UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Categorías de Modelo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

VÍCTOR DANIEL GARCÍA GALICIA

TUTOR

DR. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2017

Hoja de datos del jurado

Datos del alumno
García Galicia Víctor Daniel
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
305050645

Datos del tutor
Dr. Octavio Mendoza Hernández

Datos del Sinodal 1
Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Datos del Sinodal 2
Dra. Edith Corina Sáenz Valadez

Datos del Sinodal 3
Dr. Valente Santiago Vargas

Datos del Sinodal 4
M. en C. Clotilde García Villa

Datos del trabajo escrito
Categorías de modelo
181 páginas
2017

Agradecimientos

A mi familia, en especial a mis dos madres, Lilia y Patricia, por haberme dado todo lo que tengo.

A mi tía Laura y a mis hermanos, César, Saraí y Lilí.

A la señora Aurora, al señor José, a Paulina y a Shangjiang por darme la oportunidad de ser parte de su familia.

A Maricela, por ser la luz de mi vida, por estar siempre conmigo y hacerme la persona más feliz del universo.

Al Dr. Octavio Mendoza, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él, por su tiempo, confianza y conocimientos transmitidos.

Al jurado conformado por el Dr. Francisco Marmolejo, la Dra. Corina Sáenz, el Dr. Valente Santiago y la M. en C. Clotilde García, por sus valiosos comentarios y correcciones.

Al Dr. Marco Pérez, por el tiempo y conocimientos que me brindo.

Al Dr. Lino Samaniego, por las clases y enseñanzas que me motivaron para seguir estudiando.

A mi amigo Mario, por ser incondicional.

Para Maricela,
por ayudarme a hacer mis sueños realidad,
y darme cosas hermosas con las cuales soñar.
Te amo, todo y siempre.

Índice general

Introducción

Las nociones de categoría, funtor y transformación natural fueron introducidas formalmente en 1942 (ver [EM42]) por Samuel Eilenberg (1913-1998) y Saunders Mac Lane (1909-2005). Una exposición puntualizada sería expuesta en 1945 (ver [EM45]). En 1948 Mac Lane utiliza el lenguaje categórico para considerar enunciados y demostraciones duales (ver [ML48]). Posteriormente establece explícitamente el principio de dualidad (ver [ML50]). También introduce la definición de objetos por medio de propiedades universales en lugar de las clásicas construcciones conjuntistas.

Entre 1950 y 1956 S. Eilenberg, en colaboraciones con Norman Steenrod (1910-1971) y con Henri Cartan (1904-2008), publica dos libros fundamentales ([ES52] y [CE56]). En dichos trabajos hace un uso extenso de los conceptos de categoría, funtor y transformación natural como herramienta para demostraciones en la categoría de módulos. Estos libros hicieron época, ya que ahí se menciona por primera vez el término *álgebra homológica*.

Más adelante, en 1957, Alexander Grothendieck (1928-2014) desarrolla, usando nociones categorícas, el álgebra homológica en categorías abelianas (ver [Gr57]). Dichas nociones no sólo engloban a las categorías de módulos, sino que también a las categorías de haces de módulos. En dicho trabajo se emplea por primera vez un uso sistemático de propiedades universales y sus duales. A. Grothendieck descubrió que ciertos tipos de categorías de gavillas eran abelianas; y con base en esto, le dió una fundamentación categórica a la geometría algebraica, revolucionándola por completo. Aunque inicialmente hubo resistencia a aceptar este enfoque, no tomó mucho tiempo para reconocer que dicho tratamiento es natural para el estudio de la geometría algebraica.

En 1964 Daniel Gray Quillen (1940-2011) presentó su tesis doctoral en Harvard, bajo la dirección de Raoul Bott (1923-2005), después se traslada al MIT y comienza a trabajar, fuertemente influenciado por Daniel Marinus Kan (1927-2013), en temas relacionados con topología algebraica. Tres años después publica [Qui67], ahí define una categoría de modelo [1], es decir;

[1]El término *categoría de modelo* es la abreviación de *categoría de modelo para una teoría de homotopía*.

una categoría, con límites y colímites finitos, equipada con tres clases distinguidas de morfismos (fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles) que satisfacen ciertos axiomas. En el mismo texto define una categoría de modelo cerrada (esta definición incluye a la primera). La definición de categorías de modelo ha sido modificada a través de los años, incluso por el mismo D. Quillen. En 1969, él publica [Qui69] y ahí refina su definición de categoría de modelo cerrada, en la literatura moderna estas categorías son simplemente llamadas categorías de modelo, agregando la condición de que la categoría tenga límites y colímites pequeños. Recientemente dicha definición ha sido modificada, utilizando el concepto de sistemas de factorización débiles y finalmente, gracias al Lemma de Tierney, la definición se simplifica a dos axiomas.

En el capítulo 1 expondremos definiciones básicas de la teoría de categorías, además de algunos resultados que servirán de herramienta para el desarrollo de los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 enunciaremos la definición de categoría de modelo que aparece en [Qui69]; para esto, desarrollaremos definiciones preliminares y resultados sobre el concepto de *propiedad de levantamiento*, después utilizaremos el concepto de *sistema de factorización débil* para reescribir la definición. En seguida utilizaremos el lema de Tierney para mostrar que el axioma de retracción es consecuencia del resto de los axiomas de la definición. Después definiremos cuando un *sistema de factorización débil* es *funtorial*, esta propiedad facilita ciertas construcciones en una categoría de modelo. Posteriormente estudiaremos *la teoría de homotopía* desarrollada en una categoría de modelo. En seguida expondremos las propiedades de *la categoría de homotopía*, definida por Quillen. Además revisaremos algunas propiedades de los morfismos entre categorías de modelo, dichos morfismos son los *funtores de Quillen*. Presentaremos un resultado conocido como el *argumento del objeto pequeño*. Dicho resultado es una herramienta para obtener una *factorización funtorial* en una categoría. Luego, utilizaremos el *argumento del objeto pequeño* para obtener un resultado que nos permite construir un tipo de estructura de modelo, la cual llamaremos *cofibrantemente generada*. Terminaremos este capítulo mencionando algunas construcciones, que no son triviales, para formar una categoría de modelo.

En el capítulo 3 describiremos una conexión entre las estructuras de modelo y la teoría de pares de cotorsión. Dicha conexión fue establecida en 2002 por Mark Hovey. Él probó que dada una *estructura de modelo abeliana* en una categoría bicompleta abeliana es posible construir dos pares de cotorsión completos de clases de *objetos triviales, cofibrantes* y *fibrantes,* además la inversa también es cierta, esto es, si tenemos tres clases de objetos que forman un *triple de Hovey*; esto es, dos pares de cotorsión completos compatibles además de una condición adicional, entonces es posible obtener una *estructura de modelo abeliana*, tal que las clases de *objetos triviales, cofibrantes* y *fibrantes,* coinciden con las clases iniciales.

Capítulo 1

Preliminares categóricos

En este capítulo se exponen definiciones básicas de la teoría de categorías, además de algunos resultados que servirán de herramienta para el desarrollo de los capítulos siguientes.

1.1. Fundamentos

Uno de los principales objetivos de la teoría de categorías es estudiar propiedades generales de objetos matemáticos. Para lograr esto, por lo general, se necesita considerar ciertas colecciones de conjuntos, como la colección de todos los conjuntos o el "conjunto" de todos los grupos. Pero considerar colecciones de conjuntos arbitrarias puede implicar ciertos problemas. En efecto, si asumimos que la colección $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos es un conjunto nos encontramos con la conocida paradoja de Bertrand Russell (1822-1970). Para ver esto, considere el siguiente conjunto

$$C = \{X \in \mathcal{U} \,|\, X \notin X\},$$

el cual tiene la siguiente propiedad.

$$C \in C \Leftrightarrow C \notin C.$$

Note que dicha propiedad es un absurdo. La aparición de paradojas, como la anterior, plantea el problema de encontrar una axiomatización de la teoría de conjuntos, o alguna teoría que suministre fundamentos adecuados para la práctica matemática en la teoría de categorías. Mac Lane hace una discusión sobre los fundamentos para la teoría de categorías (ver [ML98] y [ML67]), en la cual se menciona que una forma de lograr dicha fundamentación es asumiendo la existencia de ciertos conjuntos llamados "universos " .

Definición 1.1.1. Un universo es un conjunto $\mathcal{U}$ con las siguientes propiedades:

(a) Si $x \in w$ y $w \in \mathcal{U}$, entonces $x \in \mathcal{U}$.

(b) Si $I \in \mathcal{U}$ y $\forall i \in I$ se tiene que $x_i \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$.

(c) Si $x \in \mathcal{U}$ entonces $\mathscr{P}(x) \in \mathcal{U}$.

(d) Si $x \in \mathcal{U}$, $w \subseteq \mathcal{U}$ y $f : x \longrightarrow w$ es una función suprayectiva, entonces $w \in \mathcal{U}$.

(e) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales y $\mathscr{P}(x)$ el conjunto potencia de x. La siguiente proposición es una consecuencia de la definición anterior.

Proposición 1.1.2. Para un universo $\mathcal{U}$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si $x \in \mathcal{U}$ y $w \subseteq x$, entonces $w \in \mathcal{U}$.

(b) Si $x \in \mathcal{U}$ y $w \in \mathcal{U}$, entonces $\{x, w\} \in \mathcal{U}$.

(c) Si $x \in \mathcal{U}$ y $w \in \mathcal{U}$, entonces $x \times w \in \mathcal{U}$.

(d) Si $x \in \mathcal{U}$ y $w \in \mathcal{U}$, entonces $x^w \in \mathcal{U}$.

Demostración. Para ilustrar, probaremos sólo el primer inciso de la proposición.
(a) Se tiene que $w \in \mathscr{P}(x)$, ya que $w \subseteq x$. Además $\mathscr{P}(x) \in \mathcal{U}$ por (c); y finalmente, por (a) se cumple que $w \in \mathcal{U}$. ■

Observamos que las propiedades de $\mathcal{U}$ y la proposición anterior, aseguran que las operaciones estándares de la teoría de conjuntos aplicadas a elementos de $\mathcal{U}$ generan elementos de $\mathcal{U}$. De este modo los fundamentos para la teoría de categorías pueden hacerse de forma axiomática, asumiendo los axiomas estándares de la teoría de conjuntos de Abraham Helavi Fraenkel (1891-1965) y Ernest Friedrich Ferdinad Zermelo (1871- 1953), el axioma de eleción (ver [Je02]) y el siguiente axioma:

Axioma 1. Existe un universo $\mathcal{U}$.

Con un universo $\mathcal{U}$ fijo, podemos llamar **conjuntos pequeños** a los elementos de $\mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U}$ sería el conjunto de todos los conjuntos pequeños. Similarmente, una función $f : A \longrightarrow B$ es pequeña si A y B son conjuntos pequeños. Ahora, podemos construir la categoría **Set** de

todos los conjuntos pequeños; y de forma similar, podríamos considerar un conjunto pequeño con estructura de grupo, llamándolo grupo pequeño y formar la categoría **Grp** de todos los grupos pequeños. Finalmente, podemos considerar el mismo proceso para formar categorías cuyos objetos son conjuntos pequeños con cierta estructura.
Otra alternativa es usar la teoría de conjuntos y clases de Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) y Paul Isacc Bernays (1988-1977), además del axioma de elección. Advertimos que en la teoría de Zermelo-Fraenkel, las nociones primitivas son "conjuntos" y la relación de "pertenencia", mientras que en la teoría de Gödel-Bernays hay una noción extra llamada "clase". En esta teoría se tienen los siguientes axiomas (ver [Je02]) .

Axioma 2. Extensionalidad. Si X y Y tienen los mismos elementos, entonces $X = Y$.

Axioma 3. Todo conjunto es una clase.

Axioma 4. Una clase X es un conjunto si pertenece a alguna clase Y.

De este modo, una clase se piensa como un "conjunto grande ".

Axioma 5. Par. Si X y Y son conjuntos, entonces existe el conjunto $\{X,Y\}$.

Axioma 6. Esquema de comprehensión. Si $\phi(x, X_1, \ldots, X_n)$ es una fórmula donde sólo se cuantifica un número finito de parámetros y además estos parámetros son conjuntos, entonces existe una clase $\mathcal{A}$ tal que:

$$x \in \mathcal{A} \text{ si y sólo si } \phi(x, X_1, \ldots, X_n) \text{ es cierta.}$$

Por ejemplo, existe una clase $\mathcal{A}$ con la propiedad:

$$G \in \mathcal{A} \text{ si y sólo si } G \text{ "es un grupo".}$$

La expresión "es un grupo"es la abreviación de los axiomas de grupo. En otras palabras, definimos la "clase de todos los grupos". De la misma forma, podemos deducir la existencia de la clase de todos los conjuntos o la clase de todos los espacios topológicos.

Axioma 7. Infinito. Existe un conjunto infinito.

Axioma 8. Unión. Para cualquier conjunto X existe el conjunto $\bigcup X$.

Axioma 9. Potencia. Para cualquier conjunto X existe el conjunto $\mathscr{P}(X)$.

Axioma 10. Reemplazo. Si una clase F es una función y X es un conjunto, entonces $\{F(z) \mid z \in X\}$ es un conjunto.

Axioma 11. Regularidad. [1] Para cualquier conjunto X no vacío existe Y tal que $Y \in X$ y $X \cap Y = \varnothing$.

El axioma de regularidad establece que la relación "$\in$" de pertenencia en cualquier familia de conjuntos es *bien fundada*. Por ejemplo, una consecuencia de este axioma es la imposibilidad de la existencia de secuencias infinitas como esta

$$\ldots \in X_3 \in X_2 \in X_1 \in X_0,$$

en particular, no existe un conjunto X con la siguiente propiedad

$$X \in X,$$

y tampoco existen "ciclos "como este

$$X_0 \in X_1 \ldots \in X_n \in X_0.$$

De este modo, el axioma de regularidad postula la imposibilidad de la existencia de ciertos conjuntos.

Axioma 12. Elección. Existe una funcion F tal que $F(X) \in X$ para cualquier conjunto X no vacío.

La teoría axiomática formada por los Axiomas 2 hasta 11 será denotada como **BG** [2] y por **BGC** la teoría formada por **BG** y el Axioma 12. Por conveniencia, las clases que no son conjuntos las llamaremos **clases propias** y a los conjuntos **clases pequeñas**. Observamos que la colección $\mathcal{X}$ de todos los conjuntos es una clase propia, ya que $\mathcal{X}$ no es un conjunto (ver Paradoja de B. Russell). Finalmente observamos que, si usamos el axioma de la existencia de un universo $\mathcal{U}$, y lo fijamos, tenemos un modelo de la teoría de Gödel-Beynars, usando conjuntos como elementos de $\mathcal{U}$ y clases como subconjuntos de $\mathcal{U}$. Esto nos permite elegir la terminología que usaremos; conjuntos y clases o conjuntos pequeños.

Convención: En este trabajo usaremos la terminología de clases y conjuntos.

[1] El axioma de regularidad fue introducido en 1925 por John von Neumann (1903-1957).
[2] El sistema axiomático **BG** fue introducido por P. I. Bernays en 1937.

1.2. Categorías y funtores

Definición 1.2.1. Una **categoría** $\mathscr{C}$ está determinada por una clase $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ de objetos, una clase $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ de morfismos y una operación binaria $\circ$ parcialmente definida en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ tales que:

(a) $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}) := \bigcup_{A,B\in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})} [A,B]_{\mathscr{C}}$, donde $[A,B]_{\mathscr{C}}$ es un conjunto para todo par $A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(b) $\forall\, X,Y,A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, se tiene que si $(X,Y) \neq (A,B)$ entonces $[A,B]_{\mathscr{C}} \cap [X,Y]_{\mathscr{C}} = \varnothing$.

(c) Para cualquier tercia $A,B,C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, la operación $\circ$ induce una función:

$$[B,C]_{\mathscr{C}} \times [A,B]_{\mathscr{C}} \longrightarrow [A,C]_{\mathscr{C}} \text{ definida por } (g,f) \longmapsto g \circ f,$$

que cumple las siguientes propiedades:

$(c.1)$ Asociatividad: $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ siempre que dichas composiciones estén definidas.

$(c.2)$ Existencia de identidades: $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe $1_A \in [A,A]_{\mathscr{C}}$ tal que $\forall g \in [B,A]_{\mathscr{C}}$ y $\forall f \in [A,B]_{\mathscr{C}}$ se tiene que $f\circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.

El conjunto $[A,B]_{\mathscr{C}}$ puede ser denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ o bien por $\mathscr{C}(A,B)$, y la clase $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ por $|\mathscr{C}|$. Además un morfismo $f \in [A,B]_{\mathscr{C}}$ será representado por $f : A \longrightarrow B$ [3] o simplemente $A \xrightarrow{f} B$, y para simplificar la notación, escribiremos gf en lugar de $g\circ f$. Finalmente diremos que A es el **dominio** de f y B es el **codominio** de f, en símbolos escribiremos $\mathrm{Dom}(f) := A$ y $\mathrm{Codom}(f) := B$.

Observación 1.2.2. Los puntos (a) y (b), de la definición anterior, se traducen en el hecho de que todo morfismo f de $\mathscr{C}$ tiene asociado un único dominio y codominio. Finalmente $(c.2)$ implica que la identidad 1_A asociada a un objeto $A \in \mathrm{Obj}\ (\mathscr{C})$ es única.

Definición 1.2.3. Una categoría $\mathscr{C}$ es **pequeña** si la clase de objetos $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un conjunto. Además, si el conjunto $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es finito diremos que $\mathscr{C}$ es **finita**.

Definición 1.2.4. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Diremos que $\mathscr{A}$ es una **subcategoría** de $\mathscr{B}$ si satisface las siguientes condiciones:

[3]La idea fundamental de representar una función con una flecha apareció por primera vez alrededor de 1940, en trabajos de Witold Hurewicz (1904-1956) sobre grupos de homotopía relativa. Así, la notación $f : X \longrightarrow Y$ sutituyo rápidamente la notación ocasional $f(X) \subset Y$ para referirnos a una función.

(a) $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$,

(b) para cualquier par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}\ (\mathscr{A})$ se tiene que $\mathscr{A}(A,B) \subseteq \mathscr{B}(A,B)$,

(c) la composición de morfismos de $\mathscr{A}$ es la misma que en $\mathscr{B}$,

(d) si $1'_A \in \mathscr{A}(A,A)$ es la identidad de A en $\mathscr{A}$ y $1_A \in \mathscr{B}(A,A)$ es la identidad de A en $\mathscr{B}$, entonces $1'_A = 1_A$.

Definición 1.2.5. Una subcategoría $\mathscr{A}$ de $\mathscr{B}$ se dice **plena** si para cualquier par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ se cumple que $\mathscr{A}(A,B) = \mathscr{B}(A,B)$.

Ejemplos 1.2.6. En los primeros tres ejemplos, la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

(a) La categoría **Set** cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos y $\mathbf{Set}(A,B)$ es el conjunto de todas las funciones de A a B.

(b) La categoría **Ab** cuyos objetos son grupos abelianos y $\mathbf{Ab}(A,B)$ es el conjunto de todos los morfismos de grupos abelianos de A a B.

(c) Sea R un anillo. La categoría $_R\mathbf{Mod}$ que tiene como objetos R-módulos izquierdos y $_R\mathbf{Mod}(A,B)$ es el conjunto de todos los R-morfismos de A a B. De manera análoga la categoría $\mathbf{Mod}_R$ que tiene como objetos R-módulos derechos y $\mathbf{Mod}_R(A,B)$ es el conjunto de todos los R-morfismos de A a B (ver [Ro09]).

(d) Si $(M, \bullet, e)$ es un **monoide**, se construye una categoría $\mathscr{M}$ como sigue:

$(d.1)$ $\mathrm{Obj}(\mathscr{M}) := \{M\}$

$(d.2)$ $\mathscr{M}(M,M) := M$

La composición $\circ$ de morfismos en $\mathscr{M}$ ese define como $f \circ g := f \bullet g$, y el morfismo identidad 1_M es e.

(e) Si $(X, \leq)$ es un conjunto **parcialmente ordenado**, podemos darle una estructura de categoría como sigue:

$(e.1)$ $\mathrm{Obj}(X) := X$

$(e.2)$ $\forall a, b \in X$ se define:

$$X(a,b) := \begin{cases} \varnothing & si\ a \not\leq b, \\ \{(a,b)\} & si\ a \leq b. \end{cases}$$

La composición de morfismos en X está determinada por $(b,c) \circ (a,b) := (a,c)$. Además se tiene que $\forall x \in X$ el morfismo identidad 1_x es (x,x).

(f) **Categorías discretas**. Si D es un conjunto podemos darle una estructura de categoría como sigue:

$(f.1)$ $\mathrm{Obj}(D) \colon = X$

$(f.2)$ $\forall X, Y \in D$ se define:

$$D(X,Y) \colon = \begin{cases} \varnothing & \text{si } X \neq Y, \\ \{1_X\} = \{1_Y\} & \text{si } X = Y. \end{cases}$$

.

(g) La categoría **Ab** cuyos objetos son grupos abelianos y $\mathbf{Ab}(A,B)$ es el conjunto de todos los morfismos de grupos de A a B La composición $\circ$ de morfismos se define como $1_X \circ 1_X = 1_X$ para todo $X \in D$, finalmente observamos que el único morfismo $1_X \in D(X,X)$ es el morfismo identidad de X. Una categoría $\mathscr{A}$ con esta estructura se dice **discreta**,

(h) Si $X = \{\star\}$ es un conjunto con un solo elemento $\star$, definimos la categoría **1** de la siguente forma, Obj(**1**)$= X$; $\mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(\star,\star) = \{1_\star\}$ y la composición $\circ$ en **1** está determinada como sigue $1_\star \circ 1_\star \colon = 1_\star$.

Definición 1.2.7. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Un **funtor covariante** $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ consiste de una asignación $(\ X \xrightarrow{f} Y\ ) \longmapsto (\ FX \xrightarrow{Ff} FY\ )$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) **preserva la composición**: Si gf está definida en $\mathscr{A}$, entonces $T(gf) = T(g)T(f)$,

(b) **preserva la identidad**: Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, se tiene que $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

Ejemplos 1.2.8.

(a) Sea $\mathscr{C}$ una categoría. El **funtor identidad** $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ se define como sigue: $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ $1_{\mathscr{C}}(A) = A$ y $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ $1_{\mathscr{C}}(f) = f$.

(b) Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías y X un objeto fijo de $\mathscr{B}$, se define un funtor $\Delta_{\mathscr{A},X} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, llamado **funtor constante en** X, como sigue: $\Delta_{\mathscr{A},X}(A) = X$ $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\Delta_{\mathscr{A},X}(f) = 1_X$ $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$. Si $\mathscr{A}$ es la categoría **1**, el funtor constante en X se denota simplemente como Δ_X.

(c) Sea $\mathscr{A}$ una subcategoría de $\mathscr{B}$. El **funtor inclusión** $I:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ está definido como sigue: $\forall A\in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})\ I(A)=A$ y $\forall f\in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})\ I(f)=f$.

(d) El **funtor olvido** $U:{}_R\mathbf{Mod}\Longrightarrow\mathbf{Set}$ de la categoría de R-módulos izquierdos a la categoría de conjuntos. Este funtor olvida la estructura de R-módulo izquierdo de los objetos de ${}_R\mathbf{Mod}$. Es decir, si M es un R-módulo izquierdo, entonces $U(M)=M$ es considerado como un conjunto sin estructura de R-módulo izquierdo. Además si f es un R-morfismo, entonces $U(f)=f$ es considerado como una función. De manera similar, podemos considerar el funtor olvido que tenga como dominio a $\mathbf{Mod}_{\mathrm{R}}$.

(e) Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $C\in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto fijo. Definimos el funtor $T_C:\mathscr{C}\longrightarrow\mathbf{Set}$ como sigue:

$(e.1)$ $T_C(A):=\mathscr{C}(C,A)\ \forall A\in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$(e.2)$ $\forall f\in\mathscr{C}(A,B)$, definimos $T_C(f):\mathscr{C}(C,A)\to\mathscr{C}(C,B)$ de la siguiente forma, $T_C(f)(g):=fg\ \ \forall g\in\mathscr{C}(C,A)$.

El funtor T_C es llamado **funtor covariante Hom** y usualmente se denota como $\mathscr{C}(C,-)$ o por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,-)$. Además $T_C(f)$ será denotado como f_*; de este modo $f_*(g)=fg$.

Definición 1.2.9. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Un **funtor contravariante** $F:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}$ consiste de una asignación $(\ X\xrightarrow{f}Y\ )\longmapsto(\ FY\xrightarrow{Ff}FX\ )$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) **invierte la composición**: Si gf está definida en $\mathscr{A}$, entonces $T(gf)=T(f)T(g)$,

(b) **preserva la identidad**: Para todo $A\in\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ se tiene que $T(1_A)=1_{T(A)}$.

Si $F:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}$ es un funtor covariante, o contravariante, diremos que $\mathscr{A}$ es el **dominio** de F y $\mathscr{B}$ es el **codominio** de F, también que F tiene valores en $\mathscr{B}$. Finalmente, cuando no exista confusión, si F es un funtor covariante, nos referiremos a él simplemente como un funtor.

Ejemplos 1.2.10.

(a) El funtor P^* : **Set**$\longrightarrow$ **Set** se define como sigue: para cualquier función $f : X \to Y$, $P^*(X) := \mathscr{P}(X)$ y $P^*(f) : P^*(Y) \to P^*(X)$ está dada por $P^*(f)(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$, o simplemente $P^*(f)(U) = f^{-1}(U)$, para cualquier subconjunto U de Y. Usualmente P^* es llamado **funtor contravariante potencia**.

(b) Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto fijo. Definimos el funtor $T^C : \mathscr{C} \longrightarrow$**Set**, como sigue:

$(b.1)$ $T^C(A) := \mathscr{C}(A,C)$ $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$(b.2)$ $\forall f \in \mathscr{C}(A,B)$, definimos $T^C(f) : \mathscr{C}(B,C) \longrightarrow \mathscr{C}(A,C)$ de la siguiente forma, $T^C(f)(g) := gf$ $\forall g \in \mathscr{C}(C,A)$.

El funtor T^C es llamado **funtor contravariante Hom** y usualmente lo denotaremos por $\mathscr{C}(-,C)$ o como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,C)$. Además $T^C(f)$ será denotado simplemente por f^*; de este modo $f^*(g) = gf$.

Definición 1.2.11. Un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **fiel** (resp. **pleno**) si $\forall A, \overline{A} \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ la función inducida $\mathscr{A}\left(A,\overline{A}\right) \longrightarrow \mathscr{B}\left(FA,F\overline{A}\right)$, definida por $f \longmapsto Ff$, es inyectiva (resp. **suprayetiva**). Decimos que un funtor fiel F es una **inmersión** si la función inducida $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$, definida por $A \longmapsto FA$, es inyectiva.

Definición 1.2.12. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores. La **composición** $GF : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ de G con F se define como sigue: $(GF)(f) := G(F(f))$ para toda $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{A}$.

La composición de funtores es claramente asociativa. Además, si $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ son ambos covariantes o contravariantes, entonces GF es covariante; y si sólo uno de ellos es covariante entonces FG es contravariante.

Definición 1.2.13. Si $\mathscr{D}$ es una categoría pequeña, diremos que un funtor $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ es un **diagrama en** $\mathscr{C}$. Además, si $\mathscr{D}$ es finita diremos que el funtor $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ es un **diagrama finito**.

La definición anterior captura la idea intuitiva de un *diagrama*. En efecto, si consideramos un *diagrama* abstracto como una multigráfica dirigida G, es decir; un conjunto V de vértices y para cualquier par de vértices u y v un conjunto $\mathrm{arr}(u,v)$, posiblemente vacío, de flechas de u a v, entonces un diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ puede ser considerado como una gráfica cuyos vértices están etiquetados por objetos $F(D)$ en $\mathscr{D}$ y cada una de las flechas de la gráfica por un morfismo $Ff : FD \longrightarrow FE$ de $\mathscr{D}$. Por último, cuando dibujamos un *diagrama* omitimos las flechas que corresponden a los morfismos identidades.

1.3. Dualidad

La idea de dualidad categórica es, siguiendo a S. Mac Lane, el proceso de "invertir flechas". Dicho concepto es muy importante; y para definirlo, necesitamos hacer ciertas observaciones y aclaraciones sobre el lenguaje formal de **BGC** (ver pag. 4). Para exponer los axiomas de **BGC** de forma precisa, **BGC** se desarrolla, en el marco del cálculo de predicados de primer orden. Además de la relación de igualdad "$=$", el lenguaje de **BGC** consiste de la relación de pertenencia "$\in$" y fórmulas bien formadas[4] que se construyen a partir de formulas atómicas (por ejemplo $Y \in X$ y $X = Y$) por medio de los conectivos lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y $\neg$, y de cuantificadores lógicos: $\exists$ y $\forall$. Sin embargo, en la práctica utilizamos otros símbolos, como operaciones binarias, constantes o incluso fórmulas de manera informal. Por ejemplo, el axioma 2 se escribe formalmente como $\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y$. Por lo que entenderemos que, cada una de las expresiones matemáticas en esta tesis, se puede escribir en una forma en la cual solo se involucre los símbolos lógicos mencionados; además del símbolo de igualdad y de pertenencia, es decir como una fórmula bien formada. Por lo anterior es obvio que cualquier expresión en la que se refiera a los componentes de una categoría $\mathscr{A}$ se puede escribir como una fórmula bien formada. Así, una fórmula φ que se refiera a los componentes de una categoría $\mathscr{A}$ la llamaremos *fórmula categórica*. Por ejemplo, la siguiente fórmua $\varphi(X)$ asociada a un objeto X de $\mathscr{A}$,

$$\varphi(X): \quad \forall X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\ \exists y \in \mathscr{A}(X,X)$$

es una *fórmula categórica*. Con estas aclaraciones y la siguiente definición, podemos decir como construir la *fórmula dual* de una *fórmula categórica*.

Definición 1.3.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. La **categoría dual** $\mathscr{C}^*$ de $\mathscr{C}$ está definida de la manera siguiente: $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}^*) := \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\mathscr{C}^*(A,B) := \mathscr{C}(B,A)\ \forall A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}^*)$. Además diremos que $f^* : B \longrightarrow A$ es un morfismo en $\mathscr{C}^*$ si y sólo si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$; de esta manera la composición de morfismos en $\mathscr{C}^*$ se define como $f^* \circ g^* := (g \circ f)^*$.

[4]También se usa **expresión bien formada**.

Observación 1.3.2. Podemos definir un funtor contravariante $D_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^*$ como sigue, $D_{\mathscr{A}}(A) := A \ \forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $D_{\mathscr{A}}(f) := f^* \ \forall f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$. Note que $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$.

Así, la *fórmula dual* φ^* de una *fórmula categoríca* φ, se construye reemplazando cada término que se refiera a un conjunto $\mathscr{A}(X,Y)$ por el término que se refiere al conjunto $\mathscr{A}^*(X,Y)$ y reemplazar cada término que se refiera a un morfismo f por el término que se refiere al morfismo f^*. Finalmente usamos la definición de $\mathscr{A}^*$ para escribir la fórmula en términos de la categoría $\mathscr{A}$. Veamos un ejemplo, construyamos la *fórmula dual* de la siguiente fórmula

$$\varphi : \forall f \in \mathscr{A}(X,Y) \ \forall g \in \mathscr{A}(W,Y) \text{ existen } \gamma \in \mathscr{A}(P,X) \text{ y } \delta \in \mathscr{A}(P,W) \text{ tales que } f\gamma = g\delta.$$

Realizando los reemplazos indicados obtenemos lo siguiente

$$\forall f^* \in \mathscr{A}^*(X,Y) \ \forall g^* \in \mathscr{A}^*(W,Y) \text{ existen } \gamma^* \in \mathscr{A}^*(P,X) \text{ y } \delta^* \in \mathscr{A}^*(P,W) \text{ tales que } f^*\gamma^* = g^*\delta^*.$$

Por último, observamos que $f^*\gamma^* = (\gamma f)^*$ y que $g^*\delta^* = (\delta g)^*$. Para escribir la fórmula anterior, en términos de la categoría original

$$\varphi^* : \forall f \in \mathscr{A}(Y,X) \ \forall g \in \mathscr{A}(Y,W) \text{ existen } \gamma \in \mathscr{A}(X,P) \text{ y } \delta \in \mathscr{A}(W,P) \text{ tales que } \gamma f = \delta g.$$

En efecto, el proceso para construir la fórmula dual φ^* es el proceso de invertir las flechas en φ. Podemos observar como φ y φ^* plantean la existencia de los siguientes cuadrados conmutativos [5]

$$\varphi \quad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad\qquad \varphi^* \quad \begin{tikzcd} P & X \arrow[l, "\gamma"'] \\ W \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, phantom, "="] & Y \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Diremos que una fórmula φ es *auto dual* si es equivalente a su *fórmula dual* φ^*. Lo anterior no pasa en general. Por otro lado, observamos que una una *fórmula categórica* puede ser una propiedad, un enunciado, teorema o incluso una demostración. Esto hace posible dualizar los conceptos anteriores; por lo que aquí radica la gran importancia del concepto de dualidad en la teoría de categorías. De hecho, si φ es una fórmula que relaciona morfismos y objetos de una categoría $\mathscr{A}$, entonces existe una relación lógica con φ^*; la cual es conocida como el **Principo de dualidad en teoría de categorías**. Dicho principio dice lo siguiente: Si φ es una *fórmula categórica* que es verdadera, es decir; φ es una consecuencia lógica de los axiomas de la teoría de

[5] Probablemente los diagramas conmutativos fueron usados por primera vez por W. Hurewicz.

categorías, entonces φ^* también es verdadera [6]. Con frecuencia una propiedad φ^* es denotada por **co-**φ, como veremos más adelante, cada *definición categórica* tendrá su dual.

Observación 1.3.3. Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y **Set** la categoría de conjuntos. Un funtor contravariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** define un funtor $F^* : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{B}$ covariante como sigue: $F^*A := FA$ para todo $A \in$Obj$(\mathscr{A}^*)$ y si $f^* : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathscr{A}^*$, se define $F^*f := Ff$. En efecto, F^* es un funtor; si $f^* : B \longrightarrow C$ y $g^* : C \longrightarrow D$ son morfismos en $\mathscr{A}^*$, entonces

$$F^*\left(g^*f^*\right) = F^*\left((fg)^*\right) = F\left(fg\right) = F\left(g\right)F\left(f\right) = F^*\left(g^*\right)F^*\left(f^*\right),$$

además

$$F^*\left((1_A)^*\right) = F\left(1_A\right) = 1_{FA} = 1_{F^*A}.$$

De esta forma, un funtor contravariante $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ puede ser considerado simplemente como un funtor covariante $F^* : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{B}$

1.4. Morfismos y objetos

Definición 1.4.1. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es **mono-escindible** si existe un morfismo $v : Y \to X$ tal que $vf = 1_X$, en este caso diremos que X es **retracto** de Y. Dualmente, decimos que f es **epi-escindible** si existe un morfismo $\widehat{v} : Y \longrightarrow X$ tal que $f\widehat{v} = 1_Y$. Si f es **mono-escindible** y **epi-escindible** decimos que f es un **isomorfismo** y que X es isomorfo a Y, en símbolos $X \cong Y$.

Si f es un isomorfismo, entonces los anteriores morfismos v y $\widehat{v}$ son iguales. Por lo tanto se dice que $v = \widehat{v}$ es el **inverso** de f y se denota como f^{-1}. Además, la clase de todos los isomorfimos de una categoría $\mathscr{C}$ es denotada como Iso$(\mathscr{C})$.

Definición 1.4.2. Diremos que un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **representativo** [7] si $\forall B \in$Obj$(\mathscr{B})$ existe $A \in$Obj$(\mathscr{A})$ tal que $FA \cong B$.

Definición 1.4.3. Diremos que un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una **equivalencia** de categorías si F es fiel, pleno y representativo. En este caso escribiremos $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$.

[6] El *principio de dualidad* fue formulado por primera vez en 1950 por S. Mac Lane en [ML50].

[7] El término **representativo** proviene de [Mi64]. También se usan los términos **denso** y **esencialmente sobre objetos.**

Definición 1.4.4. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $f \in \mathscr{C}(X,Y)$. Diremos que f es un **monomorfismo** si para todo par de morfismos $g, \widehat{g} \in \mathscr{C} \in (Z,X)$ tales que $f \circ g = f \circ \widehat{g}$, se tiene que $g = \widehat{g}$. Dualmente, diremos que f es un **epimorfismo** si para todo par de morfismos $h, \widehat{h} \in \mathscr{C}(Y,W)$ tales que $h \circ f = \widehat{h} \circ f$, se tiene que $\widehat{h} = h$.

La clase de todos los monomorfismos (resp. epimorfismos) de una categoría $\mathscr{C}$ es denotada por Mon$(\mathscr{C})$ (resp. Epi$(\mathscr{C})$).

Observación 1.4.5. Las clases Iso$(\mathscr{C})$, Mon$(\mathscr{C})$ y Epi$(\mathscr{C})$ son cerradas bajo composición [8]. Además si f es mono-escindible (resp. epi-escindible) entonces $f \in$Mon$(\mathscr{C})$ (resp. $f \in$Epi$(\mathscr{C})$).

Definición 1.4.6. Una categoría $\mathscr{A}$ es **balanceda** si todo morfismo que es monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo.

Proposición 1.4.7. Si un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es mono-escindible y también un epimorfismo, entonces es un isomorfismo. Dualmente, si un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es un epi-escindible y también un monomorfismo, entonces es un isomorfismo.

Definición 1.4.8. Un objeto X de una categoría $\mathscr{C}$ es **inicial** (resp. **final**) si $\forall Y \in$Obj(C) existe un único morfismo $f : X \longrightarrow Y$ (resp. $f : Y \longrightarrow X$).

Proposición 1.4.9. Si Y y X son objetos iniciales (resp. finales) en una categoría $\mathscr{C}$ entonces $Y \cong X$. Es decir los objetos iniciales (resp. finales) son únicos salvo isomorfismos.

Por lo anterior, si X es un objeto inicial (resp. final) será denotado como 0 (resp. 1).

Definición 1.4.10. Si un objeto X de una categoría es final e inicial diremos que es un **objeto cero**.

Observamos que un objeto cero es único salvo isomorfismos. De este modo, un objeto cero se denotará como **0**.

1.5. Transformaciones naturales

Definición 1.5.1. Sean $F, G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ funtores covariantes. Una **transformación natural** $\alpha : F \Longrightarrow G$, de F a G, es una familia de morfismos $\alpha := \{\alpha_A : FA \longrightarrow GA\}_{A \in |\mathscr{A}|}$ en $\mathscr{B}$, tal que

[8] Una clase de morfismos $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición cuando $\forall f, g \in \mathcal{M}$, tal que gf está definida, se tiene que $gf \in \mathcal{M}$.

para todo morfismo $f \in \mathscr{A}(A,A')$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "="] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FA' \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & GA'. \end{tikzcd}$$

Usualmente, los morfimos α_A son llamados componentes de la transformación natural α. Además, representaremos a una transformación natural $\alpha : F \Longrightarrow G$ con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{B}. \end{tikzcd}$$

Observamos que una transformación natural

$$\alpha = \{\alpha_A : FA \longrightarrow GA\}_{A\in|\mathscr{A}|}$$

induce una función $\overline{\alpha}$:Obj$(\mathscr{A}) \longrightarrow$Mor$(\mathscr{B})$, definida como $\overline{\alpha}(A) := \alpha_A$ $\forall A \in$Obj$(\mathscr{A})$. Recíprocamente, decimos que una función α :Obj$(\mathscr{A}) \longrightarrow$Mor$(\mathscr{B})$ es **natural en los objetos de** $\mathscr{A}$ si existen funtores $F,G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ con los que se puede inducir una transformacíon natural

$$\alpha := \{\alpha_A : FA \longrightarrow GA\}_{A\in|\mathscr{A}|}$$

definida como $\alpha_A := \alpha(A)$ $\forall A \in$Obj$(\mathscr{A})$.

Definición 1.5.2. Sean $\alpha = \{\alpha_A : FA \longrightarrow GA\}_{A\in|\mathscr{A}|}$ y $\beta = \{\beta_A : G\,A \longrightarrow HA\}_{A\in|\mathscr{A}|}$ transformaciones naturales. La composición $\beta \circ \alpha : F \Longrightarrow H$ de β con α está definida como sigue, $(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A$ para todo $A \in$ Obj$(\mathscr{A})$.

Notemos que la composición de transformaciones naturales es asociativa.

Ejemplo 1.5.3. La **transformación natural identidad** $1_T : T \Longrightarrow T$ es por definición, $(1_T)_A := 1_{TA}$ para todo $A \in$ Obj$(\mathscr{A})$. En efecto, si consideramos $\alpha : F \Longrightarrow G$ y $\beta : G \Longrightarrow F$ transformaciones naturales, entonces se cumple que $\alpha \circ 1_T = \alpha$ y $1_F \circ \beta = \beta$.

Observación 1.5.4. Sean F,G,H y K funtores y $\alpha : F \Longrightarrow G$ una transformación natural como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "H"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{C} \arrow[r, "K"] & \mathscr{D}. \end{tikzcd}$$

Definimos una transformación natural $K\alpha : KF \Longrightarrow KG$ de la siguiente forma, $(K\alpha)_B := K(\alpha_B)$ para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$. De manera similar $\alpha H : FH \Longrightarrow GH$ está definida por $(\alpha H)_A := \alpha_{HA}$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Por lo que tenemos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "FH"] \arrow[r, bend right, "GH"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha H"] & \mathscr{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "KF"] \arrow[r, bend right, "KG"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow K\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd} .$$

La observación anterior nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 1.5.5. Sean $F, G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $H, K : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores, $\alpha : F \Longrightarrow G$ y $\beta : H \Longrightarrow K$ transformaciones naturales. Se define el **producto de Godement** $\beta \star \alpha : HF \Longrightarrow KG$ de β con α de la siguiente forma, $\beta \star \alpha := (\beta G) \circ (H\alpha)$.

Es claro que $\beta \star \alpha$ es una transformación natural y que el producto de Godement es asociativo. Además, la representación por medio de diagramas nos permite considerar al producto de Godement como una “composición horizontal” de transformaciones naturales.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathscr{C} \end{tikzcd} \quad \overset{\star}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "KG"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta\star\alpha"] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

En contraste, la composición de transformaciones naturales se visualiza como una “composición vertical ”.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta"] & \mathscr{B} \end{tikzcd} \quad \overset{\circ}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta\circ\alpha"] & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

Proposición 1.5.6. Sean α, β, γ y δ transformaciones naturales, como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "H" description] \arrow[r, bend right=50, "L"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \gamma"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, "K" description] \arrow[r, bend right=50, "M"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \beta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \delta"] & \mathscr{C} \end{tikzcd} ,$$

entonces se cumple la siguiente igualdad,

$$(\delta \star \gamma) \circ (\beta \star \alpha) = (\delta \circ \beta) \star (\gamma \circ \alpha).$$

Definición 1.5.7. Sea $\alpha = \{\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)\}_{A \in |A|}$ una transformación natural. Decimos que α es una **equivalencia natural** si $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ se tiene que α_A es un isomorfismo. En este caso existe una transformación natural $\alpha^{-1} : G \Longrightarrow F$ definida por $(\alpha^{-1})_A = (\alpha_A)^{-1}$. Escribiremos $F \cong G$ para denotar que existe una equivalencia natural entre F y G.

1.6. Producto de categorías y funtores de varias variables

Definición 1.6.1. Sean $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, ... y $\mathscr{A}_n$ categorías. Construimos la categoría $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i$, llamada producto de $\mathscr{A}_1$ hasta $\mathscr{A}_n$, como sigue:

(a) Obj($\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i$) := Obj($\mathscr{A}_1$)$\times\ldots\times$Obj($\mathscr{A}_n$).

(b) Si $A=(A_1,...,A_n)$ y $B=(B_1,...,B_n)$ son objetos de $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i$, se define:

$$\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i(A,B) := \mathscr{A}_1(A,B)\times ...\times\mathscr{A}_n(A,B).$$

La composición de morfismos en $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i$ está determinada como sigue,

$$\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i(B,C)\times\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i(A,B)\longrightarrow\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i(A,C)$$

donde $((g_1,...,g_n),(f_1,...,f_n))\longmapsto(g_1\circ f_1,...,g_n\circ f_n)$.

(c) Si $A=(A_1,...,A_n)$ es un objeto de $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i$ el morfismo identidad está definido como $1_A := (1_{A_1},...,1_{A_n})$.

Definición 1.6.2. Sean $\mathscr{A}_1$, ... , $\mathscr{A}_n$ y $\mathscr{B}$ categorías y $\{I,J\}$ una partición de $\{1,...,n\}$. Un **funtor de *n* variables** $F:\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i\longrightarrow\mathscr{B}$ covariante en la i-ésima variable $\forall i\in I$ y contravariante en la j-ésima variable $\forall j\in J$ se define como:

(a) Una función Obj($\prod_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i$) $\longrightarrow$ Obj($\mathscr{B}$), donde $(A_1,...,A_n)\longmapsto F(A_1,...,A_n)$.

(b) $\forall i\in I$, $f_i\in\mathscr{A}(A_i,B_i)$ y $\forall j\in J$, $f_j\in\mathscr{A}\left(B_j,A_j\right)$ una función inducida

$$(f_1,...,f_n)\longmapsto F(f_1,...,f_n),\text{ donde } F(f_1,...,f_n)\in\mathscr{B}((A_1,...,A_n),(B_1,...,B_n)),$$

que cumple las siguientes condiciones:

$(b.1)$ **Preserva la composición**: Si las siguientes composiciones están definidas; $h_i = g_i f_i$ $\forall i \in I$ y $h_j = f_j g_j$ $\forall j \in J$, entonces $F(h_1, ..., h_n) = F(g_1, ..., g_n) F(f_1, ..., f_n)$.

$(b.2)$ **Preserva la identidad**: Si $A = (A_1, ..., A_n)$ es un objeto de $\prod_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$, entonces $T(1_A) = 1_{TA}$.

Observación 1.6.3. Sean F es funtor de n variables, como en la definición anterior, y k un elemento de $\{1, ..., n\}$. Entonces $\forall\, A_i \in \mathscr{A}_i$ (con $i \neq k$) podemos inducir un funtor

$$F^k_{A_1,...,A_n} : \mathscr{A}_k \longrightarrow \mathscr{B}$$

de la siguiente forma,

(a) $F^k_{A_1,...,A_n}(A) := F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n)$ $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}_k)$.

(b) $F^k_{A_1,...,A_n}(f) := F\left(1_{A_1}, \ldots, 1_{A_{k-1}}, f, 1_{A_{k+1}}, \ldots, 1_{A_n}\right)$ $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}_k)$.

Los funtores $F^k_{A_1,...,A_n}$ son llamados **funtores parciales de una variable** inducidos de F, estos funtores se interpretan como si en F dejamos fijas A_i (con $k \neq i$) variables. Además, notamos que si F es covariante (resp. contravariante) en la k-ésima variable entonces $F^k_{A_1,...,A_n}$ es covariante (resp. contravariante).

Ejemplo 1.6.4. Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Se define $T : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow$**Set**, llamado **funtor Hom de dos variables**, como sigue,

(a) $T(X,Y) := \mathscr{A}(X,Y)$ $\forall (X,Y) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A} \times \mathscr{A})$.

(b) Si $f \in \mathscr{A}\left(\overline{X}, X\right)$ y $g \in \mathscr{A}\left(Y, \overline{Y}\right)$ se define $T(f,g) : \mathscr{A}(X,Y) \longrightarrow \mathscr{A}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ como $T(f,g)(u) := guf$ $\forall\, u \in \mathscr{A}\left(\overline{X}, X\right)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[d, "g"] \\ \overline{X} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "guf"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

Observamos que F es covariante en la segunda variable y contravariante en la primer variable. Además, los funtores parciales inducidos de T son los funtores **Hom**, es decir, si fijamos la primer variable (resp. segunda) obtemos el funtor T^C (resp. T_C) definido anteriormente. Usualmente T es denotado como $\mathscr{A}(-,-)$ o por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,-)$.

1.7. Bifuntores

Definición 1.7.1. Sea $F : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor de dos variables. Diremos que F es un **bifuntor** [9] si es covariante en ambas variables. Además, los funtores parciales inducidos de F serán denotados como $F(A,-)$ y $F(-,B)$.

Proposición 1.7.2. Sean $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Supongamos que $\forall C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe un funtor $L_C : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ existe un funtor $M_B : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tales que

$$M_B(C) = L_C(B) \quad \forall (B,C) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}) \times \mathrm{Obj}(\mathscr{C}).$$

Entonces existe un bifuntor $S : \mathscr{B} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que los funtores parciales inducidos de S cumplen que

$$S(-,C) = L_C \ \forall\, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \text{ y } S(B,-) = M_B \ \forall\, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}),$$

si y sólo si $\forall (f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{B}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, con $f \in \mathscr{B}(B,B')$ y $g \in \mathscr{C}(C,C')$, se tiene la siguiente igualdad $M_{B'}(g) \circ L_C(f) = L_{C'}(f) \circ M_B(g)$.

Demostración. Ver [ML98].

Observación 1.7.3.

(a) Sean $F : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$ un bifuntor, $f \in \mathscr{C}(A,B)$ y $g \in \mathscr{D}(X,Y)$. Los funtores parciales inducidos de F cumplen la siguiente igualdad

$$F(f,1_Y)F(1_A,g) = F(f,g) = F(1_B,g)F(f,1_X).$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(A,X) \arrow[r, "F(f{,}1_X)"] \arrow[d, "F(1_A{,}g)"'] \arrow[dr, "F(f{,}g)"] & F(B,X) \arrow[d, "F(1_B{,}g)"] \\ F(A,Y) \arrow[r, "F(f{,}1_Y)"'] & F(B,Y) \end{tikzcd} .$$

Haciendo $\left(\alpha_f\right)_X = F(f,1_X)$ y $(\alpha_g)_X = F(1_A,g)$, obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

[9] En [Mi64] un funtor de dos variables es simplemente un bifuntor, pero en esta tesis haremos esta diferencia.

$$
\begin{tikzcd}
F(A,X) \arrow[r, "(\alpha_f)_X"] \arrow[d, "F(1_A,g)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F(B,X) \arrow[d, "F(1_B,g)"] \\
F(A,Y) \arrow[r, "(\alpha_f)_Y"'] & F(B,Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A,X) \arrow[r, "(\alpha_g)_A"] \arrow[d, "F(f,1_X)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F(A,Y) \arrow[d, "F(f,1_Y)"] \\
F(B,X) \arrow[r, "(\alpha_g)_B"'] & F(B,Y)
\end{tikzcd}.
$$

Esto permite ver que los morfismos f y g inducen las siguientes transformaciones naturales $\alpha_f : F(A,-) \Longrightarrow F(B,-)$ y $\alpha_g : F(-,X) \Longrightarrow F(-,Y)$ en los respectivos funtores parciales.

(b) Sean F y G bifuntores y α una transformación natural como en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \times \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & \mathscr{C}
\end{tikzcd}.
$$

Entonces $\forall A \in$Obj$(\mathscr{A})$ y $\forall B \in$Obj$(\mathscr{B})$ se inducen transformaciones naturales

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{B} \arrow[r, bend left, "F(A,-)"] \arrow[r, bend right, "G(A,-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_A"] & \mathscr{B}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F(-,B)"] \arrow[r, bend right, "G(-,B)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_B"] & \mathscr{B}
\end{tikzcd},
$$

definidas como $(\alpha_A)_B := \alpha_{(A,B)}$ $\forall A \in$Obj$(\mathscr{A})$ y $(\alpha_B)_A := \alpha_{(A,B)}$ $\forall B \in$Obj$(\mathscr{B})$, respectivamente.

1.8. Categorías de funtores

Definición 1.8.1. Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías, denotaremos por $\mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ a la clase de todos los funtores covariantes F de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$. Además si $F,G \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$, denotaremos por $\mathbf{Nat}(F,G)$ a la clase de todas las transformaciones naturales α de F a G.

La definición anterior, y la asociatividad de la composición de transformaciones naturales, nos sugieren construir una categoría que tenga como objetos la clase $\mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ y para cada par de funtores F y G, la clase de morfismos de F a G sea la clase $\mathbf{Nat}(F,G)$. El requisito pendiente es que $\mathbf{Nat}(F,G)$ sea un conjunto. La siguiente proposición garantiza la condición necesaria para que esto suceda.

Proposición 1.8.2. Si $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña y $\mathscr{B}$ es una categoría arbitraria, entonces $\forall F,G \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ la clase $\mathbf{Nat}(F,G)$ de transformaciones naturales de F a G es un conjunto.

Demostración. Consideremos la siguiente clase $\mathbf{H}(\mathscr{B}) := \{\mathscr{B}(FA,GA) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$ y la siguiente función, $\Phi : \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathscr{B})$ definida como $A \longmapsto \mathscr{B}(FA,GA)$, por el axioma de reemplazo se tiene que $\mathbf{H}(\mathscr{B})$ es un conjunto. Aplicando el axioma de la unión y de la potencia, concluimos que $\mathscr{P}(\bigcup \mathbf{H}(\mathscr{B}))$ es un conjunto. Por otro lado, observamos que una transformacioń natural $\alpha \in \mathbf{Nat}(F,G)$ es por definición una clase de mapeos $\{\alpha_A : FA \longrightarrow GA\}_{A\in|\mathscr{A}|}$, y por lo tanto se tiene la siguiente contención $\alpha \subseteq \bigcup \mathbf{H}(\mathscr{B})$. Concluimos después que $\alpha \in \mathscr{P}(\bigcup \mathbf{H}(\mathscr{B}))$, lo cual implica que $\mathbf{Nat}(F,G) \subseteq \mathscr{P}(\bigcup \mathbf{H}(\mathscr{B}))$. De lo anterior y el axioma de la potencia, se deduce que $\mathbf{Nat}(F,G)$ es un conjunto. ■

Definición 1.8.3. Sean $\mathscr{A}$ una categoría pequeña y $\mathscr{B}$ una categoría arbitraria. La categoría de funtores [10] $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ se define como sigue: $\mathrm{Obj}\big(\mathscr{B}^{\mathscr{A}}\big) := \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ y $\forall F,G \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ se define $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}(F,G) := \mathbf{Nat}(F,G)$. La composición de morfismos es la composición de transformaciones naturales. Además, el morfismo identidad será la transformación identidad 1_F para cualquier $F \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$.

Proposición 1.8.4. Si $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña, entonces la clase $\mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ de morfismos de $\mathscr{A}$ es un conjunto.

Demostración. Definamos la siguiente clase $\mathrm{W}(\mathscr{A}) := \{\mathscr{A}(A,B) \mid A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$ y la siguiente función $\Omega : \mathrm{Obj}(A) \times \mathrm{Obj}(A) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{A})$, determinada como $(A,B) \longmapsto \mathscr{A}(A,B)$; observamos que Ω es en efecto una función por la definición 1.2.6(b). Por el axioma de reemplazo, $\mathrm{W}(\mathscr{A})$ es un conjunto; pero $\mathrm{Mor}(\mathscr{A}) = \mathrm{W}(\mathscr{A})$. ■

En general, la categoría $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ hereda las propiedades de $\mathscr{A}$. Hasta ahora, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.8.5. Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías pequeñas, entonces $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ es una categoría pequeña.

1.9. Lema de Yoneda

En esta sección expondremos un resultado de gran importancia en la teoría de categorías, el cual es conocido como *lema de Yoneda* [11]. Las referencias para esta sección son [ML98] y [B194].

[10] La importancia de las categorías de funtores, algunas veces llamadas categorías de diagramas, fue enfatizada por A. Grothendieck en 1947.

[11] El término *lema de Yoneda* se originó en 1954, en una entrevista entre Nobuo Yoneda (1930-1996) y Saunders Mac Lane hecha en Paris.

Lema 1.9.1 (Lema de Yoneda)**.** Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow$**Set** un funtor, A un objeto fijo de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}(A,-) : \mathscr{A} \longrightarrow$ **Set** el funtor Hom. Entonces, la función

$$\Theta_{F,A} : \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F) \longrightarrow F(A), \quad \alpha \longmapsto \alpha_A(1_A),$$

es una biyección.

Demostración. Ver [B194].
La función $\Theta_{F,A}$ tiene ciertas propiedades de naturalidad. Antes de enunciar estas propiedades, introduciremos las siguientes observaciones.

Observación 1.9.2.

(a) Para un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathscr{A}$, se obtiene la siguiente transformación natural $\mathscr{A}(f,-) : \mathscr{A}(B,-) \Longrightarrow \mathscr{A}(A,-)$ donde $\mathscr{A}(f,-)_C(g) := gf$ para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y para todo morfismo $g \in \mathscr{A}(B,C)$.
En efecto, veamos que $\mathscr{A}(f,-)$ es una transformación natural. Para ello, consideramos un morfismo $h : C \longrightarrow D$ en $\mathscr{A}$, y veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(B,C) \arrow[r, "\mathscr{A}(f,-)_C"] \arrow[d, "\mathscr{A}(B,h)"'] & \mathscr{A}(A,C) \arrow[d, "\mathscr{A}(A,h)"] \\
\mathscr{A}(B,D) \arrow[r, "\mathscr{A}(f,-)_D"'] & \mathscr{A}(A,D)
\end{tikzcd} .$$

Para $g \in \mathscr{A}(B,C)$, se tienen las siguientes igualdades:

$$(\mathscr{A}(A,h))(\mathscr{A}(f,-)_C(g)) = (\mathscr{A}(A,h))(gf) = hgf$$

$$(\mathscr{A}(f,-)_D)(\mathscr{A}(B,h)(g)) = (\mathscr{A}(f,-)_D)(hg) = hgf$$

las cuales prueban la naturalidad de $\mathscr{A}(f,-)$.
Por otro lado, consideremos los siguientes morfismos $m : X \longrightarrow Y$ y $n : Y \longrightarrow Z$, luego, para cualquier morfismo $l \in \mathscr{A}(Z,C)$, se cumple

$$\begin{aligned}
[\mathscr{A}(m,-) \circ \mathscr{A}(n,-)]_C(l) &= [\mathscr{A}(m,-)_C \circ \mathscr{A}(n,-)_C](l) \\
&= (\mathscr{A}(m,-))_C(\mathscr{A}(n,-)_C(l)) \\
&= (\mathscr{A}(m,-))_C(ln) \\
&= (\mathscr{A}(nm,-))_C(l). && \text{ecu. 1.9.1 } (a)
\end{aligned}$$

Además $(\mathscr{A}(1_A,-))_C(l) = l1_A = l$ para todo $l \in \mathscr{A}(A,C)$, es decir $\mathscr{A}(1_A,-) = 1_{\mathscr{A}(A,-)}$.

(b) Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ un funtor fijo. Definimos un funtor $N_F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ como sigue:

$(b.1)$ $N_F(A) := \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-), F)$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$,

$(b.2)$ si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$ entonces

$$N_F(f) : N_F(A) \longrightarrow N_F(B), \quad \alpha \longmapsto N_F(f)(\alpha) := \alpha \circ \mathscr{A}(f,-).$$

En efecto, N_F es un funtor, si $m : X \longrightarrow Y$ y $n : Y \longrightarrow Z$ son morfismos en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
[N_F(n) \circ N_F(m)](\alpha) &= N_F(n)(N_F(\alpha)) \\
&= N_F(n)(\alpha \circ \mathscr{A}(m,-)) \\
&= \alpha \circ \mathscr{A}(m,-) \circ \mathscr{A}(n,-) \\
&= \alpha \circ \mathscr{A}(nm,-) \\
&= N_F(nm)(\alpha). \qquad\qquad \text{ecu.1.9.1}(b)
\end{aligned}$$

Para cualquier $\alpha \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-), F)$. Además

$$N_F(1_A)(\alpha) = \alpha \circ \mathscr{A}(1_A,-) = \alpha \circ 1_{\mathscr{A}(A,-)} = \alpha,$$

para cualquier $\alpha \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-), F)$, por lo tanto $N_F(1_A) = 1_{N_F(A)}$.

(c) Si A es un objeto fijo de una categoría pequeña $\mathscr{A}$. El funtor $N_A : \mathbf{Set}^{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ se define de la siguiente forma:

$(c.1)$ $N_A(F) := \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-), F)$ para todo $F \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A}, \mathbf{Set})$,

$(c.2)$ si $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}(F,G)$ es un morfismo de $\mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$ entonces

$$N_A(\alpha) : N_A(F) \longrightarrow N_A(G), \quad \sigma \longmapsto N_A(\alpha)(\sigma) := \alpha \circ \sigma.$$

Veamos que N_A es un funtor, para ello, concideremos $\alpha : F \Longrightarrow G$ y $\beta : G \Longrightarrow H$ mofismos de $\mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$, entonces se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
[N_A(\beta) N_A(\alpha)](\sigma) &= N_A(\beta)(N_A(\sigma)) \\
&= N_A(\beta)(\alpha \circ \sigma) \\
&= \beta \circ \alpha \circ \sigma \\
&= N_A(\beta \circ \alpha)(\sigma)
\end{aligned}$$

para toda $\sigma \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-), F)$. Además se tiene que

$$N_A(1_F)(\sigma) = 1_F \circ \sigma = \sigma$$

para toda $\sigma \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F)$, es decir $N_A(1_F) = 1_{N_A(F)}$.

(d) Para un objeto A fijo de una categoría pequeña $\mathscr{A}$, se define el funtor evaluación $\mathrm{Ev}_A : \mathbf{Set}^{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ como sigue:

$(d.1)$ $\mathrm{Ev}_A(F) := F(A)$ para todo $F \in \mathbf{Fun}(A, \mathbf{Set})$,

$(d.2)$ si $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}(F,G)$ es un morfismo de $\mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$ entonces

$$\mathrm{Ev}_A(\alpha) : Ev_A(F) \longrightarrow Ev_A(G),\ \ \alpha \longmapsto Ev_A(\alpha) := \alpha_A.$$

Veamos que Ev_A es de verdad un funtor. En efecto, sean $\alpha : F \Longrightarrow G$ y $\beta : G \Longrightarrow H$ transformaciones naturales. Entonces

$$\mathrm{Ev}_A(\alpha) \circ \mathrm{Ev}_A(\beta) = \alpha_A \beta_A = (\alpha \circ \beta)_A = \mathrm{Ev}_A(\alpha \circ \beta).$$

Además

$$\mathrm{Ev}_A(1_F) = (1_F)_A = 1_{FA} = 1_{\mathrm{Ev}_A(1_F)}.$$

Proposición 1.9.3. La función $\Theta_{F,A}$, definida en el lema de Yoneda, induce una transformación natural $\eta : N_F :\Longrightarrow F$ definida como $\eta_A := \Theta_{F,A}$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Más aún, si $\mathscr{A}$ es pequeña, $\Theta_{F,A}$ induce una tranformación natural $\rho : N_A \Longrightarrow \mathrm{Ev}_A$ definida como $\rho_F := \Theta_{F,A}$ para todo $F \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A}, \mathbf{Set})$.

Demostración

(a) Veamos que η es una transformación natural. En efecto, consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N_F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "N_F(f)"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ N_F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & FB \end{tikzcd},$$

donde $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$. Demostraremos que el diagrama anterior conmuta. Sea $\sigma \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F)$. Entonces, se tiene la siguiente igualdad

$$Ff \circ \eta_A(\alpha) = Ff \circ \Theta_{F,A}(\alpha) = Ff \circ (\alpha_A(1_A)).$$

Por otro lado, para cualquier morfismo $F : C \longrightarrow D$ de $\mathscr{A}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(A,C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\mathscr{A}(A,f)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & FC \arrow[d, "Ff"] \\
FD \arrow[r, "\alpha_D"'] & FD,
\end{tikzcd}$$

por la naturalidad de α, es decir

$$Ff \circ \alpha_C = \alpha_D \circ \mathscr{A}(A,f).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
Ff \circ (\alpha_A(1_A)) &= \alpha_B \circ \mathscr{A}(A,f)(1_A) \\
&= \alpha_B[\mathscr{A}(A,f)(1_A)] \\
&= \alpha_B(f).
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$Ff \circ \eta_A(\alpha) = \alpha_B(f).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
[\eta_B \circ N_F(f)](\alpha) &= \eta_B[N_F(f)(\alpha)] \\
&= \Theta_{F,B}[N_F(f)(\alpha)] \\
&= (\alpha \circ \mathscr{A}(A,-))_B(1_B) \\
&= \alpha_B \circ (\mathscr{A}(f,-)_B(1_B)) \\
&= \alpha_B(f),
\end{aligned}$$

lo cual demuestra la naturalidad de η. ■

(b) Veamos que ρ es una transformación natural. Para ello, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N_A(F) \arrow[r, "\rho_F"] \arrow[d, "N_A(\varphi)"'] & \mathrm{Ev}_A(F) \arrow[d, "\mathrm{Ev}_A(\varphi)"] \\
N_A(G) \arrow[r, "\rho_G"'] & \mathrm{Ev}_A(G)
\end{tikzcd},$$

donde $\varphi : F \Longrightarrow G$ es un morfismo en $\mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$. Para $\alpha \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F)$, tenemos

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ev}_A(\varphi)\circ\rho_F](\alpha) &= \mathrm{Ev}_A(\varphi)\left(\Theta_{F,A}(\alpha)\right)\\ &= \mathrm{Ev}_A(\varphi)(\alpha_A(1_A))\\ &= \varphi_A(\alpha_A\circ 1_A).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}[\rho_G\circ N_A(\varphi)](\alpha) &= \rho_G(N_A(\varphi)(\alpha))\\ &= \rho_G(\varphi\circ\alpha)\\ &= \Theta_{G,A}(\varphi\circ\alpha)\\ &= (\varphi\circ\alpha)_A(1_A)\\ &= \varphi_A\circ\alpha_A\circ 1_A,\end{aligned}$$

probándose la naturalidad de ρ. ■

Observación 1.9.4. Sea $\mathscr{A}$ un categoría pequeña. Entonces, los funtores $N_A : \mathbf{Set}^{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ y $N_F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$, definidos en la Observación 1.9.2, cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) $\forall F \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathbf{Set})$ y $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ se tiene que $N_F(A) = N_A(F)$,

(b) $\forall f \in \mathscr{A}(A,A')$ y $\forall \gamma \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(F,F')$ se tiene que $N_{A'}(\gamma)\circ N_F(f) = N_{F'}(f)\circ N_A(\gamma)$.

Demostración.
La igualdad de (a) se cumple por definición de N_F y N_A. Por otro lado, para $\alpha \in \mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F)$, tenemos

$$\begin{aligned}[N_{A'}(\gamma)\circ N_F(f)](\alpha) &= N_{A'}(\gamma)[N_F(f)(\alpha)]\\ &= N_{A'}(\gamma)[\alpha\circ\mathscr{A}(f,-)]\\ &= \gamma\circ\alpha\circ\mathscr{A}(f,-),\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}[N_{F'}(f)\circ N_A(\gamma)](\alpha) &= N_{F'}(f)[N_A(\gamma)(\alpha)]\\ &= N_{F'}(f)(\gamma\alpha)\\ &= \gamma\circ\alpha\circ\mathscr{A}(f,-),\end{aligned}$$

lo cual demuestra la igualdad de (b). ■

Por el Lema 1.7.2 y la Observación 1.9.4, existe un bifuntor $N : \mathscr{A} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tal que los funtores parciales inducidos de N cumplen que

$$N(-,F) = N_F \text{ y } N(A,-) = N_A \quad \forall F \in \mathbf{Fun}(\mathscr{A},\mathbf{Set}) \text{ y } \forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}).$$

Más aún, por el iniciso 1.7.3(b), para $f \in \mathscr{A}(A,B)$ y $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}(F,G)$ tenemos que

$$\begin{aligned} N(f,\alpha) &= N(1_A,\alpha) \circ N(f,1_F) \\ &= [N(A,-)(\alpha)] \circ [N(-,F)(f)] \\ &= N_A(\alpha) \circ N_F(f). \end{aligned}$$

Es decir,

$$N(f,\alpha) : N(A,F) \longrightarrow N(G,B), \quad \sigma \longmapsto N(f,\alpha)(\sigma) = \alpha \circ \sigma \circ \mathscr{A}(f,-).$$

Definición 1.9.5. Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequña. Se define el funtor $E : \mathscr{A} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ como sigue:

(a) $E(A,F) := FA \quad \forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\forall F \in \mathbf{Fun}(A,\mathbf{Set})$,

(b) si $(f,\alpha) : (A,F) \longrightarrow (B,G)$ es un morfismo en $\mathscr{A} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$ entonces

$$E(f,\alpha) : E(A,F) \longrightarrow E(B,G) \text{ está definida como } E(f,\alpha) := Gf \circ \alpha_A.$$

Observamos que $E(f,\alpha) = Gf \circ \alpha_A = \alpha_B \circ Ff$, ya que $\alpha : F \Longrightarrow G$ es una transformación natural.

Veamos que E es un funtor. Para $(f,\alpha) : (A,F) \longrightarrow (B,G)$ y $(g,\beta) : (B,G) \longrightarrow (C,H)$ morfismos de $\mathscr{A} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} E[(g,\beta) \circ (f,\alpha)] &= E(gf,\beta \circ \alpha) \\ &= H(gf) \circ (\beta \circ \alpha)_A \\ &= H(g) \circ H(f) \circ \beta_A \circ \alpha_A. \end{aligned}$$

Por otro lado, la naturalidad de α y β hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "="] & GA \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "Gf"] \arrow[dr, phantom, "="] & HA \arrow[d, "Hf"] \\ Fb \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \arrow[r, "\beta_B"'] \arrow[d, "Gg"'] \arrow[dr, phantom, "="] & HB \arrow[d, "Hg"] \\ & GC \arrow[r, "\beta_C"] & HC \end{tikzcd},$$

por lo cual, podemos hacer la siguiente sustitución

$$\begin{aligned} H(g)\circ[H(f)\circ\beta_A]\circ\alpha_A &= H(g)\circ[\beta_B\circ G(f)]\circ\alpha_A \\ &= E(g,\beta)\circ E(f,\alpha), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} E[(g,\beta)\circ(f,\alpha)] &= H(g)\circ H(f)\circ\beta_A\circ\alpha_A \\ &= H(g)\circ\beta_B\circ G(f)\circ\alpha_A \\ &= E(g,\beta)\circ E(f,\alpha). \end{aligned}$$

Por último,

$$E(1_A,1_F) = (1_F)_A\circ F(1_A) = 1_{FA}\circ 1_{FA} = 1_{FA}.$$

Lema 1.9.6. La funciones $\Theta_{F,A}:\mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F)\longrightarrow FA$ definen una transformación natural $\Theta : N \Longrightarrow E$.

Demostración. Sean $f\in\mathscr{A}(A,B)$ y $\alpha\in\mathbf{Set}^{\mathscr{A}}(F,G)$. Demostremos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N(A,F) \arrow[r, "\theta_{F,A}"] \arrow[d, "N(f{,}\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E(A,F) \arrow[d, "E(f{,}\alpha)"] \\ N(B,G) \arrow[r, "\theta_{G,B}"'] & E(B,G) \end{tikzcd}\ .$$

En efecto, para $\sigma\in N(A,F)=\mathbf{Nat}(\mathscr{A}(A,-),F)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left[E(f,\alpha)\circ\Theta_{F,A}\right](\sigma) &= E(f,\alpha)\left[\Theta_{F,A}(\sigma)\right] \\ &= E(f,\alpha)(\sigma_A(1_A)) \\ &= \alpha_B\circ F(f)(\sigma_A(1_A)) \\ &= \alpha_B\circ F(f)\circ f\circ 1_A \\ &= \alpha_B\circ[F(f)\circ\sigma_A](1_A). \qquad \text{ecu. 1.9.2} \end{aligned}$$

Por otro lado, la naturalidad de $\sigma:\mathscr{A}(A,-)\Longrightarrow F$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(A,A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "\mathscr{A}(A{,}f)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ \mathscr{A}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & FB \end{tikzcd}\ .$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
[F(f) \circ \sigma_A](1_A) &= [\sigma_B \circ \mathscr{A}(A,-)](1_A) \\
&= \sigma_B [\mathscr{A}(A,-)(1_A)] \\
&= \sigma_B \circ f \circ 1_A .
\end{aligned}
$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación 1.9.2 se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left[E(f,\alpha) \circ \Theta_{F,A}\right](\sigma) &= \alpha_B \circ F(f) \circ f \circ 1_A \\
&= \alpha_B \circ [F(f) \circ \sigma_A](1_A) \\
&= \alpha_B \circ \sigma_B \circ f \circ 1_A \\
&= \alpha_B \circ \sigma_B \circ 1_B \circ f .
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\left[\Theta_{G,B} \circ N(f,\alpha)\right](\sigma) &= \Theta_{G,B}[N(f,\alpha)(\sigma)] \\
&= \Theta_{G,B}[\alpha \circ \sigma \circ \mathscr{A}(f,-)] \\
&= (\alpha \circ \sigma \circ \mathscr{A}(f,-))_B (1_B) \\
&= \alpha_B \circ \sigma_B [\mathscr{A}(f,-)_B (1_B)] \\
&= \alpha_B \circ \sigma_B \circ 1_B \circ f .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
E(f,\alpha) \circ \Theta_{F,A} = \Theta_{G,B} \circ N(f,\alpha),
$$

lo cual demuestra que Θ es una transformación natural. ■

Definición 1.9.7. Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequeña. El **funtor de Yoneda** $Y : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$ se define como sigue:

(a) $Y(A) := \mathscr{A}(A,-)$ $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$,

(b) si $f^* : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathscr{A}^*$ entonces $Y(f^*) := \mathscr{A}(f,-)$.

Veamos que Y es un funtor. Sean $f^* : B \longrightarrow C$ y $g^* : C \longrightarrow D$ morfismos de $\mathscr{A}^*$. Entonces

$$
\begin{aligned}
Y(g^* f^*) &= Y\left((fg)^*\right) \\
&= \mathscr{A}(fg,-) \\
&= \mathscr{A}(g,-) \circ \mathscr{A}(f,-) && \text{Por ecu. 1.9.1}(a) \\
&= Y(g^*)\, Y(f^*) .
\end{aligned}
$$

Además

$$Y\left((1_A)^*\right) = Y\left(1_A\right) = \mathscr{A}\left(1_A,-\right) = 1_{\mathscr{A}(A,-)} = 1_{Y(A)}.$$

Proposición 1.9.8. El funtor de Yoneda $Y : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{A}}$ es fiel, pleno e inyectivo en objetos.

Demostración. La demostración de que Y es fiel y pleno puede consultarse en [B194]. Demostraremos que Y es inyectivo en objetos. En efecto, si A y B son objetos de $\mathscr{A}^*$ tales que $A \neq B$, entonces por la Definición 1.2.1(b) se tiene que $\mathscr{A}\left(A,X\right) \neq \mathscr{A}\left(B,X\right)$ para todo $X \in$Obj$(\mathscr{A}^*)$, es decir $Y\left(A\right)\left(X\right) \neq Y\left(B\right)\left(X\right)$, lo que implica que $Y\left(A\right) \neq Y\left(B\right)$. ■

El resultado anterior nos dice que el funtor de Yoneda es un encaje, por lo cual, a menudo se refiere a Y como el *encaje de Yoneda*.

1.10. Categorías cociente

En esta sección expondremos la noción de *categoría cociente* y la *propiedad universal* que cumple esta categoría. Las referencias para esta sección son [Mi64] y [ML98].

Definición 1.10.1. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\sim$ una relación de equivalencia en la clase $\mathrm{Mor}\left(\mathscr{C}\right)$ de morfismos de $\mathscr{C}$. Decimos que $\sim$ es **compatible** con $\mathscr{C}$ si satisface las siguientes condiciones

(a) la restricción de $\sim$ a cada conjunto $\mathscr{C}\left(X,Y\right)$ es una relación de equivalencia en dicho conjunto;

(b) la clase cociente $\mathrm{Mor}\left(\mathscr{C}\right)/_{\sim}$ es a la unión de todos los conjuntos cocientes $\mathscr{C}\left(X,Y\right)/_{\sim}$, es decir $\mathrm{Mor}\left(\mathscr{C}\right)/_{\sim} := \bigcup\limits_{A,B\in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})} \mathscr{C}\left(X,Y\right)/_{\sim}$,

(c) si $f \sim \widehat{f}$ entonces $hfg \sim h\widehat{f}g$, siempre que dichas composiciones estén definidas en $\mathscr{C}$.

Observamos que la condición 1.10.1(c) es equivalente a la siguiente condición (presentada en [Mi64]):

(d) Si $f \sim \widehat{f}$ entonces $fg \sim \widehat{f}g$ y $hf \sim h\widehat{f}$, siempre que dichas composiciones estén definidas en $\mathscr{C}$.

Notación 1.10.2. La clase de equivalencia de un morfismo f de $\mathscr{C}$ será denotada como $[f]_{\sim}$, es decir, $[f]_{\sim} := \{g \in \mathrm{Mor}\left(\mathscr{C}\right) \mid g \sim f\}$. Cuando no exista confusión, escribiremos simplemente $[f]$.

Definición 1.10.3. Sea $\sim$ una relación de equivalencia compatible con una categoría $\mathscr{C}$. Se define la **categoría cociente** $\mathscr{C}/_{\sim}$ como sigue:

(a) $\operatorname{Obj}(\mathscr{C}/_{\sim}) := \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$,

(b) $\mathscr{C}/_{\sim}(X,Y) := \mathscr{C}(X,Y)/_{\sim}$ para todo $X,Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C}/_{\sim})$,

(c) la composición de morfismos $\bullet$ en $\mathscr{C}/_{\sim}$ está definida como sigue

$\bullet : \mathscr{C}/_{\sim}(Y,Z) \times \mathscr{C}/_{\sim}(X,Y) \longrightarrow \mathscr{C}/_{\sim}(X,Y), \quad ([f],[g]) \longmapsto [f] \bullet [g] := [f \circ g]$,
donde $\circ$ es la composición en $\mathscr{C}$.

(d) $\forall X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C}/_{\sim})$ el morfismo identidad es $1_X = [1_X]$.

Ejemplo 1.10.4. Si $\mathscr{C} =$**Top** y $f \sim g$ significa que f es homotopíca a g, entonces la categoría cociente **Top**$/_{\sim}$ es la categoría **Toph**, que tiene como objetos espacios topológicos y como morfismos clases de homotopía de una funciones continuas.

Proposición 1.10.5. Sea $\sim$ una relación de equivalencia compatible con una categoría $\mathscr{C}$. Entonces, existe un funtor $Q_{\sim} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}/_{\sim}$ con las siguientes propiedades:

(a) $Q_{\sim}(f) = Q_{\sim}\left(\hat{f}\right)$, siempre que $f \sim \hat{f}$,

(b) para todo funtor $H : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $H(f) = H\left(\hat{f}\right)$, siempre que $f \sim \hat{f}$, existe un único funtor $\widehat{H} : \mathscr{C}/_{\sim} \longrightarrow \mathscr{D}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "Q_{\sim}"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathscr{C}/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "\widehat{H}"] \\ \mathscr{D} & \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $Q_{\sim} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}/_{\sim}$ de la siguiente forma:

(a) $Q_{\sim}(A) := A \ \forall A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$,

(b) $Q_{\sim}(f) := [f] \ \forall f \in \mathscr{C}(A,B)$.

Veamos que $Q_{\sim}$ es un funtor. En efecto, para $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos de $\mathscr{C}$, tenemos que

$$Q_{\sim}(gf) = [gf] = [g] \bullet [f] = Q_{\sim}(g) \bullet Q_{\sim}(f).$$

Por otro lado, si $h : A \longrightarrow B$ y $k : B \longrightarrow A$ son morfismos en $\mathscr{C}$ tenemos las siguientes igualdades

$$[h] \bullet [1_A] = [h1_A] = [h] \text{ y } [1_A] \bullet [k] = [1_A k] = [k],$$

por lo tanto

$$Q_\sim (1_A) = [1_A] = 1_{Q_\sim (A)}.$$

Además, $f \sim \hat{f}$ implica que $[f] = \left[\hat{f}\right]$, es decir, $Q_\sim (f) = Q_\sim (\hat{f})$.
Por otra parte, supongamos que $H : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor tal que $H(f) = H\left(\hat{f}\right)$, siempre que $f \sim \hat{f}$. De este modo, definimos un funtor $\widehat{H} : \mathscr{C}/_\sim \longrightarrow \mathscr{D}$ como sigue:

(a) $\widehat{H}(A) := H(A)\ \forall A \in \text{Obj}(\mathscr{C})$

(b) si $[f] : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{C}/_\sim$, entonces $\widehat{H}([f]) := H(f)$.

Observamos que $\widehat{H}$ está bien definido, es decir, si $f \sim \hat{f}$ entonces $\widehat{H}([f]) = \widehat{H}(\left[\hat{f}\right])$. Es claro que $\widehat{H} Q_\sim = H$ y que $\widehat{H}$ es único. ■

1.11. Categorías coma

La construcción de las *categorías coma* es de gran importancia para desarrollar el concepto de *morfismo universal*, el cual es fundamental para la exposición del concepto de *límite* y su dual *colímite*. La referencia para esta sección es [B194].

Definición 1.11.1. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores. La **categoría coma** [12] (F,G) se define como sigue:

(a) $\text{Obj}(F,G) := \{(A, f, B) \mid A \in \text{Obj}(\mathscr{A}), B \in \text{Obj}(\mathscr{B}) \text{ y } f \in \mathscr{C}(FA, GB)\}$.

(b) Si $\hat{f} = (A, f, B)$ y $\hat{g} = (X, g, Y)$ son objetos de (F,G) se define:

$$(F,G)\left(\hat{f}, \hat{g}\right) := \{(a,b) \mid a \in \mathscr{A}(A,X), b \in \mathscr{B}(B,Y) \text{ y } g \circ Fa = Gb \circ f\}.$$

Esto es, los pares (a,b) que hacen conmutar el siguiente diagrama

[12] La noción general de **categoría coma** fue introducida en 1963 por Francis William Lawvere (1937-) en su tesis doctoral ([La63]), bajo la dirección de S. Eilenberg.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Fa"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & FX \arrow[d, "g"] \\ GB \arrow[r, "Gb"'] & GY. \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos $\circ$ en (F,G) se define como $(c,d)\circ(a,b){:=}(ca,db)$.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Fa"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & FX \arrow[d, "g"] & FX \arrow[r, "Fc"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & FM \arrow[d, "h"] & \longmapsto & FA \arrow[r, "F(ca)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & FM \arrow[d, "h"] \\ GB \arrow[r, "Gb"'] & GY & GY \arrow[r, "Gd"'] & FZ & & GB \arrow[r, "G(db)"'] & FZ \end{tikzcd}$$

(c) Si $\hat{f}=(A,f,B)$ es un objeto de (F,G), el morfismo identidad se define como $1_{\hat{f}}{:=}(1_A,1_B)$.

En efecto, la composición de morfismos en (F,G), inducida de las composiciones de $\mathscr{A}$ y de $\mathscr{B}$, está bien definida; de este modo (F,G) es una categoría.

Definición 1.11.2. Sean $\mathscr{A}$ una categoría y X un objeto fijo de $\mathscr{A}$. La categoría $(1_{\mathscr{A}},\Delta_X)$ es llamada **categoría de objetos sobre** X y la categoría $(\Delta_X,1_{\mathscr{A}})$ es llamada **categoría de objetos bajo** X. Además $(1_{\mathscr{A}},\Delta_X)$ es denotada como $(\mathscr{A}\downarrow X)$, y $(\Delta_X,1_{\mathscr{A}})$ como $(X\downarrow\mathscr{A})$.

Podemos notar que $(\mathscr{A}\downarrow X)^*{=}(X\downarrow\mathscr{A}^*)$.

Observación 1.11.3. Sean $F:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{C}$ y $G:\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{C}$ funtores. Entonces, se pueden inducir los siguientes funtores; $U:(F,G)\longrightarrow\mathscr{A}$ y $V:(F,G)\longrightarrow\mathscr{B}$, definidos como sigue:

(a) $U(A,f,B):=A$ y $V(A,f,B):=B\ \forall(A,f,B)\in\mathrm{Obj}(F,G)$,

(b) $U(a,b):=a$ y $V(a,b):=b\ \ \forall(a,b)\in\mathrm{Mor}(F,G)$.

Y una transformación natural $\alpha:F\circ U\Longrightarrow G\circ V$ definida de la siguiente forma:

(d) $\alpha_{(A,f,B)}:=f\ \ \forall(A,f,B)\in\mathrm{Obj}(F,G)$.

Los funtores U y V son llamados **proyecciones de la categoría** coma (F,G).

1.12. Categoría de morfismos

La siguiente construcción tendrá un papel importante en el siguiente capítulo, ya que en función de ella, escribiremos un axioma en la definición de categoría de modelo.

Definición 1.12.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$, podemos construir la categoría de morfismos $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$ como sigue:

(a) Obj $\left(\overrightarrow{\mathscr{C}}\right)$:=Mor($\mathscr{C}$);

(b) si $a \in \overrightarrow{\mathscr{C}}(A_0,A_1)$ y $b \in \overrightarrow{\mathscr{C}}(B_0,B_1)$, se define:

$$\overrightarrow{\mathscr{C}}(a,b) := \{(f_0,f_1) \in \mathscr{C}(A_0,B_0) \times \mathscr{C}(A_1,B_1) \mid bf_0 = f_1a\}.$$

Esto es, los pares (f_0,f_1) que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "="] & b_0 \arrow[d, "b"] \\ a_1 \arrow[r, "f_1"'] & b_1. \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos $\circ$ en $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ está determinada como

$$\circ : \overrightarrow{\mathscr{C}}(b,c) \times \overrightarrow{\mathscr{C}}(a,b) \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{C}}(a,c), \quad ((g_0,g_1),(f_0,f_1)) \longmapsto (g_0f_0, g_1f_1);$$

(c) para $f \in \mathscr{C}(A,B)$, definimos el morfismo identidad en f como $1_f := (1_A, 1_B)$.

Note que la composición de morfismos en $\overrightarrow{\mathscr{C}}$, inducida de la de $\mathscr{C}$, está bien definida y que $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ es una categoría. Además $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ también suele ser denotada como Map($\mathscr{C}$).

La categoría de morfismos de $\mathscr{C}$ puede ser definida como una categoría coma. Si consideramos el funtor identidad $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ entonces $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ es simplemente la categoría coma $(1_{\mathscr{C}}, 1_{\mathscr{C}})$. Elegimos escribir $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ de forma explícita por la importancia que tiene en el capítulo siguiente.

Observación 1.12.2. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\overrightarrow{\mathscr{C}}$ la categoría de morfismos de $\mathscr{C}$. Entonces, podemos definir los siguientes funtores

(a) $\mathrm{dom}_{\mathscr{C}} : \overrightarrow{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$, el cual está definido como sigue: $\mathrm{dom}_{\mathscr{C}} f := A$ para todo $f \in \mathscr{C}(A,B)$ y $\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}(a,b) := a$ para todo $(a,b) \in \overrightarrow{\mathscr{C}}(f,g)$;

(b) $\mathrm{cod}_{\mathscr{C}} : \overrightarrow{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$, el cual está definido como sigue: $\mathrm{cod}_{\mathscr{C}} f := B$ para todo $f \in \mathscr{C}(A,B)$ y $\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}(a,b) := b$ para todo $(a,b) \in \overrightarrow{\mathscr{C}}(f,g)$;

además de una transformación natural:

(c) $\delta_{\mathscr{C}} : \mathrm{dom}_{\mathscr{C}} \Longrightarrow \mathrm{cod}_{\mathscr{C}}$ definida como $(\delta_{\mathscr{C}})_f := f$ para todo $f \in \mathrm{Obj}(\overrightarrow{\mathscr{C}})$.

Es claro que los funtores $\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}$ y $\mathrm{cod}_{\mathscr{C}}$ son las proyecciones de la categoría coma $(1_{\mathscr{C}}, 1_{\mathscr{C}})$. Finalmente, cuando no exista confusión, simplemente escribiremos δ, dom y cod para referirnos a la transformación natural y a los funtores definidos anteriormente.

1.13. Límites y colímites

Las construcciones universales aparecen de diversas formas en las matemáticas. Los límites y colímites son un importante ejemplo de construcciones universales. En esta sección, definiremos el concepto de *morfismo universal*, después el de *colímite*, y su dual *límite*. La referencia para esta sección es [ML98].

Definición 1.13.1. Sean $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor y X un objeto de $\mathscr{C}$. Un **morfismo universal** [13] **de** X **a** F es un objeto (A, f, B) inicial de la categoría coma (Δ_X, F).
De este modo, el objeto (A, f, B) puede ser considerado como un morfismo $f : X \longrightarrow FB$ en $\mathscr{C}$ tal que para cualquier morfismo $g \in \mathscr{C}(X, FD)$ existe un único morfismo $\phi \in \mathscr{D}(B, D)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \Delta_X A = X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ FB \arrow[rr, dashed, "F\phi"'] & & FD . \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.13.2. Grupos Libres. Si consideramos un grupo abeliano libre V_X, con base X, y un grupo abeliano W, entonces para cualquier función $f : X \longrightarrow W$ existe un morfismo de grupos abelianos $\varphi : V_X \longrightarrow W$ que hace conmutar el siguiente diagrama

[13] Los morfismos universales son únicos salvo isomorfismos, tal vez por esta falta de únicidad absoluta, la noción de morfismo universal fue desarrollada con lentitud, bastantes ejemplos se desarrollaron hasta que Pierre Samuel (1921-2009) formuló la noción general de morfismo universal en 1948. Esta noción general fue usada extensamente y popularizada por N. Bourbaki.

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
V_X \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & W
\end{tikzcd},
$$

donde i es la función inclusión. Esta construcción se obtiene considerando el funtor olvido $U : Ab \longrightarrow$**Set** y la categoría coma (Δ_X, U), se sigue que i es un morfismo universal de X a U.

Definición 1.13.3. Sean $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y $\mathscr{D}$ una categoría pequeña. Definimos el **funtor diagonal** $\Delta : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ como sigue

(a) $\Delta C := \Delta_{\mathscr{D},C}$ $\forall C \in \text{Obj}\,(\mathscr{C})$,

(b) para $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$, se tiene $\Delta f : \Delta_{\mathscr{D},X} \Longrightarrow \Delta_{\mathscr{D},Y}$, donde $(\Delta f)_D := f$ $\forall D \in \text{Obj}(\mathscr{D})$.

Consideremos un diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$ y el funtor constante $\Delta_F : 1 \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathscr{D}}$. Podemos construir la categoría coma (Δ_F, Δ). Formalmente, un objeto de esta categoría es una tercia $(\star, \eta, C)$; donde $\star \in \mathbf{1}$, $C \in \text{Obj}(\mathscr{C})$ y $\eta : 1_F \Longrightarrow \Delta C$ es una transformación natural de $1_F(\star) = F$ a ΔC. Por lo anterior podemos considerar a $(\star, \eta, C)$ simplemente como una transformación natural $\eta : F \Longrightarrow \Delta C$ y un objeto $C \in \text{Obj}\,(\mathscr{C})$. Por otro lado $\eta : F \Longrightarrow \Delta C$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
FD \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \Delta C\,(D) \arrow[d, "\Delta C(f)"] \\
FE \arrow[r, "\eta_E"'] & \Delta C\,(E)
\end{tikzcd},
$$

para cuaquier morfismo $f : D \longrightarrow E$ en $\mathscr{D}$. El diagrama anterior se simplifica como sigue

$$
\begin{tikzcd}
FD \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\eta_D"'] & = & FE \arrow[dl, "\eta_E"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

Así, una transformación natural $\eta : F \Longrightarrow \Delta C$, por lo general, es llamada **cocono** con base F y vértice C. Por otra parte, si $\eta : F \Longrightarrow \Delta C$ y $\sigma : F \Longrightarrow \Delta K$ son objetos de (Δ_F, Δ), un morfismo de η a σ es, por definición, un par de morfismos $(1_\star, \varepsilon)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_F\,(\star) \arrow[r, Rightarrow, "\Delta_F\,(1_\star)"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \Delta_F\,(\star) \arrow[d, Rightarrow, "\sigma"] \\
\Delta C \arrow[r, Rightarrow, "\Delta\varepsilon"'] & \Delta K
\end{tikzcd},
$$

donde $\varepsilon : C \longrightarrow K$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ y $1_\star$ es el único morfismo en $\mathbf{1}$. Haciendo las evaluaciones del funtor Δ_F, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "1_F"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F \arrow[d, Rightarrow, "\sigma"] \\ \Delta C \arrow[r, Rightarrow, "\Delta\varepsilon"'] & \Delta K . \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(\Delta\varepsilon)\,\eta = \sigma$. Además, por definición, se tiene que $(\Delta\varepsilon)_D = D \;\; \forall D \in$Obj$(\mathscr{D})$. Por lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & FD \arrow[dl, "\eta_D"'] \arrow[dr, "\sigma_D"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ C \arrow[rr, "\varepsilon"'] & & K . \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, un morfismo en (Δ_F, Δ) es considerado simplemente como un morfismo $\varepsilon : C \longrightarrow K$ en $\mathscr{C}$ que hace conmutar el diagrama anterior para todo $D \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{D})$.

Definición 1.13.4. Un **colímite** de un diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$ es un objeto inicial en la categoría (Δ_F, Δ), es decir un morfismo universal de F a Δ.

Por lo anterior, un colímite de F es un objeto $C \in$Obj$(\mathscr{C})$ y una transformación natural $\eta : F \Longrightarrow \Delta C$, la cual llamaremos **diagrama colímite** y que denotaremos por $\eta : F \Longrightarrow C$. Además, un colímite $\eta : F \Longrightarrow C$ de F es un objeto inicial, por lo que $\eta : F \Longrightarrow C$ tiene la siguiente propiedad; para cualquier cocono $\sigma : F \Longrightarrow K$ existe un único morfismo $\varphi : C \longrightarrow K$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & FD \arrow[dl, "\eta_D"'] \arrow[dr, "\sigma_D"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ C \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & K . \end{tikzcd}$$

para todo $D \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{D})$. Además un colímite $\eta : F \Longrightarrow C$ de F es único salvo isomorfismos, ya que es un objeto inicial; es decir, para cualquier otro colímite $\sigma : F \Longrightarrow K$ de F existe un isomorfismo $i : C \longrightarrow K$ tal que $i \circ \eta_D = \sigma_D \;\forall D \in$Obj$(\mathscr{D})$. Por lo anterior, escribiremos $\varinjlim F$ ó colímF para referirnos al objeto C. De esta forma escribiremos $\left\{\eta_D : FD \longrightarrow \varinjlim F\right\}_{D\in|D|}$ para referirnos al colímite del diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$.
La definición dual de colímite es límite. Ahora, revisemos con brevedad la construcción de un límite para un funtor F.

Definición 1.13.5. Sean $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor y X un objeto de $\mathscr{C}$. Un **morfismo universal de** F **a** X es un objeto (A, f, B) final de la categoría coma (F, Δ_X) de objetos sobre X.
De este modo, el objeto (A, f, B) puede ser considerado como un morfismo $f : FA \longrightarrow X$ en $\mathscr{C}$ tal que, para cualquier morfismo $g \in \mathscr{C}(FC, X)$, existe un único morfismo $\psi \in \mathscr{D}(C, A)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[dr, "f"'] & & FC \arrow[ll, dashed, "F\psi"'] \arrow[dl, "g"] \\ & \Delta_X B = B. \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

Realizaremos el procedimiento dual del efectuado para desarrollar el concepto de colímite. Si consideramos un diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$ y después construimos la categoría coma (Δ, Δ_F), como en la construcción de colímite; un objeto de (Δ, Δ_F) es una transformación natural $\mu : \Delta C \longrightarrow F$, denotada por $\mu : C \Longrightarrow F$, y un objeto C de $\mathscr{C}$. Además $\mu : \Delta C \Longrightarrow F$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\mu_D"'] \arrow[dr, "\mu_E"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ FD \arrow[rr, "Ff"'] & {} & FE , \end{tikzcd}$$

para cualquier morfismo $f : D \longrightarrow E$. Así μ es llamada **cono** con base en F y vértice C. Por otra parte, si $\mu : C \Longrightarrow F$ y $\tau : K \Longrightarrow F$ son conos, un morfismo κ, de μ a τ, es simplemente un morfismo $\kappa : C \longrightarrow K$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\mu_D"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & K \arrow[dl, "\tau_D"] \\ & FD , & \end{tikzcd}$$

para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$.

Definición 1.13.6. Un **límite**, de un diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$, es un objeto final en la categoría (Δ, Δ_F), es decir un morfismo universal de Δ a F.

Por lo anterior, un límite de F es una transformación natural $\mu : C \Longrightarrow F$, la cual llamaremos **diagrama límite**, y un objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Además, un límite $\mu : C \Longrightarrow F$ es un objeto final; por lo que, μ tiene la siguiente propiedad: para cualquier cono $\tau : K \Longrightarrow F$ existe un único morfismo $\psi : K \longrightarrow C$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & FD & \\
C \arrow[ur, "\mu_D"] \arrow[rr, phantom, "="] & & K \arrow[ul, "\tau_D"'] \arrow[ll, dashed, "\psi"]
\end{tikzcd},$$

para todo objeto $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$. Finalmente, por el hecho de que $\mu : C \Longrightarrow F$ es única salvo isomorfismos, escribiremos $\lim F$ ó $\varprojlim F$ para referirnos al objeto C. De esta forma, escribiremos $\left\{\eta_D : \varprojlim F \longrightarrow FD\right\}_{D\in|D|}$ para referirnos al límite del diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$.

1.14. Productos y coproductos

En esta sección enunciaremos la definición del *producto* de una familia de objetos $\{C_i\}_{i\in I}$ de una categoría $\mathscr{C}$. Después, mostraremos que dicha definición es precisamente el límite de cierto diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$. También haremos lo mismo para la definición dual, el *coproducto*. Por último mostraremos algunas propiedades de estas construcciones. La referencia para esta sección es [B194].

Definición 1.14.1. Sean I un conjunto y $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathscr{C}$. Un **producto** de $\{C_i\}_{i\in I}$ es

(a) un objeto $P \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y

(b) una familia de morfismos $\{p_i : P \longrightarrow C_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$,

tal que para cualquier objeto $Q \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y cualquier familia de morfismos $\{q_i : Q \longrightarrow C_i\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\eta : Q \longrightarrow P$ que hace comutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "p_i"'] \arrow[rr, phantom, "=" below] & & Q \arrow[ll, dashed, "\eta"'] \arrow[dl, "q_i"] \\
 & C_i &
\end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$. Además, cuando I es finito diremos que el producto es **finito**.

Ahora, mostraremos que el producto de cierto diagrama $F : D \longrightarrow \mathscr{C}$ cumple la defnción anterior. En efecto, definimos el siguiente conjunto $D := \{C_i\}_{i\in I}$, y le damos la estructura de una categoría discreta. Entones el límite del funtor $F : D \longrightarrow \mathscr{C}$; definido como $F(C_i) := C_i$ y $F(1_{C_i}) := 1_{C_i}$ $\forall i \in I$, es una transformación natural $\left\{\pi_i : \varprojlim F \longrightarrow F(C_i)\right\}_{i\in I}$ que cumple la definición del producto de $\{C_i\}_{i\in I}$.

Observación 1.14.2. El objeto P de la definición 1.14.1 es único salvo isomorfismos, esto sucede por la definición de límite. De este modo, P será denotado como $\prod_{i \in I} C_i$, y las funciones $p_i : \prod C_i \longrightarrow C_i$ usualmente son llamadas **proyecciones**.

Definición 1.14.3. Sean I un conjunto y $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathscr{C}$. Un **coproducto** de $\{C_i\}_{i\in I}$ es

(*a*) un objeto $U \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y

(*b*) una familia de morfismos $\{s_i : C_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$

tal que para cualquier objeto $V \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y cualquier familia de morfismos $\{t_i : C_i \longrightarrow V\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\eta : U \longrightarrow V$ que hace comutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & C_i \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[dr, "t_i"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ U \arrow[rr, dashed, "\eta"'] & {} & V \end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$. Además, cuando I es finito diremos que el coproducto es **finito**.
De forma dual, el coproducto de una familia de objetos $\{C_i\}_{i\in I}$ es el colímite de un diagrama $F : D \longrightarrow \mathscr{C}$. La construcción es dual a la del producto. Más aún, el objeto U es único salvo isomorfismos, por lo cual, U es denotado como $\coprod_{i\in I} C_i$.
Finalmente, las funciones s_i son llamadas **coproyecciones** y en algunos casos **inyecciones** o **inclusiones**. Sin embargo, los morfismos s_i no son monomorfismos en general.

Definición 1.14.4. Sean I un conjunto y $\mathscr{C}$ una categoría. Diremos que $\mathscr{C}$ **tiene productos** (resp. **coproductos**) si el producto (resp. coproducto) de cualquier familia de objetos $\{C_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$ existe.

Notación 1.14.5. El producto (resp. coproducto) de un conjunto $I = \{A, B\}$ de objetos, si existe, es llamado producto (resp.coproducto) **binario** y es denotado como $A \prod B$ (resp. $A \coprod B$).

Existen muchos ejemplos de productos y coproductos, mencionaremos dos ejemplos de uso frecuente.

Ejemplos 1.14.6.

(a) En la categoría **Set** el producto cartesiano [14] de una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ es el producto de dicha familia , es decir

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ \left(x_j\right)_{j\in I} \mid x_j \in X_j \right\},$$

las funciones $p_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$, definidas como $p_i\left[\left(x_j\right)_{j\in I}\right] := x_i$, son las proyecciones del producto. El coproducto de $\{X\}_{i\in I}$ es la unión disjunta, es decir

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\},$$

las funiones $s_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i$, definidas como $s_i(x) := (x,i)$, son las inclusiones del coproducto.

(b) Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con la estructura de categoría del ejemplo 1.2.6(e). El producto (resp. coproducto) de una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de objetos de X define el ínfimo (resp. supremo) de X.

Observación 1.14.7. La noción de objeto final (resp. inicial) también se obtiene por medio de un límite (resp. colímite). En efecto el producto (resp. coproducto) de una familia vacía de objetos en una categoría $\mathscr{C}$ define un objeto X que satisface la siguiente condición: $\forall Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe un único morfismo $f \in \mathscr{C}(Y,X)$ (resp. $f \in \mathscr{C}(X,Y)$). Esta condición es precisamente la definición de objeto final (resp. inicial).

Ejemplos 1.14.8.

(a) En la categoría **Con**, el conjunto vacío es un objeto inicial. Y cualquier conjunto $X = \{\star\}$ con un solo elemento es un objeto final. Lo mismo sucede en la categoría **Top**.

(b) En las categorías ${}_R\mathbf{Mod}$ y $\mathbf{Mod}_R$ el módulo $\{0\}$ es un objeto inicial y terminal.

(c) En la categoría **Ani**, que tiene como objetos anillos conmutativos R y morfismos de anillos, el anillo $\{0\}$ es un objeto terminal, y el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, con estructura de anillo, es un objeto inicial.

En las siguientes dos secciones haremos varias definiciones, los objetos y morfismos que cumplen estas definiciones son el límite o colímite de ciertos diagramas. No realizaremos la construcción de estos diagramas, como se hizo con la definición del producto.

[14]La idea de describir el producto cartesiano por medio de morfismos universales fue formulada en 1948 por S. Mac Lane en [ML48].

1.15. Igualadores y coigualadores

Definición 1.15.1. Sean $f,g : A \longrightarrow B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que $k : K \longrightarrow A$ es un **igualador** de f y g si

(a) $fk = gk$,

(b) para cualquier morfismo $m \in \mathscr{C}(M,A)$ tal que $fm = gm$, existe un único morfismo $\eta \in \mathscr{C}(M,K)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dashed, "\eta"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "="] & & \\ K \arrow[r, "k"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B . \end{tikzcd}$$

Definición 1.15.2. Sean $f,g : A \longrightarrow B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que $k : B \longrightarrow K$ es un **coigualador** de f y g si

(a) $kf = kg$,

(b) para cualquier morfismo $m \in \mathscr{C}(B,M)$ tal que $mf = mg$, existe un único morfismo $\eta \in \mathscr{C}(K,M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "m"'] & K \arrow[d, dashed, "\eta"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "="] \\ & & M . \end{tikzcd}$$

Observación 1.15.3. Sean f y g morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Si el igualador (resp. coigualador) de f y g es $k : K \longrightarrow A$ (resp. $k : B \longrightarrow K$), entonces K es único salvo isomorfismos.

Proposición 1.15.4. Sean $f,g : A \longrightarrow B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Si el igualador de f y g es $k : K \longrightarrow A$, entonces k es un monomorfismo. De forma dual, si el coigualdor de f y g es $k : B \longrightarrow K$, entonces k es un epimorfismo.

Demostración. Sean $u,v : C \longrightarrow K$ tales que $ku = kv$. Entonces, tenemos las siguientes igualdades

$$g(ku) = g(ku) \quad \text{y} \quad f(kv) = g(kv),$$

por lo cual, existe un único morfismo $\eta \in \mathscr{C}(C,K)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "ku=kv"] & & \\
K \arrow[r, "k"'] \arrow[ur, phantom, "="] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B ,
\end{tikzcd}$$

por lo que se tienen las siguientes igualdades

$$k\eta = ku \quad \text{y} \quad k\eta = kv,$$

por la únicidad de η, se concluye que $u = v$. La demostración para el coigualador de f y g es dual.$\blacksquare$

1.16. Productos y coproductos fibrados

Definición 1.16.1. Sean $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que los morfismos $\widehat{f} \in \mathscr{C}(P,B)$ y $\widehat{g} \in \mathscr{C}(P,A)$ son un **producto fibrado** de f y g si satisfacen las siguientes condiciones

(a) $g\widehat{f} = f\widehat{g}$,

(b) para cualquier par de morfismos $\overline{g} \in \mathscr{C}\left(\overline{P},A\right)$ y $\overline{f} \in \mathscr{C}\left(\overline{P},B\right)$ tal que $g\overline{f} = f\overline{g}$, existe un único morfismo $\eta : \overline{P} \longrightarrow P$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{P} \arrow[drr, bend left, "\overline{f}"] \arrow[dr, dashed, "\eta"] \arrow[ddr, bend right, "\overline{g}"'] & & \\
& P \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C .
\end{tikzcd}$$

El objeto P, de la definición anterior, es único salvo isomorfismos, de este modo, denotaremos a P como $A\prod_{C}B$.

Definición 1.16.2. Diremos que una categoría $\mathscr{C}$ **tiene productos fibrados** si para cualquier par de morfismos $f \in \mathscr{C}(A,C)$ y $g \in \mathscr{C}(B,C)$ el producto fibrado de f y g existe.

Definición 1.16.3. Sean $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que los morfismos $\widehat{f} \in \mathscr{C}(B,P)$ y $\widehat{g} \in \mathscr{C}(A,P)$ son un **coproducto fibrado** [15] de f y g si satisfacen las siguientes condiciones

(a) $\widehat{f}g = \widehat{g}f$ y

(b) para todo par de morfismos $\overline{f} \in \mathscr{C}\left(B,\overline{P}\right)$ y $\overline{g} \in \mathscr{C}\left(A,\overline{P}\right)$ tal que $\overline{f}g = \overline{g}f$, existe un único morfismo $\eta : P \longrightarrow \overline{P}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "\widehat{f}"] \arrow[ddr, bend left, "\overline{f}"] \arrow[ddr, phantom, "=" near start] & \\
A \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[drr, bend right, "\overline{g}"'] & P \arrow[dr, dashed, "\eta"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
 & & \overline{P}
\end{tikzcd}$$

El objeto P, de la definición anterior, es único salvo isomorfismos, de este modo, denotaremos a P como $A \coprod\limits_{C} B$.

Definición 1.16.4. Diremos que una categoría $\mathscr{C}$ **tiene coproductos fibrados** si para cualquier par de morfismos $f \in \mathscr{C}(C,A)$ y $g \in \mathscr{C}(C,B)$ el coproducto fibrado de f y g existe.

Proposición 1.16.5. Consideremos el siguiente diagrama de producto fibrado en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
A \prod\limits_{C} B \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C .
\end{tikzcd}$$

Entonces se cumplen las siguientes condiciones

(a) si g es un monomorfismo, entonces $\widehat{g}$ es monomorfismo;

(b) si g es un isomorfismo, entonces $\widehat{g}$ también es isomorfismo.

[15] También se usa el término **suma amalgamada.**

Demostración.
(a) Sean $u, v : Q \longrightarrow A\prod\limits_C B$ morfismos de $\mathscr{C}$ tal que $\widehat{g}u = \widehat{g}v$. Definimos $\overline{g} := \widehat{g}u$ y $\overline{f} := \widehat{f}u$, por lo cual

$$f\overline{g} = f\widehat{g}u = g\widehat{f}u = g\overline{f},$$

lo que implica la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd},$$

por lo tanto $\overline{f}$ y $\overline{g}$ tienen la propiedad del producto fibrado. Por otro lado, demostremos la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[drr, bend left, "\overline{f}"] \arrow[dr, "u"] \arrow[ddr, bend right, "\overline{g}"'] & & \\
& A\prod\limits_C B \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q \arrow[drr, bend left, "\overline{f}"] \arrow[dr, "v"] \arrow[ddr, bend right, "\overline{g}"'] & & \\
& A\prod\limits_C B \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}.$$

Diagrama 1 **Diagrama 2**

El diagrama 1 conmuta por definición de $\overline{g}$ y $\overline{f}$. Por otro lado tenemos que

$$g\widehat{f}v = f\widehat{g}v = f\widehat{g}u = g\widehat{f}u = g\overline{f},$$

como g es un monomorfismo se concluye que $\overline{f} = \widehat{f}v$. Además $\widehat{g}u = \widehat{g}v$, es decir $\overline{g} = \widehat{g}v$, por lo tanto el diagrama 2 conmuta. Finalmente por la propiedad universal del producto fibrado se concluye que $u = v$. ■
(b) Supongamos que g es un isomorfismo. Por lo cual, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g^{-1}f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd},$$

haciendo $\overline{f} := g^{-1}f$ y $\overline{g} := 1_A$, tenemos que existe un único morfismo $q : A \longrightarrow A\prod\limits_C B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, bend left, "\overline{f}"] \arrow[rd, "q"] \arrow[rdd, bend right, "\overline{g}"'] & & \\
& A\prod_C B \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd},
$$

de este diagrama obtenemos las siguientes igualdades

$$\widehat{f}q = \overline{f} \ \text{ y } \ \widehat{g}q = \overline{g},$$

es decir; $\widehat{f}q = g^{-1}f$ y $\widehat{g}q = 1_A$. Para simplificar notación escribiremos $P :=_A \prod_C B$. De este modo, queda demostrar que $q\widehat{g} = 1_P$, para esto demostraremos que los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[rrd, bend left, "\widehat{f}"] \arrow[rd, "q\widehat{g}"] \arrow[rdd, bend right, "\widehat{g}"'] & & \\
& P \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[rrd, bend left, "\widehat{f}"] \arrow[rd, "1_P"] \arrow[rdd, bend right, "\widehat{g}"'] & & \\
& P \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\widehat{g}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3 **Diagrama 4**

La conmutatividad del diagrama 3 se concluye de las siguientes igualdades

$$\widehat{g}q\widehat{g} = 1_A\widehat{g} = \widehat{g} \quad \text{y} \quad \widehat{f}q\widehat{g} = g^{-1}f\widehat{g} = g^{-1}g\widehat{f} = 1_B\widehat{f} = \widehat{f},$$

la conmutatividad del diagrama 4 es clara, así, por la propiedad universal del producto fibrado se concluye que $q\widehat{g} = 1_P$. ∎

El inciso $1.16.5(a)$ se puede parafrasear como *el producto fibrado de un monomorfismo es un monomorfismo*, la versión dual es que *el coproducto fibrado de un epimorfismo es un epimorfismo.* La siguiente proposición es conocida como la *propiedad de asociatividad* del producto fibrado.

Proposición 1.16.6. Si consideramos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & C \arrow[d, "e"] \\
D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd},
$$

entonces se cumplen las siguientes afirmaciones :

(a) Si los cuadrados (1) y (2) son diagramas de productos fibrados, entonces el siguiente cuadrado es un diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "ba"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & C \arrow[d, "e"] \\ D \arrow[r, "gf"'] & F \end{tikzcd} .$$

(b) Si $\mathscr{C}$ tiene productos fibrados y los cuadrados (2) y (3) son diagrama de productos fibrados, entonces el cuadrado (1) es un diagrama de producto fibrado.

Demostración. Ver [B194].

1.17. Categorías completas y cocompletas

En esta sección expondremos el concepto de categoría *completa*, y su dual categoría *cocompleta*. Además, los criterios necesarios para saber cuando una categoría es *completa* (resp. *cocompleta*). La importancia de esta sección radica en el hecho de que un axioma de la definicion de categoría de modelo es precisamente que una categoría de modelo es *completa* y *cocompleta*. La bibliografía para esta sección es [ML98] y [B194].

Definición 1.17.1. Una categoría $\mathscr{C}$ es **completa** (resp. **cocompleta**) si cualquier diagrama $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tiene límite (resp. colímite).

Definición 1.17.2. Diremos que una categoría $\mathscr{C}$ es **bicompleta** si es completa y cocompleta.

Definición 1.17.3. Una categoría $\mathscr{C}$ es **finitamente completa** (resp. **finitamente cocompleta**) si todo diagrama finito $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tiene límite (resp. colímite). Finalmente, si $\mathscr{C}$ es una categoría finitamente completa y finitamente cocompleta, diremos que $\mathscr{C}$ es **finitamente bicomopleta**.

Teorema 1.17.4 (Existencia de límites y colímites)**.** Una categoría $\mathscr{C}$ es completa (resp. cocompleta) si toda familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathscr{C}$ tiene producto (resp. coproducto) y cada par de flechas f y g de $\mathscr{C}$ tiene igualador (resp. coigualador).
Demostración. Ver [B194].

Proposición 1.17.5. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathscr{C}$ es finitamente completa (resp. cocompleta).

(b) $\mathscr{C}$ tiene objeto terminal (resp. inicial), productos (resp. coproductos) binarios e igualadores (resp. coigualadores).

(c) $\mathscr{C}$ tiene objetos terminales (resp. iniciales) y productos fibrados (resp. coproductos fibrados).

Demostración. Ver [B194].

Proposición 1.17.6. La categoría $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ de funtores de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ es completa (resp. cocompleta) si $\mathscr{B}$ es completa (resp. cocompleta).
Demostración. Ver [B194].

Definición 1.17.7. Un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ **preserva límites** si para todo diagrama $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$, con límite $\left\{\eta_D : \varprojlim G \longrightarrow GD\right\}_{D\in|D|}$, se tiene que $\left\{F\eta_D : F\varprojlim G \longrightarrow FGD\right\}_{D\in|D|}$ es el límite de $F \circ G$.

Observación 1.17.8. El funtor identidad $1_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ preserva límites.

Proposición 1.17.9. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto fijo. Entonces el funtor $\mathscr{C}(C,-) : \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** preserva límites. En particular, preserva monomorfismos.
Demostración. Ver [B194].

Proposición 1.17.10. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías completas y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtores que preservan límites. Entonces la categoría (F,G) es completa, más aún, los funtores proyección $U : (F,G) \longrightarrow \mathscr{A}$ y $V : (F,G) \longrightarrow \mathscr{B}$ preservan límites.
Demostración. Ver [B194].

1.18. Funtores adjuntos

En esta sección presentaremos la noción de *funtor adjunto* y algunos resultados relacionados. Las referencias para esta sección son [B194] y [ML98].

Definición 1.18.1. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor y B un objeto de $\mathscr{B}$. Una **reflexión de B a lo largo de F** es un objeto $R_B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y un morfismo $\eta_B \in \mathscr{B}(B, FR_B)$ tal que $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\forall b \in \mathscr{B}(B, FA)$ existe un único morfismo $\alpha \in \mathscr{A}(R_B, A)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\eta_B"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "="] & \\
FR_B \arrow[r, "F\alpha"'] & FA\,.
\end{tikzcd}$$

De forma dual, una **coreflexión de** B **a lo largo de** F es un objeto $C_B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y un morfismo $\varepsilon_B \in \mathscr{B}(FC_B, B)$ tal que $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\forall b \in \mathscr{B}(FA, B)$ existe un único morfismo $\beta \in \mathscr{A}(A, C_B)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B & \\
FC_B \arrow[u, "\varepsilon_B"] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "="] & FA\,. \arrow[ul, "b"'] \arrow[l, "F\beta"]
\end{tikzcd}$$

Cuando no exista confusión escribiremos (R_B, η_B) y (C_B, ε_B) para referirnos a la reflexión y coreflexión de B a lo largo de F respectivamente.

Observación 1.18.2. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor y B un objeto de $\mathscr{B}$. Si la reflexión (resp. coreflexión) de B a lo largo de F existe, entonces el objeto R_B (resp. C_B) es único salvo isomorfismos.

Proposición 1.18.3. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor. Si $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ existe una reflexión de B a lo largo de F, la cual es (R_B, η_B), entonces existe un único funtor $R : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que

(a) $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ se tiene que $RB = R_B$;

(b) la familia de morfismos $\{\eta_B : B \longrightarrow FRB\}_{B \in |B|}$ induce una transformación natural $\eta : 1_{\mathscr{B}} \Longrightarrow FR$.

Demostración. Ver [B194]

Definición 1.18.4. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ funtores. Decimos que G es **adjunto izquierdo** [16] de F si existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathscr{B}} \Longrightarrow F \circ G$ tal que $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ se tiene que (GB, η_B) es una reflexión de B a lo largo de F. Dualmente, G es **adjunto derecho** de F si existe una transformación natural $\varepsilon : F \circ G \Longrightarrow 1_{\mathscr{B}}$ tal que $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ se tiene que (GB, ε_B) es una coreflexión de B a lo largo de F.

[16] D. Kan define por primera vez la noción de funtor adjunto en [Ka58] .

Observación 1.18.5. Podemos concluir que un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ tiene un adjunto izquierdo si cualquier objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ tiene una reflexión a lo largo de F. En efecto, utilizando el Axioma de elección, para cada objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ elegimos una reflexión de B a lo largo de F y después usamos la Proposición 1.18.3.

En lo siguiente enunciaremos un teorema que relaciona el concepto de funtor adjunto izquierdo con el de adjunto derecho. Además, este teorema describe el concepto de *adjunción* en términos de la categoría **Set**. Para realizar esto, haremos una observación preliminar.

Observación 1.18.6. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ funtores.

(a) El funtor $\mathscr{A}(G-,-) : \mathscr{B}^* \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ está definido como sigue

$(a.1)$ $\mathscr{A}(G-,-)(X,Y) := \mathscr{A}(GX,Y)$ para todo $(X,Y) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}^* \times \mathscr{A})$;

$(a.2)$ para un morfismo $(f^*,g) : (X,Y) \longrightarrow (W,Z)$ de $\mathscr{B}^* \times \mathscr{A}$

$$\mathscr{A}(G-,-)(f^*,g) := \mathscr{A}(Gf,g) : \mathscr{A}(GX,Y) \longrightarrow \mathscr{A}(GW,Z)$$

está determinada como $\mathscr{A}(Gf,g)(r) := g \circ r \circ Gf$ para todo $r \in \mathscr{A}(GX,Y)$

$$\begin{tikzcd}
GX \arrow[r, "r"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "g"] \\
GW \arrow[u, "Gf"] \arrow[r, "grG(f)"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

(b) El funtor $\mathscr{B}(-,F-) : \mathscr{B}^* \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ se define como sigue

$(b.1)$ $\mathscr{B}(-,F-)(X,Y) := \mathscr{B}(X,FY)$ para todo $(X,Y) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}^* \times \mathscr{A})$;

$(b.2)$ para un morfismo $(f^*,g) : (X,Y) \longrightarrow (W,Z)$ de $\mathscr{B}^* \times \mathscr{A}$

$$\mathscr{B}(-,F-)(f^*,g) := \mathscr{B}(f,Fg) : \mathscr{B}(X,FY) \longrightarrow \mathscr{B}(W,FZ)$$

está determinada como $\mathscr{B}(f,Fg)(r) := Fg \circ r \circ f$ para todo $r \in \mathscr{B}(X,FY)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r"] \arrow[dr, phantom, "="] & FY \arrow[d, "Fg"] \\
W \arrow[u, "f"] \arrow[r, "F(g)rf"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.18.7. Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ funtores. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) G es adjunto izquierdo de F.

(b) Existen transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathscr{B}} \Longrightarrow F \circ G$ y $\varepsilon : G \circ F \Longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ que cumplen las siguientes igualdades:

$$(1_F \star \varepsilon) \circ (\eta \star 1_F) = 1_F \qquad \text{y} \qquad (\varepsilon \star 1_G) \circ (1_G \star \eta) = 1_G.$$

(c) Existe un isomorfismo natural $\Theta : \mathscr{A}(G-,-) \Longrightarrow \mathscr{B}(-,F-)$.

(d) F es adjunto derecho de G.

Demostración. Ver [B194]

Escribiremos $G \dashv F$ para decir que G es un adjunto izquierdo de F, o equivalentemente que F es adjunto derecho de G. Además, diremos que η y ε son la **unidad y counidad de la adjunción** $G \dashv F$ respectivamente.
De esta forma, dependiendo de la caracterización que usemos para referirnos a una adjunción $G \dashv F$, usaremos varias notaciones, siguiendo a S. Mac Lane, si utilizamos el inciso (b); escribiremos $(G,F,\eta,\varepsilon) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ para referirnos a la adjunción $G \dashv F$, por otro lado, si utilizamos la caracterización del inciso (c) escribiremos $(G,F,\Theta) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$.

Observación 1.18.8. El inciso 1.18.7(c) implica la existencia funciones biyectivas

$$\Theta_{A,B} : \mathscr{A}(GB,A) \longrightarrow \mathscr{B}(B,FA) \ \forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \text{ y } \forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$$

naturales en A y B [17]. De este modo, la naturalidad Θ implica la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(GA,B) \arrow[r, "\theta_{A,B}"] \arrow[d, "\mathscr{A}(1_{GA},k)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathscr{B}(A,FB) \arrow[d, "\mathscr{B}(1_A,Fk)"] \\
\mathscr{A}\left(GA,\hat{B}\right) \arrow[r, "\theta_{G,B}"'] & \mathscr{B}\left(A,F\hat{B}\right)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(GA,B) \arrow[r, "\theta_{A,B}"] \arrow[d, "\mathscr{A}(Gh,1_B)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathscr{B}(A,FB) \arrow[d, "\mathscr{B}(h,1_{FB})"] \\
\mathscr{A}\left(G\hat{A},B\right) \arrow[r, "\theta_{\hat{A},B}"'] & \mathscr{B}\left(\hat{A},FB\right)
\end{tikzcd},$$

[17] Esta es la definición original de funtor adjunto, es decir, la que aparece en [Ka58]. De hecho, el término *adjunto* proviene de la propiedad que cumple el adjunto T^* de una transformación lineal T, en un espacio de Hilbert H. Esta propiedad es $\langle T^*x, Y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \ \forall x,y \in H$. Así, la analogía con la relación de los conjuntos $\mathscr{A}(GB,A) \cong \mathscr{B}(B,FA)$ es clara.

$\forall (A,B) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}^* \times \mathscr{A})$ y para cualquier par de morfismos $k \in \mathscr{A}\left(B,\hat{B}\right)$ y $h^* \in \mathscr{B}^*\left(A,\hat{A}\right)$. Finalmente, para $f \in \mathscr{A}(GA,B)$ tenemos las siguientes igualdades

$$Fk \circ \Theta_{A,B}(f) = \Theta_{A,\hat{B}}(k \circ f) \qquad \text{y} \qquad \Theta_{A,B}(f) \circ h = \Theta_{\hat{A},B}(f \circ Gf).$$

Proposición 1.18.9. Sean $F,\widehat{F} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ y $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ funtores. Si F y $\widehat{F}$ son adjuntos izquierdos de G, entonces $F \cong \widehat{F}$.
Demostración. Ver [ML98].

Proposición 1.18.10. Sean F,G,H y K funtores como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift right, "F"'] & \mathscr{B} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[r, shift right, "H"'] & \mathscr{C} \arrow[l, shift right, "K"'] \end{tikzcd}.$$

Si $G \dashv F$ y $K \dashv H$, entonces $G \circ K \dashv H \circ K$.
Demostración. Ver [B194].

Definición 1.18.11. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor. Diremos que F satisface la **condición del conjunto solución** si para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ existen un conjunto I_B y una familia de morfismos $\{f_i : B \longrightarrow FA_i\}_{i \in I_B}$ de $\mathscr{B}$ tal que $\forall h \in \mathscr{B}(B,FA)$ existen $i \in I_B$ y $f \in \mathscr{A}(A_i,A)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "="] & \\ FA_i \arrow[r, "Ff"'] & FA \end{tikzcd}.$$

El siguiente teorema es debido a Peter J. Freyd (1936 -).

Teorema 1.18.12 (Teorema del funtor adjunto)**.** Sean $\mathscr{A}$ una categoría completa y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) F tiene un funtor adjunto izquierdo.

(b) F preserva límites y satisface la condición del conjunto solución.

Demostración. Ver [ML98].

Proposición 1.18.13. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) Existe un funtor $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ e isomorfismos naturales $\eta : 1_B \Longrightarrow FG$ y $\varepsilon : GF \Longrightarrow 1_A$.

(b) F tiene un funtor adjunto izquierdo G. Además, la unidad η y counidad ε de la adjunción $G \dashv F$ son isomorfismos naturales.

(c) F es una equivalencia de categorías, es decir, F es fiel, pleno y representativo.

Demostración. Ver [ML98].

1.19. Categorías abelianas

Definición 1.19.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{A}$ **tiene objeto cero** si existe $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A})$ tal que X es un objeto cero de $\mathscr{A}$.

Definición 1.19.2. Sean $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathscr{A}$. Entonces f es un **morfismo cero** si se factoriza de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "="] & & B \\ & \mathbf{0} \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Observación 1.19.3. Sea $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero. Entonces

(a) $\forall A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A})$ existe un único morfismo cero $c : A \longrightarrow B$;

(b) si f es un morfismo cero de $\mathscr{A}$, entonces gf y $f\hat{g}$ son morfismos cero, siempre que dichas composiciones estén definidas.

De este modo, el morfismo c de la observación 1.19.3(a) es denotado por $\mathbf{0}_{A,B}$.

Definición 1.19.4. Sean $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathscr{A}$. El **núcleo** de f es el igualador de f y $\mathbf{0}_{A,B}$. Dualmente, el **conúcleo** de f es el coigualdor de f y $\mathbf{0}_{A,B}$.

Notación 1.19.5. El núcleo de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ será denotado como

$$\ker(f) : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow A.$$

Dualmente, el conúcleo de f será denotado por

$$\mathrm{coker}(f) : B \longrightarrow \mathrm{Coker}(f).$$

Por la Proposición 1.15.3, el núcleo de un morfismo es monomorfismo. De forma dual, el conúcleo de un morfismo es epimorfismo.
Enunciaremos una consecuencia de la definición anterior.

Observación 1.19.6. Sean $\mathscr{A}$ una categoría con objeto cero y $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo de $\mathscr{A}$. Entonces

(a) si $g \in \mathscr{A}(C,A)$ y $fg = \mathbf{0}$, entonces $g = \mathbf{0}$,

(b) el núcleo de f es el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow A$,

(c) $\forall A, B \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ se tiene que $\ker\left(\mathbf{0}_{A,B}\right) = 1_A$.

Definición 1.19.7. Una categoría $\mathscr{A}$ es **preaditiva** si todo conjunto de morfismos $\mathscr{A}(X,Y)$ tiene una estructura de grupo abeliano tal que la composición de morfismos

$$\circ : \mathscr{A}(Y,Z) \times \mathscr{A}(X,Y) \longrightarrow \mathscr{A}(X,Z)$$

es bilineal. Es decir,

$$h(f+h) = hf + hg \qquad\qquad (f+g)h = fh + gh,$$

siempre que dichas composiciones estén definidas.

Proposición 1.19.8. Sean $\mathscr{A}$ una categoría preaditiva y X un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones

(a) X es objeto inicial,

(b) X es objeto final,

(c) X es objeto cero,

(d) $\mathscr{A}(X,X)$ es el grupo abeliano trivial, es decir, $\mathscr{A}(X,X) = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración. Ver [ML98].

Proposición 1.19.9. Sean $\mathscr{A}$ una categoría preaditiva y $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos de $\mathscr{A}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(a) El igualador de f y g existe.

(b) El núcleo de $f-g$ existe.

Demostración. Ver [B294].

Definición 1.19.10. Sean A y B objetos de una categoría preaditiva $\mathscr{A}$. Un **diagrama de biproducto** de A y B es un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & P \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd},$$

en $\mathscr{A}$, tal que

$$p_A \circ i_A = 1_A \qquad p_B \circ i_B = 1_B \qquad i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = 1_P.$$

El objeto P es llamado **biproducto** de A y B.

Teorema 1.19.11. Sean $\mathscr{A}$ una categoría preaditiva y A,B objetos de $\mathscr{A}$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas

(a) El producto de A y B existe si y sólo si el biproducto de A y B existe.

(b) Si el biproducto de A y B es

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & P \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd},$$

entonces

$$B \xleftarrow[p_A]{} P \xrightarrow[p_B]{} A$$

es un diagrama de producto de A y B. Más aún,

$$B \xrightarrow[i_B]{} P \xleftarrow[i_A]{} A\,,$$

es un diagrama de coproducto de A y B. En particular, se tienen las siguientes igualdades

$$p_A i_B = \mathbf{0} \qquad\qquad p_B i_A = \mathbf{0}.$$

(c) El producto de A y B existe si y sólo si el coproducto de A y B existe.

Demostración. Ver [ML98].

Por el teorema anterior, el biproducto de A y B, si existe, es único salvo isomorfismos. De este modo, el biproducto de A y B suele ser denotado como $A \oplus B$.

Definición 1.19.12. Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{A}$ **tiene biproductos** si $\forall A, B \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ el diagrama de biproducto de A y B existe.

Definición 1.19.13. Una categoría $\mathscr{A}$ es **aditiva** si es una categoría preaditiva que tiene objeto cero y biproductos.

El teorema 1.19.11 implica la siguiente proposición.

Proposición 1.19.14. Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y A y B objetos de $\mathscr{A}$. Entonces

$$A \prod B \cong A \coprod B \cong A \oplus B.$$

La proposición anterior nos sugiere obtener, por iteración, un **biproducto *n*-ario**

$$\bigoplus_{j=1}^{n} A_j := A_1 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

caracterizado, salvo isomorfismos, por el diagrama de biproducto n-ario

$$A_k \xrightarrow{i_{A_k}} \bigoplus_{j=1}^{n} A_j \xrightarrow{p_{A_k}} A_k\,, \quad k = 1 \ldots, n,$$

y las igualdades

$$i_{A_1} p_{A_1} + \cdots + i_{A_n} p_{A_n} := 1 \qquad\qquad p_k i_j := \delta_{jk} \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Notación 1.19.15. Sean $\mathscr{A}$ una categoría con productos binarios y A es un objeto de $\mathscr{A}$. El morfismo $\delta : A \longrightarrow A \prod A$ que hace conmutar el siguiente diagrama de producto

$$\begin{tikzcd}
A & A \prod A \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A \\
& A \arrow[ul, "1_A"] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "1_A"'] \arrow[ul, phantom, "=", near start, shift left=6] \arrow[ur, phantom, "=", near start, shift right=6] &
\end{tikzcd}$$

usualmente es denotado por $\delta := \Delta_A : A \longrightarrow A \prod A$ y llamado **morfismo diagonal**. Dualmente, si $\mathscr{A}$ tiene coproductos binarios, el morfismo $\eta : B \coprod B \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama de coproducto

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s_1"] \arrow[dr, "1_B"'] & B\coprod B \arrow[d, "\eta"] & B \arrow[l, "s_2"'] \arrow[dl, "1_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

es denotado por $\eta := \nabla_B : B\coprod B \longrightarrow B$ y llamado **morfismo codiagonal.**

Observación 1.19.16. Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Entonces

(a) para cualquier morfismo $(f,g):(A,X) \longrightarrow (B,Y)$ de $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ se obtiene un único morfismo $\eta : A\oplus X \longrightarrow B\oplus Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama de producto

$$\begin{tikzcd} Y & B\oplus Y \arrow[l, "p_Y"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\ & A\oplus X \arrow[ul, "gp_X"] \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "fp_A"'] & \end{tikzcd},$$

por lo cual, η es denotado como $\eta := f\oplus g$. Más aún, el morfismo $f\oplus g$ puede ser determinado por el siguiente diagrama de coproducto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "i_B f"'] & A\oplus X \arrow[d, "\eta"] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[dl, "i_Y g"] \\ & B\oplus Y & \end{tikzcd},$$

(b) se define el **bifuntor biproducto** $\bigoplus : \mathscr{A}\times\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ como sigue:

$(b.1)$ $\bigoplus(A,B) := A\oplus B \ \ \forall A,B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$;

$(b.2)$ para un morfismo $(f,g):(A,X) \longrightarrow (B,Y)$ se define $\bigoplus(f,g) := f\oplus g$;

(c) para un morfismo $f : A_1\oplus A_2 \longrightarrow B_1\oplus B_2$ de $\mathscr{A}$, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, shift right, "i_{A_2}"'] & A_1\oplus A_2 \arrow[l, shift right, "p_{A_2}"'] \arrow[r, shift left, "p_{A_1}"] \arrow[d, "f"] & A_1 \arrow[l, shift left, "i_{A_1}"] \\ B_2 \arrow[r, shift right, "j_{B_2}"'] & B_1\oplus B_2 \arrow[l, shift right, "q_{B_2}"'] \arrow[r, shift left, "q_{B_1}"] & B_1 \arrow[l, shift left, "j_{B_1}"] \end{tikzcd},$$

de este modo, f está determinado por los siguientes morfismos

$$f_{m,n} := q_{B_m} \circ f \circ i_{A_n} : A_n \longrightarrow B_m \quad m,n = 1,2.$$

Lo anterior nos sugiere utilizar la siguiente notación

$$f := \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,1} & f_{2,2} \end{pmatrix},$$

para representar a f. Más aún, si consideramos un morfismo $g : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow C_1 \oplus C_2$, la composición gf es representada por el producto de las matrices que representan a f y a g. Esta notación se puede extender al caso del biproducto n-ario. En particular, dados $f : A_1 \longrightarrow B$ y $g : A_2 \longrightarrow B$ morfimos, escribiremos $(f,g) : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow B$ para referirnos a la factorización correspondiente. De forma dual, dados $h : A \longrightarrow B_1$ y $k : A \longrightarrow B_2$ morfismos, escribiremos $\binom{h}{k} : A \longrightarrow B_1 \oplus B_2$ para referirnos a la factorización correspondiente.

Proposición 1.19.17. Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $f,g : A \longrightarrow B$ morfismos de $\mathscr{A}$. Entonces

$$f + g = \nabla_B (f \oplus g) \Delta_A.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \nabla_B (f \oplus g) \Delta_A &= \nabla_B (f \oplus g)(i_1 p_1 + i_2 p_2) \Delta_A \\ &= [\nabla_B (f \oplus g) i_1 p_1 \Delta_A] + [\nabla_B (f \oplus g) i_2 p_2 \Delta_A] \\ &= \nabla_B (f \oplus g) i_1 + \nabla_B (f \oplus g) i_2 \\ &= \nabla_B i_1 f + \nabla_B i_2 g \\ &= f + g \;. \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 1.19.18. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías preaditivas. Un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es **aditivo** si $\forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ la función

$$\mathscr{A}(A,B) \longrightarrow \mathscr{B}(FA,FB), \quad f \longmapsto Ff,$$

es un homomorfismo de grupos abelianos.

Ejemplo 1.19.19. Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ un objeto fijo. El funtor

$$H_A := \mathscr{A}(A,-) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

definido como

(a) $\mathscr{A}(A,-)(B) := \mathscr{A}(A,B)$ para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$;

(b) para cada $f \in \mathscr{A}(X,Y)$ se tiene que $\mathscr{A}(A,-)(f)(g) := fg$ para todo $g \in \mathscr{A}(A,X)$,

es un funtor aditivo. En efecto, para cada $f,g \in \mathscr{A}(X,Y)$ se tiene que

$$\mathscr{A}(A,-)(f-g)(h) = (f-g)h = fh - gh = \mathscr{A}(A,-)(f)(h) \;-\; \mathscr{A}(A,-)(g)(h)$$

para todo $h \in \mathscr{A}(A,X)$.
De forma dual se puede definir el funtor contravariante $H^A := \mathscr{A}(-,A) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, que también es aditivo.

Observación 1.19.20. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Entonces $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para cualquier objeto (resp. morfismo) cero.

Proposición 1.19.21. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) F es aditivo.

(b) F preserva biproductos.

(c) F preserva productos finitos.

(d) F preserva coproductos finitos.

Demostración. Ver [B294].

Definición 1.19.22. Una categoría $\mathscr{A}$ es **abeliana** si satisface las siguientes condiciones

(a) $\mathscr{A}$ es aditiva;

(b) todo morfismo de $\mathscr{A}$ tiene núcleo y conúcleo;

(c) todo monomorfismo de $\mathscr{A}$ es un núcleo y todo epimorfismo de $\mathscr{A}$ es un conúcleo.

Observamos que la definición de categoría abeliana [18] es autodual. Por lo anterior, si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathscr{A}^*$ también lo es.

[18]Es posible definir una categoría abeliana de una forma en la cual no se involucre la estructura de grupo abeliano en cada conjunto $\mathscr{A}(A,B)$. En efecto, una categoría $\mathscr{A}$ es abeliana si tiene objeto cero, productos y coproductos binarios, además de cumplir los incisos 1.19.22(b) y 1.19.22(c) de la definición de categoría abeliana. Finalmente, la igualdad de la Proposición 1.19.17 puede ser adaptada para introducir una operación binaria en cada conjunto $\mathscr{A}(A,B)$. Dicha operación dota de una estructura de grupo abeliano a cada conjunto $\mathscr{A}(A,B)$.

Ejemplo 1.19.23. Sea R un anillo. Las categorías ${}_R\mathbf{Mod}$ y $\mathbf{Mod}_R$ son abelianas. Y como se espera, la categoría $\mathbf{Ab}$ de grupos abelianos también es abeliana.

Observación 1.19.24. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "\operatorname{coker}(f)"] \\
\mathbf{0} \arrow[r, "c"'] & \operatorname{Coker}(f),
\end{tikzcd}$$

entonces los morfismos c y $\operatorname{coker}(f)$ son un coproducto fibrado de a y f.

Demostración. Sean $\alpha \in \mathscr{A}(B,P)$ y $\beta \in \mathscr{A}(\mathbf{0},P)$ tales que $\alpha f = \beta a$. Luego, la existencia de un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "\operatorname{coker}(f)"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\
\mathbf{0} \arrow[r, "c"] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[dr, dashed, "\eta"] & \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

se induce de la propiedad universal del conúcleo de f. ■

Proposición 1.19.25. Sean $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y $\mathscr{A}$ una categoría aditiva pequeña. Entonces $\mathscr{C}^{\mathscr{A}}$ es abeliana.

Demostración. Ver [B294].

Proposición 1.19.26. Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathscr{A}$ es finitamente completa y finitamente cocompleta.

Demostración. Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathscr{A}$ tiene objeto final y biproductos; por la Proposición 1.19.9, $\mathscr{A}$ tiene igualadores. Finalmente, por la Proposición 1.17.5 es finitamente completa. De forma dual, $\mathscr{A}$ es finitamente cocompleta. ■

Proposición 1.19.27. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathscr{A}$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones

(a) f es isomorfismo.

(b) f es monomorfismo y epimorfismo.

Proposición 1.19.28. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathscr{A}$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones

(a) f es monomorfismo.

(b) $\operatorname{Ker}(f) = \mathbf{0}$.

(c) Si $fg = \mathbf{0}$, entonces $g = \mathbf{0}$, siempre que dicha composición esté definida.

Proposición 1.19.29. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathscr{A}$. Entonces f se factoriza de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & \arrow[d, phantom, "="] & B \\ & C \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd},$$

donde $m \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$ y $e \in \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$. Más aún,

$$m = \text{ker(coker}(f)), \qquad e = \text{coker(ker}(f)), \quad \text{y} \quad \operatorname{Ker}(\operatorname{coker}(f)) \cong \operatorname{Coker}(\ker(f)).$$

Demostración. Ver [ML98].

La factorización $f = me$ es llamada **factorización a través de la imagen** de f.

Proposición 1.19.30. Consideremos el siguiente diagrama en una categoría abeliana $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f=me"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "h"] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{f}=\widehat{m}\widehat{e}"'] & \widehat{B}, \end{tikzcd}$$

donde $m, \widehat{m} \in \operatorname{Mon}\{\mathscr{A})$ y $e, \widehat{e} \in \operatorname{Epi}\{\mathscr{A})$. Entonces existe un único morfismo k que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[r, "e"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, "m"'] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "h"] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{e}"] \arrow[rr, bend right, "\widehat{f}"'] & \widehat{X} \arrow[d, phantom, "="] \arrow[r, "\widehat{m}"] & \widehat{B}. \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [ML98].

Proposición 1.19.31. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si m es un monomorfismo y e es un epimorfismo de $\mathscr{A}$, entonces

$$m = \ker(\operatorname{coker}(m)) \qquad e = \operatorname{coker}(\ker(e)).$$

Demostración. Ver [B294].

Definición 1.19.32. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathscr{A}$. La **imagen** de f se define como $\operatorname{im}(f) := \ker(\operatorname{coker}(f))$. Dualmente, la **coimagen** de f se define como $\operatorname{coim}(f) := \operatorname{coker}(\ker(f))$. Para simplificar notación escribiremos $\operatorname{im}(f) : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow B$ y $\operatorname{coim}(f) : A \longrightarrow \operatorname{Coim}(f)$.

Observación 1.19.33. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana.

(a) Todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathscr{A}$ tiene asociado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "\ker(f)"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{coim}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[r, "\operatorname{coker}(f)"] & \operatorname{Coker}(f) \\
& \operatorname{Coim}(f) \arrow[r, dashed, "\widehat{f}"'] & \operatorname{Im}(f) \arrow[u, "\operatorname{im}(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{f}$ es un isomorfismo.

(b) Si f y g son morfismos tales que $gf = \mathbf{0}$, entonces existen morfismos φ y ψ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Im}(f) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{im}(f)"] & \operatorname{Ker}(g) \arrow[dl, "\ker(g)"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[dl, "\operatorname{coker}(f)"'] \arrow[d, "\operatorname{coim}(g)"] & C \\
\operatorname{Coker}(f) \arrow[r, "\psi"'] & \operatorname{Coim}(g) &
\end{tikzcd},$$

además, φ es monomorfismo y ψ es epimorfismo.
Demostración. Observemos que

$$gf = g \circ \operatorname{im}(f) \circ \operatorname{coim}(f) = \mathbf{0},$$

ya que $\operatorname{coim}(f)$ es epimorfismo se concluye que $g \circ \operatorname{im}(f) = \mathbf{0}$, esto asegura la existencia de φ. Veamos que φ es monomorfismo. En efecto, supongamos que $\varphi a = \varphi b$, entonces $\ker(f)\,\varphi a = \ker(f)\,\varphi b$, por lo tanto $\operatorname{im}(f)\,a = \operatorname{im}(f)\,b$, como $\operatorname{im}(f)$ es monomorfismo se concluye que $a = b$. La demostración para ψ es dual. ■

Observación 1.19.34. Sea $\mathscr{A}$ una categoría.

(a) Para todo $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ se define la clase

$$[\mathscr{A},A] := \{\, f \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A} \downarrow A) \mid f \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A}) \,\};$$

(b) para cada clase $[\mathscr{A},A]$ se define un preorden $\leq_A$ como

$$f \leq_A g \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } h \text{ tal que } f = gh;$$

(c) además, dicho preorden induce una relación de equivalencia $\equiv_A$ en $[\mathscr{A},A]$, definida como

$$f \equiv_A g \quad \Longleftrightarrow \quad f \leq_A g \;\; \text{y} \;\; g \leq_A f\,.$$

(d) Finalmente, para cada morfismo $f \in [\mathscr{A},A]$ la clase de equivalencia

$$[f]_{\equiv_A} := \left\{ g \in [\mathscr{A},A] \mid f \equiv_A g \right\}$$

es llamada clase de **sub-objetos** de A. Si $g \in [f]_{\equiv_A}$ diremos que $\operatorname{Dom}(g)$ es un **sub-objeto** de A, en símbolos, escribiremos $\operatorname{Dom}(g) \subset A$. Notamos que si $f \equiv_A g$, entonces el dominio de f y el dominio de g son isomorfos.

Por la importancia en construcciones futuras, haremos la definición dual de sub-objeto.

Observación 1.19.35. Sea $\mathscr{A}$ una categoría.

(a) Para todo $B \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ se define la clase

$$[B,\mathscr{A}] := \{\, f \in \operatorname{Obj}(B \downarrow \mathscr{A}) \mid f \in \operatorname{Epi}(\mathscr{A}) \,\};$$

(b) para cada clase $[B,\mathscr{A}]$ se define un preorden $\leq_B$ como

$$f \leq_B g \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } h \text{ tal que } f = hg;$$

(c) además, dicho preorden induce una relación de equivalencia $\equiv_A$ en $[B, \mathscr{A}]$, definida como

$$f \equiv_A g \iff f \leq_A g \ \text{ y } \ g \leq_A f\,.$$

(d) Finalmente, para cada morfismo $f \in [B, \mathscr{A}]$ la clase de equivalencia

$$[f]_{\equiv_B} := \left\{ g \in [B, \mathscr{A}] \mid f \equiv_B g \right\}$$

es llamada la clase **cociente** de B. Si $g \in [f]_{\equiv_B}$ diremos que $\mathrm{Codom}(g)$ es un **objeto cociete** de B. Notamos que si $f \equiv_B g$, entonces el codominio de f y el codominio de g son isomorfos.

Cuando no exista confusión, escribiremos simplemente $\leq$ y $\equiv$.

Proposición 1.19.36. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ morfismos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Entonces

$$f \leq \ker(g) \iff gf = \mathbf{0} \iff g \leq \operatorname{coker}(f).$$

Demostración. Ver [ML98].

Definición 1.19.37. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Consideremos la siguiente sucesión, finita o infinta, de morfismos en $\mathscr{A}$

$$\Sigma: \qquad \dots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \dots\,.$$

Decimos que Σ es una **sucesión exacta** en $\mathscr{A}$ si $\ker\left(f_{n+1}\right) \equiv_{A_n} \operatorname{im}(f_n)$ para todo n.

Proposición 1.19.38. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Entonces

(a) $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es una sucesión exacta si y solo si f es monomorfismo;

(b) $B \xrightarrow{g} A \longrightarrow \mathbf{0}$ es una sucesión exacta si y solo si g es un epimorfismo;

(c) $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta si y solo si $f =\ker(g)$;

(d) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ es exacta si y solo si $g =\operatorname{coker}(f)$.

Demostración. Ver [B294].

Proposición 1.19.39. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "="] & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "q"'] & \arrow[d, phantom, "="] & C \\ & I \arrow[ur, "i"'] & & J \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

en $\mathscr{A}$, donde $f = ip$ y $g = jq$ son las factorizaciones a través de la imágenes de f y g respectivamente. Las siguientes condiciones son equivalentes

(a) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es una sucesión exacta;

(b) $I \xrightarrow{i} B \xrightarrow{g} C$ es una sucesión exacta;

(c) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} J$ es una sucesión exacta;

(d) $I \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} J$ es una sucesión exacta.

Demostración. Ver [B294].

Definición 1.19.40. Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la siguiente forma

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0} \ .$$

Proposición 1.19.41. Sea

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

una sucesión exacta corta en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(a) g es epi-escindible;

(b) f es mono-escindible;

(c) existen morfismos $s \in \mathscr{A}(C,B)$ y $r \in \mathscr{A}(B,A)$ tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "f"'] & B \arrow[l, shift right, "r"'] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "s"] \end{tikzcd},$$

es un diagrama de biproducto de A y C.

Demostración. Ver [B294].

Diremos que una sucesión exacta corta se **escinde** si cumple cualquiera de los incisos de la proposición anterior.

Proposición 1.19.42 (Lema del 5)**.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "="] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d, "v"'] \\
V \arrow[r, "j"'] & W \arrow[r, "k"'] & X \arrow[r, "l"'] & Y \arrow[r, "m"'] & Z
\end{tikzcd}$$

en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, tal que las filas son sucesiones exactas. Si r, s, u y v son isomorfismos, entonces t es isomorfismo.
Demostración. Ver [B294].

Lema 1.19.43 (Lema de la serpiente)**.** Considere el siguiente diagrama conmutativo, con filas exactas, en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r, "\widehat{m}"'] & Y \arrow[r, "\widehat{e}"'] & Z \arrow[r] & \mathbf{0}\,.
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \operatorname{Ker}(f) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(g) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(h) \arrow[dll] & \\
& \operatorname{Coker}(f) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(g) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(h) \arrow[r] & \mathbf{0}.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [ML98].

De hecho, el Lema de la serpiente tiene la siguiente variante. La demostración puede encontrarse en [Ob00].

Lema 1.19.44. Considere el siguiente diagrama conmutativo, con filas exactas, en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r, "\widehat{m}"'] & Y \arrow[r, "\widehat{e}"'] & Z & .
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(g) \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(h) \arrow[dll] \\
\mathrm{Coker}\,(f) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,(g) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,(h)\,.
\end{tikzcd}$$

El siguiente corolario del anterior lema será usado en esta tesis.

Corolario 1.19.45. Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son morfismos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, entonces existe una sucesión exacta

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Ker}\,(f) \to \mathrm{Ker}\,(gf) \to \mathrm{Ker}\,(g) \to \mathrm{Coker}\,(f) \to \mathrm{Coker}\,(gf) \to \mathrm{Coker}\,(g) \to \mathbf{0}.$$

El siguiente resultado es de gran utilidad en el Capítulo 3 porque nos brinda una factorización del núcleo de un epimorfismo en una categoría abeliana, y de forma dual para cada monomorfismo obtenemos una factorización de su conúcleo. La demostración puede encontrarse en [ML98].

Proposición 1.19.46. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si $f, g \in \mathrm{Epi}\,(\mathscr{A})$, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "1_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Ker}\,(f) \arrow[d, "\mathrm{ker}(f)"] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(g) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{Ker}(g)}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \prod_X Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(g) \arrow[r, "\mathrm{ker}(g)"'] & Z \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}$$

con filas y columnas exactas. Dualmente, Si $f, g \in \mathrm{Mon}\,(\mathscr{A})$, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[r, "\operatorname{coker}(g)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \operatorname{Coker}(g) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\operatorname{Coker}(g)}"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \coprod_X Z \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}(g) \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & \operatorname{Coker}(f) \arrow[r, "1_{\operatorname{Coker}(f)}"'] \arrow[d] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[d] & & \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & &
\end{tikzcd}$$

con filas y columnas exactas.

Definición 1.19.47. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. Decimos que

(a) F es **exacto izquierdo** si para cualquier sucesión exacta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

en $\mathscr{A}$, se tiene que

$$F(\mathbf{0}) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{B}$.

(b) F es **exacto derecho** si para cualquier sucesión exacta

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, se tiene que

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(\mathbf{0})$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{B}$.

(c) F es **exacto** si para cualquier sucesión exacta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, se tiene que

$$F(\mathbf{0}) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(\mathbf{0})$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{B}$.

Proposición 1.19.48. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. Entonces

(a) F es exacto izquierdo si y sólo si F preserva límites finitos;

(b) F es exacto derecho si y sólo si F preserva colímites finitos;

(c) F es exacto si y sólo si F preserva límites y colímites finitos.

Demostración. Ver [B194].

Ejemplo 1.19.49. Sean $\mathscr{A}$ una categoría y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. El funtor $\mathscr{A}(A,-) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto izquierdo, ya que $\mathscr{A}(A,-)$ preserva límites.

Capítulo 2

Categorías de modelo

2.1. Definición de categorías de modelo

Antes de enunciar la definición de categoría de modelo, que usaremos en esta tesis, expondremos conceptos preliminares y algunas propiedades que se derivan de ellos. La bibliografía para esta sección es [Hi03] y [Ho99].

Definición 2.1.1. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que f es un **retracto** de g si f es un retracto de g en la categoría $\overrightarrow{\mathscr{C}}$. Es decir, existen morfismos $(h_0, h_1) : f \longrightarrow g$ y $(k_0, k_1) : g \longrightarrow f$ en $\overrightarrow{\mathscr{C}}$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h_0"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "1_A"] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[r, "k_0"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "h_1"] \arrow[rr, bend right, "1_B"'] & D \arrow[r, "k_1"] & B .
\end{tikzcd}$$

Diremos que el diagrama anterior es un **diagrama de retracción** y $\mathrm{Re}(g)$ denotará a la clase de morfismos f que son retracto de g. Es decir,

$$\mathrm{Re}(g) = \{ f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid f \text{ es un retracto de } g \}.$$

Definición 2.1.2. Sea $\mathcal{M}$ una clase de morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que $\mathcal{M}$ es **cerrada bajo retractos** si $\forall f \in \mathcal{M}$ se cumple que $\mathrm{Re}(f) \subseteq \mathcal{M}$.

Observación 2.1.3. La clase Iso$(\mathscr{C})$ de isomorfismos, de una categoría $\mathscr{C}$, es cerrada bajo retractos.

Demostración. Sean $g \in$Iso$(\mathscr{C})$ un isomorfismo y $f \in$Re(g) un retracto de g. Entonces tenemos el siguiente diagrama de retracción

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\widehat{m}"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[r, "\widehat{n}"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "="] & U \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "1_Y"'] & Y \arrow[r, "n"] & Y,
\end{tikzcd}$$

lo que implica que $\left(\widehat{n}g^{-1}m\right) f = \widehat{n}g^{-1}\left(g\widehat{m}\right) = 1_X$ y $f\left(\widehat{n}g^{-1}m\right) = ngg^{-1}m = 1_Y$. Por lo tanto $f \in$Iso$(\mathscr{C})$. ■

Definición 2.1.4. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que f **se levanta por la izquierda con respecto de** g [1] (o equivalentemente que g **se levanta por la derecha con respecto de** f) si para todo cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "v"'] & D,
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo $d \in \mathscr{C}(B,C)$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & D.
\end{tikzcd}$$

El cuadrado conmutativo anterior es conocido como **problema de levantamiento** [2] y d es llamado **solución** del problema.

Notación 2.1.5. Escribiremos $f \pitchfork g$ para indicar que un morfismo f se levanta por la izquierda con respecto de un morfismo g. En tal caso, diremos también que g se levanta por la derecha con respecto al morfismo f.

[1] La expresión que se usa en la literatura es "f has the left lifting property with respect to g", probablemente fue usada por primera vez por Quillen en [Qui69].

[2] Aunque parece más un problema de "llenado diagonal", elegimos esta nomenclatura porque concuerda más con la expresión "f se levanta por la izquierda con respecto de g".

Observación 2.1.6. $f \pitchfork f$ si y sólo si $f \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$.
Demostración.
($\Rightarrow$)Supongamos que $f \pitchfork f$. Entonces el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & Y, \end{tikzcd}$$

tiene una solución $d : Y \longrightarrow X$, es decir, $df = 1_X$ y $fd = 1_Y$. Por lo tanto f es un isomorfismo.
($\Leftarrow$) Supongamos que f es un isomorfismo. Consideremos el siguiente problema de levantamiento.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & D. \end{tikzcd}$$

Para $d := uf^{-1}$ tenemos que $df = uf^{-1}f = u$ y $fd = fuf^{-1} = vff^{-1} = v$. ■

Definición 2.1.7. Sean $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$ y f un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f **se levanta por la izquierda con respecto de** $\mathcal{M}$ si $\forall g \in \mathcal{M}$ se tiene que $f \pitchfork g$, lo cual denotaremos como $f \pitchfork \mathcal{M}$. Dualmente, decimos que f **se levanta por la derecha con respecto de** $\mathcal{M}$ si $\forall g \in \mathcal{M}$ se tiene que $g \pitchfork f$, esto es denotado como $\mathcal{M} \pitchfork f$.

Notación 2.1.8. Denotaremos como ${}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ a la clase de morfismos que se levantan por la izquierda con respecto de $\mathcal{M}$, es decir,

$${}^{\pitchfork}\mathcal{M} = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid f \pitchfork \mathcal{M}\}.$$

De manera similar, la clase de morfismos que se levantan por la derecha con respecto de $\mathcal{M}$ es denotada como $\mathcal{M}^{\pitchfork}$, es decir,

$$\mathcal{M}^{\pitchfork} = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid \mathcal{M} \pitchfork f\}.$$

Observación 2.1.9. Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}$ clases de morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces

$$\mathcal{E} \subseteq^{\pitchfork} \mathcal{M} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}^{\pitchfork}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{M}$. Veamos que $\forall g \in \mathcal{E}$ se cumple que $g \pitchfork f$. En efecto, sea $g \in \mathcal{M}$. Dado que $\mathcal{E} \subseteq {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$, obtenemos que $f \pitchfork g$ $\forall f \in \mathcal{E}$. Por lo tanto $g \in \mathcal{E}^{\pitchfork}$ y así $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}^{\pitchfork}$.
($\Leftarrow$) es similar ■

Escribiremos $\mathcal{E} \pitchfork \mathcal{M}$ para indicar que $\mathcal{E} \subseteq {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$, o en tal caso $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}^{\pitchfork}$.

Proposición 2.1.10. Sea $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$. Entonces $\mathrm{Iso}(\mathscr{C}) \subseteq \mathcal{M}^{\pitchfork}$ y $\mathcal{M}^{\pitchfork}$ es cerrada bajo composiciones y retractos. Análogamente, $\mathrm{Iso}(\mathscr{C}) \subseteq {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ y ${}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ es cerrada bajo composiciones y retractos.

Demostración.

(a) **Iso**$(\mathscr{C}) \subseteq {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$. Sean $f \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ y $m \in \mathcal{M}$. Observamos que nf^{-1} es una solución del siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "n"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & W \arrow[d, "m"] \\
Y \arrow[r, "\widehat{n}"'] \arrow[ur, dashed, "nf^{-1}" description] \arrow[ur, phantom, "=" near end, shift right=3] & Z,
\end{tikzcd}$$

ya que $(mn)f^{-1} = (\widehat{n}f)f^{-1} = \widehat{n}$.

(b) ${}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ **es cerrada bajo composición.** Sean $f, g \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ y $m \in \mathcal{M}$ tales que gf está definida. Demostraremos que $gf \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$. Para esto, encontraremos una solución para el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[dd, "m"] \\
Y \arrow[d, "g"'] & \\
Z \arrow[r, "\widehat{l}"'] \arrow[uur, dashed] & V.
\end{tikzcd}$$

Como $f, g \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$, existen soluciones d y δ para los siguientes problemas de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "l"] \arrow[d, "f"'] & & U \arrow[d, "m"] \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[urr, dashed, "d" description] & Z \arrow[r, "\widehat{l}"'] & V
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "m"] \\
Z \arrow[r, "\widehat{l}"'] \arrow[ur, dashed, "\delta" description] & V.
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, observe que

$$(\delta g)f = df = l,$$

lo que implica que δ es la solución del problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "gf"'] & U \arrow[d, "m"] \\
Y \arrow[r, "\widehat{l}"'] \arrow[ur, dashed, "\delta" description] & Z.
\end{tikzcd}$$

(c) ${}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ **es cerrada bajo retractos**. Sean $f \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ y $h \in$Re(f). Demostraremos que $h \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$. En efecto, sea $g \in \mathcal{M}$. Veamos que $h \pitchfork g$. Para esto, consideremos el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\widehat{l}"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & W \arrow[d, "g"] \\
V \arrow[r, "l"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & Z .
\end{tikzcd}$$

Para $h \in$Re(f) tenemos el siguiente diagrama de retracción

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\widehat{m}"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[rr, bend left, "1_U"] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[r, "\widehat{n}"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "="] & U \arrow[d, "h"] \\
V \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "1_V"'] & Y \arrow[r, "n"] & V .
\end{tikzcd}$$

Combinando los diagramas anteriores obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\widehat{m}"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[rr, bend left, "1_U"] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[r, "\widehat{n}"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & U \arrow[r, "\widehat{l}"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[d, "g"'] \\
V \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "1_V"'] & Y \arrow[r, "n"] & V \arrow[r, "l"] & Z .
\end{tikzcd}$$

Observemos que $f \pitchfork g$ por hipotesis, por lo cual existe una solución $\delta : Y \longrightarrow W$ para el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\widehat{l}\widehat{n}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & W \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "ln"'] \arrow[ur, dashed, "\delta"] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & Z ,
\end{tikzcd}$$

finalmente, definimos $d := \delta m$, por lo cual tenemos que

$$dh = (\delta m)\, h = \delta\,(mh) = \delta\,(f\widehat{m}) = (\delta f)\,\widehat{m} = \widehat{l}\,\widehat{n}\widehat{m} = \widehat{l}.$$

Más aún,

$$gd = g(\delta m) = (g\delta)m = lnm = l.$$

Lo anterior demuestra que d es una solución al primer problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widehat{l}"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & W \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "l"'] \arrow[ur, dashed, "d"] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & Z . \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $h \pitchfork g$, probándose $h \in^{\pitchfork} \mathcal{M}$.
Las demostraciones para $\mathcal{M}^{\pitchfork}$ se realizan de forma dual. ■

Definición 2.1.11. Sean $\mathscr{C}$ una categoría con coproductos fibrados, f y g morfismos en $\mathscr{C}$ como en el siguiente diagrama de coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ Y \arrow[r, "\widehat{g}"'] & Y \coprod\limits_X Z . \end{tikzcd}$$

Decimos que $\widehat{f}$ es **cambio de cobase** de f a lo largo de g. Dualmente, si f y g son morfismos de $\mathscr{C}$ como en el siguente diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} Y \prod\limits_X Z \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & X . \end{tikzcd}$$

Decimos que $\widehat{f}$ es **cambio de base** de f a lo largo de g.

Notación 2.1.12. Denotaremos a la clase de morfismos que son cambio de base de un morfismo f como $\mathrm{Ba}(f)$, es decir;

$$\mathrm{Ba}(f) := \left\{ \widehat{f} \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid \exists g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \text{ tal que } \widehat{f} \text{ es cambio de base de } f \text{ a lo largo de } g \right\}.$$

Además, la clase de morfismos que son cambio de cobase de un morfismo f será denotada como $\mathrm{Cb}(f)$, es decir,

$$\mathrm{Cb}(f) := \left\{ \widehat{f} \in \mathrm{Mor}\ (\mathscr{C}) \mid \exists g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \text{ tal que } \widehat{f} \text{ es cambio de cobase de } f \text{ a lo largo de } g \right\}.$$

Definición 2.1.13. Una clase de morfismos $\mathcal{E}$ es **cerrada bajo coproductos fibrados** (resp. **productos fibrados**) si $\forall f \in \mathcal{E}$ se tiene que $\mathrm{Cb}(f) \subseteq \mathcal{E}$ (resp. $\mathrm{Ba}(f) \subseteq \mathcal{E}$).

Proposición 2.1.14. Sean $\mathscr{C}$ una categoría con productos fibrados y coproductos fibrados; y $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de $\mathscr{C}$. Entonces ${}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ es cerrado bajo coproductos fibrados y $\mathcal{M}^{\pitchfork}$ es cerrada bajo productos fibrados.

Demostración. Veamos que ${}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ es cerrada bajo coproductos fibrados. Sean $f \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$ y $h \in \mathcal{M}$. Veamos que $\forall \widehat{f} \in \mathrm{Cb}(f)$ se tiene que $\widehat{f} \pitchfork h$. En efecto, para f tenemos el siguiente diagrama de coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "\widehat{f}"] \\
Y \arrow[r, "\widehat{g}"'] & Y \coprod_X Z .
\end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & P \arrow[d, "h"] \\
Y \coprod_X Z \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed] & Q .
\end{tikzcd}$$

Para encontrar una solución del problema de levantamiento anterior, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & P \arrow[d, "h"] \\
Y \arrow[r, "\widehat{g}"'] & Y \coprod_X Z \arrow[r, "v"'] & Q .
\end{tikzcd}$$

Note que el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "ug"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "h"] \\
Y \arrow[r, "v\widehat{g}"'] \arrow[ur, dashed, "\widehat{d}"] & Q ,
\end{tikzcd}$$

tiene solución $\widehat{d}$, ya que $f \pitchfork h$. Ahora bien, de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "\widehat{d}"'] & P, \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo d que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "\widehat{f}"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\ Y \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[drr, bend right, "\widehat{d}"'] & Y\coprod_X Z \arrow[dr, dashed, "d"] & \\ & & P. \end{tikzcd}$$

Por lo que

$$d\widehat{f} = u \quad \text{y} \quad d\widehat{g} = \widehat{d}.$$

La primer igualdad implica la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & P \\ Y\coprod_X Z \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd} .$$

Para finalizar, basta probar que $hd = v$, y de este modo, d será una solución para el primer problema de levantamiento. En efecto, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "ug"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "v\widehat{g}"'] \arrow[ur, dashed, "\widehat{d}"] & Z, \end{tikzcd}$$

se tiene que

$$h\widehat{d}f = hug,$$

y de este modo, podemos formar el siguiente diagrama de coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "\widehat{f}"] \arrow[ddr, bend left, "hu"] & \\ Y \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[drr, bend right, "h\widehat{d}"'] & Y\coprod_X Z \arrow[dr, dashed, "hd"] & \\ & & Q, \end{tikzcd}$$

del cual concluimos que hd es el único morfismo que cumple la siguientes igualdades

$$hd\widehat{g} = h\widehat{d} \quad \text{y} \quad hd\widehat{f} = hu.$$

Dado que $v\widehat{f} = hu$, por la únicidad de hd, se tiene que $v = hd$. De manera dual $\mathcal{M}^{\pitchfork}$ es cerrada bajo productos fibrados. ■

El siguiente lema es de gran relevancia porque es requerido en la demostración de algunos resultados siguientes.

Lema 2.1.15 (Argumento de retracción). Si un morfismo $f : A \longrightarrow B$ de una categoría $\mathscr{C}$ se factoriza como $f = pi$ y además $f \pitchfork p$, entonces $f \in \mathrm{Re}(i)$. Dualmente, si f se factoriza como $f = pi$ y además $i \pitchfork f$, entonces $f \in \mathrm{Re}(p)$.

Demostración. Supongamos que f se factoriza como $f = pi$ y que $f \pitchfork p$. La factorización de f implica la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "p"] \\
C \arrow[r, "1_C"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Dado que $f \pitchfork p$, existe un morfismo $d : C \longrightarrow B$, tal que $df = i$ y $pd = 1_C$. Lo anterior implica la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"'] \arrow[rr, bend left, "1_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[r, "1_A"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, "d"] \arrow[rr, bend right, "1_C"'] & B \arrow[r, "p"] & C,
\end{tikzcd}$$

probándose que $f \in \mathrm{Re}(i)$.■

Definición 2.1.16. Una **estructura de modelo**, en una categoría $\mathscr{C}$, es un triple $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ de clases de morfismos de $\mathscr{C}$, llamadas **cofibraciones**, **fibraciones** y **equivalencias débiles** respectivamente, que cumplen los siguientes axiomas:

(M.1) **Tres por dos.** Si f y g son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que gf está definida, y dos de los morfismos f, g y gf están en $\mathcal{W}$, entonces el tercero está en $\mathcal{W}$.

(M.2) **Retractos.** $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ son cerradas bajo retractos.

(M.3) **Levantamiento.** $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W})\pitchfork\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}\pitchfork(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$.

(M.4) **Factorización.** Para cualquier morfismo f de $\mathscr{C}$ existen morfismos $i\in\mathcal{C}$, $q\in\mathcal{F}$, $p\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ y $j\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ tales que f se factoriza como $f=pi$ y $f=qj$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr, "p"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & {} & D. \\ & B \arrow[ur, "q"'] \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

Cuando $f\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$, siguiendo a Quillen, diremos que f es una **cofibración trivial**. Además, si $g\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ diremos que g es una **fibración trivial** [3] .

Definición 2.1.17. Una **categoría de modelo** [4] es una categoría $\mathscr{M}$ bicompleta dotada con una estructura de modelo $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$.

Observamos que los axiomas de la definición de categoría de modelo son autoduales. Además, una categoría $\mathscr{M}$ puede tener dos estructuras de modelo diferentes. Por último, dos clases de morfismos de una estructura de modelos determina a la restante, es decir, si tenemos dos clases de morfismos, entonces la clase de morfismos restante se obtiene en función de las demás. Este hecho se formaliza con la siguiente proposición [5].

Proposición 2.1.18. Sea $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ una estructura de modelo de una categoría $\mathscr{M}$. Entonces

$$\begin{array}{ll} (a)\,{}^{\pitchfork}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})=\mathcal{C}, & (c)\quad \mathcal{C}\cap\mathcal{W}={}^{\pitchfork}\mathcal{F}, \\ (b)\quad \mathcal{F}\cap\mathcal{W}=\mathcal{C}^{\pitchfork}, & (d)\,(\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\pitchfork}=\mathcal{F}. \end{array}$$

Demostración. (a) Probaremos solamente el primer inciso, ya que los restantes se prueban de manera similar. Veamos primero que ${}^{\pitchfork}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})\subset\mathcal{C}$. Sea $f\in{}^{\pitchfork}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$. Por definición de estructura de modelos existen morfismos $i\in\mathcal{C}$ y $p\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ tales que $f=pi$. Por hipótesis tenemos que $f\pitchfork p$. Luego, por el **Argumento de retracción** concluimos que $f\in\mathrm{Re}(i)$, y usando ahora que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo retractos se concluye que $f\in\mathcal{C}$, esto demuestra que ${}^{\pitchfork}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})\subset\mathcal{C}$. La otra contención $\mathcal{C}\subset{}^{\pitchfork}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ se concluye de (M.3). ∎

[3] Los términos **fibración trivial** y **cofibración trivial** se utilizan en [Qui67], también se usan los términos **fibración acíclica** y **cofibración acíclica**, respectivamente.

[4] Esta es la definición de categoría de modelo cerrada que Quillen presenta en [Qui69] (pag. 233), con una diferencia, Quillen utiliza categorías finitamente bicompletas. En la literatura moderna, las categorías de modelo cerradas son simplemente llamadas categorías de modelo.

[5] Esta es la razón por la cual D. Quillen utilizó el término *categoría de modelo cerrada*.

Proposición 2.1.19. Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo. Entonces

(a) las clases $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ son cerradas bajo composiciones, retractos y productos fibrados,

(b) las clases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ son cerradas bajo composiciones, retractos y coproductos fibrados.

Demostración. La proposición es consecuencia de las Proposiciones 2.1.10, 2.1.14 y 2.1.18. ■

Proposición 2.1.20. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y g un morfismo de $\mathscr{M}$. Entonces

$$g\in\mathcal{W} \iff \exists h\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W} \text{ y } \exists k\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W} \text{ tales que } g=kh.$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $g\in\mathcal{W}$. Por (M.4) existen morfismos $h\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ y $k\in\mathcal{F}$ tales que $g=kh$. Luego por (M.1) se concluye que $k\in\mathcal{W}$.
($\Leftarrow$) se concluye inmediatemante de (M.1). ■

Notemos que una categoría bicompleta $\mathscr{M}$ puede tener varias estructuras de modelo. Así, para evitar confusiones, si $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ son categorías de modelo, escribiremos $(\mathcal{C}_{\mathscr{M}},\mathcal{F}_{\mathscr{M}},\mathcal{W}_{\mathscr{M}})$ y $(\mathcal{C}_{\mathscr{N}},\mathcal{F}_{\mathscr{N}},\mathcal{W}_{\mathscr{N}})$ para referirnos a la estructura de modelo de $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ respectivamente.

Ejemplos 2.1.21. Revisaremos algunas construcciones sencillas para obtener una categoría de modelo.

(a) Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo. En tal caso, la categoría dual $\mathscr{M}^*$ tiene una estructura de modelo definida como sigue

$$\mathcal{C}_{\mathscr{M}^*}:=\mathcal{F}_{\mathscr{M}}, \qquad \mathcal{F}_{\mathscr{M}^*}:=\mathcal{C}_{\mathscr{M}} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_{\mathscr{M}^*}:=\mathcal{W}_{\mathscr{M}}.$$

Además $\mathscr{M}^*$ es bicompleta ya que $\mathscr{M}$ es bicompleta. Por lo que $\mathscr{M}^*$ es una categoría de modelo.

(b) Sean $\mathscr{M}_1,\dots,\mathscr{M}_n$ categorías de modelo. La categoría $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{M}_i$ tiene una estructura de modelo $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ definida como sigue

$$\mathcal{C}:=\Big\{(f_1,\dots,f_n)\mid f_i\in\mathcal{C}_{\mathscr{M}_i}\,\forall i=1,\dots,n\Big\},\ \mathcal{F}:=\Big\{(f_1,\dots,f_n)\mid f_i\in\mathcal{F}_{\mathscr{M}_i}\,\forall i=1,\dots,n\Big\}$$
$$\mathcal{W}:=\Big\{(f_1,\dots,f_n)\mid f_i\in\mathcal{W}_{\mathscr{M}_i}\,\forall i=1,\dots,n\Big\}.$$

Por último $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{M}_i$ es bicompleta ya que $\mathscr{M}_i$ es bicompleta para toda $i=1,\dots,n$.

(c) Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y X un objeto fijo de $\mathscr{M}$. En tal caso, la categoría $(\mathscr{M} \downarrow X)$ de objetos sobre X tiene una estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$. La construcción es la siguiente; primero se define el siguiente funtor $U : (\mathscr{M} \downarrow X) \longrightarrow \mathscr{M}$ como $U(A, f, X) := A$ para todo $f \in \mathscr{M}(A, X)$ y $U(u) := u$ para todo $u \in \operatorname{Mor}(\mathscr{M} \downarrow X)$, después

$$\mathcal{C} := \{f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{M} \downarrow X) \mid Uf \in \mathcal{C}_{\mathscr{M}}\} \qquad \mathcal{F} := \{f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{M} \downarrow X) \mid Uf \in \mathcal{F}_{\mathscr{M}}\}$$

$$\mathcal{W} := \{f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{M} \downarrow X) \mid Uf \in \mathcal{W}_{\mathscr{M}}\}$$

es una estructura de modelo en $(\mathscr{M} \downarrow X)$. Observamos que la construcción anterior se puede realizar con la categoría $(X \downarrow \mathscr{M})$ de objetos bajo X.

Definición 2.1.22. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y X un objeto de $\mathscr{M}$. Decimos que X es un **objeto cofibrante** si el único morfismo $0 \longrightarrow X$ es una cofibración. Si el único morfismo $X \longrightarrow 1$ es una fibración, diremos que X es un **objeto fibrante**. Diremos que X es un **objeto trivial** si el único morfismo $0 \longrightarrow X$ es una equivalencia débil.

Recordamos que $\mathscr{M}$ es bicompleta, por lo que el objeto inicial 0 y final 1 de $\mathscr{M}$ existen.
Finalizaremos esta sección, introduciendo la siguiente notación.

Notación 2.1.23. Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo. Consideremos la estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ de $\mathscr{M}$; la clase de objetos fibrantes será denotada como $\mathcal{F}^{\bullet}$, la clase de objetos cofibrantes será denotada como $\mathcal{C}^{\bullet}$ y $\mathcal{W}^{\bullet}$ denotará la clase de objetos triviales.

2.2. Sistemas de factorización débiles

En esta sección enunciaremos la definición de un *sistema de factorización débil* en una categoría. Este concepto es utilizado para refinar la definición de categoría de modelo que presentamos en la sección anterior. La bibliografía para esta sección es [RiLF] y [Ri14].

Definición 2.2.1. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ clases de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que el par ordenado $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es un **sistema de factorización débil** en $\mathscr{C}$ si cumple las siguientes condiciones:

(a) **Axioma de levantamiento.** $\mathcal{L} = {}^{\pitchfork}\mathcal{R}$ y $\mathcal{L}^{\pitchfork} = \mathcal{R}$.

(b) **Axioma de factorización.** $\forall f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$ existen morfismos $l \in \mathcal{L}$ y $r \in \mathcal{R}$ tales que $f = rl$.

Notamos que cada clase de un sistema de factorización débil determina a la otra.
Las Proposiciones 2.1.18 y 2.1.10 permiten reformular la definición de una estructura de modelo como sigue.

Definición 2.2.2. Una **estructura de modelo** en una categoría $\mathscr{C}$ es un triple $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ de clases de morfismos de $\mathscr{C}$, llamadas **cofibraciones**, **fibraciones** y **equivalencias débiles**, respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades:

(M.1) **Tres por dos.** Si f y g son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que gf está definida, y si dos de los morfismos f, g y gf están en $\mathcal{W}$, entonces el tercero está en $\mathcal{W}$.

(M.2) **Retractos.** La clase $\mathcal{W}$ es cerrada bajo retractos.

(M.5) **Factorización.** $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ y $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ son sistemas de factorización débil en $\mathscr{C}$.

Proposición 2.2.3. Sea $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces $\mathcal{L}\cap\mathcal{R}=\mathrm{Iso}\,(\mathscr{C})$.

Demostración. Sea $f\in\mathcal{L}\cap\mathcal{R}$. Luego $f\in{}^{\pitchfork}\mathcal{R}\cap\mathcal{R}$, y así $f\pitchfork f$. Por la Observación 2.1.6 se tiene que $f\in\mathrm{Iso}\,(\mathscr{C})$, lo cual demuestra que $\mathcal{L}\cap\mathcal{R}\subset\mathrm{Iso}\,(\mathscr{C})$. Por otro lado, sean $f\in\mathrm{Iso}\,(\mathscr{C})$ y $g\in\mathcal{R}$. Consideremos el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed] & D. \end{tikzcd}$$

Definiendo $d:=uf^{-1}$, se tiene que $df=uff^{-1}=u$ y además $gd=guf^{-1}=vff^{-1}=v$. Lo anterior demuestra que $f\pitchfork g$, y así $f\in{}^{\pitchfork}\mathcal{R}$. De forma similar se prueba que $f\in\mathcal{L}^{\pitchfork}$, por lo tanto $\mathrm{Iso}\,(\mathscr{C})\subset\mathcal{L}\cap\mathcal{R}$. ∎

La siguiente observación es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Observación 2.2.4. Sea $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ una estructura de modelo de una categoría $\mathscr{C}$. Entonces

$$\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}=\mathrm{Iso}\,(\mathscr{C}).$$

Expondremos un resultado que nos brinda condiciones necesarias para obtener un sistema de factorización débil. Antes de esto introduciremos algunas definiciones.

Definición 2.2.5. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $u:X\longrightarrow Z$ y $v:Y\longrightarrow Z$ morfismos de $\mathscr{C}$. Decimos que u es un **retracto de dominio** de v si existen morfismos $f\in\mathscr{C}\,(X,Y)$ y $g\in\mathscr{C}\,(Y,X)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] \arrow[u, phantom, "="] & X \arrow[dl, "u"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2.6. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $u : Z \longrightarrow X$ y $v : Z \longrightarrow Y$ morfismos de $\mathscr{C}$. Decimos que u es un **retracto de codominio** de v si existen morfismos $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ y $g \in \mathscr{C}(Y,X)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "u"] & \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

Notación 2.2.7. La clase de morfismos que son retracto de dominio de v será denotada como $\mathrm{Dr}(v)$, es decir

$$\mathrm{Dr}(v) := \{u \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid u \text{ es retracto de dominio de } v\}.$$

Además, escribiremos $\mathrm{Cr}(v)$ para denotar a la clase de morfismos que son retracto de codominio de v, lo que significa que

$$\mathrm{Cr}(v) := \{u \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid u \text{ es retracto de codominio de } v\}.$$

Definición 2.2.8. Sea $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que $\mathcal{M}$ es **cerrada bajo retractos de dominio** (resp. **de codominio**) si $\forall f \in \mathcal{M}$ se tiene que $\mathrm{Dr}(f) \subseteq \mathcal{M}$ (resp. $\mathrm{Cr}(f) \subseteq \mathcal{M}$).

Observación 2.2.9. Sea v un morfismo de una categoría $\mathscr{C}$. Entonces

$$\mathrm{Dr}(v) \subseteq \mathrm{Re}(v) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Cr}(v) \subseteq \mathrm{Re}(v).$$

Demostración. Para $u \in \mathrm{Dr}(v)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & X \arrow[dl, "u"] \\
& Z . &
\end{tikzcd}$$

Reorganizando el diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "u"'] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "u"] \\
Z \arrow[r, "1_Z"] \arrow[rr, bend right, "1_x"'] & Z \arrow[r, "1_Z"] & Z\,.
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior nos dice que $u \in \operatorname{Re}(v)$. La otra contensión se prueba de forma similar. ■

Proposición 2.2.10. Sea $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ un par de clases de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$, que cumple las siguientes dos siguientes condiciones:

(a) $\forall f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$ existen morfismos $l \in \mathcal{L}$ y $r \in \mathcal{R}$ tal que $f = rl$,

(b) $\mathcal{L} \pitchfork \mathcal{R}$.

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

(c) $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ son cerrados bajo retractos,

(d) Si s es mono-escindible y $sf \in \mathcal{L}$ entonces $f \in \mathcal{L}$; y si t es epi-escindible y $gt \in \mathcal{R}$ entonces $g \in \mathcal{R}$,

(e) $\mathcal{L}$ es cerrada bajo retractos de codominio y $\mathcal{R}$ es cerrada bajo retractos de dominio,

(f) $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{C}$.

Demostración.
$[(c) \Rightarrow (d)]$ Sean $f : A \longrightarrow B$, $s : B \longrightarrow C$ y $t : C \longrightarrow B$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $ts = 1_B$ y $sf \in \mathcal{L}$. Formemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "sf"] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "s"'] & C \arrow[r, "t"'] & B\,.
\end{tikzcd}$$

Dicho diagrama muestra que $f \in \operatorname{Re}(sf)$. Por la proposición 2.1.10 se concluye que $f \in \mathcal{L}$. La otra afirmación del inciso (d) se prueba de forma similar.
$[(d) \Rightarrow (e)]$ Sean $u : Z \longrightarrow X$ y $v : Z \longrightarrow Y$ morfismos de $\mathscr{C}$ tales que $u \in \operatorname{Dr}(v)$ y $v \in \mathcal{L}$. Veamos que $u \in \mathcal{L}$. En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "u"] & \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd} .$$

Notemos que f es mono-escindible y que $f \circ u = v \in \mathcal{L}$. Luego, por hipótesis concluimos que $u \in \mathcal{L}$. De forma dual se prueba que $\mathcal{R}$ es cerrada bajo retractos de dominio.

$[(e) \Rightarrow (f)]$ Veamos que $\mathcal{R} = \mathcal{L}^{\pitchfork}$. El inciso (b) es equivalente a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^{\pitchfork}$. Sea $h \in \mathcal{L}^{\pitchfork}$. Por el inciso (a), existen morfismos $f \in \mathcal{L}$ y $g \in \mathcal{R}$ tales que $h = gf$. Por lo tanto, el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "h"] \\
W \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & Y
\end{tikzcd} ,$$

tiene como solución $d : Z \longrightarrow X$. Reorganizando el diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, "h"'] & W \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[dl, "h"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

lo que implica que $h \in$Dr(g). Por el inciso (e), concluimos que $h \in \mathcal{R}$. Esto demuestra que $L^{\pitchfork} \subseteq \mathcal{R}$. De forma dual se tiene que $\mathcal{L} = {}^{\pitchfork}\mathcal{R}$.

$[(f) \Rightarrow (c)]$ Se sigue de la Proposición 2.1.10. ■

Ejemplos 2.2.11. Mencionaremos dos ejemplos de sistemas de factorizacíon débiles presentados en [Ri14].

(a) Si $\mathscr{C}$ una categoría entonces $(\text{Iso}(\mathscr{C}), \text{Mor}(\mathscr{C}))$ y $(\text{Mor}(\mathscr{C}), \text{Iso}(\mathscr{C}))$ son sistemas de factorización débiles en $\mathscr{C}$.

(b) La categoría **Set** tiene al menos seis sistemas de factorización débiles. En efecto, consideremos las siguientes clases de morfismos: $\mathcal{A} := \text{Mor}(\textbf{Set})$, $\mathcal{E} := \text{Epi}(\textbf{Set})$, $\mathcal{M} := \text{Mon}(\textbf{Set})$, $\mathcal{I} := \text{Iso}(\textbf{Set})$ y $\mathcal{N} := \{f \in \text{Mor}(\textbf{Set}) \mid \text{Dom}(f) = \phi \text{ y } \text{Codom}(f) \neq \phi\}$. Entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$, $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$, $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{N}, \mathcal{I} \cup \mathcal{N})$ y $(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}, \mathcal{E} \cup \mathcal{N})$ son sistemas de factorización débiles en **Set**.

2.3. Adjunciones

Proposición 2.3.1. Sean $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor adjunto derecho de G. Si $g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{B})$ y $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ entonces

$$Gg \pitchfork f \quad \Longleftrightarrow \quad g \pitchfork Ff.$$

Demostración.
$(\Rightarrow)$ Sean $g \in \mathscr{B}(A,B)$ y $f \in \mathscr{A}(X,Y)$ tales que $Gg \pitchfork f$. Veamos que $g \pitchfork Ff$. Para esto, probaremos que el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\hat{u}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & FX \arrow[d, "Ff"] \\ B \arrow[r, "\hat{v}"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & FY , \end{tikzcd}$$

tiene una solución. Por la adjunción, existe un isomorfismo natural

$$\Theta : \mathscr{A}(G-,-) \Longrightarrow \mathscr{B}(-,F-).$$

Por lo que existen morfismos $u \in \mathscr{A}(GA,X)$ y $v \in \mathscr{A}(GB,Y)$ tales que

$$\Theta_{A,X}(u) = \hat{u} \quad \text{y} \quad \Theta_{B,Y}(v) = \hat{v}.$$

La naturalidad de Θ, hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Gg"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ GB \arrow[r, "v"'] & Y . \end{tikzcd}$$

Dado que $Gg \pitchfork f$, por hipotesis, existe $d : GB \longrightarrow X$ tal que $d \circ Gf = u$ y $f \circ d = v$. Por lo tanto, $\Theta_{B,X}(d) := \hat{d} : B \longrightarrow FX$ es una solución al primer problema de levantamiento.
$(\Leftarrow)$ se demuestra de forma dual. ■

Lema 2.3.2. Sean $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor, $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor adjunto derecho de G, $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ un sistema de factorización débil en $\mathscr{B}$ y $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en $\mathscr{A}$. Entonces

$$G(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L} \quad \Longleftrightarrow \quad F(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}.$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que $G(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$. Veamos que $F(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}$. Sea $f \in \mathcal{R}$. Observamos que $G(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L} = {}^{\pitchfork}\mathcal{R}$ implica que $Gg \pitchfork f$ para todo $g \in \mathcal{A}$. Por la proposición 2.3.1 tenemos que $g \pitchfork Ff$. Entonces $Ff \in \mathcal{A}^{\pitchfork} = \mathcal{B}$ y por lo tanto $F(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}$.
($\Leftarrow$) se demuestra de forma similar. ∎

Definición 2.3.3. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ categorías de modelo y $T : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{N}$ un funtor. Decimos que

(a) T **preserva fibraciones** (resp. **cofibraciones**) si

$$T(\mathcal{F}_{\mathscr{M}}) \subseteq \mathcal{F}_{\mathscr{N}} \text{ (resp. } T(\mathcal{C}_{\mathscr{M}}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathscr{N}} \text{),}$$

(b) T **preserva fibraciones triviales** (resp. **cofibraciones triviales**) si

$$T(\mathcal{F}_{\mathscr{M}} \cap \mathcal{W}_{\mathscr{M}}) \subseteq \mathcal{F}_{\mathscr{N}} \cap \mathcal{W}_{\mathscr{N}} \text{ (resp. } T(\mathcal{C}_{\mathscr{M}} \cap \mathcal{W}_{\mathscr{M}}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathscr{N}} \cap \mathcal{W}_{\mathscr{N}} \text{).}$$

Proposición 2.3.4. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ categorías de modelo, $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ un funtor y $G : \mathscr{N} \to \mathscr{M}$ un funtor adjunto izquierdo de F. Entonces

(a) G preserva cofibraciones si y sólo si F preserva fibraciones triviales;

(b) G preserva cofibraciones triviales si y sólo si F preserva fibraciones.

Demostración. La proposición se concluye del Lema 2.3.2. ∎

2.4. Simplificación de la definición de categoría de modelo

En esta sección enunciaremos y probaremos un resultado conocido como el *Lema de Tierney* [6] . Dicho lema reduce la definición de estructura de modelo a dos axiomas. La referencia para esta sección es [JT07].

Lema 2.4.1. Sean $\mathscr{C}$ una categoría bicompleta y $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ un triple de clases de morfismos en $\mathscr{C}$ que cumplen las siguientes condiciones:

(N.1) Si f y g son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que gf está definida, y dos de los morfismos f, g y gf están en $\mathcal{W}$, entonces el tercero está en $\mathcal{W}$;

[6] LLamado así por el matemático estadounidense Myles Tierney (1937-)

(N.2) $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ y $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ son sistemas de factorización débiles en $\mathscr{C}$.

Entonces $\mathcal{W}$ es cerrada bajo retractos.

Demostración. Antes de comenzar la prueba haremos la siguientes observaciones.

(a) la clase $\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ es cerrada bajo retractos (Proposición 2.1.10),

(b) la clase ${}^{\pitchfork}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ es cerrada bajo coproductos fibrados (Proposición 2.1.14).

Sean $g\in\mathcal{W}$ y $f\in\mathrm{Re}(g)$. Veamos que $f\in\mathcal{W}$. En efecto, para $f\in\mathrm{Re}(g)$ tenemos el siguiente diagrama de retración

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"'] \arrow[rr, bend left, "1_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "1_B"'] & D \arrow[r, "v"] & B.
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1

Caso 1. Supongamos que $f\in\mathcal{F}$. Como $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{C}$, existen morfismos $j\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ y $q\in\mathcal{F}$ tales que

$$g=qj. \tag{2.1}$$

Observamos que $g,j\in\mathcal{W}$. Luego, por (N.1) se tiene que $q\in\mathcal{W}$, y entonces

$$q\in\mathcal{W}\cap\mathcal{F}. \tag{2.2}$$

Sustituyendo $g=qj$ en el cuadrado derecho del Diagrama 1, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "vq"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2

El Diagrama 2 tiene una solución $d:Z\longrightarrow A$ ya que $j\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ y $f\in\mathcal{F}$. De este modo, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \\ Z \arrow[ur, dashed, "d"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "d"] \arrow[r, dashed, "vq"'] \arrow[ur, phantom, "="] & Z. \end{tikzcd}$$

Diagrama 3 **Diagrama 4**

Ahora bien, si unimos el cuadrado izquierdo del Diagrama 1 y el Diagrama 4 obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "js"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[r, "d"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "u"'] & D \arrow[r, "v"'] & B. \end{tikzcd}$$

Diagrama 5

Observamos que

$$djs = ts = 1_A.$$

La igualdad anterior, demuestra que el Diagrama 5 es un diagrama de retracción, probándose que $f \in \mathrm{Re}(q)$. Recordando que $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ es cerrada bajo retractos y que $q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, concluimos que $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Por lo tanto $f \in \mathcal{W}$. ■

Caso general. Observamos que existen morfismos $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ y $p \in \mathcal{F}$ tales que

$$f = pi, \tag{2.3}$$

ya que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{C}$. Tomando el coproducto fibrado de i y de s, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "i_2"] \\ E \arrow[r, "i_1"'] & E \coprod_A X. \end{tikzcd}$$

Diagrama 6

La observación (b), nos dice que

$$i_2 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}. \tag{2.4}$$

Si consideramos la siguiente igualdad

$$1_E i = i 1_A = its,$$

podemos escribir el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "it"] \\ E \arrow[r, "1_E"'] & E . \end{tikzcd}$$

Diagrama 7

Luego, por la propiedad universal del coproducto fibrado, existe un único morfismo

$$r : E\coprod_A X \longrightarrow E$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"'] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "it"] & \\ E \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, bend right, "1_E"'] & E\coprod_A X \arrow[dr, dashed, "r"] & \\ & & E . \end{tikzcd}$$

Diagrama 8

Del diagrama anterior, obtenemos las siguientes igualdades

$$ri_2 = it \qquad \text{y} \qquad ri_1 = 1_E. \tag{2.5}$$

Sustituyendo $f = pi$ en el cuadro izquierdo del Diagrama 1, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "up"'] & D . \end{tikzcd}$$

Diagrama 9

Luego, por la propiedad universal del coproducto fibrado existe un único morfismo $k : E\coprod_A X \longrightarrow D$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"'] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ E \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, bend right, "up"'] & E\coprod_A X \arrow[dr, dashed, "k"] & \\ & & Y . \end{tikzcd}$$

Diagrama 10

De dicho diagrama, obtenemos las siguientes igualdades

$$ki_1 = up \qquad \text{y} \qquad ki_2 = g\,. \tag{2.6}$$

Como $i_2 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ y $g \in \mathcal{W}$ concluimos, por (N.1) que

$$k \in \mathcal{W}\,. \tag{2.7}$$

Por otro lado, componiendo las igualdades de (2.6) con v, obtenemos las siguientes igualdades

$$vki_1 = vup \qquad \text{y} \qquad vki_2 = vg\,. \tag{2.8}$$

De este modo, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"'] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "vg"] & \\
E \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, bend right, "vup"'] & E\coprod_A X \arrow[dr, dashed, "vk"] & \\
 & & B\,.
\end{tikzcd}$$

Diagrama 11

De forma similar, componiendo las igualdades de (2.5) con p, obtenemos las siguientes igualdades

$$pri_2 = pit \qquad \text{y} \qquad pri_1 = p\,. \tag{2.9}$$

Estas igualdades implican la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"'] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "pit"] & \\
E \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, bend right, "p"'] & E\coprod_A X \arrow[dr, dashed, "pr"] & \\
 & & B\,.
\end{tikzcd}$$

Diagrama 12

Los Diagramas 11 y 12 muestran que las composiciones pr y vk cumplen la propiedad universal del coproducto fibrado, por lo tanto $pr = vk$. Escribiendo esta igualdad con un cuadro conmutativo, tenemos

$$\begin{tikzcd}
E\coprod_A X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d, "p"] \\
D \arrow[r, "v"'] & B\,.
\end{tikzcd}$$

Diagrama 13

Si escribimos la primer igualdad de (2.6) como un cuadrado conmutativo, obtenemos

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E\coprod_A X \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "u"'] & D . \end{tikzcd}$$

Diagrama 14

Juntando los Diagramas 13 y 14, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E\coprod_A X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d, "P"] \\ B \arrow[r, "u"'] & D \arrow[r, "v"'] & B , \end{tikzcd}$$

Diagrama 15

el cual es un diagrama de retracción ya que $i_1 r = 1_E$. Por lo tanto $p \in$Re(k). Recordando que $k \in \mathcal{W}$ y que $p \in \mathcal{F}$, por el caso 1, concluimos que $p \in \mathcal{W}$. Finalmente, tenemos que $f = pi$ y que $p, i \in \mathcal{W}$. Luego por (N.1) concluimos que $f \in \mathcal{W}$. ■

Terminaremos esta sección enunciando la definición simplificada de una categoría de modelo. Para lograr esto, necesitamos simplificar la definición de estructura de modelo en una categoría $\mathscr{C}$.

Definición 2.4.2. Una **estructura de modelo simplificada**, en una categoría $\mathscr{C}$, es un triple $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ de clases de morfismos de $\mathscr{C}$, llamadas **cofibraciones**, **fibraciones** y **equivalencias débiles**, respectivamente, que satisfacen los siguientes axiomas:

(A.1) **Tres por dos.** Si f y g son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que gf está definida, y dos de los morfismos f, g y gf están en $\mathcal{W}$, entonces el tercero está en $\mathcal{W}$.

(A.2) **Factorización.** $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ son sistemas de factorización débil en $\mathscr{C}$.

De este modo, la definición simplificada de categoría de modelo es la siguiente.

Definición 2.4.3. Una **categoría de modelo simplificada** es una categoría $\mathscr{M}$ bicompleta dotada con una estructura de modelo simplificada $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$.

Observación 2.4.4. Toda estructura de modelo simplificada es una estructura de modelo. En efecto, el Lema 2.4.1 establece que las Definiciones 2.2.2 y 2.4.2 son equivalentes. De esta forma, a partir de aquí, simplemente nos vamos a referir a una estructura de modelo simplificada, como una estructura de modelo.

2.5. Sistemas de factorización débil funtoriales

Para realizar algunas construcciones con categorías de modelo, se supone que un sistema de factorización débil sea *funtorial*. En esta sección, expondremos un resultado que nos brinda condiciones necesarias para que un sistema de factorizacíon sea *funtorial*. La referencia para esta sección es [RT02].

Definición 2.5.1. Sean $\vec{\mathscr{C}}$ la categoría de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$ y $L,R:\vec{\mathscr{C}}\longrightarrow\vec{\mathscr{C}}$ funtores. Diremos que el par ordenado (L,R) es una **factorización funtorial** en $\mathscr{C}$ si

(*a*) se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}\circ L=\mathrm{dom}_{\mathscr{C}},\qquad \mathrm{cod}_{\mathscr{C}}\circ L=\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}\circ R\quad \text{y}\quad \mathrm{cod}_{\mathscr{C}}\circ R=\mathrm{cod}_{\mathscr{C}}. \tag{2.10}$$

(*b*) $\forall f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ se tiene que $f=R(f)L(f)$.

Definición 2.5.2. Un **sistema de factorización débil** $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ en una categoría $\mathscr{C}$ se dice **funtorial** si existe una factorización funtorial (L,R) en $\mathscr{C}$ tal que $L(f)\in\mathcal{L}$ y $R(f)\in\mathcal{R}$ para todo $f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$.

Definición 2.5.3. Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo. Si los sistemas de factorización débiles $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ y $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ que determinan la estructura de modelo de $\mathscr{M}$ son funtoriales, diremos que $\mathscr{M}$ tiene una **estructura de modelo funtorial**.

De hecho, en varios textos, por ejemplo [Ho99] y [Hi03], se supone que toda estructura de modelo es funtorial.

Definición 2.5.4. Sean $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en una categoría $\mathscr{C}$, $F:\vec{\mathscr{C}}\to\mathscr{C}$ un funtor, $\lambda:\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}\Longrightarrow F$ y $\rho:F\Longrightarrow\mathrm{cod}_{\mathscr{C}}$ transformaciones naturales. Decimos que el triple (F,λ,ρ) es una **realización funtorial** de $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ si

(*a*) $\delta_{\mathscr{C}}=\rho\circ\lambda$, es decir $(\delta_{\mathscr{C}})_f=f=\rho_f\lambda_f$ para todo $f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$;

(*b*) $\forall f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ se tiene que $\lambda_f\in\mathcal{L}$ y $\rho_f\in\mathcal{R}$.

Para simplificar la notación, a partir de aquí, escribiremos dom:$=\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}$, cod:$=\mathrm{cod}_{\mathscr{C}}$ y $\delta_{\mathscr{C}}:=\delta$.

Observación 2.5.5. Sean $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en una categoría $\mathscr{C}$ y (F,λ,ρ) una realización funtorial de $(\mathcal{L},\mathcal{R})$.

(a) $\forall f \in \mathcal{L}$ y $\forall g \in \mathcal{R}$ se cumple que $f \pitchfork \rho_f$ y $\lambda_g \pitchfork g$.
Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}$. Por el inciso (a) de la definición anterior se tiene que $f = \rho_f \lambda_f$. Además $\rho_f \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^{\pitchfork}$, y así $f \pitchfork \rho_f$. De forma similar se demuestra que $\lambda_g \pitchfork g$. ∎

(b) Sean f, g, u y v morfismos de $\mathscr{C}$ como en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y . \end{tikzcd}$$

La naturalidad de λ y ρ, y la Definición 2.5.4(a) implican la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom} f \arrow[r, "\lambda_f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "\mathrm{dom}(u,v)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Ff \arrow[r, "\rho_f"'] \arrow[d, "F(u,v)"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{cod} f \arrow[d, "\mathrm{cod}(u,v)"] \\ \mathrm{dom} g \arrow[r, "\lambda_g"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Fg \arrow[r, "\rho_g"] & \mathrm{cod} g . \end{tikzcd}$$

Evaluando los funtores correspondientes, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Ff \arrow[r, "\rho_f"'] \arrow[d, "F(u,v)"] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "\lambda_g"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Fg \arrow[r, "\rho_g"] & Y . \end{tikzcd}$$

El diagrama anterior sugiere que la realización funtorial (F, λ, ρ) de un sistema de factorización débil $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ determina las clases de morfismos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$. De hecho, esto sucede, antes de demostrarlo, revisemos la siguiente observación.

(c) Para $f \in \mathcal{L}$ el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "f"'] & Ff \arrow[d, "\rho_f"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] \arrow[ur, dashed, "s"] & B, \end{tikzcd}$$

tiene una solución $s : B \longrightarrow Ff$. Esto sucede por el inciso (a) de esta observación. Además, tenemos la siguiente igualdad $\rho_f s = 1_B$, lo que implica que s es mono-escindible. De forma dual, para $g \in \mathcal{R}$ el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "\lambda_g"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Fg \arrow[r, "\rho_g"'] \arrow[ur, dashed, "t"] & Y, \end{tikzcd}$$

tiene una solución $t : Fg \longrightarrow X$, esto sucede por el inciso (a) de esta observación. Además, tenemos la siguiente igualdad $t\lambda_g = 1_X$, lo que implica que t es epi-escindible .

La observación 2.5.5(c) sugiere la siguiente definición.

Definición 2.5.6. Sean $F : \vec{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor, $\lambda : \mathrm{dom} \Longrightarrow F$ y $\rho : F \Longrightarrow \mathrm{cod}$ transformaciones naturales tales que $\delta = \rho \circ \lambda$. Definimos las siguientes clases de funciones

$$\mathcal{L}_F := \left\{ f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid \exists s \in \mathscr{C}(\mathrm{cod} f, Ff) \text{ tal que } \lambda_f = sf \text{ y } \rho_f s = 1_{\mathrm{cod} f} \right\} \text{ y}$$

$$\mathcal{R}_F := \left\{ g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid \exists t \in \mathscr{C}(Fg, \mathrm{dom} g) \text{ tal que } \rho_g = gt \text{ y } t\lambda_g = 1_{\mathrm{dom} g} \right\}.$$

Observamos que el funtor F y las transformaciones naturales λ y ρ, de la definición anterior, **no necesariamente** son parte de una realización funtorial de un sistema de factorización débil $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$.

Proposición 2.5.7. Sean $\mathcal{L}_F$ y $\mathcal{R}_F$ clases de morfismos como en la Definición 2.5.6. Entonces

(a) $\mathcal{L}_F \pitchfork \mathcal{R}_F$,

(b) $\mathcal{L}_F$ y $\mathcal{R}_F$ son cerradas bajo retractos.

Demostración.
(a) Sean $f \in \mathcal{L}_F$ y $g \in \mathcal{R}_F$. Veamos que el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "=", pos=0.25] & X \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[ur, phantom, "=", pos=0.75] & Y
\end{tikzcd}$$

tiene una solución. En efecto, ya que $f \in \mathcal{L}_F$ y $g \in \mathcal{R}_F$, existen morfismos $s \in \mathscr{C}(\mathrm{cod}f, Ff)$ y $t \in \mathscr{C}(Fg, \mathrm{dom}g)$ tales que

$$\lambda_f = sf, \qquad \rho_f s = 1_{\mathrm{cod}f}, \qquad \rho_g = gt \quad \text{y} \quad t\lambda_g = 1_{\mathrm{dom}g}.$$

Podemos visualizar la información que tenemos para encontrar una solución del problema de levantamiento con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\lambda_f"'] \arrow[dd, "f"'] & X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "\lambda_g"] \arrow[d, phantom, "="] & & X \arrow[dd, "g"] \\
\arrow[r, phantom, "="] & Ff \arrow[r, "F(u,v)"'] \arrow[dr, "\rho_f"] \arrow[d, phantom, "="] & Fg \arrow[ur, "t"'] \arrow[dr, "\rho_g"] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[d, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & \\
B \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "1_B"'] & & B \arrow[r, "v"'] & Y\,.
\end{tikzcd}$$

En efecto, definiendo $d := tF(u,v)s$ obtenemos una solución para dicho problema de levantamiento, por lo tanto $\mathcal{L}_F \pitchfork \mathcal{R}_F$.
(b) Sean $f \in \mathcal{L}_F$ y $h \in \mathrm{Re}(f)$. Luego, tomemos el siguiente diagrama de retracción

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "1_A"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "="] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend right, "1_B"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "="] & Y \arrow[r, "q"] & B\,.
\end{tikzcd}$$

Factorizando f y h, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\lambda_h"'] \arrow[dd, bend right=60, "h"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\lambda_f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "\lambda_h"] \arrow[dd, bend left=60, "h"] \\
Fh \arrow[r, "F(u,v)"'] \arrow[d, "\rho_h"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Ff \arrow[r, "F(p,q)"'] \arrow[d, "\rho_f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Fh \arrow[d, "\rho_h"] \\
B \arrow[r, "v"'] & Y \arrow[r, "q"'] & B .
\end{tikzcd}$$

Ya que $f \in \mathcal{L}_F$, existe $s \in \mathscr{C}(Y, Ff)$ tal que

$$\rho_f s = 1_Y \qquad \text{y} \qquad \lambda_f = sf.$$

Luego, definiendo $\widehat{s} := F(p,q) \circ s \circ v$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{s} \circ h &= F(p,q) \circ s \circ v \circ h \\
&= F(p,q) \circ s \circ v \circ \rho_h \circ \lambda_h \\
&= F(p,q) \circ s \circ \rho_f \circ F(u,v) \circ \lambda_h \\
&= F(p,q) \circ s \circ \rho_f \circ \lambda_f \circ u \\
&= F(p,q) \circ s \circ f \circ u \\
&= F(p,q) \circ \lambda_f \circ u \\
&= \lambda_h \circ p \circ u = \lambda_h .
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\rho_h \circ \widehat{s} &= \rho_h \circ F(p,q) \circ s \circ v \\
&= q \circ \rho_f \circ s \circ v \\
&= q \circ 1_Y \circ v = 1_B.
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores prueban que $h \in \mathcal{L}_F$. ∎

Ahora, veamos que una realización funtorial (F, λ, ρ) de un sistema de factorización débil $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ determina a las clases $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$.

Proposición 2.5.8. Sea (F, λ, ρ) una realización funtorial de un sistema de factorización débil $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F$ y $\mathcal{R} = \mathcal{R}_F$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F$. En efecto, para $f \in \mathcal{L}_F$ existe un morfismo $s \in \mathscr{C}(\mathrm{cod} f, Ff)$ tal que

$$\lambda_f = sf \quad \text{y} \quad \rho_f s = 1_{\mathrm{cod} f}.$$

Notamos que $\lambda_f \in \mathcal{L}$ y que s es mono-escindible. Por la Proposición 2.2.10 concluimos que $f \in \mathcal{L}$, lo cual demuestra que $\mathcal{L}_F \subset \mathcal{L}$. Por otro lado, para $f \in \mathcal{L}$ tenemos que $f = \rho_f \lambda_f$. Además, por la Observación 2.5.5(a), se tiene que $f \pitchfork \rho_f$, por lo cual, el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "=", near start] & Ff \arrow[d, "\rho_f"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[ur, phantom, "=", near end, shift right=2ex] & B, \end{tikzcd}$$

tiene una solución $s : B \longrightarrow Ff$, es decir,

$$sf = \lambda_f \quad \text{y} \quad s\rho_f = 1_B.$$

Lo anterior demuestra que $f \in \mathcal{L}_F$, y por lo tanto $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_F$. La igualdad $\mathcal{R} = \mathcal{R}_F$ se prueba de forma dual. ■

Teorema 2.5.9. Sean $F : \vec{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor, $\lambda : \mathrm{dom} \Longrightarrow F$ y $\rho : F \Longrightarrow \mathrm{cod}$ transformaciones naturales tales que

(a) $\delta = \rho \circ \lambda$ y

(b) $\rho_f \in \mathcal{R}_F$ y $\lambda_f \in \mathcal{L}_F$ $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$.

Entonces $(\mathcal{L}_F, \mathcal{R}_F)$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{C}$. Más aún, el triple (F, λ, ρ) es una realización funtorial de $(\mathcal{L}_F, \mathcal{R}_F)$.
Demostración. Veamos que el par $(\mathcal{L}_F, \mathcal{R}_F)$ cumple las condiciones de los incisos (a), (b) y (c) de la Proposición 2.2.10. En efecto, el inciso (a) se cumple por hipótesis, y los incisos (b) y (c) se cumplen por la Proposición 2.5.7. Por lo tanto $(\mathcal{L}_F, \mathcal{R}_F)$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{C}$. ■

Terminaremos esta sección enunciando un teorema que nos dice precisamente cuando un sistema de factorización débil es funtorial.

Teorema 2.5.10. Sea $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es funtorial si y sólo si $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ tiene una realización funtorial (F, λ, ρ).
Demostración. Ver [RT02].

2.6. Homotopía

En esta sección estudiaremos *la teoría de homotopía* desarrollada en una categoría de modelo. Después estudiaremos y analizaremos las propiedades de *la categoría de homotopía* de una categoría de modelo. Las referencias para esta sección son [Hi03] y [Ho99].

Notación 2.6.1. Sean A_1 y A_2 objetos de una categoría de modelo $\mathscr{M}$ y $\{f_i : A_k \longrightarrow B\}_{k=1,2}$ una familia de morfismos de $\mathscr{M}$. La propiedad universal del coproducto de $\{A_k\}_{k=1,2}$ induce un morfismo $\eta : A_1 \coprod A_2 \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "=", near start] & A_1 \coprod A_2 \arrow[d, "\eta"] & A_2 \arrow[l, "\mathrm{in}_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \arrow[dl, phantom, "=", near start] \\ & B . & \end{tikzcd}$$

El morfismo $\eta : A_1 \coprod A_2 \longrightarrow B$ es denotado como $\eta := [f_1, f_2]$.
Dualmente, si $\{g_k : B \longrightarrow A_i\}_{K=1,2}$ es una familia de morfismos de $\mathscr{M}$. La propiedad universal del producto de $\{A_k\}_{k=1,2}$ induce un morfismo $\delta : A_1 \prod A_2 \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 & A_1 \prod A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\ & B . \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[ul, phantom, "=", near end] \arrow[ur, phantom, "=", near end] & \end{tikzcd}$$

Finalmente, el morfismo $\delta : B \longrightarrow A_1 \prod A_2$ es denotado como $\delta := (f_1, f_2)$.

Definición 2.6.2. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo, X y Y objetos de $\mathscr{M}$. Un **objeto cilindro** de X es un objeto $X \wedge I$ [7] de $\mathscr{M}$ y una factorización

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "{[1_X, 1_X]}"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "="] & X \\ & X \wedge I \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

tal que i es una cofibración y p es una fibración trivial. Un **objeto camino** de Y es un objeto Y^I de $\mathscr{M}$ y una factorización

[7] D. Quillen en [Qui67] denota a un objeto cilindro como $X \times I$ porque en **Top** los cilindros usuales son un producto de la forma $X \times I$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "(1_Y{,}1_Y)"] \arrow[dr, "s"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y\prod Y \\
& Y^I \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que s es una cofibración trivial y q es una fibración.

Notación 2.6.3. Consideremos los diagramas de la definición anterior. Definiendo

$$i_1 := i \circ \mathrm{in}_1 \qquad \text{y} \qquad i_2 := i \circ \mathrm{in}_2,$$

obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "="] & X\coprod X \arrow[d, "i"'] & X \arrow[l, "\mathrm{in}_2"'] \arrow[dl, "i_2"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "="] \\
& X \wedge I\,. &
\end{tikzcd}$$

De este modo, consideremos la siguiente notación $i := i_1 \coprod i_2$.
Dualmente, definiendo

$$q_1 := \mathrm{pr}_1 \circ q \qquad \text{y} \qquad q_2 := \mathrm{pr}_2 \circ q$$

obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y & Y\prod Y \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & Y \\
& Y^I\,. \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ul, phantom, shift right=3, "="] \arrow[u, "q"'] \arrow[ur, "q_2"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "="] &
\end{tikzcd}$$

De esta manera, consideremos la siguente notación $q := q_1 \prod q_2$.

Estas notaciones nos permiten realizar la siguiente definición.

Definición 2.6.4. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $f, g : X \longrightarrow Y$ morfismos de $\mathscr{M}$. Una **homotopía izquierda de** f **a** g consiste de un objeto cilindro

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[rr, "{[1_X,1_X]}"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "="] & X \\
& X \wedge I \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

de X y un morfismo $H : X \wedge I \longrightarrow Y$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "="] & X \wedge I \arrow[u, dashed, "H"'] & X \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \arrow[ul, phantom, shift left=3ex, "="]
\end{tikzcd} .$$

Una **homotopía derecha de f a g** consiste de un objeto camino

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "{(1_Y, 1_Y)}"] \arrow[dr, "s"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \prod Y \\
 & Y^I \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

de Y y un morfismo $H : X \longrightarrow Y^I$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, dashed, "H"'] & \\
Y & Y^I \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & Y
\end{tikzcd} .$$

Si existe una homotopía izquierda (resp. derecha) de f a g diremos que f es **homotópico izquierdo** (resp. **derecho**) a g, en símbolos escribiremos $f \overset{l}{\sim} g$ (resp. $f \overset{r}{\sim} g$). Si $f \overset{l}{\sim} g$ y $f \overset{r}{\sim} g$, diremos que f es **homotópico** a g, en este caso escribiremos $f \sim g$.

Observación 2.6.5. El Axioma (M.4) de la definición de estructura de modelo (Def. 2.1.16), implica que cualquier objeto X de una categoría de modelo $\mathscr{M}$ tiene un objeto cilindro y un objeto camino.

Proposición 2.6.6. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$.

(a) Si Y y X son cofibrantes, entonces los morfismos $\mathrm{in}_1 : X \longrightarrow X \coprod Y$ y $\mathrm{in}_2 : Y \longrightarrow X \coprod Y$ son cofibraciones.

(b) Si Y y X son fibrantes, entonces los morfismos $\mathrm{pr}_1 : X \prod X \longrightarrow Y$ y $\mathrm{pr}_2 : Y \prod X \longrightarrow X$ son fibraciones.

Demostración.
(a) Notemos que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "\mathrm{in}_1"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{in}_2"'] & X \coprod Y
\end{tikzcd}$$

es un diagrama de coproducto fibrado. Luego, como la clase de cofibraciones es cerrada bajo coproductos fibrados, se sigue (a). La demostración del inciso (b) es dual. ■

Lema 2.6.7 (K. S. Brown)**.** Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo.

(a) Si $g : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes, entonces g se factoriza como $g = ji$, donde i es una cofibración trivial y j es una fibración trivial; además j tiene un inverso derecho que es una cofibración trivial.

(b) Si $g : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia débil entre objetos fibrantes, entonces g se factoriza como $g = ji$, donde i es una fibración trivial y j es una cofibración trivial; además i tiene un inverso izquierdo que es una fibración trivial.

Demostración.
(a) Recordemos que la proposición anterior asegura que los morfismos $\mathrm{in}_1 : X \longrightarrow X\coprod Y$ e $\mathrm{in}_2 : Y \longrightarrow X\coprod Y$ son cofibraciones. Por otro lado, consideremos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} X\coprod Y \arrow[rr, "{[g,1_Y]}"] \arrow[dr, "k"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \\ & Z \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} ,$$

donde k es una cofibración y j es una fibración trivial. Notemos que $g = j\circ k\circ \mathrm{in}_1 = [g,1_Y]\circ \mathrm{in}_1$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] \arrow[dr, "g"'] & X\coprod Y \arrow[d, "{[g,1_Y]}"] & Y \arrow[l, "\mathrm{in}_2"'] \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y . & \end{tikzcd}$$

Como g y j son equivalencias débiles, concluimos que $t := k\circ \mathrm{in}_1$ es una equivalencia débil, además in_1 y k son cofibraciones, entonces t es una cofibración trivial. Por último, observamos que $j\circ k\circ \mathrm{in}_2 = [g,1_Y]\circ \mathrm{in}_2 = 1_Y$.
La demostración del inciso (b) es dual. ■

Definición 2.6.8. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de $\mathscr{M}$. Decimos que f es una **equivalencia de homotopía** si existe un morfismo $h \in \mathscr{M}(Y,X)$ tal que $hf \sim 1_X$ y $fh \sim 1_Y$.

La siguiente proposición resume las propiedades de la relación de homotopía izquierda, y la noción dual, la relación de homotopía derecha. Esta proposición es estándar y viene originalmente de [Qui67].

Proposición 2.6.9. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $f, g : B \longrightarrow X$ morfismos de $\mathscr{M}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen

(a) si $f \overset{l}{\sim} g$ y $h \in \mathscr{M}(X,Y)$, entonces $hf \overset{l}{\sim} hg$. Dualmente, si $f \overset{r}{\sim} g$ y $h \in \mathscr{M}(A,B)$, entonces $fh \overset{r}{\sim} gh$.

(b) Si X es un objeto fibrante, $f \overset{l}{\sim} g$ y $h \in \mathscr{M}(A,B)$, entonces $fh \overset{l}{\sim} gh$. Dualmente, si B es un objeto cofibrante, $f \overset{r}{\sim} g$ y $h \in \mathscr{M}(X,Y)$, entonces $hf \overset{r}{\sim} hg$.

(c) Si B es un objeto cofibrante, entonces la relación de homotopía izquierda es una relación de equivalencia en $\mathscr{M}(B,X)$. Dualmente, si X es un objeto fibrante, entonces la relación de homotopía derecha es una relación de equivalencia en $\mathscr{M}(B,X)$.

(d) Si B es un objeto cofibrante y $h \in \mathscr{M}(X,Y)$ es una fibración trivial, o una equivalencia débil, entre objetos fibrantes, entonces h induce un isomorfismo

$$\mathscr{M}(B,X)/\overset{l}{\sim} \longrightarrow \mathscr{M}(B,Y)/\overset{l}{\sim} \ .$$

(e) Si X es un objeto fibrante y $h \in \mathscr{M}(A,B)$ es una cofibración trivial, o una equivalencia débil, entre objetos cofibrantes, entonces h induce un isomorfismo

$$\mathscr{M}(B,X)/\overset{r}{\sim} \longrightarrow \mathscr{M}(A,X)/\overset{r}{\sim} \ .$$

(f) Si B es un objeto cofibrante, entonces $f \overset{l}{\sim} g$ implica que $f \overset{r}{\sim} g$. Además, si X^I es un objeto camino de X, entonces existe una homotopía derecha $K : B \longrightarrow X^I$ de f a g. Dualmente, si X es un objeto fibrante, entonces $f \overset{r}{\sim} g$ implica que $f \overset{l}{\sim} g$, además existe una homotopía izquierda de f a g.

Demostración. Ver [Ho99].

Proposición 2.6.10. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo, B un objeto cofibrante y X un objeto fibrante de $\mathscr{M}$. Entonces las relaciones $\overset{l}{\sim}$ y $\overset{r}{\sim}$ en $\mathscr{M}(B,X)$ coinciden. Además, dichas relaciones son relaciones de equivalencia en $\mathscr{M}(B,X)$.

Definición 2.6.11. Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo con la estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ de $\mathscr{M}$. Definimos la subcategoría plena $\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}$ de $\mathscr{M}$ donde:

$$\mathrm{Obj}(\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}) := \mathcal{C}^{\bullet} \cap \mathcal{F}^{\bullet}; \text{ es decir los objetos de } \mathscr{M} \text{ que son cofibrantes y fibrantes.}$$

La proposición 2.6.9 implica la siguiente observación.

Observación 2.6.12. La relación $\sim$ de homotopía es una relación de equivalencia en $\mathrm{Mor}(\mathscr{M}_{\mathrm{cf}})$, más aún, $\sim$ es compatible con la categoría $\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}$.

Definición 2.6.13 (D. M. Kan)**.** Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo. La **categoría $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}$ de homotopía clásica** de $\mathscr{M}$ se define como $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{cf}} := \mathscr{M}_{\mathrm{cf}}/_{\sim}$.

Proposición 2.6.14. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y f un morfismo de $\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}$. Entonces f es una equivalencia débil de $\mathscr{M}$ si y sólo si es una equivalencia de homotopía.
Demostración. Ver [Ho99].

La categoría de homotopía clásica es de cierto modo inadecuada, ya que algunas construcciones podrían requerir objetos que no necesariamente sean fibrantes y cofibrantes. Por esto, necesitamos una *categoría de homotopía* que tenga todos los objetos de la categoría de modelo. La próxima contrucción, de una *categoría de homotopía*, cumple este requisito.

Definición 2.6.15. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathcal{S}$ una clase de morfismos de $\mathscr{C}$. Una **localización de $\mathscr{C}$ con respecto de** $\mathcal{S}$ es una categoría $\mathscr{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ y un funtor $\gamma : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ tales que

(a) $\gamma(s)$ es un isomorfismo; para todo $s \in \mathcal{S}$,

(b) para cualquier categoría $\mathscr{B}$ y cualquier funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ tales que $F(s) \in \mathrm{Iso}(\mathscr{B})$ para todo $s \in \mathcal{S}$, existe un único funtor $D : \mathscr{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right] \longrightarrow \mathscr{B}$ tal que $D \circ \gamma = F$.

La localización [8] de una categoría es, formalmente, el proceso añadir los inversos de ciertos morfismos. Sin embargo, éste proceso no necesariamente es posible. Es decir, la localización de una categoría, no necesariamente existe. De hecho, si intentamos construir la localización de una categoría, el proceso podría requerir que las clases $\mathscr{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right](X,Y)$ de morfismos no fueran conjuntos.
Notemos que el inciso 2.6.15(b) implica que la categoría $\mathscr{C}\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ es única salvo isomorfismos de categorías.

Proposición 2.6.16. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y X un conjunto de morfismos de $\mathscr{C}$. Entonces, la localización $\mathscr{C}\left[X^{-1}\right]$ de $\mathscr{C}$ con respecto de X existe. Más aún, si $\mathscr{C}$ es pequeña, entonces $\mathscr{C}\left[X^{-1}\right]$ también es pequeña.
Demostración. Ver [B194].

[8] Por analogía con el caso de los anillos de fracciones, donde formalmente se añaden los inversos de un conjunto de elementos del anillo, la localización de una categoría $\mathscr{C}$ también suele llamarse **categoría de fracciones** de $\mathscr{C}$.

Definición 2.6.17. Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo. La **categoría de homotopía de Quillen** de $\mathscr{M}$ es la localización de $\mathscr{M}$ con respecto a clase $\mathcal{W}$ de equivalencias débiles . Dicha localización es denotada por $\gamma : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathscr{M})$.

Frecuentemente, se refiere a la categoría de homotopía de Quillen [9] simplemente como la categoría $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$. No obstante, se entiende la existencia del funtor $\gamma : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathscr{M})$.
Sin embargo, puesto que $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ es una localización por definición, la existencia de $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ no está asegurada. Para demostrar la existencia de dicha localización, necesitamos las nociones de *reemplazo cofibrante* y *reemplazo fibrante*.

Lema 2.6.18. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ la estuctura de modelo de $\mathscr{M}$. Si $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es funtorial, entonces

(a) existen un funtor $Q : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$, llamado **funtor de reemplazo**[10] **cofibrante** de $\mathscr{M}$, tal que $QX \in \mathcal{C}^{\bullet}$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ y una transformación natural $\alpha : Q \Longrightarrow 1_{\mathscr{M}}$; y

(b) existen un funtor $R : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$, llamado **funtor de reemplazo fibrante** de $\mathscr{M}$, tal que $RX \in \mathcal{F}^{\bullet}$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ y una transformación natural $\beta : 1_{\mathscr{M}} \Longrightarrow R$.

Demostración.
(a) El Teorema 2.5.10 nos dice que $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ tiene una factorización funtorial (F, λ, ρ). Luego, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ consideramos el único morfismo $\vec{X} : 0 \longrightarrow X$. Después, para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathscr{M}$ tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "1_0"] \arrow[d, "\vec{X}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & 0 \arrow[d, "\vec{Y}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y .
\end{tikzcd}$$

De la definición de realización funtorial y la conmutatividad del cuadrado anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

[9] En la literatura se usa simplemente **Categoría de homotopía**.
[10] También se usa el término **aproximación**.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "1_0"] \arrow[d, "\lambda_{\vec{X}}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\vec{X}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & 0 \arrow[d, "\lambda_{\vec{Y}}"] \arrow[dd, bend left=60, "\vec{Y}"] \\
F\vec{X} \arrow[r, "F(1_0,f)"'] \arrow[d, "\rho_{\vec{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F\vec{Y} \arrow[d, "\rho_{\vec{Y}}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y ,
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda_{\vec{X}}, \lambda_{\vec{Y}} \in \mathcal{C}$ y $\rho_{\vec{X}}, \rho_{\vec{Y}} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Notemos que $F\vec{X} \in \mathcal{C}^{\bullet}$, ya que $\lambda_{\vec{X}}$ es una cofibración. De esta manera, podemos definir un funtor $Q : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$ de la siguiente forma

$(a.1)$ $QX := F\vec{X}$ para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{M})$.

$(a.2)$ $Qf := F(1_0, f)$ para todo $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{M})$.

Veamos que $Q : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$ es un funtor. En efecto, Para cada par de morfimos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ de $\mathscr{M}$ tenemos

$$Q(gf) = F(1_0, gf) = F(1_0, g)\, F(1_0, g) = QgQf.$$

Además, para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{M})$ tenemos

$$Q1_X = F(1_0, 1_X) = 1_{F(1_0, 1_X)} = 1_{QX}.$$

Por otro lado, la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F\vec{X} \arrow[r, "F(1_0,f)"] \arrow[d, "\rho_{\vec{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F\vec{Y} \arrow[d, "\rho_{\vec{Y}}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y ,
\end{tikzcd}$$

nos dice que existe una transformación natural $\alpha : Q \longrightarrow 1_{\mathscr{M}}$, definida como $\alpha_X := \rho_{\vec{X}}$ para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{M})$.

$$\begin{tikzcd}
QX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "Qf"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\
QY \arrow[r, "\alpha_Y"'] & Y .
\end{tikzcd}$$

La prueba del inciso (b) es dual. ■

Observación 2.6.19. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $R : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$ un reemplazo fibrante de $\mathscr{M}$. Si X es un objeto cofibrante, entonces $R(X)$ también lo es. En particular, para cualquier objeto X de $\mathscr{M}$ se tiene que $R(Q(X))$ es un objeto fibrante y cofibrante.

Demostración. Sea $\sigma := \{\sigma_X : X \longrightarrow R(X)\}_{X \in |\mathscr{M}|}$ la transformación natural asociada a R. Notemos que el siguiente morfismo

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\sigma_X} R(X)$$

es una cofibración, ya que σ_X es una cofibración trivial; y por lo tanto $R(X)$ es cofibrante. ■

Teorema 2.6.20. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ la estuctura de modelo de $\mathscr{M}$. Si $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es funtorial, entonces la categoría de homotopía de Quillen de $\mathscr{M}$ existe.

Demostración. Sean $Q : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$ un reemplazo cofibrante de $\mathscr{M}$ y $F : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$ un reemplazo fibrante de $\mathscr{M}$. Definimos la categoría $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ como sigue

(a) $\mathrm{Obj}(\mathbf{Ho}(\mathscr{M})) := \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$.

(b) $\forall X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ se define

$$\mathbf{Ho}(\mathscr{M})(X,Y) := \mathscr{M}(RQX, RQY)/_{\sim}.$$

(c) La composición de morfismos en $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ es la misma que la de $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}$. Es decir, la composición de clases de homotopía de morfismos entre objetos que son cofibrantes y fibrantes.

El funtor $\gamma : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ se define como sigue

(d) $\gamma(X) := X$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$,

(e) para todo morfismo $f \in \mathscr{M}(X,Y)$ se define $\gamma(f) := [RQf]_{\sim}$. Es decir $\gamma(f)$ es la clase de homotopía del morfismo RQf.

Notemos que si f es una equivalencia trivial, entonces Qf también lo es. En efecto, recordemos que $Qf \circ p_X = f \circ p_Y$, donde los morfismos p_X, p_Y son equivalencias débiles. De forma similar, se puede concluir que Rf es una equivalencia débil. Lo anterior implica que, para cualquier equivalencia débil f, se tiene que RQf es una equivalencia débil. Por la Proposición 2.6.14, concluimos que RQf es una equivalencia de homotopía, es decir, un isomorfismo en $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$. Los detalles restantes se pueden encontrar en [Hi03]. ■

Observación 2.6.21. En la demostración del Teorema 2.6.20, suponer que $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ es funtorial es de vital importancia para la prueba. Sin embargo, Quillen demuestra la existencia de la categoría de homotopía $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ sin suponer que la estructura de modelo de $\mathscr{M}$ es funtorial. Haremos un esbozo de la contrucción que hizo Quillen. Dicha construcción proviene originalmente de [Qui67].

Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ la estructura de modelo de $\mathscr{M}$.

(a) Definimos las subcategorías plenas $\mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ y $\mathscr{M}_{\mathrm{f}}$ de $\mathscr{M}$ donde

$$\mathrm{Obj}(\mathscr{M}_{\mathrm{c}}) := \mathcal{C}^{\bullet} \quad \text{y} \quad \mathrm{Obj}(\mathscr{M}_{\mathrm{f}}) := \mathcal{F}^{\bullet}.$$

(b) Luego, definimos la categoría $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{c}}$ como

$(b.1)$ $\mathrm{Obj}(\pi\mathscr{M}_{\mathrm{c}}) := \mathcal{C}^{\bullet}$ y

$(b.2)$ $\forall X,Y \in \mathcal{C}^{\bullet}$ se define $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{c}}(X,Y) := \mathscr{M}(X,Y)/\underset{\sim}{r}$. Usando el inciso 2.6.9.(b) se induce la composición en $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{c}}$.

(c) De forma dual, se define la categoría $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{f}}$ como

$(c.1)$ $\mathrm{Obj}(\pi\mathscr{M}_{\mathrm{f}}) := \mathcal{C}^{\bullet}$ y

$(c.2)$ $\forall X,Y \in \mathcal{F}^{\bullet}$ se define $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{f}}(X,Y) := \mathscr{M}(X,Y)/\underset{\sim}{l}$. De nuevo, se usa el inciso 2.6.9.(b) para definir la composición en $\pi\mathscr{M}_{\mathrm{f}}$.

(d) Por otro lado, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ tomamos las siguientes factorizaciones

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "="] & X \\ & Q(X) \arrow[ur, "p_X"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "i_X"'] & \arrow[d, phantom, "="] & 1 \\ & R(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

donde $QX \in \mathcal{C}^{\bullet}$, $RX \in \mathcal{F}^{\bullet}$, $i_X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ y $p_X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Si $X \in \mathcal{C}^{\bullet}$, tomamos $QX = X$ y $p_X = 1_X$. Dualmente, si $X \in \mathcal{F}^{\bullet}$, tomamos $RX = X$ e $i_X = 1_X$.

Además, para cada morfismo $f \in \mathscr{M}(X,Y)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & QY \arrow[d, "p_Y"] \\ QX \arrow[r, "f \circ p_X"'] & Y \end{tikzcd}.$$

Notemos que el morfimo $0 \longrightarrow QX$ es una cofibración, por lo que existe un morfismo $Qf : QX \longrightarrow QY$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "="'] \arrow[d] & QY \arrow[d, "p_Y"] \\ QX \arrow[r, "f\circ p_X"'] \arrow[ur, dashed, "Qf"] & Y \end{tikzcd} .$$

Luego, se tiene que $Q(g\circ f) \overset{r}{\sim} Qg\circ Qf$ y $Q1_X \overset{r}{\sim} 1_{QX}$, siempre que $g\circ f$ esté definida. De esta forma, se define un funtor $\overline{Q} : \mathscr{M} \longrightarrow \pi\mathscr{M}_c$ como

$(d.1)$ $\overline{Q}X := QX$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ y

$(d.1)$ $\overline{Q}f := [Qf]_{\overset{r}{\sim}}$ para todo $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{M})$.

De forma dual, definimos un funtor $\overline{R} : \mathscr{M} \longrightarrow \pi\mathscr{M}_f$. Después, la restricción del funtor $\overline{Q} : \mathscr{M} \longrightarrow \pi\mathscr{M}_c$ en $\mathscr{M}_f$ induce un funtor $\widehat{Q} : \pi\mathscr{M}_f \longrightarrow \pi\mathscr{M}_{cf}$ y la restricción del funtor $\overline{R} : \mathscr{M} \longrightarrow \pi\mathscr{M}_f$ en $\mathscr{M}_c$ induce un funtor $\widehat{R} : \pi\mathscr{M}_c \longrightarrow \pi\mathscr{M}_{cf}$.

(e) Finalmente, la categoría de homotopía $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$ se define como sigue

$(e.1)$ $\mathrm{Obj}(\mathbf{Ho}(\mathscr{M})) := \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$.

$(e.2)$ $\forall X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ se define

$$\mathbf{Ho}(\mathscr{M})(X,Y) := \pi\mathscr{M}_{\mathrm{cf}}(\widehat{RQ}X, \widehat{RQ}X).$$

$(e.3)$ El funtor $\gamma : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ se define como $\gamma(X) := X$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{M})$ y $\gamma(f) := \widehat{RQ}$ para todo morfismo $f \in \mathscr{M}(X,Y)$.

Terminaremos esta sección con, siguiendo a Mark Hovey, el "teorema fundamental sobre las categorías de modelo". La demostración puede encontrarse en [Ho99].

Teorema 2.6.22. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $\gamma : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ la categoría de homotopía de Quillen de $\mathscr{M}$. Entonces

(a) $\pi\mathscr{M}_{cf}$ es equivalente a $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$;

(b) $\gamma(f)$ es un isomorfismo si y sólo si f es una equivalencia débil.

2.7. Funtores de Quillen

En esta sección revisaremos algunas propiedades de los *morfismos* entre categorías de modelo. Hasta ahora, se puede pensar que es conveniente que un funtor entre dos categorías de modelo preserve fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, para desarrollar construcciones en la teoría de categorías de modelo. Como veremos, esto no será necesario. Las referencias para esta sección son [Ho99] y [Hi03].

Definición 2.7.1. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ categorías de modelo y $T : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{N}$ un funtor. Decimos que T es un **funtor de Quillen izquierdo** si tiene adjunto derecho y preserva cofibraciones y cofibraciones triviales. Además, diremos que T es un **funtor de Quillen derecho** si tiene adjunto izquierdo y preserva fibraciones y fibraciones triviales.

Enunciaremos algunas propiedades elementales de los funtores de Quillen.

Observación 2.7.2.

(a) La composición de dos funtores de Quillen izquierdos (resp. derechos) es un funtor de Quillen izquierdo (resp. derecho).

(b) El funtor identidad de una categoría de modelo es un funtor de Quillen izquierdo y derecho.

Definición 2.7.3. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ categorías de modelo. Una adjunción $(G,F,\Theta) : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{M}$ es una **adjunción de Quillen** si G es un funtor de Quillen izquierdo.

Lema 2.7.4. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ categorías de modelo y $(G,F,\Theta) : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{M}$ una adjunción. Entonces (G,F,Θ) es una adjunción de Quillen si y sólo si F es un funtor de Quillen derecho.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.3.4. ■

Observación 2.7.5. Sean $(G_1,F_1,\Theta_1) : \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M}_2$ y $(G_2,F_2,\Theta_2) : \mathscr{M}_2 \longrightarrow \mathscr{M}_3$ adjunciones de Quillen. La composición $(G,F,\Theta) : \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M}_3$, de (G_2,F_2,Θ_2) con (G_1,F_1,Θ_1), se define como

$$F := F_2 \circ F_1 \qquad G := G_2 \circ G_1 \qquad \Theta := \Theta_2 \circ \Theta_1.$$

La composición (G,F,Θ) es una adjunción de Quillen, más aún, dicha composición es asociativa.

El siguiente resultado es una mejora del Lema 2.7.4, éste es debido a Daniel K. Dugger. La demostación puede encontrarse en [Hi03].

Lema 2.7.6. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ categorías de modelo y $(G,F,\Theta) : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{M}$ una adjunción. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

(a) $(G,F,\Theta):\mathscr{N}\longrightarrow\mathscr{M}$ una adjunción de Quillen.

(b) G preserva cofibraciones triviales y cofibraciones con dominio y codominio cofibrantes.

(c) F preserva fibraciones triviales y fibraciones con dominio y codominio fibrantes.

Definición 2.7.7. Una adjunción de Quillen $(G,F,\Theta):\mathscr{N}\longrightarrow\mathscr{M}$ es una **equivalencia de Quillen** si para cualquier objeto fibrante X de $\mathscr{N}$ y cualquier objeto cofibrante Y de $\mathscr{M}$, un morfismo $f:GX\longrightarrow Y$ es una equivalencia débil en $\mathscr{M}$ si y sólo si $\Theta(f):X\longrightarrow FY$ es una equivalencia débil en $\mathscr{N}$.

Finalizaremos esta sección enunciando un teorema que establece una relación entre categorías de modelo equivalentes, en el sentido de la Defineión 2.7.7, con sus categorías de homotopía. La demostración puede encontrarse en [Hi03].

Teorema 2.7.8. Sea $(G,F,\Theta):\mathscr{N}\longrightarrow\mathscr{M}$ una adjunción de Quillen. Si (G,F,Θ) es una equivalencia de Quillen, entonces las categorías de homotopía $\mathbf{Ho}(\mathscr{M})$ y $\mathbf{Ho}(\mathscr{N})$ son equivalentes.

2.8. Categorías de modelo cofibrantemente generadas

El objetivo de esta sección es presentar un resultado conocido como el *argumento del objeto pequeño*. Dicho resultado es una herramienta para obtener una factorización funtorial en una categoría. Después, utilizaremos el *argumento del objeto pequeño* para obtener un resultado que nos permite construir un tipo de estructura de modelo, la cual llamaremos *cofibrantemente generada*. Para desarrollar esta herramienta, necesitaremos algunas nociones sobre teoría de conjuntos (ver [Je02]).

Observación 2.8.1. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías.

(a) Una clase de objetos $\mathcal{P}\subseteq\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ determina una subcategoría plena $\mathscr{A}_{\mathcal{P}}$ de $\mathscr{A}$ como sigue:

$(a.1)$ $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}_{\mathcal{P}}):=\mathcal{P}$

$(a.2)$ $\forall X,Y\in\mathrm{Obj}(\mathscr{A}_{\mathcal{P}})$ se define $\mathscr{A}_{\mathcal{P}}(X,Y):=\mathscr{A}(X,Y)$. La composición en $\mathscr{A}_{\mathcal{P}}$ es la misma que $\mathscr{A}$.

(b) Un funtor $F:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}$ induce el funtor $F|_{\mathcal{P}}:\mathscr{A}_{\mathcal{P}}\longrightarrow\mathscr{B}$ definido como sigue:

$(b.1)$ $F|_{\mathcal{P}}(X):=F(X)$ para todo $X\in\mathrm{Obj}(\mathscr{A}_{\mathcal{P}})$ y $F|_{\mathcal{P}}(f):=F(f)$ para todo $f\in\mathrm{Mor}(\mathscr{A}_{\mathcal{P}})$.

Definición 2.8.2. Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta y λ un ordinal, considerado como una categoría. Una **λ-sucesión** en $\mathscr{C}$ es un funtor $S:\lambda \longrightarrow \mathscr{C}$, es decir un diagrama

$$S_0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_\beta \longrightarrow \ldots \qquad (\beta < \lambda),$$

tal que para todo ordinal límite [11] $\gamma < \lambda$ se tiene que $\varinjlim S|_\gamma \simeq S_\gamma$. La **composición de una λ-sucesión** es el morfismo $S_0 \longrightarrow \varinjlim S$.

$$\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r] \arrow[drr] & S_1 \arrow[r] \arrow[dr] & S_2 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & S_\beta \arrow[r] \arrow[dll] & \ldots \\
 & & \varinjlim S & \ldots & & \ldots
\end{tikzcd} .$$

Definición 2.8.3. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ una clase de morfismos. Una **composición transfinita** de morfismos de $\mathcal{M}$ es la composición de una λ-sucesión en $\mathscr{C}$

$$S_0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_\beta \longrightarrow \ldots \qquad (\beta < \lambda),$$

para algún ordinal λ, tal que $\forall \beta + 1 < \lambda$ el morfimo $S_\beta \longrightarrow S_{\beta+1}$ está en $\mathcal{M}$. Denotaremos una composición transfinita de morfismos en $\mathcal{M}$ por $\mathbf{Co}(\mathcal{M})_\lambda : S_0 \longrightarrow \varinjlim S$.

Definición 2.8.4. Una clase de morfismos $\mathcal{M}$, en una categoría $\mathscr{C}$, es **cerrada bajo composición transfinita** si cualquier composición transfinita $\mathbf{Co}(\mathcal{M})_\lambda : S_0 \longrightarrow \varinjlim S$ de morfismos de $\mathcal{M}$ está en $\mathcal{M}$.

Proposición 2.8.5. Si $\mathcal{M}$ es una clase de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$, entonces $^{\pitchfork}\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición transfinita.

Demostración. La prueba se hace por inducción transfinita.

Definición 2.8.6. Sea γ un cardinal. Decimos que un ordinal límite α es **γ-filtrado** si $\forall A \subseteq \alpha$ con $|A| < \gamma$ se tiene que $\sup(A) < \alpha$.

Observación 2.8.7. Sean λ y β cardinales tales que $\lambda < \beta$ y α un ordinal límite. Si α es β-filtrado, entonces α es λ-filtrado.

Observación 2.8.8. Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta y $S:\lambda \longrightarrow \mathscr{C}$ una λ-sucesión en $\mathscr{C}$. Para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se puede inducir un morfismo

$$\Psi : \varinjlim \mathscr{C}(A, S-) \longrightarrow \mathscr{C}\left(A, \varinjlim S\right)$$

[11] Un ordinal α es un **ordinal límite** si no es un ordinal sucesor.

de la siguiente forma:

(1) Consideremos diagramas de colímites para los funtores $\mathscr{C}(A,S-):\mathscr{C}\longrightarrow\mathbf{Set}$ y $S:\lambda\longrightarrow\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \varinjlim \mathscr{C}(A,S-) & \\
\mathscr{C}(A,S_\beta) \arrow[ur, "\mu_\beta"] \arrow[rr] & {=} & \mathscr{C}(A,S_{\beta'}) \arrow[ul, "\mu_{\beta'}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varinjlim S & \\
S_\beta \arrow[ur, "\eta_\beta"] \arrow[rr] & {=} & S_{\beta'} \arrow[ul, "\eta_{\beta'}"']
\end{tikzcd}.
$$

(2) Con los diagramas anteriores podemos construir un cocono con base en el funtor $\mathscr{C}(A,S-):\mathscr{C}\longrightarrow\mathbf{Set}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{C}(A,\varinjlim S) & \\
\mathscr{C}(A,S_\beta) \arrow[ur, "\mathscr{C}(A,\eta_\beta)"] \arrow[rr] & {=} & \mathscr{C}(A,S_{\beta'}) \arrow[ul, "\mathscr{C}(A,\eta_{\beta'})"']
\end{tikzcd}
$$

(3) La propiedad universal del colímite induce la existencia de un morfismo Ψ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathscr{C}(A,S-) \arrow[rr, dashed, "\Psi"] & {=} & \mathscr{C}(A,\varinjlim S) \\
 & \mathscr{C}(A,S_\beta) \arrow[ul, "\mu_\beta"] \arrow[ur, "\mathscr{C}(A,\eta_\beta)"'] &
\end{tikzcd}
$$

para todo $\beta<\lambda$.

Definición 2.8.9. Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta, $\mathcal{D}$ una clase de morfismos de $\mathscr{C}$, κ un cardinal y A un objeto de $\mathscr{C}$. Decimos que A es **κ-pequeño relativo** en $\mathcal{D}$ si para todo ordinal κ-filtrado λ y toda λ-sucesión

$$S_0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow S_\beta \longrightarrow \dots \qquad (\beta<\lambda),$$

tal que $\forall\beta+1<\lambda$ el morfismo $S_\beta\longrightarrow S_{\beta+1}$ está en $\mathcal{D}$, y el morfismo inducido

$$\Psi:\varinjlim \mathscr{C}(A,S-)\longrightarrow \mathscr{C}(A,\varinjlim S)$$

es un isomorfismo. Diremos que un objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es **pequeño relativo** en $\mathcal{D}$ si A es κ-pequeño relativo en $\mathcal{D}$ para algún cardinal κ. Finalmente, diremos que A es **pequeño** si es pequeño relativo en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$.

Enunciaremos la definición anterior en el caso en el que κ es un cardinal finito.

Definición 2.8.10. Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta, $\mathcal{D}$ una clase de morfismos de $\mathscr{C}$ y A un objeto de $\mathscr{C}$. Decimos que A es **finito relativo** en $\mathcal{D}$ si es κ-pequeño, para algún cardinal finito κ. Finalmente, diremos que A es **finito** si es finito relativo en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$.

Definición 2.8.11. Sean $\mathcal{M}$ una clase de morfismos en una categoría $\mathscr{C}$ y f un morfismo de $\mathscr{C}$.

(a) Diremos que f es $\mathcal{M}$-**inyectivo** (resp. $\mathcal{M}$-**proyectivo**) si $f \in \mathcal{M}^{\pitchfork}$ (resp. $f \in {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$). La clase de todos los morfismos $\mathcal{M}$-inyectivos (resp. $\mathcal{M}$-proyectivos) será denotada como $\mathcal{M}$-Iny (resp. $\mathcal{M}$-Proy). Esto es $\mathcal{M}\text{-Iny} = \mathcal{M}^{\pitchfork}$ y $\mathcal{M}\text{-Proy} = {}^{\pitchfork}\mathcal{M}$.

(b) Diremos que f es una $\mathcal{M}$-**cofibración** (resp. $\mathcal{M}$-**fibración**) si $f \in {}^{\pitchfork}(\mathcal{M}\text{-Iny})$ (resp. $\in (\mathcal{M}\text{-Proy})^{\pitchfork}$). La clase de todas las $\mathcal{M}$-cofibaciones (resp. $\mathcal{M}$-fibaciones) es denotada por $\mathcal{M}$-Cof (resp. $\mathcal{M}$-Fib). Esto es $\mathcal{M}\text{-Cof} = {}^{\pitchfork}(\mathcal{M}\text{-Iny})$ y $\mathcal{M}\text{-Fib} = (\mathcal{M}\text{-Proy})^{\pitchfork}$.

La siguiente observación es un consecuencia inmediata de la definición anterior.

Observación 2.8.12. Para $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ clases de morfismos en una categoría $\mathscr{C}$, se tiene que:

(a) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$-Cof y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$-Fib;

(b) si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N}\text{-Iny} \subseteq \mathcal{M}\text{-Iny}$ y $\mathcal{N}\text{-Proy} \subseteq \mathcal{M}\text{-Proy}$;

(c) finalmente, si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, entoneces $\mathcal{M}\text{-Cof} \subseteq \mathcal{N}\text{-Cof}$ y $\mathcal{M}\text{-Fib} \subseteq \mathcal{N}\text{-Fib}$.

Lema 2.8.13. Sean $(F,U,\Theta) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ una adjunción, $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$ clases de morfismos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $U(F\mathcal{M}\text{-Iny}) \subseteq \mathcal{M}\text{-Iny}$.

(b) $F(\mathcal{M}\text{-Cof}) \subseteq F\mathcal{M}\text{-Cof}$.

(c) $F(U\mathcal{N}\text{-Proy}) \subseteq \mathcal{N}\text{-Proy}$.

(d) $U(\mathcal{N}\text{-Fib}) \subseteq U\mathcal{N}\text{-Fib}$.

Demostración.
(a) Si $x \in U\,(F\mathcal{M}\text{-Iny})$, entonces $x = Ug$, con $g \in F\mathcal{M}$-Iny. Lo anterior quiere decir que $Ff \pitchfork g$ para todo $f \in \mathcal{M}$. Ahora bien, por la Proposición 2.3.1 se tiene que $f \pitchfork Ug$ para todo $f \in \mathcal{M}$, lo cual prueba que $x = Ug \in \mathcal{M}$-Iny.
Los incisos restantes se prueban análogamente como en (a).■

Definición 2.8.14. Sea I un conjunto de morfismos de una categoría cocompleta $\mathscr{C}$. Un **complejo I-celular relativo** [12] es una composición transfinita de coproductos fibrados de elementos de I. Esto es, si $f : A \longrightarrow B$ es un complejo I-celular relativo, entonces existe una λ-sucesión $S : \lambda \longrightarrow \mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$ tal que f es la composición de la λ-sucesión; además para todo β tal que $\beta + 1 < \lambda$, existe un diagrama de coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd} C_\beta \arrow[r, "g_\beta"] \arrow[d, "f_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & S_\beta \arrow[d] \\ D_\beta \arrow[r] & S_{\beta+1} \end{tikzcd}$$

con $f_\beta \in I$. Denotaremos a la clase de todos los complejos I-celulares relativos como I-Cel. Finalmente, diremos que un objeto $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ es un **complejo I-celular** si el morfismo $0 \to A$ está en I-Cel.

Observación 2.8.15. Para cada conjunto I de morfismos en una categoría cocompleta $\mathscr{C}$ se tiene que $I \subset I$-Cel. En efecto, considerando el siguiente diagrama de coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B, \end{tikzcd}$$

obtenemos que $f \in I$-Cel, ya que f se considera como una 1-sucesión.

Proposición 2.8.16. Sea I un conjunto de morfismos de una categoría cocompleta $\mathscr{C}$. Entonces,

(a) I-Cel $\subseteq I$-Cof;

(b) si $f \in I$-Cel, entonces todo retracto de f está en I-Cof;

(c) I-Cel es cerrada bajo composición transfinita.

[12] También se usa el término ***I*-cofibración regular**.

Demostración.
(a) Recordemos que $I \subseteq I$-Cof; y que por definición tenemos que $I\text{-Cof} = {}^{\pitchfork}\left(I^{\pitchfork}\right)$. Por las Proposiciones 2.8.5 y 2.1.14, tenemos que I-Cof es cerrada bajo composición transfinita y coproductos fibrados. Finalmente, por definición de I-Cel, concluimos que $I\text{-Cel} \subseteq I\text{-Cof}$.■
(b) La proposición 2.1.10 asegura que I-Cof es cerrada bajo retractos, y por el inciso anterior concluimos lo que deseamos demostrar. ■
(c) Ver [Ho99].

Teorema 2.8.17 (El argumento del objeto pequeño)**.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta e I un conjunto de morfismos de $\mathscr{C}$. Si todos los dominios de los morfismos de I son pequenõs relativos en I-Cel [13], entonces existe una factorización funtorial (γ, δ) en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma(f) \in I$-Cel y $\delta(f) \in I$-Iny para todo $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$.
Demostración. Ver [Ho99].

Corolario 2.8.18. Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta e I un conjunto de morfismos de $\mathscr{C}$. Si todos los dominios de los morfismos de I son pequeños relativos en I-Cel, entonces $(I\text{-Cof}, I\text{-Iny})$ es un sistema de factorización débil funtorial en $\mathscr{C}$.
Demostración. Para cada clase de morfismos $\mathcal{M}$ de $\mathscr{C}$ tenemos las siguientes relaciones

$$
{}^{\pitchfork}\left(\mathcal{M}^{\pitchfork}\right) \pitchfork \left(\mathcal{M}^{\pitchfork}\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}^{\pitchfork} = \left({}^{\pitchfork}\left(\mathcal{M}^{\pitchfork}\right)\right)^{\pitchfork}.
$$

En particular, tenemos que $I\text{-Cof} = {}^{\pitchfork}(I\text{-Iny})$ e $I\text{-Iny} = I^{\pitchfork} = \left({}^{\pitchfork}\left(I^{\pitchfork}\right)\right)^{\pitchfork} = (I\text{-Cof})^{\pitchfork}$. Por otro lado, el **argumento del objeto pequeño** garantiza la existencia de una factorización funtorial (γ, δ) en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma(f) \in I\text{-Cel} \subseteq I\text{-Cof}$ y $\delta(f) \in I$-Iny para todo $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$. ■

Corolario 2.8.19. Sean $\mathscr{C}$ una categoría cocompleta e I un conjunto de morfismos de $\mathscr{C}$. Si todos los dominios de los morfismos de I son pequenõs relativos en I-Cel, entonces para todo morfismo $f \in I$-Cof existe un morfismo $g \in I$-Cel tal que $f \in \operatorname{Re}(g)$.

Demostración. Sea $f \in I$-Cof. Por el **argumento del objeto pequeño**, existen morfismos $g \in I$-Cel y $p \in I$-Iny tales que $f = pg$. Notemos que $f \pitchfork p$. Por último, por el **argumento de retracción** (Lema 2.1.15) concluimos que $f \in \operatorname{Re}(g)$.■

El siguiente resultado es debido a Philip S. Hirschhorn. La demostración puede encontrarse en [Ho99].

[13]Esta condición es conocida como , siguiendo a D. Kan, *el argumento del objeto pequeño.* En este caso, se dice que *I permite el argumento del objeto pequeño*.

Proposición 2.8.20. Sea I un conjunto de morfismos de una categoría cocompleta $\mathscr{C}$. Si todos los dominios de los morfismos de I son pequeños relativos en I-Cel y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un objeto pequeño relativo en I-Cel, entonces A es pequeño relativo en I-Cof.

Definición 2.8.21. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ la estructura de modelo de $\mathscr{M}$. Diremos que $\mathscr{M}$ es **cofibrantemente generada** si existen conjuntos I y J de morfismos de $\mathscr{M}$ tales que:

(a) Los dominios de los morfismos de I son pequeños relativos en I-Cel.

(b) Los dominios de los morfismos de J son pequeños relativos en J-Cel.

(c) $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = I$-Iny y $\mathcal{F} = J$-Iny.

En este caso, diremos que I es el **generador de cofibraciones** y que J es el **generador de cofibraciones triviales**. Finalmente diremos que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es una **estructura de modelo cofibrantemente generada**.

Observación 2.8.22. De la definición anterior podemos concluir que

$$\mathcal{C} = I\text{-Cof} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{W} = J\text{-Cof}.$$

La siguiente proposición presenta algunas propiedades básicas de las categorías cofibrantemente generadas.

Proposición 2.8.23. Sea $\mathscr{M}$ una categoría de modelo cofibrantemente generada tal que I es su generador de cofibraciones y J su generador de cofibraciones triviales. Supongamos que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es la estructura de modelo de $\mathscr{M}$, entonces

(a) toda cofibración es retracto de un elemento de I-Cel;

(b) los dominios de los morfismos de I son pequeños relativos en $\mathcal{C}$;

(c) toda cofibración trivial es retracto de un elemento de J-Cel y

(d) los dominios de los morfismos de J son pequeños relativos en $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$.

Demostración. Ver [Ho99].

Teorema 2.8.24 (D. M. Kan)**.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría bicompleta, $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de $\mathscr{C}$, I y J conjuntos de morfismos de $\mathscr{C}$. Entonces, existe una estructura de modelo cofibrantemente generada en $\mathscr{C}$ tal que I es el generador de cofibraciones; J es el generador de cofibraciones triviales y $\mathcal{M}$ es la clase de equivalencias débiles de $\mathscr{C}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{M}$ es cerrada bajo retractos y cumple el axioma (M.1) [14] de la definición de estructura de modelo;

(b) los dominios de los morfismos de I son pequeños relativos en I-Cel;

(c) los dominios de los morfismos de J son pequeños relativos en J-Cel;

(d) $J\text{-Cof} \subseteq \mathcal{M} \cap I\text{-Cof}$;

(e) $I\text{-Iny} \subseteq \mathcal{M} \cap J\text{-Iny}.$;

(f) Cualquiera de las siguientes contenciones se cumple

$$\mathcal{M} \cap I\text{-Cof} \subseteq J\text{-Cof} \quad \text{o} \quad \mathcal{M} \cap J\text{-Iny} \subseteq I\text{-Iny}.$$

Demostración.
$(\Rightarrow)$ Es claro que la estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{M})$ cofibrantemente generada en $\mathscr{C}$ cumple los incisos $(a), (b), (c), (d), (e)$ y (f).
$(\Leftarrow)$ Definamos una estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ como sigue

$$\mathcal{C} := I\text{-Cof} \qquad \mathcal{F} := J\text{-Iny} \qquad \mathcal{W} := \mathcal{M}.$$

Observemos que $J\text{-Cof} = {}^{\pitchfork}(J\text{-Iny}) = {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$. Ahora veamos que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es una estructura de modelo. Veamos que se cumplen los axiomas de la definición de estructura de modelo (Def. 2.1.16).

(M.1) **Tres por dos.** Por inciso (a).

(M.2) **Retractos.** Por inciso (a).

(M.3) **Factorización.** Usando el **argumento de objeto pequeño** con los conjuntos I y J respectivamente, obtenemos factorizaciones funtoriales (α, β) y (γ, δ) en $\mathscr{C}$ tales que para cualquier morfismo f de $\mathscr{C}$ el siguiente diagrama conmuta

[14] Es decir, Si f y g son morfismos en $\mathscr{C}$ tal que gf está definida, y si dos de los morfismos f, g y gf están en $\mathcal{W}$, entonces el morfismo restante está en $\mathcal{W}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "\beta(f)"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
A \arrow[ur, "\alpha(f)"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma(f)"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & D, \\
 & B \arrow[ur, "\delta(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

con $\alpha(f) \in I$-Cel $\subseteq I$-Cof $= \mathcal{C}$, $\beta(f) \in I$-Iny $\subseteq \mathcal{W} \cap J$-Iny $= \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$, $\gamma(f) \in J$-Cel $\subseteq$ J-Cof $= {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$ y $\delta(f) \in J$-Iny $= \mathcal{F}$.

(M.4) **Levantamiento.** $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \pitchfork \mathcal{F}$ y $\mathcal{C} \pitchfork \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.
Probemos que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) \pitchfork \mathcal{F}$. En efecto, supongamos que $\mathcal{W} \cap I$-Cof $\subseteq J$-Cof. Haciendo las sustituciones posibles obtenemos $\mathcal{W} \cap \mathcal{C} \subseteq {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$, esto es equivalente a $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}) \pitchfork \mathcal{F}$.
Demostremos que $\mathcal{C} \pitchfork (\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$. Veamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}^{\pitchfork}$. Sea $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Entonces $p = \beta(p)\alpha(p)$, con $\alpha(p) \in I$-Cel $\subseteq I$-Cof $= \mathcal{C}$ y $\beta(p) \in I$-Iny $\subseteq \mathcal{W} \cap J$-Iny $= \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$. Como $\mathcal{W}$ cumple el axioma (M.1), tenemos que $\alpha(p) \in \mathcal{W}$; por el **argumento de retracción** concluimos que $p \in \mathrm{Re}(\beta(p))$. Notemos que I-Iny es cerrado bajo retractos. Luego $p \in I$-Iny, por lo que I-Cof $\pitchfork p$, es decir $p \in \mathcal{C}^{\pitchfork}$. Lo anterior prueba que $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}^{\pitchfork}$, lo cual equivalente a que $\mathcal{C} \pitchfork (\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$. ■

Lema 2.8.25. Sean $\mathscr{M}_1$ una categoría de modelo cofibrantemente generada, donde I es el generador de cofibraciones y J el generador de cofibraciones triviales, $\mathscr{M}_2$ una categoría de modelo y $(F, U, \Theta) : \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M}_2$ una adjunción. La adjunción (F, U, Θ) es una adjunción de Quillen si y sólo si Ff es una cofibración $\forall f \in I$ y Ff es una cofibración trivial $\forall f \in J$.

Demostración. Sean $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{W}_1)$ y $(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{W}_2)$ las estructuras de modelo de $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$, respectivamente.
($\Rightarrow$) Sea $f \in I$. Recordemos que $I \subseteq I$-Cof y notemos que I-Cof $= \mathcal{C}$ (Obs. 2.8.22), por lo que $f \in I$. Ya que F es parte de una adjunción de Quillen, por lo que F preserva cofibraciones. Entonces $Ff \in \mathcal{C}_2$. De forma análoga se demuestra que $Ff \in$ es una cofibración trivial $\forall f \in J$.
($\Leftarrow$) Veamos que F preserva cofibraciones. En efecto, por hipótesis tenemos que $FI \subseteq \mathcal{C}_2$. Luego FI-Cof $\subseteq \mathcal{C}_2$-Cof (Obs. 2.8.12). Por otro lado, tenemos que $F(I\text{-Cof}) \subseteq FI$-Cof (Lema 2.8.13). Por lo anterior, tenemos las siguientes contenciones

$$F(I\text{-Cof}) \subseteq FI\text{-Cof} \subseteq \mathcal{C}_2\text{-Cof}.$$

De nuevo, recordemos que I-Cof $= \mathcal{C}_1$ y notemos que

$$\mathcal{C}_2\text{-Cof} = {}^{\pitchfork}\left(\mathcal{C}_2{}^{\pitchfork}\right) = {}^{\pitchfork}(\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{W}_2) = \mathcal{C}_2.$$

Sustituyendo, obtenemos

$$F(\mathcal{C}_1) \subseteq FI\text{-Cof} \subseteq \mathcal{C}_2,$$

y entonces $F(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{C}_2$, lo cual significa que F preserva cofibraciones. De forma análoga se demuestra que F preserva cofibraciones triviales. ■

Definición 2.8.26. Sean $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en una categoría cocompleta $\mathscr{C}$ y K un conjunto de morfismos de $\mathscr{C}$.

(a) La clase $\mathrm{Cof}(K)$ se define como la clase de morfismos que son retractos de elementos de K-Cel.

(b) Diremos que $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es **cofibrantemente generado** si existe un conjunto I de morfismos de $\mathscr{C}$ tal que $\mathcal{R} = I^{\pitchfork}$ y $\mathcal{L} = \mathrm{Cof}(I)$.

Proposición 2.8.27. Si $\mathscr{M}$ es una categoría de modelo cofibrantemente generada tal que I es su generador de cofibraciones, entonces $I\text{-Cof} = \mathrm{Cof}(I)$.
Demostración. Recordemos que I-Cel $\subseteq I$-Cof (Prop. 2.8.16) y que I-Cof es cerrada bajo retractos, esto demuestra que $\mathrm{Cof}(I) \subseteq I$-Cof. Por otro lado, la Proposición 2.8.23(a) asegura que $I\text{-Cof} \subseteq \mathrm{Cof}(I)$. ■

Observación 2.8.28. Si consideramos una categoría de modelo $\mathscr{M}$ cofibrantemente generada, su estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ está determinada por dos sistemas de factorización débiles $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$. Dichos sistemas de factorización cumplen que

$$\mathcal{C} = I\text{-Cof} \qquad \mathcal{C} \cap \mathcal{W} = J\text{-Cof} \qquad \mathcal{F} \cap \mathcal{W} = I\text{-Iny} \qquad \mathcal{F} = J\text{-Iny}.$$

Por la Proposición 2.8.27 concluimos que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$, como se espera, son cofibrantemente generados. Es decir, los sistemas de factorización que determinan a una categoría de modelo cofibrantemente generada son cofibrantemente generados.

Terminaremos esta sección enunciando un teorema que nos dice cuando un sistema de factorización débil es funtorial.

Teorema 2.8.29. Un sistema de factorización débil cofibrantemente generado en una categoría localmente presentable $\mathscr{C}$ es funtorial.
Demostración. Ver [RT02].

2.9. Estructuras de modelo

En esta sección haremos una breve presentación de algunas estructuras de modelo que son clásicas en la literatura. Remarcamos que aunque son estructuras clásicas, la verificación de los axiomas de la definición de estructura de modelo no es trivial.

2.9.1. Estructura de modelo de Quillen

Consideremos la categoría **Top**, cuyos objetos son espacios topológicos y $\mathbf{Top}(X,Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de A a B. Además, la composición en **Top** es la composición usual de funciones.

Sean $I=[0,1]$ el intervalo cerrado unitario; $I^n=[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ (n veces) un n-cubo y $I^0=\{\star\}$. Decimos que dos funciones $f,g\in\mathbf{Top}$ son **homotópicas** si existe una función continua

$$H : X\times I\longrightarrow Y$$

tal que $H(X,0)=f(x)$ y $H(X,1)=g(x)$ para todo $x\in X$. En este caso, escribirmos $f\sim g$ para indicar que f y g son homotópicas. De hecho, la relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Denotaremos la frontera de I^n por ∂I^n. De este modo, si fijamos un punto x de un espacio topológico X, una función $f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,x)$ es continua si $f:I^n\longrightarrow X$ es continua y $f[\partial I^n]=\{x\}$.

El n-ésimo **grupo de homotopía** de X en x está definido por el cociente

$$\pi_n(X,x):=\{f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,x)\ \mid f \text{ es continua }\}/\sim.$$

Además, cada función $g\in\mathbf{Top}(X,Y)$ induce un homomorfismo de grupos

$$\pi_n(g,x):\pi_n(X,x)\longrightarrow\pi_n(Y,g(x)),\qquad f\longmapsto g\circ f \text{ para todo } x\in X.$$

Un morfismo $g\in\mathbf{Top}(X,Y)$ es una **equivalencia de homotopía débil** si el homomorfismo $\pi_n(g,x)$ es un isomorfismo de grupos $\forall n\geq 0$.

Así, la categoría **Top** tiene una estructura de modelo $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$, donde

(Q.1) $\mathcal{W}$ es la clase de equivalencias de homotopía débiles.

(Q.2) $\mathcal{F}$ es la clase de todas las fibraciones de Serre [15]. Es decir, las funciones continuas que se levantan por la derecha con respecto de todas las inclusiones de la forma

[15] Llamadas así por el matemático francés Jean Pierre Serre (1926 -).

$$D^n \times 0 \longrightarrow D^n \times I,$$

donde D^n es un n-disco cerrado unitario, es decir, $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

(Q.3) $\mathcal{C}$ es la clase de todos los morfismos que son retracto de un CW-complejo relativo.

Esta estructura es conocida como la estructura de modelo de Quillen en **Top**, o en su defecto, la q-estructura de modelo en **Top**. Además, es la primer estructura de modelo presentada explícitamente, la referencia original para esta construcción es [Qui67].
El inciso (Q.2) sugiere claramente que esta categoría de modelo es cofibrantemente generada, de hecho, esto es cierto. Los detalles de esta constucción pueden encontrarse en [Ho99].

2.9.2. Estructura de modelo de Støm

Una función $f \in$ **Top** es una **equivalencia de homotopía** si existe $g \in$ **Top** tal que $g \circ f \sim 1_X$ y $f \circ g \sim 1_Y$. La estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ definida por Arne Støm está determinada como

(S.1) $\mathcal{W}$ es la clase de todas las equivalencias de homotopía.

(S.2) $\mathcal{F}$ es la clase de las **fibraciones de Hurewicz** [16]. Es decir, las funciones continuas que se levantan por la derecha con respecto de las inclusiones de la forma $X \times \{0\} \longrightarrow X \times I$, donde X es un espacio topológico.

(S.3) $\mathcal{C}$ es la clase de todas las funciones continuas que se levantan con respecto de la clase de todas las funciones que son fibracciones de Hurewicz y equivalencias de homotopía.

Lo detalles de esta construcción pueden encontrarse en [St72].

2.9.3. Categoría estable de módulos

Un anillo R es **quasi-Frobenius** si la clase de R-módulos (izquierdos o derechos) proyectivos es igual a la clase de R-módulos (izquierdos o derechos) inyectivos.
Consideremos la categoría $_R$**Mod** de R-módulos izquierdos, con R un anillo quasi-Frobenius; y $f, g \in_R$ **Mod** morfismos. Decimos que f y g son **establemente equivalentes** si $f - g$ se factoriza a través de un R-módulo proyectivo [17]. En símbolos, escribimos $f \sim g$. Así, un morfismo $f \in {_R}\mathbf{Mod}(M,N)$ se dice **equivalencia estable** si existe $g \in {_R}\mathbf{Mod}(N,M)$ tal que $g \circ f \sim 1_M$ y

[16] Llamadas así por el matemático polaco Wiltod Hurewicz.
[17] Esta relación se puede definir cuando R es un anillo arbitrario.

$f \circ g \sim 1_N$.
La categoría ${}_R\mathbf{Mod}$ de R-módulos izquierdos, con R un anillo quasi-Frobenius tiene una estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ [18] definida como sigue

(E.1) $\mathcal{W}$ es la clase de todos los morfismos que son equivalencias estables.

(E.2) $\mathcal{F}$ es la clase de todos los epimorfismos de ${}_R\mathbf{Mod}$.

(E.3) $\mathcal{C}$ es la clase de todos los monomorfismos de ${}_R\mathbf{Mod}$.

La relación definida anteriormente es una relación de equivalencia, más aún, es compatible con la composición de ${}_R\mathbf{Mod}$. De este modo, la categoría **estable de *R*-módulos** se define como $\mathbf{St}_R\mathbf{Mod} := {}_R\mathbf{Mod}/\sim$. En este caso la categoría de homotopía de ${}_R\mathbf{Mod}$ es precisamente $\mathbf{St}_R\mathbf{Mod}$.
Por otro lado, la definición de esta estructura de modelo no sugiere explícitamente que esta sea cofibrantemente generada, sin embargo, lo es. El conjunto de todas la inclusiones de la forma $L :\longrightarrow R$, donde L es un ideal izquierdo de R, es el conjunto generador de cofibraciones. Además, el conjunto generador de cofibraciones triviales es el conjunto que tiene solamente al morfismo inclusión $\mathbf{0} \longrightarrow R$. Los detalles de esta construcción pueden encontrarse en [Ho99].

2.9.4. Estructura de modelo proyectiva

Sea R anillo. Consideremos la categoría $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$ de complejos en ${}_R\mathbf{Mod}$. La categoría $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$ tiene una estructura de modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ determinada como sigue

(P.1) $\mathcal{W}$ es la clase de todos los **quasi-isomorfismos**. Es decir, los morfismos de cadena $f^\bullet : \boldsymbol{C}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{K}^\bullet$ tal que el homomorfismo de grupos inducido $H^n(f^\bullet) : H^n(\boldsymbol{C}^\bullet) \longrightarrow H^n(\boldsymbol{K}^\bullet)$ es un isomorfismo.

(P.2) $\mathcal{F}$ es la clase de todos los epimorfismos de $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$.

(P.3) $\mathcal{C}$ es la clase de todos los morfismos de cadena $\left(f^n\right) = f^\bullet : \boldsymbol{C}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{K}^\bullet$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}$ el morfismo $f^n : C^n \longrightarrow K^n$ es mono-escindible y tiene conúcleo cofibrante.

Esta estructura de modelo es cofibrantemente generada. En efecto, para todo $M \in {}_R\mathbf{Mod}$ y $n \in \mathbb{Z}$ definimos los complejos $\boldsymbol{S}^\bullet_{(M,n)}$ y $\boldsymbol{D}^\bullet_{(M,n)}$ como sigue

[18] Por practicidad, llamaremos a esta estructura de modelo **estructura estable** en ${}_R\mathbf{Mod}$.

$$S^k_{(M,n)} := \begin{cases} M & \text{si } k=n \\ \mathbf{0} & \text{si } k\neq n. \end{cases} \qquad D^k_{(M,n)} := \begin{cases} M & \text{si } k=n \text{ o } k=n-1 \\ \mathbf{0} & \text{si } k\neq n \text{ y } k\neq n-1. \end{cases}$$

Las respectivas diferenciales están visualizadas en los siguientes diagramas

$$\boldsymbol{S}^{\bullet}_{(M,n)}: \quad \cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

$$\boldsymbol{D}^{\bullet}_{(M,n)}: \quad \cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

Notemos que existe una inyección $\boldsymbol{S}^{\bullet}_{(M,n-1)} \longrightarrow \boldsymbol{D}^{\bullet}_{(M,n)}$. Así, el conjunto generador de cofibraciones es el conjunto de todos los morfismo de cadena de la forma $\boldsymbol{S}^{\bullet}_{(M,n-1)} \longrightarrow \boldsymbol{D}^{\bullet}_{(M,n)}$ y el conjunto generador de cofibraciones triviales es el conjunto de todos los morfismos de la forma $\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{D}^{\bullet}_{(M,n)}$. En este caso, la categoría de homotopía de **Comp** $({}_R$**Mod**$)$ es precisamente la **categoría derivada** de ${}_R$**Mod**. Los detalles pueden encontrase en [Ho99].

2.9.5. Estructura de modelo absoluta

La siguiente estructura de modelo en **Comp** $({}_R$**Mod**$)$ es conocida como la estructura de modelo absoluta.

(As.1) $\mathcal{W}$ es la clase de morfismos de cadena que son equivalencias de homotopía (ver definición A.2.6)

(As.2) $\mathcal{F}$ es la clase de todos los morfismos de cadena $\left(f^n\right) = f^{\bullet} : \boldsymbol{C}^{\bullet} \longrightarrow \boldsymbol{K}^{\bullet}$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}$ el morfismo $f^n : C^n \longrightarrow K^n$ es epi-escindible .

(As.3) $\mathcal{C}$ es la clase de todos los morfismos de cadena $\left(f^n\right) = f^{\bullet} : \boldsymbol{C}^{\bullet} \longrightarrow \boldsymbol{K}^{\bullet}$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}$ el morfismo $f^n : C^n \longrightarrow K^n$ es mono-escindible .

Esta estructura de modelo tiene cierta relevancia en el capítulo 3, pues dicha estructura no es *abeliana*. Los detalles de esta construcción pueden encontrarse en [HC02].

Capítulo 3

Categorías de modelo y pares de cotorsión

La meta de este capítulo es describir una conexión entre las estructuras de modelo y la teoría de *pares de cotorsión*. Dicha conexión fue establecida en 2002 por Mark Hovey. Él probó que cierta estructura de modelo en una categoría bicompleta abeliana induce dos pares de *cotorsión completos*. La recíproca también es cierta, esto es, si tenemos tres clases de objetos que forman *dos pares de cotorsión completos y compatibles*, entonces es posible obtener una *estructura de modelo* con algunas características particulares.

3.1. Pares de cotorsión

En este capítulo consideraremos categorías abelianas que no necesariamente tengan suficientes inyectivos (o proyectivos). Por lo anterior, trabajaremos con el funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, donde $\mathcal{P}$ es la clase de todas las sucesiones exactas cortas de $\mathscr{A}$ (ver Apéndice A). Sin embargo, usaremos la notación $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}$ para referirnos al funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}$. De hecho, si la categoría $\mathscr{A}$ tiene suficientes inyectivos (o proyectivos), entonces los funtores anteriores son equivalentes (ver Teorema A.6.14).

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos de un categoría abeliana $\mathscr{A}$. El **complemento ortogonal derecho** de $\mathcal{A}$ con respecto del funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}$ se define como

$$\mathcal{A}^{\perp} := \{\, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A}) \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,Y) = \mathbf{0} \ \forall A \in \mathcal{A} \,\}.$$

El **complemento ortogonal izquierdo** de $\mathcal{A}$ con respecto del funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}$ se define como

$$^{\perp}\mathcal{A} := \{\, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A}) \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Y,A) = \mathbf{0} \ \forall A \in \mathcal{A} \,\}.$$

Definición 3.1.2. Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ clases de objetos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. El par ordenado $(\mathcal{D},\mathcal{E})$ es un **par de cotorsión** [1] en $\mathscr{A}$ si

$$\mathcal{D} = {}^{\perp}\mathcal{E} \quad \text{y} \quad \mathcal{E} = \mathcal{D}^{\perp}.$$

Definición 3.1.3. Sea $\mathcal{U}$ una clase de objetos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Decimos que $\mathcal{U}$ es **cerrada bajo extensiones** si para cualquier sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow X_1 \longrightarrow X \longrightarrow X_2 \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, con $X_1, X_2 \in \mathcal{U}$, se tiene que $X \in \mathcal{U}$.

Observación 3.1.4.

(a) Las clases $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son cerradas bajo retractos.
Demostración. Para $D \in \mathcal{D}$ y $\hat{D}$ retracto de D tenemos la siguiente sucesión

$$\hat{D} \xrightarrow{r} D \xrightarrow{p} \hat{D}\,,$$

donde $pr = 1_{\hat{D}}$. Consideremos el funtor contravariante $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(-,E)$, con $E \in \mathcal{E}$. De este modo, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}\left(\hat{D},E\right) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(p,E)"] \arrow[rr, bend right, "1_{\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\hat{D},E)}"'] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D,E) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(r,E)"] \arrow[d, phantom, "="] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}\left(\hat{D},E\right)\,, \\ & {} & \end{tikzcd}$$

entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}\left(\hat{D},E\right)$ es retracto de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D,E)$, y así $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}\left(\hat{D},E\right) = \mathbf{0}$, probándose que $\hat{D} \in {}^{\perp}\mathcal{E} = \mathcal{D}$. ■

(b) Las clases $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son cerradas bajo extensiones.
Demostración. Sea

$$\mathbf{0} \longrightarrow D_1 \longrightarrow D \longrightarrow D_2 \longrightarrow \mathbf{0}$$

[1] También se usa el término **teoría de cotorsión**. Los pares de cotorsión fueron introducidos en 1979 por Luigi Salce, en la categoría de grupos abelianos, y redescubiertos por Edgar. E. Enochs y coautores en la década de 1990. De hecho, la teoría de pares de cotorsión son de gran importancia en las matemáticas. Por ejemplo, fueron usados para demostrar que todo módulo tiene una covertura plana.

una sucesión exacta corta en $\mathscr{A}$, con $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. Para cada $E \in \mathcal{E}$ obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D_2,E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D,E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D_1,E) \longrightarrow \ldots$$

Notamos que

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D_2,E) = \mathbf{0} = \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D_1,E),$$

por lo tanto $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(D,E) = \mathbf{0}$, probándose que $D \in {}^{\perp}\mathcal{E} = \mathcal{D}$. ■

Las demostraciones para $\mathcal{E}$ son análogas.

Ejemplos 3.1.5. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana.

(a) Consideremos la clase $\operatorname{Iny}(\mathscr{A})$ de todos los objetos inyectivos de $\mathscr{A}$ y la clase $\operatorname{Pro}(\mathscr{A})$ de todos los objetos proyectivos de $\mathscr{A}$. Entonces $(\operatorname{Obj}(\mathscr{A}), \operatorname{Iny}(\mathscr{A}))$ y $(\operatorname{Pro}(\mathscr{A}), \operatorname{Obj}(\mathscr{A}))$ son pares de cotorsión en $\mathscr{A}$.

(b) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases de objetos de $\mathscr{A}$. Notemos que $\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp})$ y $\mathcal{A} \subseteq ({}^{\perp}\mathcal{A})^{\perp}$. Además, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ implica que $\mathcal{B}^{\perp} \subseteq \mathcal{A}^{\perp}$ y ${}^{\perp}\mathcal{B} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{A}$. Con lo anterior se concluye que

$$\mathcal{A}^{\perp} = ({}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp}))^{\perp} \quad \text{y} \quad {}^{\perp}\mathcal{A} = {}^{\perp}(({}^{\perp}\mathcal{A})^{\perp}).$$

Luego, $({}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp}), \mathcal{A}^{\perp})$ y $({}^{\perp}\mathcal{A}, ({}^{\perp}\mathcal{A})^{\perp})$ son pares de cotorsión en $\mathscr{A}$.

La siguiente definición está basada en el ejemplo anterior.

Definición 3.1.6. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases de morfismos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Diremos que el par ordenado $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ **tiene suficientes proyectivos** si $\forall X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ existe una sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, tal que $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Dualmente, decimos que $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ **tiene suficientes inyectivos** si $\forall X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ existe una sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, tal que $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Si $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos diremos que es un **par completo**. Finalmente, cuando un par de cotorsión $(\mathcal{D},\mathcal{E})$ es un par completo, simplemente diremos que es un **par de cotorsión completo**.

Observación 3.1.7. Una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tiene sufientes proyectivos si y sólo si el par de cotorsión $(\operatorname{Pro}(\mathscr{A}), \operatorname{Obj}(\mathscr{A}))$ tiene suficientes proyectivos.

El siguiente ejemplo proviene de [EJ00].

Ejemplo 3.1.8. Sean R un anillo y ${}_R\mathbf{Mod}$ la categoría de R-módulos izquierdos.

(a) Si $\mathcal{P}$ es la clase de R-módulos planos y $\mathcal{C}$ la clase de R-módulos de cotorsión, es decir, $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{C}$, entonces $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ es un par de cotorsión en ${}_R\mathbf{Mod}$. Dicho par es conocido como **el par de cotorsión de Enochs**.

(b) Si $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ es un par de cotorsión en ${}_R\mathbf{Mod}$, con suficientes inyectivos (resp. proyectivos), entonces $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ tiene suficientes proyectivos (resp. inyectivos).

Definición 3.1.9. Sea $\mathcal{U}$ una clase de objetos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Decimos que $\mathcal{U}$ es **gruesa** si

(a) $\mathcal{U}$ es cerrada bajo retractos y extensiones.

(b) $\mathcal{U}$ es cerrada bajo **núcleos de epimorfismos**. Es decir, para cualquier sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow X_1 \longrightarrow X \longrightarrow X_2 \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, con $X, X_2 \in \mathcal{U}$, se tiene que $X_1 \in \mathcal{U}$.

(c) $\mathcal{U}$ es cerrada bajo **conúcleos de monomorfismos**. Es decir, para cualquier sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow X_1 \longrightarrow X \longrightarrow X_2 \longrightarrow \mathbf{0}$$

en $\mathscr{A}$, con $X, X_1 \in \mathcal{U}$, se tiene que $X_2 \in \mathcal{U}$.

Definición 3.1.10. Sean $(\mathcal{D}, \mathcal{E}')$ y $(\mathcal{D}', \mathcal{E})$ pares de cotorsión en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Decimos que $(\mathcal{D}, \mathcal{E}')$ y $(\mathcal{D}', \mathcal{E})$ son $\mathcal{U}$-**compatibles** si existe una clase de objetos $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ tal que $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \mathcal{U}$ y $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{U}$. En este caso, simplemente diremos que $(\mathcal{D}, \mathcal{E} \cap \mathcal{U})$ y $(\mathcal{D} \cap \mathcal{U}, \mathcal{E})$ son pares de cotorsión compatibles.

Definición 3.1.11. Sean $(\mathcal{D}, \mathcal{E} \cap \mathcal{U})$ y $(\mathcal{D} \cap \mathcal{U}, \mathcal{E})$ pares de cotorsión completos y compatibles en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Decimos que $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{U})$ es un **triple de Hovey** en $\mathscr{A}$ si $\mathcal{U}$ es una clase gruesa.

3.2. La correspondencia pequeña de Hovey

En esta sección expondremos una versión simplificada de la correspondencia de Hovey, esto es, obtendremos un sistema de factorización débil a partir de un par de cotorsión y viceversa. Dicho resultado puede ser nombrado como, siguiendo a M. Pérez en [MP16], **la correspondencia pequeña de Hovey**.

El siguiente Lema es la primer conexión implícita entre pares de cotorsión y sistemas de factorización débiles.

Lema 3.2.1. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $f : X \longrightarrow Y$ un monomorfismo en $\mathscr{A}$ y $g : W \longrightarrow Z$ un epimorfismo de $\mathscr{A}$. Si $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Ker}(g)) = \mathbf{0}$, entonces $f \pitchfork g$.

Demostración. Encontraremos una solución para el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & W \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[ur, phantom, "=" near end, shift right=3] & Z .
\end{tikzcd}$$

En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[d] & \\
K \arrow[d, "k"'] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
W \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[d] & Y \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "c"] \\
\mathbf{0} & C \arrow[d] \\
. & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

Donde $c := \operatorname{coker}(f)$ y $k = \ker(g)$. Es claro que las filas del diagrama son sucesiones exactas cortas. El Lema A.5.10 nos permite formar el siguiente diagrama, donde $(-,-) := \mathscr{A}(-,-)$ y ${}^{i}(-,-) := \operatorname{Ext}^{i}(-,-)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \mathrm{C}_3 & \mathrm{C}_4 \\
 & & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
\mathrm{F}_1: & \mathbf{0} \arrow[r] & (C,K) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & (Y,K) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & (X,K) \arrow[r] \arrow[d, "(X,h)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {}^{1}(C,K)=\mathbf{0} \arrow[d] \\
\mathrm{F}_2: & \mathbf{0} \arrow[r] & (C,W) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & (Y,W) \arrow[r, "(f,W)"] \arrow[d, "(Y,g)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & (X,W) \arrow[r, "\delta_W"] \arrow[d, "(X,g)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {}^{1}(C,W) \arrow[d] \\
\mathrm{F}_3: & \mathbf{0} \arrow[r] & (C,Z) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & (Y,Z) \arrow[r, "(f,Z)"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & (X,Z) \arrow[r, "\delta_Z"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & {}^{1}(C,Z) \arrow[d] \\
\mathrm{F}_4: & \mathbf{0} \arrow[r] & {}^{1}(C,K)=\mathbf{0} \arrow[r] & {}^{1}(Y,K) \arrow[r] & {}^{1}(X,K) \arrow[r] & {}^{2}(C,K)
\end{tikzcd}\ ,
$$

con filas F_i y columnas C_i exactas para toda $1 \leq i \leq 4$. Note que la igualdad $\operatorname{Ext}^{1}_{\mathscr{A}}(C,K) = \mathbf{0}$ se da por hipótesis.

Ahora bien, para $\alpha \in \mathscr{A}(Y,W)$ tenemos que $\delta_W(\alpha) = \mathbf{0}$. En efecto, la columna C_4 es exacta y $\operatorname{Ext}^{1}_{\mathscr{A}}(C,K) = \mathbf{0}$, y así la función

$$\operatorname{Ext}^{1}_{\mathscr{A}}(X,g) : \operatorname{Ext}^{1}_{\mathscr{A}}(C,W) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{1}_{\mathscr{A}}(C,Z)$$

es inyectiva. Por otro lado, dado que $\beta f = g\alpha$, tenemos que

$$\delta_Z((X,g)(\alpha)) = \delta_Z(g\alpha) = \delta_Z((f,z)(\beta)) = \mathbf{0}.$$

Así que $\operatorname{Ext}^{1}(X,g)(\delta_W(\alpha)) = \mathbf{0}$, probándose que $\delta_W(\alpha) = 0$. Por exactitud de la fila F_2 existe un morfismo

$$d^0 : Y \longrightarrow W$$

tal que $\alpha = d^0 \circ f$. Ahora bien, consideremos el siguiente morfismo

$$\beta - g \circ d^0 : Y \longrightarrow Z.$$

Entonces

$$\beta - g \circ d^0 \overset{f^*}{\longmapsto} \left(\beta - g \circ d^0\right) \circ f = \beta \circ f - g \circ d^0 \circ f \, .$$

Notemos que

$$\beta \circ f - g \circ d^0 \circ f = \beta \circ f - g \circ \alpha = \mathbf{0}.$$

Luego, por exactitud de la fila F_3 existe un morfismo

$$l : C \longrightarrow Z$$

tal que $l \circ c = \beta - g \circ d^0$. La exactitud de la columna C_1 y la igualdad $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C,K) = \mathbf{0}$ implican que la siguiente función

$$(C,g) : \mathscr{A}(C,W) \longrightarrow \mathscr{A}(C,Z)$$

es suprayectiva, por lo cual existe un morfismo

$$l' : C \longrightarrow W$$

tal que $l = g \circ l'$. Sea $d := d^0 + l' \circ c : Y \longrightarrow W$. Entonces

$$d \circ f = \left(d^0 + l' \circ c\right) \circ f = d^0 f + l' \circ c \circ f = \alpha + \mathbf{0} = \alpha \quad \text{y}$$
$$g \circ d = g\left(d^0 + l' \circ c\right) = g \circ d^0 + g \circ l' \circ = g \circ d^0 + l \circ c = g \circ d^0 + \beta - g \circ d^0 = \beta.$$

Lo anterior prueba que $f \pitchfork g$. ■

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{X}$ una clase de objetos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Definimos las siguientes clases de morfismos
$\mathrm{Mon}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A}) := \{f \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A}) \mid \mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{X}\}$ y $\mathrm{Epi}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A}) := \{f \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A}) \mid \mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{X}\}$.

Lema 3.2.3. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ una clase cerrada bajo extensiones. Entonces las clases $\mathrm{Mon}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Epi}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A})$ son cerradas bajo composiciones.

Demostración. Probemos que $\mathrm{Mon}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A})$ es cerrada bajo composiciones. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos de $\mathrm{Mon}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A})$. El Corolario 1.19.45 nos brinda una sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g \circ f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g \circ f) \to \mathrm{Coker}(g) \to \mathbf{0}.$$

Es claro que $\operatorname{Ker}(f) = \mathbf{0} = \operatorname{Ker}(g)$, ya que f y g son monomorfismos. Por el diagrama anterior obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow \operatorname{Coker}(g \circ f) \longrightarrow \operatorname{Coker}(g) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Por hipótesis, tenemos que $\operatorname{Coker}(f), \operatorname{Coker}(g) \in \mathcal{X}$, y además $\mathcal{X}$ es cerraba bajo extensiones. Luego $\operatorname{Coker}(g \circ f) \in \mathcal{X}$, lo cual demuestra que $g \circ f \in \operatorname{Mon}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A})$. La demostración para $\operatorname{Epi}_{\mathcal{X}}(\mathscr{A})$ es dual. ■

Teorema 3.2.4. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ es un par de cotorsión completo en $\mathscr{A}$, entonces las clases $\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $\operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ forman un sistema de factorización débil $(\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}), \operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}))$ en $\mathscr{A}$.

Demostración.

(a) **Axioma de factorización.** Sea $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$. Demostraremos que f se factoriza como $f = p \circ i$, con $i \in \operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $p \in \operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$.

Caso 1. Sea f un monomorfismo. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\operatorname{coker}(f)} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

donde $C := \operatorname{Coker}(f)$. Ya que $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, es un par de cotorsión completo, existe una sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow E \longrightarrow D \xrightarrow{\ g\ } C \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

con $D \in \mathcal{D}$ y $E \in \mathcal{E}$. Dado que $\operatorname{coker}(f)$ y g son epimorfismos, la Proposición 1.19.46 nos permite construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \\
 & & E \arrow[r, "1_E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \prod_C D \arrow[r] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "="] & D \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "\operatorname{coker}(f)"'] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd},$$

con filas y columnas exactas. Por lo anterior, obtenemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \\ & Y\coprod_C D \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} .$$

Observemos que $i \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $p \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$.

Caso 2. Sea f un epimorfismo. La demostración es dual al caso anterior.

Caso 3. Sea f un morfismo arbitrario. Consideremos la siguiente factorización de f

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\widehat{f}"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Y \\ & X\oplus Y \arrow[ur, "p_Y"'] & \end{tikzcd} ,$$

donde $\widehat{f} = \binom{1_X}{f} := (1_X \oplus f) \circ i_X$ (Obs. 1.19.16). Note que $\widehat{f}$ es un monomorfismo. En efecto, la ecuación $p_X \circ \widehat{f} = 1_X$ nos dice precisamente que $\widehat{f}$ es un monomorfismo. De forma similar, p_Y es un epimorfismo. Por el Caso 1, $\widehat{f}$ se factoriza como $\widehat{f} = r' \circ l'$, con $l' \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $r' \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$. Notemos que $p_Y \circ r' \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$. Por el caso 2, $p_Y \circ r' = r \circ l''$ con $l'' \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $r \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$. Por lo anterior, tenemos que

$$f = p_Y \circ \widehat{f} = p_Y \circ r' \circ l' = r \circ l'' \circ l'.$$

Finalmente tenemos que $l'' \circ l' \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ por el Lema 3.2.3.

(b) **Axioma de levantamiento.**

$(b.1)$ Veamos que $[\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})]^{\pitchfork} \subseteq \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ y ${}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})] \subseteq \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$. En efecto, sea $f \in {}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$. Por el axioma de factorización, f se factoriza como $f = r \circ l$, con $l \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $r \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$. Por lo anterior, el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & Z \arrow[d, "r"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] \arrow[ur, dashed, "d"] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & Y \end{tikzcd}$$

tiene una solución $d : Y \longrightarrow X$. Notemos que l es monomorfismo y que $l = d \circ f$, por lo cual $f \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$. Ahora bien, veamos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), E) = \mathbf{0}$ para todo $E \in \mathcal{E}$. En efecto, sea $[S] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), E)$ una clase de sucesiones exactas cortas representada por la siguiente sucesión

$$S: \qquad \mathbf{0} \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

con $C := \mathrm{Coker}(f)$ y $E \in \mathcal{E}$. Veamos que S se escinde. Observemos que el siguiente diagrama es un diagrama de coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f) \end{tikzcd}\,.$$

Recordemos que $f \in {}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$ y que la clase ${}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$ es cerrada bajo coproductos fibrados (Prop. 2.1.14). Entonces, el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$ está en ${}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$. Notemos que $\beta \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$. Por lo cual, el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[rr] \arrow[d] & \arrow[d, phantom, "="] & Z \arrow[d, "\beta"] \\ \mathrm{Coker}(f) \arrow[urr, dashed] \arrow[rr, "1_{\mathrm{Coker}(f)}"'] & \arrow[u, phantom, "="] & \mathrm{Coker}(f) \end{tikzcd}\,,$$

tiene una solución $\delta : \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow Z$. Lo anterior nos dice que $\delta \circ \beta = 1_{\mathrm{Coker}(f)}$. Esto prueba que S se escinde, por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), E) = \mathbf{0}$ para todo $E \in \mathcal{E}$, entonces $\mathrm{Coker}(f) \in {}^{\pitchfork}\mathcal{E} = \mathcal{D}$, con lo anterior tenemos que $f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$. La otra contensión $[\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})]^{\pitchfork} \subseteq \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ se prueba de forma similar.
$(b.2)$ Demostremos que $\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}) \subseteq {}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$ y $\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}) \subseteq [\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})]^{\pitchfork}$. En efecto, sea $f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$, esto es, $f \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{D}$. Tomemos $g \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$. Entonces $g \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Ker}(g) \in \mathcal{E}$. Lo anterior nos dice que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Ker}(g)) = \mathbf{0}$. Finalmente por el Lema 3.2.1 concluimos que $f \pitchfork g$, por lo tanto $f \in {}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$. Lo anterior prueba que $\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}) \subseteq {}^{\pitchfork}[\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$. La otra contención $\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}) \subseteq [\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})]^{\pitchfork}$ se prueba de forma similar. ■

El Teorema 3.2.4 muestra explícitamente como obtener un sistema de factorización débil a partir de un par de cotorsión completo en una categoría abeliana. Ahora, expondremos la relación recíproca.

Definición 3.2.5. Sea $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en una categoría $\mathscr{C}$. Definimos las siguientes clases

$$\mathrm{Coker}(\mathcal{L}) := \{\mathrm{Coker}(l) \mid l \in \mathcal{L}\} \quad \text{y} \quad \mathrm{Ker}(\mathcal{R}) := \{\mathrm{Ker}(r) \mid r \in \mathcal{R}\}\,.$$

Lema 3.2.6. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en $\mathscr{A}$ tal que $\mathcal{L}\subseteq \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathcal{R}\subseteq \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

(a) Si $l\in \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$ y $\operatorname{Coker}(l)\in \operatorname{Coker}(\mathcal{L})$, entonces $l\in\mathcal{L}$.

(b) Si $r\in \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$ y $\operatorname{Ker}(r)\in \operatorname{Ker}(\mathcal{R})$, entonces $r\in\mathcal{R}$.

(c) $\forall X\in \operatorname{Ker}(\mathcal{R})$ y $\forall A\in \operatorname{Coker}(\mathcal{L})$ se tiene que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,X)=\mathbf{0}$.

Demostración.
$[(a)\Rightarrow(c)]$ Sean $A\in \operatorname{Coker}(\mathcal{L})$ y $X\in \operatorname{Ker}(\mathcal{R})$. Veamos que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,X)=\mathbf{0}$. En efecto, sea $[S]\in \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,X)$ una clase de sucesiones exactas cortas representada por la siguiente sucesión

$$S:\ \mathbf{0}\longrightarrow X\xrightarrow{\ f\ } Y\longrightarrow A\longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Probemos que S se escinde. Por el inciso (a) tenemos que $f\in\mathcal{L}$. Por otro lado, existe un morfismo $r\in\mathcal{R}\subseteq \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$ tal que $X=\operatorname{Ker}(r)$. De este modo, obtenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$\widehat{S}:\ \mathbf{0}\longrightarrow X\xrightarrow{\ \ker(r)\ } W\xrightarrow{\ r\ } Z\longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Notemos que el siguiente diagrama es un diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\ker(r)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[d, "r"] \\ \mathbf{0} \arrow[r] & Z, \end{tikzcd}$$

y recordemos que la clase $\mathcal{R}$ es cerrada bajo productos fibrados, por lo tanto el morfismo $X\longrightarrow\mathbf{0}$ está en $\mathcal{R}$. Luego, el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

tiene una solución, por lo que existe un morfismo $d:Y\longrightarrow X$ tal que $d\circ f=1_X$. Lo anterior prueba que S se escinde.
$[(c)\Rightarrow(a)]$ Sea $l\in \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$ tal que $\operatorname{Coker}(l)\in \operatorname{Coker}(\mathcal{L})$. Veamos que $l\in\mathcal{L}$. Sea $r\in\mathcal{R}$. Por hipótesis, tenemos que $r\in \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$ con $\operatorname{Ker}(r)\in \operatorname{Ker}(\mathcal{R})$. Por lo anterior, se tiene que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\operatorname{Coker}(l),\operatorname{Ker}(r))=\mathbf{0}$. Por el Lema 3.2.1, concluimos que $l\pitchfork r$, esto prueba que $l\in$

${}^{\pitchfork}\mathcal{R} = \mathcal{L}$.

$[(b) \Leftrightarrow (c)]$ se demuestra de forma dual. $\blacksquare$

Definición 3.2.7. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ un sistema de factorización débil en $\mathscr{A}$. Diremos que $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es **abeliano** si

(a) $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$.

(b) $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ cumple cualquiera de los incisos equivalentes del Lema 3.2.6.

Observación 3.2.8. El sistema de factorización débil $(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}), \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}))$ que proporciona el Teorema 3.2.4 es abeliano.
Demostración. Por definición tenemos que $\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}) \subseteq \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}) \subseteq \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$. Veamos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A, X) = \mathbf{0}$ $\forall A \in \mathrm{Coker}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}))$ y $\forall X \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}))$. En efecto, sean $A \in \mathrm{Coker}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}))$ y $X \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}))$. Entonces $A = \mathrm{Coker}(l)$ para algún $l \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $X = \mathrm{Ker}(r)$ para algún $r \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$. Lo anterior nos dice que $A \in \mathcal{D}$ y $X \in \mathcal{E}$, por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A, X) = \mathbf{0}$. $\blacksquare$

Teorema 3.2.9. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es un sistema de factorización débil abeliano en $\mathscr{A}$, entonces las clases $\mathrm{Coker}(\mathcal{L})$ y $\mathrm{Ker}(\mathcal{R})$ forman un par de cotorsión completo $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}), \mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ en $\mathscr{A}$.
Demostración.
(a) $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}), \mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ **es un par completo**.
$(a.1)$ $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}), \mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ **tiene suficientes proyectivos**. Sea $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[rr] \arrow[dr, "l"'] & \arrow[d, phantom, "="] & X \\ & A \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd} ,$$

con $l \in \mathcal{L}$ y $r \in \mathcal{R}$. Es claro que $\mathrm{Ker}(r) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$. Por otro lado, tenemos que $l \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ con $A = \mathrm{Coker}(l) \in \mathrm{Coker}(\mathcal{L})$. Luego, tomemos la siguiente sucesión exacta corta

$$S: \ \mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(r) \xrightarrow{\mathrm{ker}(r)} A \xrightarrow{r} X \longrightarrow \mathbf{0} ,$$

con $A \in \mathrm{Coker}(\mathcal{L})$ y $\mathrm{Ker}(r) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$.
$(a.2)$ $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}), \mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ **tiene suficientes inyectivos**. La demostración es similar al inciso anterior, aquí factorizamos el morfismo $X \longrightarrow \mathbf{0}$.

(b) $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}), \mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ **es un par de cotorsión**.

$(b.1)$ Demostremos que $\mathrm{Coker}(\mathcal{L}) \subseteq {}^{\perp}[\mathrm{Ker}(\mathcal{R})]$ y $\mathrm{Ker}(\mathcal{R}) \subseteq [\mathrm{Coker}(\mathcal{L})]^{\perp}$. Sea $A \in \mathrm{Coker}(\mathcal{L})$. Luego, $A = \mathrm{Coker}(l)$ para algún $l \in \mathcal{L}$. Por hipótesis, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A, X) = \mathbf{0}$ para todo $X \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$. Probándose que $A \in {}^{\perp}[\mathrm{Ker}(\mathcal{R})]$. La otra contensión $\mathrm{Ker}(\mathcal{R}) \subseteq [\mathrm{Coker}(\mathcal{L})]^{\perp}$ se prueba de forma similar.

$(b.2)$ Demostremos que ${}^{\perp}[\mathrm{Ker}(\mathcal{R})] \subseteq \mathrm{Coker}(\mathcal{L})$ y $[\mathrm{Coker}(\mathcal{L})]^{\perp} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$. Sea $X \in {}^{\perp}[\mathrm{Ker}(\mathcal{R})]$. Por el inciso (a), existe una sucesión exacta corta

$$S: \ \mathbf{0} \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow \mathbf{0},$$

con $A \in \mathrm{Coker}(\mathcal{L})$ y $B \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$. Observamos que el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow A$ está en $\mathcal{L}$. En efecto, tenemos que $A \in \mathrm{Coker}(l)$ para algún $l \in \mathcal{L}$. De esta forma, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
N \arrow[r, "\mathrm{Coker}(l)"'] & A
\end{tikzcd}$$

es un diagrama de coproducto fibrado. Recordemos que la clase $\mathcal{L}$ es cerrada bajo coproductos fibrados (Prop. 2.1.14). Luego, el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow A$ está en $\mathcal{L}$. Por otro lado, por hipótesis tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, B) = \mathbf{0}$, esto nos dice que S se escinde, por lo cual, existe un morfismo $\widehat{\beta} : X \longrightarrow A$ tal que $\beta \circ \widehat{\beta} = 1_X$. De esta forma, podemos construir el siguiente diagrama de retracción

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "="] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\widehat{\beta}"] \arrow[rr, bend right, "="', "1_X"'] & A \arrow[r, "\beta"] & X.
\end{tikzcd}$$

Dicho diagrama nos dice que el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow X$ es un retracto de $\mathbf{0} \longrightarrow A$. Ya que $\mathcal{L}$ es cerrado bajo retractos (Proposición 2.1.10), tenemos que $\mathbf{0} \longrightarrow X$ está en $\mathcal{L}$, y además $X = \mathrm{Coker}(\mathbf{0} \longrightarrow X) \in \mathcal{L}$. ■

Teorema 3.2.10 (Correspondencia pequeña de Hovey)**.** Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana.

(a) Si $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es un sistema de factorización débil abeliano en $\mathscr{A}$, entonces $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}), \mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ es un par de cotorsión completo en $\mathscr{A}$.

(b) Si $(\mathcal{D},\mathcal{E})$ es un par de cotorsión completo en $\mathscr{A}$, entonces $(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}),\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}))$ es un sistema de factorización débil abeliano en $\mathscr{A}$.

De hecho, la correspondencia pequeña de Hovey induce una propiedad adicional entre los pares de cotorsión completos y los sistemas de factorización débiles abelianos.

Notación 3.2.11. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. La clase de todos los pares de cotorsión completos en $\mathscr{A}$ es denotada por $\mathbf{Co}(\mathscr{A})$ y la clase de todos los sistemas de factorización débiles abelianos en $\mathscr{A}$ es denotada como $\mathbf{Fa}(\mathscr{A})$.

Observación 3.2.12. La correspondencia pequeña de Hovey induce asiganaciones

$$H:\mathbf{Co}(\mathscr{A})\longrightarrow\mathbf{Fa}(\mathscr{A}),\quad (\mathcal{D},\mathcal{E})\longmapsto(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}),\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}))\quad \text{y}$$

$$\widehat{H}:\mathbf{Fa}(\mathscr{A})\longrightarrow\mathbf{Co}(\mathscr{A}),\quad (\mathcal{L},\mathcal{R})\longmapsto(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}),\mathrm{Ker}(\mathcal{R})).$$

Proposición 3.2.13. Las asignaciones H y $\widehat{H}$ son inversas.
Demostración.
(a) $H\circ\widehat{H}=1_{\mathbf{Fa}(\mathscr{A})}$. Sea $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ un sistema de factorización débil abeliano en $\mathscr{A}$. Luego, $(\mathrm{Coker}(\mathcal{L}),\mathrm{Ker}(\mathcal{R}))$ es un par de cotorsión completo en $\mathscr{A}$. Por lo que

$$\left(\mathrm{Mon}_{\mathrm{Coker}(\mathcal{L})}(\mathscr{A}),\mathrm{Epi}_{\mathrm{Ker}(\mathcal{R})}(\mathscr{A})\right)$$

es un sistema de factorización débil en abeliano en $\mathscr{A}$. Probemos las siguientes igualdades

$$\mathrm{Mon}_{\mathrm{Coker}(\mathcal{L})}(\mathscr{A})=\mathcal{L}\quad \text{y}\quad \mathrm{Epi}_{\mathrm{Ker}(\mathcal{R})}(\mathscr{A})=\mathcal{R}.$$

Sea $f\in\mathrm{Mon}_{\mathrm{Coker}(\mathcal{L})}(\mathscr{A})$. Luego, $f\in\mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Coker}(f)\in\mathrm{Coker}(\mathcal{L})$. Por definición de sistema de factorización abeliano, concluimos que $f\in\mathcal{L}$. Sea $f\in\mathcal{L}$. Entonces $f\in\mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Coker}(f)\in\mathrm{Coker}(\mathcal{L})$. Esto nos dice que $f\in\mathrm{Mon}_{\mathrm{Coker}(\mathcal{L})}(\mathscr{A})$. La otra igualdad se demuestra de forma dual.
(b) $\widehat{H}\circ H=1_{\mathbf{Co}(\mathscr{A})}$. Sea $(\mathcal{D},\mathcal{E})$ un par de cotorsión completo en $\mathscr{A}$. Por la correspondencia pequeña de Hovey , $[\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}),\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})]$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{A}$. Luego,

$$(\mathrm{Coker}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})),\mathrm{Ker}(\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})))$$

es un sistema de factorización débil abeliano en A. Probemos las siguientes igualdades

$$\mathcal{D}=\mathrm{Coker}(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}))\quad \text{y}\quad \mathcal{E}=\mathrm{Ker}(\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})).$$

Sea $X \in \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}\left(\mathscr{A}\right)\right)$. Entonces, $X = \mathrm{Coker}\left(f\right)$ con $f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}\left(\mathscr{A}\right)$. Por lo tanto $f \in \mathrm{Mon}\left(\mathscr{A}\right)$ y $\mathrm{Coker}\left(f\right) \in \mathcal{D}$. Esto prueba que $X \in \mathcal{D}$. Sea $X \in \mathcal{D}$. Ya que $\left(\mathcal{D}, \mathcal{E}\right)$ es un par de cotorsión completo, existe una sucesión exacta corta en $\mathcal{A}$

$$S:\ \mathbf{0} \longrightarrow E \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} X \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

con $E \in \mathcal{E}$ y $D \in \mathcal{D}$. Luego, podemos formar la siguiente sucesión exacta corta

$$\widehat{S}:\ \mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(g\right) \xrightarrow{f := \ker(g)} D \xrightarrow{g} X \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

lo anterior nos dice que $X = \mathrm{Coker}\left(f\right)$ con $f \in \mathrm{Mon}\left(\mathscr{A}\right)$ y $\mathrm{Coker}\left(f\right) = X \in \mathcal{D}$. Lo anterior significa precisamente que $X \in \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}\left(\mathscr{A}\right)\right)$. La otra igualdad se demuestra de forma similar. ■

3.3. La correspondencia de Hovey

En esta sección mostraremos que un triple de Hovey en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ determina cierta estructura de modelo, la cual es conocida como *estructura de modelo abeliana*. La inversa también es cierta. Esto es, cada *estructura de modelo abeliana* determina un triple de Hovey. Dicho triple está formado por las clases de objetos cofibrantes, fibrantes y triviales.
Realizaremos un razonamiento [2] que nos va a sugerir la relación entre los pares de cotorsión y las categorías de modelo. En efecto, consideremos un par de cotorsión $\left(\mathcal{D}, \mathcal{E}\right)$ en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y una sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \longrightarrow D \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

con $D \in \mathcal{D}$. Entonces, para todo $E \in \mathcal{E}$ la función $\mathscr{A}\left(i, E\right) : \mathscr{A}\left(B, E\right) \longrightarrow \mathscr{A}\left(A, E\right)$ es supra-yectiva ya que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}\left(D, E\right) = \mathbf{0}$. En el lenguaje de categorías de modelo, lo anterior dice que el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & E \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathbf{0}, \end{tikzcd}$$

tiene una solución. Si consideramos a i como una cofibración trivial entonces $E \longrightarrow \mathbf{0}$ parece ser una fibración. Siguiendo esta idea, $\mathcal{E}$ podría ser la clase de todos los objetos fibrantes. Esto sugiere una relación entre categorías de modelo y pares de cotorsión.

[2] Este razonamiento proviene de [Ho02].

3.3.1. Categorías de modelo abelianas

Antes de exponer la correspondencia Hovey, vamos a introducir la noción de *estructura de modelo abeliana*.

Definición 3.3.1. Sea $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ una estructura de modelo en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Decimos que $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ es **abeliana** si

(A.1) $f \in \mathcal{C}$ si y sólo si $f \in \mathrm{Mon}\,(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Coker}\,(f) \in \mathcal{C}^{\bullet}$;

(A.2) $g \in \mathcal{F}$ si y sólo si $g \in \mathrm{Epi}\,(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Ker}\,(g) \in \mathcal{F}^{\bullet}$.

Recordemos que $\mathcal{C}^{\bullet}$ y $\mathcal{F}^{\bullet}$ son la clase de objetos cofibrantes y fibrantes respectivamente.

Definición 3.3.2 (M. Hovey)**.** Una **categoría de modelo abeliana** es una categoría abeliana bicompleta $\mathscr{A}$ dotada con una estructura de modelo abeliana $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$.

Definición 3.3.3. Sean $\mathscr{M}$ una categoría de modelo y $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ la estructura de modelo de $\mathscr{M}$. Diremos que un objeto $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{M})$ es **cofibrante trivial** si el morfismo $0 \longrightarrow X$ es una cofibración trivial. De forma dual, diremos que X es un objeto **fibrante trivial** si el morfismo $X \longrightarrow 1$ es una fibración trivial. La clase de objetos cofibrantes triviales es denotada por $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$ y la de los objetos fibrantes triviales como $(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$.

Observación 3.3.4. $\mathcal{C}^{\bullet}\cap\mathcal{W}^{\bullet} = (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$ y $\mathcal{F}^{\bullet}\cap\mathcal{W}^{\bullet} = (\mathcal{F}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$.
Demostración.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{C}^{\bullet}\cap\mathcal{W}^{\bullet} &\Leftrightarrow X \in \mathcal{C}^{\bullet} \text{ y } X \in \mathcal{W}^{\bullet} \\ &\Leftrightarrow [\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \mathcal{C} \text{ y } [\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \mathcal{W} \\ &\Leftrightarrow [\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W} \\ &\Leftrightarrow X \in (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\bullet}. \end{aligned}$$

La demotración de la otra igualdad es similar. ■

Observación 3.3.5. Sea $\mathscr{A}$ una categoría de modelo abeliana. Entonces, el conúcleo de una cofibración trivial es un objeto cofibrante trivial. Dualmente, el núcleo de una fibración trivial es un objeto fibrante trivial.
Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ una cofibración trivial de $\mathscr{A}$. Notemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d] \\ \mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f)\,, \end{tikzcd}$$

es un diagrama de coproducto fibrado. Recordemos que la clase de cofibraciones triviales es cerrada bajo coproductos fibrados, entonces el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$ es una cofibración trivial, por lo tanto el conúcleo de f es un objeto cofibrante trivial. La otra afirmación se demuestra de forma dual. ■

En una estructura de modelo abeliana, las cofibraciones triviales y las fibraciones triviales tienen una caracterización más sencilla.

Lema 3.3.6. Sean $\mathscr{A}$ una categoría de modelo abeliana y $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ la estructura de modelo abeliana de $\mathscr{A}$.

(a) $f \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ si y sólo si $f \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Coker}(f) \in (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$.

(b) $f \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ si y sólo si $f \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Ker}(f) \in (\mathcal{F}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$.

Demostración.(a)
$(\Rightarrow)$ Sea $f \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$. En particular $f \in \mathcal{C}$, y además $f \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$. La Observación 3.3.5 nos dice que $\mathrm{Coker}(f) \in (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$.
$(\Leftarrow)$ Sea $f \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ tal que $\mathrm{Coker}(f) \in (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\bullet}$. Veamos que $f \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W} = {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$. En efecto, consideremos el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "="] & W \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, phantom, shift left=4, "="] & Z\,, \end{tikzcd}$$

con $g \in \mathcal{F}$. Encontraremos una solución para el problema de levantamiento anterior. Ya que $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ es una estructura de modelo abeliana tenemos que $g \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Ker}(g) \in \mathcal{F}^{\bullet}$. Ahora, veamos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Ker}(g)) = \mathbf{0}$. En efecto, tomemos $[S] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Ker}(g))$ una clase de sucesiones exactas cortas en $\mathscr{A}$ representada por

$$S: \quad \mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow X \xrightarrow{h} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Veamos que S se escinde. Notemos que el morfismo $h : X \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$ es una fibración, ya que h es un epimorfismo y su núcleo $\mathrm{Ker}(g)$ es un objeto fibrante. Por lo anterior, el siguiente problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & X \arrow[d, "h"] \\
\operatorname{Coker}(f) \arrow[r, "1_{\operatorname{Coker}(f)}"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & \operatorname{Coker}(f)
\end{tikzcd}$$

tiene una solución. Entonces existe $d : \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow X$ tal que $hd = 1_{\operatorname{Coker}(f)}$. Por lo tanto S se escinde. Lo anterior prueba que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\operatorname{Coker}(f), \operatorname{Ker}(g)) = \mathbf{0}$. Por el Lema 3.2.1 concluimos que $f \pitchfork g$, probándose que $f \in {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$. ■

Observación 3.3.7. Sean $\mathscr{A}$ una categoría de modelo abeliana y $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ la estructura de modelo abeliana de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen

(a) $\operatorname{Coker}(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) = \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$ y $\operatorname{Coker}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^\bullet$.

(b) $\operatorname{Ker}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}) = \mathcal{F}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$ y $\operatorname{Ker}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^\bullet$.

(c) Los sistemas de factorización $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$, que definen a $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$, son abelianos.

Demostración.
(a) $\operatorname{Coker}(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) = \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$.

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Coker}(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) &\Leftrightarrow X = \operatorname{Coker}(l) \ \text{ con } \ l \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W} \\
&\Leftrightarrow X = \operatorname{Coker}(l) \ \text{ con } \ l \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A}) \ \text{ y } \operatorname{Coker}(l) \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet \\
&\Rightarrow X = \operatorname{Coker}(l) \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet. \\
X \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet &\Leftrightarrow [\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W} \\
&\Leftrightarrow [\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A}) \ \text{ y } \operatorname{Coker}(\mathbf{0} \longrightarrow X) \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet \\
&\quad \text{Notemos que } X = \operatorname{Coker}(\mathbf{0} \longrightarrow X) \\
&\Rightarrow X \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet.
\end{aligned}$$

(b) Se demuestra de forma similar al inciso (a).
(c) Veamos que el sistema de factorización débil $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ es abeliano. En efecto, la definición de estructura de modelo abeliana nos dice que $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \subseteq \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$, y además $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$. Por otro lado, supongamos que

$$l \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A}) \ \text{ y } \ \operatorname{Coker}(l) \in \operatorname{Coker}(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) = \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet,$$

por el Lema 3.3.6 concluimos que $l \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. ■

3.3.2. La correspondencia de Hovey

Teorema 3.3.8. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ es una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$, entonces $(\mathcal{C}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet},\mathcal{W}^{\bullet})$ es un triple de Hovey.

Demostración.

Sea $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$. La definición de estructura de modelo nos dice que $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ y $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ son sistemas de factorización débiles. Además, dichos sistemas de factorización son abelianos, por la Observación 3.3.7.(c). La correspondencia pequeña de Hovey nos dice que

$$\mathbf{C_1} := (\mathrm{Coker}\,(\mathcal{C}\cap\mathcal{W})\,,\mathrm{Ker}\,(\mathcal{F})) \quad \text{y} \quad \mathbf{C_2} := (\mathrm{Coker}\,(\mathcal{C})\,,\mathrm{Ker}\,(\mathcal{F}\cap\mathcal{W}))$$

son pares de cotorsión completos.

(a) $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ **son pares de cotorsión** $\mathcal{W}^{\bullet}$**-compatibles**. La Observación 3.3.7 nos dice que

$$\mathbf{C_1} = (\mathcal{C}^{\bullet}\cap\mathcal{W}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) \quad \text{y} \quad \mathbf{C_2} = (\mathcal{C}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}\cap\mathcal{W}^{\bullet}).$$

Esto nos dice precisamente que $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ son $\mathcal{W}^{\bullet}$-compatibles.

(b) $\mathcal{W}^{\bullet}$ **es gruesa**.

$(b.1)$ $\mathcal{W}^{\bullet}$ **es cerrada bajo retractos**. Sean $Y \in \mathcal{W}^{\bullet}$ y X un retracto de Y. Luego, existen morfismos u y v de $\mathscr{A}$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "u"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & X \\ & Y \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $X \in \mathcal{W}^{\bullet}$. En efecto, de lo anterior se tiene que el siguiente diagrama de retracción

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{0}"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] & X \end{tikzcd}$$

Observamos que el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow Y$ está en $\mathcal{W}$ ya que $Y \in \mathcal{W}^{\bullet}$. Luego, $\mathbf{0} \longrightarrow X$ está en $\mathcal{W}$ ya que $\mathcal{W}$ es cerrada bajo retractos. Probándose que $X \in \mathcal{W}^{\bullet}$.

Antes de verificar los axiomas restantes de la definición de clase gruesa, realizaremos la siguiente construcción.

Sea

$$S: \qquad \mathbf{0} \longrightarrow W_1 \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} W_2 \longrightarrow \mathbf{0}$$

una sucesión exacta corta en $\mathscr{A}$. Tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "="] & W \\ & Q, \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

con $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ y $p \in \mathcal{F}$. Usando que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es una estructura de modelo abeliana, tenemos

(1) $i \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Coker}(i) \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$;

(2) $p \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Ker}(p) \in \mathcal{F}^\bullet$.

La propiedad universal del conúcleo nos dice que existe un morfismo $q : \mathrm{Coker}(i) \to W_2$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{W_1}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Q \arrow[r, "\mathrm{coker}(i)"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Coker}(i) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "q"] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "f"'] & W \arrow[r, "g"'] & W_2 \arrow[r] & \mathbf{0}\,. \end{tikzcd}$$

Notemos que q es un epimorfismo, ya que $q \circ \mathrm{coker}(i) = g \circ p$ y p, g son epimorfismos. Usando el Lema de la serpiente, en el diagrama anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(1_{W_1}) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(p) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[dll] & \\ & \mathrm{Coker}(1_{W_1}) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(p) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(q) \arrow[r] & \mathbf{0}. \end{tikzcd}$$

Simplificando, obtenemos las siguiente sucesión exacta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(p) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Luego el morfismo $\mathrm{Ker}(p) \to \mathrm{Ker}(q)$ es un isomorfismo (Prop. 1.19.27). Dado que $q \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Ker}(q) \cong \mathrm{Ker}(p) \in \mathcal{F}^\bullet$, se tiene que $q \in \mathcal{F}$.

$(b.2)$ $\mathcal{W}^\bullet$ **es cerrada bajo núcleos de epimorfismos.** Supongamos que $W, W_2 \in \mathcal{W}^\bullet$ en la sucesión exacta S. Veamos que $W_1 \in \mathcal{W}^\bullet$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Coker}(i) \arrow[rr, "q"] & & W_2 \\ & \mathbf{0}, \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

Notemos que los morfismos $\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Coker}(i)$ y $\mathbf{0} \longrightarrow W_2$ están en $\mathcal{W}$; ya que $W_2 \in \mathcal{W}^\bullet$ y $\operatorname{Coker}(i) \in \mathcal{C}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$. Por el Axioma tres por dos, tenemos que $q \in \mathcal{W}$, por lo tanto $q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Por la definición de estructura de modelo abeliana, concluimos que $\operatorname{Ker}(q) \in \mathcal{F}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$. Dado que $\operatorname{Ker}(p) \cong \operatorname{Ker}(q) \in \mathcal{F}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet$, por la definición de estructura de modelo abeliana tenemos que $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

Advertimos que hasta ahora no se ha usado la hipótesis $W \in \mathcal{W}^\bullet$.

Ahora bien, tomemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "p"] & & W \\ & \mathbf{0}, \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

donde $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ y $[\mathbf{0} \longrightarrow W] \in \mathcal{W}$. Lo anterior sucede porque $W \in \mathcal{W}^\bullet$. Por el Axioma tres por dos, el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow Q$ está en $\mathcal{W}$. De la misma forma, tomemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[rr, "i"] & & Q \\ & \mathbf{0}. \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

Por el Axioma tres por dos, el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow W_1$ está en W, probándose que $W_1 \in \mathcal{W}^\bullet$.

$(b.3)$ $\mathcal{W}^\bullet$ **es cerrada bajo extensiones.** Supongamos que $W_1, W_2 \in \mathcal{W}^\bullet$. La demostración es la misma que el inciso anterior hasta la advertencia del uso de la hipótesis $W \in \mathcal{W}^\bullet$. Ya que $f = p \circ i$, con $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ y además $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, tenemos que $f \in \mathcal{W}$. Tomando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[rr, "f"] & & W \\ & \mathbf{0}, \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

concluimos que el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow W$ está en $\mathcal{W}$; esto sucede porque los morfismos $\mathbf{0} \longrightarrow W_1$ y f están en $\mathcal{W}$, probándose $W \in \mathcal{W}^\bullet$.

$(b.4)$ $\mathcal{W}^\bullet$ **es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.** La demostración es similar a los dos incisos anteriores. ■

Aseguramos que la implicación, en el teorema anterior, es una equivalencia. Antes de probarlo, vamos a introducir la siguiente notación.

Notación 3.3.9. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ clases de morfismos de una categoría $\mathscr{C}$. Definimos la siguiente clase de morfismos

$$\mathcal{R} * \mathcal{S} := \{\, s \circ r \mid r \in \mathcal{R} \text{ y } s \in \mathcal{S} \,\}.$$

Es claro que si $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{C}$, entonces $\mathcal{L} * \mathcal{R} = \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$.

Teorema 3.3.10. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{U})$ es un triple de Hovey en $\mathscr{A}$, entonces existe una única estructura de modelo abeliana $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ en $\mathscr{A}$ tal que

(1) $\mathcal{C} = \operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$,

(2) $\mathcal{F} = \operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$,

(3) $\mathcal{W} = \operatorname{Mon}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}) * \operatorname{Epi}_{\mathcal{E} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A})$.

Demostración. Sea $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{U})$ un triple de Hovey en $\mathscr{A}$. Lo anterior nos dice que $(\mathcal{D}, \mathcal{E} \cap \mathcal{U})$ y $(\mathcal{D} \cap \mathcal{U}, \mathcal{E})$ son pares de cotorsión completos en $\mathscr{A}$. Por la correspondencia pequeña de Hovey tenemos que

$$\mathbf{F}_1 := (\operatorname{Mon}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}), \operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_2 := (\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}), \operatorname{Epi}_{\mathcal{E} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}))$$

son sistemas de factorización débiles abelianos en $\mathscr{A}$.

Antes de demostrar que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$, probaremos la primera de las siguientes igualdades. La otra igualdad se demuestra de manera dual.

(a) $$\operatorname{Mon}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}) = \mathcal{C} \cap \mathcal{W} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Epi}_{\mathcal{E} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}) = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}.$$

$(a.1)$ $\operatorname{Mon}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}) \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Sea $f \in \operatorname{Mon}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Es claro que $f \in \mathcal{C}$. Por otro lado, tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & Y \\ & Y. \arrow[ur, "1_Y"'] & \end{tikzcd}$$

La Proposición 2.2.3 nos dice que $\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A}) = \mathrm{Iso}(\mathscr{A})$. Luego $1_Y \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Esto demuestra que $f \in \mathcal{W}$.

$(a.2)$ $\mathcal{C}\cap\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Sea $f \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$. Entonces $f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y además $f = e\circ m$, con $m \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$, $e \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$, $\mathrm{Coker}(m) \in \mathcal{D}\cap\mathcal{U}$ y $\mathrm{Ker}(e) \in \mathcal{E}\cap\mathcal{U}$. Por el Corolario 1.19.45 obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(m) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(e) \longrightarrow \mathrm{Coker}(m) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(e) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Simplificando la sucesión anterior obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(e) \longrightarrow \mathrm{Coker}(m) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Ya que $\mathcal{U}$ es gruesa, concluimos que $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{D}\cap\mathcal{U}$, probándose que $f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$.

Ahora bien, las igualdades del inciso (a) nos dicen que

$$\mathbf{F}_1 = (\mathcal{C}\cap\mathcal{W}, \mathcal{F}) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_2 = (\mathcal{C}, \mathcal{F}\cap\mathcal{W}).$$

(b) $\mathcal{W}$ **satisface el Axioma tres por dos**. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos en $\mathscr{A}$.
$(b.1)$ Supongamos que $f, g \in \mathcal{W}$. Veamos que $g\circ f \in \mathcal{W}$.
Caso 1. Sean $g \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$ y $f \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "m"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Z \\ & W \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd},$$

con $e \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$ y $m \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$. Por la propiedad universal del conúcleo, existe un morfismo $q : \mathrm{Coker}(m) \longrightarrow \mathrm{Coker}(g)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[r, "\mathrm{coker}(m)"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Coker}(m) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "q"] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "\mathrm{coker}(g)"'] & \mathrm{conker}(g) \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}.$$

Notemos que q es un epimorfismo, ya que $\mathrm{coker}(g)$ y e lo son. Usando el Lema de la serpiente en el diagrama anterior obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(e) \arrow[r] & \mathrm{ker}\,(q) \arrow[dll] & \\ & \mathrm{Coker}\,(f) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,(e) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,(q) \arrow[r] & \mathbf{0}. \end{tikzcd}$$

Simplificando, obtenemos las siguiente sucesión exacta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(e) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(q) \longrightarrow \mathbf{0},$$

Por hipótesis, $\mathrm{Ker}\,(f)$ y $\mathrm{Ker}\,(e)$ están en $\mathcal{U}$. Ya que $\mathcal{U}$ es gruesa, concluimos que $\mathrm{Ker}\,(q) \in \mathcal{U}$. Por otro lado, consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(q) \xrightarrow{\mathrm{Ker}(q)} \mathrm{Coker}\,(m) \xrightarrow{q} \mathrm{Coker}\,(g) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Luego $\mathrm{Coker}\,(m) \in \mathcal{U}$, ya que $\mathcal{U}$ es cerrada bajo extensiones. Esto prueba que $m \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$, por lo tanto $g \circ f \in \mathcal{W}$.

Caso general. Sean f y g son morfismos arbitrarios de $\mathcal{W}$. Por definición de $\mathcal{W}$, obtenemos la siguiente factorización

$$g \circ f = (e_2 \circ m_2) \circ (e_1 \circ m_1),$$

con $m_1, m_2 \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$ y $e_1, e_2 \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$. Por el caso anterior, tenemos que

$$m_2 \circ e_1 = e_3 \circ m_3,$$

con $m_3 \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$ y $e_3 \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$. Entonces

$$g \circ f = (e_e \circ m_2) \circ (e_1 \circ m_1) = e_2 \circ e_3 \circ m_3 \circ m_1,$$

Recordemos que las clases $\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$ y $\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$ son cerradas bajo composiciones (Prop. 2.1.10). Probándose que $g \circ f \in \mathcal{W}$.

$(b.2)$ Supongamos que $g, g \circ f \in \mathcal{W}$. Veamos que $f \in \mathcal{W}$.

Caso 1. Sea $f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}\,(\mathscr{A})$. Tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "m"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Z \\ & W, \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

con $e \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$ y $m \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}\,(\mathscr{A})$. Reorganizando el diagrama anterior obtenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m\circ f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "1_Z"] \\ W \arrow[r, "1_W"'] & W \arrow[r, "e"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Notemos que $m \circ f \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$. Por otro lado, por hipótesis, podemos tomar la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "m_1"'] & \arrow[d, phantom, "="] & Z \\ & W_1 \arrow[ur, "e_1"'] & \end{tikzcd},$$

con $e_1 \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$ y $m_1 \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Dado que $\mathbf{F}_2 := (\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}), \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A}))$ es un sistema de factorización débil en $\mathscr{A}$, el siguiente problema de levantamiento tiene una solución

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "m\circ f"'] & W_1 \arrow[d, "e_1"] \\ W \arrow[r, "e"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & Z \end{tikzcd}.$$

Reorganizando el diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m\circ f"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[r, "e"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \arrow[d, "1_Z"] \\ X \arrow[r, "m_1"'] & W_1 \arrow[r, "e_1"'] & Z \end{tikzcd}.$$

Ahora bien, tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "m_2"'] & \arrow[d, phantom, "="] & W_1 \\ & W_2 \arrow[ur, "e_2"'] & \end{tikzcd},$$

con $e_2 \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$ y $m_2 \in \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$. Notemos que $e = e_1 \circ d = (e_1 \circ e_2) \circ m_2$. Por el Corolario 1.19.45 obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Ker}(m_2) \to \mathrm{Ker}(e) \to \mathrm{Ker}(e_1 \circ e_2) \to \mathrm{Coker}(m_2) \to \mathrm{Coker}(e) \to \mathrm{Coker}(e_1 \circ e_2) \to \mathbf{0}.$$

Notemos que $e_1 \circ e_2 \in \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$, ya que $\mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$ es cerrada bajo composiciones. Simplificando la sucesión anterior, obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(e) \longrightarrow \ker(e_1 \circ e_2) \longrightarrow \mathrm{Coker}(m_2) \longrightarrow \mathbf{0},$$

con $\mathrm{Ker}(e), \mathrm{Ker}(e_1 \circ e_2) \in \mathcal{U}$, por lo que $\mathrm{Coker}(m_2) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}$. Por otro lado, observamos que $m_1 = e_2 \circ (m_2 \circ m \circ f)$. Por el Corolario 1.19.45, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \mathbf{0} \arrow[r] & \operatorname{Ker}(m_2\circ m\circ f) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(m_1) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(e_2) \arrow[dll] & \\ & \operatorname{Coker}(m_2\circ m\circ f) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(m_1) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(e_2) \arrow[r] & \mathbf{0}. \end{tikzcd}$$

Simplificando, obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Ker}(e_2) \longrightarrow \operatorname{Coker}(m_2\circ m\circ f) \longrightarrow \operatorname{Coker}(m_1) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Ya que $\mathcal{U}$ es gruesa, tenemos que $\operatorname{Coker}(m_2\circ m\circ f)\in\mathcal{U}$. Probándose que $(m_2\circ m\circ f)$ está en $\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. De forma similar, usando la composición $m_2\circ(m\circ f)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \mathbf{0} \arrow[r] & \operatorname{Ker}(m\circ f) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(m_2\circ m\circ f) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(m_2) \arrow[dll] & \\ & \operatorname{Coker}(m\circ f) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(m_2\circ m\circ f) \arrow[r] & \operatorname{Coker}(m_2) \arrow[r] & \mathbf{0}. \end{tikzcd}$$

Simplificando, obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Coker}(m\circ f) \longrightarrow \operatorname{Coke}(m_2\circ m\circ f) \longrightarrow \operatorname{Coker}(m_2) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Entonces $\operatorname{Coker}(m\circ f)\in\mathcal{U}$. Esto prueba que $(m\circ f)\in\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Finalmente, tomemos la composición $m\circ f$ para obtener la siguiente sucesión exacta

$$\mathbf{0}\to\operatorname{Ker}(f)\to\operatorname{Ker}(m\circ f)\to\operatorname{Ker}(m)\to\operatorname{Coker}(f)\to\operatorname{Coker}(m\circ f)\to\operatorname{Coker}(m)\to\mathbf{0}.$$

Simplificando la sucesión anterior, obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow \operatorname{Coker}(m\circ f) \longrightarrow \operatorname{Coker}(m) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Luego, $\operatorname{Coker}(f)\in\mathcal{U}$. Probándose que $f\in\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})=\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$.
Caso general. Sea f cualquier morfismo de $\mathscr{A}$. Tomemos la siguiente factorización $f=e\circ m$ con $m\in\operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ y $e\in\operatorname{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})$. Entonces

$$g\circ f=g\circ(e\circ m)=(g\circ e)\circ m\,.$$

Notemos que $e\in\operatorname{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A})=\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. Por el inciso $(b.1)$ tenemos que $(g\circ e)\in\mathcal{W}$, y por el caso anterior concluimos que $m\in\mathcal{W}$. Por lo tanto $f=e\circ m\in\mathcal{W}$.

$(b.3)$ Supongamos que $f,g\circ f\in\mathcal{W}$. La demostración de que $g\in\mathcal{W}$ es similar al inciso $(b.2)$.

(c) $(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W})$ es una **estructura de modelo abeliana** en $\mathscr{A}$.

$(c.1)$ Aseguramos que $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathcal{D}$ y $\mathcal{F}^{\bullet} = \mathcal{E}$. En efecto, veamos que se satisface la primer igualdad, la otra igualdad se demuestra de forma similar. Sea $X \in \mathcal{C}^{\bullet}$. Luego, $\operatorname{Coker}(\mathbf{0} \longrightarrow X) \in \mathcal{C}$, por lo tanto $X = \operatorname{Coker}(\mathbf{0} \longrightarrow X) \in \mathcal{D}$. Sea $X \in \mathcal{D}$, notemos que $[\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$ y que $X = \operatorname{Coker}(\mathbf{0} \longrightarrow X)$, esto significa que $[\mathbf{0} \longrightarrow X] \in \mathcal{C}$, por lo tanto $X \in \mathcal{C}^{\bullet}$.

Las igualdades del inciso $(c.1)$ nos dicen que

$(c.2)$ $f \in \mathcal{C} = \operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$ si y sólo si $f \in \operatorname{Mon}(\mathscr{A})$ y $\operatorname{Coker}(f) \in \mathcal{D} = \mathcal{C}^{\bullet}$,

$(c.3)$ $g \in \mathcal{F} = \operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$ si y sólo si $g \in \operatorname{Epi}(\mathscr{A})$ y $\operatorname{Ker}(f) \in \mathcal{E} = \mathcal{F}^{\bullet}$.

Probándose que $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es una estructura de modelo **abeliana** en $\mathscr{A}$.

(d) **Unicidad** de $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$. Supongamos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ es una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$ tal que

$$\mathcal{X}^{\bullet} = \mathcal{D}, \qquad \mathcal{Y}^{\bullet} = \mathcal{E} \quad \text{y} \quad \mathcal{Z}^{\bullet} = \mathcal{U}.$$

Luego, de los incisos $(c.2)$ y $(c.3)$ concluimos que $\mathcal{C} = \mathcal{X}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{Y}$. Para terminar, basta probar que $\mathcal{W}^{\bullet} = \mathcal{U}$. Dicha igualdad se prueba en la Proposición 3.3.14 ■

Teorema 3.3.11 (Correspondencia de Hovey)**.** Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana bicompleta [3].

(a) Si $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ es una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$, entonces $(\mathcal{C}^{\bullet}, \mathcal{F}^{\bullet}, \mathcal{W}^{\bullet})$ es un triple de Hovey.

(b) Si $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{U})$ es un triple de Hovey en $\mathscr{A}$, entonces existe una única estructura de modelo abeliana $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ en $\mathscr{A}$ tal que

- $(b.1)$ $\mathcal{C} = \operatorname{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A})$.
- $(b.2)$ $\mathcal{F} = \operatorname{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A})$.
- $(b.3)$ $\mathcal{W} = \operatorname{Mon}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A}) * \operatorname{Epi}_{\mathcal{E} \cap \mathcal{U}}(\mathscr{A})$.

Notación 3.3.12. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana bicompleta. La clase de todos los triples de Hovey en $\mathscr{A}$ es denotada por $\mathbf{Tr}(\mathscr{A})$ y la clase de todos las estructuras de modelo abelianas en $\mathscr{A}$ es denotada como $\mathbf{Ea}(\mathscr{A})$.

Observación 3.3.13. La correspondencia de Hovey induce asignaciones

[3] Notemos que la demostración de la correspondencia de Hovey no depende del hecho de que $\mathscr{A}$ sea bicompleta. Dicha hipótesis sólo se requiere en la definición de categoría de modelo.

$$\mathbf{H} : \mathbf{Tr}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathbf{Ea}(\mathscr{A}), \quad (\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{U}) \longmapsto (\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}), \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A}) * \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A}))$$

$$\widehat{\mathbf{H}} : \mathbf{Ea}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathbf{Tr}(\mathscr{A}), \quad (\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W}) \longmapsto (\mathcal{C}^\bullet,\mathcal{F}^\bullet,\mathcal{W}^\bullet).$$

Proposición 3.3.14. Las asignaciones $\mathbf{H}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ son inversas.

Demostración.

(a) $\widehat{\mathbf{H}} \circ \mathbf{H} = 1_{\mathbf{Tr}(\mathscr{A})}$. Sea $(\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{U})$ un triple de Hovey. Luego,

$$(\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{W}) := (\mathrm{Mon}_{\mathcal{D}}(\mathscr{A}), \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}}(\mathscr{A}), \mathrm{Mon}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A}) * \mathrm{Epi}_{\mathcal{E}\cap\mathcal{U}}(\mathscr{A}))$$

es una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$. Por la correspondencia de Hovey, $(\mathcal{C}^\bullet,\mathcal{F}^\bullet,\mathcal{W}^\bullet)$ es un triple de Hovey. Veamos que se cumplen las siguientes igualdades

$$\mathcal{C}^\bullet = \mathcal{D}, \qquad \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{E} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}^\bullet = \mathcal{U}.$$

Las primeras dos igualdades ya se han establecido. Veamos la tercer igualdad.

$(a.1)$ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}^\bullet$. Sea $W \in \mathcal{U}$. Tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[rr] \arrow[dr, "s"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & W \\ & A, \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

con $s \in \mathcal{C}$ y $r \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. Notemos que $A = \mathrm{Coker}(s) \in \mathcal{D}$ y $\mathrm{Ker}(r) \in \mathcal{E}\cap\mathcal{U}$. Luego, consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{Ker}(r) \longrightarrow A \xrightarrow{\ r\ } W \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Observamos que $\mathrm{Ker}(r), W \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$, ya que $\mathcal{U}$ es gruesa. Probándose que $s \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$. Por el Axioma tres por dos, tenemos que el morfismo $\mathbf{0} \longrightarrow W$ está en $\mathcal{W}$, por lo tanto $W \in \mathcal{W}^\bullet$.

$(a.2)$ $\mathcal{W}^\bullet \subseteq \mathcal{U}$. Sea $W \in \mathcal{W}^\bullet$. Tomemos la siguiente factorización

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[rr, "\bigstar"] \arrow[dr, "s"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & W \\ & A, \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

con $s \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ y $r \in \mathcal{F}$. El Corolario 1.19.45 nos brinda la siguiente sucesión exacta

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Ker}(s) \to \mathrm{Ker}(\bigstar) \to \mathrm{Ker}(r) \to \mathrm{Coker}(s) \to \mathrm{Coker}(\bigstar) \to \mathrm{Coker}(s) \to \mathbf{0}.$$

Simplificando la sucesión anterior, obtenemos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Ker}(r) \longrightarrow \operatorname{Coker}(s) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\bigstar) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Notemos que $\operatorname{Ker}(r), \operatorname{Coker}(s) = A \in \mathcal{U}$, por lo que $W = \operatorname{Coker}(\bigstar) \in \mathcal{U}$, ya que $\mathcal{U}$ es gruesa.

(b) $\mathbf{H} \circ \widehat{\mathbf{H}} = 1_{\mathbf{Ea}(\mathscr{A})}$. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$. Luego, $(\mathcal{C}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{W}^\bullet)$ es un triple de Hovey. La correspondencia de Hovey nos dice que

$$(\operatorname{Mon}_{\mathcal{C}^\bullet}(\mathscr{A}), \operatorname{Epi}_{\mathcal{F}^\bullet}(\mathscr{A}), \operatorname{Mon}_{\mathcal{E}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet}(\mathscr{A}) * \operatorname{Epi}_{\mathcal{F}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet}(\mathscr{A}))$$

es una estructura de modelo abeliana en $\mathscr{A}$. Es claro que $\mathcal{C} = \operatorname{Mon}_{\mathcal{C}^\bullet}(\mathscr{A})$ y $\mathcal{F} = \operatorname{Epi}_{\mathcal{F}^\bullet}(\mathscr{A})$. Finalmente

$$\begin{aligned} \operatorname{Mon}_{\mathcal{E}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet}(\mathscr{A}) * \operatorname{Epi}_{\mathcal{F}^\bullet \cap \mathcal{W}^\bullet}(\mathscr{A}) &= (\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) * (\mathcal{F} \cap \mathcal{W}) && \text{(Lema 3.3.6)} \\ &= \mathcal{W}. && \text{(Prop. 2.1.20)} \end{aligned}$$

Ejemplos 3.3.15. Los siguientes ejemplos de estructuras de modelo abelianas fueron descubiertos antes de la noción de estructura de modelo abeliana.

(a) La **estructura de modelo estable** sobre ${}_R\mathbf{Mod}$ es abeliana. Esta estructura resulta de aplicar la correspondencia de Hovey al triple $(\mathbf{Pro}({}_R\mathbf{Mod}), \operatorname{Obj}({}_R\mathbf{Mod}), \mathbf{Pro}({}_R\mathbf{Mod}))$.

(b) La **estructura de modelo proyectiva** es abeliana. Los detalles del triple de Hovey que genera dicha estructura puede encontrarse en [MP16].

Ejemplos 3.3.16. Los siguientes ejemplos de estructuras de modelo en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ no son abelianas en general.

(a) La **estructura de modelo trivial** en $\mathscr{A}$ $(\operatorname{Mor}(\mathscr{A}), \operatorname{Mor}(\mathscr{A}), \operatorname{Iso}(\mathscr{A}))$ no es abeliana a menos que $\operatorname{Mor}(\mathscr{A}) = \operatorname{Iso}(\mathscr{A})$.

(b) La **estructura de modelo absoluta** en $\mathbf{Comp}({}_R\mathbf{Mod})$ no necesariamente es abeliana. En efecto, todo objeto $\boldsymbol{C}^\bullet \in \mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ es cofibrante, es decir, el morfismo $(c^n) : \mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{C}^\bullet$ es mono-escindible grado a grado, esto es, cada morfismo $c^n : \mathbf{0} \longrightarrow C^n$ es mono-escindible para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular, consideremos el siguiente diagrama en $\mathbf{Comp}({}_\mathbb{Z}\mathbf{Mod})$

$$\begin{tikzcd} \ldots\mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathbf{0}\ldots \\ \ldots\mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0}\ldots \end{tikzcd} .$$

Notemos que el morfismo $f = \left(f^n\right)$ es un monomorfismo con conúcleo cofibrante, sin embargo no es mono-escindible grado a grado. Por lo anterior, la estructura de modelo absoluta en $\mathbf{Comp}\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}\right)$ no es abeliana. Recordemos que los detalles de esta construcción pueden encontrarse en [HC02]. Sin embargo Hovey menciona que es posible modificar la definición de estructura de modelo abeliana para incluir este ejemplo (ver [Ho02]).

Apéndice A

Elementos de Álgebra homológica

A.1. Complejos de cadena

La finalidad de éste apéndice es exponer los elementos de álgebra homológica que son requeridos en esta tesis. Este apéndice está basado en [SV07] y complementado con [ML75], [Ob00] y [MP16].

Definición A.1.1. Sean $\mathscr{A}$ una categoría y $P \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Decimos que P es proyectivo si para todo diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B, \end{tikzcd}$$

con g epimorfismo, existe un morfismo $h : P \longrightarrow A$ tal que $f = gh$.

Observación A.1.2.

(a) Un objeto P es proyectivo si y sólo si el funtor $H_P := \mathscr{A}(P, -) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ preserva epimorfismos.

(b) El funtor $H_P : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto si y sólo si P es proyectivo.
Demostración. Tomemos la siguiente sucesión exacta corta en $\mathscr{A}$

$$S: \quad \mathbf{0} \longrightarrow C \xrightarrow{r} A \xrightarrow{g} B \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Aplicando el funtor H_P obtenemos

$$H_P[S]: \quad \mathbf{0} \longrightarrow H_P(C) \xrightarrow{H_P(r)} H_P(A) \xrightarrow{H_P(g)} H_P(B) \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Notemos que H_P es exacto izquierdo, por lo tanto

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_P(C) \xrightarrow{H_P(r)} H_P(A) \xrightarrow{H_P(g)} H_P(B)$$

es una sucesión exacta.
Si P es proyectivo, la función $H_B(g): H_B(A) \longrightarrow H_B(B)$ es suprayectiva, lo cual demuestra que $H_B[S]$ es una sucesión exacta corta.
Recíprocamente. Si H_B es exacto, entonces la función $H_B(g): H_B(A) \longrightarrow H_B(B)$ es suprayectiva, por lo tanto H_B preserva epimorfismos. Por el inciso anterior se concluye que P es proyectivo.■

Definición A.1.3. Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ tiene **suficientes proyectivos** si $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ existe un epimorfismo $e: P \longrightarrow A$, con P proyectivo.

Definición A.1.4. Sea E un objeto de una categoría $\mathscr{A}$. Decimos que E es un objeto inyectivo si para todo diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ E\,, & \end{tikzcd}$$

con g monomorfismo, existe un morfismo $h: B \longrightarrow E$ tal que $f = hg$.

Observación A.1.5.

(a) Un objeto E es inyectivo si y sólo si el funtor $H^E := \mathscr{A}(-,E): \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ envía monomorfismos a epimorfismos.
Demostración. Supongamos que E es inyectivo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ E & \end{tikzcd}$$

con g monomorfismo. De este modo, la función $\mathscr{A}(g,E): \mathscr{A}(B,E) \longrightarrow \mathscr{A}(A,E)$ es suprayectiva porque existe un morfismo $h \in \mathscr{A}(B,E)$ tal que $f = \mathscr{A}(g,E)(h) = hg$.
Recíprocamente, supongamos que el funtor H^E envía monomorfismos a epimorfismos. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ E & \end{tikzcd}$$

con g monomorfismo. Entonces la función $\mathscr{A}(g,E) : \mathscr{A}(B,E) \longrightarrow \mathscr{A}(A,E)$ es suprayectiva, por lo que existe un morfismo $h \in \mathscr{A}(B,E)$ tal que $f = \mathscr{A}(g,E)(h) = hg$. ■

(b) El funtor $H^P = \mathscr{A}(-,E) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto si y sólo si E es inyectivo.

Definición A.1.6. Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ tiene **suficientes inyectivos** si $\forall A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ existe un monomorfismo $m : A \longrightarrow E$, con E inyectivo.

Definición A.1.7. Un **complejo** [1] en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ es una sucesión

$$\left(C^\bullet, d_{C^\bullet}\right) : \qquad \ldots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}_{C^\bullet}} C^n \xrightarrow{d^{n}_{C^\bullet}} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}_{C^\bullet}} C^{n+2} \longrightarrow \ldots .$$

en $\mathscr{A}$, tal que $d^n_{C^\bullet} d^{n+1}_{C^\bullet} = \mathbf{0}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Los morfismos $d^n_{C^\bullet}$ son llamados diferenciales.

Para simplificar la notación, denotaremos a un complejo como $\boldsymbol{C^\bullet} := \left(C^\bullet, d_{C^\bullet}\right)$ o simplemente por $\boldsymbol{C}$. Por último, la clase de todos los complejos en un categoría $\mathscr{A}$ será denota como $|\mathbf{Comp}(\mathscr{A})|$.
Para introducir la categoría de todos los complejos, definiremos los morfismos de cadena.

Definición A.1.8. Sean $\boldsymbol{C^\bullet} := \left(C^\bullet, d_{C^\bullet}\right)$ y $\boldsymbol{K^\bullet} := \left(K^\bullet, d_{K^\bullet}\right)$ complejos en una categoría abelina $\mathscr{A}$. Un **morfismo de cadena**

$$f^\bullet : \left(C^\bullet, d_{C^\bullet}\right) \longrightarrow \left(K^\bullet, d_{K^\bullet}\right),$$

de $\boldsymbol{C^\bullet}$ a $\boldsymbol{K^\bullet}$, es una sucesión de morfismos $f^\bullet := \left\{f^n : C^n \longrightarrow K^n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C^n \arrow[r, "d^n_{C_\bullet}"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ K^n \arrow[r, "d^n_{K_\bullet}"'] & K^{n+1} \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall n \in \mathbb{Z}$.

[1] Por simplicidad, escribiremos **complejo** para referirnos a **cocomplejo de cocadena**.

Cuando no exista confusión, denotaremos a un morfismo de cadena solamente como $f^\bullet := \left(f^n\right)$.

Definición A.1.9. Sea $\mathscr{A}$ una categorıa abeliana. La categoría $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ de todos los complejos en $\mathscr{A}$ se define como sigue

(a) $\mathrm{Obj}(\mathbf{Comp}(\mathscr{A})) := |\mathbf{Comp}(\mathscr{A})|$.

(b) Si $\boldsymbol{C}^\bullet$ y $\boldsymbol{K}^\bullet$ son complejos de cadena en $\mathscr{A}$, se define

$$\mathbf{Comp}(\mathscr{A})(\boldsymbol{C}^\bullet, \boldsymbol{K}^\bullet) := \{f^\bullet \mid f^\bullet \text{ es un morfismo de cadena de } \boldsymbol{C}^\bullet \text{ a } \boldsymbol{K}^\bullet\}.$$

(c) Si $f^\bullet : \left(C^\bullet, d_{C_\bullet}\right) \longrightarrow \left(K^\bullet, d_{K_\bullet}\right)$ y $g^\bullet : \left(K^\bullet, d_{K_\bullet}\right) \longrightarrow \left(Q^\bullet, d_{Q_\bullet}\right)$ son morfismos de cadena la composición $g^\bullet f^\bullet$ se define como $g^\bullet f^\bullet := \left\{g^n f^n : C^n \longrightarrow Q^n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Note que, para cualquier complejo $\boldsymbol{C}^\bullet$, el morfismo identidad es $1_{C^\bullet} := \left\{1_{C^n} : C^n \longrightarrow C^n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Más aún, un morfismo de cadena $f^\bullet = \left(f^n\right)$ es un isomorfismo si f^n es un isomorfismo en $\mathscr{A}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición A.1.10. Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ es abeliana.

Note que la estructura de grupo abeliano para cada conjunto $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})(\boldsymbol{C}^\bullet, \boldsymbol{K}^\bullet)$ está determinada como

$$f^\bullet + g^\bullet := \left(f^n + g^n\right),$$

donde $f^\bullet = \left(f^n\right)$ y $g^\bullet = \left(g^n\right)$.

Definición A.1.11. Diremos que un complejo $\boldsymbol{C}^\bullet := \left(C^\bullet, d_{C^\bullet}\right)$ es **positivo** si $C^n = \mathbf{0}$ para todo $n < 0$. Dualmente, $\boldsymbol{C}^\bullet := \left(C^\bullet, d_{C^\bullet}\right)$ es **negativo** si $C^n = \mathbf{0}$ para todo $n > 0$.

Observamos que los complejos positivos forman una subcategoría plena $\mathbf{Comp}_{\geq \mathbf{0}}(\mathscr{A})$ de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$. De forma dual, los complejos negativos forman una subcategoría plena $\mathbf{Comp}^{\mathbf{0}\leq}(\mathscr{A})$ de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$.

A.2. Homología

Para obtener el funtor de cohomología, definiremos el funtor $Z^n : \mathbf{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ de n-**cociclos** y el funtor $B^n : \mathbf{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ de n-cobordes.

Definición A.2.1. Para cada $\boldsymbol{X}^\bullet \in |\mathbf{Comp}(\mathscr{A})|$ se define

(a) $Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet) := \operatorname{Ker}\left(d^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}\right)$,

(b) $B^n(\boldsymbol{X}^\bullet) := \operatorname{Im}\left(d^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}\right)$,

(c) $u^n_{\boldsymbol{X}^\bullet} := \ker\left(d^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}\right)$, de este modo, $u^n_{\boldsymbol{X}^\bullet} : Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \longrightarrow X^n$,

(d) la factorización de $d^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}$ a través de su imagen

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}"] \arrow[dr, "\beta^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & X^{n-1} \\
& B^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \arrow[ur, "\alpha^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}"'] &
\end{tikzcd},$$

(e) el monomorfismo $\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet} : B^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \longrightarrow Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}"] \arrow[d, "\beta^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & X^n \\
B^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}"'] \arrow[ur, "\alpha^{n-1}_{\boldsymbol{X}^\bullet}" description] \arrow[ur, phantom, "=" near end, shift right=3] & Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \arrow[u, "u^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

(note que la Observación 1.19.33(b) garantiza la existencia de $\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}$).

Para cada morfismo de cadena $f^\bullet : \boldsymbol{L}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{K}^\bullet$ se tiene que

$$d^n_{\boldsymbol{K}^\bullet} f^n u^n_{\boldsymbol{L}^\bullet} = f^{n+1} d^n_{\boldsymbol{L}^\bullet} u^n_{\boldsymbol{L}^\bullet} = \mathbf{0}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, lo que muestra que $f^n u^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}$ tiene la propiedad del núcleo de $d^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}$. Entonces **existe un único morfismo**

$$Z^n(f^\bullet) : Z^n(\boldsymbol{L}^\bullet) \longrightarrow Z^n(\boldsymbol{K}^\bullet)$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z^n(\boldsymbol{L}^\bullet) \arrow[r, "u^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "Z^n(f^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & L^n \arrow[r, "d^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dr, phantom, "="] & L^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
Z^n(\boldsymbol{K}^\bullet) \arrow[r, "u^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}"'] & K^n \arrow[r, "d^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}"'] & K^{n+1}
\end{tikzcd}$$

en $\mathscr{A}$.

Por otro lado,

$$\operatorname{coker}\left(u^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}\right) = \operatorname{coker}\left(\ker\left(d^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}\right)\right) = \operatorname{coim}\left(d^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}\right) = \beta^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet} : L^{n-1} \longrightarrow B^n\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right).$$

Además,

$$\beta^{n-1}_{\boldsymbol{K}^\bullet} f^{n-1} u^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet} = \beta^{n-1}_{\boldsymbol{K}^\bullet} u^{n-1}_{\boldsymbol{K}^\bullet} Z^{n-1}(f) = \mathbf{0}\, Z^{n-1}(f) = \mathbf{0},$$

lo que muestra que $\beta^{n-1}_{\boldsymbol{K}^\bullet} f^{n-1}$ tiene la propiedad del conúcleo de $u^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}$. Por lo cual, **existe un único morfismo**

$$B^n\left(f^\bullet\right) : B^n\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right) \longrightarrow B^n\left(\boldsymbol{K}^\bullet\right)$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & Z^{n-1}\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right) \arrow[r, "u^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "Z^{n-1}(f^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & L^{n-1} \arrow[r, "\beta^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B^n\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right) \arrow[r] \arrow[d, "B^n(f^\bullet)"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & Z^{n-1}\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right) \arrow[r, "u^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}"'] & K^{n-1} \arrow[r, "\beta^{n-1}_{\boldsymbol{K}^\bullet}"'] & B^n\left(\boldsymbol{K}^\bullet\right) \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

con columnas exactas en $\mathscr{A}$.

Las asignaciones anteriores definen el funtor $Z^n : \mathbf{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ de n-**cociclos** y el funtor $B^n : \mathbf{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ de n-cobordes. Además, dichos funtores son aditivos.

Observación A.2.2. El siguiente diagrama es conmutativo en una categoría abeliana $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
B^n\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right) \arrow[r, "\mu^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "B^n(f^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z^n\left(\boldsymbol{L}^\bullet\right) \arrow[d, "Z^n(f^\bullet)"] \\
B^n\left(\boldsymbol{K}^\bullet\right) \arrow[r, "\mu^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}"'] & Z^n\left(\boldsymbol{K}^\bullet\right) .
\end{tikzcd}$$

En efecto, de la siguiente igualdad

$$u^n_{\boldsymbol{K}^\bullet} Z^n(f)\, \mu^n_{\boldsymbol{L}^\bullet} \beta^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet} = u^n_{\boldsymbol{K}^\bullet} \mu^n_{\boldsymbol{K}^\bullet} B^n(f)\, \beta^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet}$$

se concluye que

$$Z^n(f)\,\mu^n_{\boldsymbol{L}^\bullet} = \mu^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}\,B^n(f),$$

ya que $u^n_{\boldsymbol{K}^\bullet} \in \mathrm{Mon}(\mathscr{A})$ y $\beta^{n-1}_{\boldsymbol{L}^\bullet} \in \mathrm{Epi}(\mathscr{A})$.

Definición A.2.3. Para cada monomorfismo $\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet} : B^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \longrightarrow Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet)$ definimos el cociente

$$p^n_{\boldsymbol{X}^\bullet} := \mathrm{coker}\left(\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}\right) : Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Coker}\left(\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}\right).$$

En símbolos, escribiremos $\mathrm{Coker}\left(\mu^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}\right) := Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet)/B^n(\boldsymbol{X}^\bullet)$.

Definición A.2.4. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $n \in \mathbb{Z}$. El funtor de **cohomología**

$$H^n : \mathrm{Comp}(\mathscr{A}) :\longrightarrow \mathscr{A},$$

de grado n, se define de la siguiente forma

(a) $H^n(\boldsymbol{X}^\bullet) := Z^n(\boldsymbol{X}^\bullet)/B^n(\boldsymbol{X}^\bullet)$ para todo $\boldsymbol{X}^\bullet \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Comp}(\mathscr{A}))$,

(b) para cada morfismo $f^\bullet : \boldsymbol{L}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{K}^\bullet$ de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ se define

$$H^n(f^\bullet) : H^n(\boldsymbol{L}^\bullet) \longrightarrow H^n(\boldsymbol{K}^\bullet)$$

como el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & B^n(\boldsymbol{L}^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "B^n(f^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z^n(\boldsymbol{L}^\bullet) \arrow[r, "p^n_{\boldsymbol{L}^\bullet}"] \arrow[d, "Z^n(f^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H^n(\boldsymbol{L}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(f^\bullet)"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & B^n(\boldsymbol{K}^\bullet) \arrow[r, "\mu^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}"'] & Z^n(\boldsymbol{K}^\bullet) \arrow[r, "p^n_{\boldsymbol{K}^\bullet}"'] & H^n(\boldsymbol{K}^\bullet) \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

con filas exactas en $\mathscr{A}$.

Observación A.2.5. El funtor $H^n : \mathrm{Comp}(\mathscr{A}) :\longrightarrow \mathscr{A}$ es **aditivo**, pues los funtores Z^n y B^n lo son.

Definición A.2.6. Sean $f^\bullet, g^\bullet \in \mathrm{Comp}(\mathscr{A})(\boldsymbol{X}^\bullet, \boldsymbol{Y}^\bullet)$ morfismos de cadena. Decimos que $f^\bullet$ es **homotópico** a $g^\bullet$ si existe una familia de morfismos $\Theta := \{\, \Theta^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1} \,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{A}$ tal que

$$f^n - g^n := d^{n-1}_{\boldsymbol{Y}^\bullet}\Theta^n + \Theta^{n+1} d^n_{\boldsymbol{X}^\bullet}.$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Si $f^\bullet$ es homotópico a $g^\bullet$, escribiremos $f^\bullet \sim g^\bullet$. Por último, un complejo de cadena $f^\bullet : \boldsymbol{X}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{Y}^\bullet$ es una **una equivalencia de homotopía de cadena** si existe un morfismo de cadena $g^\bullet : \boldsymbol{Y}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{X}^\bullet$ tal que $g^\bullet \circ f^\bullet \sim 1_{\boldsymbol{X}^\bullet}$ y $f^\bullet \circ g^\bullet \sim 1_{\boldsymbol{Y}^\bullet}$.

Proposición A.2.7. Sean $f^\bullet, g^\bullet \in \mathrm{Comp}(\mathscr{A})(\boldsymbol{X}^\bullet, \boldsymbol{Y}^\bullet)$ morfismos de cadena. Si $f^\bullet \sim g^\bullet$, entonces $H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A.3. Resoluciones

Definición A.3.1. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Una **resolución derecha** de A es un par ordenado $(\boldsymbol{K}^\bullet, \varepsilon)$ donde

(a) $\boldsymbol{K}^\bullet$ es un complejo positivo de $\mathscr{A}$,

(b) $\varepsilon : A \longrightarrow K^0$ es un morfismo de $\mathscr{A}$, llamado **morfismo de aumentación**, tal que

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d^0_{K^\bullet}} K^1$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. La resolución $(K^\bullet, \varepsilon)$ es **exacta** si $H^n(\boldsymbol{K}^\bullet) = \mathbf{0}$ para todo $n \geq 1$, e **inyectiva** si K^n es inyectivo en $\mathscr{A}$ para todo $n \geq 0$.

Por dualidad, podemos obtener la definición de **resolución izquierda** de un objeto, además de la noción de **resolución izquierda proyectiva**.

Definición A.3.2. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Una **resolución izquierda** de A es un par ordenado $(\boldsymbol{P}^\bullet, \eta)$ donde

(a) $\boldsymbol{P}^\bullet$ es un complejo negativo en de $\mathscr{A}$,

(b) $\eta : P^0 \longrightarrow A$ es un morfismo de $\mathscr{A}$, llamado **morfismo de aumentación**, tal que

$$P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}_{P^\bullet}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow \boldsymbol{O}$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. La resolución $(P^\bullet, \varepsilon)$ es **exacta** si $H^n(\boldsymbol{K}^\bullet) = \mathbf{0}$ para todo $n \leq -1$, y **proyectiva** si K^n es proyectivo en $\mathscr{A}$ para todo $n \leq 0$.

Proposición A.3.3. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces cualquier objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ tiene una resolución exacta inyectiva.

Proposición A.3.4. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "u_1"] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "\varphi"] & A_3 \\ & Q & \end{tikzcd}$$

en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, donde Q es un objeto inyectivo, $\varphi u_1 = \mathbf{0}$ y la sucesión

$$A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3$$

es exacta. Entonces existe un único morfismo $\psi \in \mathscr{A}(A_3, Q)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, shift left=2, "="] & A_3 \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & Q \end{tikzcd} .$$

Proposición A.3.5. Sean A y B objetos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ con suficientes inyectivos, $\boldsymbol{K}^\bullet := (K^\bullet, \varepsilon)$ una resolución exacta de A y $\boldsymbol{L}^\bullet := (L^\bullet, \eta)$ una resolución inyectiva de B. Si $u \in \mathscr{A}(A, B)$, entonces existe un morfismo $f^\bullet : \boldsymbol{K}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{L}^\bullet$ en $\mathrm{Comp}(\mathscr{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "u"'] & K^0 \arrow[d, "f^0"] \\ B \arrow[r, "\eta"] & L^0 \end{tikzcd} .$$

Además, si $g^\bullet : \boldsymbol{K}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{L}^\bullet$ es un morfismo en $\mathrm{Comp}(\mathscr{A})$ tal que $g^0 \varepsilon = \eta u$, entonces $f^\bullet \sim g^\bullet$.

Definición A.3.6. El morfismo $f^\bullet : \boldsymbol{K}^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{L}^\bullet$, de la proposición anterior, se le conoce como **morfismo de levantamiento** de u.

En términos de levantamientos, la Proposición A.3.5 dice que dos levantamientos de un mismo morfismo son homotópicos.

A.4. Funtores Derivados

Notación A.4.1. Dada una categoría abeliana $\mathscr{A}$ con suficientes inyectivos, la Prosición A.3.3 asegura que cualquier objeto $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ tiene una resolución derecha exacta inyectiva. De esta forma, para todo $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ elegiremos una resolución derecha exacta inyectiva que denotaremos como $\left(\boldsymbol{I}_A^\bullet, \varepsilon_A\right)$.

Definición A.4.2. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana, $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo y $(\boldsymbol{I}^\bullet, \varepsilon_A)$ una resolución derecha exacta inyectiva de un objeto arbitrario $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$. Definimos $F\left(\boldsymbol{I}_A^\bullet\right)$ como el complejo positivo

$$F\left(\boldsymbol{I}_A^\bullet\right): \quad \ldots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow F\left(I_A^0\right) \xrightarrow{F\left(d^0_{I_A^\bullet}\right)} F\left[I_A^1\right] \xrightarrow{F\left(d^1_{I_A^\bullet}\right)} F\left[I_A^2\right] \xrightarrow{F\left(d^2_{I_A^\bullet}\right)} \ldots$$

en $\mathscr{B}$.

Definición A.4.3. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Definimos el funtor $F^\bullet : \operatorname{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \operatorname{Comp}(\mathscr{B})$ de la siguiente forma

(a) para cada $X^\bullet \in \operatorname{Comp}(\mathscr{A})$, $F^\bullet(X^\bullet) := M^\bullet$, donde $M^\bullet := \left(F\left(X^n\right), F\left(d_{X^\bullet}\right)\right)$,

(b) para todo morfismo $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ en $\operatorname{Comp}(\mathscr{A})$, se define

$$F^\bullet(f^\bullet) := \left\{F\left(f^n\right) : F\left(X^n\right) \longrightarrow F\left(Y^n\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Observación A.4.4. El funtor $F^\bullet : \operatorname{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \operatorname{Comp}(\mathscr{B})$ es aditivo. Además, si $f^\bullet \sim g^\bullet$, entonces $F^\bullet(f^\bullet) \sim F^\bullet(g^\bullet)$.

Definición A.4.5. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define el **n-ésimo funtor derivado derecho** de F, denotado por $R^nF : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, como sigue

(a) $(R^nF)(A) := H^n\left(F\left[\boldsymbol{I}_A^\bullet\right]\right)$ para todo $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$, donde $H^n : \operatorname{Comp}(B) \longrightarrow \mathscr{B}$ es el n-ésimo funtor de cohomología,

(b) para cada $u : A \longrightarrow B$, se define

$$(R^nF)(u) := H^n(F^\bullet(f^\bullet)) : H^n\left(F\left(\boldsymbol{I}_A^\bullet\right)\right) \longrightarrow H^n\left(F\left(\boldsymbol{I}_B^\bullet\right)\right),$$

donde $f^\bullet \in \operatorname{Comp}(\mathscr{A})\left(\boldsymbol{I}_A^\bullet, \boldsymbol{I}_B^\bullet\right)$ es un levantamiento de u (ver Definición A.3.6).

Veamos que R^nF está bien definido. En efecto, supongamos que $g^\bullet : \boldsymbol{I}_A^\bullet \longrightarrow \boldsymbol{I}_B^\bullet$ es otro levantamiento de u, por la Proposición A.3.5 sabemos que $f^\bullet \sim g^\bullet$, después, por la Observación A.4.4 concluimos que $F^\bullet(f^\bullet) \sim F^\bullet(g^\bullet)$. Finalmente, por la Proposición A.2.7 se concluye que $H^n(F^\bullet(f^\bullet)) = H^n(F^\bullet(g^\bullet))$.
Antes de demostrar que R^nF es, en efecto, un funtor, realizaremos la siguiente observación.

Observación A.4.6. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $u \in \mathscr{A}(A,B)$ y $v \in \mathscr{A}(B,C)$. Si $f^\bullet$ es un levantamiento de u y $g^\bullet$ es un levantamiento de v, entonces $g^\bullet f^\bullet$ es un levantamiento de uv.
La demostración de esta observación se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "="] & I_A^0 \arrow[d, "f^0"] \\
B \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "="] & I_B^0 \arrow[d, "g^0"] \\
C \arrow[r, "\varepsilon_C"'] & I_C^0 .
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior,

$$\begin{aligned}
(R^nF)(vu) &= H^n(F^\bullet(g^\bullet f^\bullet)) \\
&= H^n(F^\bullet(g^\bullet)F^\bullet(f^\bullet)) \\
&= H^n(F^\bullet(f))H^n(F^\bullet(g)) \\
&= (R^nF)(v)(R^nF)(u).
\end{aligned}$$

Además, R^nF es un funtor aditivo. Antes de demostrarlo, consideremos la siguiente observación.

Observación A.4.7. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ morfismos de $\mathscr{A}$. Si $f^\bullet$ es un levantamiento de u_1 y $g^\bullet$ es un levantamiento de u_2, entonces $g^\bullet + f^\bullet$ es un levantamiento de $u_2 + u_1$.
La demostración es inmediata de la siguiente igualdad

$$(\, g^0 + f^0 \,)\varepsilon_A = g^0\varepsilon_A + g^0\varepsilon_A = \varepsilon_B u_2 + \varepsilon_B u_1 = \varepsilon_B (\, u_2 + u_1 \,).$$

Así,

$$\begin{aligned}(R^nF)(u_2+u_1) &= H^n\left(F^\bullet\left(g^\bullet+f^\bullet\right)\right)\\ &= H^n\left(F^\bullet\left(g^\bullet\right)+F^\bullet\left(f^\bullet\right)\right)\\ &= H^n\left(F^\bullet(f)\right)+H^n\left(F^\bullet(g)\right)\\ &= (R^nF)(u_2)+(R^nF)(u_1).\end{aligned}$$

Lo anterior prueba que R^nF es un funtor aditivo.
En lo siguiente, veremos que la construcción del funtor derivado no depende, esencialmente, de la elección de una resolución derecha exacta e inyectiva.
Supongamos que para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ elegimos una resolución exacta e inyectiva $(\overline{\boldsymbol{I}^\bullet_A}, \overline{\varepsilon_A})$ diferente a la de la Notación A.4.1. Luego, podemos construir otro funtor derivado $\overline{R^nF} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La siguiente proposición nos dice como se relacionan dichos funtores.

Proposición A.4.8. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Entonces los funtores $\overline{R^nF}$ y R^nF son naturalmente equivalentes.

Observación A.4.9. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(a) $(R^nF)(A) = \mathbf{0}$ para todo $n < 0$, ya que $\boldsymbol{I}^\bullet_A$ es un complejo positivo.

(b) Si Q es un objeto inyectivo de $\mathscr{A}$, entonces $(R^nF)(Q) = \mathbf{0}$ $\forall n \neq 0$. Esto es porque

$$\mathbf{0} \longrightarrow Q \xrightarrow{1_Q} Q \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \dots$$

es una resolución exacta e inyectiva de Q.

Lema A.4.10. Si $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un funtor exacto izquierdo, entonces R^0F es naturalmente equivalente a F. Además, si F es exacto, entonces $(R^nF)(A) = \mathbf{0}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ y $\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

A.5. El funtor Ext

Definición A.5.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y A un objeto fijo de $\mathscr{A}$. Para toda $i \in \mathbb{Z}$ el funtor covariante aditivo

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,-):\mathscr{A}\longrightarrow \mathbf{Ab}$$

se define como $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,-):=R^iH_A$.

Definición A.5.2. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos y B un objeto fijo de $\mathscr{A}$. Para toda $i\in\mathbb{Z}$ el funtor contravariante aditivo

$$\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(-,B):\mathscr{A}\longrightarrow \mathbf{Ab}$$

se define como $\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(-,B):=L^iH^B$, donde L^iH^B es el i-ésimo funtor derivado a izquierda de H^B. Dicho funtor, se calcula análogamente, usando resoluciones izquierdas exactas proyectivas.

Proposición A.5.3. Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos y proyectivos, entonces $\mathrm{ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B)\simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B)$ $\forall A,B\in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

Definición A.5.4. Sean $\boldsymbol{X}^\bullet\in\mathrm{Comp}(\mathscr{A})$ un complejo negativo y $\boldsymbol{Z}^\bullet\in\mathrm{Comp}(\mathscr{A})$ un complejo positivo. Definimos la **longitud** de $\boldsymbol{X}^\bullet$ y de $\boldsymbol{Z}^\bullet$ como sigue, donde $\min\varnothing:=\infty$,

(a) $l(\boldsymbol{X}^\bullet):=\min\left\{n\geq 0 \mid X^{-k}=\mathbf{0}\ \forall k>n\right\}$.

(b) $l(\boldsymbol{Z}^\bullet):=\min\left\{n\geq 0 \mid Z^{k}=\mathbf{0}\ \forall k>n\right\}$.

Definición A.5.5. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A\in\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ un objeto fijo. La **dimensión proyectiva** de A se define como

$$\mathrm{pd}(A):=\min\{l(\boldsymbol{P}^\bullet)\mid(\boldsymbol{P}^\bullet,\varepsilon)\text{ es una resolución izquierda exacta proyectiva de }A\}.$$

Análogamente, la **dimensión inyectiva** de A se define como

$$\mathrm{id}(A):=\min\{l(\boldsymbol{P}^\bullet)\mid(\boldsymbol{P}^\bullet,\varepsilon)\text{ es una resolución derecha exacta e inyectiva de }A\}.$$

Proposición A.5.6. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos y A un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathrm{pd}(A)\leq n$.

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,C)=\mathbf{0}$ $\forall i>n$ y $\forall C\in\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(c) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A,C)=\mathbf{0}$ $\forall C\in\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(d) El funtor $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,-):\mathscr{A}\longrightarrow\mathbf{Ab}$ es exacto derecho $\forall i>n$.

(e) Si en la sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$S: \quad \mathbf{0} \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

los objetos X_k, con $k < n$, son proyectivos, entonces X_n también es proyectivo.

Corolario A.5.7. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos y A un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A es proyectivo.

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A,B) = \mathbf{0}$ $\forall i > 0$ y $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,B) = \mathbf{0}$ $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

Ahora, enunciaremos la proposición dual y su corolario.

Proposición A.5.8. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y A un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathrm{id}(A) \leq n$.

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(C,A) = \mathbf{0}$ $\forall i > n$ y $\forall C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(c) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(C,A) = \mathbf{0}$ $\forall C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(d) El funtor $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(-,A) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto derecho.

(e) Si en la sucesión exacta en $\mathscr{A}$

$$S: \quad \mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha_0} X_0 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} X_n \longrightarrow \mathbf{0}$$

los objetos X_k, con $k < n$, son inyectivos, entonces X_n también es inyectivo.

Corolario A.5.9. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y A un objeto de $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A es inyectivo.

(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(B,A) = \mathbf{0}$ $\forall i > 0$ y $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(B,A) = \mathbf{0}$ $\forall B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

El siguiente resultado es usado en esta tesis. La demostración puede encontrarse en [Ob00].

Lema A.5.10. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y proyectivos. Para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y cada sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

existen sucesiones exactas infinitas en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} S_1: & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathscr{A}(X,A) \arrow[r] & \mathscr{A}(X,B) \arrow[r] & \mathscr{A}(X,C) \arrow[dll] \\ & & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X,C) \arrow[dll] \\ & & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{A}}(X,A) \arrow[r] & \dots & . \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S_2: & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathscr{A}(C,X) \arrow[r] & \mathscr{A}(B,X) \arrow[r] & \mathscr{A}(C,X) \arrow[dll] \\ & & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C,X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(B,X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A,X) \arrow[dll] \\ & & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{A}}(X,X) \arrow[r] & \dots & . \end{tikzcd}$$

A.6. Clases propias

En esta sección presentaremos una descripción alternativa del funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}$ en términos de sucesiones exactas cortas.

Definición A.6.1. Sean S_1 y S_2 sucesiones exactas cortas en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Un morfismo $s : S_1 \longrightarrow S_2$, de S_1 a S_2, es una tercia de morfismos $s := (f,g,h)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S_1: & \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\ S_1: & \mathbf{0} \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \mathbf{0}. \end{tikzcd}$$

Diremos que $s := (f,g,h)$ es un isomorfismo si f,g y h son isomorfismos en $\mathscr{A}$, en símbolos escribiremos $S_1 \simeq S_2$.

Definición A.6.2. Diremos que una sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ es una **sucesión exacta escindible** si es isomorfa a la siguiente sucesión

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{p_C} C \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Definición A.6.3. Sea $\mathcal{P}$ una clase de sucesiones exactas cortas en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Si

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

pertenece a $\mathcal{P}$ diremos que f es un $\mathcal{P}$-**monomorfismo** y que g es un $\mathcal{P}$-**epimorfismo**.

Definición A.6.4. Diremos que una clase $\mathcal{P}$ de sucesiones exactas cortas de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ es una **clase propia** si satisface los siguientes axiomas

(P.1) $\mathcal{P}$ es cerrada bajo isomorfismos, es decir, si $S \in \mathcal{P}$ y $S \simeq \widehat{S}$, entonces $\widehat{S} \in \mathcal{P}$.

(P.2) $\forall A, B \in \operatorname{Obj}(A)$, la sucesión

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{p_C} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

pertenece a $\mathcal{P}$.

(P.3) Si f y $\widehat{f}$ son $\mathcal{P}$-monomorfismos, entonces $f\widehat{f}$ es un $\mathcal{P}$-monomorfismo, siempre que $f\widehat{f}$ esté definida.

(P.4) Si $\widehat{f}f$ es un $\mathcal{P}$-monomorfismo, entonces f es un $\mathcal{P}$-monomorfismo.

(P.5) Si g y $\widehat{g}$ son $\mathcal{P}$-epimorfismos, entonces $g\widehat{g}$ es un $\mathcal{P}$-epimorfismo, siempre que $g\widehat{g}$ esté definida.

(P.6) Si $g\widehat{g}$ es un $\mathcal{P}$-epimorfismo, entonces g es un $\mathcal{P}$-epimorfismo.

Note que la interesección de una familia de clases propias es de nuevo una clase propia.

Ejemplo A.6.5. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. La clase $\operatorname{Ses}(\mathscr{A})$ de todas las sucesiones exactas cortas de $\mathscr{A}$ y la clase $\operatorname{Esc}(\mathscr{A})$ de todas las sucesiones exactas escindibles de $\mathscr{A}$ son clases propias.

Definición A.6.6. Sean $\mathcal{P}$ un clase propia en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$. Decimos que las sucesiones

$$S : \mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \widehat{S} : \mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

son **congruentes** si existe un morfismo $(1_A, f, 1_B) : S \longrightarrow \widehat{S}$. En este caso, escribiremos $S_1 \equiv S_2$.

Notamos que el morfismo f es un isomorfismo, esto sucede por el Lema del 5 (Prop. 1.19.42). Luego, la relación de congruencia $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Observación A.6.7. Sea $\mathcal{P}$ una clase propia en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.

(a) Considere el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
S: & \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & & & \widehat{C} \arrow[u, "\gamma"'] &
\end{tikzcd},$$

donde S es una sucesión exacta corta. Entonces existe una sucesión $S\gamma$ exacta corta en $\mathscr{A}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S: & \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \mathbf{0} \\
S\gamma: & \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[u, "1_A"] \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[ur, phantom, "="] & B\prod_C \widehat{C} \arrow[u, "\widehat{\gamma}"'] \arrow[r, "\widehat{g}"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \widehat{C} \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r] & \mathbf{0},
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado derecho es un diagrama de producto fibrado. Además, el morfismo $\widehat{f}$ se obtiene de la propiedad universal del producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\widehat{f}"] \arrow[drr, bend left, "\mathbf{0}"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
 & B\prod_C \widehat{C} \arrow[r, "\widehat{g}"'] \arrow[d, "\widehat{\gamma}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \widehat{C} \arrow[d, "\gamma"] \\
 & B \arrow[r, "g"] & C.
\end{tikzcd}$$

(b) De forma dual, para cada diagrama

$$
\begin{tikzcd}
S: & \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & \widehat{A} & & &
\end{tikzcd},
$$

donde S es una sucesión exacta corta en $\mathscr{A}$, existe una sucesión exacta corta αS que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
S: & \mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\widehat{\alpha}"] \arrow[dr, phantom, "="] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & \mathbf{0} \\
\alpha S: & \mathbf{0} \arrow[r] & \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{f}"'] & \widehat{A}\coprod_C B \arrow[r, "\widehat{g}"'] & C \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}.
$$

(c) Más aún, si $S \in \mathcal{P}$, entonces $\alpha S, S\gamma \in \mathcal{P}$.

(d) En este caso, se tiene que $(\alpha S)\gamma \equiv \alpha(S\gamma)$.

Definición A.6.8. Sean

$$
S_1 : \mathbf{0} \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} C_1 \longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{y} \quad S_2 : \mathbf{0} \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} B_2 \xrightarrow{g_2} C_2 \longrightarrow \mathbf{0}
$$

sucesiones de una clase propia $\mathcal{P}$ de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. La **suma directa** de S_1 y S_2 se define como la sucesión

$$
S_1 \oplus S_2 : \mathbf{0} \longrightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} B_1 \oplus B_{,,} \xrightarrow{g_1 \oplus g_2} C_1 \oplus C_2 \longrightarrow \mathbf{0}\,.
$$

Observación A.6.9. Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$, entonces $S_1 \oplus S_2 \in \mathcal{P}$.

Definición A.6.10. Sean

$$
S_1 : \mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{y} \quad S_2 : \mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}
$$

sucesiones de una clase propia $\mathcal{P}$ de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. La **suma de Baer** [2] de S_1 y S_2 se define como

$$
S_1 + S_2 := \nabla_A (S_1 \oplus S_2) \Delta_C.
$$

Claramente $S_1 + S_2 \in \mathcal{P}$.

[2] Llamada así por el matemático alemán Reinhodl Baer (1902-1979).

Observación A.6.11. En el caso de la definición anterior, se satisfacen las siguientes congruencias

$$\alpha\,(S_1+S_2) \equiv \alpha S_1 + \alpha S_2 \qquad (S_1+S_2)\,\gamma \equiv S_1\gamma + S_2\gamma.$$

Además, para $\alpha_1, \alpha_2 : A \longrightarrow \widehat{A}$ y $\gamma_1, \gamma_2 : \widehat{C} \longrightarrow C$ se tiene que

$$(\alpha_1+\alpha_2)\,S_1 \equiv \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_1 \qquad S_1\,(\gamma_1+\gamma_2) \equiv S_1\gamma_1 + S_1\gamma_2.$$

Definición A.6.12. Sea $\mathcal{P}$ una clase propia en una categoría abeliana A. Para cada par de objetos A y C de $\mathscr{A}$ se define el conjunto $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,A)$ de todas las clases de congruencia de las sucesiones que empieza en A y terminan con C, es decir,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,A) := \{\ [S]_{\equiv}\ \mid S:\ \mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}\ \}.$$

Donde $[S]_{\equiv} := \{\Sigma \in \mathcal{P} \mid \Sigma \equiv S\}$.

Observación A.6.13. $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,A)$ tiene una estructura de grupo abeliano, determinada por la suma de Baer. Además, el elemento neutro aditivo es la clase de congruencia de la sucesión

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{p_C} C \longrightarrow \mathbf{0}.$$

De esta forma, para cada $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A})$ definimos el funtor covariante

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,-) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

como sigue

(a) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,-)\,(A) := \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,A)$ para todo $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A})$.

(b) para cada $\alpha : A \longrightarrow \widehat{A}$,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,-)\,(f) : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(\,C,\widehat{A}\,) \ \text{ está determinada por }\ [S]_{\equiv} \longmapsto [\alpha S]_{\equiv}.$$

De forma dual se puede definir un funtor contravariante $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(-,C) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

El siguiente resultado relaciona los funtores $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,-)$ y $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C,-)$. La demostración detallada puede encontrarse en [MP16].

Teorema A.6.14 (Descripción de Baer de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X,Y)$)**.** Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{P}$ la clase de todas las sucesiones exactas cortas en $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos o inyectivos, entonces $\forall X,Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{A})$ se tiene que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X,Y) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(X,Y)$.

Para cada clase propia $\mathcal{P}$ general, existe una transformación natural $\left\{\eta_A : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C,A)\right\}$ que tiene como componentes η_A monomorfismos. Es decir, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C,-)$ es un subfuntor de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C,-)$.

Apéndice B

Categorías localmente presentables

El próposito de este apéndice es enunciar la definición de categoría *presentable* (ver [AR94]). Para lograr eso presentaremos algunas definiciones de la teoría de conjuntos (ver [Je02]).

Definición B.0.15. Sean $(P, \leq,)$ un conjunto parcialmente ordenado, X un subconjunto no vacío de P y a un elemento de P. Decimos que a es un **elemento menor de** X si $a \in X$ y $\forall x \in X$ se tiene que $a \leq x$.

Definición B.0.16. Sea $(P, \leq,)$ un conjunto linealmente ordenado. Decimos que P es un conjunto **bien ordenado** por $\leq$ si todo subconjunto no vacío de P tiene un elemento menor.

Definición B.0.17. Decimos que un conjunto T es **transitivo** si $\forall X \in T$ se cumple que $X \subseteq T$.

Definición B.0.18. Un **número ordinal** (o simplemente **ordinal**) es un conjunto transitivo que es bien ordenado por la relación de pertenencia.

Definición B.0.19. Sean **Ord** la clase de todos los ordinales y α, β ordinales. Definimos un orden $<$ en **Ord** como sigue

$$\alpha < \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \in \beta.$$

Observación B.0.20. El orden $<$ definido anteriormente es un orden lineal. Además, se cumple trivialmente que $\alpha = \{ \beta \mid \beta < \alpha \}$.

Definición B.0.21. Sea α un ordinal. El **sucesor** de α se define como $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. Si un ordinal α es tal que $\alpha = \beta + 1$, para algún ordinal β, diremos que α es un **ordinal sucesor**. En este caso contrario, diremos que α es un **ordinal límite**, esto es, $\alpha = \bigcup \alpha$.

Teorema B.0.22. Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

De hecho, se define una *aritmética* de números ordinales, esto es, se define la suma, el producto y la exponenciación de números ordinales.

Definición B.0.23. Sean Y y X conjuntos. Decimos que Y y X tienen la misma cardinalidad si existe una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$. En símbolos escribimos $|X| = |Y|$.

Observación B.0.24. Si W es un conjunto bien ordenado, entonces existe un ordinal α tal que $|W| = |\alpha|$. Lo anterior sucede por el Teorema B.0.22.

Definición B.0.25. Un **cardinal** es un número ordinal α tal que $\forall \beta < \alpha$ se tiene que $|\alpha| \neq |\beta|$.

Definición B.0.26. Sea W un conjunto bien ordenado. La cardinalidad de W se define como el ordinal menor α tal que $|W| = |\alpha|$. En símbolos escribiremos $|W| := \alpha$.

Es claro que el ordinal $|W| = \alpha$ es un cardinal. Un ordinal infinito que es cardinal es llamado *aleph*. En particular, $|\mathbb{N}| := \aleph_0$.

Definición B.0.27. Sea λ un cardinal infinito. Decimos que λ es **regular** si no puede ser expresado como $\lambda = \sum_{i<\alpha} \lambda_i$ con $\alpha, \lambda_i < \lambda$.

Definición B.0.28. Sea λ un cardinal regular.

(a) Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ es **λ-dirigido** si todo subconjunto de X con cardinal menor que λ tiene una cota superior.

(b) Consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ con estructura de categoría. Diremos que un **diagrama** $F : X \longrightarrow \mathscr{C}$ **es λ-dirigido** si $(X, \leq)$ es λ-dirigido.

(c) Diremos que un **colímite** de un diagrama $F : X \longrightarrow \mathscr{C}$ **es λ-dirigido**.

(d) Un objeto C de una categoría $\mathscr{C}$ es **λ-presentable** si el funtor $\mathscr{C}(C, -) : \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** preserva colímites λ-dirigidos, Diremos que $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es presentable si es λ-presentable para algún cardinal regular λ.

(e) Una categoría $\mathscr{C}$ es **localmente λ-presentable** si existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ de objetos λ-presentables tal que todo objeto de $\mathscr{C}$ es un colímite λ-dirigido de objetos de $\mathcal{A}$. Diremos que una categoría es **localmente presentable** si es localmente λ-presentable para algún cardinal regular λ.

Ejemplos B.0.29.

(a) Un conjunto X es λ-presentable en **Set** si y sólo si $|X| < \lambda$.

(b) La categoría **Set** es localmente $\aleph_0$-presentable.

(c) La categoría **Top** no es localmente $\aleph_0$-presentable.

(d) Si $\mathscr{A}$ es una categoría localmente $\aleph_0$-presentable y $\mathscr{B}$ una categoría pequeña, entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{B}}$ es localmente $\aleph_0$-presentable.

Bibliografía

[AR94] J. Adámek y J. Rosický. Locally presentable and accessible categories. Cambridge University Press. 1994.

[BD68] I. Bucur y A. Deleanu. Introduction to the theory of categories and functors. John Wiley. 1968.

[B194] F. Borceaux. Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 50. Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom. 1994.

[B294] F. Borceaux. Handbook of Categorical Algebra 1. Categories and structures. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 50. Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom. 1994.

[CE56] H. Cartan y S. Eilenberg. Homological algebra, Princeton University Press. 1956.

[Du14] E. Dubic. Categorías. Los primeros 30 años. ArXiv e-prints 1404.6240. 2014. Disponible en https://arxiv.org/pdf/1404.6240.pdf

[EJ00] E.E. Enochs y O. M.G. Jenda. Relative homological algebra. De Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 30. Walter de Gruyter & Co. Berlin. 2000.

[EM42] S. Eilenberg y S. Mac Lane. Natural isomorphisms in group theory. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 28. 1942. pp. 537-543.

[EM45] S. Eilenberg y S. Mac Lane. General theory of natural equivalences. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 58. 1945. pp. 231-294.

[ES52] S. Eilenberg y N. Steenrod. Foundations of algebraic topology. Princeton University Press. 1952.

[Gr57] A. Grothendieck. Sur quelques points d′ algèbre homologique. Tohoku Mathematical Journal 9. 1957. pp. 119-221.

[HC02] D. Christensen y M. Hovey. Quillen model structures for relative homological algebra. Mathematical Proceedings of the Cambridge Mathematical Society. Vol. 133. Part 2 . 2002. pp. 261-293.

[Hi03] P. S. Hirschhorn. Model categories and their localizations. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 99. American Mathematical Society. Providence. RI. 2003.

[Ho99] M. Hovey. Model categories. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 63. American Mathematical Society. RI. 1999.

[Ho02] M. Hovey. Cotorsion pairs, model category structures and representation theory. Mathematische Zeitschrift. Vol. 241. No. 3. pp. 553-592. 2002

[Ho07] M. Hovey. Cotorsion pairs and model categories. Contemporary Mathematics. Interactions between Homotopy Theory and Algebra. 2007. pp. 277-296.

[Je02] T. Jech. Set theory. Springer. 2002.

[JT07] A. Joyal y M. Tierney. Quasi-categories vs Segal spaces. Categories in algebra, geometry and mathematical physics . Contemporany Mathematics. Vol. 431. American Mathematical Society. Providence. 2007. pp. 277-326

[Ka58] D. M. Kan. Adjoints functors. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 87. 1958. pp. 294-329.

[La63] F. W. Lawvere. Functorial Semantics of algebraic theories. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Vol. 50. 1963. pp. 869-873.

[ML48] S. Mac Lane. Groups, categories and duality. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 34. 1948. pp. 263-267.

[ML50] S. Mac Lane. Dualities for Groups. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 56. 1950. pp. 485-516.

[ML67] S. Mac Lane. Categorical algebra and set-theoretic foundations, Axiomatic Set Theory. (Proc. Sympos. Pure. Math. Vol. XIII, Part I, Univ. California, 1967). American Mathematical Society. Providence. 1971. pp. 231-240.

[ML75] S. Mac Lane. Homology. Springer Verlag. 1975.

[ML98] S. Mac Lane. Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate text in Mathematics. Springer-Verlag. New York. 1998.

[Mi64] B. Mitchel, Theory of categories. New York. Columbia University. 1964.

[MP16] M. A. Pérez Bullones. Introduction to Abelian Model Structures and Gorenstein Homological Dimensions. Chapman and Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics. 2016.

[Ob00] M. S. Osborne. Basic Homological Algebra. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 196. Springer-Verlag. New York. 2000.

[Qui67] D.G. Quillen. Homotopical Algebra. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 43. Sringer-Verlag. 1967.

[Qui69] D.G. Quillen. Homotopy theory. Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 90. No. 2. 1969. pp. 205-295.

[RiLF] E. Riehl. Factorization systems. University of Chicago Topology Proseminar lecture notes. Disponible en http://www.math.jhu.edu/ eriehl/factorization.pdf

[Ri14] E. Riehl. Categorical Homotopy Theory. New Mathematical Monographs No. 24. Cambridge: Cambridge University Press. 2014. Disponible en http://www.math.jhu.edu/ eriehl/cathtpy.pdf

[RT02] J. Rosický y W. Tholen. Lax factorization algebras. Journal of Pure and Applied Algebra. Vol. 175. 2002. pp. 355-382.

[Ro09] J. Rotman. An Introduction to Homological Algebra. Second Edition. Sringer. 2009.

[SV07] V. Santiago V. Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos. Tesis de Licenciatura. UNAM, Facultad de Ciencias. 2007.

[St72] A. Støm. The homotopy category is a homotopy category. Archiv der Mathematik. 1972. Vol. 23. pp. 435-441.

Índice alfabético