UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE BIFURCACIONES,
TEOREMAS DE KRASNOSELSKII Y DE RABINOWITZ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

RAÚL BARTOLO MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ LINO SAMANIEGO MENDOZA
2016

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

Hoja de Datos del Jurado

1. Dados del Alumno
   Raúl
   Bartolo
   Martínez
   044-55-17-01-16-15
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   402068442

2. Datos del Tutor
   Dr.
   José
   Lino
   Samaniego
   Mendoza

3. Datos del Sinodal 1
   Dr.
   Arturo
   Olvera
   Chavez

4. Datos del Sinodal 2
   Dr.
   Carlos
   García
   Azpeitia

5. Datos del Sinodal 3
   Dr.
   Manuel
   Jesús
   Falconi
   Magaña

6. Datos del Sinodal 4
   Dr.
   Hugo
   Arizmendi
   Peimbert

VNIVERSDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

Facultad De Ciencias
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

Lic. Ivonne Ramírez Wence
Directora General
Dirección General de Administración Escolar
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Teoría de Bifurcaciones y Teoremas de Krasnoselskii y de Rabinowitz

realizado por **Raúl Bartolo Martínez** con número de cuenta **402068442** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Arturo Olvera Chávez	
Propietario	Dr. Carlos García Azpeitia	CARLOS GARCIA AZPEITIA
Propietario Tutor	Dr. José Lino Samaniego Mendoza	
Suplente	Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña	
Suplente	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert	Hugo Arizmendi

Atentamente
"Por Mi Raza Hablará El Espíritu"
Ciudad Universitaria, Cd. Mx., a 30 de noviembre de 2016

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Act. Mauricio Aguilar González

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Índice

Agradecimientos y Dedicatorias

El presente trabajo está dedicado desde en el fondo de mi corazón a mi esposa Anna Flor Cadena Castillo quién ha estado al pendiente de manera puntual, estandome jalandome las orejas para terminar la tesis, a mi hijo Jonathan Alexi Bartolo Cadena quién me ha hecho pasar momentos muy alegres y en algunas ocaciones ratos complicados, pues queria estar en todo momento a mi lado muentras escribía. A mis padres, Nicolas Bartolo León y Vicenta Martínez Aguilar quienes me brindaron su apoyo incondicional a lo largo de la licenciatura. A mis hermanos, Mauricio Bartolo Martínez y Maira Erika Bartolo Martínez quienes me decían matadito. Finalmente a mis profesores quienes fueron unos mentores y grandes amigos y sobre todo a mi director de tesis el Dr. José Lino Samaniego Mendoza quien estubo al pendiente en todo momento motivandome a seguir adelante y no rendirme con sus llamadas de atención. Sin olvidarme de algo, a la Universidad Nacional Autónoma de México mi casa de estudios.

¡POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU!

Introducción

Existe la posibilidad de que uno domine de manera notable un tema matemático, sin entender su esencia.

Albert Einstein

EL presente trabajo se avoca al estudio de la teoría de las bifurcaciones. Aquí, resalta la siguiente pregunta: ¿Qué es una bifurcación?

$Bifurcación$ (del latín bifurcus, ahorquillado) es la acción de separar algo en varias prtes; por ejemplo: en matemáticas, la teoría de bifurcaciones, estudia los cambios en la estructura cualitativa o topológica de una familia determinada (pasar de un estado estable a uno inestable o viceversa).

En el primer capítulo intriduciremos los elementos básicos del análisis funcional considerendo principalmente los conceptos de operador lineal acotado y del espectro de un operador compacto, para demostrar los teoremas de gran importancia a lo largo de este capítulo. Dichos teoremas son: el teorema de la gráfica cerrada y el teorema de acotación uniforme.

El segundo capítulo utiliza los conceptos básicos de operador lineal acotado para definir el operador derivada en dimensión infinita o dicho de otra manera en espacios de Banach. Este operador derivada nos conducirá a la construcción de varias herremientas útiles en el cálculo diferencial en espacios de Banach las cuales son: la derivada de $Frèchet$, la derivada de $Gâteaux$, el teorema de la función inversa, el teorema de la función implícita, etc..

En el tercer capítulo presenta mas o menos de manera sintética los elementos básicos de la teoria de grado topológico de *Brouwer* y su extención a espacios de dimensión infinita, el grado de $Leray - Schauder$. Por grado entendemos como el número de soluciones de una ecuación diferencial lineal o no lineal.

En el cuarto capítulo presenta como en el capítulo tercero de manera sistemática, los elementos básicos de la teoría de índice y su extención a espacios de Banach. Dicha extención se llama el índice de $Leray - Schauder$ que permitirá demostrar uno de los teoremas de gran utilidad para la construcción de la demostración al teorema de *Rabinowitz* due se discutirá en el sexto capítulo, dicho teorema se le conoce como el teorema de ídice de $Leray - Schauder$.

En el capítulo quinto se estudiaran los elementos necesarios en la teoría de bifurcaciones por mencionar algunos: Condición necesaria y suficiente para la existencia de un punto de bifurcación, el principio de salto de índice y el principio de continuidad. Estos dos últimos proporcionaran una herremienta útil en la demostración del de *Rabinowitz* que se mostrará en el siguiente capítulo.

En el capítulo sexto se enunciaran y demostraran dos resultados muy importantes en la teoria de bifurcaciones, estos son: el teorema de bifurcación de $Krasnoselskii$ y el teorema de bifurcación de *Rabinowitz*. Este últomo se demostrara de dos maneras: demostración geométrica y demostración analítica.

En el útimo capítulo, se analizarán algunas aplicaciones mostrando la utilidad de los teoremas del capítulo anterior.

Capítulo 1

Elementos de Análisis Funcional

En este capítulo se discutirán algunos temas clásicos del Análisis Funcional Lineal.

1.1 Espacios Métricos y Normados

Definición 1.1. Un *espacio métrico* es un conjunto X dotado de una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geqslant 0$ para todo $x, y \in X$,

2. $d(x, x) = 0$ si y sólo si $x = y$,

3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

La función d se llama la *métrica* del espacio X. La propiedad 3 de la métrica es llamada la *desigualdad del triángulo*. Cuando X es el espacio $\mathbb{R}^n$ y la métrica es dada por la fórmula

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

en donde $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$, la propiedad 3 dice exactamente que en la geometría euclideana la longitud de un lado del triángulo es menor que la suma de las longitudes de los lados restantes.

Este ejemplo fundamental representa al mismo tiempo un caso particular de la métrica definida por medio de una norma.

Definición 1.2. Dado un espacio vectorial E sobre el campo $\mathbb{K}$, que puede ser el campo de los reales $\mathbb{R}$ o bién el campo de los complejos $\mathbb{C}$, se define una *norma* sobre E como una función no negativa

$$E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$$

que satisface las siguientes condiciones:

a. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,\ x \in E,\ \alpha \in \mathbb{K}$

b. $\|x\| = 0$ implica $x = 0$,

c. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

El par $(E, \|\cdot\|)$ es llamado un *espacio normado*. Cada norma define en forma natural una métrica convirtiendo E en un espacio métrico. Ponemos

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

y las propiedades b y c aseguran el cumplimiento de las condiciones $1, 2$ y 3.

Una *bola* centrada en $x \in X$ y de radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Decimos que un conjunto $A \subset X$ es *acotado* si existe en X una bola $B(x,r)$ con $r > 0$ que contiene a A. Un conjunto A es *completamente acotado* si para todo

$\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que $A \subset \cup_{i=0}^{n} B(x_i, \epsilon)$.

Una aplicación $F : X \longrightarrow Y$ del espacio métrico X en el espacio métrico Y es *continua* en $x \in X$ si para todo $r > 0$ la imagen inversa $F^{-1}(B(F(x), r))$ es una vecindad de x. La aplicación F es continua en todas partes si y sólo si para todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ en Y el conjunto $F^{-1}(\mathcal{O})$ es abierto en X.

El espacio de todas las aplicaciones continuas de X en Y se denota por $C(X, Y)$. Un $homeomorfismo$ del espacio X en Y es una aplicación biyectia $F : X \longrightarrow Y$ tal que su aplicación inversa $F^{-1} : Y \longrightarrow X$ también es continua.

1.2 Operadores Lineales Acotados

Antes de continuar, se dará una definición muy útil para el resto del capítulo.

Definición 1.3. Un espacio métrico X es completo si cada sucesión de Cauchy en X converge a un punto en X. Un espacio de *Banach* es un espacio normado completo.

Definición 1.4. Sean E, F espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Un mapeo $L : E \longrightarrow F$ se dice que es un operador lineal si satisface:

(i) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ para todo $x, y \in E$

(ii) $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ para cada $x \in E$ y para cada $\alpha \in \mathbb{K}$.

La transformación L preserva las operaciones de espacio vectorial tales como la suma y la multiplicación por un escalar.

La siguiente condición es equivalente a (i) y a (ii) de la Definición 1.4. $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ para cada $x, y \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Poniendo $\alpha = 0$ en (ii), $L(0) = 0$. Bajo una transformación lineal, el $0-$vector siempre va al $0-$vector.

Definición 1.5. Sean E, F espacios normados, y sea $L : E \longrightarrow F$ un operador lineal. L es un *operador lineal acotado* si existe $C \geqslant 0$ tal que

$$\|Lx\|_F \leqslant C\|x\|_E \qquad \textit{para todo } x \in E. \tag{1.1}$$

Un subconjunto A en un espacio normado E es acotado si $\sup\limits_{x \in A} \|x\| < \infty$.

1.3 Dos Principios Fundamentales

1.3.1 El Teorema de la Gráfica Cerrada

Definición 1.6. Un subconjunto de un espacio métrico es denso en ninguna parte si su cerradura no contiene ningún punto interior. Un espacio métrico es de primera categoría (*de Baire*) si es una unión numerable de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte. Un espacio métrico es de segunda categoría (*de Baire*) si no es de primera categoría.

Teorema 1.7 (Lema de Baire)**.** *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio métrico completo y sea $(A_n)_{n\geqslant 1} \subseteq X$ una sucesión de subconjuntos cerrados. Supongamos que*

$$Int(A_n) = \emptyset \quad \forall n \geqslant 1.$$

Entonces

$$Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset.$$

Demostración. Ver [5] ■

Teorema 1.8 (de la Aplicación Abierta)**.** *Sean E y F dos espacios de Banach y sea T un operador lineal continuo de E en F que es suprayectivo. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c).$$

Demostración. Ver [5] ■

Corolario 1.9. *Sean E y F dos espacios de Banach y sea T un operador lineal continuo de E en F que es biyectivo, es decir inyectivo y suprayectivo. Entonces T^{-1} es también continuo (de F en E).*

Demostración. Ver [5] ■

Corolario 1.10. *Sea E un espacio vectorial provisto de dos normas, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Supongamos que E es un espacio de Banach para ambas normas y que existe una* *constante* $C \geqslant 0$ *tal que*

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Entonces las dos normas son equivalentes, es decir, que existe una constante $c \geqslant 0$ *tal que*

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \quad \forall x \in E.$$

Demostración. Ver [5] ■

Teorema 1.11 (de la Gráfica Cerrada)**.** *Sean* E *y* F *dos espacios de Banach. Sea* T *un operador lineal de* E *en* F*. Supongamos que la gráfica de* T, $G(T)$, *es cerrada en* $E \times F$*. Entonces* T *es continuo.*

Demostración. ver [5] ■

1.3.2 El Pincipio de Acotación Uniforme

Notación 1.12. *Sean* E *y* F *dos espacios vectoriales normados. Denotaremos por* $\mathcal{L}(E, F)$ *al espacio de los operadores lineales continuos y acotados de* E *en* F *equipados con la norma*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\|.$$

De manera usual, escribiremos $\mathcal{L}(E)$ *en vez de* $\mathcal{L}(E, E)$*.*

Teorema 1.13 (Banach-Steinhaus, Principio de Acotación Uniforme)**.** *Sean* E *y* F *dos espacios de Banach y sea* $(T_i)_{i \in I}$ *una familia no necesariamente numerable de operadores lineales continuos de* E *en* F*. Supongamos que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E. \tag{1.2}$$

Entonces

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty. \tag{1.3}$$

Demostración. Ver [5]. ■

Corolario 1.14. *Sean E y F dos espacios de Banach. Sea (T_n) una sucesión de operadores lineales continuos de E en F tal que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge, $n \to \infty$ a un límite denotado por Tx. Entonces tenemos*

1. $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$,
2. $T \in \mathcal{L}(E, F)$,
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demostración. Ver [5]. ■

Corolario 1.15. *Sea G un espacio de Banach y sea B un subconjunto de G. Supongamos que*

$$\text{para cada } f \in G^*, \text{ el conjunto } f(B) = \{\langle f, x\rangle : x \in B\} \text{ es acotado en } \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Entonces

$$B \text{ es acotado.} \tag{1.5}$$

Demostración. Ver [5]. ■

1.4 Operadores Compactos

Nota 1.16. *(a) En espacios métricos, compacidad y compacidad secuencial (toda sucesión tiene una subsucesión convergente) son equivalentes.*

(b) Un subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado.

(c) Un subconjunto compacto de un espacio normado es acotado.

Definición 1.17. Un operador acotado $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se dice que es compacto si $T(B_E)$ tiene cerradura compacta en F.

El conjunto de todos los operadores compactos de E en F es denotado por $\mathcal{K}(E, F)$. Para simplificar, escribiremos $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Teorema 1.18. *El conjunto* $\mathcal{K}(E,F)$ *es un subespacio lineal cerrado de* $\mathcal{L}(E,F)$.

Demostración. Ver [5]. ∎

Definición 1.19. Un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ se dice que es de *rango finito* si el rango de T, $R(T)$, es de dimención finita.

Corolario 1.20. *Sea* (T_n) *una sucesión de operadores con rango finito y sea* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *tal que* $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. *Entonces* $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Demostración. Ver [5]. ∎

1.5 Teoría de Riesz-Fredholm

Lema 1.21 (Lema de Riesz). *Sea* E *un espacio vectorial normado, y sea* $M \subset E$ *un espacio lineal cerrado tal que* $M \neq E$. *Entonces*

$$\forall \epsilon > 0, \exists u \in E \text{ tal que } \|u\| = 1 \text{ y } d(u,M) \geqslant 1 - \epsilon.$$

Demostración. Ver [5]. ∎

Teorema 1.22 (Riesz). *Sea* E *un espacio vectorial normal con* B_E *compacto. Entonces* E *es de dimención finita.*

Demostración. Ver [5]. ∎

1.6 El Espectro de un Operador Compacto

Definición 1.23. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$.

El *conjunto resolvente*, denotado por $\rho(T)$, está definido por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) \text{ es biyectivo y acotado de } E \text{ en } F\}$$

El *espectro*, denotado por $\sigma(T)$, es el complemento del conjunto resolvente, es decir, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

Proposición 1.24. *El espectro $\sigma(T)$ de un operador acotado T es compacto y*

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|].$$

Demostración. Ver [5]. ■

Teorema 1.25. *Sea $T \in \mathcal{K}(E)$ con $dim(E) = \infty$, entonces tenemos:*

a. $0 \in \sigma(T)$,

b. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, *donde $\sigma_p(T)$ es el espectro puntual.*

c. uno de los siguientes casos se cumple:

i. $\sigma(T) = \{0\}$,

ii. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *son valores propios del* $\{0\}$,

iii. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión convergente a* 0.

Demostración. Ver [5]. ■

Lema 1.26. *Sea $T \in \mathcal{K}(E)$ y sea $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de números reales distintos tal que*

$$\lambda_n \to \lambda$$

y

$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\} \quad \forall n.$$

Entonces $\lambda = 0$.

Demostración. Ver [5]. ■

Estos teoremas mostrados anteriormente serán de gran utilidad en capíputlos posteriores.

Capítulo 2

Elementos del Cálculo Diferencial y el Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach

La meta de este capítulo es demostrar una generalización en espacios de *Banach* del *Teorema de la Función Implícita* la cual tiene varias aplicaciones significativas, es decir, a los sistemas de ecuaciones, ecuaciones integrales y a las ecuaciones diferenciales.

2.1 El Cálculo Diferencial en Espacios de Banach

2.1.1 Cálculo Diferencial Formal

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre dos espacios de Banach. Usaremos $o(\|h\|)$ para describir aquellas expresiones que a grandes rasgos, son de orden mayor que uno en h cuando $h \to 0$. El concepto básico de todo el cálculo diferencial (propiamente en sus mismos términos) es el método de *linealización*. Este método consiste en: una linealización de $f(x+h)$ con respecto a h, esto es una descomposición de la forma

$$f(x+h) = f(x) + df(x,h) + o(\|h\|), \tag{2.1}$$

donde $df(x,h)$ representa la parte lineal con respecto a h. De manera similar, para h fijo, linealizamos con respecto a k, obteniendo

$$df(x+k,h) = df(x,h) + d^2f((x,k),h) + o(\|h\|). \tag{2.2}$$

Continuando de esta manera, obtenemos $d^3f((x,r),k,h)$, etc. La definición de las F-derivadas la cual definiremos más adelante, $f'(x), f''(x), \ldots$ se estructura de esta forma

$$f'(x)h = df(x,h), \qquad f''(x)kh = d^2f((x,k),h),$$

etc. Nuestra meta corresponde al método clásico, que define la derivada en un punto de una función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como la pendiente de la tangente en dicho punto. La gráfica de f aproximada por la tangente (*Véase la figura i*). La tangente en el punto $(x, f(x))$ corresponde a la función $h \mapsto f(x) + f'(x)h$. Esta es exactamente la parte lineal en (2.1).

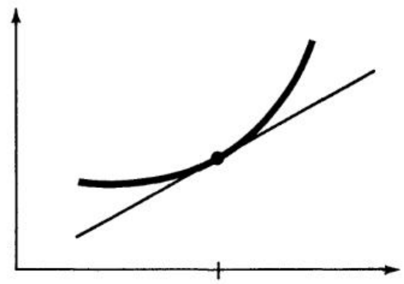


Figura i

En el espacio, las superficies son aproximadas por sus planos tangentes. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real en dos variables, entonces $h \mapsto f(x) + f'(x)h$ donde $f'(x)h = df(x,h)$ corresponde al plano tangente a través del punto $(x, f(x))$.

2.1.2 Las Derivadas de Fréchet y de Gâteaux

Comenzaremos introduciendo un poco de notación. Para una función $r : U(0) \subseteq X \longrightarrow Y$, escribiremos:

$$r(x) = o(\|x\|),\ x \to 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r(x)/\|x\| \to 0,\ x \to 0; \tag{2.3}$$

$$r(x) = o(1),\ x \to 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r(x) \to o,\ x \to 0.$$

Escribimos $\mathcal{L}(X,Y)$ para las clases de todos los mapeos

$$T : X \longrightarrow Y, \qquad T \textit{ es lineal y continuo}, \qquad X, Y \textit{ son espacios de Banach} \tag{2.4}$$

La siguente definición es básicas

Definición 2.1. Sea $f : U(x) \subseteq X \longrightarrow Y$ una función dada, con X y Y espacios de Banach. Aquí $U(x)$ denota una vecindad de x.

1. La función f es $Frechet-diferenciable$ en x si, y sólo si existe una aplicación $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$f(x+h) - f(x) = Th + o(\|h\|), \qquad h \to 0 \tag{2.5}$$

para todo h en alguna vecindad de cero. Si ésta existe, T es llamada $F-$ *derivada* de f en x. Definimos $f'(x) = T$. La $F - diferencial$ en x está definida por $df(x,h) = f'(x)h$.

2. La función f es $Gâteaux - diferenciable$ en x si, y sólo si existe una aplicación $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$f(x+tk) - f(x) = tTk + o(t), \qquad t \to 0, \tag{2.6}$$

para todo k con $\|k\| = 1$ y todos los números reales t en alguna vecindad de cero. T es llamada la $G - derivada$ de f en x. Definimos $f'(x) = T$. La $G - diferencial$ en x esta definida por $d_G f(x,h) = f'(x)h$.

3. Si las $F - derivadas$ (respectivamente las $G - derivada$) $f'(x)$ exiten para todo $x \in A$, entonces la función

$$f' : A \subseteq X \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y) \qquad por \qquad x \mapsto f'(x) \tag{2.7}$$

es llamada la $F - derivada$ (resctivamente la $G - derivada$) de f sobre A.

4. Derivadas de orden mayor se definen de manera sucesiva. De donde, $f''(x)$ es la derivada de f' en x.

Observación: (Simplificación de la Notación). La derivada de f' en x, es decir, $f''(x)$,

$$f'(x+h) = f'(x) + f''(x)h + o(\|h\|), \qquad h \to 0.$$

Por (2.7), $f''(x)$ es un operador lineal continuo de X a $\mathcal{L}(X,Y)$, es decir,

$$f''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y)).$$

Si tomamos a $h, k \in X$, entonces

$$f''(x)k \in \mathcal{L}(X,Y) \qquad (f''(x)k)h \in Y.$$

De ahora en adelante se abreviará a este último, como:

$$f''(x)kh.$$

Omitiendo los paréntesis no nos causará confución, pero simplificamos la notación. Tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}\|f''(x)kh\| &\leqslant \|f''(x)k\|\|h\| \\ &\leqslant \|f''(x)\|\|k\|\|h\|.\end{aligned}$$

En consecuencia, $(h,k) \mapsto f''(x)kh$ es una función bilineal acotada perteneciente al conjunto $X \times X$ a Y. En análisis clásico, el símbolo $f''(x)$ es usado de manera dual, para denotar ambas, la segunda derivada en x y la derivada (diferencial) de la función f. Trabajando con espacios de Banach, debemos mantener una *distinción estricta* entre $f'(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $f' : D(f) \subseteq X \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposición 2.2. (*Relación entre $F-$derivada y la $G-$derivada*)

1. *Cada $F-$derivada en x es también una $G-$derivada en x.*

2. *Una $G-$derivada en x donde pasando al límite en* (2.8) *es uniforme para todo k con $\|k\| = 1$, es también una $F-$derivada en x.*

$$f'(x)k = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tk)-f(x)}{t}. \tag{2.8}$$

3. *Si f' existe como una $G-$derivada en alguna vecindad de x, y si f' es continua en x, entonces $f'(x)$ es también una $F-$derivada en x.*

4. *Si $f'(x)$ existe como una $F-$derivada en x, entonces f es también continua en x.*

Demostración. Para la demostración, ver [37]. ■

2.1.3 Derivadas Parciales

La siguiente definición de una derivada parcial es completamente paralela a la del modelo clásico.

Definición 2.3. Consideremos dado la siguiente función $f : D(f) \subseteq X \times Y \longrightarrow Z$ por $(x, y) \mapsto f(x, y)$, donde X, Y y Z son espacios de Banach.

Sea y fijo y definimos $g(x) = f(x, y)$. Si g tiene una $F-$ *derivada* (resp. $G-$ *derivada*) en x, entonces definimos la $F-$ *derivada* parcial (resp. $G-$ *derivada*) de f en (x, y) con respecto a la primera variable x siendo $f_x(x, y) = g'(x)$.

La derivada $f_y(x, y)$ está definida de manera similar. En lugar de $f_x(x, y), f_y(x, y)$ también se escribe $D_1 f(x, y), D_2 f(x, y)$, respectivamente.

Investigaremos la validez de la fórmula

$$f'(x, y)(h, k) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k. \tag{2.9}$$

Proposición 2.4. (*Derivadas Parciales*)

1. *Si f es $F-diferenciable$ en (x, y), entonces las $F-$ derivadas parciales f_x y f_y existen en (x, y) y (2.9) se cumple para todo $h \in X$ y $k \in Y$.*

2. *Recíprocamente, si f tiene $F-$ derivadas parciales f_x y f_y en una vecindad de (x, y), y si estas son continuas en (x, y), entonces $f'(x, y)$ existe como una $F-$ derivada y (2.9) se cumple.*

3. *La función f es continuamente $F-diferenciable$ en una vecindad de (x, y) si y sólo si todas las $F-$ derivadas parciales son continuas en una vecindad de (x, y).*

Una conclusión similar se cumple para aplicaciones de la forma

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

Demostración. Para la demostración, ver [37]. ■

2.2 El Teorema de la Función Implícita

Resolveremos la ecuación

$$F(x,y)=0, \tag{2.10}$$

la cual tiene un punto solución dado, $F(x_0,y_0)=0$, para y en una vecindad de (x_0,y_0), es decir, encontraremos una función $x\mapsto y(x)$ tal que $y(x_0)=y_0$ y $F(x,y(x))=0$. (ver fig. *ii*(*a*)). La *condición determinante* para la existencia de una única solución es la siguiente:

$$\textit{El operador inverso, } F_y(x_0,y_0)^{-1}:Z\longrightarrow Y, \tag{2.11}$$

existe como un operador lineal continuo.

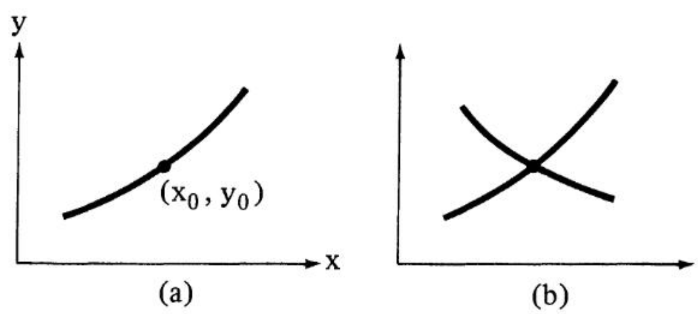


Figura *ii*

Como Y y Z son espacios de Banach, esta condición es equivalente a la siguiente: Esto por el *Teorema* 1.7.

$$\textit{La } F-\textit{derivada parcial } F_y(x_0,y_0):Y\longrightarrow Z \textit{ es biyectiva.} \tag{2.12}$$

El concepto subyacente es en reescribir la ecuación (2.10) en una forma equivalente

$$y-y_0=(y-y_0)-F_y(x_0,y_0)^{-1}F(x,y). \tag{2.13}$$

Si escribimos a F como una serie de potencia clásica alrededor de (x_0,y_0), como sigue

$$F(x,y) = F(x_0,y_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0)+ \textit{ términos de orden mayor o igual a dos};$$

ahora notemos que $F(x_0,y_0) = 0$ y $F_x(x_0,y_0) = a$, $F_y(x_0,y_0) = b$. En consecuencia, la ecuación inicial $F(x,y) = 0$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es equivalente a:

en una vencidad de (x_0,y_0)

$$y - y_0 = -b^{-1}a(x - x_0) + \textit{ términos de orden superior}.$$

Esta es exactamente la ecuación (2.13). La condición clave (2.11) garantiza la existencia de la inversa b^{-1}. Esto hace claro que el lado derecho de (2.13) es de *primer* orden con respecto al parámetro pequeño $(x - x_0)$, y de *segundo* orden con respecto a $(y - y_0)$. Así esperamos poder aplicar el *Teorema del Punto Fijo de Banach.*

Teorema 2.5 (Teorema de la Función Implícita)**.** *Supóngase que:*

1. *la función* $F : U(x_0,y_0) \subseteq X \times Y \longrightarrow Z$ *está definida en una vecindad abierta* $U(x_0,y_0)$*,* $F(x_0,y_0) = 0$*, donde* X,Y,Z *son espacios de Banach sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. F_x *existe y es una* $F -$ *derivada parcial sobre* $U(x_0,y_0)$ *y* (2.12) *se cumple.*

3. F, F_y *son continuas en* (x_0,y_0).

Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

(a) *EXISTENCIA Y UNICIDAD. Existen números positivos* r_0 *y* r *tales que, para cada* $x \in X$ *satisfaciendo* $\|x - x_0\| \leqslant r_0$*, existe exactamente un* $y(x) \in Y$ *por el cual* $\|y - y_0\| \leqslant r$ *y* $F(x,y(x)) = 0$.

(b) *CONSTRUCCIÓN Y LA SOLUCIÓN. La sucesión* $\{y_n(x)\}$ *de aproximaciones sucesivas, definidas por* $y_0(x) = y_0$*, y*

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - F_y(x_n,y_n)^{-1}F_y(x,y_n(x)),$$

converge a la solución $y(x)$, cuando $n \to \infty$, para todos los puntos $x \in X$ que satisfacen $\|x - x_0\| \leqslant r_0$.

(c) *CONTINUIDAD. Si F es continua en una vecindad de (x_0, y_0), entonces $y(.)$ es continua en una vecindad de x_0.*

(d) *DIFERENCIABILIDAD CONTINUA. Si F es ua aplicación de clase C^m, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, en una vecindad de (x_0, y_0), entonces $y(.)$ es también una aplicación de clase C^m en una vecindad de x_0.*

Demostración. Para la demostración, ver [37]. ■

Corolario 2.6. *Si F es analítica en (x_0, y_0), entonces la solución $y(.)$ es analítica en x_0.*

Demostración. Para la demostración, ver [37]. ■

Las herramientras utilizadas en este capítulo enriquecerán los métodos analíticos que se utilizarán en el capítulo 5.

Capítulo 3

Elementos de la Teoría de Grado

La teoría de grado ha sido ampliamente utilizada en el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales, por medio de ella se han desarrollado métodos que permiten obtener información sobre la existencia, el número de soluciones y la naturaleza de las soluciones. La teoría de bifurcación, por ejemplo, constituye hoy en día un área amplia de investigación que se apoya fuertemente de la teoría de grado para su desarrollo. También, la teoría de grado permite obtener teoremas de punto fijo, de gran importancia en las aplicaciones.

Inicialmente se define la noción de grado para funciones de clase C^1 en un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ respecto a un *punto regular* (más adelante se definirá) y se muestran algunos ejemplos. En seguida se introducen los elementos necesarios para definir el grado de la función con respecto a un *punto singular* (también más adelante se definira), así como la extensión de funciones continuas y se demuestran las propiedades más importante, que veremos más adelante. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones topológicas que se desprenden de las propiedades del grado.

En lo sucesivo Ω representará un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y $\partial\Omega$ su frontera.

3.1 Grado en Dimensión Finita

Definición 3.1. Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : det(f'(x)) = 0\}$ es el conjunto de los *puntos críticos* de f.

Definición 3.2. Un punto $y \in \mathbb{R}^N$ se denomina un *valor regular* de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \varnothing$ y un *valor singular* si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq \varnothing$.

Definición 3.3. Sea $M(X, Y)$ el conjunto de aplicaciones continuas entre espacios topológicos X y Y. Dos funciones $f, g \in M(X, Y)$ se dicen homotópicas si existe una aplicación continua $h : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que $h(x, 0) = f(x)$ y $h(x, 1) = g(x)$.

A continuación se enunciará (sin demostración), el *Teorema de Sard*. La demostración de este teorema se puede encontrar en [4].

Teorema 3.4. *Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, G un abierto tal que $\overline{G} \subset \Omega$. Entonces el conjunto $f(S_f(G))$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^N$.*

Definición 3.5 (Grado de Brouwer)**.** Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ un valor regular de f. El grado de f en Ω respecto a y, $d(f, \Omega, y)$, se define como

$$grad(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Omega} sgn(det(f'(x))). \tag{3.1}$$

Si $f^{-1}(y) = \varnothing$, definimos $d(f, \Omega, y) = 0$.

Afirmación. La suma (3.1) es finita pues el conjunto $f^{-1}(y) \cap \Omega$ es finito.

En efecto, si dicho conjunto fuera infinito, como $\overline{\Omega}$ es conpacto entonces tendría un punto límite que denotaremos por $x_0 \in \overline{\Omega}$. Luego existirá una sucesión $\{x_n\} \subset$

$f^{-1}(y)$ de elementos distintos que converge a x_0 tal que $f(x_n) = y$ para todo n. Por la continuidad de f, $f(x_0) = y$. Como y no está en la imagen de la frontera de Ω, se tiene que $x_0 \notin \partial\Omega$. Por lo tanto $x_0 \in \Omega \cap f^{-1}(y)$. Al ser y valor regular, $det(f'(x)) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Inversa existe un abierto, $V \subset \Omega$, que contiene a x_0 tal que f es inyectiva allí. De la convergencia de $\{x_n\}$, se tiene la existencia de un natural k tal que $\{x_n\} \subset V$ $\forall n \geqslant k$. Luego $f(x_n) = y$ $\forall n \geqslant k$, esto contradice el hecho de que f es inyectiva en V, por lo tanto por el Teorema de la Función Inversa, tenemos la afirmación.

3.1.1 El Grado Respecto a un Valor Singular

A continución sin demostración enunciaremos la construcción del grado en puntos singulares.

Sea $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$. Se supone que y es un valor regular de f. Luego $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Por el Teorema de la función inversa, existen vecindades, $V(x_i)$, tal que $V(x_i) \subset \Omega$, f es inyectiva en cada vecindad, ya que $det(f'(x)) \neq 0$ para toda $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} V(x_i)$ y además estas vecindades son ajenas dos a dos, ya que los x_i son puntos aislados.

Sea $\varphi = f - y : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Ciertamente $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se nota que $\varphi(x_i) = 0$, por tanto $\varphi(V(x_i))$ es una vecindad de cero para todo i. Además, existe $\eta > 0$ tal que $B(0,\eta) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} \varphi(V(x_i))$. Finalmente, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| \geqslant \delta \qquad \forall x \in \overline{\Omega} - \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i). \tag{3.2}$$

Definición 3.6. El *soporte* de una función es el conjunto de puntos donde la función no es cero, o la cerradura de ese conjunto y se denota así.

$$supp(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Con estas ideas en mente podemos eninciar el siguiente lema.

Lema 3.7. *Sean f, η, δ y φ como arriba, y $\gamma = \min\{\eta, \delta\}$. Sea $\Phi \in C^\infty(0,\infty) \cap$*

$C[0,\infty)$ *tal que* $supp(\Phi) \subset (0,\gamma)$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|x|)dx = 1. \tag{3.3}$$

Entonces

$$grad(f,\Omega,y) = \int_{\Omega} \Phi(|f(x)-y|)det(f'(x))dx.$$

El siguiente lema es fundamental para extender la definición de grado a puntos singulares, se conoce con el nombre de los siete epsilons y establece que dos funciones próximas en $C(\overline{\Omega})$ tienen el mismo grado, siempre que y esté suficientemente separado de la imagen de la frontera de Ω.

Lema 3.8 (Lema de los 7 ϵ's). *Sean* $y \in \mathbb{R}^N$ *un valor singular de* $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\epsilon > 0$. *Supongamos que*

$$|f_i(x) - y| \geqslant 7\epsilon \qquad i = 1,2; \qquad x \in \partial\Omega \tag{3.4}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \epsilon \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.5}$$

Entonces

$$grad(f_1,\Omega,y) = grad(f_2,\Omega,y).$$

La misma conclusión del lema anterior se da en el siguiente lema para dos puntos regulares cercanos que verifiquen las condiciones del lema de los siete epsilons.

Lema 3.9. *Sean* $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $q_i \in \mathbb{R}^N$ *con* $i = 1,2$. *Sea* $\epsilon > 0$. *Supongamos que*

$$|f_i(x) - q_j| \geqslant 7\epsilon \qquad i,j = 1,2 \qquad x \in \partial\Omega \tag{3.6}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \epsilon \qquad x \in \overline{\Omega} \tag{3.7}$$

$$|q_1 - q_2| < \epsilon \tag{3.8}$$

y los puntos q_1 *y* q_2 *son valores regulares. Entonces* $grad(f_1,\Omega,q_1) = grad(f_2,\Omega,q_2)$.

Demostración. Ver [17]. ■

Ya disponemos de los elementos necesarios para construir la definición del grado para funciones $f \in C^1$ respecto a un valor singular $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$.

Por el Teorema de Sard, $f(S_f(\Omega))$ tiene medida cero y por lo tanto su complemento, $\complement f(S_f(\Omega))$, es denso en $\mathbb{R}^N$. Luego existe una sucesión $\{y_n\} \subset \complement f(S_f(\Omega))$ tal que $y_n \to y$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in f(\partial\Omega)$ $\forall n \geqslant n_0$.

Afirmación.

$$\lim_{n\to\infty} grad(f, \Omega, y_n)$$

existe y es independiente de la elección de la sucesión $\{y_n\}$.

Demostración. Como los y_n son valores regulares, por el Lema 3.8, con $f_1 = f_2 = f$, se tiene $d(f, \Omega, y_{n_0}) = d(f, \Omega, y_n)$ para todo $n \geqslant n_0$. En consecuencia dicho límite existe.

Sea $\{t_n\}$ otra sucesión tal que $t_n \to y$, con t_n valores regulares de f y $t_n \notin f(\partial\Omega)$ para cada $n \geqslant k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3.8 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f, \Omega, y_n) = d(f, \Omega, t_n)$ $\forall n \geqslant n_1$ y esto demuestra que el límite es independiente de la sucesión $\{y_n\}$. ■

Definición 3.10. Sea $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N - f(\partial\Omega)$ un valor singular. Se define el grado de f en Ω respecto a y, como

$$grad(f, \Omega, y) := \lim_{n\to\infty} grad(f, \Omega, y_n),$$

donde $\{y_n\}$ es una sucesión de valores regulares que converge a y.

El próximo lema es la versión del Lema de los siete epsilons para puntos singulares.

Lema 3.11. *Sean $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^N$ un valor singular y $\epsilon > 0$. Supóngase que*

$$|f_i(x) - y| \geqslant 8\epsilon \qquad x \in \partial\Omega \tag{3.9}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \epsilon \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

Entonces

$$grad(f_1, \Omega, y) = grad(f_2, \Omega, y).$$

Demostración. Ver [19]. ■

3.1.2 Propiedades del Grado de Brouwer

Teorema 3.12 (existencia)**.** *Sea $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), y \notin f(\partial\Omega)$. Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$ entonces existe un $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = y$.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Suponga que $\forall x \in \Omega\ f(x) \neq y$. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - y| > \epsilon$. Por el Teorema de aproximación de Weierstrass, existe $\{f_n\} \subset C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, y se tiene para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} \epsilon < |f(x) - y| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + |f_n(x) - y| \end{aligned}$$

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Por lo tanto

$$|f_n(x) - y| > \frac{\epsilon}{2} \qquad \textit{para } n \geqslant n_0, x \in \Omega.$$

Luego $x \notin f_n^{-1}(y)\ \forall x \in \Omega$ si $n \geqslant n_0$. Esto implica que $d(f_n, \Omega, y) = 0$ para $n \geqslant n_0$. Si n tiende a ∞, entonces $grad(f, \Omega, y) = 0$ lo cual contradice la hipótesis. ■

La segunda propiedad es un criterio muy importante para saber cuándo dos funciones tienen el mismo grado.

Teorema 3.13 (Invarianza Homotópica)**.** *Sea $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una homotopía de f y $g \in C(\overline{\Omega})$ tal que $H(x, t) \neq y$ para $x \in \partial\Omega$ y $t \in [0, 1]$. Entonces $d(H, \Omega, y)$ es constante en $[0, 1]$. En particular se tiene que $grad(f, \Omega, y) = grad(g, \Omega, y)$.*

Demostración. Sea $t \mapsto grad(H(\cdot, t), \Omega, y)$, el teorema se cumple al demostrar que la función es continua.

Por la continuidad uniforme de H, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces $|H(x,t_1) - H(x,t_2)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Por otra parte, como $y \neq H(\partial\Omega \times [0,1])$ entonces $|H(x,t) - y| > 9\epsilon$ para cada $t \in [0,1]$ y cada $x \in \partial\Omega$. Existen sucesiones $\{f_n^1\}$ y $\{f_n^2\}$ en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tales que $f_n^1(x) \to H(x,t_1)$, $f_n^2(x) \to H(x,t_2)$ uniformemente en $\overline{\Omega}$. Como en la demostración del Lema 3.10, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} 9\epsilon &< |H(x,t_1) - y| \\ &\leqslant |H(x,t_1) - f_n^1(x)| + |f_n^1(x) - y| \\ &< \epsilon + |f_n^1(x) - y|, \end{aligned}$$

es decir,

$$|f_n^1(x) - y| > 8\epsilon \qquad n \geqslant n_0, x \in \partial\Omega.$$

De manera similar se tiene que $|f_n^2(x) - y| > 8\epsilon$.

Finalmente, para $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} |f_n^1(x) - f_n^2(x)| \leqslant |f_n^1(x) - H(x,t_1)| + |H(x,t_1) - H(x,t_2)| \\ + |H(x,t_2) - f_n^2(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.7 o el Lema 3.10 según sea y regular o singular a f_n^i con $(i = 1,2)$ se concluye que $grad(f_n^1, \Omega, y) = grad(f_n^2, \Omega, y)$ para $n \geqslant n_0$. Cuando $n \to \infty$, de la Definición 3.11 se obtiene que $grad(H(\cdot,t_1), \Omega, y) = grad(H(\cdot,t_2), \Omega, y)$. Se ha demostrado que si $|t_1 - t_2| < \delta$ entonces $|grad(H(\cdot,t_1), \Omega.y) - grad(H(\cdot,t_2), \Omega, y)| < \epsilon$. Por lo tanto la aplicación es continua y como tiene valores en $\mathbb{Z}$, entonces $grad(H(\cdot,t), \Omega, y)$ es constante en $[0,1]$. ■

Se enunciara a continuación, sin demostración, otra propiedad importante del grado. Esta propiedad afirma que si se descompone el dominio en dos abiertos ajenos, la suma de los grados en cada abierto es igual al grado de la función en todo el dominio.

Teorema 3.14 (Extensión). *Si Ω_1 es un abierto con $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ y $y \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega)$,* *entonces*

$$grad(f, \Omega, y) = grad(f, \Omega_1, y) + grad(f, \Omega - \overline{\Omega_1}, y).$$

3.1.3 Dos Consecuencias de las Propiedades

Teorema 3.15. *Sean $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in \partial\Omega$, $y \notin f(\partial\Omega)$. Entonces $grad(f, \Omega, y) = grad(g, \Omega, y)$.*

Demostración. Basta simplemente con aplicar la propiedad de invarianza del grado por homotopía, a la función $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x).$$

■

Teorema 3.16 (Punto fijo de Brouwer)**.** *Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < 1\}$. Si $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ es continua, entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Se debe de garantizar que f tiene un punto fijo en ∂B o en B. Suponga que f no tiene puntos fijos en ∂B. Sea $H : \overline{B} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $H(x, t) = x - tf(x)$. H es una homotopía continua de I y $I - f$. Se sabe que $H(x, t) \neq 0$ para $x \in \partial B$ y $t \in [0, 1]$. Como $0 \in B$, por la invarianza bajo homotopía, se tiene

$$grad(I, B, 0) = grad(I - f, B, 0) = 1 \neq 0.$$

Luego por el teorema de existencia f tiene un punto fio en B. ■

3.2 Grado en Dimensión Infinita

En ecuaciones diferenciales los espacios de funciones en los cuales se trabaja son, generalmente, espacios de dimensión infinita. De allí surgió la necesidad de generalizar el concepto de grado a espacios de dimensión infinita. Éste se conoce como el grado de $Leray - Schauder$. Este concepto se define para operadores de la forma

$I - f$ donde f es un operador compacto. La idea consiste en aproximar f por medio de operadores de rango finito, lo cual permite encontrar un espacio de dimensión finita donde se puede aplicar el grado de *Brouwer*.

Inicialmente se enuncia un teorema de densidad, básico en la construcción de esta teoría. Seguidamente se presentan las condiciones que permiten definir el grado de Leray-Schauder de un operador definido en un abierto acotado de un espacio de Banach. El grado de Leray-Schauder tiene las mismas propiedades del grado de Brouwer y sus demostraciones son consecuencia directa de la definición.

Sea E un espacio de Banach real y $\Omega \subset E$ un abierto acotado. El siguiente teorema dice que un operador compacto, T, se puede aproximar por un operador de rango finito.

Teorema 3.17. *Sea Ω un abierto y acotado y $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ compacto. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ de rango finito tal que*

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x) - T_\epsilon(x)\| \leqslant \epsilon.$$

Demostración. Ver [9]. ■

Se considerará ahora un operador $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ compacto, y $y \in E-(I-T)(\partial\Omega)$. Se verá que existe $\alpha > 0$ tal que $dist(y,(I-T)(\partial\Omega)) \geqslant \alpha$. En efecto, si no fuera cierto, entonces existiría una sucesión $\{x_n\} \subset \partial\Omega$ tal que $\|y-(I-T)x_n\| \to 0$. Por la compacidad de T existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $T(x_{n_k})$ converge a un cierto y_0. Ahora

$$\|x_{n_k} - y_0 - y\| \leqslant \|y + T(x_{n_k}) - x_{n_k}\| + \|y_0 - T(x_{n_k})\| \to 0,$$

es decir $x_{n_k} \to y_0 + y$. Como $\partial\Omega$ es cerrado, $y_0 + y \in \partial\Omega$. Finalmente, la continuidad de T implica que $y_0 = T(y_0 + y)$ y así $y \in (I-T)(\partial\Omega)$, lo cual es una contradicción. Enseguida se garantizará la existencia de un subconjunto de dimensión finita en el cual se puede hablar del grado de Brouwer. Para $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ dado, por el teorema anterior existe $T_\alpha : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ de rango finito tal que

$$\sup_{x\in\Omega} \|T(x) - T_\alpha(x)\| \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Sea $E_\alpha := \langle T_\alpha(\overline{\Omega}), y\rangle$, el subespacio generado por la base de $T_\alpha(\overline{\Omega})$ y y. Sea $\Omega_\alpha := \Omega \cap E_\alpha$. Ω_α es un abierto en E_α, que es un espacio de dimensión finita. Ahora $d((I-T)|_{\overline{\Omega}_\alpha}, \Omega_\alpha, y)$ tiene sentido, es decir se puede hablar del grado de Brouwer, ya que primero, $(I - T_\alpha)(\overline{\Omega}_\alpha) \subset E_\alpha$ y segundo porque $y \notin (I - T_\alpha)(\partial\Omega_\alpha)$.

Efectivamente para $x \in \partial\Omega_\alpha$, se tiene

$$\|x - T_\alpha(x) - y\| \geqslant \|x - T(x) - y\| - \|T_\alpha(x) - T(x)\| \geqslant \|x - T(x) - y\| - \frac{\alpha}{2}.$$

Puesto que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$ y $\partial\Omega_\alpha \subset \partial\Omega$ se concluye que

$$\|x - T_\alpha(x) - y\| \geqslant \alpha - \frac{\alpha}{2} > 0.$$

El siguiente teorema permite definir el grado en dimensión infinita.

Teorema 3.18 (Reducción). *Sean* $X_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, X_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{M}}$ *espacios normados tales que* $dim(X_m) = m < dim(X_n) = n$. *Sean* $\Omega \subset X_n$ *un abierto acotado,* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow X_m$ *continua,* $y \in X_m - (I - f)(\partial\Omega)$. *Entonces*

$$grad(I - f, \Omega, y) = grad\left((I - f)|_{\overline{\Omega\cap X_m}}, \Omega \cap X_m, y\right)$$

Ahora, se dispone de los elementos que permiten definir el grado de Leray-Schauder.

Definición 3.19. Sea E un espacio de Banach real, $\Omega \subset E$ un abierto acotado, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ compacto y $y \in E - (I - f)(\partial\Omega)$. Sea f_ϵ como en el Teorema 3.17 y $\overline{E}$ un subespacio de dimensión finita que contenga a $\langle f_\epsilon(\overline{\Omega}), y\rangle$ y $\Omega_\epsilon := \Omega \cap \overline{E}$. Se define el grado de $Leray - Schauder$, así

$$grad(I - f, \Omega, y) = grad\left((I - f_\epsilon|_{\overline{\Omega_\epsilon}}, \Omega_\epsilon, y\right).$$

Se demostrará que la definición anterior es independiente de f_ϵ. En efecto, sean f_ϵ y $\tilde{f}_\epsilon$ como en la definición previa. Sean E_μ, E_η los subespacios de dimensión finita correspondientes a $\tilde{f}_\epsilon$ y f_ϵ respectivamente.

Sea $E_\delta := \langle E_\mu, E_\eta \rangle$, el generado por las bases de E_μ y E_η, $\Omega_\mu = \Omega \cap E_\mu$, $\Omega_\eta = \Omega \cap E_\eta$, $\Omega_\delta = \Omega \cap E_\delta$. Por el Teorema de reducción, se tiene que

$$grad[(I - \tilde{f}_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\mu}}, \Omega_\mu, y] = grad(I - \tilde{f}_\epsilon, \Omega_\delta, y) \tag{3.11}$$

$$grad[(I - f_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\eta}}, \Omega_\eta, y] = grad(I - f_\epsilon, \Omega_\delta, y) \tag{3.12}$$

Sean $\epsilon < \alpha$ y $H(x,t) := t(I - \tilde{f}_\epsilon)(x) + (1-t)(I - f_\epsilon)(x)$. H es una homotopía continua. Se puede ver usando la desigualdad del triángulo que $\|H(x,t) - (I - f)(x)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ y de aquí se concluye que $\|H(x,t) - y\| \geqslant \frac{\epsilon}{2} > 0$. Por lo tanto $H(x,t) \neq y$ $\forall (x,t) \in \partial\Omega_\delta \times [0,1]$.

Por la invarianza bajo la homotopía del grado de Brouwer, se tiene

$$grad(I - \tilde{f}_\epsilon, \Omega_\delta, y) = grad(I - f_\epsilon, \Omega_\delta, y) \tag{3.13}$$

De (3.11), (3.12) y (3.13) se concluye que

$$grad[(I - \tilde{f}_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\mu}}, \Omega_\mu, y] = grad[(I - f_\epsilon)|_{\overline{\Omega_\eta}}, \Omega_\eta, y].$$

3.2.1 Propiedades del Grado de Leray-Schauder

A continuación se presentaran sin dar demostración las principales propiedades del grado de Leray-Schauder.

Teorema 3.20. *Si $y \in \Omega$, entonces $grad(I, \Omega, y) = 1$; si $y \notin \overline{\Omega}, grad(I, \Omega, y) = 0$.*

Teorema 3.21 (Existencia)**.** *Si $grad(I, \Omega, y) \neq 0$, entonces existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(I - f)(x_0) = y$.*

Teorema 3.22 (Invarianza Homotópica)**.** *Sea $\Omega \subset E$ un abierto acotado y h :*

$[0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ *una homotopía compacta (es decir,* h *es continua y* $I|_{\overline{\Omega}} - h$ *es compacta) tal que* $h(x) \neq y$ *para* $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$*. Entonces* $grad(h(t,x),\Omega,y)$ *es constante para todo* $t \in [0,1]$*.*

Teorema 3.23 (Escisión)**.** *Sea* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *donde* Ω_i *son abiertos ajenos. Sean* f *compacto y* $y \notin (I-f)(\partial\Omega)$*. Entonces*

$$grad(I-f,\Omega,y) = grad(I-f,\Omega_1,y) + grad(I-f,\Omega_2,y).$$

Los teoremas siguientes son consecuencia del Teorema de invarianza del grado bajo homotopía.

Teorema 3.24. *Sean* $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ *funciones compactas,* $f(x) = g(x)\ \forall x \in \partial\Omega$*. Entonces si* $y \notin (I-f)(\partial\Omega)$*,*

$$grad(I-f,\Omega,y) = grad(I-g,\Omega,y).$$

Teorema 3.25 (Punto fijo de Schauder)**.** *Sea* D *un abierto acotado y conexo tal que* $0 \in D$*. Sea* $f : \overline{D} \longrightarrow E$ *una función compacta con* $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$*. Entonces* f *tiene un punto fijo.*

Como vimos, la teoria de Grado es una herramienta utilizada para determinar el número de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria o parcial, por medio de ella se han desarrollado métodos que permitieron obtener información sobre la existencia, el número de soluciones y la naturaleza de las soluciones. Estas herramientas se generalizaran en el siquiente capípulo.

Capítulo 4

Elementos de la Teoría de Índice

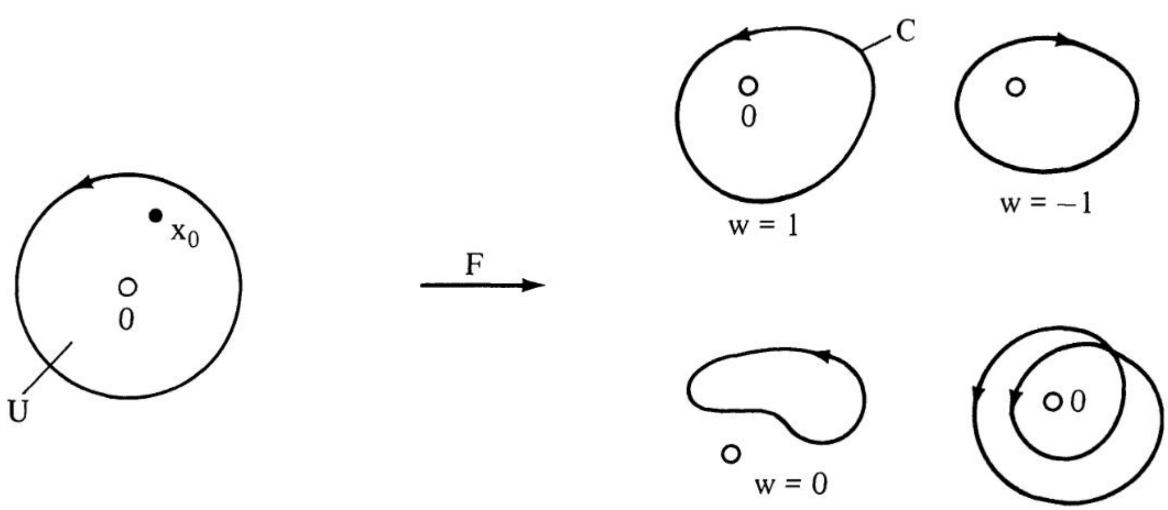
En las siguientes secciones, nos familiarizaremos con los conceptos de índice de un punto fijo y el grado de una aplicación. Estos dos conceptos forman una herramienta topológica profunda y crucial para establecer los teoremas de existencia en el presente trabajo. Nos esforzaremos para dotar de un enfoque muy elemental a los conceptos de índice de punto fijo y el grado de una aplicación, este enfoque requerirá una experiencia mínima del cálculo diferencial e integral.

4.1 Conocimientos Intuitivos y Conceptos Básicos

4.1.1 Número de Vueltas y El Grado de una Aplicación

Consideremos una aplicación continua sobre un disco cerrado de radio R, $\overline{U}(0,R)$, con centro en el origen en $\mathbb{R}^2$:

$$F : \overline{U}(0,R) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$



$w = 2$

Figura 1

A medida de que x viaja una vez alrededor de la frontera del disco, en una manera matemáticamente positiva, los puntos de la imagen $F(x)$ viajan a lo largo de una curva orientada C. Asumiremos que $0 \neq C$.

Consideremos a w_+ y a w_- como el número de vueltas sobre el origen en una manera matemática positiva y negativa, y definamos el grado de una aplicación por

$$grad(F,U) = w_+ - w_-. \tag{4.1}$$

donde $U = U(0, R)$. Como en la Figura 1 donde $w = w_+ - w_-$. Esta definición nos conduce a dos resultados importantes.

(1) **Principio de existencia de Kronecker.** Si $grad(F, U) \neq 0$ entonces existe $x_0 \in U$ con $F(x_0) = 0$.

(2) **Invarianza homotópica.** Si F cambia continuamente de alguna manera que ninguna de las curvas correspondientes C pase a travez del origen, entonces $grad(F, U)$ se mantiene sin cambio.

Ilustraremos estos dos principios con una demostración geométrica del Teorema Fundamental del Álgebra: sea

$$h(z, t) = z^n + (a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)t, \qquad n \neq 0,$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $t \in [0, 1]$. Si $|z| = R$ y R es suficientemente grande, entonces para todo z y todo $t \in [0, 1]$ tenemos que

$$|h(z, t)| \geqslant R^n - t(|a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_0|) > 0. \tag{4.2}$$

Cuando z recorre la frontera del disco $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ en una manera positiva, $h(z, 0) = z^n$ gira sobre el origen n veces en una manera positiva. Como t varía de 0 a 1, $h(z, 0)$ se transforma en $h(z, 1)$ sin tocar el origen, por (4.2). Así de (2) se tiene que

$$grad(h_1, U) = grad(h_0, U) = n, \; n \neq 0 \qquad donde \qquad h_t(z) = h(z, t).$$

Entonces (1) implica que existe $z_0 \in U$ con $h(z_0, 1) = 0$. Esto es el Teorema Fundamental del Álgebra.

Es importante observar que el grado de una aplicación es igual a la suma de las multiplicidades de los ceros de la aplicación.

4.1.2 El Grado de una Función en $\mathbb{R}$

Sea $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $F(a) \neq 0$ y $F(b) \neq 0$ y $-\infty < a < b < \infty$. Haciendo un pequeño cambio de F a $\bar{F}$, si es necesario, siempre se puede obtener la siguiente situación genérica Figura 2

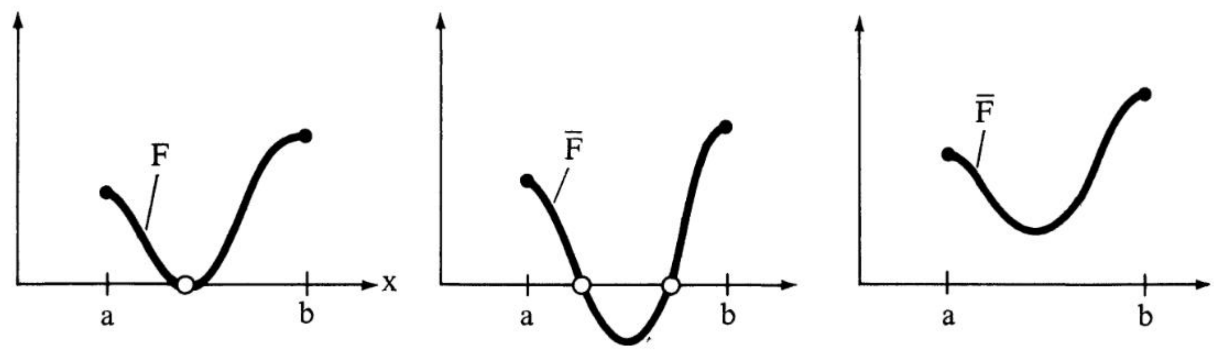


Figura 2

(a) La función $\bar{F}$ es continuamente diferenciable sobre $[a, b]$ y, como F, no tiene ceros en los puntos frontera.

(b) En el interior del intervalo $[a, b]$, la función $\bar{F}$ no tiene o sólo un número finito de ceros, $x_1, \ldots, x_m$, y estos son todos regulares (no degenerados), es decir, $\bar{F}'(x_i) \neq 0$ para todo i.

Entonces consideramos

$$grad(\bar{F}, G) = \sum_{i=1}^{m} sgn(\bar{F}'(x_i))$$

donde $G = (a, b)$, y definamos

$$grad(F, G) = grad(\bar{F}, G).$$

Si $\bar{F}$ no tiene ceros sobre $[a, b]$, entonces $grad(\bar{F}, G) = 0$. Si llamamos al $sgn(\bar{F}(x_i))$ como el índice cero, entonces $grad(\bar{F}, G)$ es igual a la suma de los índices cero de $\bar{F}$ sobre G.

Si $F : \bar{G} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $G = (a, b)$, entonces

$$grad(F, G) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(a), F(b) > 0, \\ 1 & \text{si } F(a) < 0 \text{ y } F(b) > 0, \\ -1 & \text{si } F(a) > 0 \text{ y } F(B) < 0. \end{cases}$$

Entonces $grad(F, G) \neq 0$ siempre ímplica la existencia de al menos una solución de $F(x) = 0$ sobre G. Esto no es más que el clásico Teorema del Valor Intermedio. También es notable que $grad(F, G)$ dependa solamente de los valores en la ∂G.

4.1.3 El Grado de una Aplicación en $\mathbb{R}^N$

Para un $y \in \mathbb{R}^N$ fijo queremos que $grad(F, G, y)$ sea medida del número de soluciones de la ecuación

$$F(x) = y, \qquad x \in \bar{G},$$

tomando en consideración las multiplicidades positivas y negativas. Cuando $y = 0$, simplemente escribimos $grad(F, G)$.

Sea $F : \bar{G} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua sobre el cerradura del conjunto acotado abierto G. En analogía con $\mathbb{R}$ nuestra definición se basa en las siguientes dos formulas

$$grad(\bar{F}, G, y) := \sum_{i=1}^{m} sgn(det(\bar{F}(x_i))) \tag{4.3}$$

y

$$grad(F, G, y) := grad(\bar{F}, G, y). \tag{4.4}$$

Más precisamente, consideremos $grad(F, G, y) = 0$ para $G = \varnothing$ y para G no vacío y y fijo, se requiere que

(a) $F(x) \neq y$ sobre ∂G;

(b) la aplicación $\bar{F} : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es C^1 con

$$\sup_{x \in \partial G} \|F(x) - \bar{F}(x)\| < \inf_{x \in \partial G} \|F(x) - y\|,$$

así la ecuación

$$\bar{F}(x) = y, \qquad x \in \bar{G}$$

no tiene o tiene exactamente un número finito de soluciones $x_1, \ldots, x_m$, todas de las cuales son regulares, es decir, $det(\bar{F}'(x_i)) \neq 0$ para todo i, En otras palabras, y es un valor regular de $\bar{F}$. Si no existen soluciones, tomamos a $grad(\bar{F}, G, y) = 0$.

Esto nos lleva a un hecho importante de que $grad(F, G, y)$ es invariante bajo una perturbación. Esta propiedad es crucial para las aplicaciones. Permite un cálculo del $grad(F, G, y)$ a través de una reducción a aplicaciones más simples. Entonces $grad(F, G, y) \neq 0$ implica la existencia de la solución de la ecuación

$$F(x) = y, \qquad x \in \bar{G}.$$

Si no llegara a haber solución, entonces $\bar{F}(x) = y, x \in \bar{G}$ tampoco tendría solución para una aproximación $\bar{F}$, y así $grad(\bar{F}, G, y) = 0$. Pero entonces (4.4) implica que $grad(F, G, y) = 0$, lo cuál es una contradicción.

De (a), el infimo en (b) es mayor que cero. El significado intuitivo de (a) es que, naturalmente, una pequeña perturbación de F no puede causar que las soluciones de $F(x) = y$, con $x \in \bar{G}$, se anulen en la frontera.

4.1.4 El Grado de una Aplicación Lineal Local

Cuando x_0 es una solución aislada de $F(x) = y$, definimos

$$grad(F, x_0, y) := grad(F, U(x_0), y),$$

donde $U(x_0)$ es una vecindad suficientemente pequeña de x_0. En el caso $F : U(x_0) \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, esta definición es independiente de $U(x_0)$. En el caso donde la aplicación sea de clase C^1 con $det(F'(x_0)) \neq 0$, tenemos que

$$grad(F, x_0, y) = sgn(det(F'(x_0))).$$

Cuando $y = 0$ escribimos $deg(F, x_0)$ y lo llamamos índice cero de x_0.

4.1.5 Índice de Punto Fijo

Además de la ecuación de punto fijo

$$f(x) = x, \qquad x \in \bar{G},$$

consideramos una ecuación equivalente

$$x - f(x) = 0, \qquad x \in \bar{G},$$

y definimos el índice de punto fijo de una manera natural por

$$i(f, G) := grad(I - f, G, 0).$$

El índice de punto fijo es una medida del número de puntos fijos de f sobre G, tomando en cuenta multiplicidades.

Si tenemos un índice de punto fijo, podemos regresar al grado de una aplicación a través de

$$grad(F, G, y) = i(f, G) \qquad donde \qquad F(x) = x - f(x) + y.$$

4.1.6 Homotopía

Dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ entre espacios topologicos X y Y son llamados homotópicos si y sólo si existe una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \qquad y \qquad H(x, 1) = g(x) \qquad \forall x \in X.$$

Definición 4.1. 1. Sea $V(G, X)$ el conjunto de todos las aplicaciones f de la forma siguiente:

(i) $f : \bar{G} \subset X \longrightarrow X$ es compacto, donde G es un conjunto abierto acotado en un espacio de Banach X;

(ii) f no tiene puntos fijos sobre la frontera ∂G.

2. Dos aplicaciones $f, g \in V(G, X)$ se dice que son *compactamente homotópicos* sobre ∂G si y sólo si existe una aplicación H con las siguientes propiedades:

   (i) $H : \bar{G} \times [0, 1] \longrightarrow X$ es compacto;

   (ii) $H(x, t) \neq x$ para todo $(x, t) \in \partial G \times [0, 1]$;

   (iii) $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ sobre $\overline{G}$.

Escribimos $\partial G : f \simeq g$. La aplicación H es llamada una *homotopías compactas.*

Para abreviar, llamaremos a las *homotopías compactas* simplemente *homotopías.* Así, para evitar confuciones, llamaremos homotopías en el sentido topologico general, *homotopías topológicas.* Notemos que aplicaciones continuas y compactas son las mismas sobre conjuntos cerrados $\overline{G}$ en espacios de Banach de dimensión finita.

Es importante que la homotopía se puede caracterizar por una condición más débil. Para $f, g \in V(G, X)$ tenemos que:

(H) La relación homotópica $\partial G : f \cong g$ se cumple si y sólo si existe una aplicación compacta $H : \partial G \times [0, 1] \longrightarrow X$ con

$$H(x, 0) = f(x) \qquad y \qquad H(x, 1) = g(x) \qquad sobre\, \partial G$$

mientras que $H(x, t) \neq x$ para todo $(x, t) \in \partial G \times [0, 1]$.

Para demostrar (H), primero extenderemos la aplicación $H : \partial G \times [0, 1] \longrightarrow X$ por medio de $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in \bar{G}$. llamaremos a la extención de la imagen como A. Para extender a un mapeo continuo $H : \bar{G} \times [0, 1] \longrightarrow X$ utilizaremos el Teorema de *Extensión* (la demostración se dará al final de la sección) cuya imagen cae en $co(A)$ (cubierta convexa de A). Como $\overline{G}$ es acotado y f, g son compactos, el conjuntos A es relativamente compacto y por tanto, también lo es $co(A)$. En consecuencia, la aplicación extendido $H : \overline{G} \times [0, 1] \longrightarrow X$ es compacto.

Proposición 4.2. *Aplicaciones en la clase $V(G, X)$ y las relaciones de homotopía:*

(1) si $f \in V(G, X)$ entonces $\inf_{x \in \partial G} \|f(x) - x\| > 0$;

(2) el conjunto de puntos fijos $f \in V(G, X)$ es compacto;

(3) la relación $\partial G : f \cong g$ es una relación de equivalencia;

(4) la relación $\partial G : f \cong g$ se cumple si $f, g \in V(G, X)$ y

$$\sup_{x \in \partial G} \|f(x) - g(x)\| < \inf_{x \in \partial G} \|f(x) - x\|;$$

(5) para cada homotopía H existe una constante a tal que

$$\|H(x,t) - x\| \geqslant a > 0 \qquad \forall (x,t) \in \partial G \times [0,1].$$

Notemos que si $G = \varnothing$, entonces, por definición, el inf *y el* sup *son iguales a $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente.*

Demostración. Sólo demostraremos $(2) - (5)$

(2) Si $f(x_n) = x_n$ y $x_n \in \bar{G}$ para todo n, entonces la compacidad de f ímplica que existe una subsucesión $\{x_{n'}\}$ tal que $f(x_{n'}) \to x$, cuando $n \to \infty$. Así $x_{n'} \to x$ y por lo tanto $f(x) = x$.

(3) $REFLEXIVIDAD$: Tenemos $\partial G : f \cong f$ por $H(x,t) = f(x)$.

$SIMETRÍA$: si $\partial G : f \cong g$ por H, entonces $\partial G : g \cong f$ por $H_1(x,t) = H(x, 1-t)$.

$TRANSITIVIDAD$: si $\partial G : f \cong g$ por H_1 y $\partial G : g \cong h$ por H_2 entonces $\partial G : f \cong h$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ H_2(x, 2t-1), & \text{para } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

(4) Sea $H(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$. Entonces H es compacto sobre $\bar{G} \times [0,1]$, y para todo $(x,t) \in \partial G \times [0,1]$ tenemos que

$$\|H(x,t) - x\| \geqslant \|f(x) - x\| - \|f(x) - g(x)\| > 0.$$

(5) si no fuera cierto, existe una sucesión de elementos (x_n, t_n) en $\partial G \times [0,1]$ para los cuales $H(x_n, t_n) - x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como H es compacto, existe además una subsucesión convergente $(x_{n'}, t_{n'})$ tal que $H(x_{n'}, t_{n'}) \to x$ cuando $n \to \infty$. Entonces $x_{n'} \to x$ y $x \in \partial G$. Existe otra subsucesión para la cuál $t_{n''} \to t$ cuando $n \to \infty$. Así $H(x,t) \to x$ con $(x,t) \in \partial G \times [0,1]$ Lo cuál contradice la Definición 4.1.

■

Definición 4.3. Para cada $f \in V(G,X)$, consideramos un entero $i(f,G)$, llamada la *aplicación de punto fijo* de f sobre G de modo que los siguientes axiomas se cumplan.

(A1) (Normalización). Si $f(x) = x_0$ para todo $x \in \bar{G}$, y algún $x_0 \in G$ fijo, entonces $i(f,G) = 1$.

(A2) (Principio de existencia de *Kronecker*). Si $i(f,G) \neq 0$, entonces exsiste una $x \in G$ tal que $f(x) = x$.

(A3) (Aditividad). Tenemos

$$i(f,G) = \sum_{j=1}^{n} i(f,G_i)$$

siempre que $f \in V(G,X)$ y $f \in V(G_j,X)$ para toda j, donde $\{G_j\}$ es una partición regular de G, es decir, los G_j son ajenos 2 a 2 y $\bar{G} = \bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_j$ (*Figura* 3).

(A4) (Invarianza Homotópica). Si $\partial G : f \cong g$, entonces $i(f,G) = i(g,G)$.

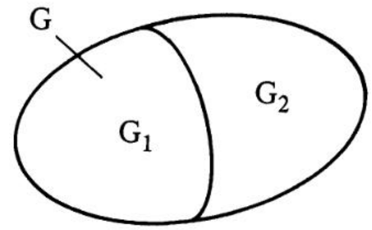


Figura 3

Ahora discutiremos estos axiomas. Relacionamos el índice de punto fijo con el hecho de que $i(f, G)$ mide el número de puntos fijos de f sobre G, tomando múltiplicidades, si existen. En Axioma $(A1)$, la aplicación tiene exactamente un punto fijo x_0. La condición $i(f, G) = 1$ no es más que una normalización, de acuerdo con $(A2)$. Axioma $(A2)$ contiene la prueba primaria para utilizar el índice de punto fijo en las demostraciones de existencia. Si, en $(A3)$ la aplicación f no tiene puntos fijos sobre cualquier ∂G_j, entones $f \in V(G, X)$ ímplica que $f \in V(G_j, X)$ para toda j. En el Axioma $(A3)$ y en otras ocaciones no distinguiremos la diferencia entre la aplicación f y su restricción sobre $\bar{G}_j$ así que mantendremos la notación simple. Axioma $(A4)$ describe la estabilidad del índice de punto fijo bajo una deformación continua que no dan lugar a puntos fijos sobre la frontera ∂G.

Más adelante, demostraremos que en efecto existe un índice de punto fijo que satisface $(A1)$ a $(A4)$, y que es único. Antes de eso queremos demostrar que los axiomas nos llevan a una serie de consecuencias importantes. Una estrategia general de la demostración es la siguiente:

(a) relacionar una aplicación dada f por una homotopía a una aplicación más simple para la cuál $i(g, G)$ se conoce,

(b) aplicar $(A4)$ para obtener $i(f, G) = i(g, G) \neq 0$, y entonces $(A2)$ para concluir que la aplicación f tiene un punto fijo sobre G.

4.1.7 Propiedades Generales

Ahora enunciaremos algunas consecuencias de los axiomas.

Proposición 4.4. *Los siguientes enunciados se cumplen para todos las aplicaciones*

$$f, g \in V(G, X).$$

(1) (*Dependencia sobre valores frontera*). *Si* $f(x) = g(x)$ *sobre* G, *entonces* $i(f, G) = i(g, G)$

(2) (*libre de Punto Fijo*). *Si* f *es libre de punto fijo, entonces* $i(f, G) = 0$.

(3) (*Propiedad de escisión*). *Para* $G_1 \subset G$ *se tiene* $i(f, G) = i(f, G_1)$, *si* f *es libre de punto fijo sobre el conjunto* $\bar{G} - G_1$ *y el conjunto* G_1 *es abierto* (*Figura* 4).

(4) (*Continuidad del índice de punto fijo*). *Si*

$$\sup_{x \in \partial G} \|f(x) - g(x)\| < \inf_{x \in \partial G} \|f(x) - x\|$$

entonces $i(f, G) = i(g, G)$.

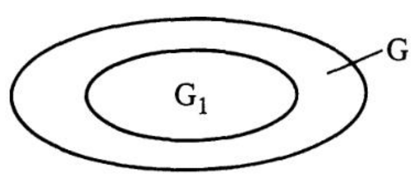


Figura 4

De manera inmediata utilizaremos estas propiedades. *Propiedad* (1) dice que el índice de punto fijo $i(f, G)$ depende sólo de los valores frontera de f. En realidad, la propiedad (1) es un caso espacial de la propiedad (4), y la segunda es consecuencia inmediata del axioma ($A4$), la Proposición 4.2 dice que $\partial G : f \cong g$. También la propiedad (4) implica inmediatamente que la aplicación $f \mapsto i(f, G)$ es continua sobre $V(G, X)$.

Propiedad (2) es una consecuencia inmediata del axioma ($A2$). En particular, tenemos $i(f,G) = 0$ cuando $G = \varnothing$. Hay un número de situaciones, por elemplo en *bifurcación topológica*, donde es ventajoso permitir el conjunto vacío.

Finalmente, *Propiedad* (3) se sigue del axioma ($A3$), el cuál dice que

$$i(f,G) = i(f,G_1) + i(f,\bar{G} - G_1),$$

y de propiedad (2), el cual dice que $i(f,\bar{G} - G_1) = 0$ cuando f no tiene puntos fijos sobre $\bar{G} - G_1$. Esto completa la demostración de la Proposición 4.4.

Una vez que tenemos un índice de punto fijo, podemos definir el grado de una aplicación en forma paralela con las definiciones anteriores al grado de una aplicación.

Definición 4.5. Sea $F : \bar{G} \subset X \longrightarrow X$ una aplicación definida sobre la cerradura de un conjunto acotado abierto G en un espacio de Banach X, sin valor fijo y sobre la frontera ∂G, es decir, $y \notin F(\partial G)$. Más aun, sea F una perturbación compacta de la identidad, es decir,

$$F = I - f$$

donde f es compacta sobre $\bar{G}$. Entonces definimos el*grado de una aplicación* por

$$grad(F,G,y) = i(f + y, G).$$

Esta definición de una aplicación de grado está basado sobre el hecho de que la ecuación $F(x) = y$ es equivalente a la ecuación de punto fijo $g(x) = x$. Por lo que la aplicación de grado $grad(F,G,y)$ *mide el número de soluciones* de la ecuación

$$F(x) = y, \qquad x \in \bar{G}.$$

tomando en consideración las multiplicidades positivas y negativas.

Definición 4.6 (Índice de Punto Fijo Local)**.** Sea $f : U(x_0) \subset X \longrightarrow X$ una aplicación compacta sobre una vecindad de x_0 en un espacio de Banach X, y sea x_0

un punto fijo aislado de f. Entonces definimos el índice de punto fijo local de f en el punto x_0 por

$$i(f, x_0) := i(f, U(x_0, R)),$$

donde el radio R de la bola $U(x_0, R)$ a través de x_0 es suficientemente pequeño.

La propiedad de escisión combinada con el hecho de que x_0 es un punto fijo aislado demuestra que para un $R > 0$ suficientemente pequeño, esta definición es independiente de R ($Figura$ 5). Si aplicamos el axioma ($A3$) y una partición como en la $Figura$ 6, obtendremos una demostración instantanea del siguiente resultado.

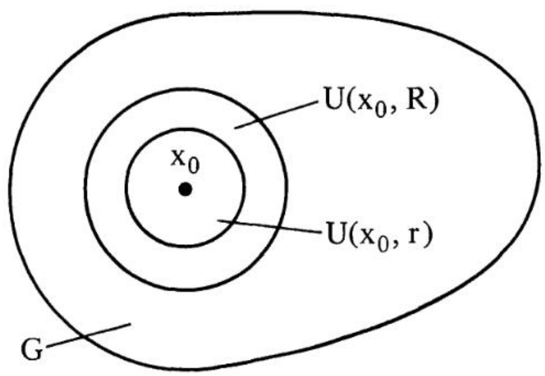


Figura 5

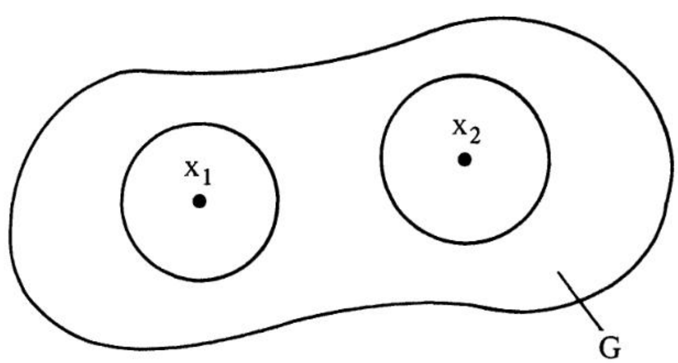


Figura 6

Proposición 4.7 (Teorema de Suma del Índice). *Si la aplicación* $f \in V(G, X)$ *tiene sólo un número finito de puntos fijos* $x_1, \ldots, x_m$ *sobre* G*, entonces*

$$i(f, G) = \sum_{j=1}^{m} i(f, x_j).$$

Para definir la *aplicación local del grado*, consideramos la aplicación $F : U(x_0) \subset X \longrightarrow X$ en una vecindad de x_0 en un espacio de Banach X, que es una perturbación compacta de la unidad. Además, x_0 es una solución aislada de la ecuación

$$F(x) = y, \qquad con\, y\, fijo.$$

Dado esto, sea

$$grad(F, x_0, y) := grad(F, U(x_0, R), y).$$

La relación entre el grado de una aplicación y el índice de punto fijo inmediatamente implica que esta definición también es independiente de R para $R > 0$ suficientemente pequeño.

4.1.8 Existencia y Unicidad del Índice de Punto Fijo en $\mathbb{R}^N$ y en Espacios de Banach

Definición 4.8. Sea G un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$. Entonces $V_0(G, \mathbb{R}^N)$ denota el conjunto de todas las aplicaciones f con las siguientes propiedades:

(i) la aplicación $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es continua y es una aplicación C^1 sobre G,

(ii) la aplicación f tiene un número finito de puntos fijos, si los hay, todos los puntos fijos son regulares y ninguno de ellos se encuentra en la frontera ∂G.

Definición 4.9 (Índice de Punto Fijo)**.** (a) Para $f \in V_0(G, \mathbb{R}^N)$ sea

$$i(f, G) = \sum_{j=1}^{m} sgn(det(F'(x_j))),$$

donde $F(x) = x - f(x)$ y $x_1, \ldots, x_m$ son puntos fijos de f sobre G.

(b) Para $f \in V(G, \mathbb{R}^N)$ y $G \neq \varnothing$ elegimos una $\bar{f} \in V_0(G, \mathbb{R}^N)$ con

$$\sup_{x \in \partial G} \|f(x) - \bar{f}(x)\| < \inf_{x \in \partial G} \|f(x) - x\|$$

y definimos

$$i(f,G) = i(\bar{f},G).$$

(c) Para $G = \varnothing$, $i(f,G) = 0$.

Ejemplo 4.10. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $-\infty < a < b < \infty$. Pongamos $F(x) = x - f(x)$. Sea $\bar{F}$ definida en términos de $\bar{f}$. Consideremos $G = (a,b)$. Los punto fijos de f son los mismos que los ceros de F.

Si $f \in V(G,\mathbb{R})$, f no tiene puntos fijos en la frontera, y por lo tanto F no tiene ceros, sobre la frontera de $[a,b]$. Con el fin de calcular $i(f,G)$, por Definición 4.8 debemos elegir una función $f \in V_0(G,\mathbb{R})$ que aproxima a f suficientemente. Esto significa que eligiremos una función $\bar{F} \in C^1[a,b]$ con

$$|F(x) - \bar{F}(x)| < |F(x)| \qquad para\, x = a, b,$$

donde $\bar{F}$ a lo más tiene un número finito de ceros, $x_1, \ldots, x_m$ sobre (a,b), todos en los cuales son regulares, es decir, $\bar{F}'(x_j) \neq 0$ para toda j. Entonces

$$i(f,G) = grad(F,G) = \sum_{j=1}^{m} sgn(\bar{F}'(x_j)).$$

Si $\bar{F}$ no tiene ceros, entonces $i(f,G) = grad(F,G) = 0$. Una mirada a la Figura 7, con $F = \bar{F}$, demuestra que

$$i(f,G) = grad(F,G) = \begin{cases} 0, & \text{si } F(a)F(b) > 0, \\ 1, & \text{si } F(a) < 0 \text{ y } F(b) > 0, \\ -1, & \text{si } F(a) > 0 \text{ y } F(b) < 0. \end{cases}$$

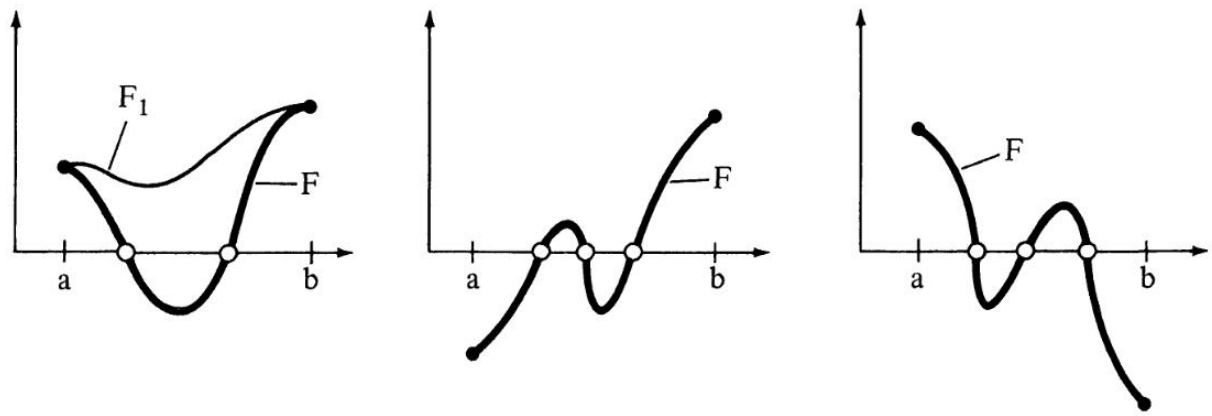


Figura 7

La homotopía $\partial G : f \cong f_1$ significa que existe un mapeo continuo $H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$H(x,0) = f(x) \qquad y \qquad H(x,1) = f_1(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

como también $H(x,t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$ y $x = a, b$. Un argumento elemental demuestra que

$$\partial G : f \cong f_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad F(a)F_1(a) > 0 \quad y \quad F(b)F_1(b) > 0.$$

Por lo que se tiene $F_1(x) = x - f_1(x)$.

Los siguientes dos teoremos los enunciaremos sin demostración.

Teorema 4.11 (Índice de Punto Fijo de Brouwer)**.** *Para todo $f \in V(G, \mathbb{R}^N)$ y todo $V(G, \mathbb{R}^N)$ con $N \geqslant 1$ arbitrario, entonces existe exactamente un índice de punto fijo que satisface los axiomas* (*A*1) *a* (*A*4) *y este índice es el definido en la Definición* 4.8.

Demostración. Ver [37] ∎

Teorema 4.12 (Índice de Punto Fijo de Leray-Schauder)**.** *Para todos los mapeos $f \in V(G, X)$ y todo $V(G, X)$ con espacios de Banach arbitrarios X, entonces existe exactamente un índice de punto fijo que satisface los axiomas* (*A*1) *a* (*A*4).

Demostración. Ver [37]. ∎

4.2 Aplicaciones del Índice de Punto Fijo

En esta sección demostraremos como el índice de punto fijo $i(T, G)$ se puede aplicar facilmente para ontener un número inportante de resultados con respecto al operador T, considerando simplemente la homotopía

$$H(x,t) = tT(x) + (1-t)g(x), \tag{4.5}$$

donde $g = g_j$ y $g_1(x) = x_0$ o $g_2(x) = 2x$. Se sigue de $(A1)$ y la Definición 4.8, repectivamente que

$$i(g_1, G) = 1 \qquad para\, x_0 \in G \tag{4.6}$$

y

$$i(g_2, G) = (-1)^N \qquad para\, G \subset \mathbb{R}^N\, y\, 0 \in G. \tag{4.7}$$

Los enunciados correspondientes para el Mapeo de Grado son

$$grad(I - x_0, G) = 1 \qquad para\, x_0 \in G$$

y

$$grad(-I, G) = (-1)^N \qquad G \subset \mathbb{R}^N\, y\, 0 \in G.$$

Si consideramos:

- ⋆ un principio de punto fijo general;
- ⋆ dualidad entre problemas de punto fijo en una región y problemas de valor propio sobre la frontera;
- ⋆ salto de índice y principio general de valor propio;

4.2.1 Un Principio de Punto Fijo General

Este principio general se basa en la siguiente condición geométrica simple.

(H1) El conjunto imagen $T(\partial G)$ no contiene puntos de rayos exteriores, es decir, existe un $x_0 \in G$ tal que

$$Tx \neq x_0 + \tau(x - x_0) \qquad \forall \tau > 1 \, y \, x \in \partial G.$$

En la Figura 8 esto significa que para cada $x \in \partial G$, el punto Tx no cae sobre el rayo punteado.

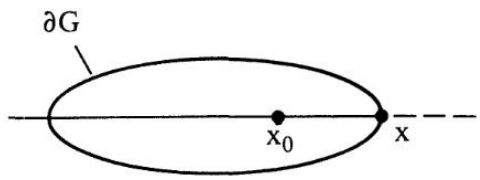


Figura 8

(H2) El operador $T : \bar{G} \subset X \longrightarrow X$ es compacto sobre la cerradura del conjunto acotado abierto no vacío G en el espacio de Banach X.

Teorema 4.13 (Principio de Punto Fijo de Rayos Omitidos)**.** *Sean* $(H1)$ *y* $(H2)$ *satisfechos. Entonces* T *tiene un punto fijo.*

Demostración. Si T tiene un punto fijo sobre ∂G, entonces no hay nada que hacer. Si no, entonces $T \in V(G; X)$. Consideremos la homotopía (4.5) con $g(x) = x_0$. Se sigue de $(H1)$ que

$$H(x,t) \neq x \qquad \forall (x,t) \in \partial G \times [0,1].$$

Si $H(x,t) = x$, entonces

$$tTx + (1-t)x_0 = x.$$

Se sigue que $t \neq 0$ y $t \neq 1$ y por lo tanto

$$Tx = x_0 + t^{-1}(x - x_0), \qquad t^{-1} > 1.$$

Pero esto contradice $(H1)$. Por la invarianza homotópica $(A4)$ del índice de punto fijo y por (4.6), obtenemos

$$i(T,G) = i(g,G) = 1.$$

Por el principio de existencia $(A2)$, el operador T entonces tiene un punto fijo. ■

(D) (Principio de Dualidad). Sea G un conjunto acotado abierto en un espacio de Banach X con $0 \in G$ y sea $T : \bar{G} \longrightarrow X$ un operador compacto. Entonces existen exactamente dos posibles situaciones:

   (a) el operador T tiene un vector propio sobre ∂G con valor propio $\lambda > 1$;

   (b) (a) no es el caso, y T tiene un punto fijo sobre $\bar{G}$.

Más adelante veremos que (D) corresponde la dualidad entre el principio de salto de índice, que es la teoria fundamental de bifurcación, y el principio de continuación global.

4.2.2 Un Principio de Valor Propio General

Consideremos la ecuación de valor propio

$$Tx = \lambda Sx, \qquad x \in \partial G, \lambda < 0. \tag{4.8}$$

Aplicando el índice de punto fijo a los problemas de valor propio, aprovechamos el hecho de que el índice de punto fijo salta. En el caso que nos ocupa, la condición fundamental es

$$i(I - T, G) \neq i(I - S, G),$$

el cual, traducido al mapeo de grado, se lee

$$grad(T, G) \neq grad(S, G). \tag{4.9}$$

Este salto en el índice, significa que los mapeos no son homotópicos. En particular, el punto en el que una homotopía lineal no ofrece una solución de (4.8), como veremos a continuación.

Proposición 4.14 (Principio de Valor Propio)**.** *Sea G un conjunto acotado abierto no vacío en un espacio de Banach X. Sean $T, S : \bar{G} \longrightarrow X$ las perturbaciones compactas de la identidad con $Tx \neq 0$ y $Sx \neq 0$ sobre ∂G.*

Si la condición de salto de índice (4.9) *se satisface, entonces el problema de valor propio* (4.8) *tiene una solución.*

Demostración. Propongamos

$$H(x,t) = tTx + (1-t)Sx.$$

Debido a (4.9) y la invarianza homotópica del mapeo de grado, H no puede ser una homotopía *mod* 0. Esto es que existe un punto $(x,t) \in \partial G \times [0,1]$ para el cual $H(x,t) = 0$. Como $Tx \neq 0$ y $Sx \neq 0$ sobre ∂G, podemos tener ni $t = 1$ ni $t = 0$. Pero entonces (4.8) tiene una solución. ■

Ejemplo 4.15. El problema de valor propio

$$Tx = \lambda x, \qquad x \in \partial G, \tag{4.10}$$

tiene una solución, en $\mathbb{R}^N$ con N impar, con un valor propio real $\lambda \neq 0$, si

(i) el conjunto G es acotado y abierto en $\mathbb{R}^N$ con $0 \in G$, y

(ii) el mapeo $T : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es continuo y $Tx \neq 0$ sobre ∂G.

Esta última condición es necesaria para $\lambda \neq 0$.

Demostración. Sea $S = \pm I$. Entonces $grad(S,G) = \pm 1$. Por lo tanto, siempre se satisface (4.9), y la conclución es consecuencia inmediata de la Proposición 4.13. ■

4.2.3 Un Continuo de Puntos Fijos

Consideremos el siguiente problema. Supongamos que tenemos una ecuación operacional

$$x = Tx, \qquad x \in \bar{G}, \tag{4.11}$$

y sabemos que pequeñas perturbaciones de esta ecuación tiene soluciones unicas.

Una mirada a la Figura 9 demuestra que la propia ecuación no necesita tener solución única. Sin embargo, una segunda mirada nos llevaría a esperar que al menos un conjunto de soluciones conexas como el límite de los conjuntos solución de las ecuaciones que tienen solución única.

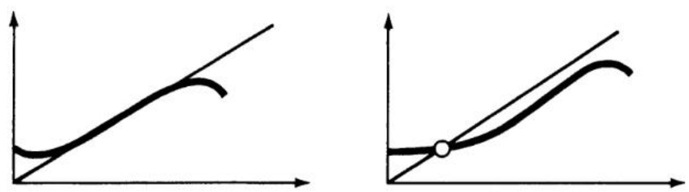


Figura 9

En efecto, bajo hipótesis adecuadas, el conjunto solución $Fix(T)$ de (4.11) forma un continuo, es decir, un conjunto compacto, conexo.

Indicando nuestra situación con más precisión, estudiaremos simultáneamente la ecuación (4.11) y la ecuación perturbada

$$x = T_\varepsilon x + y, \qquad x \in \bar{G} \tag{4.12}$$

teniendo en cuenta la condición de aproximación

$$\sup_{x \in \bar{G}} \|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon \tag{4.13}$$

para todo $\varepsilon > 0$ y la determinante condición del índice de punto fijo

$$i(T, G) \neq 0. \tag{4.14}$$

Teorema 4.16 (Krasnoselskii y Perov (1959))**.** *El conjunto solución de la ecuación* (4.11) *es un continuo no vacío bajo las siguientes condiciones.*

(i) El operador $T \in V(G, X)$ satisface (4.14).

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un operador compacto $T_\varepsilon : \bar{G} \subset X \longrightarrow X$ que satisface (4.13) *de modo que la ecuación de aproximación* (4.12) *tiene a lo más una solución x para cada $y \in X$ dado, con $\|y\| < \varepsilon$.*

Demostración. El conjunto solución $Fix(T)$ de (4.11) es no vacío, por (4.14) y compacto por la Proposición 4.2.

Supongamos que $Fix(T)$ no es conexo. Entonces existe una partición

$$Fix(T) = M_1 \cup M_2 \qquad con \qquad M_1 \cap M_2 = \varnothing,$$

donde M_1 y M_2 son no vacias y cerradas, y por lo tanto compactas. Con el fin de extraer una contradicción, escojamos vecindades abiertas G_i de M_i con

$$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \varnothing \qquad y \qquad \bar{G}_i \subset G \qquad para\, i = 1, 2$$

(Figura 10). Si ponemos a M igual a la cerradura de $G_1 \cup G_2$ entonces

$$i(T, G) = i(T, G_1) + i(T, G_2) + i(T, G - M). \tag{4.15}$$

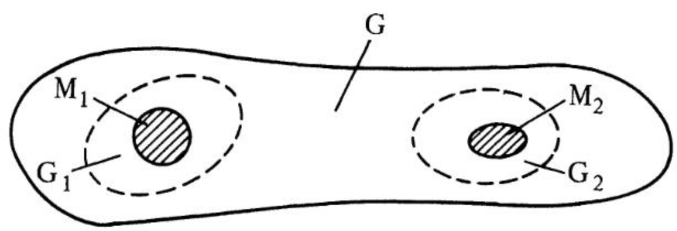


Figura 10

Ya que no hay puntos fijos de T sobre $G - M$, tenemos $i(t, G - M) = 0$. A continuación demostraremos que

$$i(T, G_1) = i(T, G_2) = 0. \tag{4.16}$$

Entonces $i(T, G) = 0$ y obtenemos la contradicción deseada de (4.14).

Ahora estableceremos (4.16) demostrando que $i(T, G_1) = 0$ y observando que $i(T, G_2) = 0$ se demuestra de manera similar. De nuestra definición T no tiene puntos fijos sobre ∂G_1, así que

$$\|x - Tx\| \geqslant a > 0 \qquad sobre\, \partial G_1.$$

Tomemos un $z \in M_2$, así $Tz = z$, y definimos $S_\varepsilon x = T_\varepsilon x + Tz - T_\varepsilon z$. La ecuación

$$x = S_\varepsilon x \tag{4.17}$$

tiene la solución $z \in G_2$, que por hipótesis, es la única sobre $\bar{G}$. Entonces (4.17) no tiene soluciones sobre $\bar{G}_1$, y así $i(S_\varepsilon, G_1) = 0$. Pero T se puede aproximar de manera arbitraria uniformemente cercana sobre $\bar{G}_1$ por S_ε, así por razones homotópicas, $i(T, G_1) = i(S - \varepsilon, G_1)$. ■

Ahora, usaremos el índice de punto fijo para proporcionar otro criterio útil para determinar si el conjunto de puntos fijos de un operador es un continuo. Para esto necesitamos las siguientes dos condiciones simples.

(H1) $i(T, G) = 1$.

(H2) $i(T, U) > 0$ si T tiene un punto fijo sobre el subconjunto abierto U de G.

Proposición 4.17. *Si (H1) y (H2) se cumplen para un operador $T \in V(G, X)$, entonces el conjunto de puntos fijos de T sobre G es un continuo no vacío.*

Demostración. De lo contrario (4.15) implica que $i(T, G) \geqslant 2$ al contrario. ■

4.3 El Índice de Punto Fijo para Mapeos Diferenciables y Analíticos

4.3.1 El Índice de Punto Fijo de las Funciones Analíticas Clásicas

Con el fin de obtener una imagen de la situación general, consideraremos una función analítica $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de una variable compleja z. En acorde con nuestro acuerdo general, identificamos $z = \xi + i\eta$ con (ξ, η). Esto hace a f un mapeo real sobre $\mathbb{R}^2$.

Proposición 4.18. *Sea $f : \bar{U} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica sobre un conjunto abierto acotado U y continua sobre $\bar{U}$. Si f no tiene puntos fijos sobre la frontera de U, entonces lo siguiente es verdadero.*

(a) La función f tiene a lo más un número finito de puntos fijos sobre U.

(b) Existe una vecindad adecuada a cada punto fijo $z_j \in U$ sobre el cuál f tiene una expansión en series de potencia convergente

$$f(z) = z + (z - z_j)^k (c_0 + c_1(z - z_j) + c_2(z - z_j) + \cdots \tag{4.18}$$

donde $c_0 \neq 0$ y k es un entero positivo fijo. Aquí k y todos los coeficientes dependen de z_j. Para el índice de punto fijo local

$$i(f, z_j) = k \tag{4.19}$$

y para el índice de punto fijo,

$$i(f, U) = \sum_{j=1}^{n} i(f, z_j). \tag{4.20}$$

si $z_1, \ldots, z_n$ son todos los puntos fijos de f sobre U. Así, en particular, $i(f, U) \geqslant 0$.

(c) $i(f, U) = 0$ si y sólo si f es un punto fijo libre sobre U.

(d) $i(f, U) = 1$ si y sólo si f tiene exactamente un punto fijo sobre U y este punto fijo es regular.

(e) Si $i(f, U) = m$ entonces f tiene a lo más m puntos fijos sobre U.

Demostración. Ver [37] *pp.*617 − 618. ∎

4.4 Teorema de Índice de Laray-Schauder

El cálculo del índice de punto fijo local está basado en las siguientes dos fórmulas

$$i(f, x_0) = i(f'(x_0), 0) \tag{4.21}$$

y

$$i(f'(x_0), 0) = (-1)^a, \tag{4.22}$$

donde $a = \sum_j \chi(\lambda_j)$ de las multiplicidades algebraicas de todos los valores propios $\lambda_j > 1$ de $f'(x_0)$. Si no existen dichos valores propios, entonces sea $a = 0$.

Por lo que a también es igual a la suma de las multiplicidades algebraicas de todos los números caracteristicos de $f'(x_0)$ en $(0, 1)$. El principio de linealización de Leray-Schauder está contenido en (4.21). De (4.21) y de (4.22) obtenemos de manera inmediata la fórmulas correspondientes para la aplicación de grado, a saber

$$grad(I - f, x_0) = grad(I - f'(x_0), 0) = (-1)^a.$$

Proposición 4.19 (Teorema de Índice de Leray-Schauder (1934))**.** *Si el operador $f : U(x_0) \subseteq X \longrightarrow X$ sobre un espacio de Banach X es compacto sobre una vecindad de un punto fijo regular débil x_0, entonces* (4.21) *se comple.*

Si el espacio de Banach X es real, entonces (4.22) *también se cumple, mientras que $i(f, x_0) = 1$ siempre que el espacio de Banach X sea complejo.*

Demostración. Ver [37]. ■

El Teorema de índice dice que el índice de punto fijo local en un punto regular débil o en un punto regular es siempre ± 1. En las secciones anteriores dimos resultados sobre el cálculo del índice de punto fijo local para puntos fijos singulares. Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f(z) = z + cz^k$ y $c \neq 0$ tiene índice $i(f, 0) = k$.

Corolario 4.20 (Salto de Índice)**.** *Sea $L : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio de Banach X real. Si μ_0 es un número caracteristico de L de* *multiplicidad algebraica* $\chi(\mu_0)$*, entonces*

$$i((\mu_0+\varepsilon)L,0) = (-1)^{\chi(\mu_0)} i((\mu_0-\varepsilon)L,0) \tag{4.23}$$

para todo $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño.*

Ejemplo 4.21. Sea $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una matriz de la forma

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La multiplicidad algebraica de λ_j es igual a la multiplicidad del cero λ_j de la ecuación escalar $det(L - \lambda_j I) = 0$ y es igual al número de λ_j el cual aparece en la forma canónica de Jordan de L. Aquí L ya está en esa forma. En consecuencia, la multiplicidad algebraica de λ_1 es igual a 2 respecto a λ_2 es igual a 1. Sea $\lambda_1 \neq 1$ y $\lambda_2 \neq 1$. Entonces tenemos

$$i(L,0) = \begin{cases} -1, & \text{para } \lambda_2 > 1, \\ +1, & \text{para } \lambda_2 < 1. \end{cases}$$

4.4.1 Principio de Continuación de Leray-Schauder Global

Consideremos la siguiente ecuación dependiente del parámetro

$$x - H(\mu,x) = 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{4.24}$$

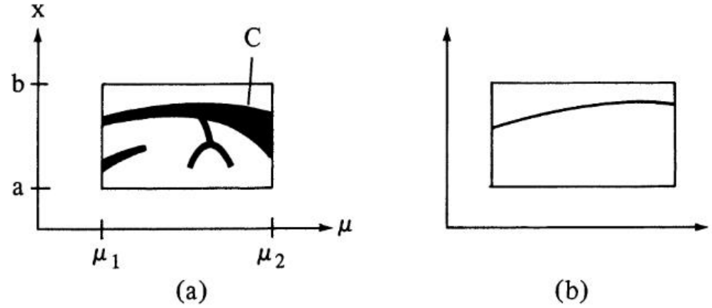


Figura 11

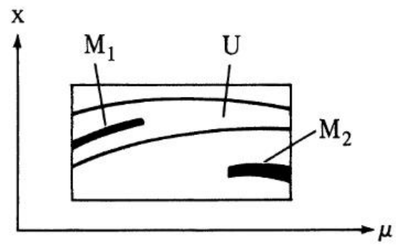


Figura 12

La formulación original del principio de continuación afirma que cuando conosemos la solución (μ_1, x_1) puede conducirnos a la solución (μ_2, x_2) con $\mu_1 < \mu_2$. Generalizando esta pregunta afirmando cuando existe un continuo de las soluciones de (4.24) el cual conecta al conjunto $\{\mu_1\} \times G$ con el conjunto $\{\mu_2\} \times G$. La respuesta a esta afirmación depende de las siguientes dos condiciones.

(H1) La ecuación (4.24) no tiene soluciones sobre $[\mu_1, \mu_2] \times \partial G$.

(H2) $i(H(\mu_1, \cdot), G) \neq 0$.

Recordemos que un continuo es un conjunto compacto conexo. La condición $(H2)$ se utilizo para garantizar la existencia de una solución inicial de (4.24) para $\mu = \mu_1$. En contraste, $(H1)$, intuitivamente hablando, impide a la curva solución $\mu \mapsto x(\mu)$ que comience en la solución inicial, de salir de la región G atravez de la frontera ∂G antes del tiempo $\mu = \mu_2$. Nuestra demostración de hecho no puede garantizar la existencia de las curvas solución como en la Figura $11(b)$, pero sólo del continuo.

Teorema 4.22 (Principio de Continuación de Leray-Schauder Global (1934))**.** *Sea $H : [\mu_1, \mu_2] \times \bar{G} \longrightarrow X$ un operador compacto, donde G es un conjunto acotado abierto en un espacio de Banach X.*

Sean $(H1)$ y $(H2)$ satisfechos. Entonces la ecuación (4.24) tiene un continuo C de soluciones en $\mathbb{R} \times X$ que conecta al conjunto $\{\mu_1\} \times G$ con el conjunto $\{\mu_2\} \times G$.

Demostración. Ver [37]. ∎

4.4.2 Componentes Solución no Acotadas

Cuando investigamos la ecuación dependiente del parámetro, naturalmente nos hicimos la pregunta, cuando existen curvas solución que son no acotadas, o estrictamente hablando, quienes tienden a infinito cuando el parámetro tiende a infinito. Regeneralizando ésta pregunta, no considerando las curvas, en general las soluciones componente no acotadas. Esta pregunta se plantea con frecuencia en la Teoria de Bifurcación en particular. Consideremos un caso el cual no se requiere de una bifurcación. Investigamos la ecuación dependiente del parámetro

$$x - H(\mu, x) = 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{4.25}$$

y requerimos que

$$H(0, x) = 0 \qquad \forall x \in X. \tag{4.26}$$

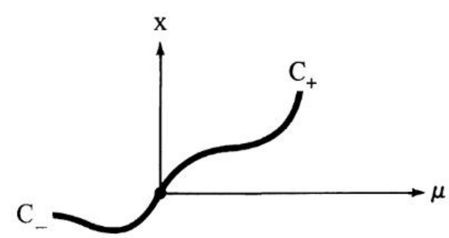


Figura 13

Así, el lado izquierdo de (4.25) es una perturbación de la unidad. Un caso especial de (4.25) es el siguiente

$$x = \mu F(x), \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{4.27}$$

En este caso (4.26) siempre se satisface. Notemos, sin embargo, que para $F(0) = 0$ la conclución del siguiente Teorema es un tanto facil, para entonces (4.26) tiene automáticamente una componente solución trivial no acotada $x = 0$, o más precisamente, el conjunto de todas (μ, x) con $x = 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraria es una componente solución no acotada. Éste resultado nos lleva a la típica pregunta de Teoria de Bifurcación: cuando las soluciones no triviales ramifican soluciones triviales?

Nuestra es como sigue. Sea C una componente del conjunto de soluciones S de (4.25) en $\mathbb{R} \times X$que contiene el punto $(0,0)$. Sean C_+ y C_- las restricciones de C a los parámetros con valores positivos y negatovos, respectivamente, es decir

$$C_\pm = C \cap (\mathbb{R}_\pm \times X).$$

Cuando C_+ y C_- son no acotados? Claramente

$$C = C_+ \cup C_- \qquad y \qquad C_+ \cap C_- = \{(0,0)\}.$$

La Figura 13 muestra la situación.

Teorema 4.23 (**Leray-Schauder** (1934))**.** *Sea X un espacio de Banach con $X \neq \{0\}$ y sea $H : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ una aplicación compacta y que satisface la condición* (3.26)*.*

Entonces la componente solución C de la ecuación (4.25) *que contiene al* $(0,0)$ *es no acotada, así como los subconjuntos C_+ y C_-.*

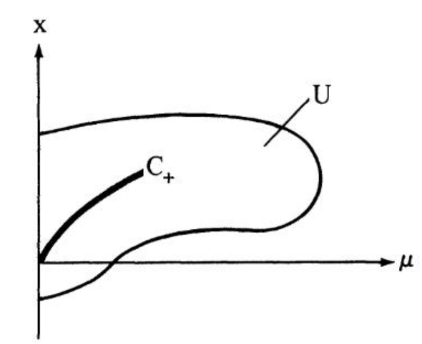


Figura 14

Demostración. Ver [37], y la Figura 14. ■

Si ahora consideramos una versión modificada de (4.25), a saber la ecuación

$$x - H(\mu, x) = 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}_+, x \in K \tag{4.28}$$

con la condición

$$H(0,x) = 0 \qquad \forall x \in K, \tag{4.29}$$

es decir, nos interesa sólo las soluciones con valores positivos del parámetro el cual cae en el cono ordenado K. En la practica, esta es una pregunta usual de soluciones positivas. Denotaremos por $C_+(K)$ como la componente del conjunto solución de (4.28) en $\mathbb{R}_+ \times K$ que contienen al $(0,0)$.

Corolario 4.24. *Si K es un cono ordenado en un espacio de Banach X y si el mapeo compacto $H : \mathbb{R}_+ \times K \longrightarrow K$ satisface la condición* (4.29)*, entonces la componente solución $C_+(K)$ es no acotada.*

Demostración. Existe una retracción $r : X \longrightarrow K$, tal que para $\bar{H}(\mu, x) = H(\mu, r(x))$ podemos aplicar el Teorema 4.22 a la ecuación

$$x - \bar{H}(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{4.30}$$

Pero para $\mu \in \mathbb{R}$, las soluciones de (4.30) y de (4.28) son identicas. ■

4.4.3 Aplicaciones a Ecuaciones Integrales

Queremos aplicar el Teorema 4.22 a la ecuación integral no lineal

$$x(s) = \mu \int_a^b G(s,t) f(t, x(t)) dt, \qquad a \leqslant s \leqslant b, \mu \in \mathbb{R}. \tag{4.31}$$

Aquí, estableceremos las siguientes condiciones.

(H1) Las funciones $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $-\infty < a < b < \infty$.

(H2) Tenemos $G(s,t) \geqslant 0$ y $f(t,x) \geqslant 0$ para todo $s,t \in [a,b]$ y $x \in \mathbb{R}_+$.

Si escogemos a $X = C[a,b]$ y $K = C_+[a,b]$, entonces (4.31) se convierte en la ecuación operacional

$$x = \mu F(x), \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X.$$

El Teorema 4.22 y el Corolario 4.23 implican el siguiente resultado.

Proposición 4.25. *Si* $(H1)$ *se satisface, entonces la ecuación integral* (4.31) *tiene dos conjuntos solución conexos no acorados,*

$$C_+ \subseteq \mathbb{R}_+ \times C[a,b] \qquad y \qquad C_- \subseteq \mathbb{R}_- \times C[a,b],$$

que contiene la solución trivial $\mu = 0, x = 0$.

Si $(H1)$ *y* $(H2)$ *se satisfacen, entonces* (4.31) *tiene un conjunto solución conexo no acotado*

$$C \subseteq \mathbb{R}_+ \times C_+[a,b],$$

que contiene la solución trivial $\mu = 0, x = 0$.

Observemos que este resultado es trivial cuando $f(t,0) \equiv 0$, para luego todos las (μ, x) con $\mu \in \mathbb{R}, x = 0$ forman una rama solución trivial no acotada en $\mathbb{R} \times C[a,b]$. En este caso, naturalmente, surge la pregunta de que si las soluciones no triviales se ramifican de esta rama trivial. Esta es una vez más una pregunta de Teoria de Bifurcación.

Las herramientas utilizadas en este capítulo y en conjunto con las del capítulo 3 mostraran su gran utilidad en los capítulos posteriores, principalmente en el capítulo 6.

Capítulo 5

Elementos de la Teoría de Bifurcaciones

La teoría de Bifurcaciones proporciona la existencia matemática de escenarios de bifurcación observados en diferentes sistemas y experimentos. Una condición necesaria para la existencia de una bifurcación es que el Teorema de la función Implícita no se cumpla.

5.1 Bifurcaciones

Consideremos la ecuación real

$$F(\mu, x) = 0. \tag{5.1}$$

con $(x, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Si $F(\mu_0, x_0) = 0$ y

$$F_x(\mu_0, x_0) \neq 0.$$

y si F es una aplicación C^1 en una vecindad de (μ_0, x_0), entonces por el Teorema de la Función Implícita, la ecuación (5.1) se puede resolver de manera *única* para x en una vecindad de (μ_0, x_0). Este resultado es exactamente una curva solución atravéz de (μ_0, x_0), como en la fig. 17,

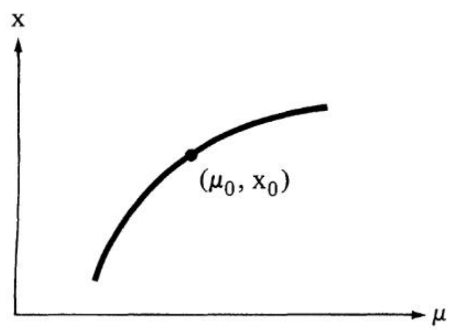


Figura 17

entonces si $F_x(\mu_0, x_0) = 0$ es posible que exista una *bifurcación* en (μ_0, x_0), es decir, una ramificación de la curva solución como en la Fig. 18.

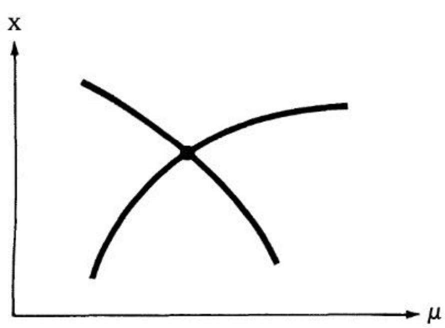


Figura 18

El ejemplo más simple está dado por $F(\mu, x) = (\mu - \mu_0)^2 - (x - x_0)^2$. Situaciones similares resultan cuando (5.1) es un operador ecuación.

Definición 5.1. Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. El punto (μ_0, x_0) es llamado un *punto de bifurcación* de (5.2) *syss*

(i) $F(\mu_0, x_0) = 0$,

(ii) para $n = 1, 2, \ldots$, existen dos sucesiones, $\{(\mu_n, x_n)\}$ y $\{(\mu_n, y_n)\}$, solución de las ecuaciones (5.2), que convergen a (μ_0, x_0) cuando $n \to \infty$. Estas son sucesiones distintas, es decir, $x_n \neq y_n$ para todo n ($Fig.18$).

5.2 C.N.E. de un Punto de Bifurcación

Comenzemos con una ecuación operacional

$$F(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{K}, x \in X. \tag{5.2}$$

Proposición 5.2. (*Condición Necesaria para una Bifurcación*) *Sea X y Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sea $F : U(\mu_0, x_0) \subseteq \mathbb{K} \times X \longrightarrow Y$ un mapeo C^1 en una vecindad de (μ_0, x_0).*

Si (μ_0, x_0) es un punto de bifurcación de (5.2), entonces el operador inverso $F_x(\mu_0, x_0)^{-1}$ no existe sobre Y.

Esto se da directamente del Teorema de la Función Implícita (Teorema 2.5).

Ahora, consideremos las siguientes dos situaciones frecuentes. Primero estudiaremos el problema de valor propio no lineal

$$x = \mu(Lx + Nx), \qquad \mu \in \mathbb{K}, x \in X. \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.3. Sea $L : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto sobre X, un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Sea $N : U(0) \subseteq X \longrightarrow X$ definido sobre una vecindad de cero en X con $\frac{\|Nx\|}{\|x\|} \to 0$, cuando $\|x\| \to 0$.

Si (μ, x) es un punto de bifurcación de (5.3), entonces μ es un número característico del problema linealizado $x = \mu Lx$.

Demostración. Si μ_0 es un número característico, entonces $(\mu_0 L - I)^{-1}$ no existe, es decir

$$\begin{aligned}\mu(Lx+Nx)=x &\Rightarrow \mu(Lx+Nx)-x=0\\ &\Rightarrow \mu Lx+\mu Nx-x=0\\ &\Rightarrow x(\mu L-I)+\mu Nx=0\\ &\Rightarrow x(\mu L-I)=0\\ &\Rightarrow x=\mu Lx.\end{aligned}$$

■

Contra ejemplo 5.4. Sea $X=\mathbb{R}^2$. Consideremos (ξ,η). El punto $(0,1)$, es decir, $\mu,=1, x=0$, no es un punto de bifurcación de la ecuación

$$\begin{aligned}\xi &= \mu(\xi-\eta^3), \qquad \mu\in\mathbb{R}, x\in X\\ \eta &= \mu(\eta+\xi^3),\end{aligned} \tag{5.4}$$

si bien $\mu=1$ es un número característico del problema linealizado $x=\mu x$.

Demostración. Primero veremos que $\mu=1$ es un número característico del sistema linealizado

$$\begin{aligned}&(\mu-I)x=0, \qquad \mathit{con}\ \mu=1,\\ &x=\mu x\Rightarrow x=x,\ \forall\mu=1.\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(0,1)\Rightarrow F(\mu,x) &= (\mu(\xi-\eta^3,\mu(\eta+\xi^3))\\ &= (1(0),1(0))\\ &= (0,0).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{pmatrix}\mu & -3\mu\eta^2\\ 3\mu\xi^2 & \mu\end{pmatrix}\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}|_{(1,0)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial x} j_{(1,0)}\right)^{-1}$ existe.

Ahora, multiplicanco (5.4) por $(-\eta)$ y (ξ), obtenemos

$$\begin{aligned} -\xi\eta &= -\mu\xi\eta + \mu\eta^4 \\ \xi\eta &= \mu\xi\eta + \mu\xi^4 \\ 0 &= \mu(\xi^4 + \eta^4) \Rightarrow \xi^4 + \eta^4 = 0 \\ &\Rightarrow \xi = \eta. \end{aligned}$$

■

5.3 El Principio de Salto de Índice

En la sección anterior discutinos algumos problemas de bifurcación. Nuestro punto de partida fue la ecuación dependiente del parámetro

$$F(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{5.5}$$

Una condición necesaria para existencia de una bifurcación en el punto (μ_0, x_0) fue que $F_x(\mu_0, x_0)$ no fuera biyectiva, de este modo no se pudo aplicar el Teorema de la Función Implícita, lo que implicaría la solubilidad local de la solución (5.5) de manera única sobre una vecindad de (μ_0, x_0). Esta condición, sin embargo no fue suficiente. En la sección anterior proporcionamos un número de condiciones suficientes simples para una bifurcación, pero aún no tenemos a la mano un principio general que proporcione una comprensión cualitativa más profunda del fenómeno de bifurcación. El objetivo de esta sección es colocar un principio topológico general a la cabeza de la teoría de bifurcaciones que derive resultados importantes de bifurcación local y global. La palabra magica es *"principio de salto de índice."* Este prncipio se lee más o menos de la siguiente manera:

(P) *Si el índice salta sobre una curva solución conocida, entonces existe una bifurcación.*

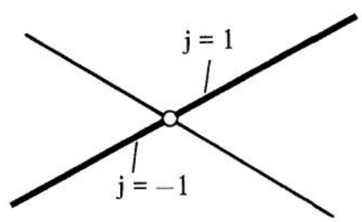
En función del contexto, por índice queremos decir ya sea el índice de punto fijo o el grado de una aplicación local (índice cero). Queremos ilustrar este sorprendente principio de gran alcance con un ejemplo sencillo que se consideró en la sección anterior. En (5.5), sea

$$F(\mu.x) = x^2 - \mu^2, \qquad donde\ X = \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

En el punto $(0,0)$ tenemos $F_x(0,0) = 0$ de modo que el Teorema de la Función Implícita no se puede aplicar. Atravez del punto $(0,0)$ pasa la solución

$$x = \mu \qquad con\ \mu\ un\ número\ real\ arbitrario. \tag{5.6}$$

Examinaremos el comportamiento del índice cero $j = sgn(F_x(\mu, x))$ a lo largo de la curva solución (5.6). Entonces $j(\mu) = sgn(2\mu)$ y en $\mu = 0$ existe un salto en j. En efecto, existe una nueva solución en $(0,0)$, llamandola $x = -\mu$ con μ un número real arbitrario $(Fig.19)$.



salto de índice en $\circ$

Figura 19

Como un ejemplo más, consideremos

$$F(\mu, x) = x^2 + \mu^2 \qquad con\ X = \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Aquí de nuevo tenemos $F_x(0,0) = 0$. Ahora sin embargo, el punto $(0,0)$ es una solución aislada de (5.5) y no es un punto de bifurcación, ya que nos hemos restringjido a soluciones reales. En el caso complejo $X = \mathbb{C}$, la ecuación $(*)$ tiene dos soluciones $x = \pm i\mu$ con μ un número real arbitrario, de modo que $(0,0)$ es un punto de bifurcación complejo.

Consideremos la ecuación siguiente

$$x - H(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in X \tag{5.7}$$

y requerimos lo siguiente:

(H1) El operador $H : U(\mu_0, 0) \subseteq \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ es compacto con $H(\mu, 0) \equiv 0$ y X un espacio de Banach.

(H2) Para $\mu_1 < \mu_2$ tenemos $i(H(\mu_1, .), 0) \neq i(H(\mu_2, .), 0)$.

Aquí naturalmente requerimos que los índices estén definidos y en $(H1)$ sea $U(\mu_0, 0) = [\mu_1, \mu_2] \times U(0)$, donde $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$ y $U(0)$ es una vecindad del origen en X. La condición de salto de índice $(H2)$ también se puede expresar de la siguiente forma

$$grad(I - H(\mu_1, .), 0) \neq grad(I - H(\mu_2), . =, 0).$$

Teorema 5.5 (Principio de Salto de Índice (PSI))**.** *(a) Si* $(H1)$ *se satisface y si* $(\mu_0, 0)$ *no es un punto de bifurcación de la ecuación* (5.7)*, entonces* $i(H(\mu, .), 0)$ *está definido y es constante sobre una vecindad de* $\mu = \mu_0$*.*

(b) Si $(H1)$ *y* $(H2)$ *se satisfacen, entonces la ecuación* (5.7) *tiene un punto de bifurcación* $(\mu, 0)$ *con* $\mu_1 < \mu < \mu_2$*.*

Demostración. (a) Si $(\mu_0, 0)$ no es un punto de bifurcación, entonces existe una vecindad de $(\mu_0, 0)$ en el cual $(\mu, 0)$ es la única soluciones de (5.5). La Invarianza Homotopica $(A4)$ implica que $i(H(\mu, .), 0)$ es constante.

(b) Supongamos que dicho punto de bifurcación no existe, Entonces $i(H(\mu, .), 0)$, como una función de μ, es localmente constante por (a) y es un valor entero, y así es constante sobre $[\mu_1, \mu_2]$. Pero esto contradice el condición de salto de índice $(H2)$.

∎

5.4 Aplicaciones a Sistemas de Ecuaciones

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$F(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N \tag{5.8}$$

y proporcionaremos un resultado de bifurcación de este sistema que sirve como prototipo para los resultados generales de bifurcación local y global. Haremos las siguientes suposiciones.

($\hat{H}1$) La función $F : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es de clase C^1.

($\hat{H}2$) La curva solución. La aplicación de clase C^1 $t \mapsto (\mu(t), x(t))$ definido sobre $\mathbb{R}$ proporciona una solución de (5.8) para todo $t \in \mathbb{R}$, donde la función $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona estrictamente creciente.

Definimos $d(t) = det(F_x(\mu(t), x(t)))$. La ecuación (5.8) consiste del sistema de ecuaciones no lineales $F_j(\mu, x) = 0, j = 1, \ldots, N$.

Proposición 5.6. *Supongamos las hipótesis* ($\hat{H}1$) *y* ($\hat{H}2$) *se satisfacen.*

1. *PRINCIPIO DE SALTO DE ÍNDICE* (PSI). *Si* $d(t_1)d(t_2) < 0$ *para* $t_1 < t_2$ *fijos, entonces* (5.8) *tiene un punto de bifurcación* $(\mu(t), x(t))$ *con* $t_1 < t < t_2$.

2. *BIFURCACIÓN LOCAL Y GLOBAL. Si* $d(.)$ *cambia de signo en* t_0, *entonces* $(\mu(t), x(t))$ *es un punto de bifurcación de* (5.8). *En este punto de bifurcación, un conjunto solución conexo* C *de* (5.8) *se ramifica. Este conjunto o no es acotado en* $\mathbb{R}^{N+1}$ *o es acotado e intersecta la curva solución original* ($\hat{H}2$) *en otro punto* $Fig.20$.

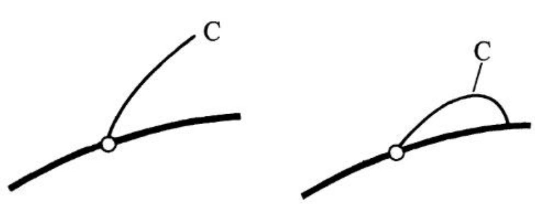


Figura 20

Por un cambio de signo, $d(.)$ tiene un cero aislado en t_0 y cambia de signo cuando t atraviesa t_0.

Demostración. Definamos $h(t,x) = F(\mu(t), x(t) + x)$.

Entonces (5.8) es equivalente a $h(t,0) = 0$

$$F(\mu, x) = 0,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Así

$$\begin{aligned}
h(t,0) &= F(\mu(t), x(t) + 0) \\
&= F(\mu(t), x(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
grad(h(t,\cdot), 0) &= sgn\left(det\left(\frac{\partial h}{\partial x}(t,0)\right)\right) \\
&= sgn\left(det\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mu(t), x(t)+0)\right)\right) \\
&= sgn\left(det\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mu(t), x(t))\right)\right) \\
&= sgn(d(t)).
\end{aligned}$$

Por (a) $d(t_1)d(t_2) < 0$, para $t_1 < t_2$, el índice cambia de signo en algún punto t con $t_1 < t < t_2$. Por el (PSI) $(\mu(t), x(t))$ es un punto de bifurcación.

Dado esto, también se tiene el caso local de (b). La demostración del caso global se dará en el siguiente capítulo, *Teorema de Rabinowitz*. ∎

5.5 Principio de Dualidad

La dualidad entre el PSI y el Princípio de Continuación de Leray-Schauder $(PC - L - Sch)$.

Consideremos la ecuación

$$F(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N \tag{5.9}$$

sujeta a la condición siguiente:

($\breve{H}$) La función $F : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es de clase C^1 y sea G un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$.

Para el método de continuación es importante tener la condición de índice

$$\sum_{j=1}^{m} sgn(det(F_x(\mu_1, x_j))) \neq 0, \tag{5.10}$$

o la condición más general

$$grad(F(\mu_1, .), G) \neq 0. \tag{5.11}$$

Proposición 5.7 (Método de Continuación)**.** *Sea* ($\breve{H}$) *dado. Supongamos que no existen soluciones de* (5.9) *sobre* $[\mu_1, \mu_2] \times \partial G$ *y que, para* $\mu = \mu_1$*, la ecuación* (5.9) *tiene exactamente un número impar de soluciones* $x_1, \ldots, x_m$ *en* G*, todas ellas regulares, es decir,* $det(F_x(\mu_1, x_j)) \neq 0$ *para toda* j*.*

Entonces (5.9) *también tiene una solución* $x \in G$ *para* $\mu = \mu_2$*.*

Corolario 5.8. *La ecuación* (5.9) *tiene una solución* $x \in G$ *para* $\mu = \mu_2$ *siempre que las siguientes dos condiciones se satisfagan.*

(i) La función $F : [\mu_1, \mu_2] \times \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *es continuo y* G *es un conjunto abierto acotado en* $\mathbb{R}^N$*.*

(ii) No existen soluciones de (5.9) *sobre* $[\mu_1, \mu_2] \times \partial G$ *y* (5.11) *se satisface.*

Para la bifurcación, la condición de salto de índice

$$sgn(det(F_x(\mu_1, x(\mu_1))) \neq sgn(det(F_x(\mu_2, x(\mu_2))) \tag{5.12}$$

es esencial.

Proposición 5.9 (Salto de Índice y Bifurcación). *Supongamos que* $(\breve{H})$ *se cumple y que la ecuación* (5.9) *tiene una curva solución de clase* C^1 $\mu \mapsto x(\mu)$ *sobre* $[\mu_1, \mu_2]$ *que satisface* (5.12), *donde ambos lados son distintos de cero.*

Entonces existe un punto de bifurcación de la ecuación (5.9) *sobre esta curva, es decir, que existe un punto* $(\mu, x(\mu))$ *con* $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ *es un punto de bifutcación de* (5.9).

Esto se sigue derectamente del Teorema 5.5 (*Principio de Salto de Índice*).

Proposición 5.10 (Componentes Solución No Acotadas). *Si* $(\breve{H})$ *se cumple y si* $F(0, x) = x$ *sobre* $\mathbb{R}^N$, *entonces la ecuación* (5.9) *tiene conjuntos solución conexas no acotadas* $C_\pm$ *en* $\mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}^N$ *con* $(0, 0) \in C_\pm$.

Si $(\breve{H})$ *se cumple con* $F(\mu, x) \in \mathbb{R}^N_+$ *para todo* $(\mu, x) \in \mathbb{R}^{N+1}_+$ *y*

$$F(0, x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N_+,$$

entonces la ecuación (5.9) *tiene un conjunto solución conexo y no acotado en* $\mathbb{R}^{N+1}_+$.

Para poder explicar la dualidad antes mencionada, consoderamos el caso especial siguiente.

(S) Sea $N = 1$ y sea $G = (a_1, a_2)$ un intervalo abierto acotado. Entonces el conjunto $R = [\mu_1, \mu_2] \times \bar{G}$ es un rectángulo con lados verticales $R_j = \{\mu_j\} \times [a_1, a_2]$ y lados horizontales $Q_j = [\mu_1, \mu_2] \times \{a_j\}$ $(Fig.21(a))$.

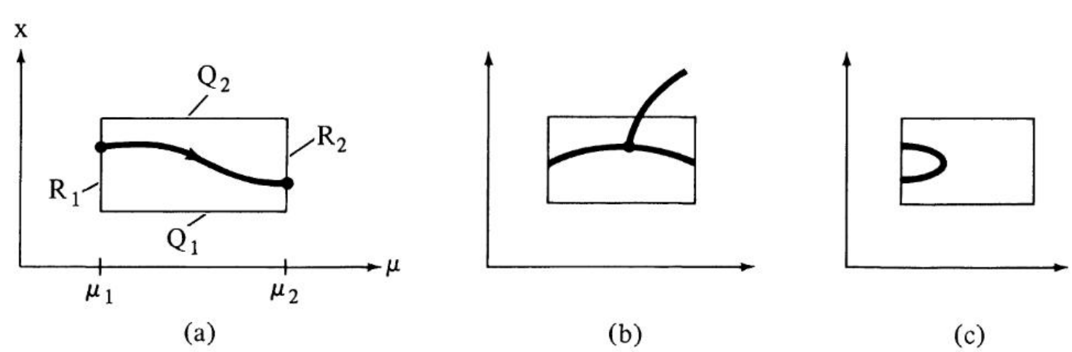


Figura 21

Ejemplo 5.11 (Principio de Continuación)**.** En la Proposición 5.7 la hipótesis incluye la no existencia de soluciones de (5.9) sobre Q_1 y Q_2 mientras que existen soluciones sobre R_1 que satisfacen la condición de índice (5.10) o de manera general, (5.11). En este caso garantizaremos la existencia de una componente solución de (5.9) que conecta a R_1 con R_2 en R. Sin embargo, no necesariamente sería una curva como se muestra en $(Fig.21(a))$, sino que podría ser cualquier tipo de conjunto conexo.

Ejemplo 5.12 (Contra ejemplo al Principio de Continuación)**.** Si la condición de índice (5.10) o (5.11) no se cumple, entonces no hay necesidad de que exista una componente solución que conecte a R_1 con R_2. La situación en $(Fig.21(c))$ podria ser. Un ejemplo simple de esto está dado por

$$F(\mu, x) = x^2 + \mu \qquad con\ \mu_1 = -1.$$

Para $\mu = \mu_1$ la ecuación $F(\mu, x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones $x_\pm = \pm 1$, mientras que para $\mu_2 > 0$ no existen soluciones reales. En efecto, como

$$sgn(det(F_x(\mu_1, x_\pm))) = \pm 1,$$

la condición de índice (5.10) es violada, digamos para $G = (-2, 2)$.

Ejemplo 5.13 (Dualidad)**.** De nuevo sea (S) satisfecha. Si existe una curva solución de clase C^1, $\mu \mapsto x(\mu)$ de (5.9) sobre $[\mu_1, \mu_2]$ con

$$F_x(\mu_j, x(\mu_j)) \neq 0 \qquad para\ j = 1, 2,$$

entonces existen las posibilidades siguientes:.

(i) (*Caso de Continuación*). La curva no contiene un punto de bifurcación de la ecuación (5.9), es decir, la situacion es exactamente la de la $(Fig.21(a))$. Se sigue de la *invarianza homotópica* del grado de una aplicación que $grad(F(\mu, .), x(\mu)) =$

cte par todo $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ donde $P(\mu) = (\mu, x(\mu))$. Consecuentemente,

$$sgn(F_x(P(\mu_1))) = sgn(F_x(P(\mu_2))). \tag{5.13}$$

Como $grad(F(\mu, .), G) = sgn(F_x(P(\mu))) \neq 0$, podemos aplicar el principio de continuación para obtener la solución $(\mu_2, x(\mu_2))$ de (5.9).

(ii) (*Caso de Bifurcación*). Si tenemos la igualdad en (5.13), entonces algún punto interior de la curva solución es un punto de bifurcación de (5.9), por el principio de salto de índice. En este caso el principio de continuación no se puede aplicar como una regla, para una situación suficientemente regular, como en $(Fig.21(b))$, existen soluciones sobre los lados Q_j del rectángulo.

Esta es la tan mencionada dualidad entre la continuación y la bifurcación.

En el siguiente capítulo se utilizarán todas las herremientas vistas anteriormente.

Capítulo 6

Teorema de Krasnoselskii y Teorema de Rabinowitz

6.1 El Teorema de Krasnoselskii

Consideremos la ecuación

$$x = \mu(Lx + Nx), \qquad \mu \in \mathbb{K}, x \in X \tag{6.1}$$

con la solución trivial $x = 0$, con μ arbitraria. Aquí N es una perturbación de la parte principal lineal. Queremos encontrar soluciones no triviales. Nuestras hipótesis son las siguientes.

($\mathcal{H}1$) X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

($\mathcal{H}2$) El operador $L : X \longrightarrow X$ lineal y compacto.

($\mathcal{H}3$) El operador no lineal $N : U(0) \subseteq X \longrightarrow X$ es compacto y $\|Nx\|/\|x\| \to 0$ cuando $\|x\| \to 0$.

Teorema 6.1 (Krasnoselskii (1956))**.** *Supongamos que tenemos las condiciones* ($\mathcal{H}1$) – ($\mathcal{H}3$)

(a) (*Condición Necesaria*). *Si* $(\mu_0, 0)$ *es un punto de bifurcación de* (6.1), *entonces* μ_0 *es un número caracteristico de* L.

(b) (*Condición Suficiente* (*para* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)). *Si* μ_0 *es un número caracteristico de* L *de multiplicidad algebraica impar en el espacio de Banach* X, *entonces* $(\mu_0, 0)$ *es un punto de bifurcación de* (6.1).

Consideremos la ecuación

$$F(\mu, x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{K}, x \in X \tag{6.2}$$

Definición 6.2. Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. El punto (μ_0, x_0) es llamado un punto de bifurcación de (6.2) si y sólo si

(i) $F(\mu_0, x_0) = 0$,

(ii) para $n = 1, 2, \ldots$ existen dos sucesiones

$$\{(\mu_n, x_n)\} \quad y \quad \{(\mu_n, y_n)\}$$

soluciones de (6.5) las cuales convergen a (μ_0, x_0) cuando $n \to \infty$. Estas dos sucesiones son distintas, es decir, $x_n \neq y_n$ para todo n.

Proposición 6.3. *Sean* X, Y *espacios de Banach sobre* $\mathbb{K}$, $F : U(\mu_0, x_0) \subseteq \mathbb{K} \times X \longrightarrow Y$ *de clase* C^1.

Si (μ_0, x_0) *es un punto de bifurcación de* (6.2), *entonces el operador inverso* $F_x(\mu_0, x_0)^{-1}$ *no existe sobre* X.

Demostración. Una aplicación directa del Teorema de la Función Implícita, ya que, como (μ_0, x_0) es un punto de bifurcación, entonces el operador inverso no es biyectivo. ■

Demostración del Teorema 6.1. (a) Como $x = 0$ es una solución trivial de (6.1), el hecho de que $(\mu, 0)$ sea un punto de bifurcación, implica la existencia de una sucesión $\{(\mu_n, x_n)\}$ de soluciones de (6.4) con $x_n \neq 0$ para todo n con $(\mu_n, x_n) \to (\mu_0, 0)$ cuando $n \to \infty$. Si μ es un número caracteristico ($\mu = \frac{1}{\lambda}$), entonces

$$R = (I - \mu_0 L)^{-1}$$

existe un operador continuo sobre X, entonces se tiene de (6.1) que

$$\begin{aligned} x_n &= (\mu_n - \mu_0)RLx_n + \mu_n RNx_n \\ &= R(((\mu_n - \mu_0)Lx_n) + \mu_n Nx_n). \end{aligned}$$

Como $x_n \neq 0$, dividiendo por x_n obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= (\mu_n - \mu_0)R\frac{Lx_n}{x_n} + \mu_n R\frac{Nx_n}{x_n} \\ &= (\mu_n - \mu_0)RL + \mu_n R\frac{Nx_n}{x_n}. \end{aligned}$$

De donde

$$x_n = \mu_n(Lx_n + nx_n)$$

$$x = \mu Lx, \quad x_n = \mu_n Lx_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (I - \mu L)x_n &= x_n - \mu Lx_n \\ &= \mu_n Lx_n + \mu_0 Nx_n - \mu_0 Lx_n \\ &= (\mu_n - \mu_0)Lx_n + \mu_n Nx_n \\ &= R[(\mu_n - \mu_0)Lx_n + \mu_n Nx_n]. \end{aligned}$$

así se tiene

$$1 \leqslant |\mu_n - \mu_0| \|RL\| + |\mu_n| \|R\| \frac{\|Nx_n\|}{\|x_n\|}$$

y tomando límite obtenemos

$$1 \leqslant 0$$

de donde obtenemos una contradicción.

(b) Si $(\mu_0, 0)$ no es un punto de bifurcación, entonces por el Principio de Salto de Índice (Teorema 5.5),

$$i(\mu(L+N), 0) = cte. \tag{6.3}$$

para toda μ en una vecindad de μ_0. Por el Teorema de Índice de Leray Schauder (Teorema 4.18),

$$i(\mu(L+N), 0) = i(\mu L, 0) = cte.$$

por el Salto de Índice (Corolario 4.19

$$i((\mu_0 - \epsilon)L, 0) = (-1)^{\chi(\mu_0)} i((\mu_0 + \epsilon)L, 0)$$

para todo $\epsilon > 0$. Como la múltiplicidad algebraica de $\chi(\mu_0)$ es impar, entonces existe un punto de bifurcación, lo cuál es una contradicción.

■

6.2 El Teorema de Rabinowitz

En paralelo con la sección anterior investigaremos el comportamiento global de la solución de las ramas de bifurcación de la ecuación

$$x = \mu(Lx + Nx), \qquad \mu \in \mathbb{K}, x \in X. \tag{6.4}$$

La meta es justificar de manera rigurosa el comportamiento cualitativo representado en la $(Fig.23)$. Comenzemos con las siguientes hipótesiss.

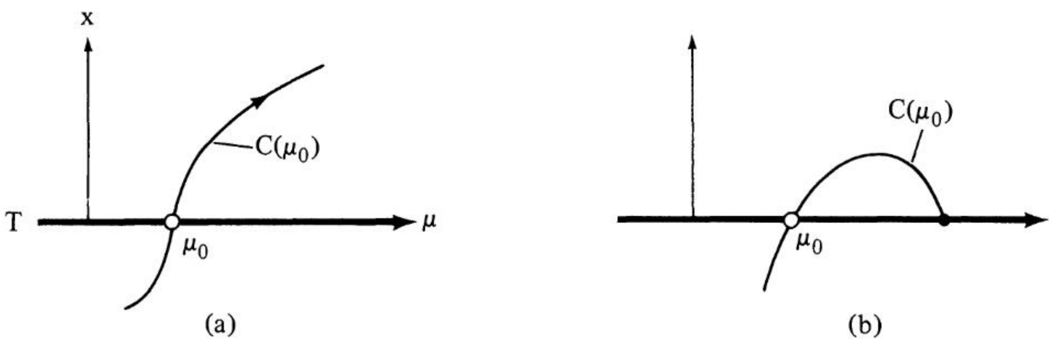


Figura 23

($\mathfrak{H}$1) Los operadores $L, N : X \longrightarrow X$ son compactos en el espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Más aún, L es lineal y $\|Nx\|/\|x\| \to 0$ cuando $\|x\| \to 0$.

($\mathfrak{H}$2) El número real μ_0 es un número característico de L de múltiplicidad algebraica impar.

En la sección anterior, en esta situación $(\mu_0, 0)$ es un punto de bifurcación de (6.9). La ramificación de la bifurcación comienza en $(\mu_0, 0)$ ¿Cómo se comporta *globalmente*? Como no podemos estar seguros de que esta curva ramificada, escogamos una componente solución $C(\mu_0)$ que comienza en $(\mu_0, 0)$. Más precisamente, consideremos

$$S = \{(\mu, x) \in \mathbb{K} \times X : (\mu, x) \textit{ es una solución de } (6.4) \textit{ con } x \neq 0\}$$

y $\bar{S}$ denotando la cerradura de S en $\mathbb{K} \times X$. Ahora sea $C(\mu_0)$ la componente solución de $\bar{S}$ que contiene a $(\mu_0, 0)$. Además, denotemos una rama de la solución trivial de (6.4) por

$$T = \{(\mu.x) \in \mathbb{K} \times X : x = 0\}.$$

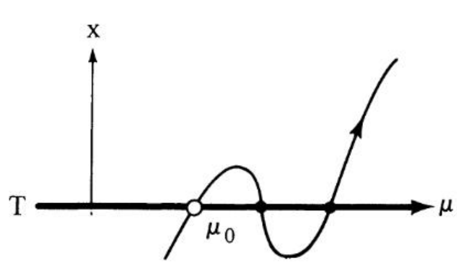


Figura 24

Entonces tenemos $(\mu_j, 0) \in \bar{S} \cap T$ *syss* $(\mu_j, 0)$ es un punto de bifurcación de (6.4), es decir, μ_j debe necesariamente ser un número caracteríistico de L $(Fig.24)$.

Teorema 6.4 (Rabinowitz (1971)). *Supongamos* ($\mathfrak{H}1$) *y* ($\mathfrak{H}2$) *son dados. Entonces existen exactamente dos posibilidades.*

(i) $C(\mu_0)$ *es no acotado* $(Fig.23(a))$.

(ii) $C(\mu_0)$ *es compacto y además de* $(\mu_0, 0)$ *también contiene otro punto de la rama de la solución trivial* T $(Fig.23(b))$.

Observemos que incluso en el caso (i) es posible que $C(\mu_0)$ intersecte a T una vez más $(Fig.24)$.

Corolario 6.5. *En el caso* (ii) *el conjunto* $C(\mu_0)$ *contiene un número par de puntos* $(\mu_0, 0)$ *para los cuales* μ_j *es un número característico de* L *de múltiplicidad algebraica.*

Para el problema lineal, es decir, $N = 0$, siempre tenemos el caso (i) $(Fig.25(a))$. Esto nos lleva de manera natural a la pregunta de las condiciones bajo las cuales el problema no lineal también se mantiene en el caso (i).

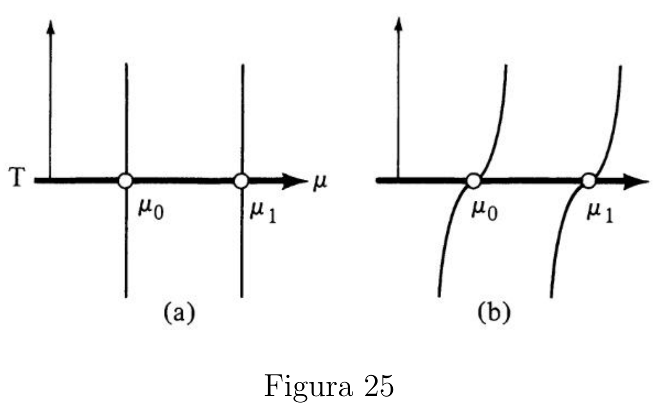


Figura 25

6.3 Demostración del Teorema de Rabinowitz

Finally, I note that it is not at all impossible that the proof,
which I have based on geometric principles here,
be given in a purely analytic form;
but I believed the presentation which
I developed here to be less abstract and to expose better
the essence of the proof than one could
expect from an analytic proof.
Carl Friedrich Gauss (1799)
(First proof of the fundamental theorem of algebra)†

Para el Teorema 6.6 sobre bifurcación global presentamos demostraciones *analíticas y geométricas*. La segunda muestra muy claramente la idea más simple detrás de la demostración, mientras que la otra demuestra ser generalizable a un Teorema de J. Ize†

6.3.1 Demostración Geométrica del Teorema de Rabinowitz

Demostración Geométrica. Para la demostración geométrica, suponemos que no estamos en el caso (i), así que $C(\mu_0)$ es acotado. Entonces $C(\mu_0)$ es un espacio métrico compacto ya que ambos L y N lo son, y debemos demostrar que $C(\mu_0)$ contiene un punto de la forma $(\mu, 0)$ además de $(\mu_0, 0)$.

Para esto, consideramos que $C(\mu_0)$ no contiene dicho punto adicional $(\mu, 0)$, esto nos lleva a una contradicción. Existe un conjunto abierto acotado U en $\mathbb{R} \times X$ tal que $C(\mu_0) \subset U$ y $\bar{S} \cap \partial U = \emptyset$. Como se muestra en la $(Fig.26(a))$. Este hecho se establecera en el primer paso de la demostración analítica con la ayuda del Teorema de Separación para conjuntos compactos, ([35], [37]) . Ahora podemos seguir el hilo de la $(Fig.26(b))$ para contruir un conjunto acotado M en $\mathbb{R} \times X$ el cual separe a $C(\mu_0)$ del *eje*-μ.

Consideremos el conjunto $V = U - M$ y $H(\mu, x) = \mu(Lx + Nx)$. Sea $V_\mu = \{x : (\mu, x) \in V\}$ y $U_\mu = \{x : (\mu, x) \in U\}$. La *Invarianza Homotópica Generalizada*

([37], $(A4^*)$) implica que

$$i(H(\mu, .), V_\mu) = cte.$$

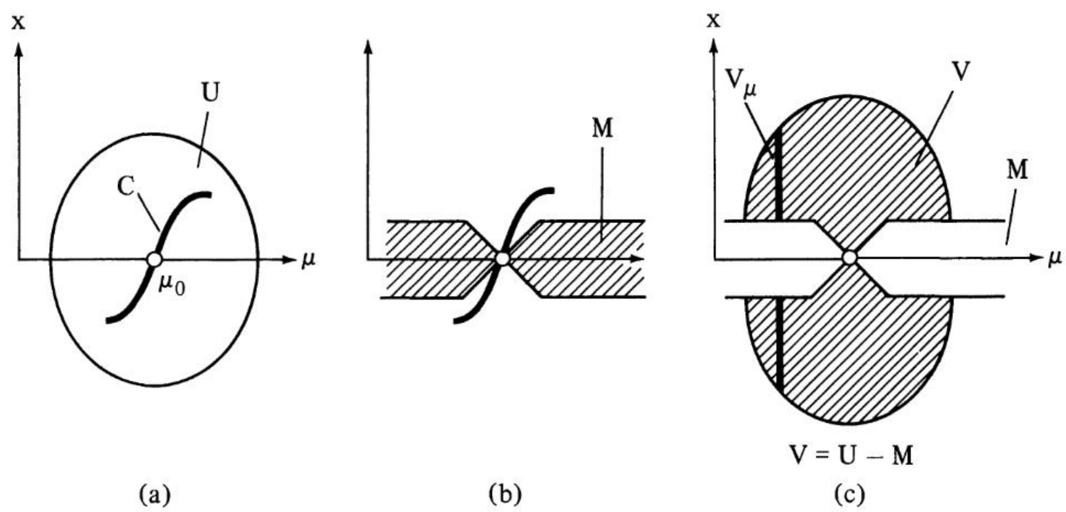


Figura 26

separadamente para $\mu < \mu_0$ y $\mu_0 < \mu$. Como $V_\mu = \emptyset$ para $|\mu|$ grande ya que U es acotada, así la constante es cero. Además,

$$i(H(\mu, .), U_\mu) = cte, \qquad \textit{para toda } \mu.$$

Por la propiedad de Aditividad $(A3)$,

$$i(H(\mu, .), U_\mu) = i(H(\mu, .), 0) + i(H(\mu, .), V_\mu)$$

para toda μ en una vecindad de μ_0, donde $\mu \neq \mu_0$. Por lo que

$$i(H(\mu, .), 0) = cte.$$

para toda μ en una vecindad de μ_0, donde $\mu \neq \mu_0$. Por otro lado, como en la demostración local del Teorema de Krasnoselskii, este índice salta en μ_0, por el Corolario 4.19 ya que μ_0 es un número característico de multiplicidad algebraica impar.

Ésta es la contradicción deseada y aquí se termina la demostración. Por lo tanto,

$C(\mu_0)$ contiene otro punto $(\mu, 0)$ con $\mu \neq \mu_0$. ■

6.3.2 Demostración Analítica del Teorema de Rabinowitz

Para la demostración analítica del Teorema de Rabinowitz está basada en los siguientes 4 resultados, que nos darán la demostración del teorema.

Demostración Analítica. Supondremos que $C(\mu_0)$ es acotada ya que los números característicos de L no pueden tener un punto de acumulación finito, $C(\mu_0)$ contiene, con una numeración adecuada, exactamente un número finito de puntos $(\mu_j, 0), j = 0, 1, \dots, m$ donde las μ_j son números característicos de L. Necesitamos demostrar que esta lista incluye exactamente un número par de μ_j de multiplicidad algebraica impar $\chi(\mu_j)$. En la demostración geométrica utilizamos el índce de punto fijo en el espacio X. Aquí utilizaremos el grado de una aplicación en el espcio producto $\mathbb{R} \times X$. El truco es considerar la función

$$h_r(\mu, x) := (\|x\|^2 - r^2, x - \mu(Lx + Nx))$$

sobre $\mathbb{R} \times X$ con $r > 0$. Entonces $h_r(\mu, x) = 0$ implica $x = \mu(Lx + Nx)$ y $\|x\| = r$.

Enseguida demostraremos los siguientes tres resultados.

(a) Existe un conjunto abierto acotado U en $\mathbb{R} \times X$ tal que no existen ceros de h_r sobre ∂U.

(b) Seleccionamos bolas abiertas M_j en $\mathbb{R} \times X$ con centro en $(\mu_j, 0)$, es decir,

$$M_j = \{(\mu, x) \in \mathbb{R} \times X : (\mu - \mu_j)^2 + \|x\|^2 < \epsilon^2 + r(\epsilon)^2\}.$$

Para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, todas las M_j estan en U, y todos los ceros de $h_{r(\epsilon)}$ sobre $\bar{U}$ estan en una de las bolas M_j.

(c) Sea $h = h_{r(\epsilon)}$ cuando $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Entonces

$$grad(h, U) = 0; \tag{6.5}$$

$$grad(h, M_j) = i((\mu_j - \epsilon)L, 0) - i((\mu_j + \epsilon)L, 0). \tag{6.6}$$

Ahora demostraremos que las concluciones se siguen de inmediato de (a) a (c). Por (b) y la propiedad de aditividad tenemos

$$grad(h, U) = \sum_{j=0}^{m} grad(h, M_j). \tag{6.7}$$

Por el Corolario 4.19,

$$\begin{aligned} grad(h, M_j) &= i((\mu_j - \epsilon)L, 0) - i((\mu_j + \epsilon)L, 0) \\ &= (1 - (-1)^{\chi(\mu_j)} i((\mu_j - \epsilon)L, 0) \\ &= \pm(1 - (-1)^{\chi(\mu_j)} \end{aligned}$$

De (6.11),

$$grad(h, M_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(\mu_j) \text{ es par,} \\ \pm 2 & \text{si } \chi(\mu_j) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por (6.7) y (6.5) el número de μ_j con $\chi(\mu_j)$ impar es entonces par. Este es el caso deceado. Ahora demostraremos los casos (a) y (c) en los siguientes 4 pasos.

PASO 1: *Construcción de una vecindad adecuada U de $C(\mu_j)$. $(Fig.27)$.*

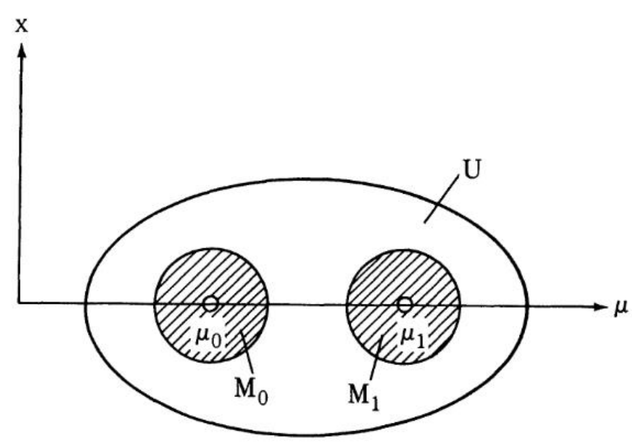


Figura 27

para el caso $m = 1$. Demostraremos que existe un conjunto abierto acotado U en

$\mathbb{R} \times X$ tal que

$$C(\mu_0) \subset U \qquad y \qquad \partial U \cap \bar{S} = \emptyset.$$

Más aún, $(\mu_j, 0) \in U$ para $j = 0, 1, \ldots, m$ y U no contiene más puntos $(\mu, 0)$ donde μ es un número característico de L y $\mu \neq \mu_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Esto demuestra de manera inmediata a (a).

Como $C(\mu_0)$ es compacto, podemos encontrar un conjunto U_1 que satisface todas las condiciones anteriores excepto $\partial U_1 \cap \bar{S} = \emptyset$. Ahora consideremos $K = \bar{U_1} \cap \bar{S}$ y

$$A_1 = C(\mu_j), \qquad A_2 = \partial U_1 \cap \bar{S}.$$

Entonces

(α) K, A_1 *y* A_2 *son espacios métricos compactos*;

(β) A_1 *es una componente de* K;

(γ) $A_1 \cup A_2 \subseteq K$ *y* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

El Teorema de Separación para conjuntos compactos ([35], [37]) garantiza la existencia de los conjuntos compactos K_1 y K_2 en K tal que

$$K = K_1 \cup K_2, \qquad K_1 \cap K_2 = \emptyset,$$

y $A_i \subseteq K_i$, para $j = 1, 2$, entonces

$$A_1 \subseteq K_1 \ y \ A_2 \subseteq K_2.$$

Obviamente $K_1 \subseteq \bar{U_1}$. En efecto, tenemos una propiedad más fuerte $K_1 \subset U_1$, ya que, si $x \in \partial U_1 \cap K_1$ esto implicaria que $x \in \partial U_1 \cap \bar{S}$, contradiciendo el hecho de que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ y $A_2 \subseteq K_2$.

Ahora seleccionemos una vecindad abierta U de K_1 tal que $K_1 \subset U \subset U_1$ y $K_2 \cap \bar{U} = \emptyset$; de donde esta U tiene todas las propiedades deceadas.

PASO 2: Para este caso, consideremos la siguiente ecuación

$$x = \mu(Lx + tNx) \tag{6.8}$$

Para demostrar que para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe un $y(\epsilon) > 0$ tal que cuando (x, μ, t) es una solución de (6.8) con $(\mu, x) \in \bar{U}$ y $t \in [0, 1]$, $\|x\| < r(\epsilon)$, $\mu \notin (\mu_j - \epsilon, \mu_j + \epsilon)$ para $j = 0, 1, \ldots m$, entonces

$$x = 0 \tag{6.9}$$

Además asumimos que $r(\epsilon) \to 0$, cuando $\epsilon \to 0$.

Si tomamos (6.9) en $t = 1$, obtenemos (b). Entonces para demostrar (6.9), escribimos (6.8) de la siguiente manera

$$F(\mu, x, t) = 0 \Rightarrow F(\mu, x, t) = x - \mu(Lx + tNx) = 0.$$

Entonces

$$F_x(\mu, 0, t) = I - \mu L$$

pues como $L : X \longrightarrow X$ es un opersdor lineal sobre un espacio de Banach X y $Nx = o(\|x\|)$ para $x \to 0$ es decir

$$\frac{\|Nx\|}{\|x\|} \to 0, \ \|x\| \to 0$$

entonces

$$F_x(\mu, x, t) = I - \mu L - t\mu N'x$$

y como $N'x = Nx$, entonces se tiene que

$$F_x(\mu, x, t) = I - \mu L - t\mu Nx$$

así,

$$\begin{aligned} F_x(\mu,0,t) &= I - \mu L - t\mu N(0) \\ &= I - \mu L - t\mu \cdot 0 \\ &= I - \mu L. \end{aligned}$$

Ahora, para $\mu \neq \mu_j$, se tiene que

$$(I - \mu L)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Esto demuestra (6.9) con r dependiendo de μ y de t, seleccionando una cubierta apropiada del conjunto de valores (μ, t).

PASO 3: *Demostración de* (6.5). La frontera ∂U no contiene puntos de $\bar{S}$, de modo que no hay soluciones de $x = \mu(Lx + Nx)$. Usando homotopía tenemos

$$grad(h_r, U) = cte \qquad \textit{para todo } r > 0.$$

Pero U es acotado, así que para r suficientemente grande, h_r no tiene ceros en U, y (6.5) se cumple.

PASO 4: *Demostración de* (6.6) Usando la homotopía

$$H(\mu,x,t) = (t[\|x\|^2 - r(\epsilon)^2] + (1-t)g(\mu), T(\mu,x,t))$$

donde

$$g(\mu) = \epsilon^2 - (\mu - \mu_j)^2, \ y \ T(\mu,x,t) = x - \mu(Lx + tNx).$$

Si $t = 0$, entonces

$$\begin{aligned} H(\mu,x,0) &= (g\mu), x - \mu(x)) \\ &= (\epsilon^2 - (\mu - \mu_j)^2, x - \mu(x)). \end{aligned}$$

Si $t = 1$, entonces

$$H(\mu, x, 1) = (\|x\|^2 - r(\epsilon)^2, x - (\mu Lx + Nx))$$

Hemos construido H de modo que $H(\mu, x, t) \neq 0$ sobre $\partial M_j \times [0, 1]$. Por si esto no fuera así, entonces tendríamos

$$\begin{aligned} t[\|x\|^2 + (\mu - \mu_j)^2 - r(\epsilon)^2 - r^2] = (\mu - \mu_j)^2 - \epsilon^2, \\ x = \mu(Lx + tNx) \end{aligned} \tag{6.10}$$

para alguna $(\mu, x) \in \partial M_j$, y $t \in [0, 1]$. Entonces $(\mu, x) \in \partial M_j$ implica

$$(\mu - \mu_j)^2 + \|x\|^2 = \epsilon^2 + r(\epsilon)^2.$$

Por lo tanto $\mu = \mu_j \pm \epsilon$ y $\|x\| = r(\epsilon)$, por (6.5). Sin embargo, $x = 0$, por (6.4), así tenemos la contradicción deceada.

La invarianza homotopica del grado de una aplicación nos dice ahora que

$$grad((H(., 0), M_j) = grad(H(., 1), M_j). \tag{6.11}$$

Tenemos $H(., 1) = h_{r(\epsilon)}$. Más aún $H(., 0)$ tiene exactamente dos ceros $P_\pm = (\mu_j \pm \epsilon, 0)$ sobre M_j. Por el teorema de suma de índice tenemos que

$$grad(H(., 0), M_j) = grad(H(., 0), P_+) + grad(H(., 0), P_-).$$

Obtenemos la derivada de *Fréchet* mediante linealización:

$$\begin{aligned} H(\mu, x, 0) &= (g(\mu), T(\mu, x, 0)) \\ &= (\epsilon^2 - (\mu - \mu_j)^2, x - \mu Lx) \\ &\Rightarrow H'(\mu, x, 0) = (2(\mu - \mu_j), I - \mu L) \\ (\mu - \mu_j)^2 = \epsilon^2 &\Rightarrow (\mu - \mu_j) = \pm\epsilon \\ &\Rightarrow= (\pm 2\epsilon, I - \mu L) \end{aligned}$$

$$H'(P_{\pm}, 0)(\gamma, y) = (\mp 2\epsilon\gamma, y - (\mu_j \pm \epsilon)Ly).$$

Para $f_{\pm}(\gamma) := \mp 2\epsilon\gamma$ tenemos $grad(f, 0) = \mp 1$. Por el teorema de índice de la sección 4.4, para $\epsilon > 0$ tenemos

$$grad(H(.,0), P_{\pm}) = grad(H'(P_{\pm}, 0), 0).$$

Finalmente, teorema del producto de [37] obtenemos

$$\begin{aligned} grad(H'(P_{\pm}, 0, 0) &= grad(f_{\pm}, 0) grad(I - (\mu_j \pm \epsilon)L, 0) \\ &= \mp grad(I - (\mu_j \pm \epsilon)L, 0) \\ &= \mp i((\mu_j \pm \epsilon)L, 0). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$grad(H(\cdot, 0), M_j) = grad(H(\cdot, 1), M_j)$$

$H(\cdot, 0) = h_{r(\epsilon)}$, entonces

$$grad(H(\cdot, 1), M_j) = grad(h_{r(\epsilon)}, M_j)$$

$$grad(H(\cdot, 0), M_j) = grad(H(\cdot, 0), P_+) + grad(H(\cdot, 0), P_-)$$

1.

$$\begin{aligned} grad(H(\cdot, 0), P_+) &= grad((H'(\cdot, 0), P_+), 0) \\ &= -i((\mu + \epsilon)L, 0). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} grad(H(\cdot, 0), P_-) &= grad((H'(\cdot, 0), P_-), 0) \\ &= i((\mu - \epsilon)L, 0). \end{aligned}$$

Entonces

$$grad(h_r, M_j) = i((\mu - \epsilon)L, 0) - i((\mu + \epsilon)L, 0).$$

■

A continuación ilusraremos algunos ejemplos que enriquecen toda la teoría abordada en el presente trabajo.

Capítulo 7

Aplicaciones

Los siguientes dos ejemplos son: el primero es una aplicación directa al Teorema de Rabinowitz, mientras que el segundo, es un caso particular del mismo llevado al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.0.1 El Teorema de Dancer (1974)

Corolario 7.1 (Teorema de Dancer (1974)). *Si* $(H1_+)$ *y* $(H2_+)$ *de* [9], [37] *se cumplen, entonces* $(\mu_0, 0)$ *es un punto de bifurcación de* (6.4) *y* $\bar{S}_+$ *contiene una componente solución no acotada* $C_+(\mu_0)$ *que pasa a través de* $(\mu_0, 0)$.

Si adicionalmente $(H3_+)$ *de* [9], [37] *se satisface, entonces* $(\mu, x) \in C_+(\mu_0)$ *y* $\mu \neq \mu_0$ *simpre implica que* $x > 0$ *y* $\mu > 0$.

Demostración. Ver [9], [37] $\blacksquare$

7.0.2 El Teorema de J. Ize (1976)†

Este resultado es debido a un gran profesor muy estimado entre la comunidad matemática de la Facultad de Ciencias como en otras instituciones en México y en el extranjero.

Corolario 7.2 (Teorema de J. Ize (1976)†). *Supongamos ($\mathfrak{H}1$) se cumple con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si μ_0 es un número caracteristico de L, entonces exactamente uno de los siguientes dos casos se cumplen.*

(i) $C(\mu_0)$ *es no acotado*

(ii) $C(\mu_0)$ *es compacto e intersecta a la rama solución trivial T un número finito de puntos $(\mu_j, 0)$, donde existen exactamente un número par de μ_j que son números caracteristicos de L de multiplicidad algebraica impar.*

Si N es analítica, entonces siempre tenemos el caso (i).

Demostración. Ver [18], [37]. ■

7.0.3 Otras Aplicaciones

Ejemplo 7.3. Consiseremos la siguiente ecuación:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \ y(L) = 0, \ L > 0 \tag{7.1}$$

1. Si $\lambda = 0$, entonces se tiene $y'' = 0$ y la solución general es de la siguiente forma:

$$y(x) = Ax + b$$
$$y(0) = A(0) + B = B = 0 \Longrightarrow B = 0, \qquad\qquad condición\ de\ frontera$$
$$y(L) = AL = 0 \Longrightarrow A = 0.\ Entonces\ A = B = 0.$$

   Entonces para $\lambda < 0$, sólamente existe la solución trivial $y = 0$. Así que $\lambda = 0$ no es un valor propio.

2. Si $\lambda > 0$, entonces escribimos $\lambda = -\alpha^2,\ \alpha > 0$.

   Entonces la ecuación toma la siguiente forma:

$$y'' - \alpha^2 y = 0$$

   y su solución general es

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} = Acosh(\alpha x) + Bsenh(\alpha x),$$

   donde $A = C_1 + C_2$ y $B = C_1 + C_2$.

   Notemos que: $cosh(\alpha x) = \frac{e^{(\alpha x)} + e^{(-\alpha x)}}{2}$ y $senh(\alpha x) = \frac{e^{(\alpha x)} - e^{(-\alpha x)}}{2}$.

   Alpicanco la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos

$$y(0) = Acosh(0) + Bsenh(0) = A = 0.$$

   De esta forma $y(x) = Bsenh(\alpha x)$. Ahora, la segunda condición de frontera $y(L) = 0$ produce

$$y(L) = Bsenh(\alpha L) = 0$$

   y esto implica que $B = 0$ ya que $\alpha \neq 0$ y $senh(x) = 0$ únicamente para $x = 0$.

   Así la solución del problema (1) para $\lambda > 0$ es la solución trivial $y = 0$ y por lo tanto podemos concluir que (1) no tiene valores propios negativos.

3. La última posibilidad es que $\lambda = \alpha^2 > 0,\ \alpha > 0$, entonces la ecuación diferencial es la siguiente:

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

   con solucuón general

$$y(x) = Acos(\alpha x) + Bsen(\alpha x).$$

La condición inicial $y(0) = 0$ implica que

$$y(0) = Acos(0) + Bsen(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$$

entonces la solución es

$$y(x) = Bsen(\alpha x).$$

La condición inicial $y(L) = 0$ implica que

$$y(L) = Bsen(\alpha L) = 0.$$

$B \neq 0$ solamente cuando αL es un multiplo entero positivo de π; esto es

$$\alpha L = \pi,\ 2\pi,\ \ldots, n\pi, \ldots.$$

Así que $\lambda = \alpha^2 = \frac{1}{L^2}(\pi^2, 4\pi^2, \ldots, n^2\pi^2)$.

Por lo tanto, el problema (1) tiene una secuencia infinita de valores propios positivos

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1, 2, 3, \cdots \Longrightarrow \lambda_n = n^2.$$

Con $B = 1$, la función propia asociada al valor propio λ_n es

$$y_n(x) = sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = sen(nx).$$

Ejemplo 7.4. Sea $X = \mathbb{R}^2$, $\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad N(x,\lambda) = L\begin{pmatrix} -x_2^3 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$

Consideremos

$$F(x,\lambda) = x - \lambda Lx - N(x,\lambda)$$

L es compacto, ya que si $x \in B_0(1)$ es abierto, entonces

$$Lx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

$\|Lx\| = \sqrt{x_1^2 + (\frac{x_2}{2})^2}$. Asi que cuando $x \in \overline{B_0(1)}$

$$\|Lx\| \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}},$$

de donde $L(B_0(1))$ tiene cerradura compacta. Así podemos tomar otra norma y acontece lo mismo.

Ahora,

$$Lx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

y la linealización de $F(x, \lambda)$ es:

$$x - \lambda Lx = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \frac{\lambda}{2} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 \\ (1-\frac{\lambda}{2})x_2 \end{pmatrix}.$$

Así que si λ es un número característico, entonces $x - \lambda Lx = 0$ esto es,

$$(1-\lambda)x_1 = 0 \quad y \quad (1 - \frac{\lambda}{2})x_2 = 0$$

y tenemos que $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ son los números característicos de donde $\lambda^{-1} \in \sigma(L)$ es decir, $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} = \mu$, satisface $\mu = 1,\ \mu = \frac{1}{2}$ cada uno de multiplicidad 1, esto es de multiplicidad impar y por el teorema de Krasnoselskii. Como la multiplicidad de los valores propios es 1, su suma es 2 que es par. Así cada punto $(0,1),\ y\ (0,2)$ es un punto de bifurcación.

Para $\lambda = [1, 2]$, tenemos una solución $x = (x_1, x_2)$ que pasa por los puntos $(0, 1)\ y\ (0, 2)$. Esta solución es:

$$F(x, \lambda) = 0$$

entonces tenemos

$$F(x, \lambda) = x - \lambda Lx - N(x, \lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 \\ (1-\frac{\lambda}{2})x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_2^3 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 + x_2^3 \\ (1-\frac{\lambda}{2})x_2 - \frac{x_1^3}{2} \end{pmatrix} = 0$$

y obtenenos las soluciones

$$(1-\lambda)x_1 + x_2^3 = 0$$

$$(1-\frac{\lambda}{2})x_2 - \frac{x_1^3}{2} = 0$$

que podemos expresar como:

$$(1-\lambda)x_1 = -x_2^3$$

$$(1-\frac{\lambda}{2})x_2 = \frac{x_1^3}{2}.$$

Así tenemos

$$(1-\lambda)x_1 = -x_2^3 \tag{7.2}$$

$$(2-\lambda)x_2 = x_1^3. \tag{7.3}$$

Resolvemos el sistema, ecuación (7.2) al elevarlo al cubo, se obtiene

$$(2-\lambda)^3 = x_1^9$$

entonces

$$x_2^3 = (2-\lambda)^{-3}x_1^9.$$

Ahora sustituimos en (7.1) para obtener

$$(1-\lambda)x_1 = -(2-\lambda)^{-3}x_1^9$$

$$(\lambda-1)x_1 = (2-\lambda)^{-3}x_1^9$$

$$x_1^8 = (\lambda-1)(2-\lambda)^3.$$

Por lo tanto

$$x_1 = \pm(\lambda-1)^{1/8}(2-\lambda)^{3/8}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} x_2^3 = (\lambda - 1)x_1 &= \pm(\lambda - 1)(\lambda - 1)^{1/8}(2 - \lambda)^{3/8} \\ &= \pm(\lambda - 1)^{9/8}(2 - \lambda)^{3/8} \end{aligned}$$

entonces

$$x_2 = \pm(\lambda - 1)^{3/8}(2 - \lambda)^{1/8}.$$

Así que

$$x = \pm\left((\lambda - 1)^{1/8}(2 - \lambda)^{3/8}, (\lambda - 1)^{3/8}(2 - \lambda)^{1/8}\right).$$

Por lo tanto, cuando $\lambda \in [1, 2]$, tienda a 1, la solución toca al punto $(0, 1)$ y cuando $\lambda \in [1, 2]$, tienda a 2, la solución toca al punto $(0, 2)$.

Bibliografía

[1] Arkerkar Rajendra, *Nonlinear Functional Analysis*, Narosa Publeshing House, 1999.

[2] Ackermann Nils, *Análisis Aplicado a Ecuaciones Diferenciales Parciales*, IMATE, U.N.A.M., 2006.

[3] Ackermann Nils, *El Grado Topológico en Análisis No Lineal*, IMATE, U.N.A.M., 2011.

[4] Arnold, V. L., Gusein-Zade, S. M., Varchenko, A. M. *Singularities of Differential Maps Vol. 1*, Birkhäser, 1985.

[5] Brezis Haim, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2010.

[6] Brown Robert F., *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis 2d ed.*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[7] Chang Kung-Ching *Methods in Nonlinear Analysis* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[8] Chow Shui-Nee and Hale Jack K., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, 1982.

[9] Dancer, E. *Global Solution Branches for Positive Operators*, Arch. Mech. Anal. 55, pp 207-213, 1974.

[10] Demling Klaus, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, Tokio, 1980.

[11] Douglas Ronald, *Banach Algebra Techiques in Operator Theory*, Springer, GTM 179, 1998.

[12] Drábek Pavel and Milota Jaroslav, *Methods of Nonlinear Analysis Applied to Differential Equations 2d ed.*, Birkhäuser, 2013.

[13] Fečkan Michel, *Topological Degree Approach to Bifurcation Problems*, Springer, 2008.

[14] Fonseca Irene and Grangbo Wilfrid, *Degree Theory in Analysis and Applications*, Clarandon Press Oxford, 1985.

[15] Górniewcz Lech, *Topological Fixed Point Theory of Multivaluated Mappings 2d ed.*, Springer, 2006.

[16] Guo Shangjiang and Wu Jianhong, *Bifurcation Theory of Functional Differential Equations*, Springer, 2013.

[17] Herrón O. Sigifredo, *Teoria de Grado*, Revista de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellin, Vol. 5, No. 1, Sept. 1997.

[18] Ize, J. *Bifurcation Theory for Fredholm Operators*, Memories of American Mathematical Society 174. Providence, RI cf. Ize ($1988ff$), 1976.

[19] Kielhöfer Hansjörg *Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to Partial Differential Equations 2d ed.*, Springer, 2010.

[20] Kreyszig Erwin, *Introduction Functional Analysis with Applications*, John-Wiley and Sons, Inc., 1978.

[21] Lloyd N. G., *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.

[22] López-Gomez Julián, *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*, Chapman and Hall/CRC, 2001.

[23] Ma Tian and Wang Shouhong, *Bifurcation Theory and Applications*, World Scientific, 2005.

[24] Milojević P. S., *Nonlinear Functional Analysis*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 121, 1989.

[25] Morrison Terry J., *Functional Analysis: An Introduction to Banach Space Theory*, John-Wiely and Sons, Inc., 2001.

[26] Nachbin Leopoldo, *Introdučao ã Análise Functional: Espačos de Banach e Cálculo Diferencial*, Programa Regional de Desenvolvimiento Científico e Tecnológico, Departamento de Assuntos Científicos, Secretaria-Gral da Organizaçăõo dos Estados Americanos, 1976.

[27] Nirenberg Louis, *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 2001.

[28] O'Regan Donal, Jecho Yeol, and Chen Yu-Qing, *Topological Degree Theory and Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2006.

[29] Rabinowitz Paul H., *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, University of Wisconsin, Madison Wisconsin 53706, May 28, 1970.

[30] Rudin Walter, *Functional Analysis 2d ed.*, McGraw-Hill, Inc., 1991.

[31] Sabina de Lis José G., *Análisis no Lineal: Curso de Introducción y Aplicaciones*, Servicio de Publicaciones, Universidad de la Laguna Campus Central Tenerife, Esp., 2005.

[32] Schwartz J. T., *Nonlinear Functional Analysis*, New York, Gordon and Breach, 1969.

[33] Somasundaram D., *A First Course in Functional Analysis*, Alpha Scientific International, Ltd. Oxford U.K., 2006.

[34] Taylor Angus E., *Introduction to Functional Analysis*, John-Wiley and Sons, Inc., 1958.

[35] Whyburn Gordon Thomas, *Topological Analysis*, Princeton New Jersey, Princeton University Press, 1958.

[36] Yosida Kôsako, *Functional Analysis 6d ed.*, Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, Tokio, 1970.

[37] Zeidler Eberhard, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I: Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, Tokio, 1986.