UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de la Dimensión

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Juan Carlos Quintanar Cortés

DIRECTOR DE TESIS:
Dra. María Isabel Puga Espinosa

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Índice general

Prefacio

El objetivo de esta tesis es estudiar la Teoría de la Dimensión Topológica. Con este fin resolví problemas de los capítulos 1 al 19 del libro "Dimension Theory: an Introduction with Exercises" de Sam B. Nadler, Jr.

Los espacios en los que estudiaremos la dimensión serán espacios métricos y separables.

Algunos temas particulares son: La dimensión de los espacios euclideanos, es decir, demostramos que la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es igual a n y calculamos dimensión de algunos subespacios de $\mathbb{R}^n$. También consideramos espacios de dimensión cero, caracterizaciones de dimensión en términos de cubiertas y de funciones continuas, entre otros temas.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

El capítulo 0 contiene conceptos y resultados básicos de Topología que utilizaremos a lo largo de la tesis. Los capítulos subsecuentes corresponden a los capítulos 1 al 18 del libro de Sam B. Nadler, Jr. Cada uno de ellos está dividido en dos secciones: Preliminares y Problemas.

Los problemas del capítulo 1 están relacionados con la definición inductiva de dimensión. El capítulo 2 está relacionado con propiedades del espacio de Hilbert así como con la dimensión de espacios de este. Del capítulo 3 al 8 se estudia la dimensión de subespacios de un cierto subespacio y la dimensión de uniones de subespacios. Los capítulos 9 y 10 se enfocan al estudio de la dimensión de espacios euclideanos. Del 11 al 15 se estudia una caracterización de dimensión en términos de cubiertas. Esto nos permite, dada $n \geq 0$, construir espacios universales de dimensión n. Finalmente del capítulo 16 al 18 se estudian otras caracterizaciones de dimensión, esta vez en términos de funciones continuas y extensores. El capítulo 19 está dedicado a aplicaciones.

Capítulo 0. Preliminares

En este capítulo daremos definiciones y resultados que se usan a lo largo de la tesis. A lo largo de la tesis, a menos que se indique lo contrario, un espacio siempre será un espacio métrico y separable. También llamaremos $\mathbf{I}$ al intervalo cerrado $[0, 1]$.

- Llamaremos $J = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$
- Sea $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$

- A $\widehat{x}$ le denotaremos a veces por $(x_1, \ldots, x_n)$ ó $(x_i)_{i=1}^n$.

- Denotaremos por $\|\widehat{x}\|$ a la norma usual de $\widehat{x}$. Es decir

$$\|\widehat{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Sean X un espacio, $Y, Z \subseteq X$ y $x \in X$,

- Si $r > 0$, denotamos por

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

a la bola de radio r con centro en x.

- El *interior* de Y en X se denotará como $Int(Y)$ y el *interior de Y relativo a Z* como $Int_Z(Y)$.

- La *cerradura* de Y en X se denotará como $Cl(Y)$ y la *cerradura de Y relativa a Z* como $Cl_Z(Y)$.

- La *frontera* de Y en X se denotara como $Fr(Y)$ y la *frontera de Y relativa a Z* como $Fr_Z(Y)$.

- El *exterior* de Y en X se denotará como $Ext(Y)$ y el *exterior de Y relativo a Z* como $Ext_Z(Y)$.

- Si $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de X. $\mathcal{B}$ se llama *base* para la toplogía de X si para cualquier abierto V, existe una subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $V = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. A los elementos de la base $\mathcal{B}$ se les llama *abiertos básicos*.

- Se dice que Y es *vecindad* de x si Y contiene a x en su interior.

- Sea τ_x la familia de vecindades abiertas de x, es decir

$$\tau_x = \{U \subseteq X : U \text{ es vecindad abierta de } x\}.$$

Una *base local* para x es una subfamilia $\mathcal{B}_x \subseteq \tau_x$, tal que para cualquier $V \in \tau_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subseteq V$.

- Diremos que Y es un *conjunto* G_δ en X si es intersección numerable de conjuntos abiertos.

- Diremos que Y es un *conjunto* $G_{\delta\sigma}$ en X si es unión numerable de conjuntos G_δ.

- Sean U y V dos abiertos de X. Se dice que la pareja (U, V) es una *disconexión* de Y, si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U \cap Y \neq \emptyset$ y $V \cap Y \neq \emptyset$,

2. $U \cap V \cap Y = \emptyset$,

3. $Y \subseteq U \cup V$.

Diremos que un espacio Y es *disconexo* si existe una disconexión de Y y diremos que es *conexo* si no es disconexo.

- Si $W \subseteq X$ diremos que Y y Z están separados en X por W si existen dos subconjuntos U y V de X tales que:

1. $X - W = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$,

2. U y V son abiertos en $X - W$ y

3. $Y \subseteq U$ y $Z \subseteq V$.

Diremos que Y y Z están separados en X si están separados por $\emptyset$.

- Dos espacios X y Y son *homeomorfos* si existe una función $f : X \to Y$ continua e invertible tal que su inversa también es continua, lo denotaremos por $X \underset{f}{\cong} Y$ ó simplemente $X \cong Y$.

- Una función $f : X \to Y$ es un *encaje de X en Y* si la función $h : X \to f[X]$ definida por $h(x) = f(x)$ es un homeomorfismo, lo denotaremos por $X \hookrightarrow Y$.
- Una *n-superficie* es un espacio en el cual cada punto tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a $\mathbf{I}^n$.

Ahora daremos unos cuantos resultados importantes que se usaran a lo largo de la tesis.

Proposición 0.1 Todo espacio métrico separable posee una base numerable.

Demostración. Sean X espacio métrico y $D \subseteq X$ denso y numerable. El conjunto $\mathcal{U} = \{B_r(a) : r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ a \in D\}$ es numerable ya que lo son D y $\mathbb{Q}$, ahora probaremos que $\mathcal{U}$ es base de la topología de X.

Sean V un abierto de X distinto del vacío y $x \in V$. Sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq V$ y $r \in \mathbb{Q}$, al ser D denso existe $a \in D \cap B_{\frac{r}{2}}(x)$, de esta manera tenemos que

$$x \in B_{\frac{r}{2}}(a) \subseteq B_r(x) \subseteq V$$

y claramente $B_{\frac{r}{2}}(a) \in \mathcal{U}$, luego $\mathcal{U}$ es base numerable de X. $\blacksquare$

Teorema 0.2 Todo intervalo de la forma $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es conexo.

Demostración. Supongamos que existen abiertos U y V tales que $[a, b] \subseteq U \cup V$, $U \cap [a, b] \neq \emptyset$, $V \cap [a, b] \neq \emptyset$ y $U \cap V \cap [a, b] = \emptyset$.

Sean $u \in U \cap [a, b]$ y $v \in V \cap [a, b]$, supongamos que $u < v$. Consideremos el conjunto

$$C = \{x \in U : x < v\}.$$

Notemos que C está acotado superiormente y es no vacío, ya que v es una cota superior y $u \in C$. Por el axioma del supremo, existe un número $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = \sup C$. Como $a \leq u \leq s < v \leq b$ tenemos que $s \in [a, b]$ y por tanto $s \in U \cup V$.

Supongamos que $s \in U$. Al ser U es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq U$. Recordemos que $U \cap [a, b]$ y $V \cap [a, b]$ son ajenos, por lo que $v \notin (s - \epsilon, s + \epsilon)$ y en consecuencia

$s < s+\frac{\epsilon}{2} < v$, lo cual implica que $s+\frac{\epsilon}{2} \in C$ contradiciendo el hecho de que s sea el supremo de C. Esta contradicción nos permite suponer que $s \in V$.

Nuevamente, como V es abierto, existe $\eta > 0$ tal que $(s-\eta, s+\eta) \cap [a,b] \subseteq V$. Además, como $U \cap [a,b]$ y $V \cap [a,b]$ son ajenos, el punto $s - \frac{\eta}{2}$ satisface que $x < s - \frac{\eta}{2}$, para todo $x \in C$. Por lo tanto, s no podría ser el supremo de C. De esta manera podemos concluir que U y V no pueden formar una disconexión de $[a,b]$ y por tanto $[a,b]$ es conexo.

■

Teorema 0.3 Sean X y Y espacios y $f : X \to Y$ una función continua, entonces $f[X]$ es conexo.

Teorema 0.4 $\mathbb{R}^n$ es conexo para todo n

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}^n$ es disconexo, es decir, existen abiertos U y V en $\mathbb{R}^n$ tales que $U \cup V = \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ y $U \cap V = \emptyset$.

Sean $u \in U$, $v \in V$ y $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = tu + (1-t)v$. Al ser f continua e $\mathbf{I}$ conexo, por el Teorema 0.3 tenemos que $f[\mathbf{I}]$ es conexo.

Notemos que $f[\mathbf{I}] \subseteq U \cup V$, $f(0) = v \in f[\mathbf{I}] \cap V$ y $f(1) = u \in f[\mathbf{I}] \cap U$, es decir, $f[\mathbf{I}] \cap V \neq \emptyset$ y $f[\mathbf{I}] \cap U \neq \emptyset$.

Lo anterior muestra que $U \cap f[\mathbf{I}]$ y $V \cap f[\mathbf{I}]$ formarían una disconexión de $f[\mathbf{I}]$, pero esto no puede ser. Esta contradicción nos permite concluir que $\mathbb{R}^n$ es conexo. ■

Teorema 0.5 En $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana se cumple que para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y para cada $r > 0$, $Fr(B_r(p)) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) = r\}$. Además,

$$Fr(B_r(p)) \cong S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Demostración. Sean $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $f : Fr(B_r(p)) \to S^{n-1}$ definida por $f(x) = \frac{x-p}{r}$.

Primero veamos que f está bien definida.

Tenemos que $\|f(x)\| = \left\|\frac{x-p}{r}\right\| = \frac{r}{r} = 1$, por tanto $f(x) \in S^{n-1}$.

Sabemos que $\mathbb{R}^n = B_r(p) \cup \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) = r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) > r\}$ y la unión de estos tres conjuntos es ajena.

Si $d(x,p) > r$, entonces $B_{d(x,p)-r}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$ y en consecuencia x no esta en la cerradura de $B_r(p)$ y por tanto, no está en la frontera.

Los puntos x tales que $d(x,p) = r$ sí están en la frontera ya que si no, los conjuntos $B_r(p)$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) = r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) > r\}$ formarían una disconexión de $\mathbb{R}^n$.

Lo anterior prueba que $Fr(B_r(p)) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,p) = r\}$.

Al ser f una traslación es continua e inyectiva y su inversa también lo es, por tanto $Fr(B_r(p))$ es homeomorfo a S^{n-1}. ■

- Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, $\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}\}$ es un subconjunto finito de este y $U_{i_k} \subseteq X_{i_k}$ para todo $k = 1, \ldots, n$, llamaremos

$$\langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle = \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i : x_{i_k} \in U_{i_k} \text{ para todo } k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Diremos que $U \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es abierto si para cada $x \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ existe $\langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle$ tal que $x \in \langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle \subseteq U$ y U_{i_k} es abierto en X_{i_k} para todo $k = 1, \ldots, n$. La familia de abiertos es una toplogía para $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ya que los conjuntos $\langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle$ con U_{i_k} cumplen con los axiomas de base.

- Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y C_{i_k} es cerrado en X_{i_k} para todo $k = 1, \ldots, n$, entonces $\langle C_{i_1}, \ldots, C_{i_n} \rangle$ es cerrado en $X = \prod_{i\in I} X_i$ ya que

$$X - \langle C_{i_1}, \ldots, C_{i_n} \rangle = \langle X_{i_1} - C_{i_1} \rangle \cup \cdots \cup \langle X_{i_k} - C_{i_n} \rangle$$

es unión de abiertos en X y por tanto es abierto en X.

- Sea $j : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $j((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Teorema 0.6 *j es una métrica equivalente a la métrica euclidiana de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Si $r > 0$ y $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < r$, elevando al cuadarado ambos lados de la desigualdad tenemos que $(x_1 - x_2)^2 + 2|x_1 - x_2||y_1 - y_2| + (y_1 - y_2)^2 < r^2$, lo cual implica que $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < r^2$.

Por lo tanto, si $B_r^j((x_1, y_1))$ es la bola de radio r con centro en (x_1, y_1) con la métrica j y $B_r^e((x_1, y_1))$ es la bola de radio r con centro en (x_1, y_1) con la métrica euclidiana, entonces $B_r^j((x_1, y_1)) \subseteq B_r^e((x_1, y_1))$.

Ahora, si $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2$, entonces

$$|x_1 - x_2| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \frac{r}{2}$$

y

$$|y_1 - y_2| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \frac{r}{2},$$

así que $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ y en consecuencia $B_{\frac{r}{2}}^e((x_1, y_1)) \subseteq B_r^j((x_1, y_1))$. Por lo tanto ambas métricas son equivalentes. ■

Teorema 0.7 *S^n es una $n-$superficie.*

Demostración. Sean $f : S^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \to S^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ definidas por

$$f((x_i)_{i=1}^{n+1}) = \left(\tfrac{x_i}{1 - x_{n+1}}\right)_{i=1}^n$$

y

$$g((x_i)_{i=1}^n) = \left(\tfrac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \ldots, \tfrac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, 1 - \tfrac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}\right).$$

Primero veamos que g está bien definida.

El punto $(0, \ldots, 0, 1)$ no esta en la imagen de g ya que si existiera $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(x) = (0, \ldots, 0, 1)$, si nos fijamos en la última coordenada de $g(x)$, tenemos que $1 - \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} = 1$, o bien, $\frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} = 0$, lo cual es una contradicción.

Ahora veamos que la imagen de g esta en S^n.

Si $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$(g(x))^2 = \left(\tfrac{2x_1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{2x_n}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^2 \left(1+\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \frac{4}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2} + 1$$

$$= \frac{4}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{4}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2} + 1 = 1,$$

es decir, todos los puntos en la imagen de g tienen norma igual a 1.

Para terminar probaremos que f y g son inversas una de la otra:

$$f \circ g((x_i)_{i=1}^n) = f\left(\tfrac{2x_1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}, \ldots, \tfrac{2x_n}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}, 1 - \tfrac{2}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

$$= \frac{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\left(\tfrac{2x_1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}, \ldots, \tfrac{2x_n}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = (x_i)_{i=1}^n$$

y

$$g \circ f((x_i)_{i=1}^{n+1}) = g\left(\left(\tfrac{x_i}{1-x_{n+1}}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$$

$$= \left(\left(\tfrac{2x_i}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})}+1-x_{n+1}}\right)_{i=1}^{n}, 1 - \tfrac{2}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2}+1}\right).$$

Si desarrollamos los denominadores de las entradas del vector tenemos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})} + 1 - x_{n+1} = \frac{1-x_{n+1}^2}{1-x_{n+1}} + 1 - x_{n+1} = 2$$

y

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} + 1 = \frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} + 1 = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}} + 1 = \frac{2}{1-x_{n+1}},$$

lo cual implica que

$$g \circ f((x_i)_{i=1}^{n+1}) = \left((x_i)_{i=1}^n, 1 - \tfrac{2}{\frac{2}{1-x_{n+1}}}\right)$$

$$= ((x_i)_{i=}^n, 1 - (1-x_{n+1})) = (x_i)_{i=1}^{n+1}$$

y en consecuencia f y g son inversas una de la otra y al ser estas continuas, ya que sus funciones coordenadas lo son, podemos concluir que $S^n - \{(0,\ldots,0,1)\}$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos.

Si $p \in S^n$, tenemos que $p \in S^n - \{(0,\ldots,0,1)\}$ o $p = (0,\ldots,0,1)$.

Si $p \in S^n - \{(0,\ldots,0,1)\}$, $f(p) \in \mathbb{R}^n$, luego, existe C vecindad cerrada de $f(p)$ tal que $C \cong \mathbf{I}^n$ y en consecuencia $f^{-1}[C] \cong C \cong \mathbf{I}^n$.

$f^{-1}[C]$ es vecindad cerrada de p en $S^n - \{(0,\ldots,0,1)\}$, pero también lo es en S^n, ya que si no fuera tendríamos que $(0,\ldots,0,1) \in Cl_{S^n}(f^{-1}[C])$, esto implica que existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $f^{-1}[C]$ tal que $\lim_{i\to\infty} x_i = (0,\ldots,0,1)$.

Si $x_{i_{n+1}}$ es la $n+1$-coordenada de x_i tenemos que $\lim_{i\to\infty} x_{i_{n+1}} = 1$ y por continuidad de f, $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{1-x_{i_{+1}}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) = \infty$.

Como $f(x_i) \in C$ para todo $i \in \mathbb{N}$, C no es acotado, pero esto no puede ser, ya que C es homeomorfo a $\mathbf{I}^n$ y por lo tanto es compacto, esto nos permite concluir que $f^{-1}[C]$ es vecindad cerrada de p en S^n.

Si $p = (0,\ldots,0,1)$, usando la función $f : S^n - \{(0,\ldots,0,1)\} \to S^n - \{(0,\ldots,0,-1)\}$ dada por $f(x) = -x$ se ve que $S^n - \{(0,\ldots,0,1)\} \cong S^n - \{(0,\ldots,0,-1)\}$. Igual que en el caso anterior podemos concluir que existe C vecindad cerrada de $S^n - \{(0,\ldots,0,-1)\}$ homeomorfa a $\mathbf{I}^n$ y de la misma manera a como antes se hizo, se puede probar que C es vecindad cerrada de S^n. Por lo tanto S^n es una $n-$superficie. $\blacksquare$

I. ***Definición de dimensión***

En este capítulo damos la definición de dimensión en forma inductiva, calculamos la dimensión de algunos espacios y relacionamos propiedades de los espacios con su dimensión.

1.1 ***Preliminares***

Definición (Definición de Dimensión)

1. $\dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$. También $\dim(X) \leq -1$ significará que $X = \emptyset$.

2. Si $p \in X$, definimos

$$dim_p(X) \leq n$$

si y sólo si p tiene una base local de abiertos en X cuyas fronteras tienen dimensión $\leq n-1$.

3. $\dim(X) \leq n$ si y sólo si $\dim_p(X) \leq n$, para todo $p \in X$.

4. $\dim(X) = n$ si y sólo si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \nleq n-1$.

5. $\dim_p(X) = n$ si y sólo si $\dim_p(X) \leq n$ y $\dim_p(X) \nleq n-1$.

6. $\dim(X) = \infty$ si y sólo si $\dim(X) \nleq n$ para todo $n \geq -1$.

7. $\dim_p(X) = \infty$ si y sólo si $\dim_p(X) \nleq n$ para todo $n \geq -1$.

El siguiente Teorema que se prueba en [1, p. 6] muestra la importancia de la definición anterior

Teorema 1.1 La dimensión de un espacio en un punto y la dimensión de un espacio son invariantes topológicos.

Los siguentes conceptos nos ayudarán a resolver los Problemas del Capítulo.

Definición Sea X un espacio, se dice que X es de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X posee subcubierta numerable.

Definición Un espacio X es totalmente disconexo si y sólo si cualesquiera dos puntos de X están separados en X.

Axioma de Elección 1.2 Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, entonces existe una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$.

Proposición 1.3 Un espacio X con base numerable es de Lindelöf.

Demostración. Sean $\{G_t\}_{t\in T}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de la topología de X. Si $\{U_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es el conjunto de los elementos de $\mathcal{B}$ que están contenidos en alguno de los G_t, por el Axioma de Elección, existe una sucesión $\{G_{t_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{G_t\}_{t\in T}$ tal que $U_{i_k} \subseteq G_{t_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{t_k} \subseteq \bigcup_{t\in T} G_t.$$

Por otro lado, si $p \in G_t$ para algún $t \in T$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p \in U_j \subseteq G_t$, así pues, el índice j pertenece al conjunto de índices i_1, $i_2, \ldots$, por lo que

$$p \in \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k}.$$

Entonces $\bigcup_{t\in T} G_t \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{t_k}$ y al ser el conjunto $\{G_t\}_{t\in T}$ una cubierta abierta de X también es $\{G_{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y, en consecuencia, X es de Lindelöf. ■

Lema 1.4 Si C es cerrado en un espacio X, entonces C es un conjunto G_δ en X.

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $A_i = \bigcup_{x\in C} B_{\frac{1}{i}}(x)$. Como $C \subseteq A_i$ para todo i, entonces $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, ahora veamos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C$.

Sea $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Por definición, $y \in \bigcup_{x\in C} B_{\frac{1}{i}}(x)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, así que hay una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C$ tal que $y \in B_{\frac{1}{i}}(x_i)$.

Si U es vecindad de y, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(y) \subseteq U$. Como $y \in B_{\frac{1}{2m}}(x_{2m})$, tenemos que

$$d(y, x_{2m}) \leq diam(B_{\frac{1}{2m}}(x_{2m})) < \frac{1}{m},$$

es decir, $x_{2m} \in B_{\frac{1}{m}}(y) \subseteq U$. Esto implica que toda vecindad de y tiene puntos de C, o bien, $y \in Cl(C) = C$ y por tanto $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ y C es un conjunto G_δ ya que cada A_i es abierto al ser unión de conjuntos abiertos. ■

Lema 1.5 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, si A no contiene intervalos entonces $\mathbb{R} - A$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y distinto del vacío. Si $x \in U$, al ser este abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$. El conjunto $B_r(x)$ es un intervalo, así que por hipótesis existe $p \in B_r(x)$, y por tanto en U, que no está en A, con lo cual hemos demostrado que $U \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset$ y por tanto $\mathbb{R} - A$ es denso en $\mathbb{R}$. ■

Lema 1.6 Sea X un espacio topológico. Entonces $A \subseteq X$ es abierto y cerrado en X si y sólo si $Fr(A) = \emptyset$.

Demostración. Tenemos que $Cl(A) = Int(A) \cup Fr(A)$ y $Fr(A) \cap Int(A) = \emptyset$. Ahora, A es abierto y cerrado si y sólo si $Cl(A) = A = Int(A)$, o bien

$$Int(A) \cup Fr(A) = Int(A),$$

y esto es equivalente a $Fr(A) = \emptyset$. ■

Lema 1.7 Todo espacio discreto tiene dimensión cero.

Demostración. En un espacio discreto los elementos de cualquier base son abiertos y cerrados, por tanto tienen frontera vacía y esto, por definición implica que el espacio tiene dimensión cero. ■

1.2 ***Problemas***

Problema 1.3 $\dim(\mathbb{R}) = 1$.

Solución. Primero demostraremos que $\dim(\mathbb{R}) \leq 1$.

Sea $p \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{B_r(p) : r > 0\}$ es una base local para p. Observemos que para todo $r > 0$, $Fr(B_r(p)) = \{p - r, p + r\}$ es un espacio discreto, por el Lema 1.7, tenemos que $\dim(Fr(B_r(p))) = 0$, luego $\dim_p(\mathbb{R}) \leq 1$ para todo $p \in \mathbb{R}$ y por tanto $\dim(\mathbb{R}) \leq 1$.

Ahora veamos que $\dim(\mathbb{R}) \nleq 0$.

Supongamos al contrario que existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $\dim_p(\mathbb{R}) = 0$, se sigue de la definición que existe una vecindad abierta U de p contenida en $B_1(p)$ con frontera vacía. Como $U \subseteq B_1(p)$ tenemos que $U \neq \mathbb{R}$, así pues U es abierto y cerrado en $\mathbb{R}$, pero esto no puede ser pues los únicos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$ son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$, esta contradicción muestra que $\dim_p(\mathbb{R}) \nleq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\dim(\mathbb{R}) = 1$. ■

Problema 1.4 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces $\dim(A) \leq 1$ y $\dim(A) = 1$ si y sólo si A contiene un intervalo abierto no vacío.

Solución. Sean $a \in A$ y $U_n = B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local de a en A. Demostraremos que $\dim(Fr(U)) \leq 0$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, al ser U_n abierto en A, los puntos de la frontera de U_n no están en U_n, es decir, están en $A - U_n$. Si $p \in A - U_n$, entonces $|a - p| \geq \frac{1}{n}$.

Si $|a - p| > \frac{1}{n}$, entonces $p \in Ext(U_n)$, así que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \cap U_n = \emptyset$. Por lo tanto $p \notin Fr_A(U_n)$.

De esta manera podemos concluir que $Fr_A(U_n) \subseteq \{a - \frac{1}{n}, a - \frac{1}{n}\}$ y en consecuencia $\dim(Fr_A(U_n)) \leq 0$. Por lo tanto $\dim_p(A) \leq 1$ y $\dim(A) \leq 1$.

Ahora demostraremos la otra parte del Problema.

Si A no contiene un intervalo abierto no vacío, por el Lema 1.5, $\mathbb{R} - A$ es denso en $\mathbb{R}$. Sea $p \in A$, como los intervalos abiertos $(p-1, p)$ y $(p, p+1)$ son distintos del vacío, existen $p_1 \in (p-1, p)$ y $q_1 \in (p, p+1)$ tales que $p_1, q_1 \in \mathbb{R} - A$.

Observemos que $p_1 < p < q_1$, de manera que los intervalos abiertos (p_1, p) y (p, q_1) son distintos del vacío, por lo tanto existen $p_2 \in (p_1, p)$ y $q_2 \in (p, q_1)$ tales que $q_2, p_2 \in \mathbb{R} - A$. Podemos suponer que $|p_2 - p| < \frac{1}{2}$ y $|q_2 - p| < \frac{1}{2}$.

Siguiendo con este procedimiento tenemos una sucesión de intervalos abiertos (p_n, q_n) tales que

$$p \in (p_n, q_n), \; p_n < p_{n+1}, \; q_{n+1} < q_n,$$

$$(p_n, q_n) \subseteq \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}\right) \text{ y } p_n, q_n \in \mathbb{R} - A \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $(p_n, q_n) \subseteq (p-\frac{1}{n}, p+\frac{1}{n})$, los intervalos (p_n, q_n) forman una base local para p. Además por la primera parte del problema sabemos que $Fr_A((p_n, q_n)) \subseteq \{p_n, q_n\}$. Pero $p_n, q_n \notin A$, así que $Fr_A((p_n, q_n)) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\dim_p(A) = 0$ y $\dim(A) = 0$.

Ahora supongamos que A contiene un intervalo abierto no vacío. Sean (p, q) un intervalo abierto tal que $(p, q) \subseteq A$ y $x \in (p, q)$. Existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq (p, q)$. Notemos que para cada $s \in \mathbb{R}$ con $0 < s < r$, los intervalos abiertos $(x - s, x + s)$ forman una base para p y son tales que $\dim(Fr(x - s, x + s)) = 0$. Como $Fr(x - s, x + s) \subseteq A$, entonces $Fr_A(x - s, x + s) = Fr(x - s, x + s)$. Además $(x - s, x + s) \subseteq A$. Por lo tanto x tiene una base local de abiertos en A tales que la dimensión de la frontera de estos es cero. Por lo tanto $\dim_x(A) \leq 1$, así que $\dim(A) \leq 1$. ■

Problema 1.5 $\dim(\mathbb{R}^n) \leq n$.

Solución. Lo haremos por inducción sobre n.

Por el Problema 1.3 sabemos que la afirmación es válida para $n = 1$. Supongamos que es válida para $n - 1$.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$. La familia $\{B_r(p)\}_{r>0}$ es una base local para p. Además, por el Teorema 0.4, para todo $r > 0$ $Fr(B_r(p)) \cong S^{n-1}$.

Ahora bien, el Teorema 0.6, nos permite asegurar que para todo $x \in S^{n-1}$ existe U_x vecindad de x en S^{n-1} tal que $U_x \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

Por hipótesis de inducción, $\dim\left(\mathbb{R}^{n-1}\right) \leq n-1$, por lo tanto $\dim_x(U_x) \leq n-1$. Como U_x es abierto en S^{n-1} tenemos que $\dim_x\left(S^{n-1}\right) = \dim_x(U_x)$, así pues, $\dim_x\left(S^{n-1}\right) \leq n-1$ para todo $x \in S^{n-1}$, esto implica que $\dim\left(S^{n-1}\right) \leq n-1$ y, puesto que $S^{n-1} \cong Fr(B_r(p))$, $\dim(Fr(B_r(p))) \leq n - 1$ para todo $r > 0$. Por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^n) \leq n$. ■

Problema 1.6 $\dim_p(X) = 0$ si y sólo si p tiene una base local de abiertos y cerrados en X.

Solución. $\dim_p(X) = 0$ implica que p tiene una base local $\mathcal{B}$ de abiertos tal que para todo $V \in \mathcal{B}$, $\dim(Fr(V)) = -1$. Por definición, esto pasa si y sólo si $Fr(V) = \emptyset$, en consecuencia V es abierto y cerrado en X. Así pues, $\mathcal{B}$ es base local de p de abiertos y cerrados de X.

Ahora supongamos que existe una base local $\{V_i\}_{i\in I}$ de abiertos y cerrados de p.

Al ser estos conjuntos abiertos y cerrados se tiene que $Fr(V_i) = \emptyset$ para todo $i \in I$, en consecuencia $\{V_i\}_{i\in I}$ es una base local de p cuyos elementos tienen frontera vacía, es decir, $\dim_p(X) = 0$. ■

Problema 1.7 Todo espacio de dimensión cero es totalmente disconexo.

Solución. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Veamos que x e y están separados en X.

Sea $r = d(x, y)$. Por hipótesis, sabemos que existe U abierto y cerrado en X tal que $x \in U \subseteq B_r(x)$, además, $y \notin B_r(x)$, así que $y \notin U$. Se tiene que U y $X - U$ son abiertos, $x \in U$ y $y \in X - U$, es decir x e y están separados en X y por tanto X es totalmente disconexo. ■

El inverso de este problema en general no es cierto. En el Capítulo 2, Teorema 2.1 y Problema 2.6 se demuestra que el espacio $l_2^{\mathbb{Q}}$ tiene dimensión uno y que es totalmente disconexo. Sin embargo, en el Capítulo 4 se demuestra que el inverso es cierto si el espacio es, además, compacto.

Problema 1.8 El producto cartesiano numerable de espacios de dimensión cero tiene dimensión cero.

Solución. Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de espacios de dim $= 0$ y $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. X es un espacio no vacío ya que $\dim(X_i) = 0 \neq -1$ y por tanto $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora probaremos que $\dim(X) = 0$.

Sean $p \in X$ y U un abierto en X que contiene a p.

Sabemos que existe $V = \langle V_{i_1}, \ldots, V_{i_n} \rangle$ abierto básico de X tal que $V \subseteq U$. Como cada X_{i_k} tiene dimensión cero, para todo k, existe U_{i_k} abierto y cerrado en X_{i_k} tal que $p_{i_k} \in U_{i_k} \subseteq V_{i_k}$.

El conjunto $\langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle$ es abierto, pero también es cerrado ya que

$$X - \langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle = \bigcup_{j=1}^{k} \left\langle X_{i_j} - U_{i_j} \right\rangle$$

y este es abierto porque cada $\left\langle X_{i_j} - U_{i_j} \right\rangle$ es abierto básico de X. La contención

$$\langle U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \rangle \subseteq \langle V_{i_1}, \ldots, V_{i_n} \rangle \subseteq U$$

implica $\dim_p (X) = 0$ para todo $p \in X$ y por tanto $\dim (X) = 0$. ■

Problema 1.9 Los siguientes espacios tienen dimensión cero:

(a) Cualquier espacio numerable.

(b) $\mathbb{R}^n_{\mathbb{Q}} = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : x_i$ es racional para cada $i\}$;

(c) $\mathbb{R}^n_J = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : x_i$ es irracional para cada $i\}$;

(d) $\mathbf{I}^\infty_{\mathbb{Q}} = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in \mathbf{I}^\infty : x_i$ es racional para cada $i\}$;

(e) $\mathbf{I}^\infty_J = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in \mathbf{I}^\infty : x_i$ es irracional para cada $i\}$;

(f) $\mathbb{R}^2_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \{x, y\} \cap \mathbb{Q} = 1\}$.

Solución. (a) Sean X un espacio numerable, $p \in X$ y $A = \{d(p, x) \in \mathbb{R} : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$. Como X es numerable, A es numerable, por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n > 0$ tal que $r_n < \frac{1}{n}$ y $r_n \notin A$.

$B_{r_n}(p)$ es un abierto en X y por el Teorema 0.4, $Fr(B_{r_n}(p)) = \{x \in X : d(p, x) = r_n\}$. Si $Fr(B_{r_n}(p)) \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $d(p, x) = r_n$, luego $r_n \in A$, pero esto no puede ser, así que $Fr(B_{r_n}(p)) = \emptyset$. Por lo tanto $\dim_p (X) = 0$ y de aquí se sigue que $\dim X = 0$.

(b) $\mathbb{R}^n_{\mathbb{Q}}$ es un espacio numerable, por lo que del inciso (a) se sigue que $\dim \left(\mathbb{R}^n_{\mathbb{Q}}\right) = 0$.

(c) Si $J = \{x \in \mathbb{R} : x$ es irracional$\}$, tenemos que $\mathbb{R}^n_J = J^n$. Como J no contiene un intervalo abierto no vacío, por el Problema 1.4 tenemos que $\dim (J) = 0$, y por el Problema 1.8 $\dim (J^n) = 0$, por lo tanto $\dim (\mathbb{R}^n_J) = 0$.

(d) Sabemos que $\mathbb{Q}$ no contiene ningún intervalo abierto no vacío, se sigue del Problema 1.4 que $\dim(\mathbf{I} \cap \mathbb{Q}) = 0$ y del Problema 1.8 que $\dim\left((\mathbf{I} \cap \mathbb{Q})^{\infty}\right) = 0$. Claramente $\mathbf{I}^{\infty}_{\mathbb{Q}} = (\mathbf{I} \cap \mathbb{Q})^{\infty}$, en consecuencia $\dim(\mathbf{I}^{\infty}_{\mathbb{Q}}) = 0$.

(e) $\mathbf{I} \cap J$ no contiene un intervalo abierto no vacío, por lo tanto $\dim(\mathbf{I} \cap J) = 0$, por el Problema 1.8 tenemos que $\dim\left((\mathbf{I} \cap J)^{\infty}\right) = 0$. Como $(\mathbf{I} \cap J)^{\infty} = \mathbf{I}^{\infty}_{J}$, se concluye que $\dim(\mathbf{I}^{\infty}_{J}) = 0$.

(f) Sean $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_1$ y U abierto en $\mathbb{R}^2$.

Como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}^2$, existen $r > 0$ y $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que $B^j_r(q) \subseteq U$ (ver Figura 1), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r \in \mathbb{Q}$.

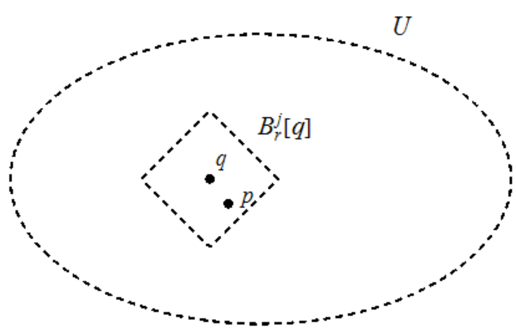

Figura 1

Si un punto (x, y) esta en la frontera de $B^j_r(q)$ en $\mathbb{R}^2_1$ entonces $|x - q_1| + |y - q_2| = r$. Revisemos cada caso:

Caso 1:

$|x - q| = x - q_1$ y $|y - q_2| = y - q_2$ implica que $y = -x + (r + q_1 + q_2)$

Caso 2:

$|x - q_1| = x - q_1$ y $|y - q_2| = q_2 - y$ implica que $y = x + (q_2 - q_1 - r)$

Caso 3:

$|x-q_1| = q_1 - x$ y $|y-q_2| = y - q_2$ implica que $y = x + (r + q_2 - q_1)$

Caso 4:

$|x-q_1| = q_1 - x$ y $|y-q_2| = q_2 - y$ implica que $y = -x + (q_1 + q_2 - r)$

En cualquiera de los cuatro casos tenemos que $y = \pm x + b$ donde $b \in \mathbb{Q}$. Así pues, si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $y \in \mathbb{Q}$ y si $x \in J$, entonces $y \in \dot{J}$.

Esto nos permite concluir que $(x,y) \in (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \cup (J \times J)$ contradicendo el hecho de que $(x,y) \in \mathbb{R}_1^2$. Por tanto $Fr_{\mathbb{R}_1^2}(B_r^j(q)) = \emptyset$ y $\dim_p(\mathbb{R}_1^2) = 0$.

De lo anterior podemos concluir que $\dim(\mathbb{R}_1^2) = 0$. ■

Problema 1.10 Sea X un espacio. Entonces $\dim(X) \leq n$ si y sólo si hay una base numerable para la topología de X tal que todos sus miembros tienen fronteras de dim $\leq n-1$.

Solución. Sea $m \in \mathbb{N}$, sabemos que para todo $x \in X$ existe $U_{x,m}$ abierto en X tal que $x \in U_{x,m} \subseteq B_{\frac{1}{m}}(x)$ y $\dim\left(Fr(U_{x,m})\right) \leq n-1$. Claramente $X = \bigcup\limits_{x\in X} U_{x,m}$. Al ser X métrico y separable, es Lindelöff, en consecuencia existe $\{x_{m_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{x_{m_i},m}$, lo cual prueba que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\{U_{x_{m_i},m}\}_{i=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de X.

Sea $\mathcal{U} = \{U_{x_{m_i},m}\}_{i,m\in\mathbb{N}}$. Probemos que $\mathcal{U}$ es base para la topología de X.

Si $x \in X$ y V es vecindad abierta de x en X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq V$.

Al ser $\{U_{x_{(2m)_i},2m}\}$ una cubierta abierta de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{x_{(2m)_k},2m}$, por construcción $diam(U_{x_{(2m)_k},2m}) < \frac{1}{m}$, por lo tanto $d(x,y) < \frac{1}{m}$ para todo $y \in U_{x_{(2m)_k},2m}$, es decir $y \in B_{\frac{1}{m}}(x)$, así pues $U_{x_{(2m)_k},2m} \subseteq B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq V$.

De lo anterior se sigue que $\mathcal{U}$ es base numerable para la topología de X y cada uno tiene frontera de dim $\leq n-1$.

El regreso se da porque existe la base cuyos miembros tienen frontera de dim $\leq n-1$.

■

Problema 1.11 Si $X \neq \emptyset$ y $\dim(X) < \infty$, entonces $\dim(X) = \dim_p(X)$ para algún $p \in X$.

Solución. Como $\dim(X) < \infty$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(X) \leq m$. Esto implica que el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : \dim X \leq m\}$ es distinto del vacío de donde se sigue que existe $n = \min A$, luego $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \nleq n-1$, en consecuencia $\dim(X) = n \neq -1$ ya que $X \neq \emptyset$. Tenemos que $\dim(X) \nleq n-1$, así que existe $p \in X$ tal que $\dim_p(X) \nleq n-1$ y como $\dim(X) \leq n$, entonces $\dim_p(X) \leq n$. Por lo tanto $\dim_p(X) = n = \dim(X)$. ■

Problema 1.12 Las funciones continuas pueden incrementar o dismnuir la dimensión (dar ejemplos).

Solución. Sea $r \in \mathbb{R}$, la función constante $f : \mathbb{R} \to \{r\}$ cumple que $\dim_x(\mathbb{R}) = 1$ y por el Lema 1.7 $\dim_{f(x)}(\{r\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto f disminuye la dimensión.

Sean $\mathbb{R}_1^2$ definido como en el inciso (f) del Problema 1.9 y $f : \mathbb{R}_1^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x$, f es suprayectiva y como f es una proyección, entonces f es continua. Además, por el Problema 1.12 inciso (a), para todo $(x,y) \in \mathbb{R}_1^2$ $\dim_{(x,y)}\left(\mathbb{R}_1^2\right) = 0$ y $\dim_{f(x,y)}\left(f(\mathbb{R}_1^2)\right) = \dim_{f(x,y)}(\mathbb{R}) = 1$. Por lo tanto f incrementa la dimensión. ■

Problema 1.13 Sea $X = \{p\} \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n\right)$, donde $p = (0,0)$ y D_n es disco cerrado en $\mathbb{R}^2$ con centro $c_n = \left(\frac{3}{2^{n+1}}, 0\right)$ y radio $r_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Entonces p tiene vecindades abiertas, arbitrariamente pequeñas, cuyas fronteras tienen dimensión uno. ¿Cuál es el valor de $\dim_p(X)$?.

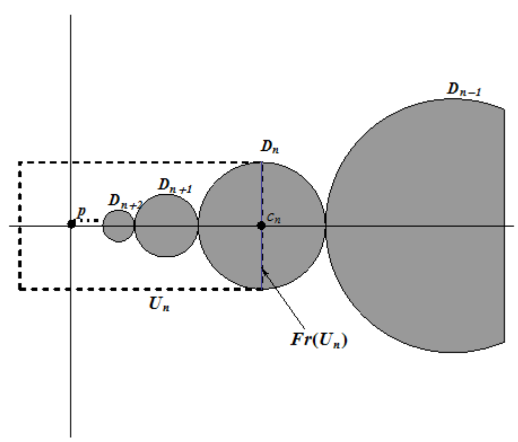

Figura 2

Solución. Demostraremos que $\dim_p(X) = 2$. Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_n = \left(-\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}\right) \times \left(-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

El conjunto $\{U_n \cap X\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local de abiertos de p en X. Además,

$$Fr_X(U_n \cap X) = \left\{\frac{3}{2^{n+1}}\right\} \times \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 2), al ser este homeomorfo a $\mathbf{I}$ podemos concluir que $\dim(Fr(U_n \cap X)) = 1$, es decir, p tiene una base local de vecindades abiertas cuyas fronteras tienen dimensión 1.

Ahora calculemos $\dim_p(X)$

Definimos $V_n = \left\{(x, y) \in X : x^2 + y^2 < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 3).

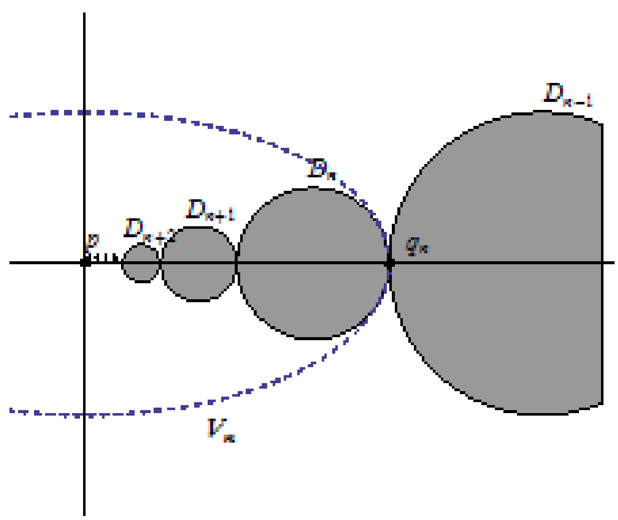

Figura 3

Es claro que $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local de p y, como se ve en la figura , $\{q_n\} = Fr_X(V_n)$, es decir, p tiene una base local de vecindades cuya frontera tienen dimensión cero, por tanto $\dim_p(X) \leq 1$.

Notemos que para cualquier abierto de p de diámetro finito su frontera intersecta a $\mathbb{R}^+ \subseteq X$ (ver Figura 4), en consecuencia cualquier base local de p tiene elementos con frontera distinta del vacío, por lo tanto $\dim_p(X) \nleq 0$ y $\dim_p(X) = 1$.

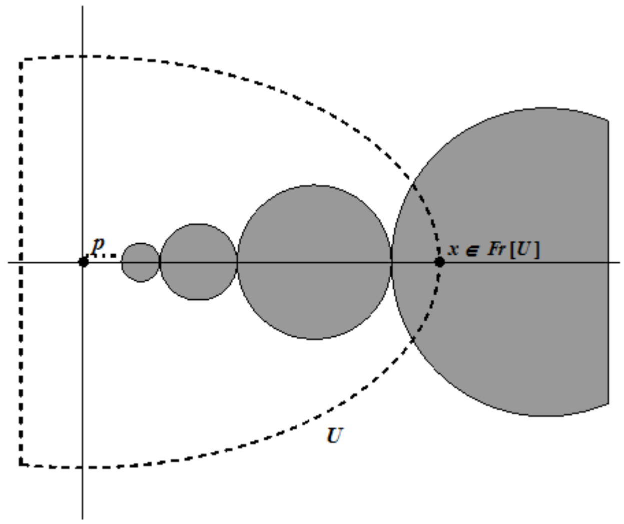

Figura 4

$\blacksquare$

Problema 1.14 Sea $X = \left\{(x, \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ (ver Figura 5), ¿Cuánto vale $\dim(X)$?.

Solución. Afirmamos que $\dim(X) = 1$.

Sean $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, $B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ y $(a, b) \in X$ tal que $a > 0$.

Notemos que A es homeomorfo a $(0, 1]$ ya que $h : A \to (0, 1]$ dada por $h(x, \sin\frac{1}{x}) = x$ es un homeomorfismo, luego, por el Problema 1.4, $\dim(A) = 1$

El conjunto $(0, 1]$ contiene un intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$, por el Problema 1.4 tenemos que $\dim(0{,}1] = 1$, así pues $\dim(A) = 1$, por lo tanto $\dim_{(a,b)}(A) \leq 1$. Si $\dim_{(a,b)}(A) = 0$, por el Problema 1.6 tendríamos que A es disconexo, pero A es conexo ya que A es homeomorfo a $(0, 1]$, luego $\dim_{(a,b)}(A) = 1$ y por tanto $\dim_{(a,b)}(X) = 1$ para todo $(a, b) \in A$.

Sean $(0,b) \in B$ y $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ (ver Figura 6), claramente U_n es vecindad de $(0,b)$ en $\mathbb{R}^2$ y la frontera de U_n en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto

$$(\{\frac{1}{n}\} \times \left[b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]) \cup (\{-\frac{1}{n}\} \times [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]) \cup ([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{b - \frac{1}{n}\}) \cup ([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{b + \frac{1}{n}\}).$$

El conjunto $(\{\frac{1}{n}\} \times [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]) \cap X$ es a lo más un punto, ya que no intersecta a B y como A es una gráfica en $\mathbb{R}^2$ y $\{\frac{1}{n}\} \times [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$ es un subconjunto de una recta vertical, entonces intersecta a A en a lo más un punto.

$\{-\frac{1}{n}\} \times [b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$ no intersecta a X ya que todos los puntos de X tienen primera coordenada ≥ 0.

El conjunto $([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{b - \frac{1}{n}\}) \cap X$ es a lo más una cantidad numerable de puntos ya que $([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{b - \frac{1}{n}\}) \cap B$ es el punto $(0, b - \frac{1}{n})$ o es vacío dependiedo del valores de y y $\frac{1}{n}$ y $([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{b - \frac{1}{n}\}) \cap A$ son los puntos $(x, \sin(\frac{1}{x}))$ tales que $\sin(\frac{1}{x}) = b - \frac{1}{n}$ (o es vacío si $b - \frac{1}{n} \notin [-1,1]$) que son una cantidad numerable. Análogamente se prueba que $([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{b + \frac{1}{n}\}) \cap B$ es una cantidad numerable de puntos o es vacío. Por lo tanto, la frontera de $U_n \cap X$ en X es a lo más una cantidad numerable de puntos, por lo tanto tiene dimensión cero. Además los conjuntos $U_n \cap X$ forman una base para $(0,b)$, por lo tanto $\dim_{(0,b)}(X) \leq 1$.

Supongamos que $\dim_{(0,b)}(X) = 0$. Sea $(0,d) \in B$ tal que

$$(0,b) \neq (0,d) \text{ y } 0 < r < d((0,b),(0,d)).$$

Sabemos que $(0,d) \notin B_r(0,b) \cap X$. Sea V abierto y cerrado en X tal que $V \subseteq B_r(0,b) \cap X$. Por lo tanto, como $(0,b) \in V$ y $(0,d) \notin V$, V y $X - V$ son abiertos y cerrados distintos del vacío, por lo tanto X es disconexo, pero esto no puede ser ya que A es conexo y por lo tanto $Cl(A)$ es conexo, pero $Cl\,(A) = X$. Por lo tanto $\dim(X) = 1$.

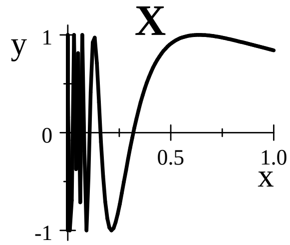

Figura 5

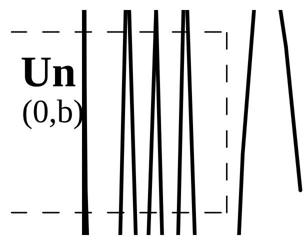

Figura 6 ■

Problema 1.15 Para todo espacio X, $\{p \in X : \dim_p(X) \leq n\}$ es un conjunto G_δ en X y $\{p \in X : \dim_p(X) = n\}$ es un conjunto $G_{\delta\sigma}$ en X.

Solución. Sea $x \in X$ tal que $x \in A_n = \{p \in X : \dim_p(X) \leq n\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Existe U_x^m abierto en X tal que $\dim(Fr(U_x^m)) \leq n-1$ y $U_x^m \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x)$ para todo m. Definimos $U_m = \bigcup\limits_{x \in A} U_x^m$, es claro que $A_n \subseteq U_m$ y U_m es abierto en X (ya que es unión de abiertos) para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $A_n \subseteq \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{x \in A_n} U_x^m \right)$.

Sea $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{x \in A_n} U_x^m \right)$, entonces $x \in \bigcup\limits_{x \in A_n} U_x^m$ para todo m, luego existe $p_m \in A_n$ tal que $x \in U_{p_m}^m$. Llamamos $V_m = U_{p_m}^m$. Sea U abierto en X tal que $x \in U$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq U$, Como $x \in V_{2k}$ y $diam(V_{2k}) < \frac{1}{k}$, entonces para todo $y \in V_{2k}$ se tiene que $d(x,y) < \frac{1}{k}$, lo cual implica que $x \in V_{2k} \subseteq B_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq U$ y por tanto $\dim_x(X) \leq n$, esto significa que $x \in A_n$.

Probaremos que $B = \{p \in X : \dim_p(X) = n\}$ es un conjunto $G_{\delta\sigma}$. Tenemos que

$$B = A_n - A_{n-1},\ A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } A_{n-1} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$$

donde los conjuntos U_i y V_i son abiertos en X. En consecuencia,

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i - \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \right) \cap (X - V_k) \right).$$

Como $X - V_k$ es cerrado para todo k, por el Lema 1.3 tenemos que $X - V_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{k_i}$ con V_{i_k} abierto en X para todo $i, k \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue que

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_{k_i} \right) \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} (V_{k_i} \cap U_i).$$

Al ser V_{k_i} y U_i abiertos en X, $V_{k_i} \cap U_i$ es abierto en X. Por lo tanto B es un conjunto $G_{\delta\sigma}$. ■

Problema 1.16 Todo espacio X de dimensión finita ≥ 1 contiene un subespacio cerrado de dimensión uno.

Solución. Lo demostraremos por inducción sobre $n = \dim(X)$. Si $n = 1$ el espacio es X mismo.

Supongamos válido para todo $k \leq n - 1$.

Sea X de dimensión n, como $n \neq -1$, entonces $X \neq \emptyset$. Sea $p \in X$, existe U vecindad de p en X tal que $\dim Fr(U) \leq n - 1$, por hipótesis de inducción, para $Fr(U)$ existe $C \subseteq Fr(U)$ cerrado en $Fr(U)$ tal que $\dim C = 1$, al ser $Fr(U)$ cerrado X, C es cerrado en X, por lo tanto X tiene un subconjunto cerrado de $\dim = 1$. ■

II. ***El espacio de Hilbert***

En el capítulo anterior se vió que todo espacio de dimensión cero es totalmente disconexo, en este capítulo se da un ejemplo de un espacio totalmente disconexo que tiene dimensión uno, es decir, el inverso del enunciado anterior en general es falso. Además para todo $n \in \mathbb{N}$, existen espacios de dimensión n y que son totalmente disconexos.

2.1 ***Preliminares***

Definimos el *espacio de Hilbert* de todas las sucesiones cuadradas sumables como:

$$l_2 = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\},$$

donde la distancia entre dos puntos $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$ está denotada por $\|x - y\|$, la cual está definida como

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

El espacio $l_2^{\mathbb{Q}}$ es un espacio vectorial y la función $\|\|$ dada anteriormente es una norma para este. El símbolo $\overrightarrow{0}$ denota el vector cero de l_2, $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots)$.

Sea $l_2^{\mathbb{Q}}$ el espacio de los puntos racionales de l_2, es decir

$$l_2^{\mathbb{Q}} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2 : x_i \text{ es racional para todo } i\}.$$

El siguiente Teorema se demuestra en [1, p. 9-13]

Teorema 2.1 $\dim(l_2^{\mathbb{Q}}) = 1$.

Demostraremos en el Problema 2.6 que $l_2^{\mathbb{Q}}$ es tatalmente disconexo.

2.2 ***Problemas***

Problema 2.3 $l_2^{\mathbb{Q}}$ es homogéneo.

Solución. Sean $p, q \in l_2^{\mathbb{Q}}$ y $f : l_2^{\mathbb{Q}} \to l_2^{\mathbb{Q}}$ definida por $f(x) = x + q - p$.

l_2 es espacio vectorial, así que $x+q-p \in l_2$ y como las coordenadas de x, p y q son racionales entonces las coordenadas de $x+q-p$ son racionales, por lo tanto $x+q-p \in l_2^{\mathbb{Q}}$, así que f está bien definida.

Si $x, y \in l_2^{\mathbb{Q}}$, como $\|f(x)-f(x)\| = \|x+q-p-y-q+p\| = \|x-y\|$, f es un isometría, por tanto es continua y abierta.

Ahora veamos que f es biyectiva. Si $f(x) = f(y)$, entonces $x+q-p = y+p-q$, al ser l_2 un espacio vectorial podemos concluir que $x = y$ y por tanto, f es inyectiva.

Si $y \in l_2^{\mathbb{Q}}$, entonces $y+p-q \in l_2^{\mathbb{Q}}$ y $f(y+p-q) = y+p-q+q-p = y$, es decir, f es suprayectiva. Además $f(p) = p+q-p = q$, de donde se sigue que $l_2^{\mathbb{Q}}$ es homogeneo. ■

Problema 2.4 Cualquier subespacio de un espacio de dimensión cero tiene dim ≤ 0.

Solución. Sean X tal que $\dim(X) = 0$, $Y \subseteq X$, $p \in Y$ y U vecindad de p en Y.

Sabemos que $U = V \cap Y$ con V abierto en X.

Como $p \in V$, por hipótesis, existe C abierto y cerrado en X tal que $p \in C \subseteq V$, luego $C \cap Y$ es abierto y cerrado en Y y $p \in C \cap Y \subseteq V \cap Y = U$.

De lo anterior se sigue que $\dim_p(Y) \leq 0$, por lo tanto $\dim(Y) \leq 0$. ■

Problema 2.5 Explicar porque el Problema 1.8 no contradice al Teorema 2.1.

Solución. A $l_2^{\mathbb{Q}}$ lo podemos ver como subconjunto de $\mathbb{Q}^\infty$ y el Problema 1.8 implica que $\dim(\mathbb{Q}^\infty) = 0$ cuando se considera a $\mathbb{Q}^\infty$ con la topología producto. Pero $l_2^{\mathbb{Q}}$ no es un subespacio de $\mathbb{Q}^\infty$ ya que la topología que se le da $l_2^{\mathbb{Q}}$ no es la topología producto sino la generada por la norma dada al principio del capítulo. ■

Problema 2.6 $l_2^{\mathbb{Q}}$ es totalmente disconexo.

Solución. Sean $x = (x_i)_{i=1}^\infty$, $y = (y_i)_{i=1}^\infty \in l_2^{\mathbb{Q}}$ tales que $x \neq y$. Tenemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \neq y_j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_j < y_j$.

Sean $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que

$$x_j < p < y_j$$

y $U = \left\{ z \in l_2^{\mathbb{Q}} : z_j < p \right\}$. Demostraremos que U es abierto y cerrado en $l_2^{\mathbb{Q}}$.

Sean $\varepsilon = p - z_j$ y $k \in B_\varepsilon(z)$. Notemos que

$$k_j - z_j \leq |k_j - z_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(k_i - z_i)^2} < \varepsilon = p - z_j,$$

así que $k_j < p$ y por tanto $k \in U$ y U es abierto.

Ahora demostraremos que U es cerrado.

Sean $z \in l_2^{\mathbb{Q}}$ y $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de U tales que $\lim_{n\to\infty} z^n = z$. Como z^n converge a z, la convergencia también se da coordenada a coordenada, en particular, se tiene que $\lim_{n\to\infty} z_j^n = z_j$, además para todo $n \in \mathbb{N}$, $z_j^n < p$, así que $z_j \leq p$, pero z_j es racional y p es irracional, por tanto $z_j < p$ y podemos concluir que $z \in U$ y este es cerrado en $l_2^{\mathbb{Q}}$. ■

Problema 2.7 ¿Cuánto vale $\dim(l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}})$?.

Solución. Demostraremos que $l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}} \cong l_2^{\mathbb{Q}}$, lo cual implica de manera inmediata que $\dim\,(l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}) = 1$.

Sean $f : l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}} \to l_2^{\mathbb{Q}}$ y $g : l_2^{\mathbb{Q}} \to l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}$ definidas por

$$f((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots) = (x_i, y_i)_{i=1}^{\infty},$$

y

$$g((x_i)_{i=1}^{\infty}) = ((x_{2i-1})_{i=1}^{\infty}, (x_{2i})_{i=1}^{\infty}).$$

Primero veremos que f y g están bien definidas.

Sea $(x, y) \in l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}$. Cada x_i y y_i son racionales, por tanto $(x_i, y_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{Q}^{\infty}$.

Como las sucesiones $\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes, también lo es la sucesión $\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)\right\}_{i=1}^{n}$, luego

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i^2 + y_i^2) < \infty,$$

así que $f((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) \in l_2^{\mathbb{Q}}$ y f está bien definida.

Veamos que g está bien definida. Si $x \in l_2^{\mathbb{Q}}$, se tiene que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} < \infty$$

y

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_{2i}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} < \infty,$$

lo cual implica que $(x_{2i-1})_{i=1}^{\infty}$ y $(x_{2i})_{i=1}^{\infty}$ están en $l_2^{\mathbb{Q}}$ y en consecuencia g está bien definida.

Ahora demostraremos que f y g son inverasas una de la otra.

Si $(x, y) \in l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}$ entonces

$$g \circ f(x, y) = g(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots) = ((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = (x, y).$$

Si $x \in l_2^{\mathbb{Q}}$, entonces

$$f \circ g(x) = f((x_{2i-1})_{i=1}^{\infty}, (x_{2i})_{i=1}^{\infty}) = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = x.$$

Por lo tanto $g = f^{-1}$.

Para finalizar probaremos que f y f^{-1} son continuas. Sean $\varepsilon > 0$, $(x, y) \in l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}$ y $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x^n, y^n) = (x, y)$.

$f(x, y) = (x_i, y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $f(x^n, y^n) = (x_i^n, y_i^n)_{i=1}^{\infty}$, además $\lim_{n\to\infty}(x^n, y^n) = (x, y)$ implica que x^n converge a x y y^n converge a y, así pues existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i^n - y_i)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notemos que

$$d(f(x, y), f(x^n, y^n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}((x_i^n - x_i)^2 + (y_i^n - y_i)^2)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(y_i^n - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i^n - y_i)^2} < \varepsilon$$

si $n \geq N$, en consecuencia $\lim_{n\to\infty} f(x^n, y^n) = f(x, y)$ lo cual prueba la continuidad de f.

Ahora demostraremos que f^{-1} es continua.

Sean $x \in l_2^{\mathbb{Q}}$ y $\varepsilon > 0$, observemos que $f^{-1}(x) = ((x_{2i-1})_{i=1}^{\infty}, (x_{2i})_{i=1}^{\infty})$.

Si x^n es una sucesión de $l_2^{\mathbb{Q}}$ que converge a x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\|x^n - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2} < \varepsilon$, además

$$\left\|\left(x_{2i-1}^n\right)_{i=1}^{\infty} - (x_{2i-1})_{i=1}^{\infty}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{2i-1}^n - x_{2i-1})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2} = \|x^n - x\|$$

y

$$\|(x_{2i}^n)_{i=1}^{\infty} - (x_{2i})_{i=1}^{\infty}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_{2i}^n - x_{2i})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2} = \|x^n - x\|.$$

Esto significa que

$$\lim_{n\to\infty}(x_{2i-1}^n)_{i=1}^{\infty} = (x_{2i-1})_{i=1}^{\infty} \text{ y } \lim_{n\to\infty}(x_{2i}^n)_{i=1}^{\infty} = (x_{2i})_{i=1}^{\infty},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}((x_{2i-1}^n)_{i=1}^{\infty}, (x_{2i}^n)_{i=1}^{\infty}) = ((x_{2i-1})_{i=1}^{\infty}, (x_{2i})_{i=1}^{\infty})$$

y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(x^n) = f^{-1}(x)$.

Lo anterior implica que f^{-1} es continua y por el Teorema 2.1, $\dim(l_2^{\mathbb{Q}} \times l_2^{\mathbb{Q}}) = 1$. ∎

Problema 2.8 Sea

$l_2^{\mathcal{I}} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2 : x_i$ es irracional para todo $i\}$.

¿Cuánto vale $\dim(l_2^{\mathcal{I}})$?.

Solución. Probaremos que $\dim(l_2^{\mathcal{I}}) = 1$, para esto primero probaremos que $\dim(l_2^{\mathcal{I}}) \nleq 0$.

Sean $y=(y_i)_{i=1}^{\infty}\in l_2^{\mathcal{I}}$ y $f:l_2\to l_2$ definida como $f(x)=x-y$, notemos que $f(y)=\overrightarrow{0}$. Al ser f una traslación, es un homeomorfismo.

Los Teoremas 1.1, 2.1 y el Problema 2.3 implican que $\dim_p(l_2^{\mathbb{Q}})=1$ para todo $p\in l_2^{\mathbb{Q}}$, esto se cumple en particular para $\overrightarrow{0}$, así que existe una vecindad U de $\overrightarrow{0}$ en $l_2^{\mathbb{Q}}$ tal que toda vecindad V de $\overrightarrow{0}$ en $l_2^{\mathbb{Q}}$ contenida en U tiene frontera no vacía.

Sabemos que $U=W\cap l_2^{\mathbb{Q}}$ donde Wes abierto en l_2. Al ser f un homeomorfismo y W vecindad de $\overrightarrow{0}$ se tiene que $W_1=f^{-1}[W]\cap l_2^{\mathcal{I}}$ es vecindad de $f^{-1}\left(\overrightarrow{0}\right)=y$ en $l_2^{\mathcal{I}}$. Probaremos que cualquier vecindad de y contenida en W_1 tiene frontera distinta del vacío en $l_2^{\mathcal{I}}$.

Sea V una vecindad de y en $l_2^{\mathcal{I}}$ tal que $V\subseteq W_1$. Podemos suponer que $V=V_1\cap l_2^{\mathcal{I}}$ donde V_1 es abierto en l_2 y $V_1\subseteq f^{-1}[W]$.

$f[V_1]$ es abierto y $f[V_1]\subseteq W$, así que existe $x\in Fr_{l_2^{\mathbb{Q}}}(f[V_1]\cap l_2^{\mathbb{Q}})$.

Lo anterior implica que existen dos sucesiones $\{w^n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq f[V_1]$ y $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq l_2^{\mathbb{Q}}-f[V_1]$ de puntos en $l_2^{\mathbb{Q}}$ tales que $\lim_{n\to\infty}w^n=x=\lim_{n\to\infty}z^n$.

Por continuidad, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}f^{-1}(w^n)=f^{-1}(x)=\lim_{n\to\infty}f^{-1}(z^n).$$

Además,para todo $n\in\mathbb{N}$, $f^{-1}(w^n)=w^n+y\in l_2^{\mathcal{I}}\cap V_1$ y $f^{-1}(z^n)=z^n+y\in l_2^{\mathcal{I}}-V_1$. También tenemos que $f^{-1}(x)=x+y\in l_2^{\mathcal{I}}$.

Es decir, $f^{-1}(x)\in Fr_{l_2^{\mathcal{I}}}(V_1)$ y en consecuencia $Fr_{l_2^{\mathcal{I}}}(V_1)\neq\emptyset$. Así que $\dim_y\left(l_2^{\mathcal{I}}\right)\nleq 0$ y por lo tanto $\dim(l_2^{\mathcal{I}})\nleq 0$.

Ahora probaremos que $\dim(l_2^{\mathcal{I}})\leq 1$. Sean U vecindad abierta de y y $0<r<1$ tal que $B_r(y)\subseteq U$.

Tomamos un elemento $q\in l_2^{\mathbb{Q}}$ tal que $y\in B_{\frac{r}{2}}(q)$. Si $x\in B_{\frac{r}{2}}(q)$ se tiene que

$$\|y-x\|<diam\left(B_{\frac{r}{2}}(q)\right)=r,$$

luego $B_{\frac{r}{2}}(q) \subseteq B_r(y) \subseteq U$.

Notemos que $S = Fr_{l_2^{\mathcal{I}}}\left(B_{\frac{r}{2}}(q)\right) = \{x \in l_2^{\mathcal{I}} : \|x - q\| = \frac{r}{2}\}$.

Ahora definimos $f : S \to \mathbf{I}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$, como $f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \left(\frac{x_i - q_i}{i}\right)_{i=1}^{\infty}$. Tenemos que $\|(x_i)_{i=1}^{\infty} - q\| = \frac{r}{2} < 1$, por lo tanto $|x_i - q_i| < 1$ para todo i, lo cual prueba que f está bien definida.

Si $f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = f((z_i)_{i=1}^{\infty})$, entonces $\left(\frac{x_i}{i}\right)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{z_i}{i}\right)_{i=1}^{\infty}$, en consecuencia $x_i = z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y de aquí se concluye que $x = z$, es decir, f es inyectiva.

Sea $\{z^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} z^k = z \in S$, los puntos de S están en una circunferencia de l_2, de modo que $\lim_{k\to\infty} z_i^k = z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, esto implica que $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{z_i^k}{i}\right)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{z_i}{i}\right)_{i=1}^{\infty}$ ya que $\mathbf{I}^\infty$ tiene topología producto. Por lo tanto f es un encaje.

Si $x \in S$, entonces $x \in l_2^{\mathcal{I}}$ y como $q \in l_2^{\mathbb{Q}}$, $x_i - q_i$ es irracional para todo i y $\frac{x_i - q_i}{i}$ es irracional para todo i, es decir $f(x) \in \mathbf{I}_I^\infty$ ($\mathbf{I}_I^\infty$ se definión en el inciso (e) del Problema 1.9), en consecuencia $f(S) \subseteq \mathbf{I}_I^\infty$. Además, por el Problema 1.9 sabemos que $\dim(\mathbf{I}_I^\infty) = 0$. Por el Problema 2.4 tenemos que $\dim f(S) = 0$ y al ser f un encaje se tiene que $\dim(S) = 0$. Hemos probado que $y \in B_{\frac{r}{2}}(q) \subseteq U$ y $\dim Fr_{l_2^{\mathcal{I}}}\left(B_{\frac{r}{2}}(q)\right) = 0$, esto implica que $\dim_y(l_2^{\mathcal{I}}) \leq 1$ y por tanto $\dim(l_2^{\mathcal{I}}) \leq 1$. Con esto hemos probado que $\dim(l_2^{\mathcal{I}}) = 1$. $\blacksquare$

III. ***Dimensión de un subespacio***

En este capítulo veremos que la dimensión de cualquier subespacio de un espacio X es menor o igual a la dimensión de X.Si tenemos un espacio X, la dimenisón de cualquier subespacio de este es menor o igual a la dimensión de X.

Esto implica que la definición de dimensión de un subespacio en un punto puede ser dada en términos de vecindades del espacio grande.

3.1 ***Preliminares***

Lema 3.1 Sea $Y \subseteq X$. Entonces, para todo $A \subseteq X$,

$$Fr_Y(A \cap Y) \subseteq Fr(A).$$

Demostración. Por definición de frontera,

$$Fr_Y(A \cap Y) = Cl_Y\,(A \cap Y) \cap Cl_Y(Y - A).$$

Además, $Cl_Y(A \cap Y) \subseteq Cl(A)$ y $Cl_Y(Y - A) \subseteq Cl(X - A)$, lo cual implica que

$$Fr_Y(A \cap Y) \subseteq Fr(A).$$

■

Lema 3.2 Sea X un espacio topológico y $V \subseteq X$, entonces $Fr(Int\,(V)) \subseteq Fr(V)$.

Demostración. Si $Fr(Int(V)) = \emptyset$, la prueba es trivial. Supongamos que $Fr(Int(V)) \neq \emptyset$.

Sean $p \in Fr(Int(V))$ y U abierto en X tal que $p \in U$. Tenemos que $U \cap Int(V) \neq \emptyset$ y $U \cap (X - Int(V)) \neq \emptyset$. Como $Int(V) \subseteq V$, tenemos que $U \cap V \neq \emptyset$.

Supongamos que $U \cap (X - V) = \emptyset$, o bien, $U \subseteq V$.

Al ser U abierto, $U = Int(U) \subseteq Int(V)$, por tanto, $U \cap (X - Int(V)) = \emptyset$, pero esto no puede ser, así que $U \cap (X - V) \neq \emptyset$ y $p \in Fr(V)$. ■

Lema 3.3 Sea X un espacio topológico tal que $X = Y \cup Z$ y sea V abierto en X, entonces $Fr(V) = Fr_Y(V \cap Y) \cup Fr_Z(V \cap Z)$.

Demostración. Sea $p \in Fr\,(V)$ y supongamos que $p \notin Fr_Z(V \cap Z)$.

Si $p \in V \cap Z$, entonces $p \in V$ y como V es abierto, $p \notin Fr(V)$, pero esto no puede ser, así que p esta en el exterior de $V \cap Z$ relativo a $\dot{Z}$. En consecuencia existe U_p abierto en X tal que $U_p \cap V \cap Z = \emptyset$.

Sea U vecindad abierta de p en X. $U \cap U_p$ también es vecindad abierta de p en X, por tanto, $(U \cap U_p) \cap V \neq \emptyset$. Como $V = V \cap X = V \cap (Y \cup Z) = (V \cap Y) \cup (V \cap Z)$, entonces

$$(U \cap U_p) \cap ((V \cap Y) \cup (V \cap Z)) = ((U \cap U_p) \cap (V \cap Y)) \cup ((U \cap U_p) \cap (V \cap Z)) \neq \emptyset,$$

pero $U_p \cap V \cap Z = \emptyset$, así que

$$(U \cap U_p) \cap (V \cap Y) \neq \emptyset$$

y por tanto $U \cap (Y \cap V) \neq \emptyset$, en consecuencia $p \in Cl_Y(V \cap Y)$. Además p no esta en el interior de $V \cap Y$ relativo a Y por la misma razón por la que no estaba en el de $Z \cap V$ de modo que $p \in Fr_Y(V \cap Y)$ y por tanto $Fr(V) \subseteq Fr_Y(V \cap Y) \cup Fr_Z(V \cap Z)$.

Por el Lema 1 tenemos que $Fr_Y(V \cap Y) \subseteq Fr(V)$ y $Fr_Z(V \cap Z) \subseteq Fr(V)$, por lo tanto $Fr(V) = Fr_Y(V \cap Y) \cup Fr_Z(V \cap Z)$. ∎

Los Teoremas 3.4 y 3.5 están probados en [1, p. 15 y 16].

Teorema 3.4 Cualquier subespacio de un espacio de dim $\leq n$ tiene dim $\leq n$.

Teorema 3.5 Sean $Y \subseteq X$, y $p \in Y$. Entonces son equivalentes:

1) $\dim_p(Y) \leq n$;

2) p tiene una base $\mathcal{U}$ en X tal que $\dim[Fr_Y(U)] \leq n - 1$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

3.2 ***Problemas***

Problema 3.5 Demostrar que los enunciados 1 y 2 abajo son equivalentes:

1) $\dim_p(X) \leq n$.

2) p tiene una base local de vecindades en X cuyas fronteras tienen $\dim \leq n-1$.

Solución. Suponiendo 1), 2) es inmediato ya que cualquier vecindad abierta de p es vecindad de p.

Ahora supongamos 2). Si V es vecindad de p, entonces $Int(V)$ es vecindad abierta de p. Si $\dim Fr(V) \leq n-1$, por el Lema 3.2 tenemos que $\dim(Fr(Int(V))) \leq n-1$. Por lo tanto $\dim_p(X) \leq n$. ■

Problema 3.6 Supongamos que $X = Y \cup Z$, donde $\dim(Y) \leq 0$ y $\dim(Z) \leq 0$. Entonces $\dim(X) \leq 1$.

Solución. Sean $p \in X$ y U vecindad abierta de p en X. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p \in Y$.

Puesto que $\dim(Y) \leq 0$, existe V vecindad abierta de p en X tal que $V \cap Y \subseteq U \cap Y$ y $\dim(Fr_Y(V \cap Y)) \leq -1$.

Como $V \cap Y \subseteq U \cap Y$, entonces $V \cap U \cap Y = V \cap Y$ y en consecuencia

$$\dim(Fr_Y(V \cap U \cap Y)) \leq -1.$$

Llamemos $W = V \cap U$. Claramente $W \subseteq U$.

Por el Lema 3.3 $Fr(W) = Fr_Y(W \cap Y) \cup Fr_Z(W \cap Z)$, además

$$Fr_Y(W \cap Y) = Fr_Y(V \cap U \cap Y) = \emptyset,$$

así que $Fr(W) = Fr_Z(W \cap Z)$. Como $Fr_Z(W \cap Z) \subseteq Z$ y $\dim(Z) \leq 0$, el Teorema 3.4 implica que $\dim(Fr(V)) \leq 0$. Por lo tanto $\dim_p(X) \leq 1$ y de aquí se sigue que $\dim(X) \leq 1$.

■

Problema 3.7 Si $\dim(X) = 0$, entonces $\dim(X \times Y) = \dim(Y)$.

Solución. Demostraremos el resultado por inducción sobre $\dim(Y)$.

Si $\dim(Y) = -1$, entonces $Y = \emptyset$, así que $X \times Y = \emptyset$ y por tanto

$$\dim(X \times Y) = -1 = \dim(Y).$$

Ahora supongamos válido el enunciado si $\dim(Y) = n$.

Sean Y tal que $\dim(Y) = n+1$, $p = (a,b) \in X \times Y$ y U vecindad de p en $X \times Y$.

Existen U_a y U_b abiertos en X y Y respectivamente tales que

$$(a,b) \in U_a \times U_b \subseteq U.$$

Como $\dim(X) \leq 0$ existe V_a abierto en X tal que $a \in V_a \subseteq U_a$ y $\dim(Fr(V_a)) \leq -1$, es decir, $Fr(V_a) = \emptyset$. Por otra parte $\dim(Y) = n+1$ implica que existe V_b abierto en Y tal que $b \in V_b \subseteq U_b$ y $\dim(Fr(V_b)) \leq n$.

Si $(x,y) \in Fr(V_a \times V_b)$ y U_1 y V_1 son abiertos en X y Y conteniendo a x y y respectivamente, entonces $U_1 \times V_1$ es abierto en $X \times Y$ y contiene a (x,y), al estar este en la frontera de $V_a \times V_b$ se tiene que

$$(U_1 \times V_1) \cap (V_a \times V_b) \neq \emptyset \text{ y } (U_1 \times V_1) \cap [((X - V_a) \times Y) \cup (X \times (Y - V_b))] \neq \emptyset.$$

esto implica que

$$(U_1 \cap V_a) \times (V_1 \cap V_b) \neq \emptyset$$

y

$$[(U_1 \times V_1) \cap (X - V_a) \times Y] \cup [(U_1 \times V_1) \cap X \times (Y - V_b)] \neq \emptyset.$$

Como $(U_1 \cap V_a) \times (V_1 \cap V_b) \neq \emptyset$, entonces $U_1 \cap V_a \neq \emptyset$ y $V_1 \cap V_b \neq \emptyset$, por tanto $x \in Cl(V_a)$ y $y \in Cl(V_b)$.

También tenemos que $(U_1 \cap (X - V_a)) \times (V_1 \cap Y) \neq \emptyset$ ó $(U_1 \cap X) \times (V_1 \cap (Y - V_b)) \neq \emptyset$. Veamos cada caso.

Si $(U_1 \cap (X - V_a)) \times V_1 \neq \emptyset$, entonces $U_1 \cap (X - V_a) \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in Fr(V_a)$.

Si $U_1 \times (V_1 \cap (Y - V_b)) \neq \emptyset$ entonces $V_1 \cap (Y - V_b) \neq \emptyset$, por lo tanto $y \in Fr(V_a)$.

Lo anterior nos permite concluir que $(x, y) \in (Fr(V_a) \times Cl(V_b)) \cup (Cl(V_a) \times Fr(V_b))$, en consecuencia

$$Fr(V_a \times V_b) \subseteq (Fr(V_a) \times Cl(V_b)) \cup (Cl(V_a) \times Fr(V_b)).$$

Ahora veamos que la otra contención también se da.

Sea $(x, y) \in (Fr(V_a) \times Cl(V_b)) \cup (Cl(V_a) \times Fr(V_b))$.

Supongamos que $(x, y) \in (Fr(V_a) \times Cl(V_b))$, esto implica que si U_1 y V_1 son abiertos en X y Y y contienen a x y y respectivamente, entonces $U_1 \cap V_a \neq \emptyset$, $U_1 \cap (X - V_a) \neq \emptyset$ y $V_1 \cap V_b \neq \emptyset$.

De lo anterior se sigue que $(U_1 \cap V_a) \times (V_1 \cap V_b) \neq \emptyset$ y $(U_1 \cap (X - V_a)) \times V_1 \neq \emptyset$, en consecuencia

$$\emptyset \neq ((U_1 \cap (X - V_a)) \times V_1) \cup (U_1 \times (V_1 \cap (Y - V_b)) = (U_1 \times V_1) \cap (X \times Y - (V_a \times V_b)).$$

Por lo tanto $(x, y) \in Fr(V_a \times V_b)$. Análogamente se prueba que si $(x, y) \in Cl(V_a) \times Fr(V_b)$, entonces $(x, y) \in Fr(V_a \times V_b)$. De lo anterior podemos concluir que

$$Fr(V_a \times V_b) = (Fr(V_a) \times Cl(V_b)) \cup (Cl(V_a) \times Fr(V_b)).$$

Como $Fr(V_a) = \emptyset$, entonces $Fr(V_a \times V_b) = Cl(V_a) \times Fr(V_b) = V_a \times Fr(V_b)$. Además tenemos que $\dim(V_a) \leq \dim(X) = 0$ y $\dim(Fr(V_b)) \leq n$, por hipótesis de inducción esto implica que $\dim(V_a \times Fr(V_b)) = \dim(Fr(V_b)) \leq n$. Por lo tanto $\dim(X \times Y) \leq n + 1$.

Ahora probaremos que $\dim(X \times Y) \nleq n + 1$. Supongamos que $\dim(X \times Y) \leq n$.

Sea $a \in X$. $\{a\} \times Y \subseteq X \times Y$, de modo que $\dim(\{a\} \times Y) \leq \dim(X \times Y) \leq n$. De aquí se sigue que $\dim(\{a\} \times Y) \leq n$, pero esto no puede ser, ya que $\{a\} \times Y \cong Y$ y

$\dim(Y) = n + 1$. Esta contradicción nos permite concluir que $\dim(X \times Y) \nleq n$, por lo tanto $\dim(X \times Y) = n = \dim(Y)$.

Si $\dim(Y) = \infty$, entonces $\dim(Y) \nleq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\dim(X \times Y) \neq \infty$, entonces existe n tal que $\dim(X \times Y) \leq n$. Si $a \in X$, entonces

$$\dim(\{a\} \times Y) \leq \dim(X \times Y) \leq n,$$

pero $\{a\} \times Y \cong Y$, así que $\dim(Y) \leq n$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\dim(X \times Y) = \infty = \dim(Y)$. ■

Problema 3.8 Cualquier espacio X se puede encajar en un espacio perfecto de la misma dimensión de X. (Un espacio es perfecto si todo punto del espacio es punto límite del espacio).

Solución. Sean X un espacio topológico y C el conjunto de Cantor. Tenemos que $C \subseteq \mathbb{R}$ y C no contiene intervalos abiertos no vacíos, así que del Problema 1.4 se sigue que $\dim(C) = 0$ y el Problema 3.7 nos permite concluir que $\dim(X \times C) = \dim(X)$.

Claramente X se puede encajar en $X \times C$, además C es perfecto. Demostremos que esto implica que $X \times C$ es perfecto.

Sea $(x, y) \in X \times C$, al ser C perfecto existe $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C$ con $y_i \neq y$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i\to\infty} y_i = y$, entonces $\lim_{i\to\infty}(x, y_i) = (x, y)$, como $(x, y_i) \in X \times C$ para todo i, tenemos que (x, y) es punto límite de $X \times C$, de aquí se concluye que $X \times Y$ es un espacio perfecto de la misma dimensión de X tal que X se encaja en él. ■

IV. ***Separación en espacios de dimensión cero***

Se da una caracterización de los espacios de dimensión cero, así como otra para los espacios compactos de dimensión cero. Esto está dado en los Teoremas 4.1 y 4.2. En el Capítulo 8 se generalizan estos resultados.

4.1 ***Preliminares***

Definición Sea X un espacio topológico y $p \in X$, la *componente conexa* $C(p)$ de p en X es el conjunto conexo mas grande que contiene a $\{p\}$, es decir,

$$C(p) = \bigcup \{A \subseteq X : A \text{ es conexo y } p \in A\}.$$

Definición Un espacio compacto X es *Susliniano* si toda familia de subcontinuos mutuamente ajenos y no degenerados de X es numerable.

El siguiente Teorema se demuestra en [1, p. 19 y 20].

Teorema 4.1 Para cualquier espacio X no vacío, (1), (2) y (3) son equivalentes:

(1) $\dim(X) = 0$;

(2) cualquier punto de X y cualquier subconjunto cerrado no vacío de X que no contenga al punto están separados en X;

(3) cualesquiera dos cerrados ajenos no vacíos de X están separados en X.

El siguiente Teorema se demuestra en [1, p. 22].

Teorema 4.2 Para cualquier espacio compacto no vacío X, (1), (2) y (3) son equivalentes:

(1) $\dim(X) = 0$;

(2) X es totalmente disconexo;

(3) cualesquiera dos puntos distintos de X están separados en X.

4.2 Problemas

Problema 4.8 El espacio $l_2^{\mathbb{Q}}$ muestra que no todo espacio de dimensión cero es totalmente disconexo.

Solución. En el Problema 2.6 se probó que en $l_2^{\mathbb{Q}}$ cualesquiera dos puntos están separados y en el Capítulo 2 se probó que $\dim\left(l_2^{\mathbb{Q}}\right) = 1$. ■

Problema 4.10 Sea $p \in X$. Entonces $\dim_p(X) = 0$ si y sólo si p y C están separados en X para cualquier conjunto cerrado C no vacío tal que $p \notin C$.

Solución. Supongamos que $\dim_p(X) = 0$.

Sea C un subconjunto cerrado no vacío en X tal que $p \notin C$. Observemos que $p \in X - C$ y $X - C$ es abierto en X. Por hipótesis, existe U abierto en X tal que $p \in U \subseteq X - C$ y $Fr(U) = \emptyset$, es decir U es abierto y cerrado en X.

De esta manera U y $X - U$ forman una disconexión en X, $p \in U$ y $U \cap C = \emptyset$. Por lo tanto p y C están separados en X.

Ahora probemos el inverso.

Sea U vecindad abierta de p en X. Claramente $p \notin X - U$ y $X - U$ es cerrado en X, así que por hipótesis, p y $X - U$ están separados en X, luego, existe V abierto y cerrado en X tal que $p \in V$ y $V \cap (X - U) = \emptyset$.

Como $V \cap (X - U) = \emptyset$, entonces $V \subseteq U$. De esta manera tenemos que $p \in V \subseteq U$ y $Fr(V) = \emptyset$, ya que V es abierto y cerrado. Por lo tanto $\dim_p(X) = 0$. ■

Problema 4.11 Sea $p \in X$. Si $\dim_x(X) = 0$ para todo $x \in X - \{p\}$, entonces $\dim(X) = 0$.

Solución. Basta demostrar que $\dim_p(X) \leq 0$.

Sea C cerrado en X tal que $p \notin C$. Por normalidad, existen U_1 y U_2 abiertos en X tales que

$$p \in U_1,\ C \subseteq U_2 \text{ y } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Sea $A = X - U_2$. Tenemos que A es cerrado en X, por lo tanto $A - \{p\}$ y C son cerrados en $X - \{p\}$.

Como $\dim(X - \{p\}) = 0$, por el Teorema 4.1, existe B abierto y cerrado en $X - \{p\}$ tal que $C \subseteq B$ y $B \cap (A - \{p\}) = \emptyset$.

Al ser B abierto en $X - \{p\}$ y $X - \{p\}$ abierto en X, B es abierto en X. Como B es cerrado en $X - \{p\}$, existe D cerrado en X tal que $B = D \cap (X - \{p\}) = D - \{p\}$.

Si $p \notin D$, entonces $B = D$, por lo tanto B es cerrado en X.

Si $p \in D$, entonces $D = B \cup \{p\}$, así que

$$\{p\} \subseteq D \cap U_1 \subseteq (B \cup \{p\}) \cap (X - U_2) = (B \cup \{p\}) \cap A = (B \cap A) \cup (A \cap \{p\}) = \{p\}.$$

Luego, $D \cap U_1 = \{p\}$, en consecuencia $D - \{p\} = D - U_1$ y por tanto $D - \{p\}$ es cerrado en X. Así pues, B es abierto y cerrado en X, $C \subseteq B$ y $p \notin B$. Por el Teorema 4.1 tenemos que $\dim_p(X) \leq 0$. Por lo tanto $\dim(X) = 0$. ■

Problema 4.12 Si X es compacto de dimensión 1, entonces alguna componente de X tiene dimensión 1.

Solución. Si C es una componente de X, por el Teorema 3.4, $\dim(C) \leq 1$ ya que $C \subseteq X$. Ahora Supongamos al contrario que toda componente de X tiene dimensión cero.

Sean $x \in X$ y $C(x)$ la componente de X que contiene a x. Como $\dim(C(x)) = 0$, por el Problema 1.7, $C(x)$ es totalmente disconexo, y como también es conexo, tenemos que $C(x) = \{x\}$.

Lo anterior implica que X es totalmente disconexo y al ser este compacto, por el Teorema 4.2, tenemos que $\dim(X) = 0$, pero esto no puede ser, por lo tanto existe una componente de X de dimensión 1. ■

Problema 4.14 Todo espacio compacto Susliniano tiene $\dim \leq 1$.

Solución. Si $\dim(X) \nleq 1$, existe $x \in X$ tal que $\dim_x(X) \nleq 1$. Esto implica que hay una vecindad U de x en X tal que $\dim(Fr(V)) \nleq 0$ para toda vecindad V de x en X tal que $V \subseteq U$.

Sea $s > 0$ tal que $B_s(x) \subseteq U$. Por hipótesis, tenemos que $\dim(Fr(B_s(x))) \nleq 0$.

El conjunto $A_s = Fr(B_s(x))$ es cerrado en X, como X es compacto, A_s es compacto, y al tener dimensión distinta de cero, por el Teorema 4.2, no es totalmente disconexo. Luego, existe $C_s \subseteq A_s$ conexo tal que C_s tiene más de un punto.

Como C_s es conexo en X, $Cl_{A_s}(C_s)$ es conexo en X, y como $Cl_{A_s}(C_s)$ es cerrado en X, ya que A_s es cerrado en X, es compacto. Por lo tanto $Cl_{A_s}(C_s)$ es un subcontinuo no degenerado de X.

Si $r \in (0, s)$ podemos construir de la misma manera un conjunto $Cl_{A_r}(C_r)$ que es subcontinuo no degenerado.

Sea $B = \{Cl_{A_r}(C_r) : 0 < r \leq s\}$. Es claro que B es una familia no numerable de subcontinuos no degenerados. También son ajenos, ya que $C_r \subseteq Fr(B_r(x))$ y si $r \neq s$ entonces $Fr(B_r(x)) \cap Fr(B_s(x)) = \emptyset$, pero esto no puede ser ya que X es Susliniano. Por lo tanto $\dim(X) \leq 1$. ■

V. ***Unión de espacios de dimensión cero***

En general, la unión de espacios de dimensión cero no necesariamente tiene dimensión cero, por ejemplo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup J$ y $\dim(\mathbb{Q}) = \dim(J) = 0$ pero $\dim(\mathbb{R}) = 1$. Sin embargo la unión numerable de espacios cerrados de dimensión cero si tiene dimensión cero. Este resultado se generaliza más adelante para espacios de mayor dimensión.

5.1 ***Preliminares***

Definición Para cualesquiera enteros m y n tales que $0 \leq m \leq n < \infty$, sea

$$\mathbb{R}^n_m = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ exactamente } m \text{ coordenadas de } x \text{ son racionales}\}.$$

El siguiente Lema se demuestra en [1, p. 25 y 26].

Lema 5.1 Sean P y Q subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de X y sea Z un subconjunto cerrado de X tal que $\dim(Z) \leq 0$. Entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $Z \subset U \cup V$, $P \subset U$, $Q \subset V$ y $Cl(U) \cap Cl(V) = \emptyset$.

Lema 5.2 Si U es un subconjunto abierto de X, entonces existen C_1, C_2, $C_3, \ldots$ subconjuntos cerrados de X tales que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

Demostración. Sea D subconjunto denso de X. Para todo $x \in U$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq U$, además, existe $d_x \in D$ tal que $d_x \in B_{\frac{r_x}{2}}(x)$.

Tenemos que $x \in B_{\frac{r_x}{2}}(x) \subseteq Cl(B_{\frac{r_x}{2}}(x)) \subseteq U$. Si llamamos $C_{d_x} = Cl(B_{\frac{r_x}{2}}(x))$, tenemos que $X = \bigcup_{x \in X} C_{d_x}$.

Como D es numerable, el conjunto $\{C_{d_x}\}_{x \in X}$ es numerable y por tanto U es unión numerable de espacio cerrados. ■

Los Teoremas 5.2 y 5.3 se prueban en [1, p. 26 y 27].

Teorema 5.2 Un espacio que es unión numerable de espacios cerrados de dimensión cero tiene dimensión cero.

Corolario 5.1 Si $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ y $\dim(Y_i) \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$., entonces $\dim(Y) \leq 0$.

Demostración. Si $\{Y_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es el conjunto de los elementos de la unión que tienen dimensión cero y $\{Y_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es el conjunto de los que tienen dim < 0, es decir, $Y_{j_k} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_{i_k}$.

Por el Teorema 5.2 , tenemos que $\dim(Y) = 0$.

Si $Y_i = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$, Entonces $Y = \emptyset$ y $\dim(Y) = -1$. En cualquier caso tenemos que $\dim(Y) \leq 0$. ■

Teorema 5.3 $\dim(\mathbb{R}^n_m) = 0$ para todo m y n tales que $0 \leq m \leq n < \infty$.

5.2 ***Problemas***

Problema 5.5 Sea $X = Y \cup Z$, donde Y y Z tienen dimensión cero. Si al menos uno, Y ó Z, es cerrado en X, entonces $\dim(X) = 0$.

Solución. Supongamos que Y es cerrado en X, es decir, $X - Y$ es abierto en X. Esto implica, por el Lema 5.2, que $X - Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ donde C_i es cerrado en X para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como $C_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = X - Y \subseteq Z$ y $\dim(Z) \leq 0$, entonces $\dim(C_k) \leq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Notemos que

$$X = (X - Y) \cup Y = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) \cup Y,$$

de modo que X es unión numerable de espacios cerrados de dimensión menor o igual a cero. Por el Teorema 5.2, tenemos que $\dim(X) \leq 0$, y como $X \neq \emptyset$, entonces $\dim(X) = 0$.

■

Problema 5.6 Para cada entero $m \geq 0$ sea

$$\mathbf{I}^{\infty}_m = \{x \in \mathbf{I}^{\infty} : \text{exactamente } m \text{ coordenadas de } x \text{ son racionales}\}.$$

Entonces $\dim(\mathbf{I}^{\infty}_m) = 0$ para cada m.

Solución. Sean $r_1, \ldots, r_m$ racionales, $i_1, \ldots, i_m$ m índices fijos y

$$H = \{x \in \mathbf{I}^\infty : x_{i_k} = r_k \text{ para todo } k\}.$$

Para cada $k = 1, \ldots m$ llamamos

$$A_k = \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \begin{cases} X_i = \mathbf{I} - \{r_k\} & \text{si } i = i_k \\ X_i = \mathbf{I} & \text{si } i \neq i_k \end{cases}$$

Esto implica que $\mathbf{I}^\infty - H = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Como A_i es abierto en $\mathbf{I}^\infty$ para todo $i = 1, \ldots, m$, $\mathbf{I}^\infty - H$ es abierto en $\mathbf{I}^\infty$ y por tanto, H es cerrado en $\mathbf{I}^\infty$.

Por cada conjunto de m índices tenemos tantos conjuntos H como elementos en $\mathbb{Q}^m$ y hay una cantidad numerable de maneras de seleccionar esos m índices, por lo tanto hay una cantidad numerable de conjuntos H Llamémoslos $\{H_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Sea $C_j = H_j \cap \mathbf{I}_m^\infty$. Tenemos que $\mathbf{I}_m^\infty = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$ y cada C_j es cerrado en $\mathbf{I}_m^\infty$. Sean $j \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m$ las coordenadas racionales de los elementos de C_j y $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ el resto de las coordenadas.

Tenemos que $C_j \cong \mathbf{I}_J^\infty$ ya que la asignación $(x_i)_{i=1}^{\infty} \longmapsto (x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfismo. Además, por el Problema 1.9 (e), $\dim(\mathbf{I}_J^\infty) = 0$, así que $\dim(C_j) = 0$. Hemos probado que $\mathbf{I}_m^\infty$ es unión numerable de espacios cerrados de dimensión cero, por lo tanto, por el Teorema 5.2, $\dim(\mathbf{I}_m^\infty) = 0$. ■

Problema 5.7 Si $\dim(X) \leq 1$, entonces $X = Y \cup Z$ donde $\dim(Y) \leq 0$ y $\dim(Z) \leq 0$.

Solución. Como $\dim(X) \leq 1$, por el Problema 1.10, X tiene una base numerable $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ cuyos miembros tienen fronteras de dimensión ≤ 0.

Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Fr(U_i)$. Como $Fr(U_i) \leq 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por el Corolario 5.1, $\dim(Y) \leq 0$.

Sean $Z = X - Y$ y $p \in Z$. La familia $\{U_k \cap Z : p \in U_k\}$ es base local de p en Z, además $Fr_Z(U_k \cap Z) \subseteq Fr(U_k) \cap Z \subseteq Y \cap (X - Y) = \emptyset$, en consecuencia $\dim_p (Z) \leq 0$. Por lo tanto $\dim (Z) \leq 0$. ■

Problema 5.8 ¿El Lema 5.1 puede ser extendido asumiendo solo que Z es un F_σ en X de dimensión cero?

Solución. Veremos que no puede ser extendido dando un contraejemplo.

Sean $X = \mathbb{R}$, $P = [-1, 0]$, $Q = [1, 2]$ y $Z = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Supongamos que existen U y V tales que $P \subseteq U$, $Q \subseteq V$, $Z \subseteq U \cup V$ y $Cl(U) \cap Cl(V) = \emptyset$.

Como $0 \in P \subseteq U$, existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(0) \subseteq U$, y como $1 \in Q \subseteq V$, existe $r_2 > 0$ tal que $B_{r_2}(1) \subseteq V$. Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $0 < q_1$, $q_1 \in B_{r_1}(0)$ y $q_2 < 1$ y $q_2 \in B_{r_2}(1)$ y $A = \{q \in Z : q \in U\}$.

Como $q_1 \in A$, entonces $A \neq \emptyset$, además A está acotado superiormente por q_2, por lo tanto existe $\xi = \sup A$. Para todo $z \in Z$ tal que $\xi < z$ se tiene que $z \in V$, así que toda vecindad de ξ tiene puntos de U y V, es decir $\xi \in Cl(U) \cap Cl(V)$. Por lo tanto el Lema 5.1 no puede ser extendido. ■

Problema 5.9 Sean P y Q subconjuntos cerrados y ajenos de X y Z cerrado en X tal que $\dim (Z) \leq 0$. Entonces hay un subconjunto cerrado B tal que B separa a P y Q en X y $B \cap Z = \emptyset$.

Solución. Por el Lema 5.1 existen U y V abiertos en X tales que $Z \subseteq U \cup V$, $P \subseteq U$, $Q \subseteq V$ y $Cl(U) \cap Cl(V) = \emptyset$.

Llamamos $B = X - (U \cup V)$. Como $U \cup V$ es abierto, B es cerrado. Observemos que

$$X - B = U \cup V, \; P \subseteq U, \; Q \subseteq V \text{ y } Cl(U) \cap Cl(V) = \emptyset,$$

por lo tanto B separa a P y Q en X y como $Z \subseteq X - B$, entonces $Z \cap B = \emptyset$. ■

Problema 5.10 $\mathbb{R}^n$ es unión de $n + 1$ espacios de dimensión cero.

Solución. Si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $0 \leq m \leq n$ entonces, por el Teorema 5.2, $\dim(\mathbb{R}^n_m) = 0$. Además $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{m=0}^{n} \mathbb{R}^n_m$, por lo tanto el enunciado es cierto. ■

Problema 5.11 Si X es un espacio compacto tal que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ donde cada X_i es Susliniano, entonces X es Susliniano.

Solución. Sea $\{S_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X, tales que S_i es continuo para todo $i \in \mathcal{I}$ y $S_i \cap S_k = \emptyset$ si $i \neq k$.

Como X_n es compacto, al ser este Susliniano, entonces $S_i \cap X_n$ es compacto para todo $i \in \mathbb{N}$. Llamamos $C_{i,n}$ a una componente de $S_i \cap X_n$, como los S_i son ajenos, entonces $C_{i,n} \cap C_{k,n} = \emptyset$ si $i \neq k$.

Sea $M_n = \{i \in \mathcal{I} : S_i \cap X_n \neq \emptyset\}$, si M_n no fuera numerable los $i\H{}s$ tales que $S_i \cap X_n \neq \emptyset$ serían una cantidad no numerable, por lo tanto los conjuntos $C_{i,n}$ serían una cantidad no numerable de continuos ajenos de X_n, pero esto no puede ser ya que X_n es Susliniano. Por tanto los M_n son numerables. Como $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathcal{I}$, entonces $\mathcal{I}$ es numerable. ■

VI. ***Teorema de suma finita***

6.1 ***Preliminares***

En este capítulo damos una cota para la dimensión de la unión de dos espacios, de aquí se sigue que $\mathbb{R}^2$ no es unión de dos espacios de dimensión cero.

El siguiente Teorema esta demostrado en [1, p. 29 y 30].

Teorema 6.1 Para cualesquiera dos subespacios Y y Z de un espacio X,

$$\dim(Y \cup Z) \leq 1 + \dim(Y) + \dim(Z).$$

Corolario 6.2 Si $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ son subespacios de un espacio X tal que $\dim(Y_i) \leq 0$ para todo i, entonces

$$\dim\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} Y_i\right) \leq n.$$

Demostración. Aplicar el Teorema 6.1 n veces. $\blacksquare$

6.2 ***Problemas***

Problema 6.3 Para cualesquiera dos enteros m y n tales que $0 \leq m \leq n$, sea

$$\mathbb{R}^n_{\leq m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{a lo más } m \text{ coordenadas de } x \text{ son racionales}\}.$$

Entonces $\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) \leq m$.

Solución. Observemos que $\mathbb{R}^n_{\leq m} = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \mathbb{R}^n_k$, es decir, $\mathbb{R}^n_{\leq m}$ es unión de $m+1$ espacios de dimensión cero. Por el Corolario 6.2, tenemos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) \leq m$. $\blacksquare$

Problema 6.4 Para cualesquiera dos enteros m y n tales que $0 \leq m \leq n$, sea

$$\mathbb{R}^n_{\geq m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{al menos } m \text{ coordenadas de } x \text{ son racionales}\}.$$

Entonces $\dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) \leq n - m$.

Solución. Claramente $\mathbb{R}^n_{\geq m} = \bigcup_{k=m}^{n} \mathbb{R}^n_k$, es decir, $\mathbb{R}^n_{\geq m}$ es unión de $n-m+1$ espacios de dimensión cero. Por el Corolario 6.2, tenemos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) \leq n-m$. ■

Problema 6.5 ¿$\mathbb{R}^3$ es la unión de dos espacios de dimensión uno?

Solución. Demostraremos que la respuesta es si.

Tenemos que $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{k=0}^{3} \mathbb{R}^3_k$. Además, por el Teorema 6.1,

$$\dim(\mathbb{R}^3_0 \cup \mathbb{R}^3_1) \leq 1 + \dim(\mathbb{R}^3_0) + \dim(\mathbb{R}^3_1) = 1 + 0 + 0 = 1$$

y

$$\dim(\mathbb{R}^3_2 \cup \mathbb{R}^3_3) \leq 1 + \dim(\mathbb{R}^3_2) + \dim(\mathbb{R}^3_3) = 1.$$

Si $\dim(\mathbb{R}^3_0 \cup \mathbb{R}^3_1) = 0 = \dim(\mathbb{R}^3_2 \cup \mathbb{R}^3_3)$, entonces

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim((\mathbb{R}^3_0 \cup \mathbb{R}^3_1) \cup (\mathbb{R}^3_2 \cup \mathbb{R}^3_3)) \leq 1 + \dim(\mathbb{R}^3_0 \cup \mathbb{R}^3_1) + \dim(\mathbb{R}^3_2 \cup \mathbb{R}^3_3) = 1 + 0 + 0 = 1,$$

es decir, $\dim(\mathbb{R}^3) \leq 1$. Pero esto no puede ser, por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^3_0 \cup \mathbb{R}^3_1) = 1 = \dim(\mathbb{R}^3_2 \cup \mathbb{R}^3_3)$ y $\mathbb{R}^3$ es unión de dos espacios de dimensión uno. ■

Problema 6.6 Suponiendo que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, demuestra que

$$\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) = m \text{ y } \dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) = n - m.$$

Solución. Por el Problema 6.3 sabemos $\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) \leq m$.

Ahora supongamos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) \leq m-1$. Tenemos que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_{\leq m} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{R}^n_{m+i} \right)$, así que por el Corolario 6.2,

$$\dim(\mathbb{R}^n) \leq 1 + \dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) + \dim\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{R}^n_{m+i} \right) \leq 1 + (m-1) + (n-m-1) = n-1,$$

es decir, $\dim(\mathbb{R}^n) \leq n-1$. Pero esto no puede ser, por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) = m$. Ahora probaremos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) = n - m$

Por el Problema 6.4 sabemos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) \leq n - m$. Ahora supongamos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) \leq n - m - 1$.

Como $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_{\geq m} \cup \left(\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{R}^n_k\right)$, entonces

$$\dim(\mathbb{R}^n) \leq 1 + \dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) + \dim\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} \mathbb{R}^n_k\right) \leq 1 + (n - m - 1) + (m - 1) = n - 1,$$

luego $\dim(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$, pero esto no puede ser. Por lo tanto $\dim(\mathbb{R}^n_{\geq m}) = n - m$. ■

Problema 6.7 Para todo entero $m \geq 0$ sea

$$\mathbf{I}^\infty_{\leq m} = \{x \in \mathbf{I}^\infty : \text{a lo más } m \text{ coordenadas de } x \text{ son racionales}\}$$

. Entonces $\dim(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) \leq m$.

Solución. Claramente $\mathbf{I}^\infty_{\leq m} = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \mathbf{I}^\infty_k$. Además $\dim(\mathbf{I}^\infty_k) = 0$ para todo k, así pues, $\mathbf{I}^\infty_{\leq m}$ es unión de $m + 1$ espacios de dimensión cero, por lo tanto $\dim(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) \leq m$. ■

Problema 6.8 Supongamos que $\dim(X) = n$ y que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} Y_i$, donde $\dim(Y_i) \leq 0$ para todo i. Entonces $\dim\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} Y_i\right) = m - 1$ para todo m tal que $1 \leq m \leq n + 1$.

Solución. Como $Y_i \subseteq X$, $\dim(Y_i) \leq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n + 1$. Por el Corolario 6.2, tenemos que $\dim\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} Y_i\right) \leq m - 1$.

Ahora supongamos que $\dim\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} Y_i\right) \leq m - 2$. Por el Teorema 6.1, tenemos que

$$\dim(X) = \dim\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} Y_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=m+1}^{n+1} Y_i\right)\right) \leq 1 + (m - 2) + (n - m) = n - 1,$$

luego, $\dim(X) \leq n - 1$. Pero esto no puede ser, por lo tanto $\dim\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} Y_i\right) = m - 1$ para todo m. ■

VII. Teoremas de unión y descomposición para espacios de dimensión n

En este capítulo veremos que la unión de espacios cerrados de dim $\leq n$ tiene dim $\leq n$ y que esto implica que un espacio de dimensión $\leq n$ se puede ver como la unión de un espacio de dim $\leq n-1$ y uno de dim ≤ 0

7.1 Preliminares

Los siguientes Teoremas se prueban en [1, p. 33-35].

Teorema 7.1 Un espacio que es la unión numerable de subconjuntos F_σ, cada uno de los cuales tiene dim $\leq n$, tiene dim $\leq n$.

Teorema 7.2 Un espacio no vacío tiene dim $\leq n$ $(n < \infty)$ si y sólo si es la unión de un subespacio de dim $\leq n-1$ y un subespacio de dim ≤ 0.

7.2 Problemas

Problema 7.3 Sea $X = Y \cup Z$, donde $\dim(Y) \leq n$ y $\dim(Z) \leq n$. Si al menos uno, Y ó Z, es cerrado en X, entonces $\dim(X) \leq n$.

Solución. Supongamos que Y es cerrado en X, es decir, $X - Y$ es abierto en X. Notemos que $X - Y \subseteq Z$.

Como $X - Y$ es abierto, por el Lema 5.2, $X - Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ donde A_i es cerrado en X para todo i. Además $A_i \subseteq Z$, luego $\dim(A_i) \leq n$ para todo i. Observemos que

$$X = Y \cup (X - Y) = Y \cup \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right).$$

Entonces X es unión numerable de espacios cerrados cada uno de dim $\leq n$. Por el Teorema 7.1 tenemos que $\dim(X) \leq n$. ■

Problema 7.4 La dimensión de un espacio no vacío no puede aumentar con la unión de un punto al espacio (suponiendo, por supuesto, que el espacio agrandado es métrico y separable).

Solución. Sean X un espacio, $p \in X$ y $n = \dim(X - \{p\})$ (por hipótesis $n \neq -1$). Por el Teorema 7.2 tenemos que $X - \{p\} = X_1 \cup X_2$ donde $\dim(X_1) \leq n-1$ y $\dim(X_2) \leq 0$. El Problema 4.11 implica que $\dim(X_2 \cup \{p\}) = 0$, por tanto

$$\dim(X) = \dim(X_1 \cup (X_2 \cup \{p\})) \leq 1 + \dim X_1 + \dim(X_2 \cup \{p\}) \leq 1 + (n-1) = n.$$

Si $\dim(X) \leq n-1$, como $X - \{p\} \subseteq X$, entonces $\dim(X - \{p\}) \leq n-1$. Pero esto no puede ser, luego $\dim X = n$.

Si $\dim(X - \{p\}) = \infty$, como $X - \{p\} \subseteq X$, entonces $\dim(X) = \infty$. En cualquier caso tenemos que $\dim(X) = \dim(X - \{p\})$. ■

Problema 7.5 Sea $Y \subseteq X$ tal que $\dim(Y) \leq n$. Entonces cualquier punto $p \in X$ tiene una base local $\mathcal{U}_p$ en X tal que para todo $U \in \mathcal{U}_p$

$$\dim(Fr(U) \cap Y) \leq n-1.$$

Solución. Sea $p \in X$, por el Problema 7.4 $\dim(Y \cup \{p\}) = \dim(Y) \leq n$. Si llamamos $Z = Y \cup \{p\}$, tenemos que $\dim_p(Z) \leq n$. Por el Teorema 3.5, p tiene una base $\mathcal{U}$ de vecindades abiertas en X tales que $\dim(Fr(U) \cap Z) \leq n-1$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

Como

$$Fr(U) \cap Z = Fr(U) \cap (Y \cup \{p\}) = (Fr(U) \cap Y) \cup (Fr(U) \cap \{p\})$$

$$= (Fr(U) \cap Y) \cup \emptyset = Fr(U) \cap Y,$$

entonces $\dim(Fr(U) \cap Y) \leq n-1$. ■

Problema 7.6 Un espacio no vacío tiene $\dim \leq n$ $(n < \infty)$ si y sólo si es la unión de $n+1$ subespacios cada uno de los cuales tiene $\dim \leq 0$. Más aún, si el espacio tiene $\dim = n$ $(n < \infty)$, entonces X es unión de $n+1$ subespacios cada uno de los cuales tiene $\dim = 0$.

Solución. Sea X un espacio de dim $\leq n$. Probaremos el enunciado por inducción sobre n. Si $n = 0$ es obvio. Supongamos válido para $n - 1$.

Si $\dim(X) \leq n$, por el Teorema 7.2, $X = Y \cup Z$ donde $\dim(Y) \leq n-1$ y $\dim(Z) \leq 0$. Por hipótesis de inducción tenemos que $Y = \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i$ donde $\dim(Y_i) \leq 0$.

Si llamamos $Y_n = Z$, entonces $X = \bigcup_{i=0}^{n} Y_i$ donde $\dim(Y_i) \leq 0$, para todo $i = 0, \ldots, n$. El inverso es inmediato del Corolario 6.2.

Ahora probemos la segunda parte del enunciado. Supongamos que $\dim(X) = n$. Como $\dim(X) \leq n$, existen $Y_0, \ldots, Y_n$ subespacios de X tales que $\dim(Y_i) \leq 0$ para todo $i = 0, \ldots n$ y $X = \bigcup_{i=0}^{n} Y_i$.

Si uno de los espacios Y_i fuera vacío, por ejemplo Y_n, tendríamos que $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i$. En consecuencia $\dim(X) = \dim\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i\right) \leq n - 1$, luego $\dim(X) \leq n - 1$, pero esto no puede ser. Por lo tanto $\dim(Y_i) = 0$ para todo $i = 0, \ldots n$. ■

Problema 7.7 Supongamos que $\dim(X) = n < \infty$, y sean $k \geq -1$ y $l \geq -1$ enteros tales que $k + l + 1 = n$. Entonces existen subespacios Y y Z tales que $X = Y \cup Z$, $\dim(Y) = k$ y $\dim(Z) = l$.

Solución. Como $\dim(X) = k + l + 1$, por el Problema 7.6,

$$X = \left(\bigcup_{i=0}^{k} Y_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{l} Z_i\right)$$

donde $\dim(Y_i) = 0$ para todo $0 \leq i \leq k$. y $\dim(Z_i) = 0$ para todo $0 \leq i \leq l$.

Llamemos $Y = \bigcup_{i=0}^{k} Y_i$ y $Z = \bigcup_{i=0}^{l} Z_i$. Por el Corolario 6.2, $\dim(Y) \leq k$ y $\dim(Z) \leq l$. Si $\dim(Y) \leq k - 1$, entonces $\dim(X) \leq 1 + \dim(Y) + \dim(Z) \leq k + l$. Pero esto no puede ser, así pues, $\dim(Y) \nleq k - 1$ y en consecuencia $\dim(Y) = k$. Análogamente se prueba que $\dim(Z) = l$. ■

Problema 7.8 Sea X un espacio tal que algún punto $p \in X$ tiene tiene una base de vecindades abiertas U en X tales que $X - U$ tiene una cantidad numerable de componentes. Si cada subconjunto propio conexo y cerrado de X tiene dim $\leq n$, entonces $\dim(X) \leq n$.

Solución. Sea $\mathcal{U}$ la base local de p que se menciona en la hipótesis, al ser X un espacio métrico podemos suponer que $\mathcal{U}$ es numerable, es decir, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Al ser $\mathcal{U}$ base local de p, tenemos que

$$X - \{p\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X - U_i).$$

Por hipótesis cada conjunto $X - U_i$ contiene una catidad numerable de componentes de X, por tanto $X - \{p\}$ contiene también una cantidad numerable de componentes de X, de hecho contiene todas las componentes de X excepto a $C(p)$. En consecuencia X tiene una cantidad numerable de componentes y al ser X la unión de todas sus componentes, podemos concluir que X es una unión numerable de conjuntos cerrrados y conexos, es decir,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

donde cada C_i es cerrado y conexo. Por hipótesis tenemos que $\dim(C_i) \leq n$ para todo $i \in \mathbb{N}$, así pues, por el Teorema 7.1 podemos concluir que $\dim(X) \leq n$. ■

Problema 7.9 Para todo $p \in X$, $\dim[(X - \{p\}) \times Y] = \dim(X \times Y)$ suponiendo que X es no degenerado.

Solución. Sabemos que $\dim[(X - \{p\}) \times Y] \leq \dim(X \times Y)$, ahora probaremos la otra desigualdad. Supongamos

$$\dim[(X - \{p\}) \times Y] = m.$$

Como X es no degenerado existe $x \in X$ tal que $x \neq p$. Tenemos que

$$\{p\} \times Y \cong \{x\} \times Y \subseteq (X - \{p\}) \times Y,$$

por tanto $\dim(\{p\} \times Y) \leq \dim((X - \{p\}) \times Y) = m$.

Si llamamos $W = (X - \{p\}) \times Y$ y $Z = \{p\} \times Y$, entonces $X \times Y = W \cup Z$. Al ser Z cerrado, por el Problema 7.3, tenemos que $\dim(X \times Y) \leq m = \dim((X - \{p\}) \times Y)$ y en consecuencia $\dim(X \times Y) = \dim((X - \{p\}) \times Y)$. ■

VIII. ***Separación en espacios de dimensión n***

El Teorema 8.2 generaliza al Teorema 4.1, se trata de caracterizar a los espacios de dimensión $\leq n$ en términos de separación de conjuntos cerrados.

8.1 ***Preliminares***

El siguiente Lema se demuestra en [1, p. 37 y 38].

Lema 8.1 Sea $Z \subset X$ tal que $\dim(Z) \leq 0$. Si C_1 y C_2 son dos subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de X, entonces existe un subconjunto cerrado B de X tal que separa a C_1 y C_2 en X y $B \cap Z = \emptyset$.

Los Teoremas 8.2 y 8.3 se demuestran en [1, p. 38 y 39].

Teorema 8.2 Para cualquier entero $n \geq 0$, los enunciados (1), (2) y (3) son equivalentes:

(1) $\dim(X) \leq n$;

(2) cualquier punto en X y cualquier subconjunto cerrado no vacío en X que no contenga al punto están separados en X por un subconjunto cerrado de X de dim $\leq n-1$;

(3) cualesquiera dos subconjuntos cerrados no vacíos ajenos de X están separados en X por un subconjunto de dim $\leq n-1$.

Teorema 8.3 Sea X un espacio compacto no vacío. $\dim(X) \leq n$ si y sólo si cualesquiera dos puntos distintos de X están separados en X por un subconjunto cerrado de X de dim $\leq n-1$.

8.2 ***Problemas***

Problema 8.5 Sea $A \subseteq X$ tal que $\dim(A) \leq n < \infty$. Si C_1 y C_2 son dos subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de X, entonces existe un subconjunto cerrado B de X tal que B separa a C_1 y C_2 en X y $\dim(B \cap A) \leq n-1$ ($n \geq 0$).

Solución. Lo demostraremos por inducción sobre n.

Si $n = 0$, por el Lema 8.1, existe un subconjunto cerrado B de X tal que B separa a C_1 y C_2 en X y $B \cap A = \emptyset$, por tanto es válido para $n = 0$. Ahora supongamos válido para $n = k - 1$ y que $\dim(A) \leq k$.

Por el Teorema 7.2, $A = A_1 \cup A_2$ donde $\dim(A_1) \leq k-1$ y $\dim(A_2) \leq 0$. Por hipótesis de inducción existe B cerrado tal que B separa a C_1 y C_2 en X y $\dim(B \cap A_1) \leq k - 2$.

Notemos que $B \cap A = B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, además, como $B \cap A_2 \subseteq A_2$ tenemos que $\dim(B \cap A_2) \leq 0$. Por lo tanto

$$\dim(B \cap A) \leq 1 + \dim(B \cap A_1) + \dim(B \cap A_2) \leq 1 + (k - 2) = k - 1,$$

lo cual prueba que B es el subconjunto cerrado que buscamos. ■

Problema 8.7 Si cualesquiera dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X están separados en X por un subconjunto cerrado en X de dimensión menor o igual que $n - 1$, entonces $\dim(X) \leq n$.

El regreso del enunciado anterior es falso para $n = 1$ (dar un ejemplo).

Solución. Sean C_1 y C_2 dos cerrados no vacíos ajenos en X. Por normalidad, existen U_1 y U_2 abiertos en X tales que $C_1 \subseteq U_1$, $C_2 \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Los conjuntos U_1 y U_2 son abiertos en X ajenos y no vacíos, luego, existe B cerrado en X tal que B separa a U_1 y U_2 en X y $\dim(B) \leq n - 1$. Es claro que B separa también a C_1 y C_2 en X, por tanto, cualesquiera dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X están separados en X por un subconjunto de $\dim \leq n - 1$, Por el Teorema 8.2, $\dim(X) \leq n$.

Ahora veamos que recíproco es falso dando un contraejemplo. Sean $X = \mathbb{R}^2_0 \cup \mathbb{R}^2_2$ y

$$U = \{(x, y) \in X \text{ tales que } |x| + |y| < 1\}.$$

Supongamos que U y $Ext(U)$ se puden separar en X por un subconjunto B cerrado tal que $\dim(B) \leq 0$.

Por definición, existen E y F subconjuntos de X tales que $X - B = E \cup F$ con $U \subseteq E$, $Ext\,(U) \subseteq F$, $E \cap Cl(F) = \emptyset$ y $Cl(E) \cap F = \emptyset$.

Sea $p \in Fr\,(U)$, supongamos que $p \in X - B$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \in E$, como $p \in Fr\,(U)$ entonces $p \in Cl(Ext\,(U)) \subseteq Cl(F)$.

Lo anterior muestra que $E \cap Cl(F) \neq \emptyset$, pero esto no puede ser. Luego

$$FrU \cap (X - B) = \emptyset,$$

lo cual implica que $Fr\,(U) \subseteq B$ y $\dim Fr\,(U) \leq 0$. Por tanto U y $Ext\,(U)$ no se pueden separar en X por un conjunto de dimensión cero. $\blacksquare$

IX. ***Dimnesión de espacios euclidianos***

Partiendo de que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, en este capítulo se analizan dimensiones de diferentes subconjuntos y espacios relacionados con los espacios euclidianos.

9.1 ***Preliminares***

Definición Un espacio tiene la *propiedad del punto fijo* si para toda función f del espacio en sí mismo existe un punto fijo (es decir, un punto x tal que $f(x) = x$).

Definición Sea X un espacio y $Y \subseteq X$, se dice que Y es *retracto* de X si existe una función $f : X \to Y$ tal que $f(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Definición Un *valor estable* de una función $f : X \to Y$ es un punto $y \in f(X)$ para el cual existe $\varepsilon > 0$ tal que y esta en la imagen de todas las funciones $g : X \to Y$ tales que $\sup\{d[f(x), g(x)] : x \in X\} < \varepsilon$.

El siguente Lema se prueba en [1, p. 43 y 44].

Lema 9.1 B^n tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si S^{n-1} no es retracto de B^n.

Los Teoremas 9.1, 9.2, 9.3, 9.4 y 9.5 se demuestran en [1, p. 44-49].

Teorema 9.2 (Teorema del punto fijo de Brouwer): Toda n-celda tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 9.3 Sean $(C_i, C_i^{'})$, $1 \leq i \leq n$, n parejas de caras opuestas de $\mathbf{I}^n = \prod_{i=1}^{n}[-1, 1]$, definidas como sigue: para cada entero $i = 1, \ldots, n$,

$$C_i = \{(x_j)_{j=1}^n \in \mathbf{I}^n : x_i = 1\} \text{ y } C_i^{'} = \{(x_j)_{j=1}^n \in \mathbf{I}^n : x_i = -1\},$$

Si B_i es un subconjunto cerrado de $\mathbf{I}^n$ que separa a C_i y $C_i^{'}$ en $\mathbf{I}^n$ para todo i, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$.

Teorema 9.4 Supongamos que $\dim(X) \leq n - 1$. Si $(C_i, C_{i'})$, $1 \leq i \leq n$, son n parejas de subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de X tales que $C_i \cap C_i^{'} = \emptyset$ para todo i, entonces existen n subconjuntos cerrados $B_1, \ldots, B_n$ de X tales que B_i separa C_i y C_i' en X para todo i y $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$.

Teorema 9.5 $\dim(\mathbf{I}^n) = n$ y $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9.2 ***Problemas***

Problema 9.7 $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ cuando $n \neq m$.

Solución. Por el Teorema 9.5, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ y $\dim \mathbb{R}^m = m$. Además, la dimensión es invariante topológico, por lo tanto $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$. ■

Problema 9.8 : Toda n-superficie es de dimensión n.

Solución. Sean M una n-superficie y $p \in M$. Existe U abierto en M tal que $p \in U$ y $U \underset{f}{\cong} \mathbb{R}^n$, de modo que $\dim(U) = n$ y como U es abierto en M se tiene que

$$\dim_p(U) = \dim_p(M) \leq n,$$

en consecuencia $\dim(M) \leq n$. Ahora veamos que $\dim(M) \nleq n-1$.

Supongamos que $\dim(M) \leq n-1$. Si $p \in M$ existe U vecindad de p en M tal que $U \cong \mathbb{R}^n$. Como U es abierto en M tenemos que $\dim_p(M) = \dim_p(U)$, así que $\dim_{f(p)}(\mathbb{R}^n) \leq n-1$.

Al ser $\mathbb{R}^n$ homogeneo, lo anterior nos permite concluir que $\dim(\mathbb{R}^n) \leq n-1$, contradiciendo el Teorema 9.5. Esta contradicción nos permite afirmar que $\dim(M) = n$. ■

Problema 9.9 $\dim_p(\mathbb{R}^n) = n$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Solución. Como $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\dim_p(\mathbb{R}^n) = n$. Sean $q \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = x + p - q$

Es claro que f es un homeomorfismo, además $f(q) = p$ y

$$\dim_q(\mathbb{R}^n) = \dim_{f(q)}(f[\mathbb{R}^n]) = \dim_p(\mathbb{R}^n) = n.$$

Por tanto $\dim_q(\mathbb{R}^n) = n$ para todo $q \in \mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

Problema 9.10 $\dim_p(\mathbf{I}^n) = n$ para todo $p \in \mathbf{I}^n$.

Solución. Si $p \in Int\,(\mathbf{I}^n)$, como $Int(\mathbf{I}^n) \cong \mathbb{R}^n$, por el Problema 9.9 tenemos que $\dim_p(Int(\mathbf{I}^n)) = n$ y por tanto $\dim_p(\mathbf{I}^n) = n$. Ahora lo demostraremos para los puntos de la frontera de $\mathbf{I}^n$.

Sea $\overline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Demostraremos que $\dim_{\overline{0}}(\mathbf{I}^n) = n$. Esto implica que $\dim_p(\mathbf{I}^n) = n$ para todo $p \in Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ ya que $\mathbf{I}^n$ es homeomorfo a B^n y este tiene la misma dimensión en todos los puntos de su frontera porque es simetrico respecto a cualquiera de los planos de dimensión $n-1$ que pasan por el origen. $\blacksquare$

Como $\dim\,(\mathbf{I}^n) = n$ tenemos que $\dim_{\overline{0}}\,(\mathbf{I}^n) \leq n$, así que solo falta probar la otra desigualdad.

Por el Problema 9.9, existe $\varepsilon > 0$ tal que si V es un abierto de $\overline{0}$ que esta contenido en $B_\varepsilon(\overline{0})$ entonces $\dim\,(Fr(V)) \geq n-1$. Podemos suponer que $\varepsilon < 1$.

Sea U' abierto en $\mathbf{I}^n$ tal que $U' \subseteq B_\varepsilon(\overline{0}) \cap \mathbf{I}^n$. Demostraremos que

$$\dim(Fr_{\mathbf{I}^n}(U')) \geq n-1.$$

Llamamos $U = \{(x_i)_{i=1}^n : (|x_i|)_{i=1}^n \in U'\}$. El conjunto U es distinto del vacío ya que $\overline{0} \in U$. Demostraremos que U es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Sea $y \in U$, por definción esto implica que $y' = (|y_i|)_{i=1}^n \in U'$. Al ser U' abierto en $\mathbf{I}^n$ existe $r > 0$ tal que $B_r(y') \cap \mathbf{I}^n \subseteq U'$. Probaremos que $B_r(y) \subseteq U$.

Sea $z \in B_r(y)$, es decir, $\|y - z\| < r$, o bien,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2} < r.$$

Sabemos que $||y_i| - |z_i|| \leq |y_i - z_i|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Así que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ||y_i| - |z_i||^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2} < r.$$

Esto implica que $(|z_i|)_{i=1}^n \in B_r(y') \subseteq U'$ y en consecuencia $z \in U$ y U es abierto. Además, para todo $x \in U$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} < \varepsilon$$

ya que $(|x_i|)_{i=1}^n \in U' \subseteq B_\varepsilon(\overline{0})$. Es decir, $U \subseteq B_\varepsilon(\overline{0})$, por hipótesis, esto implica que $\dim(Fr(U)) \geq n-1$.

Ahora definimos para todo $i = 1, \ldots n$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de tal manera que

$$(f_i(x_1, \ldots, x_n))_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \neq i \\ -x_j & \text{si } j = i \end{cases}.$$

Cada función f_i es un homeomorfismo ya que es una reflexión respecto al eje $x_i = 0$.

Sea

$$\mathcal{A} = \{f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}[Fr_{\mathbf{I}^n}(U')] : i_j \in \{1, \ldots, n\} \text{ para todo } j = 1, \ldots, k \text{ y } i_j \neq i_s \text{ si } j \neq s\}_{k=1}^n.$$

Demostraremos que $Fr(U) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

Sea $x \in Fr(U)$, es decir, existen dos sucesiones $\{x^t\}_{t=1}^\infty \subseteq U$ y $\{y^t\}_{t=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^n - U$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} x^t = x \text{ y } \lim_{t\to\infty} y^t = x.$$

Por definición $\left(|x_i^t|\right)_{i=1}^n \in U'$ y $\left(|y_i^t|\right)_{i=1}^n \notin U'$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Además se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \left(|x_i^t|\right)_{i=1}^n = (|x_i|)_{i=1}^n = \lim_{t\to\infty} \left(|y_i^t|\right)_{i=1}^n,$$

por lo tanto $(|x_i|)_{i=1}^n \in Cl_{\mathbf{I}^n}(U')$. Esto implica que $\|(|x_i|)_{i=1}^n\| < 1$, ya que $U' \subseteq B_\varepsilon(\overline{0})$ y $\varepsilon < 1$, así que podemos suponer que para todo $t \in \mathbb{N}$, $\left\|\left(|y_i^t|\right)_{i=1}^n\right\| < 1$ y en consecuencia $\left(|y_i^t|\right)_{i=1}^n \in \mathbf{I}^n - U'$. Luego $(|x_i|)_{i=1}^n \in Fr_{\mathbf{I}^n}(U')$.

Si $i_1, \ldots, i_k$ son las entradas de x tales que $x_{i_j} < 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, tenemos que

$$f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k} \left((|x_i|)_{i=1}^n\right) = x,$$

es decir, $x \in f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k} \left[Fr_{\mathbf{I}^n}(U')\right]$ y por tanto $Fr(U) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

El conjunto $\mathcal{A}$ esta formado por una cantidad finita de elementos cerrados homeomorfos a $Fr_{\mathbf{I}^n}(U')$. Si $\dim\left(Fr_{\mathbf{I}^n}(U')\right) \leq n-2$, esto implicaría que $\dim\left(\bigcup \mathcal{A}\right) \leq n-2$ y en consecuencia $\dim\left(Fr(U)\right) \leq n-2$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto $\dim\left(Fr_{\mathbf{I}^n}(U')\right) \geq n-1$ y $\dim_{\overline{0}}(\mathbf{I}^n) = n$. Por lo explicado anteriormente tenemos que $\dim_p(\mathbf{I}^n) = n$ para todo $p \in \mathbf{I}^n$.

Problema 9.11 : $\dim(\mathbf{I}^\infty) = \infty$ y $\dim(l_2) = \infty$.

Solución. Sabemos que $\mathbf{I}^n$ se encaja en $\mathbf{I}^\infty$ y $\mathbb{R}^n$ se encaja en l_2 ya que $\mathbb{R}^n \times \{0\}^\infty \subseteq l_2$. Además, las bolas en $\mathbb{R}^n \times \{0\}^\infty$ coinciden con bolas en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\dim(\mathbf{I}^n) \leq \dim(\mathbf{I}^\infty)$ y $\dim(\mathbb{R}^n) \leq \dim(l_2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $\dim(\mathbf{I}^\infty) = \infty$ y $\dim(l_2) = \infty$. ■

Problema 9.12 ¿Hay un espacio de dimensión infinita que sea de dimensión finita en cada uno de sus puntos?.

Solución. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $X_n \subseteq l_2$ como

$$X_n = \{n\} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^\infty$$

es claro que $X_n \cong \mathbb{R}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamamos $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Sea $p \in X$, p está en un único X_n ya que los X_n son ajenos. Si B_1 la bola de radio 1 y centro en p, entonces $B_1 \cap X = B_1 \cap X_n$ ya que si $q \in X_m$ con $n \neq m$ $\|p - q\| \geq |n - m| \geq 1$. Se sigue de aqui que $\dim_p(X) = \dim_p(X_n) = n$.

Por lo tanto, X tiene dimensión finita en cada uno de sus puntos y $\dim(X) = \infty$ ya que X contiene subconjuntos de $\dim = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Problema 9.13 $\dim_p(\mathbb{R}^n_{\leq m}) = m$ para cada $p \in \mathbb{R}^n_{\leq m}$.

Solución. Por el Teorema 9.5 y el Problema 6.6, tenemos que $\dim(\mathbb{R}^n_{\leq m}) = m$, por lo tanto $\dim_p(\mathbb{R}^n_{\leq m}) \leq m$ para todo $p \in \mathbb{R}^n_{\leq m}$.

Ahora probaremos que $\dim_p(\mathbb{R}^n_{\leq m}) \nleq m-1$. Sean $p \in \mathbb{R}^n_{\leq m}$, $y_{i_1} < \ldots < y_{i_{n-m}}$ coordenadas irracionales de p (sabemos que hay al menos $n-m$) y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n_{\leq m}$ definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ donde

$$f_t(x) = \begin{cases} y_{i_k} & \text{si } t = i_k \text{ para algún } k = 1, \ldots, n-m \\ x_t & \text{si } t \neq i_k \text{ para todo } k = 1, \ldots n-m \end{cases} \quad \text{para todo } t = 1, \ldots, n.$$

Veremos que f es un encaje.

Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\{x^l\}_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{l\to\infty} x^l = x$.

Sabemos que la convergencia se da coordenada a coordenada, es decir, $\lim_{l\to\infty} x^l_t = x_t$ para todo $t = 1, \ldots, m$. Además, por definición, tenemos que

$$\lim_{l\to\infty} f_t(x^l) = \begin{cases} \lim_{l\to\infty} y_{i_k} & \text{si } t = i_k \text{ para algún } k = 1, \ldots, n-m \\ \lim_{l\to\infty} x^l_t & \text{si } t \neq i_k \text{ para todo } k = 1, \ldots n-m \end{cases} \quad \text{para todo } t = 1, \ldots, n.$$

Por tanto

$$\lim_{l\to\infty} f_t(x^l) = \begin{cases} y_{i_k} & \text{si } t = i_k \text{ para algún } k = 1, \ldots, n-m \\ x_t & \text{si } t \neq i_k \text{ para todo } k = 1, \ldots n-m \end{cases} \quad \text{para todo } t = 1, \ldots, n.$$

Esto implica que $\lim_{l\to\infty} f(x^l) = (\lim_{l\to\infty} f_t(x^l))_{t=1}^n = f(x)$ lo cual prueba que f es continua

Ahora supongamos que $\lim_{l\to\infty} f(x^l) = f(x)$. Como la convergencia se da coordenada a coordenanda, $\lim_{l\to\infty} f(x^l)_t = f(x)_t$ para todo $t = 1, \ldots, n$. Esto implica que $\lim_{l\to\infty} x^l_t = x_t$ para todo $t = 1, \ldots, m$, esto prueba que f es un encaje.

Existe $q \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(q) = p$, así que por el Teorema 1.1, $\dim_q(\mathbb{R}^m) \leq \dim_p(\mathbb{R}^n_{\leq m})$. Por lo tanto $\dim_p(\mathbb{R}^n_{\leq m}) = m$ para todo $p \in \mathbb{R}^n_{\leq m}$. ■

Problema 9.14 Encuentra un subconjunto cerrado C de $\mathbb{R}^n_{\leq m}$ y un mapeo $f : C \to S^{m-1}$ tal que f no puede ser extendido a un mapeo de $\mathbb{R}^n_{\leq m}$ a S^{m-1}.

Solución. Sean $s \in J$, $C = S^{m-1} \times \{s\}_{i=1}^{n-m} \subseteq \mathbb{R}^n_{\leq m}$ y $f : C \to S^{m-1}$ definida por $f(x_1, \ldots, x_m, s, \ldots, s) = (x_1, \ldots, x_m)$. Veamos que C y f resuelven el problema.

C es un conjunto cerrado al ser producto de conjuntos cerrados. Ahora supongamos que f se puede extender a $\mathbb{R}^n_{\leq m}$.

En particular, f se puede extender a una función $g : Z = B^m \times \{s\}_{i=1}^{n-m} \to S^{m-1}$.

Sean $h : B^m \to Z$ definida por $h(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, s, \ldots, s)$. La función $F = g \circ h : B^m \to S^{m-1}$ es continua ya que es composición de funciones continuas, además, si $(x_1, \ldots, x_m) \in S^{m-1}$

$$F(x_1, \ldots, x_m) = g \circ h(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_m, s, \ldots, s) = (x_1, \ldots, x_m)$$

(ya que $(x_1, \ldots, x_m, s, \ldots, s) \in C$ y g es extensión de f), esto implica que F restringida a S^{m-1} es la función identidad. Este hecho contradice el Lema 9.1 y el Teorema 9.2, por tanto, f no se puede extender a $\mathbb{R}^n_{\leq m}$. ■

Problema 9.15 $\dim_p(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) = m$ para todo $p \in \mathbf{I}^\infty_{\leq m}$.

Solución. Sea $p \in \mathbf{I}^\infty_{\leq m}$. Por el Problema 6.7 sabemos que $\dim_p(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) \leq m$. Ahora demostraremos que $\dim_p(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) \nleq m - 1$.

Sean $p_{i_1} < \ldots < p_{i_m}$ m coordenandas de p tales que dentro de esas coordenadas están todas las que son racionales y $p_{s_1} < p_{s_2} < \ldots$ el resto de las coordenandas de p.

$\mathbf{I}^m$ se encaja en $\mathbf{I}^\infty_{\leq m}$ mediante la función $f((x_i)_{i=1}^m) = (z_i)_{i=1}^\infty$ donde $z_{s_i} = p_{s_i}$ y $z_{i_k} = x_k$, además, si $q = (p_{i_k})_{k=1}^m$, entonces $f(q) = p$. Si $\dim_p(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) \leq m - 1$ entonces $\dim_q(\mathbf{I}^m) \leq m - 1$, pero esto no puede ser ya que la dimensión de $\mathbf{I}^m$ en todos sus puntos es m. Esto nos permite concluir que $\dim_p(\mathbf{I}^\infty_{\leq m}) = m$ para todo $p \in \mathbf{I}^\infty_{\leq m}$. ■

Problema 9.16 Sea (F_i, F_i'), $i = 1, 2, \ldots$, el par de caras opuestas de $\mathbf{I}^\infty = \prod_{i=1}^\infty [-1, 1]_i$; es decir, para cada i.

$$F_i = \Big\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbf{I}^{\infty} : x_i = 1\Big\},\ F_i' = \Big\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbf{I}^{\infty} : x_i = -1\Big\}.$$

Si B_i es un subconjunto cerrado de $\mathbf{I}^{\infty}$ tal que B_i separa F_i y F_i' en $\mathbf{I}^{\infty}$ para cada i, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \neq \emptyset$.

Solución. Tenemos que $\mathbf{I}^n \hookrightarrow \mathbf{I}^{\infty}$ mediante la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Sean X_i y X_i' un par de i-ésimas caras opuestas de $\mathbf{I}^n$ con $1 \leq i \leq n$.

Notemos que $f^{-1}[F_i] = X_i$ y $f^{-1}[F_i'] = X_i'$ para todo i. Por hipótesis B_i separa a F_i y F_i', en $\mathbf{I}^{\infty}$, por tanto, existen U_i y V_i tales que

$$\mathbf{I}^{\infty} - B_i = U_i \cup V_i,\ F_i \subseteq U_i,\ F_i' \subseteq V_i \text{ y } Cl(U_i) \cap V_i = \emptyset = U_i \cap Cl(V_i),$$

en consecuencia,

$$\mathbf{I}^n - f^{-1}[B_i] = f^{-1}[U_i] \cup f^{-1}[V_i],\ f^{-1}[U_i] \cap f^{-1}[V_i] = \emptyset,$$

$$X_i = f^{-1}[F_i] \subseteq f^{-1}[U_i] \text{ y } X_i' = f^{-1}[F_i'] \subseteq f^{-1}[V_i].$$

Es decir, $f^{-1}[B_i]$ separa a X_i y X_i' en $\mathbf{I}^n$ para todo i.

Además, por continuidad, $f^{-1}[B_i]$ es cerrado en $\mathbf{I}^n$. Por el Teorema 9.3,

$$\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}[B_i] \neq \emptyset$$

y como f es biyectiva tenemos que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $C_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$, C_n es cerrado en $\mathbf{I}^n$, $C_{n+1} \subseteq C_n$ y $C_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$, es decir, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \neq \emptyset$. ■

Problema 9.17 El cubo de Hilbert $\mathbf{I}^{\infty}$ no es la unión numerable de espacios de dimensión finita.

Solución. Si suponemos que $\mathbf{I}^\infty$ es unión de espacios de dimensión finita, como cada espacio de dimensión finita es unión finita de espacios de dimensión cero, podemos suponer que $\mathbf{I}^\infty$ es unión numerable de espacios de dimensión cero, es decir, $\mathbf{I}^\infty = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ donde $\dim(A_i) = 0$. Si F_i y F_i' son como en el Problema 9.16, estos son cerrados ajenos. Además, por el Lema 8.1, existe B_i cerrado en $\mathbf{I}^\infty$ tal que B_i separa a F_i y F_i' y $B_i \cap A_i = \emptyset$, esto último implica $B_i \subseteq \mathbf{I}^\infty - A_i$. Por el Problema 9.16

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathbf{I}^\infty - A_i) = \mathbf{I}^\infty - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

es decir, $\mathbf{I}^\infty - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ pero esto no puede ser ya que $\mathbf{I}^\infty = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Por lo tanto $\mathbf{I}^\infty$ no es unión numerable de espacios de dimensión finita. ■

Problema 9.18 Demuestra que el Teorema 9.2 es equivalente al Teorema 9.3.

Solución. Supongamos que existe una retracción $r : \mathbf{I}^n \to Fr\,(\mathbf{I}^n)$.

Sean X_i y X_i' caras opuestas de $\mathbf{I}^n$, sabemos que $X_i, X_i' \subseteq Fr(\mathbf{I}^n)$. Si

$$A_i = \{x \in Fr(\mathbf{I}^n) : x_i > 1/2\}\,,\ B_i = \{x \in Fr(\mathbf{I}^n) : x_i < 1/2\}$$

$$\text{y } Y_i = \{x \in Fr(\mathbf{I}^n) : x_i = 1/2\}\,,$$

entonces

$$\mathbf{I}^n = A_i \cup B_i \cup Y_i \text{ y } A_i \cap B_i = Y_i \cap A_i = Y_i \cap B_i = \emptyset,$$

por lo tanto

$$\mathbf{I}^n = r^{-1}[Fr(\mathbf{I}^n)] = r^{-1}[A_i \cup B_i \cup Y_i] = r^{-,1}[A_i] \cup r^{-1}[B_i] \cup r^{-1}[Y_i]\,.$$

y de aquí se sigue que $\mathbf{I}^n - r^{-1}[Y_i] = r^{-1}[A_i]\,|r^{-1}[B_i]$.

Si $x = (x_k)_{k=1}^{n} \in X_i$ entonces $r(x) = x$ y como $x_i = 0$, $r(x) \in B_i$. Análogamente se prueba que si $x \in X_i'$ y $r(x) \in A_i$ entonces $X_i \subseteq r^{-1}[B_i]$ y $X_i' \subseteq r^{-1}[A_i]$.

Al ser Y_i cerrado, también $r^{-1}[Y_i]$ es cerrado, luego $r^{-1}[Y_i]$ es un cerrado en $\mathbf{I}^n$ que separa a X_i y X_i´ en $\mathbf{I}^n$.Se sigue del Problema 9.16 que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} r^{-1}[Y_i] \neq \emptyset$.

Sea $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} r^{-1}[Y_i]$. Como $y \in r^{-1}[Y_i]$ para todo i, entonces $r(y)_i = 1/2$, es decir, $y = (\frac{1}{2})_{i=1}^{n} \in Fr(\mathbf{I}^n)$, pero esto no puede ser. Así pues, por el Lema 9.1, $\mathbf{I}^n$ tiene la propiedad del punto fijo. El inverso se prueba en el,Teorema 9.3. ■

Problema 9.20 Sea $id : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}^n$ la identidad. ¿Que puntos $q \in \mathbf{I}^n$ son valores estables de id?.

Solución. Demostraremos que los puntos de $(-1,1)^n$ son los valores estables. Sean $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$, $\epsilon = \frac{1}{m}$, $y \in \left[\frac{1-m}{m}, \frac{m-1}{m}\right]^n$ y $g : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}^n$ tal que $\sup\{d(x, g(x)) : x \in \mathbf{I}^n\} < \epsilon$.

Sea $f(x) = x - g(x) + y$, escrito de otra forma, $f(x) = (x_i - g_i(x) + y_i)_{i=1}^{n}$. Veamos que $f(x) \in \mathbf{I}^n$ para todo $x \in \mathbf{I}^n$.

$|x_i - g_i(x) + y_i| \leq |x_i - g_i(x)| + |y_i| < \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} = 1$, luego $|f_i(x)| < 1$ para todo i. Al ser f suma de funciones continuas esta es continua, por el Teorema del punto fijo, existe $x_0 \in \mathbf{I}^n$, tal que $f(x_0) = x_0$.

Así pues, $x_0 - g(x_0) + y = x_0$, en consecuecia $g(x_0) = y$, y por lo tanto y es valor estable para todo $y \in \left[\frac{1-m}{m}, \frac{m-1}{m}\right]^n$ y para todo m, luego, los puntos en $(-1,1)^n$ son valores estables.

Ahora veamos que los puntos en $Fr(\mathbf{I}^n)$ no son valores estables de id. Sean $\epsilon > 0$ y $f : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}^n$ definida por $f(x) = (\frac{n-1}{n})x$ donde $\frac{\sqrt{n}}{n} < \epsilon$.

Tenemos que $\left|(\frac{n-1}{n})x_i\right| \leq \frac{n-1}{n} < 1$, por lo tanto, $|f_i(x)| < 1$ para todo i, en consecuencia $f[\mathbf{I}^n] \cap Fr(\mathbf{I}^n) = \emptyset$. Veamos que $\sup\{d[x, f(x)] : x \in \mathbf{I}^n\} < \epsilon$.

Sea $x \in \mathbf{I}^n$, tenemos que

$$\left\|(\frac{n-1}{n})x - x\right\| = \left\|(\frac{n-1}{n} - 1)x\right\| = \frac{1}{n}\|x\| \leq \frac{1}{n}\sqrt{n} < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = \epsilon.$$

Es decir, $d[x, f(x)] < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbf{I}^n$, por tanto $\sup\{d[x, f(x)] : x \in \mathbf{I}^n\} < \varepsilon$.

Hemos probado que para todo $y \in Fr(\mathbf{I}^n)$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $f : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}^n$ ϵ-cercana a id tal que $y \notin f[\mathbf{I}^n]$, es decir, los puntos de $Fr(\mathbf{I}^n)$ no son valores estables de $\mathbf{I}^n$ y por tanto $(-1,1)^n$ es el conjunto de valores estables de $\mathbf{I}^n$. ∎

X. Caracterización de espacios de dimensión n en espacios euclidianos de dimensión n

Damos una caracterización de dimensión en espacios euclidianos: un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene $\dim = n$ si y sólo si tiene interior distinto del vacío. Esto implica otros resultados sobre la frontera de subconjuntos abiertos y sobre separación en espacios euclidianos.

10.1 Preliminares

El Teorema 10.1 y lo Corolarios 10.2 y 10.3 se demuestran en [1, p. 51-54].

Teorema 10.1 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\dim(X) = n$ si y sólo si X contiene un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 10.2 Si U es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ tal que U no es denso en $\mathbb{R}^n$ entonces $\dim(Fr(U)) \leq n-1$.

Corolario 10.3 $\mathbb{R}^n$ no puede ser separado por un subconjunto de $\dim \leq n-2$.

10.2 Problemas

Problema 10.5 Sea $X \subseteq \mathbf{I}^n$. Entonces $\dim(X) = n$ si y sólo si X contiene un subconjunto abierto no vacío de $\mathbf{I}^n$.

Solución. Supongamos $\dim(X) = n$.

Si $X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n) = \emptyset$ entonces $X \subseteq Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$, además $\dim(Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) = n-1$ implica que $\dim(X) \leq n-1$, pero esto no puede ser. Por lo tanto $X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n) \neq \emptyset$.

Supongamos $\dim(X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \neq n$, es decir, $\dim(X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \leq n-1$. Notemos que

$$X = X \cap \mathbf{I}^n = X \cap (Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n) \cup Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n))$$

$$= (X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \cup (X \cap Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n))$$

$$\subseteq (X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \cup Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$$

.y como $\dim(X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \leq n-1$, $\dim Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n) \leq n-1$ y $Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ es cerrado en $\mathbf{I}^n$, por el Problema 7.3, $\dim((X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \cup Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \leq n-1$ lo cual implica que $\dim(X) \leq n-1$ pero esto no puede ser, por lo tanto $\dim(X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) = n$.

$X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de $\dim = n$, por el Teorema 10.1, existe U abierto en $\mathbb{R}^n$ y distinto del vacío tal que $U \subseteq X \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$, como U esta contenido en $Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$, es abierto también en $\mathbf{I}^n$, luego X contiene un subconjunto abierto no vacío de $\mathbf{I}^n$.

Ahora supongamos que existe $U \subseteq X$ abierto y distinto del vacío de $\mathbf{I}^n$. Sea V abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $V \cap \mathbf{I}^n = U$. Si $V \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n) = \emptyset$, entonces $U \subseteq Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ y en consecuencia cualquier punto de U está en la cerradura de $Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ y U no podría ser abierto en $\mathbf{I}^n$, luego $V \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n) \neq \emptyset$.

Tenemos que $V \cap Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y distinto del vacío que esta contenido en X, así que $Int(X) \neq \emptyset$ y por el Teorema 10.1 $\dim(X) = n$. ■

Problema 10.6 $\mathbf{I}^n$ no puede ser separado por un subconjunto de $\dim \leq n-2$.

Solución. Sea $D \subseteq \mathbf{I}^n$ tal que $\dim(D) \leq n-2$. Llamamos

$$Int(\mathbf{I}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1 \text{para todo } i\}$$

y

$$Fr(\mathbf{I}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 1 \text{ ó } x_i = 0 \text{ para algún } i\}.$$

Demostraremos que $Int(\mathbf{I}^n) - D$ es denso en $\mathbf{I}^n$.

Como $\dim(D) \leq n-2$, por el Problema 10.5, tenemos que $Int(D) = \emptyset$, en consecuencia $\mathbf{I}^n - D$ es denso en $\mathbf{I}^n$.

Sea U abierto en $\mathbf{I}^n$. Al ser $Int(\mathbf{I}^n)$ denso en $\mathbf{I}^n$, tenemos que $U \cap Int(\mathbf{I}^n) \neq \emptyset$, es decir, $U \cap Int(\mathbf{I}^n)$ es un abierto no vacío de $\mathbf{I}^n$, y al ser $\mathbf{I}^n - D$ denso en $\mathbf{I}^n$ tenemos que $(U \cap Int(\mathbf{I}^n)) \cap (\mathbf{I}^n - D) \neq \emptyset$, por lo tanto $U \cap (Int(\mathbf{I}^n) - D) \neq \emptyset$ e $Int(\mathbf{I}^n) - D$ es denso en $\mathbf{I}^n$.

Si $Int(\mathbf{I}^n) - D$ fuera disconexo, tendríamos que $Int(\mathbf{I}^n)$ puede ser separado por un subconjunto de dim $\leq n-2$, lo cual contradice el Corolario 10.3 ya que $Int(\mathbf{I}^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, así que $Int(\mathbf{I}^n) - D$ es conexo. De esta manera tenemos que

$$Int(\mathbf{I}^n) - D \subseteq \mathbf{I}^n - D \subseteq \mathbf{I}^n = Cl(Int(\mathbf{I}^n) - D)$$

es decir, $\mathbf{I}^n - D$ está entre un conjunto conexo y su cerradura, así que $\mathbf{I}^n - D$ es conexo. Por lo tanto $\mathbf{I}^n$ no puede ser separado por un subconjunto de dim $\leq n-2$. ■

Problema 10.7 Un subconjunto de una n-superficie es de dimensión n si y sólo si contiene un subconjunto abierto no vacío de la superficie.

Solución. Sea M una n-superficie y $X \subseteq M$ tal que $\dim(X) = n$.

Existe $p \in X$ tal que $\dim_p(X) = n$. Sea C vecindad de p en M tal que C es homeomorfo a $\mathbf{I}^n$, es decir, existe un homeomorfismo f de C en $\mathbf{I}^n$. Como C es vecindad de p tenemos que $\dim_p(C \cap X) = \dim_p(X) = n$, de aquí se sigue que $\dim_{f(p)}(f[X]) = n$ y en consecuencia $\dim(f[X]) = n$.

Por el Problema 10.5, $Int(f[X]) \neq \emptyset$, luego $f^{-1}[Int(f[X])] \neq \emptyset$ y es abierto en C. Existe V abierto en M tal que $V \cap C = f^{-1}[Int(f[X])]$. Como C es homeomorfo a $\mathbf{I}^n$, $Int(C)$ es denso en C, por tanto, $V \cap C \cap Int(C) \neq \emptyset$. Notemos que

$$\emptyset \neq V \cap Int(C) \subseteq V \cap C = f^{-1}[Int(f[X]) \subseteq f^{-1}[f[X]] = X \cap C \subseteq X$$

y $V \cap Int(C)$ es abierto en M. Así pues, X contiene un subconjunto abierto no vacío de M.

Ahora supongamos que X es un subconjunto de M con interior distinto del vacío. Sea $p \in Int(X)$, tenemos que existe C vecindad de p en M tal que C es homoemorfo a $\mathbf{I}^n$, esto implica que $Int(X) \cap C$ es abierto y distinto del vacío en C, al ser C homeomorfo a $\mathbf{I}^n$ se debe tener que $\dim(Int(X) \cap C) = n$, y como $Int(X) \cap C \subseteq X$, tenemos que $\dim(X) = n$.
■

Problema 10.8 Una n-superficie conexa M no puede ser separada por un subconjunto de dim $\leq n-2$.

Solución. Sea $D \subseteq M$ tal que dim $(D) \leq n-2$ y supongamos que D separa M. Como M es conexo, entonces $D \neq \emptyset$, por lo tanto existen E, $F \subseteq M$ tales que $M - D = E|F$.

Como dim $(D) \leq n-2$, por el Problema 10.7 tenemos que $Int\,(D) = \emptyset$. Sea $d \in D$ y U vecindad de d. Como $Int\,(D) = \emptyset$, entonces $U \cap (M - D) \neq \emptyset$, luego $U \cap E \neq \emptyset$ ó $U \cap F \neq \emptyset$, es decir, $d \in Cl(E) \cup Cl(F)$, de aquí se sigue que $D \subseteq Cl(E) \cup Cl(F)$, por lo tanto $M = Cl(E) \cup Cl(F)$.

Si $Cl(E) \cap Cl(F) = \emptyset$, entonces M sería disconexo, por lo tanto $Cl(E) \cap Cl(F) \neq \emptyset$.

Si $p \in Cl(E) \cap Cl(F)$, entonces p tiene que estar en D ya que si no tendría que estar en $E \cup F$ y por tanto estaría en $E \cap Cl(F)$ o en $F \cap Cl(E)$ lo cual sería una contradicción.

Existe C vecindad de p tal que C es homoemorfo a $\mathbf{I}^n$. Como $d \in Cl(E) \cap Cl(F)$ tenemos que $C \cap E \neq \emptyset \neq C \cap F$. Además

$$C - D = (E \cap C)|(F \cap C)$$

$$\text{y } Cl(E \cap C) \cap (F \cap C) = \emptyset = (E \cap C) \cap Cl(F \cap C),$$

por lo tanto C está separado por un subconjunto de dim $\leq n-2$, pero esto no puede ser ya que C es homeomorfo a $\mathbf{I}^n$. Por lo tanto $M - D$ es conexo. ■

Problema 10.9 Si U es un subconjunto abierto no vacío de una n-superficie M tal que U no es denso en M, entonces dim $(Fr\,(U)) = n-1$.

Solución. Como U no es denso $Ext(U) \neq \emptyset$. Si $Fr(Ext(U)) = \emptyset$ entonces M no sería conexo, por tanto $Fr(Ext\,(U)) \neq \emptyset$.

Sean $p \in Fr(Ext\,(U)) \subseteq Fr\,(U)$ y C vecindad de p tal que $C \cong \mathbf{I}^n$. Como $p \in Int(C)$ y $p \in Fr\,(U)$ tenemos que $Int(C) \cap U \neq \emptyset$ e $Int(C) \cap Ext(U) \neq \emptyset$, luego, $U \cap Int(C)$ es abierto no denso de $Int(C)$. Por el Corolario 10.2, dim $\left(Fr_{Int(C)}(U \cap Int(C))\right) = n-1$ ya que $Int(C)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Notemos que $Fr_{Int(C)}(U \cap Int(C)) \subseteq Fr\,(U)$, luego $\dim(Fr\,(U)) \nleq n-2$ y como $Int(Fr\,(U)) = \emptyset$ se debe tener que $\dim(Fr\,(U)) \leq n-1$. Por lo tanto $\dim(Fr\,(U)) = n-1$. ■

Problema 10.10 ¿El cubo de Hilbert puede ser separado por un subconjuto de dimensión finita?.

Solución. :Supongamos que existe $D \subseteq \mathbf{I}^\infty$ tal que D separa a $\mathbf{I}^\infty$ y $\dim(D) = n < \infty$. Como D separa a $\mathbf{I}^\infty$, $\mathbf{I}^\infty - D = U|V$.

D es distinto del vacío ya que $\mathbf{I}^\infty$ es conexo. Sean $p = (p_i)_{i=1}^\infty \in D$ y $f : \mathbf{I}^{n+2} \to \mathbf{I}^\infty$ definida por $f(x_1, \ldots, x_{n+2}) = (x_1, \ldots, x_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}, \ldots)$. f es un encaje y $p \in f[\mathbf{I}^{n+2}]$, por tanto $f[\mathbf{I}^n] \cap D \neq \emptyset$. Además

$$f\left[\mathbf{I}^{n+2}\right] - D = (U \cap f\left[\mathbf{I}^{n+2}\right])|(V \cap f\left[\mathbf{I}^{n+2}\right]),$$

es decir, $f[\mathbf{I}^{n+2}]$ esta separado por un subconjunto de $\dim = n$, pero esto no puede ser, ya que $f[\mathbf{I}^{n+2}] \cong \mathbf{I}^{n+2}$. Por lo tanto $\mathbf{I}^\infty$ no puede ser separado por un subconjunto dimensión finita. ■

Problema 10.11 Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces cualesquiera dos subconjuntos abiertos ajenos no vacíos de X están separados en X por un subconjunto cerrado de $\dim \leq n-1$.

Solución. Sean U' y V' abiertos ajenos no vacíos de X. $U' = U \cap X$ y $V' = V \cap X$ donde U y V son abiertos en $\mathbb{R}^n$. Si U es abierto no denso de $\mathbb{R}^n$ entonces $\dim(Fr\,(U)) = n-1$. Como $Fr_X(U') \subseteq Fr(U)$. Entonces $\dim(Fr_X(U')) \leq n-1$. Por lo tanto $Fr_X(U')$ es cerrado en X y separa a U' y V'.

Si U es denso entonces $Int(\mathbb{R}^n - U) = \emptyset$ y en consecuencia $\dim(\mathbb{R}^n - U) \leq n-1$.Como U es abierto, $Fr\,(U) \subseteq \mathbb{R}^n - U$ y por tanto $\dim(Fr\,(U)) \leq n-1$.

Ahora, $Fr_X(U') \subseteq Fr\,(U)$, luego $\dim(Fr_X(U')) \leq n-1$ y $Fr_X(U')$ es un conjunto cerrado en X de $\dim \leq n-1$ que separa a U' y V' en X. ■

XI. ***Dimensión y cubiertas***

Introducimos una nueva definición de dimensión en términos de cubiertas, la definición anterior implica la nueva definición. En el capítulo 15 se verá que estas definiciones son de hecho equivalentes. Esta nueva definición nos permite construir encajes.

11.1 ***Preliminares***

Definición Sean A y B colecciones de conjuntos. Se dice que A es *refinamiento* de B (o A *refina a* B) si para todo $X \in A$, existe $Y \in B$ tal que $X \subseteq Y$. Denotamos $A \prec B$ si A refina a B.

Definición Sea A una colección finita de conjuntos al menos uno de los cuales es no vacío. El *orden* de A, escrito $ord(A)$, es el entero n mas grande tal que hay $n+1$ miembros de A cuya intersección total es no vacía. Si $A = \emptyset$ ó $A = \{\emptyset\}$, entonces definimos $ord(A) = -1$.

Definición Sea A una colección de subconjuntos de un espacio. El *mesh* de A, escrito $mesh(A)$ se define como

$$mesh(A) = \sup\{diam(X) : X \in A\}$$

(incluimos la posibilidad $mesh(A) = \infty$). Si $A = \emptyset$, entonces $mesh(A) = 0$ (por convención $diam(\emptyset) = 0$).

El Lema 11.1 y el Teorema 11.2 se demuestran en [1, p. 57-59].

Lema 11.1 Sea $Z \subseteq X$ tal que $\dim(Z) \leq 0$. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de X que cubren a Z. Existen subconjuntos abiertos ajenos V_1 y V_2 de X que cubren Z tales que $V_1 \subseteq U_1$ y $V_2 \subseteq U_2$.

Teorema 11.2 Si $\dim(X) \leq n$, entonces cualquier cubierta abierta finita U de X puede ser refinada por una cubierta abierta finita V de X tal que $ord(V) \leq n$.

Problema 11.5 Sea X un espacio compacto. Si $\dim(X) \leq n$, entonces hay cubiertas abiertas finitas de X con *mesh* arbitrariamente pequeño y orden $\leq n$.

Solución. Sea $\epsilon > 0$ .Tenemos que

$$X = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x).$$

Como X es compacto $X = \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$. Ya que $\dim(X) \leq n$, por el Teorema 11.2, la cubierta $A = \left\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\right\}_{i=1}^{k}$ tiene un refinamiento finito V tal que $ord(V) \leq n$.

Sea $U \in V$, como V es refinamiento de A, existe $i \in \{1, \ldots k\}$ tal que $U \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$, de aquí que $diam(U) \leq diam\left(B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\right) = \epsilon$, como U es arbitrario, podemos concluir que $mesh(V) < \epsilon$.

Por lo tanto V es cubierta abierta finita de X tal que $mesh(V) < \epsilon$. ■

Problema 11.6 Sea $\epsilon > 0$. Construye una cubierta abierta de $\mathbf{I}^2$ con $mesh < \epsilon$ y orden 2.

Solución. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3n} < \frac{\epsilon}{2}$. Consideremos los subconjuntos de $\mathbf{I}^2$

$$A = \left\{\left(\frac{k}{2n}, \frac{s}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq k \leq 2n,\ 0 \leq s \leq n\right\}$$

y

$$B = \left\{\left(\frac{k}{2n} + \frac{1}{4n}, \frac{s}{n} + \frac{1}{2n}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq k \leq 2n-1,\ 0 \leq s \leq n-1\right\}.$$

Como $0 \leq k \leq 2n$ y $0 \leq s \leq n$, tenemos que $0 \leq \frac{k}{2n} \leq 1$ y $0 \leq \frac{s}{n} \leq 1$, poro tanto $\left(\frac{k}{2n}, \frac{s}{n}\right) \in \mathbf{I}^2$ para todo k y s.

Como $0 \leq k \leq 2n-1$ y $0 \leq s \leq n-1$, entonces $0 < \frac{k}{2n} + \frac{1}{4n} < 1$ y $0 < \frac{s}{n} + \frac{1}{2n} < 1$, así que $\left(\frac{k}{2n} + \frac{1}{4n}, \frac{s}{n} + \frac{1}{2n}\right) \in \mathbf{I}^2$ para todo k y s.

Sea $U = \left\{B_{\frac{1}{3n}}(x) : x \in A \cup B\right\}$. U es una cubierta abierta, y como $\frac{1}{3n} < \frac{\epsilon}{2}$, $mesh(U) < \epsilon$. Demostremos que cualesquiera 4 elementos de U tienen intersección vacía.

Tomemos 3 elementos de A, digamos $x_1 = \left(\frac{k_1}{2n}, \frac{s_1}{n}\right)$, $x_2 = \left(\frac{k_2}{2n}, \frac{s_2}{n}\right)$ y $x_3 = \left(\frac{k_3}{2n}, \frac{s_3}{n}\right)$, si $s_1 \neq s_2$, sin pérdida de generalidad $s_1 < s_2$, entonces

$$\left\| \left(\frac{k_1}{2n}, \frac{s_1}{n}\right) - \left(\frac{k_2}{2n}, \frac{s_2}{n}\right) \right\| \geq \left| \frac{s_1}{n} - \frac{s_2}{n} \right| = \frac{|s_1 - s_2|}{n} \geq \frac{1}{n},$$

luego $B_{\frac{1}{3n}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_2) = \emptyset$, asi que podemos suponer que $s_1 = s_2 = s_3$. Como los k_i son distintos, podemos suponer por ejemplo que $k_1 < k_2 < k_3$, lo cual implica que $|k_1 - k_3| \geq 2$,

Así pues tendríamos que $\|x_1 - x_3\| \geq \left|\frac{k_1}{2n} - \frac{k_3}{2n}\right| = \frac{|k_1 - k_3|}{2n} \geq \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$ y en consecuencia $B_{\frac{1}{3n}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_3) = \emptyset$. Por lo tanto cualesquiera 3 elementos de A tienen intersección vacía. Pasa lo mismo con B ya que B se puede ver como una traslación de A.

Ahora tomemos 4 elementos en $A \cup B$, por lo anterior, para que puedan tener intersección no vacía tienen que ser 2 elementos en A y 2 elementos en B digamos $x_1 = \left(\frac{k_1}{2n}, \frac{s_1}{n}\right)$, $x_2 = \left(\frac{k_2}{2n}, \frac{s_2}{n}\right)$, $x_3 = \left(\frac{k_3}{2n} + \frac{1}{4n}, \frac{s_3}{n} + \frac{1}{2n}\right)$, $x_4 = \left(\frac{k_4}{2n} + \frac{1}{4n}, \frac{s_4}{n} + \frac{1}{2n}\right)$, por lo probado antes tenemos que $|k_1 - k_2| \leq 1$, $s_1 = s_2$, $|k_3 - k_4| \leq 1$ y $s_3 = s_4$. Por lo tanto $k_2 = k_1 + 1$ y $k_4 = k_3 + 1$.

Supongamos que $s_1 \neq s_3$ y $s_3 \neq s_1 - 1$, entonces $s_3 < s_1 - 1$ o $s_1 < s_3$

Si $s_3 < s_1 - 1$, entonces $2s_3 < 2s_1 - 2$, así que $1 < 2s_1 - 2s_2 - 1$ y en consecuencia

$\|x_1 - x_3\| \geq \left|\frac{s_1}{n} - \left(\frac{s_3}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right| \geq \left|\left|\frac{s_1 - s_2}{n}\right| - \frac{1}{2n}\right| = \frac{s_1 - s_2}{n} - \frac{1}{2n} \geq \frac{2}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{4-1}{2n} = \frac{3}{2n}$, lo cual implica que $B_{\frac{1}{3n}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_3) = \emptyset$.

Por lo tanto podemos suponer que $s_1 = s_3$ o $s_3 = s_1 - 1$.

Si $k_1 \neq k_3$, entonces $k_3 < k_1$ o $k_1 < k_3$, supongamos que $k_3 < k_1$, entonces $\|x_2 - x_3\| \geq \left|\frac{k_2}{2n} - \left(\frac{k_3}{2n} + \frac{1}{4n}\right)\right| = \left|\frac{k_1+1}{2n} - \left(\frac{k_3}{2n} + \frac{1}{4n}\right)\right| = \left|\frac{2(k_1-k_3)+1}{4n}\right| = \frac{2(k_1-k_3)+1}{4n} \geq \frac{3}{4n}$, por tanto $B_{\frac{1}{3n}}(x_2) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_3) = \emptyset$.

Si $k_1 < k_3$, entonces

$\|x_4 - x_1\| \geq \left|\left(\frac{k_4}{2n} + \frac{1}{4n}\right) - \frac{k_1}{2n}\right| = \left|\left(\frac{k_3+1}{2n} + \frac{1}{4n}\right) - \frac{k_1}{2n}\right| = \frac{2(k_3-k_1)+1}{4n} > \frac{3}{4n}$, por tanto $B_{\frac{1}{3n}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_4) = \emptyset$.

Así pues, podemos suponer que $k_1 = k_3$. Si $s_1 = s_3$ tenemos que

$$\|x_1 - x_4\| = \sqrt{\left(\frac{k_1}{2n} - \left(\frac{k_1+1}{2n} + \frac{1}{4n}\right)\right)^2 + \left(\frac{s_1}{n} - \left(\frac{s_1}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2n}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16n^2} + \frac{1}{4n^2}} = \frac{\sqrt{13}}{4n} > \frac{2}{3n},$$

por tanto $B_{\frac{1}{3n}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_4) = \emptyset$.

Si $s_3 = s_1 - 1$ tenemos que

$$\|x_1 - x_4\| = \sqrt{\left(\frac{k_1}{2n} - \left(\frac{k_1+1}{2n} + \frac{1}{4n}\right)\right)^2 + \left(\frac{s_1}{n} - \left(\frac{s_1-1}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4n} > \frac{2}{3n},$$

luego, $B_{\frac{1}{3n}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{3n}}(x_4) = \emptyset$.

En cualquier caso tenemos que $\bigcap_{i=1}^{4} B_{\frac{1}{3n}}(x_i) = \emptyset$, es decir, $ord(U) \leq 2$.

Ahora probemos que existen 3 elementos de la cubierta con intersección no vacía. $B_{\frac{1}{3n}}((0,0)), B_{\frac{1}{3n}}\left(\left(\frac{1}{2n},0\right)\right)$ y $B_{\frac{1}{3n}}\left(\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{2n}\right)\right)$ pertenecen a U, demostremos que $\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right)$ esta en la intersección de estos:

$\left\|(0,0) - \left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{4n} < \frac{2}{3n}$, por tanto $\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right) \in B_{\frac{1}{3n}}((0,0))$.

$\left\|\left(\frac{1}{2n},0\right) - \left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{4n} < \frac{2}{3n}$, por tanto $\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right) \in B_{\frac{1}{3n}}\left(\left(\frac{1}{2n},0\right)\right)$.

$\left\|\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right)\right\| = \frac{1}{4n} < \frac{2}{3n}$, por tanto $\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{4n}\right) \in B_{\frac{1}{3n}}\left(\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{2n}\right)\right)$.

Lo anterior prueba que $ord(U) = 2$. ■

Problema 11.7 Sea $m \geq 1$ un entero, y sea A_k una colección finita de conjuntos para cada entero k tal que $1 \leq k \leq m$. Entonces

$$ord\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \leq m - 1 + \sum_{k=1}^{m} ord(A_k)$$

Solución. Sean $n_k = ord(A_k)$ y $A = \{U_i\}_{i=1}^{1+\sum_{k=1}^m (n_k+1)}$, es decir, A son $1 + \sum_{k=1}^m (ord(A_k) + 1)$ elementos de $\bigcup\limits_{k=1}^m A_k$.

Si $n_k + 2$ elementos de A están en A_k, entonces tienen intersección vacía.

Así pues podemos suponer que hay a lo más $n_k + 1$ elementos de A_k en A para todo $k = 1, \ldots, m$. Como hay $\sum_{k=1}^m (n_k + 1) + 1$ elementos en A, existe k tal que hay $n_k + 2$ elementos de A_k en A, por lo tanto tienen intersección vacía. Esto implica que

$$ord\left(\bigcup_{i=1}^m A_k\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^m (n_k + 1) - 2 = m - 1 + \sum_{k=1}^m ord(A_k).$$

■

Problema 11.8 $\dim(X) \leq 0$ si y sólo si cualquier cubierta abierta finita U de X tiene un refinamiento finito V tal que $ord(V) \leq 0$.

Solución. Si $\dim(X) \leq 0$, por Teorema 11.2, el resultado es inmediato ya que cualquier cubierta abierta finita de X tiene un refinamiento finito con $ord \leq 0$.

Ahora demostremos el inverso. Sean P y K subconjuntos de X cerrados ajenos distintos del vacío. Observemos que $X - P$ y $X - K$ son abiertos de X y

$$X = (X - P) \cup (X - K).$$

Por el Lema 11.1, existen A y B abiertos de X tales que $X = A \cup B$, $A \subseteq X - P$, $B \subseteq X - K$ y $A \cap B = \emptyset$. Claramente A y B son abiertos y cerrados y $P \subseteq B$, $B \cap K = \emptyset$. Por lo tanto P y K están separados en X y $\dim(X) \leq 0$. ■

XII. ***Resultados preliminares para construir encajes***

En este capítulo se estudian resultados que sirven para los siguientes 3 capítulos en los que se retoma el tema de dimensión.

12.1 ***Preliminares***

Definición Si $v_1, \ldots, v_k$ son un número finito de puntos en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces

$$co(v_1, \ldots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

es el *casco convexo* de $v_1, \ldots, v_k$.

Definición Sea $W = \{W_1, \ldots, W_r\}$ una cubierta abierta de X. Para todo $i = 1, \ldots, r$ definimos $\alpha_i : X \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha_i = \begin{cases} dist(x, X - W_i) & \text{si } X - W_i \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } W_i = X. \end{cases}$$

Definimos $\alpha : X \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) \text{ para todo } x \in X$$

(notemos que $\alpha(x) > 0$ para todo $x \in X$ ya que W es cubierta de X). Finalmente sean $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}^k$, y definimos $\beta : X \to \mathbb{R}^k$ por

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha(x)} \cdot p_i \text{ para todo } x \in X.$$

β es llamado el *mapeo baricéntrico* inducido por W y $p_1, \ldots, p_r$.

Definición Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que los puntos de S están en *posición general* en $\mathbb{R}^n$ si para todo entero $m = 0, 1, \ldots, n-1$, cualesquiera $m + 2$ puntos de S no están en un hiperplano m-dimensional.

Definición Sea U una cubierta de X y sea $x \in X$. La estrella de x con repecto a U, denotado por

$$st(x, U) = \bigcup\{V \in U : x \in V\}.$$

Definición Una *sucesión básica de cubiertas* para X es una colección numerable

$$\{U^k : k = 1, 2, \ldots\},$$

de cubiertas abiertas finitas U^k de X tales que para todo $x \in X$ y toda vecindad abierta V de x en X, existe k tal que $st(x, U^k) \subseteq V$.

Definición Sea U una cubierta abierta finita de X. Un mapeo $f : X \to Y$ se llama U*-map* si para todo $y \in Y$, existe una vecindad N_y de y en Y tal que $f^{-1}(N_y)$ esta contenido en algún miembro de U.

Lema 12.1 Sean $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$ $s+t$ puntos en posición general en $\mathbb{R}^k$. Si $s+t \leq k+1$, entonces

$$(p_1 \ldots, p_s) \cap (q_1, \ldots, q_t) = \emptyset$$

Demostración. Ver [1, p. 62]. ■

Proposición 12.2 Sean $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i=1}^r$ una cubierta abierta de X tal que $ord(\mathcal{W}) \leq n$, $p_1, \ldots, p_r$ r puntos en posición general en $\mathbb{R}^{2n+1}$ y $\beta : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ el mapeo baricéntrico inducido por $\mathcal{W}$ y $p_1, \ldots, p_r$. Existe un número $\tau > 0$ tal que si $x, y \in X$ son tales que $\|\beta(x) - \beta(y)\| < \tau$ entonces $\{x, y\} \subseteq W_i$ para algún i.

Demostración. Ver [1, p. 62 y 63]. ■

Teorema 12.3 Sea $\{U^k : k = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión básica de cubiertas para X. Si $f : X \to Y$ es un U^k-map para todo k, entonces f es un encaje.

Demostración. Ver [1, p. 61-69]. ■

Proposición 12.4 Sea $\{\mathcal{U}^k : k = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión básica de cubiertas de X. Si $f : X \to Y$ es $\mathcal{U}^k - map$ para cada k, entonces f es un encaje.

Demostración. Ver [1, p. 68 y 69]. ■

12.2 Problemas

Problema 12.19 Hay un subconjunto denso de $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) cuyos puntos están en posición general en $\mathbb{R}^n$.

Solución. Sean $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable de $\mathbb{R}^n$, $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ y $P(p_1, p_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p_1 + a(p_1 - p_2), a \in \mathbb{R}\}$. Claramente $P(p_1, p_2)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, por tanto $\dim(P(p_1, p_2)) = 1$.

Sea $p_3 \in U_3$ tal que p_3 no está en $P(p_1, p_2)$, esto es posible ya que si no, tendríamos que $U_3 \subseteq P(p_1, p_2)$ y por tanto $\dim(U_3) \leq \dim(P(p_1, p_2)) = 1$, pero esto no puede ser ya que $\dim(U_3) = n$ al ser abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Siguiendo esto tenemos que existe $p_i \in U_i$ con $i = 1, \ldots, n+1$ tal que

$$p_i \notin P(p_1, \ldots p_{i-1}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = p_1 + \sum_{k=2}^{i-1} a_k(p_k - p_1), a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

y $P(p_1, \ldots, p_{i-1})$es homeomorfo a $\mathbb{R}^{i-2}$ ya que ningún p_k está en el plano generado por los anteriores.

Sea $p_{n+2} \in U_{n+2}$ tal que

$$p_{n+2} \notin A = \bigcup \{P(p_{i_1}, \ldots p_{i_n}) : i_k \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ para todo } k = 1, \ldots n\}$$

esto es posible ya que A es unión finita de espacios cerrados de dim $\leq n-1$ lo que implica que $\dim(A \cap U_{n+2}) \leq n-1$ y que A no es denso en U_{n+2}.

En general, existe $p_m \in U_m$ con $m \geq n+2$ tal que

$$p_m \notin A = \bigcup \{P(p_{i_1}, \ldots p_{i_n}) : i_k \in \{1, \ldots, m-1\} \text{ para todo } k = 1, \ldots n\}$$

y esto es posible ya que A es unión finita de espacios cerrados de dim $\leq n-1$, lo cual implica que $\dim(A \cap U_m) \leq n-1$ y por tanto $A \cap U_m$ no es denso en U_m.

De esta manera tenemos una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $p_i \in U_i$. Al ser $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de $\mathbb{R}^n$, $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Sean $p_{i_1}, \ldots p_{i_k} \in \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $3 \leq k \leq n+1$, podemos suponer que $i_1 < \ldots < i_k$.

Si $p_{i_1}, \ldots p_{i_k}$ estuvieran en un hiperplano de dimensión igual a $k-2$, este tiene que ser $P(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{k-1}})$, en consecuencia $p_{i_k} \in P(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{k-1}})$, pero esto no puede ser, ya que por construcción no puede estar en el plano generado por los anteriores elementos de la sucesión. Por lo tanto $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ están en posición general. ∎

Problema 12.20 Sea $W = \{W_1, \ldots, W_5\}$ la colección de las 2-celdas en $\mathbb{R}^2$ como se muestra en la Figura 7. Sea $X = \bigcup W$. Escoje cinco puntos $p_1, \ldots, p_5$ en posición general en $\mathbb{R}^2$.

Dibuja la imagen de X bajo el mapeo baricéntrico β unducido por W y $p_1, \ldots, p_5$. ¿La imagen es la misma sin importar cuales 5 puntos en posición general se tomen?.

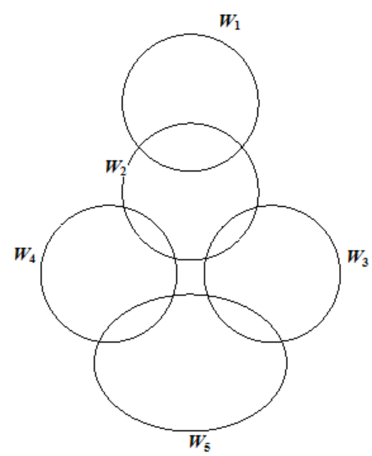

Figura 7

Solución. Sean $p_1, \ldots, p_5$ y $q_1, \ldots, q_5$ en $\mathbb{R}^3$ tales que los p_i están en posición general y también los q_i, β el mapeo baricéntrico inducido por los p_i y X y γ el mapeo barcéntrico inducido por los q_i y X, es decir,

$\beta(X) = \{co(p_1, p_2), co(p_1, p_5), co(p_2, p_4), co(p_2, p_3), co(p_3, p_5)\}$ y

$\gamma(X) = \{co(q_1, q_2), co(q_1, q_5), co(q_2, q_4), co(q_2, q_3), co(q_3, q_5)\}$ (ver Figura 8).

Sea $f_{i,k} : co(p_i, p_k) \to co(q_i, q_k)$ el homeomorfismo dado por

$$f_{i,k}(a_i p_i + a_k p_k) = a_i q_i + a_i q_k.$$

Definimos una función $f : \beta(X) \to \gamma(X)$ dada por $f(x) = f_{i,k}(x)$ si $x \in co(p_i, p_k)$. Ya que $f(p_i) = q_i$ para todo i, f está bien definida, además, como cada $f_{i,k}$ es continua y coinciden en la intersección de sus dominios, también f es continua

Sean $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}$ cuatro puntos distintos entre sí y supongamos que existe un punto $x \in co(p_{i_1}, p_{i_2}) \cap co(p_{i_3}, p_{i_4})$. Tenemos que $x \neq p_{i_k}$ ya que si por ejemplo $x = p_{i_1}$, entonces $p_{i_1} \in co(p_{i_3}, p_{i_4})$ y por tanto p_{i_1},p_{i_3} y p_{i_4} están en la misma recta contradiciendo el hecho de que están en posición general, luego, $x = a_1 p_{i_1} + a_2 p_{i_2}$ con $a_i \neq 0$ y $x = b_1 p_{i_3} + b_2 p_{i_4}$ con $b_i \neq 0$.

En consecuencia $p_{i_1} = (\frac{-a_2}{a_1}) p_{i_2} + \left(\frac{b_1}{a_1}\right) p_{i_3} + \left(\frac{b_2}{a_1}\right) p_{i_4}$, es decir, p_{i_1} es combinación lineal del resto de los p_{i_k} donde ninguno de los coeficientes es cero, de modo que p_{i_1} está en el plano generado por los otros p_{i_k} contradiciendo el hecho de que están en posición general. Por lo tanto $co(p_{i_1}, p_{i_2}) \cap co(p_{i_3}, p_{i_4}) = \emptyset$.

Sabemos que $p_{i_1} \in co(p_{i_1}, p_{i_2}) \cap co(p_{i_1}, p_{i_3})$. Supongamos que existe $x \neq p_{i_1}$ tal que $x \in co(p_{i_1}, p_{i_2}) \cap co(p_{i_1}, p_{i_3})$, es decir, x está en la recta generada por p_{i_1} y p_{i_2} y en la recta generada por p_{i_1} y p_{i_3} tendríamos que p_{i_3} está en la recta generada por p_{i_1} y p_{i_2} contradiciendo el hecho de que están en posición general, así que

$$co(p_{i_1}, p_{i_2}) \cap co(p_{i_1}, p_{i_3}) = p_{i_1}.$$

Ahora veamos que f es biyectiva.

Sean x y y en $\beta(X)$ tales que $f(x) = f(y)$, si $x, y \in co(p_{i_1}, p_{i_2})$ entonces

$$f_{i_1,i_2}(x) = f(x) = f(y) = f_{i_1,i_2}(y)$$

y como f_{i_1,i_2} es inyectiva tenemos que $x = y$.

Si $x \in co(p_{i_1}, p_{i_2})$ y $y \in co(p_{i_1}, p_{i_3})$, entonces $f(x) \in co(q_{i_1}, q_{i_2})$ y $f(y) \in co(q_{i_1}, q_{i_3})$, de modo que $co(q_{i_1}, q_{i_2}) \cap co(q_{i_1}, q_{i_3}) \neq \emptyset$ ya que $f(x)$ está en la intersección, puesto que $co(q_{i_1}, q_{i_2}) \cap co(q_{i_1}, q_{i_3}) = \{q_{i_1}\}$ se debe tener que $f(x) = q_{i_1} = f(y)$, en consecuencia $x = p_{i_1} = y$.

Si x y y están en dos cascos convexos ajenos, por como definimos f, sus imágenes van a estar en dos cascos convexos ajenos, así que es imposible que $f(x) = f(y)$. Con esto hemos probado que f es inyectiva.

Sea $y \in \gamma(X)$, existen q_{i_1} y q_{i_2} tales que $y \in co(q_{i_1}, q_{i_2})$, es decir, $y = a_1 q_{i_1} + a_2 q_{i_2}$ con $a_1, a_2 \in [0, 1]$, $f(a_1 p_{i_1} + a_2 p_{i_2}) = f_{i_1, i_2}(a_1 p_{i_1} + a_2 p_{i_2}) = a_1 q_{i_1} + a_2 q_{i_2} = y$ por lo tanto f es suprayectiva.

La función inversa f^{-1} está definida por $f^{-1}(x) = f^{-1}_{i,k}(x)$ si $x \in co(q_i, q_k)$, f^{-1} es continua ya que cada $f^{-1}_{i,k}$ es continua y coinciden en la intersección. Por lo tanto $\beta(X) \cong \gamma(X)$.

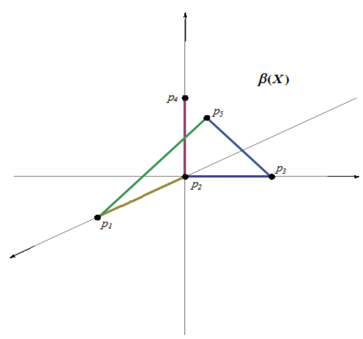

FIgura 8

■

Problema 12.21 Repite el problema anterior cuando $p_1, \ldots, p_5$ están en posición general en $\mathbb{R}^2$. ¿Que dice esto sobre la necesidad de usar $\mathbb{R}^{2n+1}$ en la Proposición 12.2?.

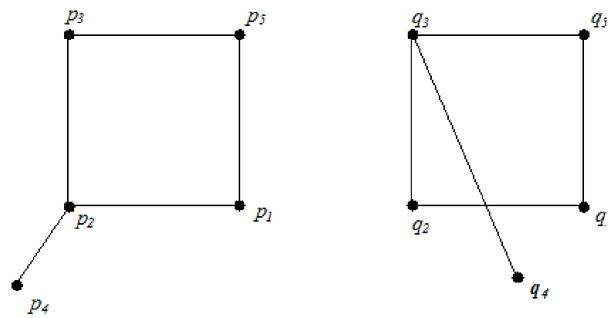

Figura 9

Solución. Como se ve en la Figura 9, dos cascos convexos distintos tienen intersección no vacía y se pueden formar dos mapeos baricéntricos que no son homeomorfos.

Si en 12.2 usáramos $\mathbb{R}^k$ con $k < 2n+1$, puede ser que la cubierta tenga dos colecciones diferentes $\{W_{k_i}\}_{i=1}^{n+1}$ y $\{V_{s_i}\}_{i=1}^{n+1}$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} W_{k_i} \neq \emptyset$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} V_{s_i} \neq \emptyset$ y $W_k \neq V_s$ para todo k y s, $p_{k_1}, \dots p_{k_{n+1}}, p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}}$ son $2n+2$ puntos diferentes de $\mathbb{R}^k$ en posición general. Como $k+1 < 2n+2$, por el Lema 12.1 puede pasar que $co(p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}}) \cap co(p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}}) \neq \emptyset$

Sean $x \in co(p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}}) \cap co(p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}})$ y $\epsilon > 0$, como $co(p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}})$ y $co(p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}})$ son cerrados, entonces toda vecindad de x tiene puntos de ambos.

Como $co(p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}})$ y $co(p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}})$ son diferentes, podemos tomar dos puntos p y q tales que

$$p \in co(p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}}) - co(p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}}),\ q \in co(p_{s_1}, \dots, p_{s_{n+1}}) - co(p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}})$$

y $p, q \in B_{\epsilon/2}(x)$, es decir, $\|p - q\| < \epsilon$. ■

Problema 12.22 Si $\beta : X \to \mathbb{R}^k$ es el mapeo baricéntrico inducido por W y $p_1, \dots, p_r$, entonces $\dim(\beta(X)) \leq ord(W)$.

Solución. Supongamos que $ord(W) = n$.

Como $\beta(X) = \bigcup \left\{ co(p_{i_1}, \dots p_{i_k}) : \bigcap_{t=1}^{k} W_{i_t} \neq \emptyset \right\}$, cada casco convexo de $\beta(X)$ esta generado por a lo más $n+1$ puntos, por lo tanto, $\beta(X)$ es unión de una cantidad finita de espacios cerrados de dim $\leq n$, por el Teorema 7.1, $\dim(\beta(X)) \leq n$. Por lo tanto $\dim(\beta(X)) \leq ord(W)$. ■

Problema 12.23 Si $f : X \to Y$ es cualquier encaje de un espacio no compacto en un espacio compacto, entonces hay una cubierta abierta finita U de X tal que f no es un $U-$mapeo.

Solución. $f[X]$ no es cerrado en Y, si lo fuera, sería compacto ya que Y es compacto y esto implicaría que X es compacto, por tanto, existe $p \in Cl(f[X]) - f[X]$.

Al estar p en la cerradura de $f[X]$ podemos tomar sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $f[X]$ ajenas tales que $\lim_{i\to\infty} x_i = p = \lim_{i\to\infty} y_i$.

Llamemos $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $B = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, notemos que A y B son cerrados en $f[X]$ ya que su punto límite no esta en $f[X]$, luego $X - f^{-1}[A]$, $X - f^{-1}[B]$ y $X - f^{-1}[A \cup B]$ son abiertos en X.

Definimos $U = \{X - f^{-1}[A], X - f^{-1}[B], X - f^{-1}[A \cup B]\}$. Claramente U es una cubierta abierta de X (ya que A y B son ajenos). Ahora demostraremos que f no es un $U-$mapeo.

Sea V vecindad de p en Y. Como p es punto límite de A y B tenemos que

$$A \cap V \neq \emptyset \neq B \cap V$$

y en consecuencia $(A \cap V) \cup (B \cap V) = V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, luego

$$f^{-1}[A] \cap f^{-1}[V] \neq \emptyset \neq f^{-1}[B] \cap f^{-1}[V]$$

$$\text{y } f^{-1}[V] \cap f^{-1}[A \cup B] \neq \emptyset$$

y podemos concluir que

$$f^{-1}[V] \subsetneq X - f^{-1}[A], f^{-1}[V] \subsetneq X - f^{-1}[B] \text{ y } f^{-1}[V] \subsetneq X - f^{-1}[A \cup B],$$

es decir, V no esta contenido en ninguno de los miembros de U y por tanto f no es un $U-$mapeo. ■

Problema 12.24 El regreso de la Proposición 12.4 se vale cuando X es compacto. De hecho el siguiente resultado es verdadero:

Si X es compacto y $f : X \to Y$ es un encaje, entonces f es un $U-$mapeo para cualquier cubierta finita U de X.

Solución. Sean $f : X \to Y$ encaje y $U = \{U_i\}_{i=1}^{r}$ una cubierta abierta finita de X. Por continuidad $f[X]$ es compacto y por tanto cerrado en Y, además al ser f un encaje, $\{f[U_i]\}_{i=1}^{r}$ es cubierta abierta finita de $f[X]$.

Tenemos que $f[U_i] = V_i \cap f[X]$ con V_i es abierto en Y para todo $i = 1, \dots r$, así pues $f[X] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i$.

Si $Y - \left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i\right) = \emptyset$, entonces $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i$ y $\{V_1, \dots, V_r\}$ es una cubierta de Y tal que $f^{-1}[V_i] = U_i$, por tanto f es un $U-$mapeo.

Si $Y - \left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i\right) \neq \emptyset$, entonces $Y - \left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i\right)$ y $f[X]$ son cerrados distintos del vacío y ajenos, así que existe A abierto en Y tal que $A \cap f[X] = \emptyset$ y $Y - \left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i\right) \subseteq A$. Luego, $\{V_1, \dots, V_r, A\}$ es una cubierta abierta de Y tal que $f^{-1}[A] = \emptyset$ y $f^{-1}[V_i] = U_i$ $i = 1, \dots, r$. Por lo tanto f es un $U-$mapeo. ■

XIII. ***Encajando espacios de dimensión finita***

Los resultados del capítulo anterior y la nueva definición de dimensión nos permiten ver que cualquier espacio de dim $\leq n$ se puede encajar en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

13.1 ***Preliminares***

Notación Sean X y Y espacios tales que Y es compacto y sea U una cubierta abierta finita de X. Entonces

$$Y^X(U) = \left\{ f \in Y^X : f \text{ es un } U - \text{map} \right\}.$$

Lema 13.1 $Y^X(U)$ es abierto en Y^X.

Demostración. Ver [1, p. 71 y 72]. ■

Lema 13.2 Si $\dim(X) \leq n < \infty$ entonces $(\mathbf{I}^{2n+1})^X(U)$ es denso en $(\mathbf{I}^{2n+1})^X$.

Demostración. Ver [1, p. 72 y 73]. ■

Teorema 13.3 Si $\dim(X) \leq n < \infty$, entonces X se puede encajar en $\mathbf{I}^{2n+1}$. Más aun, el espacio $E(\mathbf{I}^{2n+1})^X$ de todos los encajes de X en $\mathbf{I}^{2n+1}$ contiene un conjunto G_δ denso en $(\mathbf{I}^{2n+1})^X$.

Demostración. Ver [1, p. 73]. ■

- La gráfica K_5 es la gráfica completa de cinco vértices en $\mathbb{R}^3$ los cuales están en posición general.

- La gráfica $K_{3,3}$ está formada por dos grupos de 3 puntos en $\mathbb{R}^3$ P_1 y P_2 y uniendo cada punto de P_1 con todos los puntos de P_2 y cada punto de P_2 con todos los puntos de P_1.

Teorema 13.4 (Teorema de la Gráfica de Kuratowski) Un continuo localmente conexo que contiene solo una cantidad finita de curvas simples cerradas se puede encajar en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si no contiene una copia de K_5 o $K_{3,3}$.

Este Teorema fue probado por Kuratowski en *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math.., 15 (1930), 271-283.

13.2 ***Problemas***

Problema 13.5 Es natural haber definido un $U-$map en el Capítulo 12 considerando vecindades abiertas N_y solo para los puntos $y \in f[X]$. Demuestra que el Lema 13.1 sería falso con esta definición más general de $U-$map.

Solución. Sean $\varepsilon > 0$, $f : [0, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \arctan(x)$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < \varepsilon$ y $\frac{\pi}{2} - r < \frac{\pi}{2}$. La función f es suprayectiva, así que existe x_r tal que $\arctan(x_r) = \frac{\pi}{2} - r$. Ahora definimos $g : [0, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ como

$$g(x) = \begin{cases} \arctan(x) + r & \text{si } x \leq x_r \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x_r \leq x \end{cases}$$

Sean $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2n - \frac{1}{5}, 2(n+1) + \frac{1}{5}\right)$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2n + 1 - \frac{1}{5}, 2(n+1) + \frac{1}{5}\right)$ (ver Figura 10). Claramente $U = \{A, B\}$ es una cubierta abierta finita de $[0, \infty)$.

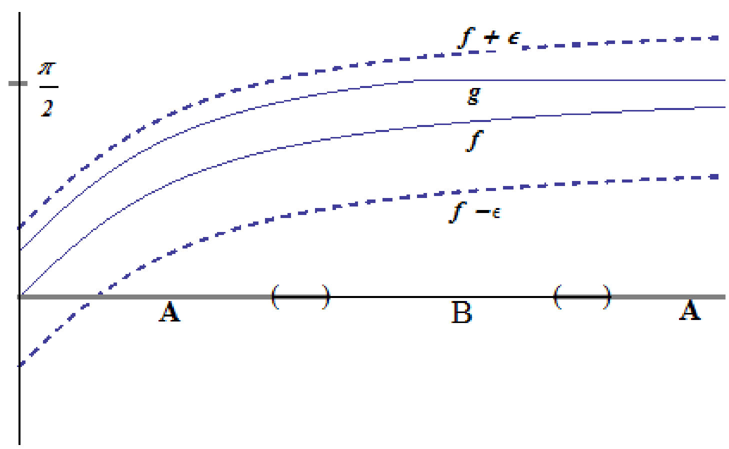

Figura 10

Como $g(x_r) = \frac{\pi}{2}$, g está bien definida, además es continua en ambos pedazos, por lo tanto g es continua. Ahora probemos que $d(f, g) < \varepsilon$.

Sea $x \geq 0$. Si $x \in [0, x_n]$, entonces

$$|g(x) - f(x)| = |\arctan(x) + r - \arctan(x)| = r < \varepsilon.$$

Si $x \in [x_r, \infty)$ entonces $|g(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, y como $x_r \leq x$, entonces

$$\arctan(x_r) = \frac{\pi}{2} - r \leq \arctan(x),$$

por lo tanto

$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \leq r < \varepsilon,$$

luego $d(f, g) < \varepsilon$.

Como f es un homeomorfismo, es un $U-$mapeo. Ahora veamos que g no es un $U-$mapeo.

Claramente $\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap \mathrm{Im}(g)$ y $g^{-1}\left[\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right] = [x_r, \infty)$. Si V es un abierto que contiene a $\frac{\pi}{2}$, tenemos que $[x_r, \infty) \subseteq g^{-1}[V]$, en consecuencia $g^{-1}[V]$ no esta contenido en A o en B, por lo tanto g no es un $U-$mapeo. ■

Problema 13.6 Sean $W = \{W_1, \ldots, W_r\}$ una cubierta abierta finita de X, $p_1, \ldots, p_r$ r vectores linealmente independientes de $\mathbf{I}^\infty$ y $\beta : X \to \mathbf{I}^\infty$ el mapeo baricéntrico inducido por los puntos $p_1, \ldots, p_r$ y W. Demostrar que existe $\tau > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ tales que $\|x - y\| < \tau$ se tiene que $\{x, y\} \subseteq W_i$ para algún i.

Solución. Veamos que si $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$ son linealmente independientes entonces $co(a_1, \ldots, a_s) \cap co(b_1, \ldots, b_t) = \emptyset$.

Supongamos que existe $x \in co(a_1, \ldots, a_s) \cap co(b_1, \ldots, b_t)$, de aquí se sigue que

$$x = \sum_{i=1}^{s} k_i a_i = \sum_{i=1}^{t} q_i b_i \text{ donde } \sum_{i=1}^{s} k_i = \sum_{i=1}^{t} q_i = 1.$$

Existe $k_l \neq 0$, por lo tanto

$$a_l = \sum_{i=1, i\neq l}^{s} \frac{-k_i}{k_l} a_i + \sum_{i=1}^{t} \frac{q_i}{k_l} b_i,$$

pero esto no puede ser ya que $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t$ son linealmente independientes, así pues, $co(a_1, \dots, a_s) \cap co(b_1, \dots, b_t) = \emptyset$.

Sean

$$A = \{co(p_{i_1}, \dots, p_{i_s}) \in \mathbf{I}^\infty : p_{i_k} \in \{p_1, \dots, p_r\}\} \text{ y } \lambda = \text{mín}\{d(H, H') : H, H' \in A y H \cap H' = \emptyset\}$$

$\lambda > 0$ ya que los elementos de A son cerrados y son a lo más un número finito. Demostremos que λ es el número que buscamos.

Sean $x, y \in X$ tales que $\|\beta(x) - \beta(y)\| < \lambda$ y $W_{i_1}, \dots, W_{i_s}$ y $V_{j_1}, \dots, V_{j_t}$ los elementos de W tales que $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{s} W_{i_k}$ y $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{t} V_{j_k}$.

Supongamos que $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{t} V_{j_k}$, entonces $\alpha_{j_k} = 0$ para todo $k = 1, \dots, s$ así que $x \notin co(p_{j_1}, \dots, p_{j_t})$ y podemos concluir que los puntos $p_{i_1}, \dots, p_{i_s}, p_{j_1}, \dots, p_{j_t}$ son diferentes y por tanto, linealmente independientes, lo cual implica que

$$co(p_{i_1}, \dots, p_{i_s}) \cap co(p_{j_1}, \dots, p_{j_t}) = \emptyset.$$

Como $\beta(x) \in co(p_{i_1}, \dots, p_{i_s})$ y $\beta(y) \in co(p_{j_1}, \dots, p_{j_t})$, por definición de λ tenemos que

$$\lambda \leq d(co(p_{i_1}, \dots, p_{i_s}), co(p_{j_1}, \dots, p_{j_t})) \leq \|\beta(x) - \beta(y)\|$$

pero esto no puede ser, por lo tanto $x \in V_{j_m}$ para algún m y $\{x, y\} \subseteq V_{j_m}$. ■

Problema 13.7 Todo espacio X se puede encajar en $\mathbf{I}^\infty$. Más aún el espacio $E(\mathbf{I}^\infty)^X$ contiene un conjunto G_δ denso en $(\mathbf{I}^\infty)^X$.

Solución. Si $\{U^k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión básica de cubiertas de X, y $f : X \to \mathbf{I}^\infty$ es un $U^k - map$ para todo k, entonces f es un encaje. Además $(\mathbf{I}^\infty)^X(U^k)$ es abierto en $(\mathbf{I}^\infty)^X$, por lo tanto si demostramos que $(\mathbf{I}^\infty)^X(U)$ es denso en $(\mathbf{I}^\infty)^X$ para todo cubierta abierta finita U de X entonces habremos probado que $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (\mathbf{I}^\infty)^X(U^k)$ es conjunto G_δ denso en $(\mathbf{I}^\infty)^X$ contenido en $E(\mathbf{I}^\infty)^X$.

Sean U cubierta abierta finita de X, $f : X \to \mathbf{I}^\infty$ y $\varepsilon > 0$. Como $\mathbf{I}^\infty$ es compacto existe G cubierta abierta de $\mathbf{I}^\infty$ tal que $mesh(G) < \frac{\varepsilon}{2}$.

El conjunto $H = \{f^{-1}[g] : g \in G\}$ es cubierta abierta finita de X. Existe L cubierta abierta finita de X tal que $L \prec U$ y $L \prec H$. Finalmente sea B cubierta abierta finita de X tal que $B \underset{bar}{\prec} L$.

Tenemos que $B \underset{bar}{\prec} L \prec U$ por lo tanto $B \underset{bar}{\prec} U$ y como $B \prec L \prec H$ entonces $B \prec H$.

Sea $B_i \in B$, $B_i \subseteq f^{-1}[g]$ para algún $g \in G$. luego, $diam(f[B_i]) \subseteq \frac{\varepsilon}{2}$ y en consecuencia $mesh(\{f[B_i] : B_i \in B\}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_i]) = \left\{x \in \mathbf{I}^\infty : d(x, f[B_i]) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Como $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_i])$ es abierto en $\mathbf{I}^\infty$ y $\dim(\mathbf{I}^\infty) = \infty$, entonces $\dim\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_i])\right) = \infty$ para todo i.

Sea $p_1 \in \mathbf{I}^\infty$ tal que $p_1 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_1])$. Tenemos que $\dim(\langle p_1 \rangle) = 1$, por lo tanto si $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_2]) \subseteq \langle p_1 \rangle$ tendríamos que $\dim\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_2])\right) \leq 1$ pero esto no puede ser. Por lo tanto existe $p_2 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_2])$ tal que $p_2 \notin \langle p_1 \rangle$.

Como $\dim \langle p_1, p_2 \rangle = 2$, existe $p_3 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_3])$ tal que $p_3 \notin \langle p_1, p_2 \rangle$.

Siguendo con este proceso existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ de $\mathbf{I}^\infty$ tal que $p_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f[B_i])$ tal que $p_i \notin \langle p_1, \ldots, p_{i-1} \rangle$ para todo i.

Por la forma en que tomamos a los puntos p_i, estos son linealmente independientes y $d(p_i, f[B_i]) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $\beta : X \to \mathbf{I}^\infty$ el mapeo baricéntrico inducido por B y los puntos p_i (esto tiene sentido ya que $\mathbf{I}^\infty$ es convexo).

Como $mesh[f(B)] < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\max\{d(p_i, f(B_i))\} < \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos que $d(f, \beta) < \varepsilon$. Así que solo nos falta probar que β es un $U-$map.

Tomamos $\tau > 0$ como en el Problema 13.6 aplicado a los puntos p_i que son linealmente independientes y sea N un subconjunto abierto de $\mathbf{I}^\infty$ tal que $diam(N) < \tau$, demostremos que $\beta^{-1}[N] \subseteq V$ para algún $V \in U$.

Sea $p \in \beta^{-1}[N]$. Tenemos que $\|\beta(p) - \beta(x)\| < \tau$ para todo $x \in B^{-1}[N]$, en consecuencia $\{x, p\} \subseteq B_i$ para algún $B_i \in B$, de donde se sigue que $\beta^{-1}[N] \subseteq st(p, B)$, así pues, como $B \underset{bar}{\prec} U$ tenemos que $\beta^{-1}[N] \subset V$ para algún $V \in U$. Por lo tanto β es un $U-$map. ■

Problema 13.8 $l_2^{\mathbb{Q}}$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sea $f : l_2^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R} \times \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_i$ donde $\mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, definida como $f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (\|x\|, x_1, x_2, \ldots)$. Probarermos que f es un encaje.

Es claro que f es inyectiva y continua. Sean $\varepsilon > 0$, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $l_2^{\mathbb{Q}}$ y $x \in l_2^{\mathbb{Q}}$ tales que $\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x)$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \|x^n\| = \|x\|$ y $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$ para todo i. Probaremos que $\lim_{n\to\infty} x^n = x$.

Como $\lim_{n\to\infty} \|x^n\| = \|x\|$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^2 = \|x\|^2$, por tanto existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $\left|\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n)^2 - \sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2\right| < \frac{\varepsilon}{64}$.

También existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=J}^{\infty}(x_i)^2 < \frac{\varepsilon}{64}$. Así que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon}{64} + \sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2$$

$$= \frac{\varepsilon}{64} + \sum_{i=1}^{J-1}(x_i)^2 + \sum_{i=J}^{\infty}(x_i)^2 < \sum_{i=1}^{J-1}(x_i)^2 + \frac{\varepsilon}{32}$$

y tenemos que

$$\sum_{i=J}^{\infty}(x_i^n)^2 < \sum_{i=1}^{J-1}((x_i)^2 - (x_i^n)^2) + \frac{\varepsilon}{32} \text{ si } n \geq N_1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty}(x_i^n)^2 = (x_i)^2$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $\sum_{i=1}^{J-1}(x_i^n)^2 - (x_i)^2 < \frac{\varepsilon}{32}$. De donde se sigue que si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ entonces $\sum_{i=J}^{\infty}(x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon}{16}$.

Sabemos que $(x_i - x_i^n)^2 \leq 4((x_i)^2 + (x_i^n)^2)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\sum_{i=J}^{\infty}(x_i - x_i^n)^2 \leq 4(\sum_{i=J}^{\infty}(x_i)^2 + \sum_{i=J}^{\infty}(x_i^n)^2)$$

$$< 4\left(\frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{64}\right) = \left(\frac{5}{16}\right)\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_3$ entonces $\sum_{i=1}^{J-1}(x_i - x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto, si $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - x_i^n)^2 < \varepsilon$, es decir, $\text{lím}_{n\to\infty} x^n = x$ y por tanto f es un encaje.

Además $\dim(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_i) = 0$, lo cual implica, por el Teorema 13.3 que $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_i$ se puede encajar en $\mathbb{R}^{2(0)+1} = \mathbb{R}$. De aquí podemos concluir que $l_2^{\mathbb{Q}}$ se puede encajar en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$.

■

Problema 13.11 Demuestra que el Teorema de la Gráfica de Kuratowski no se puede extender a superfices de dimensión 2 dando un encaje de K_5 en el toro $S^1 \times S^1$.

Solución. : Si damos los puntos p_1, p_2, p_3, p_3, p_4 y p_5 y las rectas que los unen $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, $A_{1,5}$, $A_{2,3}$, $A_{2,4}$, $A_{2,5}$, $A_{3,4}$, $A_{3,5}$ y $A_{4,5}$ como se ve en la Figura 11 en $\mathbf{I}^2$, y luego haciendo la identificación del toro que es mediante la realción $(x, y) \sim (a, b)$ si $(x, y) = (a, b)$, o $x = a$ y $|y - b| = 1$, o $y = b$ y $|a - x| = 1$, o $|x - a| = 1 = |y - b|$, es claro que K_5 se puede encajar en el toro.

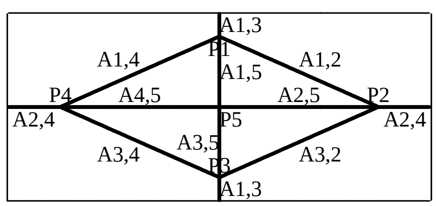

Figura 11

■

XIV. ***Espacios universales de dimenisón finita***

14.1 ***Preliminares***

Todo espacio de dimensión $\leq n$ se puede encajar en $\mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}$ y como $\dim(\mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}) = n$ tenemos que $\mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}$ es universal respecto a la clase de los espacios métricos de dim $\leq n$.

Definición Si C es una clase de espacios, un espacio Z se dice que es *universal para la clase* C si todos los elementos de C se pueden encajar en Z.

Los Teoremas 14.1 y 14.2 se demustran en [1, p. 77-79].

Teorema 14.1 Para todo $n \in \mathbb{N}$. existe un espacio universal para la clase de los espacios de dim $\leq n$. De hecho, $\mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}$ es ese espacio.

Teorema 14.2 Supongamos que $\dim(X) \leq n < \infty$. Sea

$$E = \{f \in (\mathbf{I}^{2n+1})^X : f \text{ es un encaje y } Cl_{\mathbf{I}^{2n+1}}(f[X]) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}\}.$$

Entonces E contine un conjunto G_δ denso en $(\mathbf{I}^{2n+1})^X$.

14.2 ***Problemas***

Problema 14.6 Cualquier espacio tiene una compactación de la misma dimensión que el espacio.

Solución. : Sea X tal que $\dim(X) \leq n$. Por el Teorema 14.2, existe $f : X \to \mathbf{I}^{2n+1}$ tal que $Cl_{\mathbf{I}^{2n1}}(f[X]) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}$, esto implica que $\dim\big(Cl_{\mathbf{I}^{2n1}}(f[X])\big) \leq n$, y como $Cl_{\mathbf{I}^{2n1}}(f[X]) \subseteq \mathbf{I}^{2n+1}$, $Cl_{\mathbf{I}^{2n1}}(f[X])$ es un conjunto compacto tal que X se encaja en él, por lo tanto $Cl_{\mathbf{I}^{2n1}}(f[X])$ es una compactación de X de dim $\leq n$. ■

Problema 14.7 Para todo $n \leq \infty$, existe un conjunto compacto que es universal para la clase de espacios métricos de dim $\leq n$.

Solución. Sea X espacio métrico de dim $\leq n$. Por el Teorema 14.1 tenemos que X se puede encajar en $\mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}$ Por el Problema 14.6 tenemos que $\mathbb{R}^{2n+1}_{\leq n}$ se puede encajar en un espacio compacto de dim $\leq n$, llamémoslo Y, por lo tanto X se puede encajar en Y, así que Y es un espacio compacto universal para la clase de los espacios métricos de dim $\leq n$. $\blacksquare$

Problema 14.8 Dar una caracterización de la clase de los espacios para los cuáles $\mathbb{Q}$ es universal.

Solución. Si X es un espacio numerable de dim ≤ 0, por el Teorema 14.1, sabemos que X se puede encajar en $\mathbb{R}^1_{\leq 0}$ que es el conjunto de los números irracionales, pero como es numerable y cualquier subconjunto numerable de la recta real se puede encajar en $\mathbb{Q}$, X se puede encajar en $\mathbb{Q}$.

Recíprocamente, si X se puede encajar en $\mathbb{Q}$ entonces $\dim(X) \leq 0$. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ es universal para la clase de los espacios métricos numerables de dim ≤ 0. $\blacksquare$

XV. ***Dimensión y cubiertas***

Un espacio X tiene dimensión n si y sólo si toda cubierta abierta finita de X tiene un refinamiento de orden $\leq n$.

Esta caracterización de dimensión n nos da una para espacios compactos.

15.1 ***Preliminares***

Definición (definición de dimensión cubriente): Sea n un entero ≥ -1.

1. X tiene *dimensión cubriente* $\leq n$, escrito $cd(X) \leq n$, si cualquier cubierta abierta finita de X puede ser refinada por una cubierta abierta finita de orden $\leq n$.

2. $cd(X) = n$ si y sólo si $cd(X) \leq n$ y $cd(X) \nleq n - 1$.

3. $cd(X) = \infty$ si y sólo si $cd(X) \nleq n$ para todo n.

Definición Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una doble sucesión de espacios X_i y funciones $f_i : X_{i+1} \to X_i$; el *límite inverso* de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es

$$\left\{ x \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i \circ \pi_{i+1}(x) = \pi_i(x) \right\}$$

Los Teoremas 15.1 y 15.2 se demuestran en [1, p. 81 y 82].

Teorema 15.1 $\dim(X) \leq n$ si y sólo si $cd(X) \leq n$, por lo tanto $\dim(X) = n$ si y sólo si $cd(X) = n$.

Teorema 15.2 Sea X un espacio compacto. $\dim(X) \leq n$ si y sólo si existen cubiertas abiertas finitas de X de *mesh* arbitrariamente pequeño y orden $\leq n$.

Teorema 15.3 Sea X un espacio compacto y C el conjunto de Cantor. Entonces existe $f : C \to X$ continua y suprayectiva.

Problema 15.4 Supongamos que al menos uno de los espacios X y Y es compacto. Si existe un $U-$map de X en Y para todo cubierta abierta finita U de X, entonces $\dim(X) \leq \dim(Y)$.

Solución. Es claro que el Problema se cumple si $\dim(Y) = \infty$. Supongamos que Y es compacto y $\dim(Y) = n$.

Si U cubierta abierta de X, existe $f : X \to Y$ tal que f es un $U-$mapeo, por definición, para todo $y \in Y$ existe U_y abierto en Y tal que $f^{-1}[U_y] \subseteq A$ para algún $A \in U$.

Tenemos que los conjuntos U_y forman una cubierta abierta de Y y como Y es compacto existen $y_1, \ldots, y_m$ tales que $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{y_i}$. Como $\{U_{y_i}\}_{i=1}^{m}$ es cubierta abierta finita de Y y $\dim(Y) = n$, por el Teorema 15.1 existe V refinamiento finito de $\{U_{y_i}\}_{i=1}^{m}$ tal que $ord(V) \leq n$.

Claramente $W = \{f^{-1}[B] : B \in V\}$ es cubierta abierta finita de X, además es refinamiento de U ya que para todo $B \in V$, existe y_k tal que $B \subseteq U_{y_k}$, por lo tanto $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[U_{y_k}] \subseteq A$ para algún $A \in U$, es decir, W es refinamiento de U. Si $f^{-1}[B_1], \ldots, f^{-1}[B_{n+2}]$ son $n+2$ elementos de W, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} f^{-1}[B_i] = f^{-1}\left[\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i\right] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset,$$

de donde se sigue que $ord(W) \leq n$. Por lo tanto, por el Teorema 15.1, $\dim(X) \leq \dim(Y)$.

Ahora supongamos que X es compacto y $\dim(X) = n$. Sea U cubierta abierta finita de X.

Existe $f : X \to Y$ $U-$mapeo, además se debe tener que existe V cubierta abierta de Y tal que $W = \{f^{-1}[B] : B \in V\} \prec U$.

Como X es compacto y f es un encaje, $f[X]$ es compacto, lo cual implica que existen $V_1, \ldots, V_m \in V$ tales que $f[X] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$. Si $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, entonces $f[X] \cap (Y - A) = \emptyset$ y como $f[X]$ y $Y - A$ son cerrados ajenos, por normalidad existe B abierto en Y tal que $f[X] \cap B = \emptyset$ y $Y - A \subseteq B$. Por lo tanto $Y = \bigcup_{i=1}^{m} V_i \cup B$.

Notemos que $\{V_1, \ldots, V_m, B\}$ es cubierta abierta finita de Y. Como $\dim(Y) = n$, existe Z cubierta abierta finita de Y tal que $Z \prec \{V_1, \ldots, V_m, B\}$ y $ord(Z) = n$.

Sea $P = \{f^{-1}[C] : C \in Z\}$, P es cubierta abierta finita de X. Demostremos que $P \prec U$ y $ord(P) \leq n$.

Si $C \in Z$, $C \subseteq V_i$ para algún i ó $C \subseteq B$.

Si $C \subseteq V_i$, entonces $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[V_i] \subseteq D$ para algún $D \in U$.

Si $C \subseteq B$, entonces $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[B]$ y como $B \cap f[X] = \emptyset$ tenemos que $f^{-1}[B] = \emptyset$ y en consecuencia $f^{-1}[C] = \emptyset$, así pues, $P \prec U$.

Sean $f^{-1}[C_1], \ldots, f^{-1}[C_{n+2}]$ $n+2$ elementos de P. Observémos que

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} f^{-1}[C_i] = f^{-1}\left[\bigcap_{i=1}^{n+2} C_i\right] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset,$$

por lo tanto $ord(P) \leq n$, así que $\dim(X) \leq n$ y por tanto $\dim(X) \leq \dim(Y)$. ■

Problema 15.5 Supongamos que X y Y son compactos. Si existe un $\varepsilon-$map de X en Y para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\dim(X) \leq \dim(Y)$. (una función se llama $\varepsilon-$mapeo si $diam[f^{-1}(y)] < \varepsilon$ para todo y; nota: $diam(\emptyset) = 0$).

Solución. Supongamos que $\dim(Y) = n$,

Sea U cubierta abierta finita de X. Como X es compacto, existe λ número de Lebesgue de U, para ese λ existe $f : X \to Y$ $\lambda-$map, es decir, para todo $y \in Y$ $diam[f^{-1}(y)] < \lambda$, lo cual implica $f^{-1}(y) \subseteq V$ para algún $V \in U$.

Al ser V abierto en X, $X - V$ es cerrado en X. Al ser X compacto, $X - V$ es compacto, por continuidad, $f[X - V]$ es compacto y por tanto es cerrado en Y.

Los conjuntos $\{y\}$ y $f[Y-V]$ son cerrados ajenos en Y. Por normalidad, existe W_y abierto en Y tal que $y \in W_y$ y $W_y \cap f[X-V] = \emptyset$, así que

$$f^{-1}[W_y \cap f[X-V]] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

y por tanto $f^{-1}[W_y] \cap (X-V) = \emptyset$, es decir, $f^{-1}[W_y] \subseteq V$.

Claramente $Y = \bigcup\limits_{y \in Y} W_y$, al ser Y compacto, existen $y_1, \ldots, y_m$ tales que $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{y_i}$. Llamamos $W = \{W_{y_i}\}_{i=1}^{m}$, como W es cubierta abierta finita de Y y $\dim(Y) = n$, existe Z cubierta abierta finita de Y tal que $Z \prec W$ y $ord\,(Z) = n$.

$T = \{f^{-1}[A] : A \in Z\}$ es cubierta abierta finita de X, además, si $A \in Z$ entonces $A \subseteq W_{y_i}$ para algún i y esto implica que $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[W_{y_i}] \subseteq V$ para algún $V \in U$, por lo tanto $T \prec U$.

Sean $f^{-1}[A_1], \ldots, f^{-1}[A_{n+2}] \in T$. Tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} f^{-1}[A_i] = f^{-1}\left[\bigcap_{i=1}^{n+2} A_i\right] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset,$$

esto implica que $ord\,(T) \leq n$, en consecuencia $\dim(X) \leq n = \dim(Y)$. ■

Problema 15.6 Si X es el límite inverso de espacios compactos de dim $\leq n$, entonces $\dim(X) \leq n$.

Solución. Primero demostraremos que X cerrado.

Sea $x \in Cl(X)$, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Al ser $f_i \circ \pi_{i+1}$ y π_i continuas en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_i \circ \pi_{i+1}(x_n) = f_i \circ \pi_{i+1}(x) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \pi_i(x_n) = \pi_i(x).$$

Además $f_i \circ \pi_{i+1}(x_n) = \pi_i(x_n)$ para todo $i, n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $f_i \circ \pi_{i+1}(x) = f_i(x)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por definición de límite inverso, esto implica que $x \in X$ y por tanto, X es cerrado. Además como $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto, X es compacto.

Ahora veamos que $\dim(X) \leq n$ usando la definición de cubiertas. Sea U cubierta abierta finita de X. Cada elemento de U se puede ver como unión numerable de abiertos básicos, al ser X compacto puede ser cubierto por una cantidad finita de estos abiertos básicos, llamemos a esa cubierta de básicos $V = \{V_1, \dots V_r\}$.

Claramente $V \prec U$, además podemos suponer que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_s = \langle V_1^s, \dots, V_t^s \rangle ,$$

también es claro que $f_i \circ \pi_{i+1}[V_s] = \pi_i[V_s]$ para todo $s = 1, \dots, r$ y para todo $i \in \mathbb{N}$ ya que son subconjuntos del límite inverso. Esto implica que cada V_s lo podemos ver como

$$V_s = \langle f_1[f_2[\dots[f_{t-1}[V_t^s]]\dots]], \dots, f_{t-2}[f_{t-1}[V_t^s]], f_{t-1}[V_t^s], V_t^s \rangle ,$$

al ser V cubierta abierta de X se tiene que $\{V_t^1, \dots, V_t^r\}$ es cubierta abierta finita de $\pi_t[X]$. Por tanto existe W_t cubierta abierta finita de $\pi_t[X] \subseteq X_t$ tal que $W_t \prec \{V_t^1, \dots, V_t^r\}$ y $ord(W) \leq n$ ya que $\dim(X_t) \leq n$.

Si $W_t = \{W_1, \dots, W_m\}$, tenemos que

$$W = \{\langle f_1[f_2[\dots[f_{t-1}[W_i]]\dots]], \dots, f_{t-1}[f_{t-1}[W_i]], f_{t-1}[W_i], W_i \rangle\}_{i=1}^m$$

es cubierta abierta finita de X tal que $W \prec V$ y como $ord(W_t) \leq n$ y $V \prec U$ entonces $ord(W) \leq n$ y $W \prec U$. Por lo tanto $\dim(X) \leq n$. ■

Problema 15.7 Sea X un espacio compacto, y supongamos que $0 \leq n < \infty$. Entonces $\dim(X) \geq n$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier cubierta cerrada finita de X con $mesh < \varepsilon$ tiene orden $\leq n$.

Solución. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe una cubierta cerrada finita de X con $mesh < \varepsilon$ y $ord \leq n - 1$.

Sean U cubierta abierta finita de X y λ número de Lebesgue de U.

Por hipótesis tenemos que existe $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ cubierta cerrada finita con $mesh < \lambda$ y $ord\,(C) \leq n-1$. Si $C_{i_1}, \ldots C_{i_{n+1}}$ son $n+1$ elementos de C, tenemos que $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} C_{i_k} = \emptyset$ y existen $U_1, \ldots, U_{n+1} \in U$ tales que $C_{i_k} \subseteq U_k$.

Si llamamos $B_\varepsilon[C_{i_k}] = \{x \in X : d(x, C_{i_k}) < \varepsilon\}$ a la bola de radio ε de C_{i_k} sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} B_\varepsilon[C_{i_k}] = \emptyset$, ya que si para todo $\varepsilon > 0$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} B_\varepsilon[C_{i_k}] \neq \emptyset$, tendríamos que existe $x_n \in \bigcap\limits_{k=1}^{n+1} B_{\frac{1}{n}}[C_{i_k}]$. De esta manera, al ser X compacto, tendríamos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendría una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Sea $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Tenemos que $x \in B_{\frac{1}{n}}[C_{i_k}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k = 1, \ldots, n+1$, esto implicaría que $x \in C_{i_k}$ para todo k y por lo tanto $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} C_{i_k} \neq \emptyset$. pero esto no puede ser, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} B_\varepsilon[C_{i_k}] = \emptyset$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_\varepsilon[C_{i_k}] \subseteq U_k$.

De esta manera tenemos que $\{B_\varepsilon[C_{i_k}]\}_{k=1}^{n+1} \prec U$ y tiene orden $\leq n-1$, por lo tanto $\dim(X) \leq n-1$.

Sean $\varepsilon > 0$ como en la hipótesis y U cubierta abierta finita de X. Existe λ número de Lebesgue de U, podemos suponer que $\lambda < \varepsilon$.

Sea $A = \{B_\lambda(x)\}_{x\in X}$. A es cubierta abierta de X, al ser X compacto existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_\lambda(x_i)$. Si llamamos $C_i = Cl(B_\lambda(x_i))$ tenemos que $C = \{C_i\}_{i=1}^{m}$ es cubierta cerrada finita de X con $mesh = \lambda < \varepsilon$. Por lo tanto existen $i_1, \ldots, i_{n+1}$ tales que $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} C_{i_k} \neq \emptyset$.

Como $mesh\,(C) = \lambda$, tenemos que $C_i \subseteq V$ para algún $V \in U$. Por normalidad existe W_i abierto en X tal que $C_i \subseteq W_i \subseteq V$, luego, $W = \{W_i\}_{i=1}^{m}$ es cubierta abierta finita de X y es refinamiento de U. Además

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{n+1} C_{i_k} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n+1} W_{i_k},$$

por lo tanto $ord\,(W) \geq n$. Esto implica que $\dim(X) \geq n$. ■

Problema 15.8 Supongamos que Y es un espacio compacto distinto del vacío sin puntos aislados y C es el conjuntos de Cantor. Si $\dim(Y) \leq n < \infty$, entonces existe una función $f : C \to Y$ suprayectiva y continua tal que $f^{-1}(y)$ tiene cardinalidad $\leq n+1$ para todo $y \in Y$.

Solución. Sea $S(Y^C) = \{\phi \in Y^C : \phi(C) = Y\}$.(sabemos que $S(Y^C) \neq \emptyset$). Para todo $k = 1, 2, \ldots,$ sea

$$C_k = \left\{\phi \in S(Y^C) : \text{existen } y \in Y \text{ y } c_1, \ldots c_{n+2} \in \phi^{-1}(y) \text{ tales que } |c_i - c_j| \geq \frac{1}{k} \text{ si } i \neq j\right\}$$

Demostraremos que C_k es cerrado para todo k.

Sea $f \in Cl(C_k)$. Existe $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $f_m \in C_k$ y $\lim_{m\to\infty} f_m = f$.

Por definición, para todo $m \in \mathbb{N}$ existen $y_m \in Y$ y $c_{m_1}, \ldots, c_{m_{n+2}} \in f_m^{-1}(y_m)$ tales que $\left|c_{m_i} - c_{m_{n+2}}\right| \geq \frac{1}{k}$ si $i \neq j$. Al ser Y compacto podemos suponer que la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente.

Como C es compacto, también podemos suponer que la sucesión $\{c_{m_1}\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente. La sucesión $\{c_{m_2}\}_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{c_{m_{j_2}}\}_{j=1}^{\infty}$, además, la sucesión $\{c_{m_{j_1}}\}_{j=1}^{\infty}$ también es convergente, es decir, podemos suponer que las sucesiones $\{c_{m_1}\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{c_{m_2}\}_{m=1}^{\infty}$ son convergentes.

Siguiendo con este procedimiento vemos que podemos asumir que las sucesiones $\{c_{m_i}\}_{m=1}^{\infty}$ son convergentes para todo $i = 1, \ldots, n+2$.

Sean $y = \lim_{m\to\infty} y_m$ y $c_i = \lim_{m\to\infty} c_{m_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n+2$. Tenemos que

$$|f(c_i) - y| = \left|\lim_{m\to\infty} f_m(c_{m_i}) - \lim_{m\to\infty} y_m\right| = \lim_{m\to\infty} |f_m(c_{m_i}) - y_m| = 0 \text{ para todo } i$$

Por lo tanto $c_i \in f^{-1}(y)$ y

$$|c_i - c_j| = \left|\lim_{m\to\infty} c_{m_i} - \lim_{m\to\infty} c_{m_j}\right|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left|c_{m_i} - c_{m_j}\right| \geq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \text{ si } i \neq j.$$

Por lo tanto $f \in C_k$, y de aquí se sigue que C_k es cerrado en $S(Y^C)$.

Ahora demostraremos que $S(Y^C) - C_k$ es denso en $S(Y^C)$.

Sean $f \in S(Y^C)$ y $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $U = \{U_1, \ldots, U_m\}$ cubierta abierta finita de Y tal que $mesh(U) < \varepsilon$ y $ord(U) \leq n$. Sea $V = \{V_1, \ldots, V_m\}$ cubierta abierta de Y tal que $Cl(V_i) \subseteq U_i$ para todo $i = 1 \ldots, m$.

$\{f^{-1}[U_i]\}_{i=1}^m$ es cubierta abierta finita de C, si λ es el número de Lebesgue de esta cubierta, existe $W = \{W_1, \ldots, W_t\}$ cubierta abierta finita de C tal que $ord(W) \leq 0$ y $mesh(W) < \text{mín}\left\{\lambda, \frac{1}{k}\right\}$.

$ord(W) \leq 0$ implica que los elementos de W son conjuntos abiertos, cerrados y ajenos, por lo tanto podemos suponer que $W_i \cong C$ para todo $i = 1, \ldots, t$.

Como los elementos $U_i \in U$ son diferentes y f es suprayectiva, los elementos $f^{-1}[U_i]$ también son diferentes, así que para todo $i = 1, \ldots, m$, existe $W_i \in W$ tal que $W_i \subseteq f^{-1}[U_i]$ ya que $mesh(W) < \lambda$ implica que $W \prec \{f^{-1}[U_i]\}_{i=1}^m$.

Al suponer que $W_i \cong C$, por el Teorema 15.3, tenemos que para todo $i = 1, \ldots, m$ existe $g_i : W_i \to Cl(V_i)$ continua y suprayectiva. Sean $W_{i_1}, \ldots, W_{i_s}$ los elementos de W que están contenidos en $f^{-1}[U_i]$ y son distintos de W_i.

Como U es cubierta de Y existe $x \in U_i - \bigcup\limits_{j \neq i} U_j$, claramente $x \notin \bigcup\limits_{j \neq i} Cl(V_j)$, por ser este conjunto cerrado, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap \bigcup\limits_{j \neq i} Cl(V_j) = \emptyset$. Por lo tanto $B_r(x) \subseteq Cl(V_i)$ ya que $\{Cl(V_j)\}_{j=1}^m$ es cubierta de Y.

Por hipótesis, Y no tiene puntos aislados, por tanto, existen $a_{i_1}, \ldots a_{i_s} \in B_r(x)$ puntos distintos y definimos $g_{i_l} : W_{i_l} \to Cl(V_i)$ como $g_{i_l}(x) = a_{i_l}$ para todo $l = 1, \ldots, s$.

Finalmente definimos $g : C \to Y$ como $g(x) = g_i(x)$ si $x \in W_i$. g está bien definida ya que los elementos de W son ajenos y es continua ya que cada una de las funciones g_i es continua en cada W_i cerrado, además es suprayectiva ya que para todo $i = 1, \ldots, m$ g_i es suprayectiva, por lo tanto $g \in S(Y^C)$.

Supongamos que $g \in C_k$. Sean $y \in Y$ y $c_1, \ldots, c_{n+2} \in g^{-1}(y)$ como en la definición de C_k. Si $|c_i - c_j| \geq \frac{1}{k}$ si $i \neq j$ entonces $c_i \in W_{e_i}$ para todo i y $W_{e_i} \cap W_{e_j}$ si $i \neq j$ ya que $mesh(W) < \frac{1}{k}$. Por definición tenemos que g_{e_i} va de W_{e_i} en $Cl(V_{a_i})$ para algún a_i.

Si los V_{a_i} fueran diferentes, tendríamos que $y = g(c_i) = g_{e_i}(c_i) \in Cl(V_{a_i}) \subseteq U_{a_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n+2$, por lo tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} U_{a_i} \neq \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $ord(U) \leq n$. El otro caso es que existen W_{e_i} y W_{e_j} tales que

$$g_{e_i} : W_{e_i} \to Cl(V_s) \text{ y } g_{e_j} : W_{e_i} \to Cl(V_s),$$

en este caso alguna de estas funciones es constante. Si las dos son contantes, por como definimos las constantes tendríamos que $g(c_i) \neq g(c_j)$, una contradicción. Si solo una es constante, por ejemplo g_{e_i}, tomamos otro elemento c_h, si g_{e_h} va de W_{e_h} en $Cl(V_s)$ entonces g_{e_i} y g_{e_h} serían funciones constantes con constantes diferentes, por lo tanto $g(c_i) \neq g(c_h)$, también llegaríamos a una contradicción. Si $g_{e_h} W_{e_h} \to Cl(V_p)$ con $p \neq s$ tenemos que por definición $g(c_i) \in Cl(V_s) - \bigcup\limits_{t \neq s} Cl(V_t)$, en particular, $g(c_i) \notin Cl(V_p)$, por lo tanto $g(c_i) \neq g(c_h)$. Esta contradicción nos dice que $g \notin C_k$.

Veamos que $S(Y^C) - C_k$ es denso en $S(Y^C)$. Sea $x \in C$, tenemos que $x \in W_i$ para algún i. Como $g_i : W_i \to Cl(V_j)$ para algún j, por como definimos la función, tenemos que $x \in f^{-1}[U_j]$, así que

$$g(x) = g_i(x) \in Cl(V_j) \subseteq U_j \text{ y } f(x) \in U_j.$$

$mesh(U) < \varepsilon$ implica que $diam(U_j) < \varepsilon$. Por lo tanto $d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in C$. de donde se sigue que $d(f,g) < \varepsilon$. Por lo tanto $S(Y^C) - C_k$ es denso en $S(Y^C)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (S(Y^C)) - C_k) = S(Y^C) - \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ es denso en $S(Y^C)$ ya que es intersección numerable de abiertos densos en $S(Y^C)$. Sea $f \in S(Y^C) - \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ y supongamos que existe $y \in Y$ tal que la cardinalidad de $f^{-1}(y)$ es $\geq n+2$.

Sean $c_1, \ldots, c_{n+2} \in f^{-1}(y)$ puntos diferentes y $\varepsilon = \text{mín}\{|c_i - c_j|\}_{j \neq i}$. Como $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$. Esto implica que $|c_i - c_j| \geq \frac{1}{k}$ si $i \neq j$, pero esto contradice el hecho de que $f \notin C_k$.

Por lo tanto tenemos que $f : C \twoheadrightarrow Y$ es continua y para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ tiene cardinalidad $\leq n + 1$. $\blacksquare$

XVI. ***Caracterización de dimensión con valores estables de funciones en n-celdas***

Damos una caracterizacion de dimensión en términos de funciones continuas: un espacio X tiene dimensión $\geq n$ si y sólo si existe una función $f : X \to \mathbf{I}^n$ con un valor estable. Este resultado es muy importante para los resultados de los siguientes capítulos.

16.1 ***Preliminares***

Definición Un *valor estable* de una función $f : X \to Y$ es un punto $p \in f[X]$ para el cual existe $\varepsilon > 0$ tal que y esta en la imagen de todas las funciones $g : X \to Y$ tales que $d(f, g) < \varepsilon$.

El siguinete Teorema se demuestra en [1, p. 85-89].

Teorema 16.1 $\dim(X) \geq n$ si y solo si existe una función de X en $\mathbf{I}^n$ con un valor estable.

El Teorema 16.2 se demuestra en [1, p. 89 y 90].

Teorema 16.2 $\dim(X) \leq n-1$ si y solo si para cualesquiera n pares $(C_i, C_i^{'})$ de subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de X existen n subconjuntos cerrados $B_1, \ldots, B_n$ de X tales que B_i separa a C_i y $C_i^{'}$ en X para todo i y $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$.

Lema 16.3 Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y $q \in Z$. Si q es valor estable de $g \circ f$ y f es suprayectiva entonces q es valor estable de g.

Demostración. Por hipótesis existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $h : X \to Z$ tal que $d(g \circ f, h) < \varepsilon$, se tiene que $q \in h[X]$.

Sea $j : Y \to Z$ tal que $d(g, j) < \varepsilon$. Esto implica que $d(g \circ f, j \circ f) < \varepsilon$ y en consecuencia, $q \in j \circ f[X] = j[f[X]]$. Al ser f suprayectiva tenemos que $f[X] = Y$, lo cual implica que $q \in j[Y]$. Por lo tanto q es valor estable de g. ■

16.2 ***Problemas***

Problema 16.8 Los siguientes puntos q no son valores estables de cualquier función f definida en cualquier conjunto X al conjunto Y que se indica suponiendo que q está en la imagen de f:

(a) $Y = Z \times \mathbf{I}^n$, donde Z es cualquier espacio y $q \in Z \times Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$;

(b) $Y = \mathbf{I}^\infty$ y $q \in Y$;

(c) Y es el espacio del problema 1.14 y $q = (0, y)$, donde $-1 \leq y \leq 1$;

(d) Y es cualquier espacio de dimensión cero y q es cualquier punto de acumulación de Y.

Solución. Sean $\varepsilon > 0$, y $f : X \to Y$. Veamos cada uno de los casos.

(a) Sea c un real positivo tal que $c < 1$ y $1 - c < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Tenemos que $f(x) = (h(x), f_1(x), \ldots, f_n(x))$ donde $h(x) \in Z$ y $|f_i(x)| \leq 1$ para todo i, esto implica que $|cf_i(x)| < 1$ para todo i. Por lo tanto la función g definida en X como $g(x) = (h(x), cf_1(x), \ldots, cf_n(x))$ tiene valores en Y y es claro que no toma valores de $Z \times Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ por lo tanto $q \notin g[X]$. Ahora veamos que g es $\varepsilon-$cercana a f.

Sea $x \in X$. Notemos que $\|f(x) - g(x)\| = (1 - c)\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x)} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = \varepsilon$, así que podemos concluir que $d(f, g) < \varepsilon$ y q no es valor estable de f.

(b) Tenemos que $f(x) = (f_n(x))_{n=1}^\infty$ donde $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^\infty \frac{4}{n^2} < \varepsilon^2$.

Tomamos puntos $r_n \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ tales que $r_n \neq q_n$ para todo $n \geq N$ y definimos $g : X \to Y$ como

$$g(x) = (f_1(x), \ldots, f_{N-1}(x), r_N, r_{N+1}, \ldots)$$

Como $r_n \neq q_n$ para todo $n \geq N$ es claro que $q \notin g[X]$, además

$$d(f, g) = \sqrt{\sum_{n=N}^\infty (f_n(x) - r_n)^2} < \sqrt{\sum_{n=N}^\infty \frac{4}{n^2}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto q no es valor estable de f.

(c) Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < \varepsilon$ y $h : Y \to Y$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } r \leq x \\ (r, y) & \text{si } x \leq r \end{cases}.$$

Demostraremos que $h \circ f$ es la función que buscamos..h esta bien definida ya que en ambos casos $h(r, y) = (r, y)$. También es continua ya que lo es en ambos pedazos.

Ahora demostraremos que $d(h, id) < \varepsilon$. Sea $(x, y) \in Y$.

Si $r \leq x$ entonces

$$\|h(x, y) - id(x, y)\| = \|(x, y) - (x, y)\| = 0 < \varepsilon.$$

Si $x \leq r$ entonces

$$\|h(x, y) - id(x, y)\| = \|(r, y) - (x, y)\| = |r - x| < \varepsilon$$

ya que $0 \leq x \leq r < \varepsilon$. Por lo tanto $d(h, id) < \varepsilon$. Esto implica que

$$d(h \circ f, id \circ f) = d(h \circ f, f) < \varepsilon.$$

Además, por como está definida h es claro que la primera coordenada de $h(x, y)$ es mayor o igual a r y $0 < r$. Por lo tanto $q \notin h[Y]$ y en consecuencia $q \notin h \circ f[X]$. Por lo tanto q no es valor estable de f.

(d) $\dim(Y) = 0$ implica que existe V abierto y cerrado de q tal que $diam\,(V) < \varepsilon$. Al ser este punto de acumulación de Y, existe $p \in V$ tal que $p \neq q$.

$f^{-1}[V]$ y $f^{-1}[Y - V]$ son abiertos y cerrados de X, además, $f^{-1}[V] \cap f^{-1}[Y - V] = \emptyset$ y $f^{-1}[V] \cup f^{-1}[Y - V] = X$. Definimos $g : X \to Y$, como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in f^{-1}[Y - V] \\ p & \text{si } x \in f^{-1}[V] \end{cases}$$

g es continua en X ya que es continua en los dos conjuntos y estos son abiertos y ajenos.

Si $x \in f^{-1}[Y-V]$, entonces $d(f(x), g(x)) = d(f(x), f(x)) = 0$. Si $x \in f^{-1}[V]$ entonces $f(x) \in V$ y

$$d(f(x), g(x)) = d((f(x), p) \leq diaV) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $d(f, g) < \varepsilon$.

Es claro también que $q \notin g[X]$ ya que $q \notin Y - V$. Por lo tanto q no es valor estable de f. ■

Problema 16.9 Los siguientes puntos son valores estables de la función f :

(a) $f : \mathbf{I} \twoheadrightarrow \mathbf{I}$ es cualquier función suprayectiva y $q \in (0, 1)$;

(b) $f : \mathbf{I} \twoheadrightarrow S^1$, donde $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ para todo $t \in \mathbf{I}$, y $q \in S^1 - \{(1, 0)\}$;

(c) $f : \mathbf{I} \twoheadrightarrow S^1$, donde $f(t) = (\cos(3\pi t), \sin(3\pi t))$ para todo $t \in \mathbf{I}$, y $q \in S^1$;

(d) $f : S^1 \twoheadrightarrow S^1$, donde $f(z) = z^2$ para todo $z \in S^1$, y $q \in S^1$;

(e) $f : S^1 \twoheadrightarrow S^1$ es cualquier homeomorfismo y $q \in S^1$.

Solución. (a)Sea $\varepsilon = \text{mín}\{q, 1 - q\}$ y $g : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ tal que $d(f, g) < \varepsilon$.

Existen $x, y \in [0, 1]$ tales que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, por lo tanto

$$g(x) < \varepsilon \leq q \leq 1 - \varepsilon < g(y).$$

Por conexidad de $\mathbf{I}$ y continuidad de g, tenemos que $q \in g[X]$. Por lo tanto q es valor estable de f.

(b) Supongamos $q = (-1, 0)$. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < 1$ y $g : [0, 1] \to S^1$ tal que $d(f, g) < \varepsilon$. g es de la forma $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ donde $(g_1(t))^2 + (g_2(t))^2 = 1$.

Tenemos que

$$-1 \leq g_2\left(\frac{3}{4}\right) < -1 + \varepsilon < 0 < 1 - \varepsilon < g_2\left(\frac{1}{4}\right) \leq 1$$

Por lo tanto existe $t_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ tal que $g_2(t_0) = 0$, de donde se sigue que $g_1(t_0) = \pm 1$. Pero para todo $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ se tiene que $-1 \leq \cos(2\pi t) \leq 0$, por lo tanto $g_1(t) < \varepsilon < 1$. Esto implica que $g_1(t_0) = -1$, por lo tanto $g(t_0) = (-1, 0) = q$.

Supongamos $(1,0) \neq q \neq (-1,0)$, es decir $q = (q_1, q_2)$ con $q_1 \neq \pm 1$ y $q_2 \neq 0$.

Supongamos $q_1, q_2 > 0$. Sean $0 < \varepsilon < \min\{q_1, q_2, 1 - q_2\}$ y $g : [0,1] \to S^1$ tal que $d(f,g) < \varepsilon$. Tenemos que

$$g_2(0) < \varepsilon < q_2 < 1 - \varepsilon < g_2\left(\frac{1}{4}\right) \leq 1.$$

Por lo tanto existe $t_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ tal que $g_2(t_0) = q_2$.

De lo anterior concluir que $g(t_0) = (\pm q_1, q_2)$, pero para todo $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ se tiene que $-q_1 < -\varepsilon < g_1(t) \leq 1$. Por lo tanto $g_1(t_0) \neq -q_1$ y $g(t_0) = (q_1, q_2)$.

El resto de los casos se hace manera análoga, así que podemos concluir que q es valor estable de f.

(c) Tenemos que $f|_{[0,\frac{2}{3}]} : \left[0, \frac{2}{3}\right] \to S^1$, es parecida a la función del inciso (b), por lo tanto podemos concluir que todos los puntos de $S^1 - \{(1,0)\}$ son valores estables de f. Solo falta probar que $(1,0)$ es valor estable de f:

Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $g : [0,1] \to S^1$ tal que $d(f,g) < \varepsilon$. Tenemos que $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ y

$$-1 \leq g_1\left(\frac{1}{3}\right) < -1 + \varepsilon < 0 < 1 - \varepsilon < g_1(0) \leq 1$$

Por lo tanto existe $t_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ tal que $g_1(t_0) = 0$, de donde se sigue que $g(t_0) = (0, \pm 1)$, además, para todo $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ $0 \leq \sin(3\pi t) \leq 1$, por lo tanto $-1 < -\varepsilon < g_2(t) < 1$, por lo tanto $g(t_0) = (0,1) = q$. Por lo tanto q es valor estable de f.

(d) Sea $g : \mathbf{I} \twoheadrightarrow S^1$ definida por $g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Demostraremos que q es valor estable de $f \circ g(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$.

Supongamos que $q = (q_1, q_2)$ es tal que $-1 < q_1 < 1$ y $q_2 > 0$. Sean $\varepsilon > 0$ y $h = (h_1, h_2) : \mathbf{I} \to S^1$ tales que $\varepsilon < \min\{q_2, 1 - q_1, q_1 + 1\}$ y $d(f \circ g, h) < \varepsilon$.

Notemos que para todo $t \in \mathbf{I}$, $d(\cos(4\pi t), h_1(t)) < \varepsilon$, en particular,

$$d(1, h_1(0)) = |1 - h_1(0)| = 1 - h_1(0) < \varepsilon < 1 - q_1$$

y

$$d\left(-1, h_1\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \left|-1 - h_1\left(\frac{1}{4}\right)\right| = h_1\left(\frac{1}{4}\right) + 1 < \varepsilon < q_1 + 1.$$

Así que

$$h_1\left(\frac{1}{4}\right) < q_1 < h_1(0).$$

Por conexidad de $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ y continuidad de h_1, existe $t_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ tal que $h_1(t_0) = q_1$. De manera que $h(t_0) = (q_1, q_2)$ ó $h(t_0) = (q_1, -q_2)$ ya que $q \in S^1$.

Para todo $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\sin(4\pi t) \in \mathbf{I}$. Así que $0 < \sin(4\pi t)$ y en consecuencia

$$-h_2(t) < \sin(4\pi t) - h_2(t) < \varepsilon < q_2.$$

Por lo tanto $-q_2 < h_2(t)$ para todo $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, lo cual implica que $h(t_0) = (q_1, q_2) = q$.

De manera análoga para el resto de los casos podemos demostrar que $q \in h[\mathbf{I}]$ para todo $q \in S^1$, es decir, q es valor estable de $f \circ g$.

Usando el Lema 16.3 tenemos que todos los puntos de S^1 son valores estables de f.

(e) Resolveremos el caso en el que $q = (q_1, q_2)$ es tal que $-1 < q_1 < 1$ y $0 < q_2$. El resto se resuelve de manera análoga.

Sea $C = \left\{(x, y) \in S^1 : -1 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\right\}$ El conjunto C es conexo, al ser f un homeomorfismo $f^{-1}[C]$ también es conexo.Además existen $a, b \in S^1$ tales que $f(a) = (1, 0)$ y $f(b) = (-1, 0)$. Es claro que $a, b \in f^{-1}[C]$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $h = (h_1, h_2) : S^1 \to S^1$ tales que $\varepsilon < \min\{q_2, 1-q_1, q_1+1\}$ y $d(f, h) < \varepsilon$.

Notemos que

$$\|f(a) - h(a)\| = \|(1, 0) - h(a)\| < \varepsilon < 1-q_1 \text{ y } \|f(b) - h(b)\| = \|(-1, 0) - h(b)\| < \varepsilon < q_1+1.$$

Así que

$$|1 - h_1(a)| = 1 - h_1(a) < 1 - q_1 \text{ y } |-1 - h_1(b)| = h_1(b) + 1 < q_1 + 1.$$

En consecuencia

$$h_1(b) < q_1 < h_1(a).$$

Por continuidad de h_1 y conexidad de $f^{-1}[C]$, existe $x \in f^{-1}[C]$ tal que $h_1(x) = q_1$, Esto implica que $h(x) = (q_1, q_2)$ ó $h(x) = (q_1, -q_2)$.

Para todo $y \in h^{-1}[C]$, $f_2(y) > 0$. De manera que

$$-h_2(y) < f_2(y) - h_2(y) < \varepsilon < q_2.$$

Luego $-q_2 < h_2(y)$, en particular, $-q_2 < h_2(x)$ y por tanto $h(x) = (q_1, q_2)$.

De esta manera hemos probado que q es valor estable de f. ■

Problema 16.10 Sean X y Y espacios tal que Y es compacto, $h : Y \twoheadrightarrow Y$ un homeomorfismo y $q \in Y$. Si q no es valor estable de todas las funciones $f : X \to Y$ tales que $q \in f[X]$, entonces $h(q)$ no es valor estable de todas las funciones $g : X \to Y$ tales que $h(q) \in g[X]$.

Solución. Al ser Y compacto, h es uniformemente continua, por lo tanto, para todo $x, y \in Y$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(h(x), h(y)) < \varepsilon$.

Sea $g : X \to Y$ tal que $h(q) \in g[X]$.

La función $h^{-1} \circ g$ va de X en Y y claramente $q \in h^{-1} \circ g[X]$. Por hipótesis existe $f : X \to Y$ tal que $d(h^{-1} \circ g, f) < \delta$ y $q \notin f[X]$. En consecuencia $d(g, h \circ f) < \varepsilon$ y como $q \notin f[X]$ y h es biyectiva, tenemos que $h(q) \notin h \circ f[X]$. ■

Problema 16.11 Sean X y Y espacios tal que Y es compacto y todo punto de toda función de X en Y no es valor estable. Si $Z \cong Y$, entonces todo valor de toda función de X en Z no es valor estable.

Solución. Sean $\varepsilon > 0$, $f : X \to Z$ y $q \in f[X]$. Por hipótesis existe $h : Y \to Z$ continua y biyectiva, por lo tanto $h^{-1} \circ f$ va de X en Y y $h^{-1}(q) \in h^{-1} \circ f[X]$. También sabemos que existe $g : X \to Y$ tal que $d(h^{-1} \circ f, g) < \delta$ y $h^{-1}(q) \notin g[X]$, donde δ es como en el problema anterior. Por lo tanto $d(f, g \circ h) < \varepsilon$ y $q \notin g \circ h[X]$. Por lo tanto q no es valor estable de f. ■

Problema 16.12 Sean X y Y espacios tales que Y es compacto, y sea $h : Y \to Z$ un homeomorfismo. Si q no es valor estable de $f : X \to Y$, entonces $h(q)$ no es valor estable de $h \circ f : X \to Z$.

Solución. Es inmediato del problema anterior. ∎

Problema 16.13 La propiedad "todo valor de toda función de X en Y no es estable"no es invariante topológico de Y cuando Y no es compacto. Sea C el conjunto de Cantor y Y un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$Y = ([C - \{0\}] \times [-1, 1]) \cup \{(0, 0)\}.$$

Todo punto de Y no es valor estable de ninguna función de Y en Y, pero existe $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que Y y Z son homeomorfos y existe $f : Y \to Z$ con un valor estable.

Solución. Sean $g : Y \to Y$, $\varepsilon > 0$ y $z = (a, b) \in Y$. Por definición de Y, $a \in C$. Sabemos que C es un conjunto totalmente disconexo, esto implica que existe $s > 0$ tal que $B_s(a)$ es cerrado (y abierto) en C y $s < \frac{\varepsilon}{2}$ (ver Figura 12). También sabemos que C es perfecto, luego, existe $r \in C$ tal que $|a - r| < s$. Definimos $h : Y \to Y$ (ver Figura 13), como:

$$h(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } |x - a| \geq s \\ (r, y) & \text{si } |x - a| < s \end{cases}$$

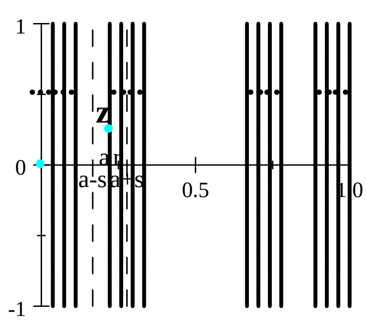

Figura 12

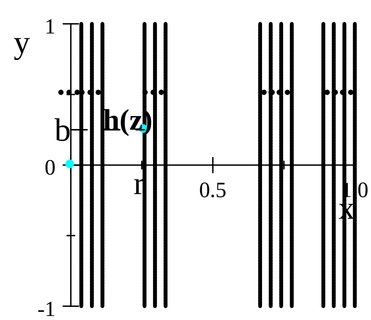

Figura 13

Por construcción, ningún punto en la imagen de h tiene a q_1 como primera coordenada, por lo tanto $q \notin h[Y]$. Además h es continua en ambas partes donde se definió y por como se tomo s, esas partes también son cerradas y ajenas. Así que h es continua.

Si $(x, y) \in Y$, entonces por definición de h tenemos que

$$d((x,y), h(x,y)) = \begin{cases} 0 \\ |x - r| \end{cases},$$

así que

$$d((x,y), h(x,y)) \leq |x - q_1| + |q_1 - r| < s + s < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $d(id, h) < \varepsilon$ y esto implica que $d(g, h \circ g) < \varepsilon$. Por lo tanto q no es valor estable de g.

Para la segunda parte del problema definimos $f : Y \to \mathbb{R}^2$ (ver Figura 14) como

$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ (x, \frac{y}{x}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

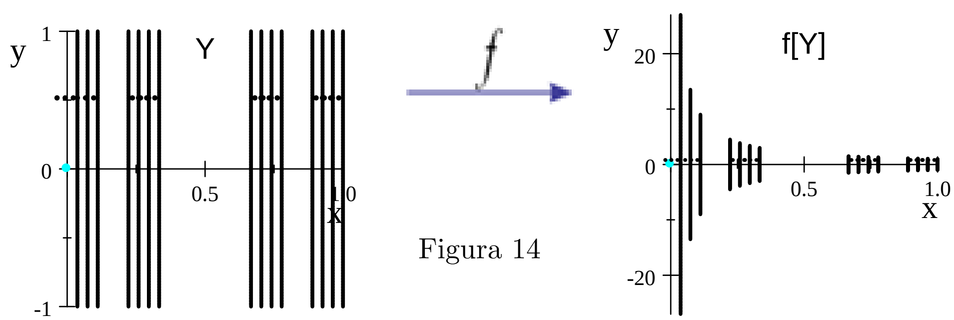

Figura 14

Si $Z = f[Y]$, entonces $f : Y \to Z$ es un homeomorfismo. Demostremos que $(0,0)$ es valor estable de f. Supongamos que no es valor estable. Por definición existen $\varepsilon > 0$ y $g : Y \to Z$ tales que $d(f, g) < \varepsilon$ y $(0,0) \notin g[Y]$.

De esta manera tenemos que si $g(0,0) = (x,y)$ entonces $x > 0$. Además, por continuidad y conexidad, las rectas cercanas a $(0,0)$ en Y bajo g van a dar a rectas cercanas a $g(0,0)$ en Y.

Esto implica que si $0 < r < x$, existe $\delta > 0$ tal que si $(w,z) \in Y$ es tal que $w < \delta$, entonces $g(w,y) \in B = \{(a,b) \in Z \text{ tales que } |a - x| < r\}$.

Claramente B es acotado, luego, existe $M > 0$ tal que $\|z\| \leq M$ para todo $z \in B$.

Sea $w \in C$ tal que $0 < w < \delta$ y $\left\|(w, \frac{1}{w})\right\| > M + \varepsilon$. Tenemos que $g(w,1) \in B$, por lo tanto

$$\|f(w,1) - g(w,1)\| = \left\|\left(w, \frac{1}{w}\right) - g(x,1)\right\| \geq \left|\left(w, \frac{1}{w}\right) - \|g(w,1)\|\right|$$

$$= \left\|\left(w, \frac{1}{w}\right)\right\| - \|g(w,1)\| > M + \varepsilon - M = \varepsilon$$

Pero esto no puede ser (ya que $d(f,g) < \varepsilon$). Por lo tanto $g(0,0) = (0,0)$, de donde se sigue que $(0,0)$ es valor estable de f. ■

Problema 16.14 Sea X un continuo no degenerado. Para todo $n \geq 2$, existe una función suprayectiva de X en $\mathbf{I}^n$ tal que ningún valor es estable.

Solución. Sean $q \in \mathbf{I}^n$ y $\varepsilon > 0$.

Como X es un continuo no degenerado tenemos que $\dim(X) \geq 1$. Por tanto existen C_1 y C_2 cerrados ajenos no vacíos de X. Definimos f en X como $f(x) = \frac{d(x,C_1)}{d(x,C_1)+d(x,C_2)}$.

La función f está bien definida ya que C_1 y C_2 son cerrados y ajenos, es continua al ser suma y composición de funciones continuas, y $f[X] \subseteq \mathbf{I}$.

Notemos que si $x \in C_1$ $f(x) = 0$ y si $x \in C_2$ $f(x) = 1$. Por conexidad de X y continuidad de f, tenemos que $f[X] = \mathbf{I}$, es decir, f es suprayectiva.

Sabemos que existe $g : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^n$ continua y suprayectiva, esto implica que $g \circ f : X \to \mathbf{I}^n$ es suprayectiva.

Como $\dim(\mathbf{I})$ =1 $\leq n - 1$, por el Teorema 16.1, existe $h : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^n$ tal que $d(h,g) < \varepsilon$ y $q \notin h[\mathbf{I}]$.

De aquí se sigue que $d(h\circ f, g\circ f) < \varepsilon$ y $q \notin h\circ f[\mathbf{I}]$, por lo tanto q no es valor estable de $g\circ f$. $\blacksquare$

XVII. ***Caracterización de dimensión con valores estables de funciones en n-esferas***

Damos una caracterización de dimensión én términos de funciones similar a la del capítulo anterior: un espacio X tiene dim $\geq n$ si y sólo si existe $f : X \to S^n$ con un valor estable.

17.1 ***Preliminares***

El siguiente Teorema se demuestra en [1, p. 93-95].

Teorema 17.1 Sea $f : X \to \mathbf{I}^n$ y $q \in f[X]$. q no es valor estable de f si y solo si para toda vecindad abierta U de q en $\mathbf{I}^n$, existe una función $g : X \to \mathbf{I}^n$ que cumple los siguientes tres enunciados:

(1) $g(x) = f(x)$ si $f(x) \notin U$;

(2) $g(x) \in U$ si $f(x) \in U$;

(3) $q \notin g[X]$.

Los Teorema 17.1 y 17.2 se demuestran en [1, p. 95-97].

Teorema 17.2 Supongamos que $\dim(X) \leq n-1$ y que Y contiene un $n-celda$ J^n. Entonces, toda función $f : X \to Y$, no tiene valores estables en $Int_Y(J^n)$.

Teorema 17.3 $\dim(X) \geq n$ si y solo si existe un función de X en S^n con un valor estable.

17.2 ***Problemas***

Problema 17.4 Sean $f : X \to Y$ y $q \in Y$. Supongamos que N es una vecindad compacta de q en Y tal que N es retracto de vecindad en Y. Si q no es valor estable de f, entonces q no es valor estable de $f|_{f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \to N$.

Solución. Sean $\varepsilon > 0$ y V abierto de Y tal que $N \subseteq V$ y $r : V \to N$ una retracción.

Por continuidad de r, para todo $x \in N$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_x$ entonces $d(r(x), r(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Claramente $N \subseteq \bigcup\limits_{x\in N} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$, por compacidad de N existen $x_1, \ldots, x_n \in N$ tales que $N \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i) = U \subseteq V$.

$r^{-1}(q)$ es un subconjunto cerrado de V y $q \in r^{-1}(q)$. Además q es punto aislado de $r^{-1}(q)$ ya que N es vecindad de q y $N \cap r^{-1}(q) = \{q\}$. Por lo tanto $r^{-1}(q) - \{q\}$ es cerrado en V, y al ser N compacto existe $a = d(N, r^{-1}(q)) > 0$.

Sean $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2}\right\}_{i=1}^{n}$, $t > 0$ tal que $B_t(N) \subseteq U$, $t < \text{mín}\{\delta, a\}$ y $g : X \to Y$ tal que $d(f, g) < t$ y $q \notin g[X]$.

Como $d(f|_{f^{-1}[N]}, g|_{f^{-1}[N]}) < t$ entonces $g[f^{-1}[N]] \subseteq B_t(N) \subseteq V$. Lo cual implica que $r \circ g|_{f^{-1}[N]}$ va de $f^{-1}[N]$ en N.

Si $x \in f^{-1}[N]$, $g(x) \in U$. Por tanto existe i tal que $g(x) \in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)$, así que $d(r(g(x)), r(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y como $d(f(x), g(x)) < \delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2}$ tenemos que $d(f(x), x_i) < \delta_{x_i}$. Así pues,

$$d(r(g(x)), r(f(x))) = d(r(g(x)), f(x)) < \varepsilon,$$

en consecuencia $d(f|_{f^{-1}[N]}, r \circ g|_{f^{-1}[N]}) < \varepsilon$.

Claramente $q \notin g[f^{-1}[N]]$, y como $g[f^{-1}[N]] \subseteq B_a(N)$ entonces $q \notin r \circ g[f^{-1}[N]]$. Por lo tanto q no es valor estable de $f|_{f^{-1}[N]}$. ■

Problema 17.5 Sea M^n una $n-$superficie. Entonces $\dim(X) \geq n$ si y solo si existe una función de X en M^n con un valor estable.

Solución. Supongamos que toda función de X en M^n no tiene valores estables. Como M^n contiene una $n - celda$, por el Teorema 17.2, $\dim(X) \leq n - 1$, lo cual implica la ida del enunciado.

Ahora supongamos que $\dim(X) \geq n$. Por el Teorema 17.2, esto implica que existen $f : X \to \mathbf{I}^n$ $q \in Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ y $r > 0$ tal que si $d(f, g) < r$ entonces q esta en la imagen de g, es decir, q es valor estable de f.

Podemos suponer que $B_r(f[X]) \subseteq Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ ya que si c es una constante positiva tal que $0 < 1-c < 1$ y $1-c < r$, entonces $d(f, cf) < 1-c < r$ y $|cf_i(x)| \leq c < 1$. En consecuencia cf es una función de X en $\mathbf{I}^n$ y $cf \in B_r(f)$.

Esto implica que existe ε_1 tal que $B_{\varepsilon_1}(cf) \subseteq B_r(f)$, es decir, toda las funciones de X en $\mathbf{I}^n$ que disten menos que ε_1 de cf tienen a q en su imagen.

Si suponemos además que $\varepsilon_1 < 1-c$ tenemos que $B_{\varepsilon_1}(cf) \subseteq Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ ya que $cf[X] \subseteq [-c,c]_{i=1}^n$, por lo tanto podemos suponer que la función con valor estable cumple que $B_r(f[X]) \subseteq Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$.

Sea $V \subseteq M^n$ tal que $V \cong \mathbf{I}^n$, sea $h : \mathbf{I}^n \to V$ el homeomorfismo. Demostremos que $h \circ f : X \to M^n$ tiene un valor estable.

Tenemos que $h \circ f : X \to V \subseteq M^n$, $h(q) \in h \circ f[X]$ y $f[X] \subseteq [-c,c]_{i=1}^n$. Por lo tanto $h \circ f[X] \subseteq h[[-c,c]_{i=1}^n]$.

Además, si $A = [-c,c]_{i=1}^n$ y $B = Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ claramente $A \cap B = \emptyset$. Lo cual implica, al ser h un homoeomorfismo, que $h[A] \cap h[B] = \emptyset$, y al ser estos compactos tenemos que $a = d(h[A].h[B]) > 0$. Como $h \circ f[X] \subseteq h[A]$ tenemos que $B_a(h \circ f) \subseteq V$.

h^{-1} es uniformemente continua, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x, y \in V$ y $d(x,y) < \varepsilon$ entonces $d(h^{-1}(x), h^{-1}(x)) < r$. Podemos suponer que $\varepsilon < a$.

Sea $z : X \to M^n$ tal que $d(h \circ f, z) < \varepsilon$, por lo anterior tenemos que $z[X] \subseteq V$ y $d(f, h^{-1} \circ z) < r$, por tanto $q \in h^{-1} \circ z[X]$, y en consecuencia $h(q) \in z[X]$. De aquí podemos concluir que $h(q)$ es valor estable de $h \circ f$. ■

Problema 17.6 Si X es un continuo no degenerado. Entonces, para todo $n \geq 2$, existe una función suprayectiva de X en S^n sin valores estables.

Solución. Sean $\varepsilon > 0$ y $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^{n+1}$ continua y suprayectiva. Como $\dim(\mathbf{I}) = 1 < n+1$, entonces f no tiene valores estables.

Sabemos que $Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ es vecindad de $\overrightarrow{0}$. Por el Teorema 17.1, existe $g : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^{n+1}$ tal que $\overrightarrow{0} \notin g[\mathbf{I}]$ y $f(x) = g(x)$ si $f(x) \in Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1})$. Por lo tanto $Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1}) \subseteq g[\mathbf{I}]$.

Como $\overrightarrow{0} \notin g[\mathbf{I}]$ tenemos que $g[\mathbf{I}]$ es retracto de $Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1})$, es decir, existe

$$r : g[\mathbf{I}] \to Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1}) \text{ tal que } r|_{Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1})} = id.$$

Notemos que la función $r \circ g : \mathbf{I} \to Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1})$ es suprayectiva, por el Teorema 17.2, $\dim(Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)) \geq 2$ ya que no tiene valores estables.

Al ser X un continuo no degenerado podemos contruir una función $h : X \to \mathbf{I}$ suprayecitva como la del Problema 16.14. Por lo tanto $r \circ g \circ h : X \to Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1})$ es suprayecitva y sin valores estables. Como $Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^{n+1}) \overset{z}{\cong} S^n$, por el Problema 16.11, tenemos que $z \circ r \circ g \circ h : X \to S^n$ es suprayectiva y sin valores estables. ■

Problema 17.8 Sea Y una figura con forma de 8; es decir, Y es la unión de dos círculos tangentes en un punto. ¿Toda función suprayectiva de un continuo en Y tiene un valor estable?.

Solución. Sean X un continuo $f : X \to Y$ suprayectiva, $t \in Y$ el punto de tangencia de los círculos y $x, y \in Y$ tales que están en círculos diferentes y son distintos de t.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_e(x)$ y $B_e(y)$ están contenidos en los respectivos círculos de x y y y $g : X \to Y$ tal que $d(f, g) < \varepsilon$. Supongamos que $t \notin g[X]$.

Al ser f suprayectiva existen a y b en X tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Como $d(f, g) < \varepsilon$, $g(a) \in B_\varepsilon(x)$ y $g(b) \in B_\varepsilon(y)$ y por tanto $g(a)$ y $g(b)$ están en diferentes círculos. Esto y el hecho de que $t \notin g[X]$ implica que $g[X]$ es disconexo, contradiciendo el hecho de que X es conexo. Por lo tanto $t \in g[X]$ y en consecuencia t es valor estable de f.

■

XVIII. ***Caracterización de dimensión extendiendo funciones a esferas***

Un espacio X tiene dim $\leq n$ si y sólo si S^n es un extensor para X, es decir, S^n es un extensor absoluto para la clase de los espacios de dim $\leq n$. Esta caracterización nos da otra en términos de funciones de Alexandroff-Hopf.

18.1 ***Preliminares***

Definición : Un espacio Y se llama *extensor* para un espacio X si para todo subconjunto cerrado C de X y toda función $f : C \to Y$ existe una función $F : X \to Y$ tal que $F|_C = f$. Un espacio que es un extensor para todo espacio se llama extensor absoluto.

Definición : Una función $f : X \to Y$ se llama *función de Alexandroff-Hopf* (o función AH) si $f|_{f^{-1}[\Delta]}$ no se puede extender a una función de X en Δ, donde $\Delta = Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$.

Los Teoremas 18.1, 18.2 y 18.3 se demuestran en [1, p. 99-102].

Teorema 18.1 : $\mathbf{I}^n, \mathbf{I}^\infty$ y $\mathbb{R}^n$ son extensores absolutos.

Teorema 18.2 : $\dim(X) \leq n$ si y solo si S^n es un extensor para X.

Teorema 18.3 : Para $n \geq 1$, $\dim(X) \geq n$ si y solo si existe una función AH de X en $\mathbf{I}^n$.

18.2 ***Problemas***

Problema 18.8 : Si $\dim(X) = n$, entonces cualquier $n-esfera$ en X es retracto de X.

Solución. Sea A una $n-esfera$ de X. Por definición, existe un homeomorfismo $h : A \to S^n$. Como A es cerrado en X y $\dim(X) = n$, por el Teorema 18.2, existe $H : X \to S^n$tal que $H|_A = h$.

Notemos que $r = h^{-1} \circ H$ va de X en A y que

$$r|_A = (h^{-1} \circ H)|_A = h^{-1} \circ H|_A = h^{-1} \circ h = id_A.$$

Esto implica que A es retracto de X. ■

Problema 18.9 : Si $f : X \to \mathbf{I}^n$ es una función AH, entonces $f[X] = \mathbf{I}^n$.

Solución. Supongamos que existe $p \in \mathbf{I}^n - f[X]$.

Si $p \in Int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$ entonces $\boldsymbol{\Delta}$ es retracto de $\mathbf{I}^n - \{p\}$. Si $p \in \Delta$, $\boldsymbol{\Delta} - \{p\}$ es retracto de $\mathbf{I}^n - \{p\}$.

En cualquier caso podemos concluir que existe $r : \mathbf{I}^n - \{p\} \to \Delta$ tal que $r|_\Delta = id|_\Delta$. Ahora bien, $r \circ f$ va de X en Δ y para todo $x \in f^{-1}[\Delta]$ se tiene que $r(f(x)) = f(x)$, es decir, $(r \circ f)|_{f^{-1}[\Delta]} = f$.

Esto implica que $f|_{f^{-1}[\Delta]}$ se puede extender a X contradiciendo el hecho de que f es AH. Por lo tanto $f[X] = \mathbf{I}^n$. ■

Problema 18.10 : Si $f : X \to \mathbf{I}^n$ es una función AH, entonces todo punto en $\mathbf{I}^n - Fr(\mathbf{I}^n)$ es valor estable de f.

Solución. Sea $p \in \mathbf{I}^n - Fr(\mathbf{I}^n)$ y supongamos que p no es valor estable de f.

Sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap Fr(\mathbf{I}^n) = \emptyset$. Por el teorema 17.1, existe $g : X \to \mathbf{I}^n$, tal que $g(x) = f(x)$ si $f(x) \notin B_\epsilon(x)$, $g[f^{-1}[B_\epsilon(x)]] \subseteq B_\epsilon(x)$ y $p \notin g[X]$. Además, Δ es retracto de $\mathbf{I}^n - \{p\}$, en consecuencia existe una retracción $r : \mathbf{I}^n - \{p\} \to \Delta$.

Tenemos que $r \circ g$ va de X en Δ y si $x \in f^{-1}[\Delta]$, $r(g(x)) = r(f(x)) = f(x)$ ya que $g|_{f^{-1}[\Delta]} = f|_{f^{-1}[\Delta]}$. Esto contradice el hecho de f es una función AH. Por lo tanto p es valor estable de f. ■

Problema 18.11 : El regreso del Problema 18.10 no es cierto en general para funciones sobre $\mathbf{I}^n$ incluso si $n = 1$.

Solución. Definimos $f : [0,2] - \{1\} \to [0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Claramente f es suprayectiva, además $f^{-1}[\{0,1\}] = \{0,2\}$.

También definimos $g : [0,2] - \{1\} \to \{0,1\}$ como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

g es continua y es una extensión de $f|_{\{0,2\}}$, es decir, f no es función AH. Ahora veamos que todos sus puntos son valor estables

Sean $q \in (0,1)$, $0 < \varepsilon$ y $h : [0,2] - \{1\} \to [0,1]$ tales que $\varepsilon < \text{mín}\{q, 1-q\}$ y $d(f,h) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $y \in (1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1)$, entonces $h(y) \in (1-\varepsilon, 1)$. Observemos que

$$0 = f(0) \leq h(0) < \varepsilon < q < 1 - \varepsilon < h(y) < 1.$$

Como h esta definida en el intervalo $[0,y]$, por continuidad existe $t \in (0,y)$, tal que $h(t) = q$. De lo anterior podemos concluir que q es valor estable de f. ■

Problema 18.12 : La función f descrita a continuación muestra que el regreso del problema 18.10 es falso incluso para funciones suprayectivas de $\mathbf{I}^2$ en $\mathbf{I}^2$.

Sea X la 2-celda mostrada en la Figura 14; espacificamente, $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, donde

$$X_1 = [-7, -\frac{11}{2}] \times [-1,1],\ X_2 = [-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ X_3 = [-\frac{9}{2}, -3] \times [-1,1]$$

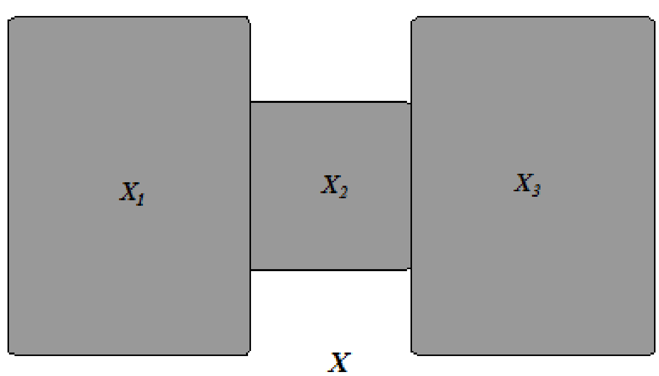

Figura 15

Sea $\mathbf{I}^2 = [-1,1] \times [-1,1]$, y definimos $f : X \to \mathbf{I}^2$ de la siguiente manera: f traslada X_1 y X_3 a la deracha 6 y 4 unidades respectivamente; f rota X_2 en $\mathbb{R}^3$ 180 grados sobre la línea $x = -5$ y traslada X_2 a la deracha cinco unidades.

Todo punto de $\mathbf{I}^2 - Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{I}^2)$ es valor estable, pero f no es una función AH.

Solución. Sea $p \in \mathbf{I}^2 - Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{I}^2)$, como se ve en la Figura 15. Es claro que p está en el interior de $f[X_i]$ para algún $i = 1, 2, 3$.

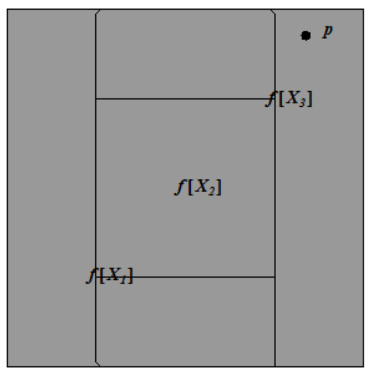

Figura 16

Supongamos que p es no valor estable. Sea $\varepsilon > 0$, por el Teorema 17.1, existe g de X en $\mathbf{I}^2$ tal que $f(x) = g(x)$ si $f(x) \notin B_\varepsilon(p)$ y $p \notin g[X]$. Podemos suponer que $B_\varepsilon(p) \subseteq f[X_i]$.

De esta manera podemos concluir que p no es valor estable de $f|_{X_i}$ usando también el Teorema 17.1. Ahora veamos que f no es AH.

La función $id : X_i \to X_i$ tiene a todos los puntos de $Int(X_i)$ como valores estables, podemos hacer algo similar a lo que hicimos en el Problema 9.20 para demostrarlo. Además $X_i \overset{h}{\cong} f[X_i]$

Si p no es valor estable de $f|_{X_i}$, por el Problema 16.12, $h^{-1}(p)$ no es valor estable de $h^{-1} \circ f|_{X_i} = id_{X_i}$. Pero esto no puede ser ya que $h^{-1}(p)$ esta en el interior de X_i. Así pues, p es valor estable de f.

Ahora veamos que $f|_{f^{-1}[\Delta]}$ se puede extender a X:

Tomamos un punto p como en la Figura 16. y para todo $x \in X$ nos fijamos en el punto p_x del conjunto $B = [-7, -3] \times \{-1, 1\} \cup \{-7, -3\} \times [-1, 1]$ tal que esta en el segmento de recta que sale de p y pasa por x

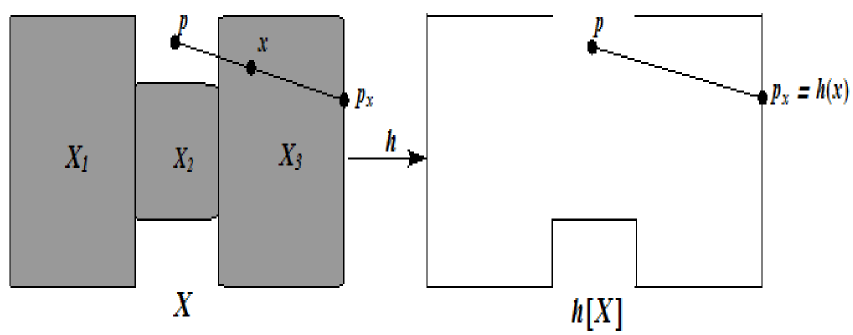

Figura 17

Definimos $h : X \to B$ como $h(x) = p_x$.

Claramente h es continua, y si definimos una función g de B a $\mathbf{\Delta}$ tal que g le hace a $[-7, -\frac{11}{2}] \times \{-1, 1\} \cup \{-7\} \times [-1, 1]$ y $[-\frac{9}{2}, -3] \times \{-1, 1\} \cup \{-3\} \times [-1, 1]$ lo mismo que f le hacía a X_1 y X_3 respectivamente y lo que le hacía a X_2 ahora se lo hace a $[-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}] \times \{-1\}$, entonces tenemos que g va de B en Δ.

Por lo tanto $r = g \circ h$ va de X en Δ y $r|_{f^{-1}[\Delta]} = f$, es decir, f no es función AH. ■

Problema 18.13 : El producto cartesiano de dos funciones AH no necesariamente es una función AH.

Demostración. Sean $f : \mathbf{I} - \{0\} \to \mathbf{I}$ dada por $f(x, y) = y$ e $id : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$.

$f|_{f^{-1}[\{0,1\}]}$ no se puede extender a $\mathbf{I} - \{0\}$ ya que este es conexo y $\{0, 1\}$ no lo es, por la misma razón $id|_{\{0,1\}}$ no se puede extender a $\mathbf{I}$.

Claramente $g = f \times id$ va de $(\mathbf{I} - \{0\}) \times \mathbf{I}$ en $\mathbf{I}^2$ y esta dada por $g(x, y, z) = (y, z)$.

Notemos que $g^{-1}[Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{I}^2)] = ((\mathbf{I} - \{0\}) \times \{0\}) \cup ((\mathbf{I} - \{0\}) \times \{1\}) \cup ([0, 1] \times \{1\} \times [0, 1])$, luego $g^{-1}[Fr_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{I}^2)]$ es retracto de $(\mathbf{I} - \{0\}) \times \mathbf{I}$, por lo tanto $g|_{f^{-1}[\Delta]}$ se puede extender a $(\mathbf{I} - \{0\}) \times \mathbf{I}$. Esto implica que g no es una función AH. ■

Problema 18.14 : $\dim(X) \geq n$ si y solo si existe una función $f : X \to \mathbf{I}^n$ tal que para toda función $g : X \to \mathbf{I}^n$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = g(p)$.

Solución. Supongamos que $\dim(X) \geq n$. Por el Teorema 18.3, existe una función AH de X en $\mathbf{I}^n$. Veamos que f es la función que buscamos.

Sea $g : X \to \mathbf{I}^n$ y supongamos que $f(p) \neq g(p)$ para todo $p \in X$.

Esto implica que el segmento de línea que parte de $g(p)$ y pasa por $f(p)$ es único e intersecta a Δ en un único punto x_p para todo $p \in X$.

Definimos $F : X \to \Delta$ como $F(p) = x_p$. La función F es continua y si $p \in f^{-1}[\Delta]$, entonces segmento de recta que parte de $g(p)$ y pasa por $f(p)$ intersecta a Δ en $f(p)$. Por lo tanto $F(p) = f(p)$, de donde se sigue que F es una extensión a X de $f|_{f^{-1}[\Delta]}$, contradiciendo el hecho de que f es una función AH.

Ahora supongamos que $\dim(X) \leq n - 1$.

Sea $f : X \to \mathbf{I}^n$. Por el Teorema 16.1, sabemos que 0 no es valor estable de f.

Sea $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{0})$ esta contenido en $\mathbf{I}^n - \Delta$ (es decir $r < 1$). Por el Teorema 17.1, existe $g : X \to \mathbf{I}^n$ tal que $\mathbf{0} \notin g[X]$ y $g(x) = f(x)$ si $f(x) \notin B_r(0)$.

Definimos $h : \mathbf{I}^n - \{\mathbf{0}\} \to S^{n-1}$ y $j : S^{n-1} \to S^{n-1} \subseteq \mathbf{I}^n$ como $h(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y $j(x) = -x$.

La función $z = j \circ h \circ g$ va de X en $\mathbf{I}^n$, ahora veamos que $z(x) \neq f(x)$ para todo $x \in X$.

Si $\|f(x)\| \neq 1$, entonces $z(x) \neq f(x)$ ya que $\|z(x)\| = 1$.

Si $\|f(x)\| = 1$, entonces $f(x) \notin B_r(\mathbf{0})$, así que $g(x) = f(x)$ y

$$z(x) = j(h(g(x))) = j(h(f(x))) = j(\frac{f(x)}{\|f(x)\|}) = j(f(x)) = -f(x).$$

Por lo tanto $z(x) \neq f(x)$. ■

XIX. ***Aplicaciones***

Los resultados de capítulos anteriores tienen varias apicaciones fuera de la teoría de la dimensión, como por ejemplo a la topología de $\mathbb{R}^n$, la dimensión de hiperespacios, teoría de continuos teoremas de punto fijo y homotopías.

19.1 ***Preliminares***

Definición *El cono sobre* X, denotado $Con(X)$ es el espacio cociente de $X\times[0,1]$ obtenido al contraer el subespacio $X \times \{1\}$ a un punto (llamado el vértice del cono).

Definición *La suspensión sobre* X, denotado por $S(X)$, es el espacio cociente de $X \times [-1,1]$ obtenido al contraer $X \times \{-1\}$ y $X \times \{1\}$ a diferentes puntos.

Definición Una *homotopía* es una función de $X \times [0,1]$ a Y.

Para una homotopía $H : X \times [0,1] \to Y$ y $t \in [0,1]$ denotamos

$$h_t(x) = h(x,t) \text{ para todo } x \in X$$

Definición Sean $f, g : X \to Y$ decimos que f *es homotópica a* g si existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h_0 = f$ y $h_1 = g$.

Es fácil probar que la relación "ser homotópica.$^{\text{es}}$ de equivalencia.

Definición Se dice que un espacio X es *contraíble* si id_X es hoomotópica a una función constante.

Definición Sea $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ la función definida por

$$\exp(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definición Un *levantamiento* de una función $f : X \to S^1$ es una función $\lambda : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ \lambda$.

Definición Un continuo se dice que es arc-like si existe un $\varepsilon - map$ $f : X \twoheadrightarrow [0,1]$.

El siguiente Teorema se prueba en [1, p. 105-107].

Teorema 19.1(Brouwer) Sea X y Y subconjuntos homeomorfos de $\mathbb{R}^n$ y sea $h : X \twoheadrightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces

$$h[int(X)] = int(Y)$$

Para cualquier espacio X, sea

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$$

con la métrica de Hausdorff H definida de la siguiente manera (para cualquier $K \in 2^X$, $N_\varepsilon(K)$ denota la $\varepsilon - vecindad$ de K en X):

$$H(A; B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{y } B \subset N_\varepsilon(A)\}$$

El siguiente Teorema se demuestra en [5, p. 18 y 19].

Teorema 19.2 Si X es compacto entonces 2^X es compacto.

El siguente Lema se demuestra en [1, p. 107-112].

Lema 19.3 Supongamos que $f : X \to \mathbf{I}^n$ es AH. Si C una $n - celda$ en $\mathbf{I}^n - \delta\mathbf{I}^n$, entonces $f|_{f^{-1}[C]}$ es AH.

El Teorema 19.4 se pruba en [1, p. 114].

Teorema 19.4 (Lukuciewski) Sea Y un espacio compacto. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\varepsilon - map$ que también es AH de Y a una $n_\varepsilon - celda$, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.

El Teorema 19.5 se demuestra en [1, p. 116 y 117].

Teorema 19.5 : Sea X un espacio compacto, y $f : X \to S^1$. f homotópica a una función constante si y sólo si f tiene un levantamiento.

El Teorema 19.6 se prueba en [1, p. 116-120].

Teorema 19.6 : Sea C un subconjunto cerrado de X, y sean $f, g : C \to S^n$ funciones homotópicas. Si f se puede extender a una función $F : X \to S^n$ entonces g se puede extender a una función $G : X \to S^n$ tal que F y G son homotópicas.

19.2 ***Problemas***

Problema 19.33 Si $\mathbf{I}^n$ es una $n - celda$ en $\mathbb{R}^n$, entonces $\delta\mathbf{I}^n = Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$. Por lo tanto, la superficie frontera de cualquier $n - celda$ es una $(n-1)-$esfera, y la superficie interior de cualquier $n - celda$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Solución. Sea $x \in \mathbf{I}^n$. Tenemos que $x \notin \delta\mathbf{I}^n$ si y sólo si existe U vecindad de x en $\mathbf{I}^n$ tal que $U \cong \mathbb{R}^n$. Por el Teorema 19.1, U es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $U \subseteq \mathbf{I}^n$. Esto es equivalente a $x \notin Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$. Por lo tanto $\delta\mathbf{I}^n = Fr_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{I}^n)$.

De aquí se sigue que $\delta\mathbf{I}^n$ es una $(n-1)-$esfera, ya que en particular si $\mathbf{I}^n$ es B^n, la frontera de B^n es S^{n-1} y $B^n - S^{n-1}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. ■

Problema 19.34 Si A y B son $n - celdas$ tales que $A \subseteq B$, entonces $A - \delta A$ es abierto en B.

Solución. Como B es una $n - celda$ existe un homeomorfismo $f : B \to \mathbf{I}^n$.

Por el Problema 19.33, tenemos que $A - \delta A$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y por el Teorema 19.1 $f[A - \delta A]$ es abierto en $\mathbf{I}^n$. Por lo tanto $A - \delta A$ es abierto en B. ■

Problema 19.35 Si M es una $n-$superficie con superficie frontera no vacía, entonces δM es una $(n-1)-$superficie sin supeficie frontera.

Solución. Si $x \in \delta M$, existe una vecindad U de x en M homeomorfa a $\mathbf{I}^n$,así que hay un homeomorfismo $f : U \to \mathbf{I}^n$. Claramente $f(x) \in \delta\mathbf{I}^n$ ya que si no x tendría una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in \delta\mathbf{I}^n$ tal que $y \in B_\varepsilon(f(x))$ y $f^{-1}(y) \notin \delta M$.

Podemos tomar un punto y que cumpla lo anterior y que además $f^{-1}(y) \in Int(U)$. Además, existe V vecindad de $f^{-1}(y)$ en M tal que V es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Estos hechos nos permiten suponer que $V \subseteq Int(U)$.

Por lo anterior, tenemos que $f[V]$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y está contenido en $\mathbf{I}^n$. Pero esto no puede ser ya que $y \in f[V] \cap \delta\mathbf{I}^n$ y al tener $f[V]$ puntos de $\delta\mathbf{I}^n$ no puede ser abierto en $\mathbb{R}^n$. Esta contradicción nos permite concluir que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap \delta\mathbf{I}^n \subseteq f[\delta M]$.

Tomemos a r de tal forma que $B_r(x) \cap \delta\mathbf{I}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Esto implica que $f^{-1}[B_r(x) \cap \delta\mathbf{I}^n]$ es una vecindad de x en δM homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$. Por lo tanto δM es una $(n-1)-$superficie sin frontera. ■

Problema 19.36 El Teorema 19.1 es cierto para cualquier $n-$superficie sin frontera.

Solución. Sean M una $n-$superficie sin frontera y $X, Y \subseteq M$ tales que existe un homeomorfismo $h : X \to Y$.

Sea $x \in Int(X)$. Existe V vecindad de $h(x)$ en M tal que $V \underset{f}{\cong} \mathbb{R}^n$. $h^{-1}[V]$ es vecindad de x en X, así que existe U abierto en M tal que $h^{-1}[V] = U \cap X$. Como $x \in Int(X) \cap U$, existe W abierto en M tal que $W \subseteq U \cap X = h^{-1}[V]$. Podemos suponer que $\mathbb{R}^n \underset{g}{\cong} W$.

Tenemos que $j = f \circ h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, así que por el Teorema 19.1, $j[\mathbb{R}^n]$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ (ya que f, g y h son homeomorfismos). Notemos que

$$j[\mathbb{R}^n] = f \circ h \circ g[\mathbb{R}^n] = f[h[W]].$$

Por lo tanto $h[W]$ es abierto en V, y como V es abierto en M, entonces $h[W]$ es abierto en M. Además, $h(x) \in h[W] \subseteq Y$, así que $h(x) \in Int(Y)$.

Usando lo anterior pero aplicado a h^{-1} tenemos que $h^{-1}[Int(Y)] \subseteq Int(X)$. De donde se sigue que $Int(Y) \subseteq h[Int(X)]$. Por lo tanto $h[Int(X)] = Int(Y)$. ■

Problema 19.37 S^n no se puede encajar en $\mathbb{R}^n$.

Solución. Supongamos que existe un encaje $f : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. $\dim(f[S^n]) = n$ implica que $Int(f[S^n]) \neq \emptyset$. Sean $x \in Int(f[S^n])$ y $z \in f[S^n]$.

Existe $y \in S^n$ tal que $f(y) = z$, además sabemos que S^n es homogeneo, por lo tanto, si $y \in S^n$ existe un homeomorfismo $h : S^n \to S^n$ tal que $h(f^{-1}(x)) = y$.

La función $g = f \circ h \circ f^{-1} : f[S^n] \to f[S^n]$ es un homeomorfismo, así que por el Teorema 19.1, $g[Int(f[S^n])] = Int(f[S^n])$. Como $x \in Int(S^n)$, entonces

$$g(x) = f(h(f^{-1}(x))) = f(y) = z \in Int(S^n).$$

Por lo tanto $f[S^n]$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, pero esto no puede ser, ya que $f[S^n]$ es compacto. Así que S^n no se puede encajar en $\mathbb{R}^n$. ■

Problema 19.38 Sea X un espacio compacto. $\dim(X) = 0$ si sólo si $\dim(2^X) = 0$.

Solución. Sean $A, B \in 2^X$ y supongamos que $\dim(X) = 0$. Como $A \neq B$, existe $x \in A - B$. Como $\dim(X) = 0$, para todo $b \in B$, existen vecindades U_b y V_b de x y b respectivamente, tales que $X = U_b | V_b$.

Claramente $B \subseteq \bigcup_{b \in B} V_b$ y al ser B compacto se tiene que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Sean

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i} \text{ y } V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$$

Los conjuntos $\langle U, X \rangle$ y $\langle V \rangle$ son abiertos en 2^X. También tenemos que $A \in \langle U, X \rangle$ y $B \in \langle V \rangle$. Ahora veamos que forman una separación de 2^X.

Sea $C \in 2^X$. Si $U \cap C \neq \emptyset$, entonces $C \in \langle U, X \rangle$. Si $U \cap C = \emptyset$, entonces

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X - U_{b_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} = V.$$

Por lo tanto $C \in \langle V \rangle$ y en consecuencia, $2^X = \langle U, X \rangle \cup \langle V \rangle$.

Supongamos que existe $y \in \langle U, X \rangle \cap \langle V \rangle$. Esto implica que existe $z \in y$ tal que $z \in U \cap V$, pero esto no puede ser, por lo tanto $\langle U, X \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset$ y $2^X = \langle U, X \rangle \,|\, \langle V \rangle$.

Hemos probado que cualesquiera dos puntos de 2^X están separados, esto implica que 2^X es totalmente disconexo. Además, al ser X compacto también 2^X es compacto. Por lo tanto $\dim(2^X) = 0$.

Ahora supongamos que $\dim(2^X) = 0$. Notemos que X se puede encajar en 2^X mediante la asignación $x \mapsto \{x\}$. Esto implica que $\dim(X) \leq \dim(2^X)$ y de aquí se sigue que $\dim(X) = 0$. ■

Problema 19.41 El cono sobre un continuo arc-like tiene la propiedad del punto fijo.

Solución. Sea X un continuo arc-like, es decir, existe una función suprayectiva $f : X \twoheadrightarrow \mathbf{I}$ tal que f es un $\varepsilon - map$.

La función f induce una función continua $\overline{f} : Con(X) \to Con(\mathbf{I})$ definida por $\overline{f}(x,t) = (f(x),t)$ y $\overline{f}(v_X) = v_{\mathbf{I}}$ donde v_X es el vértice del cono de X y $v_{\mathbf{I}}$ es el vértice del cono de $\mathbf{I}$.

Por la definición de $\overline{f}$, esta es un $\varepsilon - map$ ya que f lo es. Ahora demostremos que $\overline{f}$ es AH ($Con(\mathbf{I})$ es una $2 - celda$).

Denotemos por Δ a la frontera de $Con(\mathbf{I})$ y supongamos al contrario que existe una función $F : Con(X) \to \Delta$ tal que $F|_{\overline{f}^{-1}[\Delta]} = \overline{f}$.

Como $\Delta \underset{h}{\cong} S^1$, entonces $H = h \circ F$ va de $Con(X)$ en S^1. Sabemos que $Con(X)$ es contraíble, lo cual implica que F es homotópica a una función constante.

Por el Teorema 19.5 existe un levantamiento $\lambda : Con(X) \to \mathbb{R}$ de H, es decir, $\exp \circ \lambda = H$.

Sean $A = f^{-1}(0) \times [0,1) \cup \{v_X\}$ y $B = f^{-1}(1) \times [0,1) \cup \{v_X\}$. A y B son continuos por lo tanto $\lambda[A]$ y $\lambda[B]$ son de la forma $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente. Tenemos que $A \cap B = \{v_X\}$ y $A \cup B \subseteq \overline{f}^{-1}[\Delta]$. Por lo tanto

$$F[A] = \overline{f}[A] = (\{0\} \times [0,1)) \cup \{v_{\mathbf{I}}\}$$

$$\text{y } F[A] = \overline{f}[B] = (\{1\} \times [0,1)) \cup \{v_{\mathbf{I}}\}.$$

De aquí se sigue que $F[A] \cap F[B] = \{v_{\mathbf{I}}\}$ y por tanto

$$(\exp \circ \lambda)[A] \cap (\exp \circ \lambda)[B] = H[A] \cap H[B] = h[F[A]] \cap h[F[B]] = \{h(v_{\mathbf{I}})\}.$$

Sea $z \in \lambda[A] \cap \lambda[B]$. Por lo anterior tenemos que $\exp(z) = h(v_{\mathbf{I}})$. Además existen $z_1 \in A$ y $z_2 \in B$ tales que $\lambda(z_1) = z = \lambda(z_2)$, así que

$$H(z_1) = \exp(\lambda(z_1)) = h(v_{\mathbf{I}}) = \exp(\lambda(z_2)) = H(z_2)$$

y en consecuencia $\overline{f}(z_1) = F(z_1) = v_{\mathbf{I}} = F(z_2) = \overline{f}(z_2)$. ¨Pero el único punto en A y B cuya imágen es $v_{\mathbf{I}}$ es v_X, por lo tanto $z_1 = z_2 = v_X$ y esto implica que $z = \lambda(v_X)$ y que $\lambda[A] \cap \lambda[B] = \{\lambda(v_X)\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a < d$. De lo anterior se sigue que $b = c = \lambda(v_X)$.

Sean $x \in f^{-1}(0)$ y $y \in f^{-1}(1)$, es decir, $(x, 0) \in A$ y $(y, 0) \in B$. Por conexidad existen $\alpha \in [a, b)$ y $\beta \in (c, d]$ tales que $\lambda(x, 0) = \alpha$ y $\lambda(y, 0) = \beta$.

También tenemos que $(x, 0), (y, 0) \in X \times \{0\}$, luego $\lambda[X \times \{0\}]$ es un conexo de $\mathbb{R}$ que tiene a α y β así que $\lambda(v_X) \in \lambda[X \times \{0\}]$. Por lo tanto

$$h \circ F(v_X) = \exp(\lambda(v_X)) \in \exp[\lambda[X \times \{0\}]] = h \circ F[X \times \{0\}],$$

pero esto no puede ser ya que $F(v_X) = f(v_X) = v_{\mathbf{I}} \notin \mathbf{I} \times \{0\} = F[X \times \{0\}]$. De aquí se sigue que $\overline{f}$ es AH y por lo tanto $Con(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Problema 19.42 La suspensión sobre un continuo arc-like también tiene la propiedad del punto fijo.

Solución. Sea $f : X \twoheadrightarrow [0, 1]$ un $\varepsilon - map$.

f induce una función $\overline{f} : S(X) \to S(\mathbf{I})$ definida por $\overline{f}(x, t) = (f(x), t)$ si $t \neq -1, 1$, $\overline{f}(v_1) = w_1$ y $\overline{f}(v_{-1}) = w_{-1}$ donde v_1 y w_1 son los vértices de $S(X)$ y $S(\mathbf{I})$ respectivamente al contraer a $X \times \{1\}$ y $[0, 1] \times \{1\}$ y lo mismo para v_{-1} y w_{-1}.

Sea $h : \Delta \to S^1$ un homeomorfismo ($\Delta = Fr(\mathbf{I})$) Definimos $H = h \circ F : S(X) \to S^1$. Como $S(X)$ es contraíble, H es homotópica a una función constante.

Por el Teorema 19.5 existe una función $\lambda : S(X) \to \mathbb{R}$ tal que λ es un levantamiento de H, es decir $\exp \circ \lambda = H$.

Por continuidad de F, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, v_{-1}) < \delta$ entonces $d(F(x), w_{-1}) < 2$. Notemos que $d(w_1, w_{-1}) = 2$, de modo que para todo $x \in B_\delta(v_{-1})$, $F(x) \neq w_1$.

Por definición de suspensión, existe $t \in (-1, 1)$ tal que $X \times \{t\} \subseteq B_\delta(v_{-1})$ y por lo anterior tenemos que $F(x, t) \neq w_1$ para todo $x \in X$.

Si $A = (f^{-1}(0) \times [t, 1)) \cup \{v_1\}$ y $B = (f^{-1}(1) \times [t, 1)) \cup \{v_1\}$, usando argumentos similares a los del Problema 19.41 tenemos que

$$\lambda[A] = [a, b],\ \lambda[B] = [b, c]$$

$$\text{y } \lambda(v_1) \in \lambda[X \times \{t\}].$$

.Esto implicaría que $w_1 \in F[X \times \{t\}]$, pero esto no puede ser. Por lo tanto $\overline{f}$ es AH y en consecuencia $S(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Problema 19.43 El cono sobre un continuo no degenerado tiene dim ≥ 2.

Solución. Sea X un continuo no degenerado, esto implica que $\dim(X) \geq 1$, y en cosnsecuencia existe una función suprayectiva $f : X \twoheadrightarrow \mathbf{I}$.

Por el Problema 19.41, la función inducida $Con(f) : Con(x) \to Con(\mathbf{I})$ es AH y al ser $Con(\mathbf{I})$ una $2-celda$, el Teorema 18.3 implica que $\dim(Con(X)) \geq 2$. ■

Problema 19.44 Considere la siguiente propiedad de un espacio X :

(*) Existe un conjunto cerrado C de X y una homotopía de C a S^n que no es nulhomotópca.

Si $\dim(X) \geq n + 1$ entonces (*) ocurre; si (*) ocurre, entonces $\dim(X) \geq n$.

Solución. Supongamos que $\dim(X) \geq n+1$. Esto implica que existe una función AH $f : X \to B^{n+1}$. Sea $C = f^{-1}[S^n]$, veamos que la función $g = f|_C : C \to S^n$ no es nulhomotópica.

Supongamos que existe $c \in S^n$ y una homotopía $h : C \times [0,1] \to S^n$ tal que $h_0 = g$ y $h_1(x) = c$ para todo $x \in C$.

Por el Teorema 19.6, como h_1 se puede extender a X, entonces también g se puede extender a X, por lo tanto existe $F : X \to S^n$ tal que $F|_{f^{-1}[S^n]} = g = f$, contradiciendo el hecho de que f es AH.

Ahora supongamos que $\dim(X) \leq n-1$. Esto implica que $\dim(C) \leq n-1$ y al no ser f nulhomotópica se debe tener que $f[C] = S^n$.

Sea $g : S^n \to B^n$ definida por $g((x_i)_{i=1}^{n+1}) = (x_i)_{i=1}^{n}$. Tenemos que $h = g \circ f : C \to B^n$, por lo tanto existe $F : C \to S^{n-1}$, tal que $F|_{h^{-1}[S^{n-1}]} = h$. Definimos $H : C \times [0,1] \to S^n$ como

$$H(x,t) = \frac{t(F(x),0) + (1-t)f(x)}{\|t(F(x),0) + (1-t)f(x)\|}$$

H es continua y esta bien definida para los puntos (x,t) tales que $x \notin f^{-1}[S^{n-1} \times \{0\}]$. Si $y \in f^{-1}[S^{n-1} \times \{0\}]$, entonces $h(y) \in S^{n-1}$, por lo tanto $F(y) = h(y)$. Además $h(y) = g(f(y)) = g((y_i)_{i=1}^{n}, 0) = (y_i)_{i=1}^{n}$, es decir, $(F(y),0) = f(y)$. Esto significa que $H(y,t) = f(y)$ para todo $t \in [0,1]$, por lo tanto H esta bien definida para todo (x,t).

Tenemos que $H_0 = f$ y H_1 es nulhomotópica ya que no es suprayectiva. En consecuencia f es nulhomotópica, pero esto no puede ser. Por lo tanto $\dim(X) \geq n$. ■

Bibliografía

[1] Sam B. Nadler, JR., *Dimension Theory: An introduction with excercises.*, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[2] *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Alejandro Illanes y Sam B. Nadler, Jr., Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.