $(R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, D)$ es un anillo diferencial llamado el **anillo diferencial de polinomios** en n variables con coeficientes en R.

Los elementos de $R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ se llaman polinomios diferenciales. Un polinomio diferencial $P \in R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ de orden menor o igual que $\mathcal{O}$ se puede escribir de la forma

$$P = \sum_{M\in\Lambda\subseteq\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \psi_M \prod_{i,j} (x_{ij})^{M_{ij}} \tag{4.6}$$

con $\psi_M \in R$, $\sharp(\Lambda)^1 < \infty$, $\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ es el conjunto de las matrices $n \times (\mathcal{O}+1)$ con entradas en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, a las entradas de la matriz M denotamos por M_{ij} y $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \mathcal{O}$.

Ejemplo 4.4. Consideramos el polinomio diferencial de orden 3

$$P(x) = t^2(x_{12})^7 x_{13} x_{20}^4 (x_{23})^5 x_{30} - (1+t)(x_{11})^8 (x_{12})^2 (x_{23}) x_{32} x_{30}^6 (x_{33})^9 \in \mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n\rangle.$$

En este polinomio tenemos $1 \leq i \leq 3$ y $0 \leq j \leq 3$. Podemos escribir las matrices M_1, M_2

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Tenemos los coeficientes $\psi_{M_1} = t^2$ y $\psi_{M_2} = -(t+1)$.

El polinomio diferencial en (4.6) induce una aplicación

$$\begin{array}{cccc} P: & R^n & \longrightarrow & R \\ & (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) & \mapsto & P|_{x_{ij}=d^j\varphi_i}, \end{array} \tag{4.7}$$

donde $P|_{x_{ij}=d^j\varphi_i}$ es el elemento de R obtenido mediante la sustitución de x_{ij} por $d^j\varphi_i$ en el polinomio diferencial P.

Ejemplo 4.5. Sea $P(x)$ el polinomio diferencial en el ejemplo 4.4, sea $\varphi = (2t^4 + t, 5t^2 - t^3, -3 - t + t^5) \in \mathbb{K}[[t]]^3$. Tenemos

$$\begin{gathered} P(\varphi) = P|_{x_{ij}=d^j\varphi_i} = t^2(d^2\varphi_1)^7 d^3\varphi_1 (d^0\varphi_2)^4 (d^3\varphi_2)^5 (d^0\varphi_3) - \\ (1+t)(d^1\varphi_1)^8 (d^2\varphi_1)^2 (d^3\varphi_2)(d^2\varphi_3)(d^0\varphi_3)^6 (d^3\varphi_3)^9 = \\ t^2(24t^2)^7(48t)(5t^2 - t^3)^4(10 - 6t)^5(-3 - t + t^5) - \\ (1+t)(8t^3+1)^8(24t^2)^2(-6)(20t^3)(-3 - t + t^5)^6(60t^2)^9. \end{gathered}$$

Una n-ada $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R^n$ es una **solución de polinomio diferencial** P si $P(\varphi) = 0$.

Lema 4.6. *Sea $P \in R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, sea $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R^n$. Tenemos la igualdad*

$$d^k(P(\varphi)) = \left(D^k P\right)(\varphi), \tag{4.8}$$

Demostración. Sea P un polinomio de la forma (4.6). Sustituimos φ en P. Tenemos

$$P(\varphi) = \sum_{M\in\Lambda} \psi_M \prod_{i,j} (d^j\varphi_i)^{M_{ij}}.$$

[1] $\sharp(\Lambda)$ = Canrdinalidad de Λ

$P(\varphi)$ es un elemento de R. Derivando k veces tenemos

$$d^k(P(\varphi)) = d^k\left(\sum_{M\in\Lambda}\psi_M\prod_{i,j}(d^j\varphi_i)^{M_{ij}}\right) = \sum_{M\in\Lambda}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}d^{k-l}(\psi_M)d^l\left(\prod_{i,j}(d^j\varphi_i)^{M_{ij}}\right) = \sum_{M\in\Lambda}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}d^{k-l}(\psi_M)\sum_{r_{10}+\cdots+r_{n\mathcal{O}}=l}\binom{l}{r_{10},\cdots,r_{n\mathcal{O}}} \prod_{e=1,s=0}^{n,\mathcal{O}}\left(M_{ij}(M_{ij}-1)\cdots(M_{ij}-r_{es}+1)d^{j+r_{es}}(\varphi_i)(d^j(\varphi_i))^{M_{ij}-r_{es}}\right).$$

En el otro lado tenemos

$$D^kP = D^k\left(\sum_{M\in\Lambda}\psi_M\prod_{i,j}(x_{ij})^{M_{ij}}\right) = \sum_{M\in\Lambda}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}d^{k-l}(\psi_M)D^l(\prod_{i,j}(x_{ij})^{M_{ij}}) = \sum_{M\in\Lambda}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}d^{k-l}(\psi_M)\sum_{r_{10}+\cdots+r_{n\mathcal{O}}=l}\binom{l}{r_{10},\cdots,r_{n\mathcal{O}}} \prod_{e=1,s=0}^{n,\mathcal{O}}\left(M_{ij}(M_{ij}-1)\cdots(M_{ij}-r_{es}+1)x_{i(j+r_{es})}(x_{ij})^{M_{ij}-r_{es}}\right).$$

Sustituimos φ en D^kP. Tenemos

$$D^kP(\varphi) = \sum_{M\in\Lambda}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}d^{k-l}(\psi_M)\sum_{r_{10}+\cdots+r_{n\mathcal{O}}=l}\binom{l}{r_{10},\cdots,r_{n\mathcal{O}}} \prod_{e=1,s=0}^{n,\mathcal{O}}\left(M_{ij}(M_{ij}-1)\cdots(M_{ij}-r_{es}+1)d^{j+r_{es}}(\varphi_i)(d^j(\varphi_i))^{M_{ij}-r_{es}}\right).$$

Por lo tanto tenemos la igualdad. □

4.4. Soluciones de polinomios diferenciales

Sea R un anillo diferencial, sea $P \in R\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$. Denotaremos al conjunto de soluciones de P por

$$Sol_R(P) := \{\varphi \in R^n | P(\varphi) = 0\}.$$

Sea $R' \subset R$ un subanillo. La solución de un polinomio diferencial P sobre R' está definida por

$$Sol_{R'}(P) := Sol_R(P) \cap R'.$$

Sea $R \subset R''$ una extensión de anillos. Se puede ver el polinomio diferencial P como elemento de $R''\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$, teniendo sentido definir $Sol_{R''}(P)$. Tenemos

$$Sol_{R'}(P) \subset Sol_R(P) \subset Sol_{R''}(P).$$

Ejemplo 4.7. Sea $P(x) = (x')^2 - t^3 + 2t^2 - 1 \in \mathbb{K}[[t]]\langle x\rangle$. Los elementos del conjunto siguiente son las soluciones del polinomio $P(x)$

$$\left\{at^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{2}{3}} \mid a = \pm 1 \in \mathbb{K}\right\}.$$

De hecho se tiene la igualdad; esto se puede demostrar utilizando el polígono de Newton. Entonces el polinomio P no tiene solución en el anillo de series potencias. Podemos escribir

$$Sol_{\mathbb{K}[[t]]}P = \varnothing.$$

Una **solución de un ideal diferencial** es una n-ada $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R^n$ si $P(\varphi) = 0, \forall P \in I$. Es decir

$$Sol_R(I) := \bigcap_{P \in I} Sol_R(P).$$

Ejemplo 4.8. Sea I el ideal diferencial generado por

$$I = \langle P_1(x) = x' - x, P_2(x) = x'' - 2tx' + x \rangle_d \subset \mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Encontramos las soluciones

$$Sol_{\mathbb{K}[[t]]}(P_1) = \{a_0(1 + \tfrac{t}{1!} + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + \cdots) \mid a_0 \in \mathbb{K}\},$$
$$Sol_{\mathbb{K}[[t]]}(P_2) = \{a_0(1 - \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^2}{2!} - \tfrac{t^4}{4!} + \tfrac{t^6}{6!} \cdots) + a_1(x - \tfrac{t^3}{3!} + \tfrac{t^5}{5!} + \cdots) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{K}\}.$$

Entonces podemos ver la igualdad

$$Sol_{\mathbb{K}[[t]]}(I) = Sol_{\mathbb{K}[[t]]}(P_1) \cap Sol_{\mathbb{K}[[t]]}(P_2).$$

Lema 4.9. *Sea R un anillo diferencial, sea $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_r \rangle_d \subset R\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ un ideal diferencial generada por $f_1, \ldots, f_s$. Tenemos*

$$Sol_R(I) = \bigcap_{i=1}^{r} Sol_R(f_i).$$

Demostración. El ideal I contiene el conjunto $\{f_1, \ldots, f_s\}$, entonces

$$Sol_R(I) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} Sol_R(f_i).$$

Sea $\varphi \in \bigcap_{i=1}^{r} Sol_R(f_i)$, entonces $f_i(\varphi) = 0, \forall i, 1 \leq i \leq r$. Esto implica que $D^k(f_i)(\varphi) = 0, \forall k \geq 0, \forall i, 1 \leq i \leq r$. Sea $g \in I$, podemos escribir

$$g = \sum_{i=1}^{s} g_i h_i,$$

donde $g_i = D^{k_i} f_{l_i}$ con $1 \leq l_i \leq r$ y $k_i \geq 0$, $h_i \in R\langle x_1 \ldots x_n \rangle$.

□

4.5. Base de un ideal diferencial

En este sección trabajamos con campo $\mathbb{K}$ de característica cero.

El siguiente teorema, demostrando por Ritt, es fundamental para el álgebra diferencial ya que es análogo al teorema de los ceros de Hilbert.

Teorema 4.10. *Sea $\mathbb{K}$ un campo diferencial, sean $F_1, \ldots, F_n, G \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ polinomios diferenciales en n variables. Si cada solución del sistema $\{F_1, \ldots, F_n\}$ es una solución de G entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que G^m es combinación linear de $F_1, \ldots, F_n$ con coeficientes en el anillo $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*

Demostración. Ver por ejemplo [Rit50, p.27]. □

Sea $\mathbb{K}$ un campo diferencial, un ideal $I \subset \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ se dice un **ideal perfecto** si, cada vez que una potencia entera positiva de un polinomio diferencial f está contenida en I, f está contenida en I.

Sea Σ un sistema de polinomios diferenciales en $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. La intersección de todos los ideales perfectos que contienen a Σ se llama el **ideal perfecto generado por** Σ y lo denotamos por $\{\Sigma\}$,

$$\{\Sigma\} := \bigcap_{\substack{I \, ideal\ perfecto \\ \Sigma \subset I}} I.$$

Lema 4.11. *Sea $\mathbb{K}$ un campo diferencial, sea $\Phi \subset \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ un subconjunto. Entonces*

$$Sol_{\mathbb{K}}(\{\Phi\}) = Sol_{\mathbb{K}}(\Phi).$$

Demostración. Ya que $\Phi \subset \{\Phi\}$ tenemos

$$Sol_{\mathbb{K}}(\{\Phi\}) \subseteq Sol_{\mathbb{K}}(\Phi).$$

Vamos a probar la otra inclusión. Sea $\varphi \in Sol_{\mathbb{K}}(\Phi)$ entonces $\forall f \in \Phi$ tenemos $f(\Phi) = 0$. Sea $g \in \{\Phi\}$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que

$$g^m = \sum_{i=1}^{s} g_i h_i,$$

donde $g_i = D^k f$ para algún $f \in \Phi$ y $k \geq 0$, $h_i \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \forall i, 1 \leq i \leq s$. Por lo tanto tenemos

$$g^m(\varphi) = \sum_{i=1}^{s} g_i(\varphi) h_i(\varphi) = 0 \Rightarrow g(\varphi) = 0.$$

□

Sea Σ un sistema infinito de polinomios diferenciales en $\mathbb{K}\langle x_1, ..., x_n\rangle$. Sea Φ un subconjunto de Σ. Se dice que Φ es una **base** de Σ si Φ es un subconjunto finito de Σ y el ideal perfecto $\{\Phi\}$ contiene a Σ.

Teorema 4.12. *Sea $\mathbb{K}$ un campo diferencial de característica cero. Cada sistema infinito de polinomios diferenciales en $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ tiene una base.*

Demostración. Ver por ejemplo [Rit50, teorema, p.10]. □

Sean $\mathbb{K}$ un campo diferencial. Sea Σ un sistema de polinomios diferenciales en $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. La **variedad asociada a** Σ es el conjunto

$$\mathsf{V}(\Sigma) := \bigcup_{\substack{\mathbb{F}/\mathbb{K} \\ extensión\ de\ campos}} Sol_{\mathbb{F}}(\Sigma).$$

Corolario 4.13. *Sea $\mathbb{K}$ un campo diferencial de característica cero, sea $\Sigma \subset \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ un sistema infinito de polinomios diferenciales. La variedad asociada a Σ es igual a la variedad asociada a un subconjunto finito de Σ.*

Demostración. Por el teorema 4.12, el sistema Σ tiene una base Φ. Como $\Phi \subset \Sigma$ entonces $\mathsf{V}(\Sigma)$ la variedad asociada a Σ esta contenida en $\mathsf{V}(\Phi)$ la variedad asociada a Φ. Por otro lado, por la definición de base tenemos $\Sigma \subset \{\Phi\}$, entonces tenemos

$$\mathsf{V}(\{\Phi\}) \subset \mathsf{V}(\Sigma).$$

Por el lema 4.11 tenemos

$$\mathsf{V}(\{\Phi\}) = \mathsf{V}(\Phi),$$

por lo tanto tenemos $\mathsf{V}(\Phi) \subset \mathsf{V}(\Sigma)$.

□

Lema 4.14. *Sea R un anillo diferencial y sea $\mathbb{F} = Frac(R)$ el campo de fracciones de R. Sea $I \subset R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ un ideal diferencial, sea I^e la extensión de I en el $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Se tiene que I^e es ideal diferencial de $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.*

Demostración. Consideramos la extensión

$$R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subset \mathbb{F}\langle x_1, ..., x_n\rangle.$$

Por la definición de extensión de ideales tenemos

$$I^e = \left\{\sum y_i a_i \mid a_i \in I, y_i \in \mathbb{F}\langle x_1, ..., x_n\rangle\right\}.$$

Consideramos $b = \sum y_i h(a_i) \in I^e$, la derivación de b es

$$D(b) = D(\sum y_i a_i) = \sum D(y_i)a_i + y_i D(a_i) = \sum D(y_i)a_i + \sum y_i D(a_i),$$

la parte $\sum D(y_i)a_i$ está en $I \subset I^e$ y como I es ideal diferencial entonces $D(a_i) \in I$ y por lo tanto $\sum y_i D(a_i) \in I^e$. □

4.6. Sistema de ecuaciones diferenciales

En este trabajo vamos a concentramos en el estudio de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en el anillo $R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ donde $R = \mathbb{K}[[t]]$.

Ejemplo 4.15. Consideramos el sistema de ecuaciones diferencial siguiente

1. $P_1(x) = tx_{11} + x_{21} - t^2 = 0$,
2. $P_2(x) = (t+1)x_{10} - x_{22}t^2 = 0$.

Las soluciones de este sistema están en $(\mathbb{K}[[t]])^2$.

Capítulo 5

Espacio de arcos

El espacio de arcos fue introducido por Nash en 1968 [Nas95], el estudio de estos espacios fue desarrollado por Kontsevich, Denef y Loeser[DL98], [DL99a], [DL99b], [DL02b], [DL02a]. Espacio de arcos en la geometría algebraica es un herramiento para el estudio de la singularidades . En esta tesis extenderemos los conceptos de espacios de arcos a soluciones de ecuaciones diferenciales. En este capítulo introducimos algunos conceptos que en otros capítulos extendemos. Los resultados de este capítulo se pueden consultar en [BMS13], [Bru09].

5.1. El espacio de arcos de una hipersuperficie

En este capítulo suponemos que $\mathbb{K}$ es un campo de característica cero.

Sea f un polinomio en n variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, sea X la hipersuperficie asociada a f. El **espacio de arcos** de X es el conjunto:

$$X_\infty := \{a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t)) \in (\mathbb{K}[[t]])^n \mid f(a(t)) = 0\},$$

Ejemplo 5.1. Sea $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$, sea X la hipersuperficie asociada a f. Vamos a describir X_∞ el espacio de arcos de X. Agarramos

$$(a_1(t), a_2(t)) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^j, \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}t^j) \in (\mathbb{K}[[t]])^2$$

y sustituimos en $f(x_1, x_2)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
&f(a_1(t), a_2(t)) = (\textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}t^j)^2 - (\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^j)^3 = \\
&(a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + \cdots)^2 - (a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + \cdots)^3 = \\
&\big(a_{20}^2 + (2a_{20}a_{21})t + (a_{21}^2 + 2a_{20}a_{22})t^2 + (2a_{20}a_{23} + 4a_{21}a_{22})t^3 + \cdots\big) - \\
&\big(a_{10}^3 + 3a_{10}^2a_{11}t + (3a_{10}^2a_{12} + 6a_{10}a_{11}^2)t^2 + (3a_{10}^2a_{13} - 12a_{10}a_{11}a_{12} - 6a_{11}^3)t^3 + \cdots\big) = \\
&a_{20}^2 - a_{10}^3 + (2a_{20}a_{21} - 3a_{10}^2)t + (2a_{20}a_{22} + 2a_{21}^2 - 3a_{10}^2a_{12} - 6a_{10}a_{11}^2)t^2 + \\
&(2a_{20}b_3 + 4a_{21}b_2 - 3a_{10}^2a_{13} - 12a_{10}a_{11}a_{12} - 6a_{11}^3)t^3 + \cdots .
\end{aligned}$$

Podemos ver que $f(a_1(t), a_2(t))$ tiene la forma de una serie de potencias en la variable t como $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Expresamos los coeficientes por c_k. Tenemos

$$c_0 = a_{20}^2 - a_{10}^3, c_1 = 2a_{20}a_{21} - 3a_{10}^2, c_2 = 2a_{20}a_{22} + 2a_{21}^2 - 3a_{10}^2 a_{12} - 6a_{10}a_{11}^2,$$
$$c_3 = 2a_{20}a_{23} + 4a_{21}a_{22} - 3a_{10}^2 a_{13} - 12a_{10}a_{11}a_{12} - 6a_{11}^3, \ldots \quad .$$

La 2−ada $(a_1(t), a_2(t)) \in X_\infty$ si y solo si $f(a_1(t), a_2(t)) = 0$ si y solo si los coeficientes c_k son cero, $\forall k \geq 0$ si y solo si

$$a_{20}^2 = a_{10}^3, \quad 2a_{20}a_{21} = 3a_{10}^2, \quad 2a_{20}a_{22} + 2a_{21}^2 - 3a_{10}^2 a_{12} - 6a_{10}a_{11}^2 = 0,$$
$$2a_{20}b_3 + 4a_{21}b_2 - 3a_{10}^2 a_{13} - 12a_{10}a_{11}a_{12} - 6a_{11}^3 = 0, \ldots .$$

Podemos ver los coeficientes $c_k, \forall k \geq 0$ como el valor de unos polinomios

$$\widetilde{F}_k(x) \in \mathbb{K}[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq k]$$

en $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq k}}$. Siendo polinomios

$$\widetilde{F}_0 = x_{20}^2 - x_{10}^3, \widetilde{F}_1 = 2x_{20}x_{21} - 3x_{10}^2, \widetilde{F}_2 = 2x_{20}x_{22} + 2x_{21}^2 - 3x_{10}^2 x_{12} - 6x_{10}x_{11}^2,$$
$$\widetilde{F}_3 = 2x_{20}x_{23} + 4x_{21}x_{22} - 3x_{10}^2 x_{13} - 12x_{10}a_{11}x_{12} - 6x_{11}^3, \ldots .$$

Por lo tanto $(a_1(t), a_2(t)) \in X_\infty$ si y solo si $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq k}}$ es un cero de $\widetilde{F}_k, \forall k \geq 0$.

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente lema.

Lema 5.2. *Dado* $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *y* $a(t) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^j, \ldots, \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}t^j) \in (\mathbb{K}[[t]])^n$, *tenemos*

$$f(a(t)) = \sum_{k \geq 0} c_k t^k, \tag{5.1}$$

con

$$c_k = \widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq k}} \right), \tag{5.2}$$

donde $\widetilde{F}_k$ *son polinomios en las variables* $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k\}$ *y coeficientes en* $\mathbb{K}$.

Demostración. Se puede escribir el polinomio

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha x^\alpha,$$

donde $b_\alpha \in \mathbb{K}$. Sustituimos $a(t)$ en f, tenemos

$$f(a(t)) = \sum_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha (\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^j)^{\alpha_1} \ldots (\sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}t^j)^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha (a_{10})^{\alpha_1} \ldots (a_{n0})^{\alpha_n} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha \left(\sum_{\substack{\alpha_1 l_1+\ldots+\alpha_n l_n = k \\ 0\le l_i\le k}} (a_{1l_1})^{\alpha_1}(a_{2l_2})^{\alpha_1}\ldots(a_{nl_n})^{\alpha_n} \right) t^k + \cdots .$$

Entonces el coeficiente $c_k, \forall k \geq 0$ es

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha \left(\sum_{\substack{\alpha_1 l_1+\ldots+\alpha_n l_n = k \\ 0\le l_i\le k}} (a_{1l_1})^{\alpha_1}(a_{2l_2})^{\alpha_1}\ldots(a_{nl_n})^{\alpha_n} \right).$$

Se puede ver el coeficiente $c_k, \forall k \geq 0$ como el valor del polinomio

$$\widetilde{F}_k(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha \left(\sum_{\substack{\alpha_1 l_1+\ldots+\alpha_n l_n = k \\ 0\le l_i\le k}} (x_{1l_1})^{\alpha_1}(x_{2l_2})^{\alpha_1}\ldots(x_{nl_n})^{\alpha_n} \right),$$

en $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 0\le j\le k}}$. □

Observación 5.3. *Mantenemos los hipótesis en el lema 5.2. Consideramos $X = V(f)$ la variedad asociada a f y X_∞ el espacio de arcos de X. Tenemos $a(t) \in X_\infty$ si y solo si los coeficientes a_{ij} cumplen las ecuaciones $\widetilde{F}_0(x) = 0, \widetilde{F}_1(x) = 0, \ldots$.*

Consideraremos la biyección (ver (4.1))

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\ge 0}})^n & \longrightarrow & (\mathbb{K}[[t]])^n \\ & \underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ j\ge 0}} & \mapsto & \left(\sum_{j\ge 0} \frac{1}{j!} a_{1j} t^j, \ldots, \sum_{j\ge 0} \frac{1}{j!} a_{nj} t^j \right), \end{array} \tag{5.3}$$

Sea $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, sea $\underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ j\ge 0}}$. Tenemos

$$f(\Psi(\underline{a})) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots \tag{5.4}$$

con

$$c_k = F_k\left((a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 0\le j\le k}} \right), \tag{5.5}$$

donde F_k son polinomios en las variables $\{x_{ij} \mid 1 \le i \le n, 0 \le j \le k\}$ y coeficientes en $\mathbb{K}$.

Las familias de $\{\widetilde{F}_k\}_{k\geq 0}$ y $\{F_k\}_{k\geq 0}$ en (5.2) y (5.4) están relacionados por

$$\widetilde{F}(x_{ij}) = F(x_{ij} j!),$$

para ver está relación es suficiente sustituir.

Sea $(\mathbb{K}, d)$ un campo diferencial. Como hemos visto en el capitulo Álgebra diferencial el anillo $\mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ con operador D es un anillo diferencial.

Lema 5.4. *Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y $\underline{a} = (a_{ij}) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})^n$ tenemos*

$$f\left(\Psi(\underline{a})\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j F_0(\widehat{a})}{j!} t^j. \tag{5.6}$$

donde $F_0 = f(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ y $\widehat{a} = (a_{10}, \ldots, a_{n0})$.

Vamos a usar la idea en [Bru09]. Definimos las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ & f & \mapsto & f\left(\Psi(\underline{a})\right), \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon: & \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ & f & \mapsto & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j F_0(\widehat{a})}{j!} t^j. \end{array}$$

Probamos que las aplicaciones Φ y Υ son iguales. Obviamente la aplicación Φ es aditiva y multiplicativa y la aplicación Υ es aditiva. Vamos a ver que Υ es multiplicativa. Para esto elegimos los polinomios $h, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, vamos a demostrar

$$\Upsilon(hg) = \Upsilon(h)\Upsilon(g).$$

Utilizando la regla de Leibniz para los polinomios $H_0 = h(x_{10}, \ldots, x_{1n})$ y $G_0 = g(x_{10}, \ldots, x_{1n})$

$$D^i(H_0 G_0) = \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} D^l H_0 D^{i-1} G_0.$$

Obtenemos

$$\Upsilon(hg) = \sum_i \frac{1}{i!} D^i(H_0 G_0)(\widehat{a}) t^i = \sum_i \sum_{l=0}^{i} \frac{D^l H_0}{l!} \frac{D^{i-1} G_0}{(i-1)!}(\widehat{a}) t^i = \left(\sum_i \frac{D^i H_0}{i!}(\widehat{a}) t^i\right) \left(\sum_i \frac{D^i G_0}{i!}(\widehat{a}) t^i\right).$$

Ya que ambas aplicaciones son aditivas y multiplicativas en sus argumentos, es bastante ver la igualdad en las variables x_i. Tenemos

$$\Phi(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{ij}}{j!} t^j,$$

y

$$\Upsilon(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j x_{i0}(\widehat{a})}{j!} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_{ij}}{j!}(\widehat{a}) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{ij}}{j!} t^j.$$

Podemos ver que $\Phi(x_i)$ y $\Upsilon(x_i)$ son iguales.

Observación 5.5. *Desde (5.6) y (5.5) podemos ver que*

$$F_k\left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq k}}\right) = \frac{D^k f(a_{10}, \ldots, a_{n0})}{k!}.$$

Sea $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El **espacio de m-jets** de la hipersuperficie X es el conjunto:

$$X_m := \{a(t) \in (\mathbb{K}[[t]]/(t)^{m+1})^n \mid f(a(t)) \equiv 0 \mod t^{m+1}\}.$$

Ejemplo 5.6. En el ejemplo 5.1 el espacio de 2-jets de X es :

$$X_2 = \{(\textstyle\sum_{i=0}^{2} a_{1i}t^i, \sum_{i=0}^{2} a_{2i}t^i) \quad | \; a_{20}^2 = a_{10}^3, \quad 2a_{20}a_{21} = 3a_{10}^2,$$
$$2a_{20}a_{22} + 2a_{21}^2 - 3a_{10}^2 a_{12} - 6a_{10}a_{11}^2 = 0\}.$$

5.2. El espacio de arcos de una variedad

Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, sea X la variedad asociada a I. El **espacio de arcos** de X es el conjunto:

$$X_\infty^I := \{a(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in (\mathbb{K}[[t]])^n \mid f(a(t)) = 0, \forall f \in I\}.$$

Ejemplo 5.7. Sea $I = \langle x_1 + x_2 - 2x_3 \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$, sea X la variedad asociada a I. Vamos a describir X_∞^I el espacio de arcos de X. Agarramos

$$(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^i, \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}t^i, \sum_{j=0}^{\infty} a_{3j}t^i) \in (\mathbb{K}[[t]])^3,$$

y sustituimos en $f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3$. Tenemos

$$f(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}t^j - 2\sum_{j=0}^{\infty} a_{3j}t^j =$$
$$a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + \cdots + a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + \cdots - 2(a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + \cdots) =$$
$$a_{10} + a_{20} - 2a_{30} + (a_{11} + a_{21} - 2a_{31})t + (a_{12} + a_{22} - 2a_{32})t^2 +$$
$$(a_{13} + a_{23} - 2a_{33})t^3 + \cdots.$$

Tenemos $(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \in X_\infty^I$ si y solo si $f(a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = 0$ si y solo si sus coeficientes son ceros si y solo si

$$a_{10} = -a_{20} + 2a_{30}, \quad a_{11} = -a_{21} + 2a_{31}, \quad a_{12} = -a_{22} + 2a_{32}, \ldots.$$

Entonces el espacio arcos de X es

$$X_\infty^I = \{(\sum_{j=0}^{\infty}(-a_{2j} + 2a_{3j})t^i, \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}t^i, \sum_{j=0}^{\infty} a_{3j}t^i) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall 1 \leq i \leq 3, j \geq 0\}.$$

Sea $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El **espacio de m-jets** de la variedad $X = V(I)$ es el conjunto

$$X_m^I := \{\overline{a}(t) \in (\mathbb{K}[[t]]/(t)^{m+1})^n \mid f(\overline{a}(t)) \equiv 0 \mod t^{m+1}, \forall f \in I\}.$$

Ejemplo 5.8. En el ejemplo 5.7 el espacio de 3-jets de X es

$$X_m^I = \{(\sum_{j=0}^{3}(-a_{2j}+2a_{3j})t^i, \sum_{j=0}^{3} a_{2j}t^i, \sum_{j=0}^{3} a_{3j}t^i) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall 1 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 3\}.$$

Lema 5.9. *Sea* $a(t) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j}t^j, \ldots, \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}t^j) \in (\mathbb{K}[[t]])^n$*, sea* $\overline{a}(t) = (\sum_{j=0}^{m} a_{1j}t^j, \ldots, \sum_{j=0}^{m} a_{nj}t^j)$ *la clase congruencia de* $a(t)$ *módulo* t^{m+1}*. Tenemos*

$$a(t) \in X_{\infty}^I \quad si \quad solo \quad si \quad \overline{a}(t) \in X_m^I, \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Demostración. Supongamos $\overline{a}(t) \in X_m^I, \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces $\forall f \in I$ tenemos $f(\overline{a}(t)) = 0$. Por el lema 5.2 $f(\overline{a}(t))$ se puede escribir como

$$f(\overline{a}(t)) = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq k}} \right) t^k = 0,$$

donde $\widetilde{F}_k \in \mathbb{K}[x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k]$. Podemos concluir que

$$\widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq k}} \right) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq m \quad y \quad \forall m \geq 0,$$

entonces tenemos

$$f(a(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq k}} \right) t^k = 0, \forall f \in I.$$

Esto implica que $a(t) \in X_{\infty}^I$.

Supongamos $a(t) \in X_{\infty}^I$. Entonces $\forall f \in I$ tenemos $f(a(t)) = 0$. Por el lema 5.2 $f(a(t))$ se puede escribir de la forma

$$f(a(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq k}} \right) t^k = 0,$$

podemos concluir $\widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq k}} \right) = 0, \forall k \geq 0$, entonces tenemos

$$f(\overline{a}(t)) = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{F}_k \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq k}} \right) t^k = 0, \forall m \geq 0, \forall f \in I,$$

por lo tanto $\overline{a}(t) \in X_m^I$. □

Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Por el lema 2.2 existe un conjunto $\{f_1, \ldots, f_s\} \subset I$ tal que

$$I =< f_1, \ldots, f_s > .$$

Utilizando la notación introducida anteriormente escribimos $F_{\ell k}$ para $D^k f_\ell(x_{10}, \ldots, x_{n0})$. La variedad asociada al conjunto $\{F_{\ell k}, 1 \leq \ell \leq s, k \geq 0\}$ es el conjunto:

$$A_\infty = V \left(\{F_{\ell k}\}_{\substack{1\leq \ell\leq s\\ k\geq 0}} \right) \subset \left(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right)^n. \tag{5.7}$$

La variedad asociada al conjunto $\{F_{\ell k}, 1 \leq \ell \leq s, 0 \leq k \leq m\}$ es el conjunto:

$$A_m = V \left(\{F_{\ell k}\}_{\substack{1\leq \ell\leq s\\ 0\leq k\leq m}} \right) \subset \left(\mathbb{K}^{m+1}\right)^n. \tag{5.8}$$

Lema 5.10. *El espacio de arcos de la variedad asociada a I es igual a la imagen de A_∞ por Ψ en (5.3), i.e,*

$$\Psi(A_\infty) = X^I_\infty.$$

Demostración. Sea $a(t) \in \Psi(A_\infty)$. Entonces existe $b = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ j\ge 0}} \in A_\infty$ tal que $\Psi(b) = a(t)$. Tenemos

$$F_{\ell k}(b) = 0, \forall 1 \le \ell \le s, k \ge 0,$$

lo cual implica

$$f_\ell(\Psi(b)) = 0, \forall 1 \le \ell \le s.$$

Por lo tanto $\Psi(b) = a(t) \in X^\infty_I$.

Sea $a(t) = (\sum_{j=0}^\infty b_{1j}t^j, \dots, \sum_{j=0}^\infty b_{nj}t^j) \in X^\infty_I$. Entonces

$$f_\ell(a(t)) = 0, \forall 1 \le \ell \le s$$

esto implica que $b = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ j\ge 0}} \in A_\infty$. Por lo tanto $a(t) = \Psi(b) \in \Psi(A_\infty)$. $\square$

Se puede probar que $\forall m \ge 0$

$$\Psi(A_m) = X^I_m.$$

Observación 5.11. *Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Podemos concluir que la imagen de A_∞ por biyección 5.3 es el espacio de arcos asociado a la variedad $V(I)$ y la imagen de $A_m, \forall m \ge 0$ por la biyección 5.3 es el espacio de $m-jets$ asociado a la variedad $V(I)$.*

Para $m \ge m' \ge 0$, definimos el **morfismo algebraico natural** $\pi_{(m,m')}$

$$\begin{array}{cccc} \pi_{(m,m')}: & \mathbb{K}^{n(m+1)} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n(m'+1)} \\ & (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le m}} & \mapsto & (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le m'}} \end{array} \tag{5.9}$$

que tiene la propiedad

$$\pi_{(m,m')}(A_m) = A_{m'}.$$

Sea $\Lambda = \mathbb{Z}_{\ge 0}$. El sistema $(A_m, \pi_{(m,m')})_{m\ge m'\in\Lambda}$ es un sistema inverso, el límite inverso de este sistema es

$$\Big\{(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ j\ge 0}} \in \prod_{m\ge 0} A_m \mid \quad (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le m'}} = \pi_{(m,m')}(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le m}}\Big\},$$

que es el conjunto A_∞.

Las proyecciones naturales

$$\pi_{(m,m')}: A_m \longrightarrow A_{m'}, \forall m \ge m' \ge 0$$

son sobreyectivas, entones por la proposición 2.13 las proyecciones

$$A_\infty \longrightarrow A_m, \forall m \in \Lambda,$$

son sobreyectivas.

Los conjuntos A_m son variedades algebraicas en $(\mathbb{K})^{n(m+1)}$, los morfismos naturales $\pi_{(m,m')}$ son morfismos regulares, entonces por el lema 2.17 $\forall m \geq m' \geq 0$, los conjuntos

$$\pi_{(m,m')}(A_m),$$

son constructibles.

Lema 5.12. *El conjunto A_∞ no es vacío si y sólo si $\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$ no es vacío.*

Demostración. Para demostrar el lema definimos los conjuntos

$$B_m := \bigcap_{i=m}^{\infty} \pi_{(i,m)}(A_i).$$

Consideremos las proyecciones naturales

$$\pi_{(m,m')} : B_m \longrightarrow B_{m'}, \forall m \geq m' \in \Lambda.$$

Sea $\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El sistema $(B_m, \pi_{(m,m')})_{m \geq m' \in \Lambda}$ es un sistema inverso, su límite inverso es A_∞. Por la proposición 2.13 la proyección

$$\pi_0 : A_\infty \longrightarrow B_0 = \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i),$$

es sobreyectiva. Entonces para cada $\underline{b} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$ existe $\underline{a} \in A_\infty$ tal que $\pi_0(\underline{a}) = \underline{b}$.

Sea $\underline{a} \in A_\infty$. Entonces $\pi_0(\underline{a}) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$. □

Proposición 5.13. *Sea $\mathbb{K}$ un campo no numerable. El conjunto $A_\infty \subset \mathbb{K}^{n(\mathbb{Z}_{\geq 0})}$ no es vacío si y solo si $A_m \subset \mathbb{K}^{n(m+1)}$ no es vacío para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Demostración. Por el Lema 5.12 A_∞ no es vacío si y solo si $\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$ no es vacío, entonces es suficiente probar $\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$ no es vacío si y solo si A_m no es vacío para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Por los resultados anteriores cada $\pi_{(m,0)}(A_m)$ es un conjunto constructible, entonces por la definición podemos escribir de la expresión

$$\pi_{(m,0)}(A_m) = U_{m1} \cup U_{m2} \cup \ldots \cup U_{ms_m},$$

con $U_{mi} = \overline{U_{mi}} \setminus W_{mi}$ para algún conjunto cerrado W_{mi}.

Entonces tenemos

$$\overline{\pi_{(m,0)}(A_m)} \setminus \bigcup_{i=1}^{s_i} W_{mi} \subset \left(\overline{U_{m1}} \setminus W_{m1}\right) \cup \left(\overline{U_{m2}} \setminus W_{m2}\right) \cup \ldots \cup \left(\overline{U_{ms_m}} \setminus W_{ms_m}\right)$$
$$= \pi_{(m,0)}(A_m).$$

Ya que $\mathbb{K}$ es un campo no numerable entonces $Y_m = \bigcup_{i=1}^{s_i} W_{mi}$ es un conjunto cerrado propio de $\overline{\pi_{(m,0)}(A_m)}$ con

$$\overline{\pi_{(m,0)}(A_m)} \setminus Y_m \subset \pi_{(m,0)}(A_m). \tag{5.10}$$

Por otro lado tenemos una secuencia anidada de conjuntos constructibles en $(\mathbb{K})^n$

$$\cdots \subset \pi_{(2,0)}(A_2) \subset \pi_{(1,0)}(A_1) \subset A_0 \subset (\mathbb{K})^n. \tag{5.11}$$

Tomando el cierre en (5.11), tenemos una secuencia anidada de conjuntos cerrados asi que

$$\cdots \subset \overline{\pi_{(2,0)}(A_2)} \subset \overline{\pi_{(1,0)}(A_1)} \subset A_0 \subset (\mathbb{K})^n.$$

Cada secuencia anidada de conjuntos cerrados de $(\mathbb{K})^n$ por el lema 2.3 es estacionaria, es decir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\pi_{(j,0)}(A_j)} = \overline{\pi_{(m,0)}(A_m)}$ para cada $j > m$.

$$\overline{\pi_{(m,0)}(A_m)} \setminus \bigcup_{i=m}^{\infty} Y_i \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i).$$

Podemos concluir que si el conjunto $\overline{\pi_{(m,0)}(A_m)}$ no es vacío para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ entonces por la proposición 2.4, $\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$ no es vacío.

Si $\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_i)$ no es vacío entonces $\pi_{(m,0)}(A_m)$ no es vacío para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Por lo tanto A_m para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ no es vacío. $\square$

Capítulo 6

Geometría diferencial tropical

El Polígono de Newton fue inventado por Newton y reinventado y utilizando por Puiseux en 1850 [Pui50] para estudiar curvas singulares y fue generalizado a polinomios diferenciales por Fine en 1889 [Fin89]. Esta extensión ha dado muchos resultados [Can93, AC01, ACJ03]. Dado que la variedad tropical es dual a una subdivisión del poliedro de Newton, es de esperar que la extensión de conceptos tropicales al caso diferencial produzca nuevos resultados. En este capítulo extendemos algunas herramientas de geometría tropical al caso diferencial. Con estas herramientas en el capitulo 7 demostramos el teorema fundamental de la geometría diferencial tropical respondiendo a una pregunta de Grigoriev [Gri15].

Cuando en la geometría tropical consideramos el operador diferencial surge la geometría diferencial tropical.

6.1. Semi-anillo diferencial tropical

En la geometría diferencial tropical trabajaremos con series de potencias en lugar de trabajar con series de Puiseux. Por lo tanto trabajaremos con sub semi-anillo $\mathbb{H} = (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ lugar de trabajar con el semi-anillo $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$.

Un **polinomio diferencial tropical en n variables de orden menor o igual que** $\mathcal{O}$ es una expresión de la forma:

$$P(x) = \bigoplus_{M \in \Lambda \subset \mathcal{M}_{n \times (\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} a_M \bigodot_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \mathcal{O}} (x_{ij})^{\odot M_{i,j}}, \tag{6.1}$$

donde $a_M \in \mathbb{H}$, $car(\Lambda) < \infty$ y $\mathcal{M}_{n \times (\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ es el conjunto de las matrices $n \times (\mathcal{O}+1)$ con entradas en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. A las entradas de la matriz M denotamos por M_{ij}.

Denotaremos un **monomio diferencial tropical en n variables de orden menor o igual que** $\mathcal{O}$ por

$$\varepsilon_M := \bigodot_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \mathcal{O}} (x_{ij})^{\odot M_{i,j}}. \tag{6.2}$$

Denotaremos el conjunto de los polinomios diferenciales tropicales con n variables por $\mathbb{L} = \mathbb{H}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Sea $\mathbb{K}$ un campo, sea $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in \mathbb{K}[[t]]$ una serie de potencias. En la geometría tropical clásica, la tropicalización de φ es igual a su orden, pero en la geometría diferencial tropical es necesario considerar el conjunto de todos los exponentes de φ, es decir, la **tropicalización** de φ es el subconjunto de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dado por

$$trop(\varphi) := \operatorname{Supp}(\varphi),$$

ver la pagina [15].

Sea $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definimos el conjunto

$$(\mathbb{V}_S)^* := \left\{(x_j)_{j\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mid x_j = 0 \text{ si y solo si } \quad j \notin S\right\}.$$

Sea $\varphi(t) \in \mathbb{K}[[t]]$, entonces

$$\psi^{-1}(\varphi) \in (\mathbb{V}_{trop(\varphi)})^*,$$

donde ψ es la biyección en (4.1).

Sea $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{K}[[t]]^n$. La **tropicalización** de φ es

$$trop(\varphi) := (trop(\varphi_1), \ldots, trop(\varphi_n)) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n,$$

donde $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ es el conjunto de subconjunto de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Sea $S = (S_1, \ldots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$, definimos el conjunto

$$(\mathbb{V}_S)^* := \left\{(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 0\leq j}} \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right)^n \mid x_{ij} = 0 \text{ si y solo si } \quad j \notin S_i\right\}, \tag{6.3}$$

Sea $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{K}[[t]]^n$, entonces tenemos

$$\Psi^{-1}(\varphi) \in (\mathbb{V}_{trop(\varphi)})^*,$$

donde Ψ es la biyección en (5.3).

Sea $T \subset \mathbb{K}[[t]]^n$. La **tropicalización** de T es el conjunto:

$$trop(T) := \{trop(\varphi), \varphi \in T\} \subset (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n.$$

Ejemplo 6.1. Sea $T = \{(a + bt, at^2 - 4t^3), a, b \in \mathbb{K}\} \subset (\mathbb{K}[[t]])^2$. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{trop}(T) = \{&(\{1\},\{2,3\}), (\{0\},\{2,3\}), (\{0,1\},\{2,3\}), (\{0,1\},\{2\}), (\{0,1\},\{3\}),\\ &(\{0\},\{2\}), (\{0\},\{3\}), (\{1\},\{2\}), (\{1\},\{3\})\}.\end{aligned}$$

Sea $\mathbb{K}$ un campo, sea $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a_i t^i \in \mathbb{K}[[t]]$. Tenemos

$$d^j(\varphi) = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{j!} a_i t^{i-j}.$$

Si $\mathbb{K}$ tiene característica cero, la tropicalización de $d^j(\varphi)$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{trop}\left(d^j\varphi\right) &= \{i-j \mid a_i \neq 0, \forall i, i \geq j\} \\ &= \{i-j \mid i \in \operatorname{trop}(\varphi) \cap \mathbb{Z}_{\geq j}\},\end{aligned}$$

siendo la valoración de $d^j(\varphi)$

$$\begin{aligned}\nu\left(d^j\varphi\right) &= \text{mín}\,\{i-j \mid i \in \operatorname{trop}(\varphi) \cap \mathbb{Z}_{\geq j}\} \\ &= \text{mín}\,\{i \mid i \in \operatorname{trop}(\varphi) \cap \mathbb{Z}_{\geq j}\} - j \\ &= \text{mín}\,(\operatorname{trop}(\varphi) \cap \mathbb{Z}_{\geq j}) - j.\end{aligned}$$

La igualdad anterior justifica la siguiente definición:

Un conjunto $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ induce un mapeo $Val : \mathbb{Z}_{\geq 0} \longmapsto \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ de la siguiente manera

$$\mathrm{Val}_S(j) := \begin{cases} s-j, & \text{con } s = \min\{\alpha \in S{:}\alpha \geq j\}, \\ \infty, & \text{cuando } S \cap \mathbb{Z}_{\geq j} = \emptyset. \end{cases} \tag{6.4}$$

Sea $\varphi \in \mathbb{K}[[t]]$. Con la definición anterior se tiene que

$$\text{si} \quad trop(\varphi) = S \Rightarrow \nu(d^j(\varphi)) = Val_S(j).$$

Sea $(S_1, \ldots, S_n) \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. Definimos

$$Val_{(S_1,\ldots,S_n)} = (Val_{S_1}, \ldots, Val_{S_n}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n.$$

Sea $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in (\mathbb{K}[[t]])^n$. Con la definición anterior se tiene que

$$\text{si} \quad \operatorname{trop}(\varphi) = (S_1, \ldots, S_n) \Rightarrow \nu\left(d^j(\varphi)\right) = (Val_{S_1}(j), \ldots, Val_{S_n}(j)).$$

Ejemplo 6.2. Consideremos el conjunto $S = \{1, 3, 4\}$,

1. $Val_S(2) = \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 2\} - 2 = 3 - 2 = 1$
2. $Val_S(5) := \infty$

6.2. Soluciones de un polinomio diferencial tropical

En el capítulo de Álgebra diferencial hemos definido las soluciones de un sistema de polinomios diferenciales con n variables como elementos de $(\mathbb{K}[[t]])^n$. Hemos definido las soluciones de un polinomio diferencial tropical con n variables como elementos de $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$.

El polinomio diferencial tropical P en (6.1) induce una aplicación

$$\begin{aligned} P : \quad (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n &\longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ S = (S_1, \ldots, S_n) &\longmapsto \text{mín}_{M \in \Lambda}\{\textstyle\sum_{i,j} M_{ij} Val_{S_i}(j) + a_M\}. \end{aligned}$$

Lema 6.3. *Sea* $(S_1, \dots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$*, sea* ε_M *el monomio diferencial tropical en (6.2). Tenemos*

$$\varepsilon_M(S_1, \dots, S_n) = 0 \Longleftrightarrow j \in S_i, \forall i, j \quad con \quad M_{ij} \neq 0.$$

Es decir, $Val_{S_i}(j) = 0$ *si y solo si* $j \in S_i$*.*

Demostración. Supongamos $Val_{S_i}(j) = 0$. Por la definición tenemos

$$\begin{aligned} \text{mín}\{s \in S_i \mid s \geq j\} - j = 0 \quad &\Rightarrow \text{mín}\{s \in S_i \mid s \geq j\} = j \Rightarrow \\ &\Rightarrow j \in S_i. \end{aligned}$$

Supongamos $j \in S_i$. Por la definición tenemos

$$Val_{S_i}(j) = \text{mín}\{s \in S_i \mid s \geq j\} - j = j - j = 0.$$

□

Una n-ada $S = (S_1, \dots, S_n) \subseteq (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$ es **una solución** de un polinomio diferencial tropical P si se cumple una de las siguientes condiciones (ver (3.3))

1. $\exists M_1, M_2 \in \Lambda \subset \mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, $M_1 \neq M_2$ tal que $P(S) = \varepsilon_{M_1}(S) + a_{M_1} = \varepsilon_{M_2}(S) + a_{M_2}$,

   o

2. $P(S) = \infty$.

Denotamos por $Sol(P)$ al conjunto de soluciones del polinomio diferencial tropical P.

Sea T un conjunto de polinomios diferenciales tropicales, . El conjunto de soluciones de T es :

$$Sol(T) := \{S \subset (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n \mid S \in Sol(P), \forall P \in T\}.$$

Un polinomio diferencial tropical como (6.1) se dice **lineal** si los exponentes verifican $0 \leq M_{ij} \leq 1$.

Ejemplo 6.4. Consideramos el polinomio diferencial tropical $P(x) = x_{14}$, consideramos el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$. Tenemos

$$P(S) = Val_S(4) = \infty.$$

Entonces el conjunto S es una solución de $P(x) = x_{14}$.

Ejemplo 6.5. Consideremos el polinomio diferencial tropical

$$P(x) = x_{12} \oplus 1.$$

Vamos a encontrar las soluciones de P. En este polinomio $i = 1$. Tenemos

$$P(S) = \text{mín}\{Val_S(2), 1\}.$$

Un conjunto S es una solución de $P(x)$ si se verifica la condición siguiente:

$$Val_S(2) = 1,$$

es decir

$$\begin{gathered}\text{mín}\{s \in S \mid s \geq 2\} - 2 = 1 \Longrightarrow \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 2\} = 3 \Longrightarrow \\ S = \{\{3\} \cup B \cup C, \text{mín}\, C \geq 4, B \subset \{0,1\}\}.\end{gathered}$$

Ejemplo 6.6. Consideremos el polinomio diferencial tropical lineal

$$P(x) = (x_{11} \odot 1) \oplus (x_{13} \odot 2) \oplus 3.$$

Vamos a encontrar las soluciones de P. En este polinomio $i = 1$. Tenemos

$$P(S) = \text{mín}\{1 + Val_S(1), 2 + Val_S(3), 3\}.$$

El conjunto S es una solución de $P(x)$ si se verifica al mínimo una de las 3 condiciones siguientes:

1. $P(S) = 1 + Val_S(1) = 3 \leq 2 + Val_S(3)$
2. $P(S) = 1 + Val_S(1) = 2 + Val_S(3) \leq 3$
3. $P(S) = 2 + Val_S(3) = 3 \leq 1 + Val_S(1)$

1. Para encontrar el conjunto S vamos a ver la primera condición:

$$\begin{aligned} 1 + Val_S(1) = 3 &\Rightarrow 1 + \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 1\} - 1 = 3 \\ &\Rightarrow \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 1\} = 3. \end{aligned}$$

Así el conjunto S es

$$S = \{\{3\} \cup C, \text{mín}\, C \geq 4\}.$$

Para ver que S es una solución de $P(x)$ tenemos que ver la condición siguiente: si es cierta entonces S es una solución de P.

$$1 + Val_S(1) = 3 \leq 2 + Val_S(3).$$

Sustituyendo S tenemos,

$$1 + Val_S(1) = 3 \leq 2 + Val_S(3) = 2 + 0 = 2.$$

Está igualdad no es cierto, así el conjunto S no es una solución de $P(x)$.

2. Vamos a ver la segunda condición:

$$\begin{aligned} 1 + Val_S(1) = 2 + Val_S(3) &\Rightarrow 1 + \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 1\} - 1 = 2 + \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 3\} - 3 \\ &\Rightarrow \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 3\} - \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 1\} = 1. \end{aligned}$$

Así tenemos $S = \{\{2,3\} \cup C \cup B,\ minC \geq 4, B \subseteq \{0\}\}$. Por otro lado se cumple,

$$1 + Val_S(1) = 2 + Val_S(3) \leq 3,$$

de donde obtenemos

$$1 + Val_S(1) = 2 + Val_S(3) = 2 \leq 3.$$

Así el conjunto S es una solución del polinomio $P(x)$.

3. Vamos a ver la tercera condición ,

$$\begin{aligned} 2 + Val_S(3) = 3 \quad &\Rightarrow \quad 2 + \text{mín}\{s \in S \mid \geq 3\} - 3 = 3 \\ &\Rightarrow \quad \text{mín}\{s \in S \mid s \geq 3\} = 4. \end{aligned}$$

Así tenemos $S = \{\{4\} \cup C \cup B,\ minC \geq 4, B \subseteq \{0,1,2\}\}$.
Por otro lado la condición se cumple,

$$2 + Val_S(3) = 3 \leq 1 + Val_S(1),$$

de donde obtenemos

$$2 + Val_S(3) = 3 \leq 1 + Val_S(1) = 1 + 3 = 4.$$

Así el conjunto S es una solución de $P(x)$.

Luego $P(x)$ tiene las soluciones:

$Sol(P) =$
$\{\{2,3\} \cup C \cup B,\ minC \geq 4, B \subseteq \{0\}\} \cup \{\{4\} \cup C \cup B,\ minC \geq 4, B \subseteq \{0,1,2\}\}.$

Ejemplo 6.7. Consideremos el polinomio diferencial tropical

$P = (x_{12} \odot 2) \oplus (x_{13} \odot 1) \oplus 2 \oplus (x_{22} \odot 3) \oplus (x_{21} \odot 1) = min\{x_{12}+2, x_{13}+1, 2, x_{22}+3, x_{21}+1\}.$

Vamos a encontrar todas las soluciones de este polinomio. Consideremos

$$P(S) = \text{mín}\{2 + Val_{S_1}(2), Val_{S_1}(3) + 1, Val_{S_2}(1) + 1, Val_{S_2}(2) + 3, 2\}.$$

Una n-ada $S = (S_1, S_2)$ es una solución de este polinomio diferencial tropical si al mínimo cumple al mínimo una de las condiciones siguientes:

1. $P(S) = 2 + Val_{S1}(2) = 1 + Val_{S_1}(3)$,
2. $P(S) = 2 + Val_{S1}(2) = 2$,
3. $P(S) = 1 + Val_{S_1}(3) = 2$,
4. $P(S) = Val_{S_2}(1) + 1 = 2$,

5. $P(S) = Val_{S_2}(2) + 3 = 2,$
6. $P(S) = Val_{S_2}(2) + 3 = Val_{S_2}(1) + 1,$
7. $P(S) = 2 + Val_{S_1}(2) = Val_{S_2}(1) + 1,$
8. $P(S) = 1 + Val_{S_1}(3) = Val_{S_2}(1) + 1,$
9. $P(S) = Val_{S_2}(2) + 3 = 1 + Val_{S_1}(3).$

Para encontrar el conjunto S vamos a ver cada condición:

1. $2 + Val_{S_1}(2) = 1 + Val_{S_1}(3)$. Por definición tenemos

$$2 + \text{mín}\{s_1 \in S \mid s_1 \geq 2\} - 2 = 1 + \text{mín}\{s_1 \in S \mid s \geq 3\} - 3$$

$\Rightarrow$

$$\text{mín}\{s_1 \in S_1 \mid s_1 \geq 3\} - \text{mín}\{s_1 \in S_1 \mid s_1 \geq 2\} = 2.$$

Así tenemos

$$S_1 = \{\{2, 4\} \cup C \cup B, \mid \text{mín}\, C \geq 5, B \subseteq \{1\}\}.$$

El conjunto S_2 es un conjunto que verifica las condiciones siguientes:

a) $2 \leq 1 + Val_{S_2}(1),$
b) $2 \leq 3 + Val_{S_2}(2).$

Encontramos el conjunto S_2 que tiene la forma.

$$S_2 = \{C \cup B \mid \text{mín}\, C \geq 2, B \subseteq \{0\}\}.$$

La $2-$ada (S_1, S_2) es una solución de $P(x)$, si se cumple la condición siguiente:

$$2 + Val_{S_1}(2) = 1 + Val_{S_1}(3) \leq 2.$$

La 2-ada (S_1, S_2) cumple esta condición entonces es una solución de $P(x)$.

2. $2 + Val_{S_1}(2) = 2$

Por definición tenemos:

$$min\{s_1 \in S_1 \mid s_1 \geq 2\} = 2$$

Así tenemos

$$S_1 = \{\{2\} \cup C \cup B, \text{mín}\, C \geq 3, B \subseteq \{0, 1\}\}.$$

El conjunto S_2 es un conjunto que verifica las condiciones siguientes:

a) $2 \leq 1 + Val_{S_2}(1),$
b) $2 \leq 3 + Val_{S_2}(2).$

Encontramos el conjunto S_2 que tiene la forma

$$S_2 = \{C \cup B \mid \text{mín}\, C \geq 2, B \subseteq \{0\}\}.$$

La 2-ada (S_1, S_2) es una solución de P, si se cumple la condición siguiente:

$$2 + Val_{S_1}(2) = 2 \leq 1 + Val_{S_1}(3).$$

La desigualdad es cierta si 3 no pertenece en S_1, entonces $2-$ada (S_1, S_2) es una solución de P, donde
$S_1 = \{\{2\} \cup C \cup B, \text{mín}\, C \geq 4, B \subseteq \{1\}\}$ y $S_2 = \{C \cup B \mid \text{mín}\, C \geq 2, B \subseteq \{0\}\}$.

3. $1 + Val_{S_1}(3) = 2$

   Por definición tenemos

$$\text{mín}\{s_1 \in S_1 \mid s_1 \geq 3\} - 3 = 1 \Rightarrow \text{mín}\{s_1 \in S_1 \mid s_1 \geq 3\} = 4.$$
$$\Rightarrow S_1 = \{\{4\} \cup C \cup B, \text{mín}\, C \geq 5, B \subseteq \{1, 2\}\}.$$

   El conjunto S_2 es un conjunto que se cumple las condiciones siguientes:

   a) $2 \leq 1 + Val_{S_2}(1)$,
   b) $2 \leq 3 + Val_{S_2}(2)$.

   Encontramos el conjunto S_2 que tiene la forma.

$$S_2 = \{C \cup B \mid \text{mín}\, C \geq 2, B \subseteq \{0\}\}.$$

   La 2-ada (S_1, S_2) es una solución de P, si cumple la condición siguiente:

$$1 + Val_{S_1}(3) = 2 \leq 2 + Val_{S_1}(2).$$

   La 2-ada (S_1, S_2) cumple esta condición entonces es una solución de $P(x)$.

4. $1 + Val_{S_2}(1) = 2$.

   Por definición tenemos:

$$1 + \text{mín}\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 1\} - 1 = 2 \Rightarrow \text{mín}\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 1\} = 2.$$

   Así tenemos
$$S_2 = \{\{2\} \cup C \mid \text{mín}\, C \geq 2, B \subseteq \{0\}\}.$$

   El conjunto S_1 es un conjunto que verifica las condiciones siguientes:

   a) $2 \leq 1 + Val_{S_1}(2)$,
   b) $2 \leq 3 + Val_{S_1}(2)$.

Encontramos el conjunto S_1 que tiene la forma

$$S_1 = \{C \cup B \mid \text{mín}\, C \geq 3, B \subseteq \{0, 1\}\}.$$

La 2-ada (S_1, S_2) es una solución de P, si se cumple la condición siguiente

$$1 + Val_{S_2}(1) = 2 \leq 3 + Val_{S_2}(2),$$

La 2-ada (S_1, S_2) cumple esta condición entonces es una solución de $P(x)$.

5. $3 + Val_{S_2}(2) = 2 \Rightarrow Val_{S_2}(2) = -1$.
   Por definición esto es imposible.
6. $3 + Val_{S_2}(2) = 1 + Val_{S_2}(1) \Rightarrow Val_{S_2}(1) - Val_{S_2}(2) = 2$.
   Por definición tenemos

$$\text{mín}\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 1\} - 1 - \text{mín}\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 2\} + 2 = 2$$

$\Rightarrow$

$$min\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 1\} - \text{mín}\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 2\} = 1.$$

   Por definición esto es imposible.
7. $2 + Val_{S_1}(2) = 1 + Val_{S_2}(1)$.
   Por definición tenemos

$$\text{mín}\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 1\} = \text{mín}\{s_1 \in S_1 \mid s_1 \geq 2\}.$$

   Así tenemos

$$S_1 = \{\{a\} \cup C_1 \cup B_1, b = a \geq 2, \text{mín}\, C_1 > a, B_1 \subseteq \{0, 1\}\},$$

   y

$$S_2 = \{\{b\} \cup C_2, \text{mín}\, C_2 \geq b, , a = b \geq 2\}.$$

   La 2-ada $\{S_1, S_2\}$ no es una solución de este sistema. Pues para cualquier $a = b \geq 2$ la condición siguiente no se verifica

$$2 + Val_{S_1}(2) = 3 + Val_{S_2}(2).$$

8. $1 + Val_{S_1}(3) = 1 + Val_{S_2}(1)$.
   Por definición tenemos

$$min\{s_1 \in S_1 \mid s_2 \geq 3\} - min\{s_2 \in S_2 \mid s_2 \geq 1\} = 2,$$

   Tenemos

   $S_1 = \{\{a\} \cup C_1, \text{mín}\, C_1 \geq a+1, a \geq 3\}, S_2 = \{\{b\} \cup C_2, \text{mín}\, C_2 \geq b+1, b \geq 1\}$,

   con $a - b = 2$. La 2-ada (S_1, S_2) es una solución de P, si se cumplen las condiciones siguientes:

a) $1 + Val_{S_1}(3) = 1 + Val_{S_2}(1) \leq 3 + Val_{S_2}(2)$,

b) $1 + Val_{S_1}(3) = 1 + Val_{S_2}(1) \leq 2 + Val_{S_1}(2)$,

c) $1 + Val_{S1}(3) = 1 + Val_{S_2}(1) \leq 1 + Val_{S_1}(3)$.
Se verifica la siguiente condición si $b \leq 2$,

d) $1 + Val_{S_1}(3) = 1 + Val_{S_2}(1) \leq 2$.

La 2-ada (S_1, S_2) es una solución de este sistema si $b \leq 2$.

9. $3 + Val_{S_2}(2) = 2$.
Por definición esto es imposible.

6.3. Tropicalización de polinomios diferenciales

En lo que sigue trabajaremos con $R = \mathbb{K}[[t]] \subset \mathbb{K}((t))$ el anillo de series de potencias. Consideramos el polinomio diferencial en n variables de orden menor o igual que $\mathcal{O}$

$$P = \sum_{M \in \Lambda \subseteq \mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \psi_M \prod_{i,j} (x_{ij})^{M_{ij}} \in \mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n \rangle, \qquad (6.5)$$

donde $\psi_M \in R$, $\sharp(\Lambda) < \infty$.

La **tropicalización de P** es el polinomio tropical de orden menor o igual que $\mathcal{O}$

$$trop(P(x)) = \bigoplus_{M \in \Lambda \subset \mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \left(\nu(\psi_M) \bigodot_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \mathcal{O}} (x_{ij})^{\odot M_{i,j}} \right), \qquad (6.6)$$

donde ν es la valoración de orden.

Sea I un ideal diferencial. La **tropicalización del ideal I** es

$$trop(I) := \{trop(P), P \in I\}.$$

Tenemos

$$Sol(trop(I)) = \bigcap_{f \in I} Sol(trop(f)).$$

Ejemplo 6.8. Consideremos el polinomio diferencial

$$P := (3t^2 + 7t^5)x_{14} + (3 + 2t + t^3)x_{12} + (5t^3 + 7t^4)x_2 + 5tx_{23} + t^3 - 2t^4 = 0$$

entones tenemos

$$\psi_{14} = 3t^2 + 7t^5, \psi_{12} = 3 + 2t + t^3, \psi_{20} = 5t + 7t^4, \psi_{23} = 5, g(t) = t^3 - 2t^4$$
$$\psi_{10} = 0, \psi_{13} = 0, \psi_{21} = 0, \psi_{22} = 0, \psi_{24} = 0$$
$$\nu(\psi_{14}) = 2, \nu(\psi_{12}) = 0, \nu(\psi_{20}) = 3, \nu(\psi_{23}) = 1, \nu(g(t)) = 3.$$

$\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ es el conjunto de las matrices $n \times (\mathcal{O}+1)$ con entradas en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, a las entradas de la matriz M denotamos por M_{ij}.

El polinomio tropical asociado a P

$$trop(P) := (2 \odot x_{14}) \oplus x_{12} \oplus (3 \odot x_2) \oplus (1 \odot x_{23}) \oplus 3.$$

Lema 6.9. *Sean $f, g \in \mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ polinomios diferenciales de orden $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, sea $S = (S_1, \dots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$. Tenemos*

1. $trop(fg)(S) = trop(f)(S) \odot trop(g)(S)$,
2. $trop(f^k) = ktrop(f)$
3. $trop(tf)(S) \geq 1$,
4. $Sol(trop(f^k)) = Sol(trop(f))$.

Demostración. La demostración de la parte (1) es análoga a la demostración del Lema 3.4. La demostración de la parte (2) es consecuencia de (1). Vamos a probar la parte (3). Si $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = \sum_{M \in \Lambda \subseteq \mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \psi_M \prod_{i,j} (x_{ij})^{M_{ij}},$$

la tropicalización de f es

$$trop(f(x)) = \bigoplus_{M\in\Lambda} \left(\nu(\psi_M) \bigodot_{1\leq i\leq n, 0\leq j\leq \mathcal{O}} (x_{ij})^{\odot M_{i,j}} \right) = \min_{M\in\Lambda}\{\nu(\varphi_M) + \sum_{i,j} M_{i,j}x_{i,j}\},$$

y la tropicalización de tf es

$$\begin{aligned} &trop(tf(x)) = \textstyle\bigoplus_{M\in\Lambda} \left(\nu(t\psi_M) \bigodot_{1\leq i\leq n, 0\leq j\leq \mathcal{O}} (x_{ij})^{\odot M_{i,j}}\right) \\ &= \min_{M\in\Lambda}\{\nu(t) + \nu(\varphi_M) + \textstyle\sum_{i,j} M_{i,j}x_{i,j}\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo S tenemos

$$\begin{aligned} trop(tf)(S) = \quad & \min_{M\in\Lambda}\{\nu(t) + \nu(\varphi_M) + \textstyle\sum_{i,j} M_{i,j} Val_{S_i}(j)\} \\ &= \min_{M\in\Lambda}\{1 + \nu(\varphi_M) + \textstyle\sum_{i,j} M_{i,j} Val_{S_i}(j)\} \\ &= 1 + \min_{M\in\Lambda}\{\nu(\varphi_M) + \textstyle\sum_{i,j} M_{i,j} Val_{S_i}(j)\} \quad = 1 + trop(f)(S). \end{aligned}$$

Por lo tanto $trop(tf)(S) \geq 1$.

Vamos a probar la parte (4). Sea $S = (S_1, \dots, S_n) \in Sol(trop(f))$. Entonces $\exists M, N \in \Lambda$ tal que

$$trop(f)(S) = \nu(\varphi_M) + \sum_{i,j} M_{i,j} Val_{S_i}(j) = \nu(\varphi_N) + \sum_{i,j} N_{i,j} Val_{S_i}(j).$$

Por la parte (2) tenemos

$$trop(f^k) = ktrop(f) = k \min_{M\in\Lambda}\{\nu(\varphi_M) + \sum_{i,j} M_{i,j}x_{i,j}\}.$$

Sustituyendo S tenemos

$$trop(f^k)(S) = k\,\text{mín}_{M\in\Lambda}\{\nu(\varphi_M) + \sum_{i,j} M_{i,j}Val_{S_i}(j)\} = ktrop(f)(S) = k\left(\nu(\varphi_M) + \sum_{i,j} M_{i,j}Val_{S_i}(j)\right) = k\left(\nu(\varphi_N) + \sum_{i,j} N_{i,j}Val_{S_i}(j)\right).$$

Por lo tanto $S \in Sol(trop(f^k))$.

Sea $S \in Sol(trop(f^k))$. Tenemos

$$trop(f^k)(S) = ktrop(f)(S).$$

Podemos concluir que $S \in Sol(trop(P))$. □

Lema 6.10. *Sea $I \subset \mathbb{K}[[t]]\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ un ideal diferencial, sea $\varphi \in Sol(I)$. Tenemos*

$$trop(\varphi) \in Sol(trop(I)).$$

Demostración. Consideramos el polinomio

$$P(x) = \sum_{M\in\Lambda\subset\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \psi_M \prod_{ij}(x_{ij})^{M_{ij}} \in I.$$

Supongamos $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = (\sum_{l=1}^{\infty} c_{1l}t^l,\ldots,\sum_{l=1}^{\infty} c_{nl}t^l)$ es una solución de P. Probaremos que $S = (S_1\ldots,S_n) = (trop(\varphi_1),\ldots,trop(\varphi_n))$ es una solución de $trop(P)$. Denotamos

$$\psi_M(t) = a_{\nu(\psi_M)}t^{\nu(\psi_M)} + \widetilde{\psi_M}(t),$$

donde $\widetilde{\psi_M}(t)$ es un polinomio con orden mayor que $\nu(\psi_M)$, es decir,

$$\nu(\widetilde{\psi_M}) > \nu(\psi_M).$$

El polinomio diferencial tropical asociado al polinomio diferencial P es

$$trop(P) := \min_{M\in\Lambda\subset\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})}\{\nu(\psi_M) + \sum_{0\leq i\leq n}\sum_{0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)} M_{ij}x_{ij}\}.$$

Sustituyendo S tenemos

$$trop(P)(S) = \min_{M\in\Lambda}\{\nu(\psi_M) + \sum_{0\leq i\leq n}\sum_{0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)} M_{ij}Val_{S_i}(j)\}.$$

Vamos a probar que n-ada $(S_1,\ldots,S_n)$ es una solución de $trop(P)$, es decir, $\exists N, B \in \Lambda \subset \mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0}), N \neq B$ talque

$$trop(P(S)) = \text{mín}_{N\in\Lambda}\{\nu(\psi_N) + \sum_{0\leq i\leq n}\sum_{0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)} N_{ij}Val_{S_i}(j)\} = \text{mín}_{B\in\Lambda}\{\nu(\psi_B) + \sum_{0\leq i\leq n}\sum_{0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)} B_{ij}Val_{S_i}(j)\},$$

sustituyendo $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ en P se obtiene :

$$\sum_{M\in\Lambda\subset\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})}\psi_M(t)\prod_{1\leq i\leq n,0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)}(\varphi_i^{(j)})^{M_{ij}}=0$$

$$\sum_{M\in\Lambda\subset\mathcal{M}_{n\times(\mathcal{O}+1)}}(\mathbb{Z}_{\geq 0})\psi_M(t)\prod_{1\leq i\leq n,0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)}((\sum_{k=1}^{\infty}c_{ki}t^k)^{(j)})^{M_{ij}}=0$$

$$\sum_{M\in\Lambda}\psi_M(t)\prod_{1\leq i\leq n,0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)}((\sum_{k=1}^{\infty}(c_{ik}(k(k-1)\ldots(k-j+1))t^{k-j})^{M_{ij}}=0. \quad (6.7)$$

Denotamos $c_{ik}(k(k-1)\ldots(k-j+1))$ por A_{ijk}, sustituyendo A_{ijk} y $\psi_M(t)=a_{\nu(\psi_M)}t^{\nu(\psi_M)}+\widetilde{\psi_M}(t)$ en la ecuación (6.7) se obtiene :

$$\sum_{M\in\Lambda}\sum_{k\geq j}(a_{\nu(\psi_M)}t^{\nu(\psi_M)}+\widetilde{\psi_M}(t))\prod_{1\leq i\leq n,0\leq j\leq(\mathcal{O}+1)}(A_{ikj}t^{k-j})^{M_{ij}}=0.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{k\geq j}\sum_{M\in\Lambda}(t^{\nu(\psi_M)})\prod_{i,j}(A_{ikj}t^{k-j})^{M_{ij}}\\ &+\textstyle\sum_{M\in\Lambda}\sum_{k\geq j}\widetilde{\psi_M}(t)\prod_{i,j}(A_{ikj}t^{k-j})^{M_{ij}}=0,\end{aligned}$$

desde la igualdad $\nu(\widetilde{\psi_M})>\nu(\psi_M)$ tenemos

$$\nu(\widetilde{\psi_M}(t)t^{k-j})>\nu(\psi_M)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}(k-j)M_{ij}.$$

Elegimos

$$E:=min\{\nu(\psi_M)+\sum_{k\geq j}(k-j)M_{ij}\},$$

entonces existe $N\in\Lambda$ tal que $E=\nu(\psi_N)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}(k-j)N_{ij}$, por lo tanto el polinomio P tiene un monomio t^F con $F=\nu(\psi_B)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}(k-j)B_{ij}$ y

$$\nu(\psi_N)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}(k-j)N_{ij}=\nu(\psi_B)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}(k-j)B_{ij}.$$

donde $B=\{B_{ij}\}\in\Lambda$. La igualdad anterior se puede escribir de la forma

$$\nu(\psi_N)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}\text{mín}\{(k-j)\mid k\in S_i\}N_{ij}=\nu(\psi_B)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}\text{mín}\{(k-j)\mid k\in S_i\}B_{ij}.$$

Por la definición de $Val_{S_i}(j)$ la igualdad anterior es exactamente

$$\nu(\psi_N)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}Val_{S_i}(j)N_{ij}=\nu(\psi_B)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq j}Val_{S_i}(j)B_{ij}.$$

Por la forma de elegir E tenemos

$$trop(P(S)) = \nu(\psi_N) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \geq j} Val_{S_i}(j) N_{ij} = \nu(\psi_B) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \geq j} Val_{S_i}(j) B_{ij}.$$

Entonces $(S_1, \ldots, S_n)$ es una solución de $trop(P)$. $\square$

Capítulo 7

Conjunto de soluciones de un ideal diferencial.

En este capítulo vamos a extender los conceptos y resultados relacionados con en el espacio de arcos al caso de polinomios diferenciales. Como hemos visto en el espacio de arcos sustituyendo la biyección (5.3) en un polinomio en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, tenemos una serie de potencias. En el caso de los polinomios diferenciales sucede lo mismo.

Sea $I \subset \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ un ideal diferencial, sea $J = I \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Si $\langle J \rangle_{diff} = I$, es decir, el ideal diferencial generado por J es igual a I, entonces X_∞^J el espacio de arcos asociado a $V(J)$ es igual al conjunto de las soluciones de I, es decir,

$$X_\infty^J = Sol(I).$$

Sea $P(x) \in \mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ un polinomio diferencial y sea $\underline{a} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})^n$. Tenemos

$$P(\Psi(\underline{a})) = \sum_{k \geq 0} F_k(\underline{a}) t^k, \tag{7.1}$$

donde $F_k(x)$ son polinomoios en $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Ejemplo 7.1. Sea $P(x) = x^{(2)} + t - 2$ un polinomio diferencial, sea $\underline{a} = (a_j)_{j \geq 0} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})$, tenemos

$$P(\Psi(\underline{a})) = \sum_{k \geq 0} F_k(\underline{a}) t^k,$$

donde $F_0(\underline{a}) = 2a_2 - 2$, $F_1(\underline{a}) = 6a_3 + 1, F_2(\underline{a}) = 12a_4, \ldots$.

Lema 7.2. *Sea $P(x) \in \mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ un polinomio diferencial, sea $\underline{a} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})^n$ y $P(\Psi(\underline{a})) = \sum_{k \geq 0} F_k(\underline{a}) t^k$. Tenemos*

$$F_k(\underline{a}) = \frac{1}{k!} \left. (d^k P) \right|_{t=0} (\underline{a}).$$

Demostración. Agarramos $\underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ j\geq 0}} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})^n$, escribimos

$$\Psi(\underline{a}) = (\Psi(\underline{a})_1, \ldots, \Psi(\underline{a})_n).$$

Consideremos $P(\Psi(\underline{a}))$, derivamos k veces y ponemos $t = 0$. Tenemos

$$F_k(\underline{a}) = \frac{1}{k!}[d^k(P(\Psi(\underline{a})))]_{t=0}.$$

Por el lema 4.6 tenemos

$$\frac{1}{k!}[d^k(P(\Psi(\underline{a})))]_{t=0} = \frac{1}{k!}[(D^kP)(\Psi(\underline{a}))]_{t=0}.$$

Por (4.7) tenemos

$$\frac{1}{k!}[(D^kP)(\Psi(\underline{a}))]_{t=0} = \frac{1}{k!}\left[(D^kP)|_{x_{ij}=\Psi(\underline{a})_i^{(j)}}\right]_{t=0},$$

y por (4.3) y (4.4) tenemos

$$\left[(D^kP)|_{x_{ij}=\Psi(\underline{a})_i^{(j)}}\right]_{t=0} = \frac{1}{k!}[(D^kP)|_{x_{ij}=a_{ij}}]_{t=0} = \frac{1}{k!}(d^kP)|_{t=0}(\underline{a}).$$

□

Por (2.2) sabemos que un ideal en el anillo de polinomios $\mathbb{K}[[t]][x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado. Un ideal diferencial I en el anillo $\mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ no es necesariamente finitamente generado. De todas formas

por el lema 4.13 existen $f_1, \ldots, f_s \in I$ tal que

$$Sol(I) = \bigcap_{\ell=1}^{s} Sol(f_\ell). \tag{7.2}$$

Sea $\underline{a} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})^n$. Para cada $\ell, 1 \leq \ell \leq s$ tenemos

$$f_\ell(\Psi(\underline{a})) = \sum_{k\geq 0} F_{\ell k}(\underline{a})t^k,$$

donde $F_{\ell k}(x)$ son los polinomoios en $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Por el lema 7.2 tenemos

$$F_{\ell k} = \frac{1}{k!}\left.(d^k f_\ell)\right|_{t=0}.$$

Consideramos el **conjunto de los ceros** de $\{F_{\ell k}\}_{\substack{1\leq \ell\leq s\\ k\geq 0}}$ en $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right)^n$

$$A_\infty := V\left(\{F_{\ell k}\}_{\substack{1\leq \ell\leq s\\ k\geq 0}}\right) \subset \left(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right)^n. \tag{7.3}$$

El siguiente lema es una extensión del lema 5.10 en espacio de arcos.

Lema 7.3. *Sea I un ideal diferencial. El conjunto de soluciones de I es igual a la imagen de A_∞ por la biyección Ψ en 5.3, es decir,*

$$Sol(I) = \Psi(A_\infty).$$

Demostración. Sea $\varphi \in Sol(I)$. Podemos escribir

$$\varphi = \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} a_{1j} t^j, \dots, \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} a_{nj} t^j \right).$$

Consideramos $\underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ j\geq 0}} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}})^n$. Para cada $1 \leq \ell \leq s$ tenemos

$$f_\ell(\varphi) = \sum F_{\ell k}(\underline{a}) t^k = 0,$$

entonces

$$\forall k \geq 0, F_{lk}(\underline{a}) = 0.$$

Podemos concluir

$$\underline{a} \in A_\infty.$$

Tenemos $\Psi(\underline{a}) = \varphi$ entonces

$$\varphi \in \Psi(A_\infty).$$

Consideramos $\underline{a} \in A_\infty$, entonces $\forall k \geq 0, 1 \leq l \leq s$ tenemos

$$F_{lk}(\underline{a}) = 0 \Rightarrow f_l(\Psi(\underline{a})) = 0 \Rightarrow \Psi(\underline{a}) \in Sol(I).$$

□

Para cada $m \geq 0$, sea N_m es más peqeño entero positivo tal que

$$F_{\ell,k} \in \mathbb{K}[x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_m], \forall 1 \leq \ell \leq s, 0 \leq k \leq m. \tag{7.4}$$

Ahora describiremos una extensión al ideal diferencial de la definición del espacio de $m - jets$(ver por ejemplo [Mou11], observación 5.11).

Consideremos el **conjunto de ceros** de F_{lk} para cada $0 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq s$:

$$A_m := V\left(\{F_{\ell k}\}_{\substack{1\leq \ell\leq s\\ 0\leq k\leq m}} \right) \subset \left(\mathbb{K}^{N_m+1}\right)^n. \tag{7.5}$$

Para $m \geq m' \geq 0$, definimos el **morfismo algebraico natural** $\pi_{(m,m')}$

$$\begin{array}{cccc} \pi_{(m,m')}: & \mathbb{K}^{n(N_m+1)} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n(N_{m'}+1)} \\ & (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} & \mapsto & (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m'}} \end{array}$$

que tiene la propiedad

$$\pi_{(m,m')}(A_m) \subset A_{m'}.$$

Lema 7.4. *El conjunto A_∞ es el límite inverso del sistema $\left(A_m, (\pi_{(m,m')})_{m\geq m'\geq 0}\right)$.*

Demostración. Sea $\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El sistema $\left(A_m, (\pi_{(m,m')})_{m \geq m' \geq 0}\right)$ es un sistema inverso y su límite inverso es

$$\varprojlim_{m \in \Lambda} A_m : \\ = \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \in \prod_{m \geq 0} A_m \mid (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq N_{m'}}} = \pi_{(m,m')}(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq N_m}}, \forall m' \leq m \text{ en } \Lambda \right\},$$

esto es igual a A_∞.

□

Sea $S = (S_1, \ldots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$ una n-ada. Consideramos $(\mathbb{V}_S)^*$ (ver (6.3))

$$(\mathbb{V}_S)^* := \left\{ (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j}} \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right)^n \mid x_{ij} = 0 \text{ si y solo si} j \notin S_i \right\}.$$

Definimos el conjunto

$$A_{\infty S} := A_\infty \cap \mathbb{V}_S^*.$$

Para $m \geq 0$ consideramos el conjunto

$$\mathbb{V}_{mS}^* := \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m'}} \in \mathbb{K}^{n(N_m+1)} \mid x_{ij} = 0 \text{ si y solo si} j \notin S_i \right\}.$$

Para $m \geq 0$ existe $L_m \leq n(N_m + 1)$ tal que

$$\mathbb{V}_{mS}{}^* \simeq (\mathbb{K}^*)^{L_m}. \tag{7.6}$$

Definimos el conjunto

$$A_{mS} := A_m \cap \mathbb{V}_{mS}^*.$$

Para $m \geq m' \geq 0$, tenemos la inclusión

$$\pi_{(m,m')}(A_{mS}) \subset A_{m'S}.$$

El conjunto $A_{\infty S}$ es el límite inverso del sistema $((A_{mS})_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}, \pi_{(m,m')})_{m \geq m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Lema 7.5. *Una n-ada $S = (S_1, \ldots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$ está contenida en trop$(Sol(I))$ si y solo si existe $\underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \in A_\infty$ con trop$(\Psi(\underline{a})) = S$.*

Demostración. Supongamos $S \subset \text{trop}(Sol(I))$. Existe $\varphi \in Sol(I)$ tal que $S = \text{trop}(\varphi)$. Por el lema 7.3 tenemos

$$\Psi(A_\infty) = Sol(I).$$

Por lo tanto

$$\varphi \in \Psi(A_\infty),$$

entonces $\exists \underline{a} \in A_\infty$ tal que $\varphi = \Psi(\underline{a})$ con $\text{trop}(\Psi(\underline{a})) = S$.

Supongamos existe $\underline{a} \in A_\infty$ con $S = \mathrm{trop}(\Psi(\underline{a}))$. Tenemos

$$\Psi(\underline{a}) \in \Psi(A_\infty).$$

Por el lema 7.3 tenemos $\Psi(A_\infty) = Sol(I)$. Tenemos

$$S = \mathrm{trop}(\Psi(\underline{a})) \in \mathrm{trop}(Sol(I)).$$

$\square$

Lema 7.6. *Sea $S = (S_1, \ldots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$ una n-ada, entonces tenems $S \in trop(Sol(I))$ si y solo si*

$$A_{\infty S} := A_\infty \cap \mathbb{V}_S^*$$

no es vacío.

Demostración. Supongamos $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathrm{trop}(Sol(I))$. Por el lema 7.5 existe $\underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \in A_\infty$ con $\mathrm{trop}(\Psi(\underline{a})) = S$, es decir, $\forall 1 \leq i \leq n$ tenemos

$$S_i = \{j \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

Entonces

$$a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow j \notin S_i,$$

podemos concluir que $\underline{a} \in \mathbb{V}_S^*$.

Supongamos que $A_\infty \cap \mathbb{V}_S^*$ no es vacío, entonces existe

$$\underline{a} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \in A_\infty \cap \mathbb{V}_S^*.$$

Esto implica que $\Psi(\underline{a}) \in \Psi(A_\infty)$. Por el lema 7.3 tenemos $\Psi(\underline{a}) \in Sol(I)$. Ya que $\underline{a} \in \mathbb{V}_S^*$ tenemos $a_{ij} \neq 0$ si solo si $j \in S_i$, entonces $trop(\Psi(\underline{a})) = S$. Podemos concluir que $S \in \mathrm{trop}(Sol(I))$. $\square$

Sea n-ada $S = (S_1, \ldots, S_n) \in (\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}))^n$, $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Consideramos los conjuntos

$$B_{mS} := \bigcap_{i=m}^{\infty} \pi_{(i,m)}(A_{iS}).$$

Las proyecciones $\forall m \geq m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\pi_{(m,m')} : B_{mS} \longrightarrow B_{m'S},$$

son sobreyectivas.

Lema 7.7. *El conjunto $A_{\infty S}$ es límite inverso del sistema $(B_{mS}, \pi_{(m,m')})_{m \geq m'}$, es decir,*

$$A_{\infty S} = \varprojlim B_{mS}.$$

Demostración. Sea $\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, el sistema $(B_{mS}, \pi_{(m,m')})_{m \geq m'}$ es un sistema inverso y su límite inverso es

$$\varprojlim_{m \in \Lambda} B_{mS} := \left\{ (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} \in \prod_{m \geq 0} B_{mS} \mid (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq N_{m'}}} = \pi_{(m,m')}(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq N_m}}, \forall m' \leq m \text{ en } \Lambda \right\},$$

esto es igual a A_∞. □

Lema 7.8. *El conjunto $A_{\infty S}$ no es vacío si y solo si $\bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS})$ no es vacío.*

Demostración. Por el lema 7.6 $A_{\infty S}$ es límite inverso del sistema $(B_{mS}, \pi_{(m,m')})_{m \geq m'}$. Por la proposición 2.13, $\forall m \geq 0$ el mapeo

$$\pi_m : A_\infty \longrightarrow B_{mS}$$

es sobreyectivo. Para $m = 0$ tenemos

$$B_0 = \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS}),$$

por lo tanto

$$\pi_0 : A_\infty \longrightarrow \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS}),$$

es sobreyectivo, entonces para cada $\underline{b} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS})$ existe $\underline{a} \in A_\infty$ tal que $\pi_0(\underline{a}) = \underline{b}$.

Para cada $\underline{a} \in A_\infty$ tenemos $\pi_0(\underline{a}) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS})$. □

Proposición 7.9. *El conjunto $A_{\infty S}$ no es vacío si y solo si A_{mS} no es vacío para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Demostración. Por el colorario 2.17 el conjunto $\pi_{(m,0)}(A_{mS})$, $\forall m$ es un conjunto constuctibe. Sabemos que los conjuntos constructibles forman un álgebra booleana. Entonces los complementos de $\pi_{(m,0)}(A_{mS}), \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son conjuntos constructibles. Por lo tanto la secuencia anidada de conjuntos constructibles en $(\mathbb{K}^*)^{L_0} \simeq \mathbb{V}_{0S}^*$

$$\cdots \subset \pi_{(2,0)}(A_{2S}) \subset \pi_{(1,0)}(A_{1S}) \subset A_{0S} \subset (\mathbb{K}^*)^{L_0} \tag{7.7}$$

induce una familia creciente de conjuntos constructibles

$$\emptyset \subset (\mathbb{K}^*)^{L_0} \setminus A_{0S} \subset (\mathbb{K}^*)^{L_0} \setminus \pi_{(1,0)}(A_{1S}) \subset (\mathbb{K}^*)^{L_0} \setminus \pi_{(2,0)}(A_{2S}) \subset \cdots . \tag{7.8}$$

Por el lema 7.8 el conjunto $A_{\infty S}$ es vacío si y solo si $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS})$ es vacío si y solo si el conjunto $(\mathbb{K}^*)^{L_0} \setminus \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \pi_{(i,0)}(A_{iS})$ es igual a $(\mathbb{K}^*)^{L_0}$ si y solo si

$$(\mathbb{K}^*)^{L_0} = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\mathbb{K}^*)^{L_0} \setminus \pi_{(i,0)}\left(A_{iS}\right).$$

Entonces, por la proposición 2.19, existe m tal que $(\mathbb{K}^*)^{L_0} \setminus \pi_{(m,0)}\left(A_{mS}\right) = (\mathbb{K}^*)^{L_0}$. Por lo tanto existe m tal que $\pi_{(m,0)}\left(A_{mS}\right)$ es vacío. Esto implica que existe m tal que A_{mS} es vacío.

□

Capítulo 8

Teorema fundamental de la geometría diferencial tropical

Ahora estamos listos para probar el resultado que nos permitirá trabajar en el anillo noetheriano $\mathbb{K}[x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_m]$ en lugar del anillo no-noetheriano $\mathbb{K}[x_{ij}, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j]$. Para probar este resultado hemos usado el teorema de los ceros de hilbert y los resultados anteriores.

Teorema 8.1. *(Extensión del teorema fundamental de la geometría tropical) Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado y no numerable de característica cero, sea I un ideal diferencial en $\mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Entonces tenemos*

$$trop(Sol(I)) = Sol(trop(I))$$

Demostración. Por el lema 6.10 tenemos la inclusión

$$trop(Sol(I)) \subset Sol(trop(I)),$$

aquí solo tenemos que probar

$$Sol(trop(I)) \subset trop(Sol(I)).$$

Sea $S = (S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ tal que $S \notin trop(Sol(I))$, es decir, que no existe ninguna solución de I cuya tropicalización es S. Probamos que S no puede ser una solución de la tropicalización de I, es decir, $S \notin Sol(trop(I))$. Para probar esto encontramos un polinomio $g \in I$ cuya tropicalización no tiene S como solución.

Por el lema 4.13 tenemos

$$Sol(I) = \bigcap_{\ell=1}^{s} Sol(f_\ell),$$

donde $f_1, \dots, f_s \in I$.

Para $1 \leq \ell \leq s$ y $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ podemos escribir $F_{\ell k} := (d^k f_\ell))\big|_{t=0}$. Por hipótesis tenemos $S \notin trop(Sol(I))$ entonces por el lema 7.6 $A_{\infty S}$ el conjunto de los ceros de $\{F_{\ell k} \mid 1 \leq \ell \leq s\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ es vacío. Por lo tanto por la proposición 7.9 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_{mS} el conjunto de los ceros de $\{F_{\ell k} \mid 1 \leq \ell \leq s\ 0 \leq k \leq m\}$ es vacío.

Tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que A_{mS} es vacío. Denotamos por $\overline{F_{\ell k}}$ la imagen de $F_{\ell k}$ en el anillo

$$\mathbb{K}[x_{ij} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_m] / \langle x_{ij} : j \notin S_i \rangle .$$

Por (7.6) tenemos $A_{mS} \subseteq (\mathbb{K}^*)^{L_m}$, con $L_m \leq n(N_m + 1)$, ya que A_{mS} es vacío, entonces tenemos

$$V\left(\overline{F_{\ell,k}} : 1 \leq \ell \leq s, 0 \leq k \leq m\right) \subset V\left(\prod_{\{0 \leq i \leq n, j \in S_i : j \leq N_m\}} x_{i,j}\right).$$

Por el Teorema de ceros de Hilbert, existe $\alpha \geq 1$ tal que

$$E_M = \prod_{\{0 \leq i \leq n, j \in S_i : j \leq N_m\}} x_{i,j}{}^{\alpha} \in \left\langle \overline{F_{\ell,k}} : 1 \leq \ell \leq s, 0 \leq k \leq m \right\rangle .$$

Aquí E_M es un monomio diferencial inducido por la matriz $M \in \mathcal{M}_{n \times (N_m+1)}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ con entradas $M_{ij} = 0$ para $j \notin S_i$ y $M_{ij} = \alpha$ para $j \in S_i$.

Esto implica que existe un conjunto de polinomios $\{G_{\ell,k} : 1 \leq \ell \leq s, 0 \leq k \leq m\} \subset \mathbb{K}[x_{ij}, 1 \leq i \leq n, j \in S_i, j \leq N_m]$ tal que

$$\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 0 \leq k \leq m}} G_{\ell,k} \overline{F_{\ell,k}} = E_M. \tag{8.1}$$

entonces

$$\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 0 \leq k \leq m}} G_{\ell,k} F_{\ell,k} = E_M + h, \tag{8.2}$$

para algún $h \in \langle x_{ij} : j \notin S_i, j \leq N_m \rangle \subset \mathbb{K}[x_{ij} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_m]$. Por la definición de $F_{\ell k}$, existe un polinomio λ en $\mathbb{K}[[t]]\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ tal que

$$g := \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ 0 \leq k \leq m}} G_{\ell,k} d^k f_\ell = E_M + h + t\lambda. \tag{8.3}$$

Ya que I es un ideal diferencial y $f_1, \ldots, f_s \in I$ entonces el polinomio diferencial g también está en I. Tenemos

$$trop(g)(S) = \text{mín}\{trop(E_M)(S), trop(h)(S), trop(t\lambda)(S)\}.$$

Por (6.2) y por el lema 6.3 tenemos

$$trop(E_M)(S) = \varepsilon_M(S) = \sum_{j \in S_i} M_{ij} Val_{S_i}(j) = 0.$$

Ya que $h \in \langle x_{ij}{:}j \notin S_i, j \leq N_m \rangle$, por el lema 6.3 si $h \neq 0$ entonces

$$trop(h)(S) \neq 0.$$

Por el lema 6.9 parte c tenemos, si $t\lambda \neq 0$, entonces

$$trop(t\lambda)(S) \geq 1.$$

Por lo tanto $trop(g)(S) = 0$ y mínimo se alcanza solo en el monomio ε_M, entonces S no es una solución de $(trop(g))$. Podemos concluir que S no es una solución de la tropicalización de I. $\square$

Capítulo 9

Problemas abiertos

1. Probar el teorema fundamental de la geometría diferencial tropical en caso que el campo $\mathbb{K}$ es numerable o encontrar un contraejemplo para el campo numerable $\mathbb{K}$.

2. Extensión de base tropical a base tropical diferencial.

.

Bibliografía

[ABF13] Omid Amini, Matthew Baker, and Xander Faber (eds.), *Tropical and non-Archimedean geometry*, Contemporary Mathematics, vol. 605, American Mathematical Society, Providence, RI; Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 2013, Selected papers from the Annual Bellairs Workshop in Number Theory held in Holetown, May 6–13, 2011. MR 3185550

[AC01] F. Aroca and J. Cano, *Formal solutions of linear PDEs and convex polyhedra*, J. Symbolic Comput. **32** (2001), no. 6, 717–737, Effective methods in rings of differential operators. MR 1866713 (2003b:35028)

[ACJ03] F. Aroca, J. Cano, and F. Jung, *Power seris solutions for nonlinear PDE's*, Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, New York, 2003, pp. 15–22 (electronic). MR 2035190

[AILdM10] F. Aroca, G. Ilardi, and L. López de Medrano, *Puiseux power series solutions for systems of equations*, Internat. J. Math. **21** (2010), no. 11, 1439–1459. MR 2747737 (2012a:14003)

[Aro10a] F. Aroca, *Krull-tropical hypersurfaces*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **19** (2010), no. 3-4, 525–538. MR 2790807 (2012g:20079)

[Aro10b] Fuensanta Aroca, *Tropical geometry for fields with a Krull valuation: first definitions and a small result*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **16** (2010), no. 1, 9–14. MR 2932528

[BČMM15] Iztok Banič, Matevž Črepnjak, Matej Merhar, and Uroš Milutinović, *Inverse limits, inverse limit hulls and crossovers*, Topology Appl. **196** (2015), no. part A, 155–172. MR 3422739

[BIMS15] Erwan Brugallé, Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Kristin Shaw, *Brief introduction to tropical geometry*, Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2015, pp. 1–75. MR 3381439

[BMS13] C. Bruschek, H. Mourtada, and J. Schepers, *Arc spaces and the Rogers-Ramanujan identities*, Ramanujan J. **30** (2013), no. 1, 9–38. MR 3010462

[Bou04] Nicolas Bourbaki, *Theory of sets*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2004, Reprint of the 1968 English translation [Hermann, Paris; MR0237342]. MR 2102219

[Bru09] C. Bruschek, *The linearization principle in infinite dimensional algebraic geometry*, Ph.D. thesis, Universitat Wien, 2009.

[Can93] J. Cano, *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations*, Analysis **13** (1993), no. 1-2, 103–119. MR 1245746 (94h:34001)

[DL98] Jan Denef and Francois Loeser, *Motivic igusa zeta functions*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 3, 505–537. MR 1618144

[DL99a] ———, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 201–232. MR 1664700

[DL99b] ———, *Motivic exponential integrals and a motivic Thom-Sebastiani theorem*, Duke Math. J. **99** (1999), no. 2, 285–309. MR 1708026

[DL02a] J. Denef and F. Loeser, *Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 13–23. MR 1957016

[DL02b] Jan Denef and Francois Loeser, *Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence*, Compositio Math. **131** (2002), no. 3, 267–290. MR 1905024

[EKL06] M. Einsiedler, M. Kapranov, and D. Lind, *Non-Archimedean amoebas and tropical varieties*, J. Reine Angew. Math. **601** (2006), 139–157. MR 2289207 (2007k:14038)

[Fin89] H. B. Fine, *On the Functions Defined by Differential Equations, with an Extension of the Puiseux Polygon Construction to these Equations*, Amer. J. Math. **11** (1889), no. 4, 317–328. MR 1505516

[Gri15] D. Grigoriev, *Tropical differential equations*, CoRR **abs/1502.08010** (2015).

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer, New York, 1977.

[IMS09] Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Eugenii Shustin, *Tropical algebraic geometry*, second ed., Oberwolfach Seminars, vol. 35, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. MR 2508011 (2010d:14086)

[JMM08] A. N. Jensen, H. Markwig, and T. Markwig, *An algorithm for lifting points in a tropical variety*, Collect. Math. **59** (2008), no. 2, 129–165. MR 2414142 (2009a:14077)

[Kol73] E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York-London, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. MR 0568864

[Lan93] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Menlo Park Cal, 1993.

[Mou11] H. Mourtada, *Jet schemes of toric surfaces*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 9-10, 563–566. MR 2802925 (2012e:14029)

[MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 161, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. MR 3287221

[Mum99] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, expanded ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1358, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello. MR 1748380 (2001b:14001)

[Nas95] J. F. Nash, Jr., *Arc structure of singularities*, Duke Math. J. **81** (1995), no. 1, 31–38 (1996), A celebration of John F. Nash, Jr. MR 1381967 (98f:14011)

[Pui50] V. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques.*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1850), 365–480 (fre).

[RGST05] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald, *First steps in tropical geometry*, Idempotent mathematics and mathematical physics, Contemp. Math., vol. 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 289–317. MR 2149011 (2006d:14073)

[Rit50] J. F. Ritt, *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII, American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950. MR 0035763 (12,7c)

[RR39] J. F. Ritt and H. W. Raudenbush, Jr., *Ideal theory and algebraic difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939), 445–452. MR 0000605 (1,101d)

[SS04] David Speyer and Bernd Sturmfels, *The tropical Grassmannian*, Adv. Geom. **4** (2004), no. 3, 389–411. MR 2071813

[Stu02] Bernd Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 97, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. MR 1925796

Índice alfabético

Morfismo regular, 8
Variedad asociada a un polinomio tropical, 23

Adición tropical, 21
Anillo de series potencias, 13
Anillo diferencial, 35
Anillo diferencial de polinomios, 37
Anillo local, 18

Base de un sistema infinito de polinomios diferenciales, 41
Base tropical, 32

Campo de series de Puiseux, 14
Campo diferencial, 35
Campo residual, 18
Campo valorado, 18
Cero de un polinomio, 7
Cero del polinomio de Laurent, 10
Conjunto algebraico irreducible, 8
Conjunto constructible, 16
Conjunto localmente cerrado, 16
Conjunto ordenado, 14

Espacio de m-jets de una hipersuperficie, 47
Espacio de m-jets de una variedad, 47
Espacio de arcos de una hipersuperficie , 43
Espacio de arcos de una variedad, 47

Grupo valores, 18

Hipersuperficie tropical, 28
Homogeneización de un polinomio, 20

Ideal diferencial, 36
Ideal diferencial generado por un ideal, 36
Ideal homogéneo, 20
Ideal perfecto, 41
Ideal perfecto generado por un conjunto, 41
Ieal w inicial asociada a un ideal, 27
Indeterminada diferencia, 37

Límite inverso, 15

Monomio diferencial tropical, 53
Morfismo algebraico natural, 49
Multiplicación tropical, 21

Noetheriano, 8

Orden de una series potencia, 13

Parte w inicial de un polinomio, 27
Polinomio diferencial tropical, 53
Polinomio diferencial tropical lineal, 56
Polinomio homogéneo, 20
Polinomio tropical en n variables, 22
Producto directo, 11

Relación de orden, 14

Semi-anillo tropical, 21
Sistema inverso, 15
Solución de polinomio diferencial tropical, 56
Solución de un ideal diferencial, 40
Solución de un polinomio diferencial , 38
Soluciones de un conjunto de polinomios diferenciales tropicales, 56

Soporte de series de potencia, 13
Subconjunto cofinal, 15
Suma directa, 11

Tropicalización de polinomio Laurent, 24
Tropicalización de series de potencias, 54
Tropicalización de un conjunto de series de potencias, 54
Tropicalización de un ideal, 25
Tropicalización de un ideal diferencial, 62
Tropicalización de un polinomio diferencial, 62

Valoración, 18
Variedad asociada a polinomio de Laurent, 10
Variedad asociada a un ideal, 8
Variedad asociada a un polinomio, 7
Variedad asociada a un sistema de polinomios diferenciales , 41
Variedad asociada al conjunto de polinomios, 7
Variedad asociada al conjunto de polinomios de Laurent, 10
Variedad asociada al ideal de Laurent, 10
Variedad tropical, 31