UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

FUNCIONES INDUCIDAS EN LOS PRODUCTOS SIMETRICOS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JORGE ENRIQUE VEGA ACEVEDO

DIRECTOR DE LA TESINA O TESIS
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MEXICO, FEBRERO DE 2017

Índice general

Capítulo 1

Funciones inducidas en los productos simétricos.

1.1. Introducción.

Un *continuo* es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Dado un espacio topológico X y un subconjunto A de X, denotaremos el interior y la cerradura de A en X por $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{cl}_X(A)$, respectivamente.

Dado un continuo X, el *n-producto simétrico* de X se define como

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos y es no vacío}\}.$$

Metrizamos el hiperespacio anterior con la métrica de Hausdorff $\mathcal{H}$, ([7, Definición (0.1), p. 1]). Si $U_1, \ldots, U_m$ es una coleccion finita de subconjuntos de X, $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$ denota el siguiente subconjunto de $\mathcal{F}_n(X)$:

$$\left\{ A \in \mathcal{F}_n(X) : A \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \{1, \ldots, m\} \right\}.$$

Se sabe que la familia de subconjuntos de $\mathcal{F}_n(X)$ de la forma $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n$ donde cada U_i es un subconjunto abierto de X, forma una base para la topología $\mathcal{F}_n(X)$ (ver [7, Teorema 0.11, p. 9]) la cual es llamada *Topología de Vietoris*. La Topología de Vietoris y la Topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden ([7, Teorema 0.13, p. 10]).

Si $n \geq 2$, la *suspension del n producto simétrico* de X se define como el espacio cociente.

$$\mathcal{SF}_n(X) = \mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X).$$

con la topología cociente, consideramos $q_X^n : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ la función cociente, y denotamos por $\mathcal{F}_X^n$ a $q_X^n(\mathcal{F}_1(X))$.

Dada una función continua y supreyectiva entre continuos $f : X \to Y$, consideramos la función $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ dada por $\mathcal{F}_n(f)(A) = f(A)$ para toda $A \in \mathcal{F}_n(X)$, y la llamamos *la función inducida* en el n-producto simétrico de X y Y. Se sabe que $\mathcal{F}_n(f)$ es continua [5, 2.10, p. 27]. Definimos la función $\mathcal{SF}_n(f) : \mathcal{SF}_n(X) \to \mathcal{SF}_n(Y)$ dada por

$$\mathcal{SF}_n(f)(\chi) = \begin{cases} q_Y^n(\mathcal{F}_n(f)((q_X^n)^{-1}(\chi))), & \text{si } \chi \neq F_X^n; \\ F_Y^n, & \text{si } \chi = F_X^n. \end{cases}$$

Notemos que, por [4, Teorema 4.3, p. 126] $\mathcal{SF}_n(f)$ es continua. Más aún, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_n(X) \arrow[r, "\mathcal{F}_n(f)"] \arrow[d, "q_X^n"'] & \mathcal{F}_n(Y) \arrow[d, "q_Y^n"] \\ \mathcal{SF}_n(X) \arrow[r, "\mathcal{SF}_n(f)"'] & \mathcal{SF}_n(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Este trabajo esta motivado en las respuestas de algunos de los problemas que se encuentran en [3] y está en [6] junto con el M. en C. Jimmy A. Naramjo-Murillo y la M. en C. Yajaida N. Valazquez-Inzunza.

Dada $\mathcal{M}$ una clase de funciones continuas y suprayectivas entre continuos, el problema general será el estudiar las relaciones entre los siguientes tres enunciados:

(1) $f \in \mathcal{M}$;

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$;

(3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$.

En este trabajo consideraremos las familias de las funciones definidas a continuación. Para una función continua supreyectiva entre continuos $f : X \to Y$, decimos que la función es:

(a) *casi monótona*, si para cualquier subcontinuo de interior no vacío B de Y, resulta que $f^{-1}(B)$ es conexo.

(b) *atriodica*, si para cualquier subcontinuo B de Y, existen dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$ tales que $B = f(C) \cup f(D)$ y para cada componente E de $f^{-1}(B)$, se cumple que $f(E) = B$ o $f(E) \subset f(C)$ o $f(E) \subset f(C)$.

(c) *libremente descomponible*, si para cualesquiera A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, existen dos subcontinuos propios A' y B' de X, tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subset A$ y $f(B') \subset B$.

(d) *fuertemente libremente descomponible*, si para cualquiera A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, se obtiene que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.

(e) *unidora*, si para cualquier subcontinuo Q de Y y cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$.

(f) *débilmente confluente*, si para cada subcontinuo B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.

(g) *semi-confluente*, si para cualquier subcontinuo Q de Y y cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$, se cumple que $f(C) \subset f(D)$ o $f(D) \subset f(C)$.

1.2. Resultados preliminares.

En esta sección enunciaremos algunos resultados que necesitaremos para el desarrollo de este trabajo. El siguiente resultado fue probado en [2, Teorema 3.2, p. 1194].

Lema 1.2.1. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $f : X \to Y$ es suprayectiva;

(2) $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y)$ es suprayectiva;

(3) $\mathcal{SF}_n(f) : \mathcal{SF}_n(X) \to \mathcal{SF}_n(Y)$ es suprayectiva.

Como todas las funciones con las que trabajaremos son suprayectivas, de acuerdo con el Lema 1.2.1, todas las funciones inducidas también son suprayectivas.

Los siguientes resultados fueron probados [3, Proposición 3.1, p. 492] y [3, Lema 3.6, p. 495], respectivamente.

Proposición 1.2.2. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) las funciones q_X^n y q_Y^n son monótonas;

(b) las funciones $q_X^n|_{\mathcal{F}_n(X)\setminus\mathcal{F}_1(X)} : \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{SF}_n(X) \setminus \{F_X^n\}$ y $q_Y^n|_{\mathcal{F}_n(Y)\setminus\mathcal{F}_1(Y)} : \mathcal{F}_n(Y) \setminus \mathcal{F}_1(Y) \to \mathcal{SF}_n(Y) \setminus \{F_Y^n\}$ son homeomorfismos;

(c) para cualquier subcontinuo $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{SF}_n(Y)$, se cumple lo siguiente

$$\mathcal{SF}_n(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = q_X^n\big(\mathcal{F}_n(f)^{-1}((q_Y^n)^{-1}(\mathcal{Q}))\big).$$

Lema 1.2.3. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Si $B_1, \ldots, B_n$ son subcontinuos ajenos dos a dos de Y y E_j es una componente $f^{-1}(B_j)$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\langle E_1, \ldots, E_n\rangle_n$ es una componente de $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle B_1, \ldots, B_n\rangle_n)$.*

1.3. Funciones casi monótonas.

En [3, Teorema 4.1, p. 496], los autores probaron el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Considere los siguientes enunciados.*

(1) f es casi monótona;

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es casi monótona;

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es casi monótona.

Entonces (2) implica (1) y (3).

Además, en [1, Ejemplo 3.4, p. 103] los autores dieron un ejemplo de dos continuos X y Y una función $f : X \to Y$ continua la cual es casi monótona, pero $\mathcal{F}_n(f)$ no es casi monótona para cualquier $n \geqslant 2$. Esto muestra que *(1)* no implica *(2)* en el Teorema 1.3.1, y esto responde [3, Pregunta 4.4-(i), p. 497]. Notemos que, esto no responde si *(1)* implica *(3)*. Por lo que, daremos un ejemplo de una función $f : X \to Y$ la cual es casi monótona pero ni $\mathcal{F}_2(f)$, ni $\mathcal{SF}_2(f)$ son casi monótonas, esto muestra que *(1)* no implica *(3)*, contestando [3, Pregunta 4.4-(ii), p. 497].

Ejemplo 1.3.2. Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo y $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ el circulo unitario centrado en el origen. Sea $Y = \mathbb{S}^1 \cup I$, donde I es un rayo que converge a $\mathbb{S}^1$ como se muestra en la Figura 1.1.

Dados $r, s \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-i\}$, $r \neq s$, $\widehat{rs}$ denotará el arco en $\mathbb{S}^1 \setminus \{-i\}$ con extremos r y s; y $-r$ denotará la antípoda de r.

Sea $0 < \delta < \frac{1}{16}$. Sean $a, b \in \mathbb{S}^1$ tales que $\mathrm{d}(a, 1) = \delta$, $a \notin \widehat{1i}$, $\mathrm{d}(a, b) = \delta$ y $b \notin \widehat{ai}$. Entonces tenemos que $\mathrm{d}(-1, -a) = \delta$ y $\mathrm{d}(-a, -b) = \delta$. Tomemos $d \in \widehat{1i} \setminus \{i, 1\}$ y $c \in \widehat{(-b)i} \setminus \{i, -b\}$.

Sean R_1 y R_2 dos rayos ajenos que convergen a los arcos $\widehat{1d}$ y $\widehat{-bc}$, respectivamente, como se observa en la Figura 1.1, y Sea $X = Y \cup R_1 \cup R_2$.

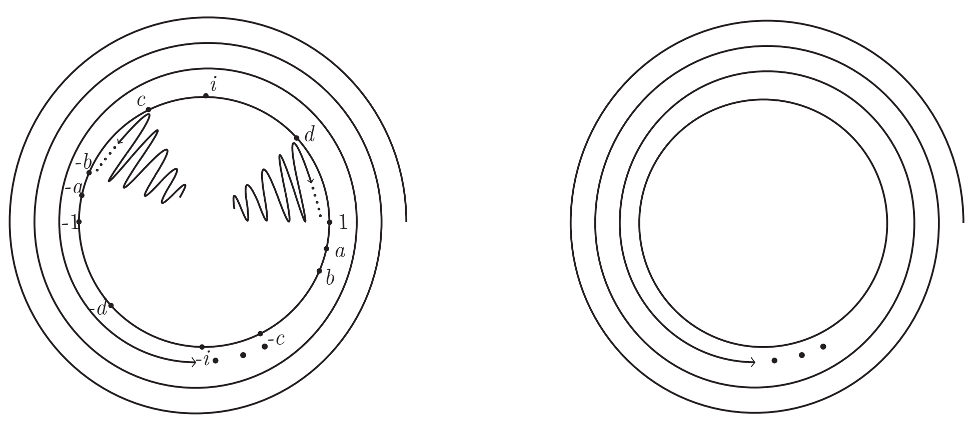

Figura 1.1: Continuos X y Y.

Definimos la función $f : X \to Y$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} re^{i\theta} & \text{si } r > 1; \\ e^{i\theta} & \text{si } r \leqslant 1, \end{cases}$$

para toda $re^{i\theta} \in X$.

Entonces f es una función casi monotona. Veamos que $\mathcal{F}_2(f)$ y $\mathcal{SF}_2(f)$ no son casi monótonas.

Tomemos el subcontinuo $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{F}_2(Y)$ dado por:

$$\mathcal{Q} = \big\{\{x, y\} \in \mathcal{F}_2(Y) : \mathrm{d}(x, z) \leqslant \delta \text{ y } \mathrm{d}(y, -z) \leqslant \delta, \text{ para algun } z \in \mathbb{S}^1\big\}.$$

Notemos que si $z \in \mathbb{S}^1$, entonces $\langle B(z, \delta), B(-z, \delta)\rangle_2$ es un subconjunto abierto contenido en $\mathcal{Q}$, por lo que $\mathrm{int}_{\mathcal{F}_2(Y)}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$. Sea $p \in f^{-1}(1) \setminus \{1\}$, $q \in f^{-1}(-b) \setminus \{-b\}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap f^{-1}(1) = \{p\}$, $B(p, \varepsilon) \cap R_2 = \emptyset$, $B(q, \varepsilon) \cap f^{-1}(-b) = \{q\}$ y $B(q, \varepsilon) \cap R_1 = \emptyset$. Observemos que $\langle B(p, \varepsilon), B(q, \varepsilon)\rangle_2 \cap \mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{Q}) = \{\{p, q\}\}$. Entonces $\{\{p, q\}\}$ es un subconjunto propio abierto y cerrado de $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{Q})$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{Q})$ no es conexo. Con lo anterior concluimos que $\mathcal{F}_2(f)$ no es casi monótona. Además, como $\mathcal{Q} \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$, usando la Proposición 1.2.2, tenemos que $q_Y^2(\mathcal{Q})$ es un subcontinuo de $\mathcal{SF}_2(Y)$ con interior no vacio tal que $\mathcal{SF}_2(f)^{-1}(q_Y^2(\mathcal{Q}))$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{Q})$. Entonces, $\mathcal{SF}_2(f)^{-1}(q_Y^2(\mathcal{Q}))$ no es conexo y concluimos que $\mathcal{SF}_2(f)$ no es casi monótona.

Ahora bien, probaremos que *(3)* implica *(1)*, para $n = 2$, lo cual contesta [3, Pregunta 4.4-(iii), p. 497].

Teorema 1.3.3. *Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva entre continuos. Si $SF_2(f)$ es casi monótona, entonces f es casi monótona.*

Demostración. Supongamos que f no es casi monótona. Entonces existe un subcontinuo B de Y tal que $\mathrm{int}_Y(B) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(B)$ no es conexo. Entonces, existen dos subconjuntos compactos no vacíos K y L de X tales que $f^{-1}(B) = K \cup L$. Analizaremos dos casos.

Caso A. Toda componente de $Y \setminus B$ tienen interior vacío.

En este caso, tenemos que en particular $Y \setminus B$ no es conexo.

Fijamos dos componentes K_1 y L_1 de K y L, respectivamente. Sean U_0 y V_0 dos subconjuntos abiertos con cerradura ajena en X tales que $K \subset U_0$ y $L \subset V_0$. Entonces $f^{-1}(B) \subset U_0 \cup V_0$.

Como f es continua, existen dos subconjuntos abiertos U y V de X los cuales satisfacen que $f^{-1}(B) \subset U \cup V$, $U \subset U_0$, $V \subset V_0$ y para cualquier $v \in U \cup V$, $f^{-1}(f(v)) \subset U_0 \cup V_0$.

Por [8, Corolario 5.5, p. 74], existen dos subcontinuos K_2 y L_2 de X tales que $K_1 \subsetneq K_2 \subset U$ y $L_1 \subsetneq L_2 \subset V$.

Si $K_2 \subset f^{-1}(B) = K \cup L$, dado que $K_2 \cap K \neq \emptyset$, la conexidad de K_2 implica que $K_2 \subset K$ y entonces $K_2 \subset K_1$, lo cual es absurdo. Esto prueba que $K_2 \not\subseteq f^{-1}(B)$. Similarmente, $L_2 \not\subseteq f^{-1}(B)$.

Elegimos dos puntos $x \in K_2 \setminus f^{-1}(B)$ y $u \in L_2 \setminus f^{-1}(B)$.

Sea S y T las respectivas componentes de $K_2 \setminus f^{-1}(B)$ y $L_2 \setminus f^{-1}(B)$ tales que $x \in S$ y $u \in T$. Por el Teorema de Golpes en la Frontera ([8, Teorema 5.6, p. 74]), aplicado al continuo K_2 y a su subconjunto propio $K_2 \setminus f^{-1}(B)$, podemos tomar un punto $x_1 \in \mathrm{cl}_{K_2}(S) \cap f^{-1}(B)$. Similarmente, podemos tomar un punto $u_1 \in \mathrm{cl}_{L_2}(T) \cap f^{-1}(B)$. Notemos que $\mathrm{cl}_X(S) = \mathrm{cl}_{K_2}(S) \subset S \cup f^{-1}(B)$, por lo que $f(\mathrm{cl}_X(S)) \subset f(S) \cup B$. Dado que $f(\mathrm{cl}_X(S))$ es compacto, tenemos que $\mathrm{cl}_Y(f(S)) \subset f(\mathrm{cl}_X(S))$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_Y(f(S)) \subset f(S) \cup B$. Similarmente, $\mathrm{cl}_Y(f(T)) \subset f(T) \cup B$.

Tenemos que $f(S)$ y $f(T)$ son subconjuntos conexos de $Y \setminus B$, $f(x_1) \in \mathrm{cl}_Y(f(S)) \cap B$ y $f(u_1) \in \mathrm{cl}_Y(f(T)) \cap B$. Entonces el conjunto $F = B \cup \mathrm{cl}_Y(f(S)) \cup \mathrm{cl}_Y(f(T))$ es un subcontinuo de Y. Además $f(x), f(u) \in f(S) \cup f(T) \subset F$. Por el párrafo anterior, obtenemos que $F \subset f(S) \cup B \cup f(T)$.

Dado un punto $s \in S \subset K_2 \subset U$, tenemos que $f^{-1}(f(s)) \subset U_0 \cup V_0$. De manera que $f^{-1}(f(S)) \subset U_0 \cup V_0$. Similarmente, $f^{-1}(f(T)) \subset U_0 \cup V_0$. Por lo tanto, $f^{-1}(F) \subset U_0 \cup V_0$.

Sea G y J las respectivas componentes $Y \setminus B$ que contiene a los conjuntos $f(S)$ y $f(T)$.

Como ninguna componente de $Y \setminus B$ tiene interior distinto del vacío, se sigue que $Y \setminus B$ tiene una infinidad de componentes. De manera que existen subconjuntos abiertos ajenos R, W_1 y W_2 de Y tales que $Y \setminus B = R \cup W_1 \cup W_2$. Dado que G y J son subconjuntos conexos contenidos en $Y \setminus B$, podemos suponer que $G \cup J \subset W_1 \cup W_2$. Entonces $R \cap (G \cup J) = \emptyset$.

Sean $a = f(x) \in f(S) \subset G \cap F$ y $c = f(u) \in f(T) \subset J \cap F$. De donde $\{a, c\} \cap B = \emptyset$.

Como $\mathrm{cl}_Y f(S) \subset f(S) \cup B$ y $a \notin B$, podemos usar un arco ordenado de $\{a\}$ a $\mathrm{cl}_Y f(S)$, para obtener un subcontinuo no degenerado A de Y tal que $a \in A \subset f(S) \subset Y \setminus B$. Similarmente, podemos encontrar un subcontinuo no degenerado C de Y tal que $c \in C \subset f(T) \subset Y \setminus B$. Elegimos los puntos $p \in A \setminus \{a\}$ y $q \in C \setminus \{c\}$.

Elegimos un cerrado Z de Y con interior no vacío, tal que $Z \subset R$.

Sea $D = \mathrm{cl}_Y\big(\bigcup\{H :$ es una componente de $Y \setminus B$ y $H \cap Z \neq \emptyset\}\big)$.

Definimos:

$$\mathcal{E} = \langle Z, F\rangle_2 \cup \langle D, \{a, c\}\rangle_2 \cup \langle D \cap B, A \cup C\rangle_2 \cup \langle B, \{p, q\}\rangle_2 .$$

Afirmamos que $\mathcal{E}$ es a un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(Y) \setminus \mathcal{F}_1(Y)$, que tiene interior no vacío $\mathcal{F}_2(Y)$ y que cumple que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ no es conexo.

Como $\langle \mathrm{int}_Y(Z), \mathrm{int}_Y(B)\rangle_2$ es un subconjunto abierto no vacío en $\mathcal{F}_2(Y)$, contenido en $\mathcal{E}$, tenemos que el interior de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}_2(Y)$ es distinto del vacío.

Como cada uno de los siguientes conjuntos: Z, F, D, $\{a, c\}$, $D\cap B$, $A\cup C$, $\{p, q\}$ y B son cerrados en Y, se sigue que $\mathcal{E}$ es cerrado en $\mathcal{F}_2(Y)$.

Como R es abierto y ajeno a B, G y J, tenemos también que es ajeno a B, $f(S)$ y $f(T)$. De donde $F \cap R = \emptyset$. Dado que $Z \subset R$, resulta que $Z \cap F = \emptyset$. Por lo tanto $\langle Z, F\rangle_2 \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$.

Sea H una componente de $Y \setminus B$ tales que $H\cap Z \neq \emptyset$. Entonces $H\cap R \neq \emptyset$, y usando que R y $W_1 \cup W_2$ es una descomposición de $Y \setminus B$, obtenemos que $H \subset R$. En particular $H \cap (W_1 \cup W_2) = \emptyset$. Dado que $W_1 \cup W_2$ es abierto en Y, concluimos que $D \cap (W_1 \cup W_2) = \emptyset$. Como $\{a, c\} \subset G \cup J \subset W_1 \cup W_2$, se tiene que $D \cap \{a, c\} = \emptyset$. Por lo tanto, $\langle D, \{a, c\}\rangle_2 \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$.

Como $a \in A \cap G \subset W_1 \cup W_2$, A es conexo y $A \subset Y \setminus B$, y usando que R y $W_1 \cup W_2$ es una descomposición de $Y \setminus B$, tenemos que $A \subset W_1 \cup W_2$. Similarmente, $C \subset W_1 \cup W_2$. Dado que $D \cap (W_1 \cup W_2) = \emptyset$, concluimos que $D \cap (A \cup C) = \emptyset$. Por lo tanto, $\langle D \cap B, A \cup C\rangle_2 \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$.

Como $\{p, q\} \subset A \cup C \subset Y \setminus B$, obtenemos que $\langle B, \{p, q\}\rangle_2 \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$.

Hemos probado que $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{E}$ es conexo.

Elegimos un punto $b_0 \in B$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{b_0, p\}$.

Como B es conexo, tenemos que $\langle B, \{p\}\rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{b_0, p\}$. De modo que, $\langle B, \{p\}\rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Dado $t \in D \cap B$, tenemos que $\{t, p\} \in \langle B, \{p\}\rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Como A es conexo, $\langle \{t\}, A\rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{C}$ que tiene a $\{t, p\}$. Esto implica que $\langle \{t\}, A\rangle_2 \subset \mathcal{C}$. En particular, $\{t, a\} \in \mathcal{C}$. Lo cual prueba que $\langle D \cap B, \{a\}\rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Sea $z \in Z$ y sea H la componente de $Y\setminus B$, que tiene a z. Por el Teorema de Golpes en la Frontera ([8, Teorema 5.6, p. 74]), tenemos que existe un punto $h \in \mathrm{cl}_Y(H)\cap B$. Como $\mathrm{cl}_Y(H) \subset D$, concluimos que $\{h, a\} \in \langle D \cap B, \{a\}\rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Entonces $\langle \mathrm{cl}_Y(H), \{a\}\rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{z, a\}$ y a $\{h, a\}$. Por lo tanto, $\{z, a\} \in \mathcal{C}$. Esto prueba que $\langle Z, \{a\}\rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Más aún, hemos probado que para cualquier componente H de $Y \setminus B$ que intersecta a Z, se tiene que $\langle \mathrm{cl}_Y(H), \{a\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Dado $z \in Z$. Sabemos que $\{z, a\} \in \mathcal{C}$. Dado que F es conexo, se tiene que $\langle \{z\}, F \rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{z, a\}$. De manera que $\langle \{z\}, F \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Con esto hemos probado que $\langle Z, F \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. En particular, $\langle Z, \{c\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Dada una componente H de $Y \setminus B$ que intersecta a Z, tomamos $z \in H \cap Z$. Ya sabemos que $\{z, c\} \in \mathcal{C}$. Por lo que $\langle \mathrm{cl}_Y(H), \{c\} \rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{z, c\}$. De modo que, $\langle \mathrm{cl}_Y(H), \{c\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. esto completa la prueba de que para cualquier componente H de $Y \setminus B$ que intesecta a Z, se cumple que $\langle \mathrm{cl}_Y(H), \{a, c\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Dado un elemento $I \in \langle D, \{a\} \rangle_2$, existe $t \in D$ tal que $I = \{t, a\}$. Entonces existe una sucesión $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, de puntos en X, satisfaciendo que $t = \lim_{n \to \infty} t_n$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in H_n$ para alguna componente H_n de $Y \setminus B$ tal que $H_n \cap Z \neq \emptyset$. Por el párrafo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{t_n, a\} \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{E}$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{F}_2(Y)$, y entonces es compacto, por lo que tenemos que $\mathcal{C}$ también es compacto, de manera que $\{t, a\} = \lim_{m \to \infty} \{t_m, a\} \in \mathcal{C}$. Hemos probado que $\langle D, \{a\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Similarmente, $\langle D, \{c\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\langle D, \{a, c\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Dada $t \in D \cap B$, sabemos que $\{t, a\}, \{t, c\} \in \mathcal{C}$. Como A y C son conexos, $\langle \{t\}, A \rangle_2$ y $\langle \{t\}, C \rangle_2$ son subconjuntos conexos de $\mathcal{E}$ que intersectan a $\mathcal{C}$. De modo que $\langle \{t\}, A \rangle_2 \cup \langle \{t\}, C \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Esto prueba que $\langle D \cap B, A \cup C \rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Como $Z \neq \emptyset$, el Teorema de Golpes en la Frontera ([8, Teorema 5.6, p. 74]) nos garantiza que existe un punto $t \in D \cap B$. Como $\{t, c\} \in \mathcal{C}$, tenemos que $\langle \{t\}, C \rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que intersecta $\mathcal{C}$. De manera que $\langle \{t\}, C \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. En particular, $\{t, q\} \in \mathcal{C}$. Dado que B es conexo y $t \in B$, $\langle B, \{q\} \rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{t, q\}$. De modo que $\langle B, \{q\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Con esto, concluimos que $\langle B, \{p, q\} \rangle_2 \subset \mathcal{C}$.

Esto concluye la prueba de que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ es conexo, y entonces es un continuo.

Definimos los siguiente conjuntos:

$$\mathcal{A} = \left\langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap U_0 \right\rangle_2 \cup \left\langle f^{-1}(D), f^{-1}(\{a, c\}) \cap U_0 \right\rangle_2 \cup$$
$$\left\langle f^{-1}(D \cap B), f^{-1}(A \cup C) \cap U_0 \right\rangle_2 \cup \left\langle f^{-1}(B), f^{-1}(\{p, q\}) \cap U_0 \right\rangle_2 \text{ y}$$

$$\mathcal{B} = \left\langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap V_0 \right\rangle_2 \cup \left\langle f^{-1}(D), f^{-1}(\{a, c\}) \cap V_0 \right\rangle_2 \cup$$
$$\left\langle f^{-1}(D \cap B), f^{-1}(A \cup C) \cap V_0 \right\rangle_2 \cup \left\langle f^{-1}(B), f^{-1}(\{p, q\}) \cap V_0 \right\rangle_2 .$$

Veremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son abiertos ajenos no vacíos de $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ tales que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Elegimos un punto $z_1 \in X$ tal que $f(z_1) \in Z \subset D$. Como $x \in f^{-1}(a) \cap S \subset f^{-1}(a) \cap U_0$, tenemos que $\{z_1, x\} \in \mathcal{A}$. Dado que $u \in f^{-1}(c) \cap T \subset f^{-1}(c) \cap V_0$, resulta que $\{z_1, u\} \in \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos distintos del vacío.

Mostraremos que $\mathcal{A}$ es abierto en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$, la prueba para $\mathcal{B}$ es similar.

Sea $\{s_0, t_0\} \in \mathcal{A}$. Analizaremos cuatro casos.

Caso 1. $s_0 \in f^{-1}(Z)$ y $t_0 \in f^{-1}(F) \cap U_0$.

Como $Z \cap F = \emptyset$, existe $\delta > 0$ tal que $(B(s_0, \delta) \cup f^{-1}(Z)) \cap (B(t_0, \delta) \cup f^{-1}(F)) = \emptyset$ y $B(t_0, \delta) \subset U_0$. Sean $s \in B(s_0, \delta)$ y $t \in B(t_0, \delta)$ tales que $\mathcal{F}_2(f)(\{s, t\}) = \{f(s), f(t)\} \in \mathcal{E}$. Si $s \in f^{-1}(Z)$ y $t \in f^{-1}(F)$, tenemos que $\{s, t\} \in \mathcal{A}$.

Si $s \in f^{-1}(Z)$ y $t \notin f^{-1}(F)$, entonces $\{f(s), f(t)\} \cap F = \emptyset$. Lo cual es una contradicción, porque todos los elementos de $\mathcal{E}$ intersectan a F.

Entonces sólo nos resta considerar la posibilidad de que $s \notin f^{-1}(Z)$. Como $f(s) \notin F$, la definición de $\mathcal{E}$ implica que $f(s) \in D \setminus B$ y que $f(t) \in \{a, c\}$. De modo que $\{s, t\} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\{s_0, t_0\}$ es un elemento en el interior de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Caso 2. $s_0 \in f^{-1}(D)$ y $t_0 \in f^{-1}(\{a, c\}) \cap U_0$.

Como $\{a, c\} \subset F$, en el Case 1 ya analizamos la posibilidad de que $s_0 \in f^{-1}(Z)$. Entonces supongamos que $s_0 \notin f^{-1}(Z)$.

Sea $\delta > 0$ tal que $B(s_0, \delta) \cap f^{-1}(Z \cup A \cup C) = \emptyset$, $B(t_0, \delta) \cap f^{-1}(B \cup D \cup \{p, q\}) = \emptyset$ y $B(t_0, \delta) \subset U_0$. Sean $s \in B(s_0, \delta)$ y $t \in B(t_0, \delta)$ tales que $\mathcal{F}_2(f)(\{s, t\}) = \{f(s), f(t)\} \in \mathcal{E}$.

Como $f(t) \notin B \cup D \cup \{p, q\}$ y $f(s) \notin Z \cup A \cup C$, tenemos que $\{f(s), f(t)\} \cap Z = \emptyset$ y $f(t) \notin B \cup \{p, q\}$. De la definición de $\mathcal{E}$, obtenemos que $f(s) \in D$ y $f(t) \in \{a, c\}$ o $f(s) \in D \cap B$ y $f(t) \in A \cup C$. En ambos casos concluimos que $\{s, t\} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\{s_0, t_0\}$ es un elemento en el interior de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Caso 3. $s_0 \in f^{-1}(D \cap B)$ y $t_0 \in f^{-1}(A \cup C) \cap U_0$.

En el caso anterior analizamos la posibilidad de que $f(t_0) \in \{a, c\}$. Entonces, podemos suponer que $t_0 \notin f^{-1}(\{a, c\})$.

Sea $\delta > 0$ tal que $B(s_0, \delta) \cap f^{-1}(Z \cup A \cup C) = \emptyset$, $B(t_0, \delta) \cap f^{-1}(B \cup D \cup \{a, c\}) = \emptyset$ y $B(t_0, \delta) \subset U_0$. Sean $s \in B(s_0, \delta)$ y $t \in B(t_0, \delta)$ tales que $\mathcal{F}_2(f)(\{s, t\}) = \{f(s), f(t)\} \in \mathcal{E}$.

Como $\{f(s), f(t)\} \cap (Z \cup \{a, c\}) = \emptyset$ y $f(s) \notin A \cup C$, de la definición de $\mathcal{E}$, obtenemos que $f(s) \in D \cap B$ y $f(t) \in A \cup C$ o $f(s) \in B$ y $f(t) \in \{p, q\}$. En ambos casos concluimos que $\{s, t\} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\{s_0, t_0\}$ es un elemento en el interior de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Caso 4. $s_0 \in f^{-1}(B)$ y $t_0 \in f^{-1}(\{p, q\}) \cap U_0$.

En el caso 3 revisamos la posibilidad de que $f(s_0) \in D$. Entonces, podemos suponer que $s_0 \notin f^{-1}(D)$.

Sea $\delta > 0$ tal que $B(s_0, \delta) \cap f^{-1}(D \cup A \cup C) = \emptyset$, $B(t_0, \delta) \cap f^{-1}(B \cup D \cup \{a, c\}) = \emptyset$ y $B(t_0, \delta) \subset U_0$. Sean $s \in B(s_0, \delta)$ y $t \in B(t_0, \delta)$ tales que $\mathcal{F}_2(f)(\{s, t\}) = \{f(s), f(t)\} \in \mathcal{E}$.

Como $\{f(s), f(t)\} \cap D = \emptyset$ y $f(s) \notin A \cup C$, de la definición $\mathcal{E}$ obtenemos que $f(s) \in B$ y $f(t) \in \{p, q\}$. Entonces $\{s, t\} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\{s_0, t_0\}$ es un elemento en el interior de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Con esto concluimos la prueba de que $\mathcal{A}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Ahora mostraremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ajenos. Si no, podemos suponer que existe un elemento $\{s, t\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Revisaremos cuatro casos.

Caso 1. $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap U_0 \rangle_2$ o
$\{s, t\} \in \langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap V_0 \rangle_2$.

Vamos a ver el caso en el que $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap U_0 \rangle_2$, el otro caso es similar.

Podemos suponer que $s \in f^{-1}(Z)$ y que $t \in f^{-1}(F) \cap U_0$.

Dado que $f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(F \cup \{a, c, p, q\} \cup A \cup C) = \emptyset$, tenemos que s no está en $f^{-1}(F \cup \{a, c, p, q\} \cup A \cup C) \cap V_0$. Como $\{s, t\} \in \mathcal{B}$ y usando la forma en la que se definió $\mathcal{B}$, concluimos que t sí pertenece a este conjunto. De manera que $t \in V_0$. Esto contradice el hecho de que $U_0 \cap V_0 = \emptyset$, lo cual concluye el caso 1.

Caso 2. $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(D), f^{-1}(\{a, c\}) \cap U_0 \rangle_2$ o
$\{s, t\} \in \langle f^{-1}(D), f^{-1}(\{a, c\}) \cap V_0 \rangle_2$.

Vamos a ver el caso en el que $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(D), f^{-1}(\{a,c\}) \cap U_0 \rangle_2$, el otro caso es similar. Suponemos además que no se cumple la condición del Caso 1.

Podemos suponer que $s \in f^{-1}(D)$ y que $t \in f^{-1}(\{a,c\}) \cap U_0$.

Dado que $f^{-1}(D) \cap f^{-1}(\{a,c,p,q\} \cup A \cup C) = \emptyset$, tenemos que s no está en $f^{-1}(\{a,c,p,q\} \cup A \cup C) \cap V_0$. Como $\{s,t\} \in \mathcal{B}$ y la condición del Caso 1 no se cumple, usando la forma en la que se definió $\mathcal{B}$, concluimos que t sí pertenece a este conjunto. De manera que, $t \in V_0$. Esto contradice el hecho de que $U_0 \cap V_0 = \emptyset$, lo cual concluye este caso.

Caso 3. $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(D \cap B), f^{-1}(A \cup C) \cap U_0 \rangle_2$ o $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(D \cap B), f^{-1}(A \cup C) \cap V_0 \rangle_2$.

Vamos a ver el caso en el que $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(D \cap B), f^{-1}(A \cup C) \cap U_0 \rangle_2$, el otro caso es similar. Suponemos además que no se cumplen las condiciones de los Caso 1 y 2.

Podemos suponer que $s \in f^{-1}(D \cap B)$ y $t \in f^{-1}(A \cup C) \cap U_0$.

Como $f^{-1}(D \cap B) \cap f^{-1}(\{p,q\} \cup A \cup C) = \emptyset$, tenemos que s no está en $f^{-1}(\{p,q\} \cup A \cup C) \cap V_0$. Como $\{s,t\} \in \mathcal{B}$ y las condiciones de los Caso 1 y 2 no se cumplen, usando la forma en la que se definió $\mathcal{B}$, concluimos que t sí pertenece a este conjunto. De manera que, $t \in V_0$. Esto contradice el hecho de que $U_0 \cap V_0 = \emptyset$, lo cual concluye este caso.

Caso 4. $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(B), f^{-1}(\{p,q\}) \cap U_0 \rangle_2$ o $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(B), f^{-1}(\{p,q\}) \cap V_0 \rangle_2$.

Vamos a ver el caso en el que $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(B), f^{-1}(\{p,q\}) \cap U_0 \rangle_2$, el otro caso es similar. Suponemos además que no se cumplen las condiciones de los casos anteriores.

Podemos suponer que $s \in f^{-1}(B)$ y que $t \in f^{-1}(\{p,q\}) \cap U_0$.

Como $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\{p,q\}) = \emptyset$, tenemos que s no está en $f^{-1}(\{p,q\}) \cap V_0$. Como $\{s,t\} \in \mathcal{B}$ y las condiciones de los caso no se cumplen, usando la forma en la que se definió $\mathcal{B}$, concluimos que t sí pertenece a este conjunto. De manera que, $t \in V_0$. Esto contradice el hecho de que $U_0 \cap V_0 = \emptyset$, lo cual concluye este caso.

Esto termina la prueba de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ajenos.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Claramente, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Sea $\{s,t\} \in \mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$. Vamos a considerar el caso en el que $f(s) \in Z$ y que $f(t) \in F$. Como $\{a,c,p,q\} \cup A \cup C \subset F$, el resto de los casos son más fáciles. Recordemos que $f^{-1}(F) \subset U_0 \cup V_0$, de manera que $s \in f^{-1}(Z)$ y $t \in f^{-1}(F) \subset U_0 \cup V_0$. Por lo que $\{s,t\} \in \langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap U_0\rangle_2 \cup \langle f^{-1}(Z), f^{-1}(F) \cap V_0\rangle_2 \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Esto finaliza la prueba de que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es una separación de $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$. Por lo tanto $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ no es conexo.

Caso B. Existe una componente C de $Y \setminus B$ con interior no vacío.

Sea $A = \mathrm{cl}_Y(C)$. Fijamos dos abiertos no vacíos W y Z de Y tal que $\mathrm{cl}_Y(W) \subset \mathrm{int}_Y(B)$ y $\mathrm{cl}_Y(Z) \subset C$. Notemos que $\mathrm{cl}_Y(Z) \cap B = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_Y(W) \cap A = \emptyset$.

Sea

$$\mathcal{E} = \langle \mathrm{cl}_Y(Z), B\rangle_2 \cup \langle \mathrm{cl}_Y(W), A\rangle_2 .$$

Afirmamos que $\mathcal{E}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(Y) \setminus \mathcal{F}_1(Y)$, con interior no vacío en $\mathcal{F}_2(Y)$ y cumple que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ no es conexo.

Dado que $\langle Z, W\rangle_2$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_2(Y)$ contenido en $\mathcal{E}$, de donde el interior de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}_2(Y)$ es distinto del vacío. Además, cada uno de los conjuntos: $\mathrm{cl}_Y(Z)$, B, $\mathrm{cl}_Y(W)$ y A es cerrado en Y, concluimos que $\mathcal{E}$ es cerrado $\mathcal{F}_2(Y)$.

Como $\mathrm{cl}_Y(Z) \cap B = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_Y(W) \cap A = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_2(Y) \setminus \mathcal{F}_1(Y)$.

Elegimos puntos $z \in Z$ y $w \in W$. Como $\{z,w\} \in \mathcal{E}$, podemos tomar la componente $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{z,w\}$.

Veamos que $\mathcal{E} = \mathcal{C}$.

Sean $x \in \mathrm{cl}_Y(Z)$ y $b \in B$. Entonces $\langle \{x\}, B\rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que contiene a $\{x,b\}$ y a $\{x,w\}$. Por otro lado, $\langle \{w\}, A\rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que contiene a $\{w,x\}$ y a $\{w,z\}$. De modo que, $\langle \{x\}, B\rangle_2 \cup \langle \{w\}, A\rangle_2$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{E}$ que tiene a $\{x,b\}$ y a $\{w,z\}$. Por lo tanto, $\{x,b\} \in \mathcal{C}$. Esto prueba que $\langle \mathrm{cl}_Y(Z), B\rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Similarmente se muestra que $\langle \mathrm{cl}_Y(W), A\rangle_2 \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ es conexo.

Sean U_0 y V_0 subconjuntos abiertos con cerraduras ajenas de X, tales que $K \subset U_0$ y $L \subset V_0$. Como $f^{-1}(B) \subset U_0 \cup V_0$ y f es continua, entonces existen subconjuntos U y V de X tal que $K \subset U \subset U_0$, $L \subset V \subset V_0$ y que tienen la siguiente propiedad: si $x \in U \cup V$, entonces $f^{-1}(f(x)) \subset U_0 \cup V_0$.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A} = \left\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), K\right\rangle_2 \cup \left\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0, f^{-1}(A)\right\rangle_2, \text{ y}$$
$$\mathcal{B} = \left\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), L\right\rangle_2 \cup \left\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap V_0, f^{-1}(A)\right\rangle_2.$$

Veremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son abiertos ajenos no vacíos de $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ tales que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Mostraremos que $\mathcal{A}$ es abierto en $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$, la prueba para $\mathcal{B}$ es similar.

Sea $\{s_0, t_0\} \in \mathcal{A}$. Analizaremos dos casos.

Caso 1. $s_0 \in f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z))$ y $t_0 \in K$.

Como $\mathrm{cl}_Y(Z) \cap B = \emptyset$, existe $\delta > 0$ tal que $B(s_0, \delta) \cap (B(t_0, \delta) \cup f^{-1}(B)) = \emptyset$ y $B(t_0, \delta) \subset U_0$. Sea $s \in B(s_0, \delta)$ y $t \in B(t_0, \delta)$ tales que $\mathcal{F}_2(f)(\{s, t\}) = \{f(s), f(t)\} \in \mathcal{E}$.

Supongamos que $\{f(s), f(t)\} \in \langle \mathrm{cl}_Y(Z), B\rangle_2$. Dado que $f(s) \notin B$, tenemos que $f(s) \in \mathrm{cl}_Y(Z)$ y $f(t) \in B$. Entonces, $t \in K \cup L$ y $t \notin V_0$. De manera que $t \in K$. Por lo tanto, $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), K\rangle_2 \subset \mathcal{A}$.

Supongamos que $\{f(s), f(t)\} \in \langle \mathrm{cl}_Y(W), A\rangle_2$. Como $f(s) \notin B$, entonces $f(s) \in A$ y $f(t) \in \mathrm{cl}_Y(W)$. Por lo que, $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0, f^{-1}(A)\rangle_2 \subset \mathcal{A}$. De modo que $\{s_0, t_0\}$ es un elemento en el interior de $\mathcal{A}$.

Caso 2. $s_0 \in f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0$ y $t_0 \in f^{-1}(A)$.

Como $\mathrm{cl}_Y(W) \cap A = \emptyset$, existe $\delta > 0$ tal que $(B(s_0, \delta) \cup f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)))$ $\cap (B(t_0, \delta) \cup f^{-1}(A)) = \emptyset$ y $B(s_0, \delta) \subset U_0$. Sean $s \in B(s_0, \delta)$ y $t \in B(t_0, \delta)$ tales que $\mathcal{F}_2(f)(\{s, t\}) = \{f(s), f(t)\} \in \mathcal{E}$.

Supongamos que $\{f(s), f(t)\} \in \langle \mathrm{cl}_Y(Z), B\rangle_2$. Dado que $s \notin f^{-1}(A)$, tenemos que $f(s) \in B$ y $f(t) \in \mathrm{cl}_Y(Z)$. Entonces, $s \in K \cup L$ y $s \notin V_0$, de manera que $s \in K$. Por lo tanto $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), K\rangle_2$.

Supongamos que $\{f(s), f(t)\} \in \langle \mathrm{cl}_Y(W), A\rangle_2$. Como $f(s) \notin A$, entonces $f(s) \in \mathrm{cl}_Y(W)$ y $f(t) \in A$. Por lo que $\{s, t\} \in \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0, f^{-1}(A)\rangle_2 \subset \mathcal{A}$. De modo que $\{s_0, t_0\}$ es un elemento en el interior de $\mathcal{A}$.

Esto termina la prueba que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$.

Veamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ajenos.

Como $\mathrm{cl}_Y(Z)$ y B son ajenos, los conjuntos $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z))$, K y L son ajenos dos a dos. Esto implica que $\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), K\rangle_2 \cap \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), L\rangle_2 = \emptyset$.

Dado que $\mathrm{cl}_Y(W)$ no intersecta a A, los conjuntos $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0$, $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap V_0$ y $f^{-1}(A)$ son ajenos dos a dos. Esto implica que $\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0, f^{-1}(A)\rangle_2 \cap \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap V_0, f^{-1}(A)\rangle_2 = \emptyset$.

Como $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0$, $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z))$ y L son ajenos dos a dos, tenemos que $\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0, f^{-1}(A)\rangle_2 \cap \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), L\rangle_2 = \emptyset$.

Similarmente, $\langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap V_0, f^{-1}(A)\rangle_2 \cap \langle f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(Z)), K\rangle_2 = \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son disjuntos.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Claramente, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$. La otra contención se sigue del hecho que $f^{-1}(B) = K \cup L$ y $f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) = (f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap U_0) \cup (f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(W)) \cap V_0)$.

Finalmente, como f es suprayectiva, $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ es no vacío.

Esto concluye la prueba de que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ no es conexo.

En ambos casos, A y B, obtenemos un subcontinuo $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}_2(Y) \setminus \mathcal{F}_1(Y)$ con interior no vacío tal que $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ no es conexo.

Usando la Proposición 1.2.2, tenemos que $q_Y^2(\mathcal{E})$ es un subcontinuo de $\mathcal{SF}_2(Y)$ con interior no vacío tal que $\mathcal{SF}_2(f)^{-1}(q_Y^2(\mathcal{E}))$ y $\mathcal{F}_2(f)^{-1}(\mathcal{E})$ son homeomorfos. Entonces, $\mathcal{SF}_2(f)^{-1}(q_Y^2(\mathcal{E}))$ no es conexo y concluimos que $\mathcal{SF}_2(f)$ no es casi monótona. Esto es una contradicción, por que habíamos supuesto que $\mathcal{SF}_2(f)$ era casi monótona.

Por lo tanto hemos probado que f es casi monótona.

$\square$

Notemos que en el Teorema 1.3.3, también mostramos que si $\mathcal{F}_2(f)$ es casi monótona, entonces f es casi monótona.

1.4. Funciones atriodicas.

En [3, Teorema 5.1, p. 497], los autores probaron el siguiente resultado.

Teorema 1.4.1. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Considere los siguientes enunciados:*

(1) f es atriodica;

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es atriodica;

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ *es atriodica.*

Entonces (2) implica (1) y (3), además (3) implica (1).

Adicionalmente, en [1, Ejemplo 3.6, p. 104], los autores probaron que *(1)* no implica *(2)*, lo cual responde [3, Pregunta 5.2-(i), p. 500]. En este sentido, el siguiente teorema nos da una clase de funciones para las cuales *(1)* no implica *(2)* ni *(3)*, lo que responde [3, Pregunta 5.2-(ii), p. 500].

Teorema 1.4.2. *Sean* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva entre continuos y* n *un entero mayor o igual que 2. Si* f *es atriodica pero no es débilmente confluente, entonces* $\mathcal{F}_n(f)$ *y* $\mathcal{SF}_n(f)$ *no son atriodicas.*

Demostración. Usando que f no es débilmente confluente, tenemos que existe un subcontinuo Q de Y tal que para toda componente C de $f^{-1}(Q)$, $f(C) \neq Q$. Dado que f es atriodica, existen dos componentes A y B de $f^{-1}(Q)$ tales que $Q = f(A) \cup f(B)$, y para cada componente E de $f^{-1}(Q)$, se cumple que $f(E) = Q$, o $f(E) \subset f(A)$ o $f(E) \subset f(B)$. Notemos que $Q \neq Y$ y tomemos un subcontinuo no degenerado C de Y ajeno a Q. Sea $p \in Q \setminus f(B)$, $q \in Q \setminus f(A)$, $d, e \in C, d \neq e$, y escojamos $n-2$ puntos distintos $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2} \in Y \setminus (Q \cup C)$. Ahora bien, definamos el subcontinuo $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}_n(Y)$ dado por $\mathcal{K} = \langle Q, \{d\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle \{p\}, C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n$.

Vamos a probar que si $\mathcal{D}$ es una componente de $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ tal que

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle \{p\}, C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n) \tag{1.1}$$

entonces

$$\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D}) \subset \langle f(A), C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n. \tag{1.2}$$

Sea $\mathcal{D}$ una componente de $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ que satisface (1.1). Entonces $\bigcup \mathcal{D}$ tiene a lo más n componentes. Como $\left(\bigcup \mathcal{D}\right) \cap f^{-1}(Q)$, $\left(\bigcup \mathcal{D}\right) \cap f^{-1}(C)$, $\left(\bigcup \mathcal{D}\right) \cap f^{-1}(y_1)$, $\ldots$, $\left(\bigcup \mathcal{D}\right) \cap f^{-1}(y_{n-2})$ son subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ cuya unión contiene a $\bigcup \mathcal{D}$, tenemos que $\bigcup \mathcal{D}$ tiene exactamente n componentes, digamos $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Asumimos que $D_1 \subset f^{-1}(Q)$, $D_2 \subset f^{-1}(C)$, $D_3 \subset f^{-1}(y_1), \ldots, D_n \subset f^{-1}(y_{n-2})$. Entonces, $f(D_1) \subset f(A)$ o $f(D_1) \subset f(B)$. Dado que $D_i \cap f^{-1}(p) = \emptyset$, para toda $i \in \{2, \ldots, n\}$, y se cumple (1.1), obtenemos que $D_1 \cap f^{-1}(p) \neq \emptyset$. De donde, $p \in f(D_1)$, lo cual implica que $f(D_1) \subset f(A)$. Por lo tanto, (1.2) se cumple.

Ahora bien, vamos a probar que $\mathcal{F}_n(f)$ no es atriodica. Para este fin consideremos dos componentes $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$. Veamos que

$$\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{C}) \cup \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D}) \subsetneq \mathcal{K}. \tag{1.3}$$

Caso 1. Ambas componentes intersectan a $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle\{p\}, C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n)$. De lo anterior, sabemos que

$$\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{C}) \subset \langle f(A), C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n,$$
$$\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D}) \subset \langle f(A), C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n$$

y que

$$\{q, d, y_1, \dots, y_{n-2}\} \in \mathcal{K} \setminus \langle f(A), C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n.$$

Entonces, (1.3) se cumple.

Caso 2. $\mathcal{C}$ intersecta a $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle\{p\}, C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n)$, mientras $\mathcal{D}$ no lo intersecta. En este caso, $\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{C}) \subset \langle f(A), C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n$ y $\mathcal{D}$ esta contenida en la union de los conjuntos cerrados ajenos $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle Q, \{d\}, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n)$ y $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n)$. De donde, $\mathcal{D}$ esta contenida en sólo uno de ellos. En el primer caso, obtenemos que $\{q, e, y_1, \dots, y_{n-2}\} \notin \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D})$, y esto implica que $\{q, e, y_1, \dots, y_{n-2}\} \in \mathcal{K} \setminus (\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{C}) \cup \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D}))$. Por lo que, (1.3) se cumple. En el otro caso, $\{q, d, y_1, \dots, y_{n-2}\} \notin \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D})$, lo cual implica que $\{q, d, y_1, \dots, y_{n-2}\} \in \mathcal{K} \setminus (\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{C}) \cup \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D}))$. Por lo tanto, (1.3) se cumple.

Caso 3. $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ no intersectan a $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle\{p\}, C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n)$. De donde

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \subset \mathcal{F}_n(f)^{-1}(\langle Q, \{d\}, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n).$$

Si $z \in C \setminus \{d, e\}$, entonces $\{p, z, y_1, \dots, y_{n-2}\} \in \langle\{p\}, C, \{y_1\}, \dots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \subset \mathcal{K}$ y $\{p, z, y_1, \dots, y_{n-2}\} \notin \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{C}) \cup \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{D})$. Por lo que, (1.3) se cumple.

En los tres casos, obtenemos que (1.3) se cumple. Por lo que concluimos que $\mathcal{F}_n(f)$ no es atriodica.

Para probar que $\mathcal{SF}_n(f)$ no es atriodica, observemos que $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$ y $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Usando la Proposición 1.2.2, tenemos que $q_Y^n(\mathcal{K})$ es un subcontinuo de $\mathcal{SF}_n(Y)$ tal que $\mathcal{SF}_n(f)^{-1}(q_Y^n(\mathcal{K}))$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$. Entonces, $q_Y^n(\mathcal{K})$ funciona para ver que $\mathcal{SF}_n(f)$ no es atriodica.

$\square$

Observemos que la función $f : X \to Y$ dada en [1, Ejemplo 3.6, p. 104] es atriodica, pero no es débilmente confluente. Entonces, por el Teorema 1.4.2, $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$ no son atriodicas para cualquier entero $n \geqslant 2$.

1.5. Funciones libremente descomponibles.

En [3, Teorema 6.5, p. 501], los autores probaron el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Considere los siguientes enunciados:*

(1) f es libremente descomponible;

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es libremente descomponible;

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es libremente descomponible.

Entonces (2) implica (3). Además, si Y es locamente conexo y n es mayor o igual que 3, entonces (2) implica (1), (3) implica (2) y (3) implica (1). Más aún, si n es mayor o igual que 3, (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

El ejemplo 6.4 en [3] muestra una función f que es fuertemente libremente descomponible (entonces libremente descomponible) la cual no es monótona. Entonces, si n es un entero mayor o igual que 2 por [3, Teorema 6.1, p. 500], $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$ no son libremente descomponibles (entonces no son fuertemente libremente descomponibles). Esto responde [3, Pregunta 6.7-(i),(ii),(vi) y (vii), p. 502] de manera negativa. Ahora bien, probaremos que *(2)* implica *(1)*, lo cual contesta [3, Pregunta 6.7-(iii), p. 502].

Teorema 1.5.2. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Si $\mathcal{F}_n(f)$ es libremente descomponible, entonces f es libremente descomponible.*

Demostración. Consideremos dos subcontinuos propios A y B de Y tal que $Y = A \cup B$. Entonces $\mathcal{F}_n(Y) = \langle A \rangle_n \cup \langle B, Y \rangle_n$ y $\mathcal{F}_n(Y) = \langle B \rangle_n \cup \langle A, Y \rangle_n$. Dado que $\mathcal{F}_n(f)$ es libremente descomponible, existen subcontinuos propios $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\mathcal{F}_n(X) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0$, $\mathcal{F}_n(X) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1$, $\mathcal{F}_n(\mathcal{A}_0) \subset \langle A \rangle_n$, $\mathcal{F}_n(\mathcal{B}_0) \subset \langle B, Y \rangle_n$, $\mathcal{F}_n(\mathcal{B}_1) \subset \langle B \rangle_n$ y $\mathcal{F}_n(\mathcal{A}_1) \subset \langle A, Y \rangle_n$.

Sean $M = \bigcup \mathcal{A}_0$ y $N = \bigcup \mathcal{B}_1$. Como $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{B}_1$ intersectan a $\mathcal{F}_1(X)$, entonces M y N son subcontinuos de X. Si $x \in M$, existe $L \in \mathcal{A}_0$ que contiene a x. De donde, $\mathcal{F}_n(f)(L) \in \langle A \rangle_n$, y esto implica que $f(x) \in A$. Por lo tanto, $f(M) \subset A$. Similarmente, $f(N) \subset B$. Si $x \in X \setminus M$, usando $\{x\}$, es fácil probar que $f(x) \in B$. Si $x \in X \setminus N$, entonces $f(x) \in A$. Por lo tanto, se sigue que

$$f(X \setminus (M \cup N)) \subset A \cap B. \tag{1.4}$$

Por el Teorema de Golpes en la Frontera ([8, Teorema 5.6, p. 74]), si C es una componente de $X \setminus (M \cup N)$, entonces $\mathrm{cl}_X(C) \cap (M \cup N) \neq \emptyset$. Consideremos las colecciones

$$\mathcal{C} = \big\{ C \subset X : C \text{ es una componente de } X \setminus (M \cup N) \text{ y } \mathrm{cl}_X(C) \cap M \neq \emptyset \big\}$$

y

$$\mathcal{D} = \big\{ C \subset X : C \text{ es una componente de } X \setminus (M \cup N) \text{ y } \mathrm{cl}_X(C) \cap N \neq \emptyset \big\}.$$

Definimos $A' = \bigcup \{\mathrm{cl}_X(C) : C \in \mathcal{C}\} \cup M$ y $B' = \bigcup \{\mathrm{cl}_X(C) : C \in \mathcal{D}\} \cup N$. Si $x \in X \setminus f^{-1}(A)$, entonces $\{x\} \in \mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_1$ y $\{x\} \notin \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, lo cual implica que $x \in N$ y $x \notin M$. De donde $X \setminus f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto contenido en N que no intersecta a M. Concluimos que $\mathrm{cl}_X(A')$ es un subcontinuo propio de X. Similarmente, $\mathrm{cl}_X(B')$ es un subcontinuo propio de X. Ahora bien, probaremos que $X = \mathrm{cl}_X(A') \cup \mathrm{cl}_X(B')$. Sea $x \in X$. Si $x \in M$, entonces $x \in \mathrm{cl}_X(A')$. Si $x \in N$, entonces $x \in \mathrm{cl}_X(B')$. Si $x \in X \setminus (M \cup N)$, entonces la cerradura de la componente C de $X \setminus (M \cup N)$ que contiene a x intersecta a M o a N. De donde, $C \in \mathcal{C}$ o $C \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{cl}_X(C) \subset \mathrm{cl}_X(A')$ o $x \in \mathrm{cl}_X(C) \subset \mathrm{cl}_X(B')$.

Para probar que $f(\mathrm{cl}_X(A')) \subset A$ ya sabemos que $f(M) \subset A$. Sea $x \in A' \setminus M$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en $X \setminus (M \cup N)$ que convergen a x. Por (1.4), $f(x_n) \in A$, para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $f(x) \in A$. De donde $f(A') \subset A$. Se sigue que $f(\mathrm{cl}_X(A')) \subset A$. De manera análoga se prueba que $f(\mathrm{cl}_X(B')) \subset B$.

Por lo tanto hemos probado que f es libremente descomponible.

$\square$

1.6. Funciones unidoras.

En [3, Teorema 7.2, p. 504], los autores probaron el siguiente resultado.

Teorema 1.6.1. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Considere los siguientes enunciados:*

(1) f es unidora;

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es unidora;

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es unidora.

Entonces (2) implica (1) y (3), (3) implica (1), y (1) no implica (2) ni (3) para $n = 2$.

El siguiente teorema nos da una clase de funciones para la cual *(1)* no implica *(2)* ni *(3)* Para cualquier entero n mayor o igual que 2. Lo que responde [3, Pregunta 7.3-(i), p. 504].

Teorema 1.6.2. *Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos y n un entero mayor o igual que 2. Si f es unidora pero no es semiconfluente, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$ no son unidoras.*

Demostración. Usando que f no es semi-confluente, tenemos que existe un subcontinuo propio K de Y y dos componentes A y B de $f^{-1}(K)$ tales que $f(A) \not\subset f(B)$ y $f(B) \not\subset f(A)$. Como f es unidora, $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$. Sean $Q = f(A) \cup f(B)$ y C un subcontinuo no degenerado de Y ajeno de K. Tomamos $n+1$ puntos distintos $d, e \in C$, $p \in f(A) \setminus f(B)$ y $y_1, \ldots, y_{n-2} \in Y \setminus (K \cup C)$. Definimos $\mathcal{K} = \langle Q, \{d\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle \{p\}, C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n$. Tenemos que $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_n(Y)$. Como, B es una componente de $f^{-1}(K)$ y $f^{-1}(Q) \subset f^{-1}(K)$, obtenemos que B es también componente de $f^{-1}(Q)$. Sean $D, E, H_1, \ldots, H_{n-2}$ las componentes de $f^{-1}(d), f^{-1}(e), f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_{n-2})$, respectivamente. Por el Lema 1.2.3, $\langle B, D, H_1, H_2, \ldots, H_{n-2}\rangle_n$ es componente de

$$\mathcal{F}_n(f)^{-1}\big(\langle Q, \{d\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n\big)$$

que no intersecta a

$$\mathcal{F}_n(f)^{-1}\big(\langle \{p\}, C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n\big),$$

y $\langle B, E, H_1, H_2, \ldots, H_{n-2}\rangle_n$ es una componente de

$$\mathcal{F}_n(f)^{-1}\big(\langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n\big)$$

que no intersecta a

$$\mathcal{F}_n(f)^{-1}\big(\langle Q, \{d\}, C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cup \langle \{p\}, C, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n\big).$$

De donde, obtenemos que $\langle B, D, H_1, \ldots, H_{n-2}\rangle_n$ y $\langle B, E, H_1, \ldots, H_{n-2}\rangle_n$ son dos componentes distintas de $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ tales que

$$\mathcal{F}_n(f)\big(\langle B, D, H_1, \ldots, H_{n-2}\rangle_n\big) \cap \mathcal{F}_n(f)\big(\langle B, E, H_1, \ldots, H_{n-2}\rangle_n\big)$$

$$\subset \langle Q, \{d\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n \cap \langle Q, \{e\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_{n-2}\}\rangle_n = \emptyset.$$

Esto prueba que $\mathcal{F}_n(f)$ no es unidora.

Para ver que $\mathcal{SF}_n(f)$ no es unidora, observemos que $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_1(Y) = \emptyset$. Por la Proposición 1.2.2, $q_Y^n(\mathcal{K})$ es homeomorfo a $\mathcal{K}$ y $\mathcal{SF}_n(f)^{-1}(q_Y^n(\mathcal{K}))$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$. Entonces, $q_Y^n(\mathcal{K})$ funciona para probar que $\mathcal{SF}_n(f)$ no es unidora.

$\square$

Observe que si $X = [0, 1]$, Y es el circulo unitario centrado en el origen en $\mathbb{C}$ el plano complejo y $f : X \to Y$ es la función suprayectiva definida por $f(t) = e^{i2\pi t}$ para toda $t \in X$, entonces f es unidora, pero no es semiconfluente. De donde, por Teorema 1.6.2, $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$ no son unidoras, para cualquier entero n mayor igual que 2.

Bibliografía

[1] J. G. Anaya, F. Capulín, D. Maya, y F. Orozco-Zitli. Induced mappings on symmetric products of continua. *Topology and its Applications*, 214:100–108, 2016.

[2] F. Barragán. Induced maps on n-fold symmetric product suspensions. *Topology and its Applications*, 158(10):1192–1205, 2011.

[3] F. Barragán, S. Macías, y J. F. Tenorio. More on induced maps on n-fold symmetric product suspensions. *Glasnik matematički*, 50(2):489–512, 2015.

[4] J. Dugundji. *Topology, Bacon series in advanced mathematics.* Allyn and Bacon, 1966.

[5] A. Illanes. Hiperespacios de continuos. *Aportaciones Mat. Textos (SMM) México*, 28, 2004.

[6] A. Illanes, J. A. Naranjo-Murillo, J. E. Vega, y Y. N. Velázquez-Inzunza. Induced mappings on symmetric products, some answers. *Preprint.*

[7] S. B. Nadler Jr. Hyperspaces of sets. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math*, 49, 1978.

[8] S. B. Nadler Jr. Continuum theory: An introduction. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 158, 1992.