



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

## CONEXIÓN POR ARCOÍRIS EN DIGRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
JESÚS ALVA SAMOS

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

COMITE TUTOR:  
DR. CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS  
DR. EDUARDO RIVERA CAMPO  
UAM IZTAPALAPA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2017.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México, a la cual he pertenecido por casi veinte años y no sólo me ha obsequiado los conocimientos que me han forjado profesionalmente, sino también me dio la oportunidad vivir experiencias y convivir con personas que me han hecho crecer en cada aspecto de mi persona.

Debo un agradecimiento especial a mi tutor, el Dr. Juan José Montellano Ballesteros, cuya guía ha sido invaluable durante este tiempo y me ha mostrado la belleza de la combinatoria. Asimismo, quiero agradecer a los miembros de mi Comité Tutor, el Dr. César Hernández Cruz, el Dr. Eduardo Rivera Campo y el Dr. Gerónimo Uribe Bravo, quienes siempre me ofrecieron su consejo e hicieron valiosas observaciones durante mis estudios de posgrado. Además, agradezco también a los demás miembros del jurado, la Dr. Amanda Montejano Cantoral, la Dra. Mika Olsen y la Dra. Eugenia O'Reilly Reguiero, quienes gentilmente revisaron y corrigieron este trabajo.

También quiero agradecer a mi familia, por su apoyo incondicional. Primero, a Ariana, por amor y compañía, quien siempre me impulsa a romper mis límites. A Lety, *Mami*, Olivia, Arturo y Oscar, quienes han estado desde el día cero y estarán siempre. A Blanca, Larissa, Nina, Ninita, Adrián, Alán, Andrés, Enrique, Eduardo y Norberto, por su inagotable cariño y su presencia constante. A Daniela y César, quienes son siempre un ejemplo en profesional y en lo personal. A Daniel y Patricio, quienes fueron fundamentales en mi paso por el posgrado. A mis *otros* hermanos: Anibal, Cristhian,

Juan Miguel, Raúl y Ricardo, con quienes ha sido un placer crecer hombro con hombro, y a sus familias, que siempre me han recibido como uno de los suyos.

La presente tesis fue desarrollada gracias al apoyo *Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica* (PAPIIT).

Febrero 2017  
Chu

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Conexidad por arcoíris en digráficas . . . . .	7
1.2. Biorientación de ciclos y trayectorias . . . . .	15
<b>2. Familias de digráficas</b>	<b>19</b>
2.1. Digráficas circulantes . . . . .	20
2.2. Cactus . . . . .	46
2.3. Torneos y digráficas infinitas . . . . .	60
<b>3. Productos y otras operaciones</b>	<b>67</b>
3.1. Productos . . . . .	67
3.2. Operaciones de flechas . . . . .	73
3.3. Conjuntos de flechas bien portadas . . . . .	76
<b>Conclusiones y preguntas abiertas</b>	<b>81</b>
<b>Apéndice</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>
<b>Índice de símbolos</b>	<b>99</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>101</b>



# Introducción

Dentro de la teoría de gráficas, la conexidad y las coloraciones son dos temas cuyo estudio ha sido tanto profundo como diverso, por su valor combinatorio y algorítmico. Por un lado, hay varios resultados referentes a la conexidad conocidos por sus elegantes pruebas y sus implicaciones extensas. Asimismo, existen muchas formas interesantes de fortalecer el concepto de conexidad, tales como la hamiltonicidad, la  $k$ -conexidad, o bien, estableciendo cotas al diámetro. Mientras tanto, colorear gráficas, ya sean colorear vértices, aristas o ambos, es un concepto que nos puede decir diversas propiedades estructurales de la gráfica, dependiendo de las restricciones que se le impongan a las clases cromáticas. En este trabajo estudiaremos la conexidad por arcoíris, tema que conjunta ambos conceptos y que ha sido objeto de más de un centenar de artículos en los últimos años.

Conceptos relacionados con estructuras heterocromáticas o arcoíris fueron introducidos en un clásico artículo de Erdős, Simonovits, y Sós [12] en 1975 como contraparte de problemas tipo Ramsey. Desde entonces el desarrollo de tales conceptos ha ido en distintas direcciones. La conexidad por arcoíris en gráficas, presentada por Chartrand y otros autores [7] en 2008, es una de tales vertientes donde se fortalecen los requerimientos de conexidad usando arcoíris.

En el trabajo aquí presentado nos enfocaremos en estudiar la conexidad por arcoíris en digráficas, donde el problema descrito se generaliza. En el primer capítulo nos dedicaremos a presentar de manera breve algunos de los



resultados más relevantes del trabajo previo desarrollado en gráficas, para después presentar los conceptos necesarios para el estudio de la conexidad por arcoíris en digráficas, así como para obtener resultados básicos. En el segundo capítulo se calcularán los números de conexión por arcoíris en algunas familias de digráficas: cactus, circulantes y torneos. Dentro del tercer capítulo será estudiado el comportamiento de los números de conexión por arcoíris bajo diversas operaciones de digráficas.

Cabe mencionar que, a partir de los resultados incluidos en esta tesis, se ha completado la redacción de tres artículos de investigación original. El primero de ellos [1] contiene el trabajo desarrollado en la Secciones 1.1, 1.2 y 2.1, mientras que el resto del Capítulo 2 forma el segundo artículo [2] y el Capítulo 3 está incluido en el tercero [3].

# Capítulo 1

## Preliminares

El concepto de la conexión por arcoíris surge de estudiar el intercambio de información entre distintas agencias gubernamentales en los Estados Unidos. El Departamento de Seguridad Nacional de los Estados Unidos fue creado en 2003 respondiendo a las fallas descubiertas en la transferencia de información clasificada después de los ataques terroristas del 11 de septiembre de 2001. Ericksen [13] hace la siguiente observación: Una de las consecuencias imprevistas de esos ataques mortales fue el hecho de que las fuerzas de la ley y las agencias de inteligencia no se podían comunicar por sus canales habituales, desde sistemas de radio hasta bases de datos. Las tecnologías utilizadas eran entidades ajenas y el acceso compartido estaba prohibido, por lo cual no había forma en que los oficiales y los agentes pudieran comparar información entre distintas organizaciones.

Mientras la información requiere ser protegida, pues se relaciona a la seguridad nacional, deben existir procedimientos que permitan a las distintas partes acceder a ésta. Este problema doble se puede abordar mediante la asignación de rutas de transferencia de información entre las agencias que pueden tener otras agencias como intermediarios, por lo cual se requerirán un número suficientemente grande de contraseñas y *firewalls* que prohíba la entrada a intrusos, pero lo suficientemente pequeño para administrar (es

decir, lo suficiente para que uno o más caminos entre cada par de agencias no tengan contraseña repetida). Surge una pregunta inmediata: ¿Cuál es el número mínimo de contraseñas o *firewalls* necesaria que permite a uno o más caminos seguros entre cada dos agencias para que las contraseñas a lo largo de cada ruta sean distintos?

Esta situación puede modelarse dentro de la teoría de gráficas de la siguiente manera: Sea  $P$  una trayectoria de una gráfica coloreada por aristas  $G$  (la coloración puede no ser propia), entonces  $P$  es llamado un *arcoíris* si todas sus aristas tienen distintos colores. Si entre cualesquiera par de vértices existe un arcoíris, decimos que  $G$  es *conexa por arcoíris* y el mínimo número de colores necesarios para que  $G$  sea conexa por arcoíris es llamado el *número de conexión por arcoíris* de  $G$ , denotado  $rc(G)$ . Un concepto similar es el *número de conexión fuerte por arcoíris*, denotado  $src(G)$ , el cual es mínimo número de colores necesarios para entre cualesquiera par de vértices haya una trayectoria de longitud mínima (geodésica) que además sea arcoíris, en cuyo caso diremos que  $G$  es *fuertemente conexa por arcoíris*. Ambos conceptos son presentados en [7].

La relación entre los números de conexión por arcoíris y varios otros parámetros en gráficas (tal como el orden, tamaño, radio, grado mínimo) ha sido estudiado en [16, 20, 21], una compilación que contiene la gran mayoría de los resultados referentes a la conexión por arcoíris que puede consultarse es [17]. A continuación presentaremos algunos resultados donde se estudia la conexidad por arcoíris en gráficas, los cuales nos servirán de referencia en el desarrollo del presente trabajo. Cabe mencionar que, dado que nuestro objeto principal de estudio son las digráficas, omitiremos las definiciones y conceptos básicos relacionados a las gráficas (no orientadas), las cuales pueden consultarse en [5] y [10].

Dada un gráfica  $G$ , es claro que, si coloreamos cada arista de  $G$  con un color distinto, entonces  $G$  es fuertemente conexa por arcoíris, pues toda trayectoria en  $G$  es un arcoíris, en particular las geodésicas. Observemos también, que por definición, toda coloración fuerte por arcoíris es a su vez

una coloración por arcoíris. Asimismo, si consideramos dos vértices en  $G$  cuya distancia entre ellos sea igual al diámetro de  $G$ , es decir, cuya distancia sea mayor o igual a la de cualquier otra pareja de vértices, entonces toda coloración por arcoíris usa al menos tal número de colores. Por lo anterior, tenemos la siguiente relación

$$\text{diám}(G) \leq rc(G) \leq src(G).$$

Las pruebas de los siguientes resultados, donde se determinan los número de conexidad por arcoíris de ciclos, árboles, ruedas, completas y  $k$ -partitas completas, están presentes en el artículo presentado por Chartrand et. al. [7].

**Proposición 1.1** ([7]). *Sea  $G$  una gráfica no trivial con  $m$  aristas. Entonces*

- (a)  $rc(G) = 1$  si y sólo si  $src(G) = 1$  si y sólo si  $G$  es completa;
- (b)  $rc(G) = 2$  si y sólo si  $src(G) = 2$ ;
- (c)  $rc(G) = m$  si y sólo si  $src(G) = m$  si y sólo si  $G$  es un árbol.

**Proposición 1.2** ([7]). *Si  $n \geq 4$ , entonces  $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ .*

**Proposición 1.3** ([7]). *Para  $n \geq 3$ , se cumple que*

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3, \\ 2 & \text{si } 4 \leq n \leq 6, \\ 3 & \text{si } n \geq 7. \end{cases}$$

*Además,  $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$ .*

**Proposición 1.4** ([7]). *Sean  $s$  y  $t$  enteros positivos. Si  $2 \leq s \leq t$ , entonces  $rc(K_{s,t}) = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}$ . Además, si  $1 \leq s \leq t$ , entonces  $src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$ .*

**Proposición 1.5** ([7]). *Sea  $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  una gráfica  $k$ -partita completa, tal que  $k \geq 3$  y  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$  y donde  $s = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  y  $t = n_k$ . Entonces*

$$rc(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_k = 1, \\ 2 & \text{si } n_k = 2 \text{ y } s > t, \\ \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\} & \text{si } s \leq t, \end{cases}$$

y además

$$src(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_k = 1, \\ 2 & \text{si } n_k = 2 \text{ y } s > t, \\ \lceil \sqrt{s/t} \rceil & \text{si } s \leq t. \end{cases}$$

En el artículo antes mencionado, también se observa que, para cualesquiera gráficas  $G$  y  $H$ , tales que  $H$  es subgráfica generadora de  $G$ , toda coloración por arcoíris de  $H$  puede extenderse a una coloración por arcoíris de  $G$ , al asignar cualquier color de los ya existentes en  $H$  a las aristas restantes en  $G$ . Los autores de dicho trabajo conjeturaron que tal comportamiento era cierto para las coloraciones fuertes por arcoíris, pero Chakraborty, Fischer, Matsliah y Yuster presentaron en [9] un contraejemplo para tal enunciado. Dicho contraejemplo se muestra en la Figura 1.1, donde primero se consideran dos copias ajenas de  $K_{1,6}$  con centros  $u$  y  $v$  y hojas  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$  y  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  respectivamente. La gráfica  $H$  se obtiene al identificar los vértices  $u_i$  y  $v_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , y la gráfica  $G$  se obtiene a partir de  $H$  añadiendo la arista  $uv$ . Es fácil verificar que  $src(H) = 6$  y  $src(G) = 7$ . Lo anterior puede resumirse en los siguientes teoremas.

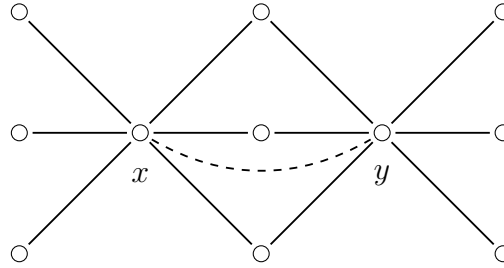
**Teorema 1.6** ([7]). *Sean  $G$  una gráfica y  $H$  cualquier subgráfica generadora de  $G$ , entonces  $rc(G) \leq rc(H)$ .*

**Teorema 1.7** ([9]). *Existen una gráfica  $G$  y una subgráfica generadora  $H$  de  $G$  tales que  $src(G) > src(H)$ .*

Naturalmente, como en el caso de cualquier parámetro en gráficas, se ha estudiado de forma extensa el comportamiento de la conexidad por arcoíris en los productos clásicos y en otras operaciones. A continuación incluimos sólo algunos resultados.

**Teorema 1.8** ([18]). *Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una familia de gráficas conexas con  $k \geq 2$ , entonces  $rc(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k) \leq \sum_{i=1}^k rc(G_i)$ .*

**Corolario 1.9** ([18]). *Sea  $G_1, G_2, \dots, G_k$  una familia de gráficas conexas con  $k \geq 2$ , entonces  $rc(G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \dots \boxtimes G_k) \leq \sum_{i=1}^k rc(G_i)$ .*

Figura 1.1: Las gráficas  $G$  y  $H$  del Teorema 1.7.

**Teorema 1.10** ([18]). Sean  $G$  y  $H$  gráficas donde  $G$  es conexa.

- (i) Si  $H$  es completa, entonces  $rc(G[H]) \leq rc(G)$ . En particular, si  $diám(G) = rc(G)$ , entonces  $rc(G[H]) = rc(G)$ .
- (ii) Si  $H$  no es completa, entonces  $rc(G[H]) \leq rc(G) + 1$ . En particular, si  $diám(G) = rc(G)$ , entonces  $rc(G[H]) = 2$  cuando  $G$  es completa y  $rc(G) \leq rc(G[H]) \leq rc(G) + 1$  cuando  $G$  no es completa.

**Teorema 1.11** ([18]). Sea  $G$  conexa. Si  $G'$  se obtiene a partir de  $G$  al subdividir una arista, entonces  $rc(G) \leq rc(G') \leq rc(G) + 1$ .

## 1.1. Conexidad por arcoíris en digráficas

Todas las digráficas consideradas en este trabajo son simples (es decir, sin flechas paralelas y sin lazos) y finitas, salvo en la Sección 2.3 donde estudiaremos una familia de gráficas y digráficas infinitas. Las siguientes definiciones pueden consultarse en [4], [5] y [10].

Sea una digráfica  $D$ , se denota  $V(D)$  al conjunto de vértices de  $D$  y definimos al *orden* de  $D$  como la cardinalidad del conjunto  $V(D)$ , asimismo, el *tamaño* de  $D$  es el número de elementos en  $A(D)$ , donde  $A(D)$  es el conjunto de flechas de  $D$ . Si  $A(D) = \emptyset$  se dice que  $D$  es *vacía*. Dada una flecha  $a = (u, v)$ , se dice que  $v$  es un *exvecino* de  $u$ , y que  $u$  es un *invecino* de  $v$ , o

bien, los vértices  $u$  y  $v$  son llamados la *cola* y la *cabeza* de  $a$  respectivamente. Si  $u \in V(D)$ , entonces  $N_D^+(u)$  se define como el conjunto formado por todos los exvecinos de  $u$  y, análogamente,  $N_D^-(u)$  es el conjunto formado por todos los invecinos de  $u$ , dichos conjuntos reciben el nombre de la *exvecindad* de  $u$  y la *invecindad* de  $u$  respectivamente. La cardinalidad de  $N_D^+(u)$  es el *exgrado* de  $u$ , denotado por  $d_D^+(u)$ . Asimismo,  $d_D^-(u)$  denota a la cardinalidad de  $N_D^-(u)$ , llamado el *ingrado* de  $u$ . Cuando no haya confusión posible, se omitirá al subíndice  $D$ . También, para simplificar la notación, se denotará por  $uv$  a la flecha  $(u, v)$ .

Una digráfica  $H$  es una *subdigráfica* de una digráfica  $D$  si  $V(H) \subseteq V(D)$ ,  $A(H) \subseteq A(D)$  y toda flecha en  $A(H)$  tiene ambos extremos en  $V(H)$ . Si  $V(H) = V(D)$ , se dice que  $H$  es una *subdigráfica generadora* de  $D$ . Sea  $X \subseteq V(D)$ , la *subdigráfica inducida* por  $X$ , denotada  $D[X]$ , es la digráfica tal que  $V(D[X]) = X$  y donde toda flecha de  $D$  cuyos extremos están en  $X$  está contenida en  $D[X]$ . Una *trayectoria* en  $D$  es una sucesión  $P = u_0u_2 \dots u_k$  de vértices distintos en  $D$  tal que  $u_iu_{i+1} \in A(D)$  para  $i = 0, \dots, k$ ; además, se dice que  $P$  es una trayectoria desde  $u_0$  hacia  $u_k$ , o bien, una  $u_0u_k$ -trayectoria. Un *ciclo dirigido* en  $D$  es una sucesión  $C = u_0u_2 \dots u_k$  de vértices distintos  $u_0, \dots, u_{k-1}$  tales que  $u_0 = u_k$  y  $u_iu_{i+1} \in A(D)$  para cada  $0 \leq i \leq k - 1$ . La *longitud* de una trayectoria o un ciclo es el número de flechas que contiene. Cuando consideremos a una trayectoria o ciclo de orden  $n$  como digráficas por sí mismas los denotaremos por  $\overrightarrow{P}_n$  y  $\overrightarrow{C}_n$  respectivamente.

Si  $u$  y  $v$  son vértices de  $D$ , la *distancia* desde  $u$  hacia  $v$ , denotada  $d(u, v)$ , es la longitud de una  $uv$ -trayectoria de longitud mínima, si no hay ninguna  $uv$ -trayectoria se define  $d(u, v) = \infty$ , el *diámetro* de  $D$  es  $\text{diám}(D) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(D)\}$ . Si una  $uv$ -trayectoria tiene longitud  $d(u, v)$  es llamada una *uv-geodésica*. Una digráfica es llamada *fuerte* (o fuertemente conexa) si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  existen una  $uv$ -trayectoria y una  $vu$ -trayectoria.

Dada  $D$  una digráfica no vacía, cada función  $\rho : A(D) \rightarrow N$  con  $N \subseteq \mathbb{N}$  es llamada una *coloración de las flechas* de  $D$ . Además, si  $D$  es una digráfica

coloreada por aristas, se dice que una  $uv$ -trayectoria es un  $uv$ -arcoíris si todas sus flechas tienen distintos colores. Cuando todo par de vértices está conectado por al menos un arcoíris, se dice que  $D$  es *conexa por arcoíris*, y tal coloración es llamada una *coloración por arcoíris* sobre  $D$ . Si  $|N| = k$  decimos  $\rho$  es una  $k$ -coloración por arcoíris. El número de conexidad por arcoíris de  $D$ , denotado por  $rc(D)$ , es el mínimo entero  $k$  tal que  $D$  tiene una  $k$ -coloración por arcoíris.

Sea  $\rho$  una  $k$ -coloración por arcoíris de una digráfica  $D$ , un  $uv$ -arcoíris de longitud  $d(u, v)$  es llamado  $uv$ -arcoíris geodésico. Si cada par de vértices está conectado por al menos un arcoíris geodésico, diremos que  $D$  es *fuertemente conexa por arcoíris* y que  $\rho$  es una  $k$ -coloración fuerte por arcoíris. El número de conexidad fuerte por arcoíris de  $D$ , denotado por  $src(D)$ , es el mínimo  $k$  tal que  $D$  tiene una  $k$ -coloración fuerte por arcoíris.

Nótese que toda coloración por arcoíris usa al menos  $diám(D)$  colores distintos, ya que toda trayectoria entre dos vértices cuya distancia es máxima usa al menos tal número de flechas. Por otro lado, si tenemos que  $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$  podemos considerar la coloración tal que a cada flecha  $v_i v_j$  de  $D$  le asignamos el color  $i$ , es claro que obtenemos una coloración fuerte por arcoíris, pues cualquier trayectoria (en particular toda geodésica) no repite vértices y por tanto no repite colores. Más aún, es claro que toda coloración fuerte por arcoíris es, en particular, una coloración por arcoíris. De las observaciones anteriores, obtenemos lo siguiente:

$$diám(D) \leq rc(D) \leq src(D) \leq |V(D)|. \quad (1.1)$$

Sean  $u$  y  $v$  un par de vértices distintos de  $D$ , si las flechas  $uv$  y  $vu$  pertenecen a  $D$ , entonces se dice que  $uv$  y  $vu$  son flechas *simétricas*. Cuando todas las flechas de  $D$  son simétricas se dice que  $D$  es una digráfica *simétrica*. Además, una digráfica es llamada una digráfica *completa*, si para cada par de vértices distintos  $u$  y  $v$ , las flechas  $uv$  y  $vu$  están en la digráfica. Dado que, salvo isomorfismo, hay una única digráfica completa, ésta será denotada por  $\overleftrightarrow{K}_n$ .



**Teorema 1.12.** *Sea  $D$  una digráfica no vacía, entonces:*

- (a)  $src(D) = 1$  si y sólo si  $rc(D) = 1$  si y sólo si  $D$  es completa;
- (b)  $rc(D) = 2$  si y sólo si  $src(D) = 2$ .

**Demostración.** Primero veremos (a). Si  $src(D) = 1$ , entonces  $rc(D) \leq 1$  por (1). Dado que  $D$  es no vacía tenemos que  $rc(D) \geq 1$ , por lo cual  $rc(D) = 1$ . Ahora, si  $rc(D) = 1$ , entonces  $diám(D) \leq 1$ . Nótese que  $diám(D) \geq 1$  pues  $D$  es no vacía, por tanto  $diám(D) = 1$ , lo que implica que  $D$  es completa. Por otro lado, si  $D$  es completa, entonces cada 1-coloración de  $D$  es una coloración fuerte por arcoíris, dado que cada geodésica tiene longitud 1. Así  $src(D) = 1$ .

Ahora probaremos (b). Supongamos que  $rc(D) = 2$  y observemos que  $src(D) \geq 2$ , por (1,1). Dado que  $D$  tiene una 2-coloración por arcoíris, entonces para cada par de vértices distintos  $u$  y  $v$  de  $D$  tal que  $d(u, v) \neq 1$  existe un  $uv$ -arcoíris de longitud 2, el cual es también una geodésica, por tanto  $src(D) = 2$ . Por otro lado, si  $src(D) = 2$ , entonces  $rc(D) \leq 2$  por (1.1). Además, se sigue de (a) que  $D$  no es completa, por tanto  $rc(D) \geq 2$ . Así, concluimos que  $rc(D) = 2$ . ■

**Teorema 1.13.** *Para cada  $n \geq 3$ , se cumple que  $rc(\overrightarrow{C}_n) = src(\overrightarrow{C}_n) = n$ .*

**Demostración.** Se ha establecido previamente que

$$n - 1 = diám(\overrightarrow{C}_n) \leq rc(\overrightarrow{C}_n) \leq src(\overrightarrow{C}_n) \leq n.$$

Ahora, sea  $\rho$  cualquier  $(n - 1)$ -coloración de  $\overrightarrow{C}_n$ , entonces hay dos flechas con el mismo color, digamos  $v_i v_{i+1}$  y  $v_j v_{j+1}$  donde  $0 \leq i < j \leq n - 1$ . Por tanto  $v_i \overrightarrow{C}_n v_{j+1}$  tiene dos flechas del mismo color, pero  $v_i \overrightarrow{C}_n v_{j+1}$  es la única  $v_i v_{j+1}$ -trayectoria en  $\overrightarrow{C}_n$ , entonces  $\rho$  no es una coloración por arcoíris de  $\overrightarrow{C}_n$ . De esta forma concluimos que  $rc(\overrightarrow{C}_n) = src(\overrightarrow{C}_n) = n$ . ■

Una digráfica  $D$  es llamada  $k$ -partita completa si existe una  $k$ -partición  $V_1, V_2, \dots, V_k$  de los vértices de  $D$  tal que  $uv \in A(D)$  si y sólo si  $u$  y  $v$  pertenecen a elementos distintos de la partición. Dado que hay una única digráfica  $k$ -partita completa salvo isomorfismo, ésta será denotada por  $\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , donde  $|V_i| = n_i$  para cada  $1 \leq i \leq k$ .

**Teorema 1.14.** *Sea  $k \geq 2$ , si  $\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  es una digráfica  $k$ -partita completa donde  $n_i \geq 2$  para algún  $i$ , entonces  $rc(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = src(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 2$ .*

**Demostración.** Dado que  $n_i \geq 2$  para algún  $i$ , entonces  $\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  no es una digráfica completa, por lo cual  $rc(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \geq 2$ . Ahora, consideremos a  $A_1, A_2, \dots, A_k$  la  $k$ -partición de  $V(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k})$  en conjuntos independientes, y definamos la coloración  $\rho$  tal que, dada  $uv \in A(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k})$  con  $u \in A_i$  y  $v \in A_j$ , entonces  $\rho(uv) = 1$  si  $i < j$ , y  $\rho(uv) = 2$  si  $i > j$ . Notemos que  $diám(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 2$ , lo que implica que toda geodésica es un arcoíris, es decir,  $src(\overleftrightarrow{K}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \leq 2$ . ■

Claramente, como en el caso de las gráficas, si  $H$  es una subdigráfica fuerte generadora de  $D$ , entonces  $rc(D) \leq rc(H)$ , ya que cualquier coloración por arcoíris de  $H$  puede extenderse a una coloración por arcoíris de  $D$  al asignar a las flechas en  $A(D) \setminus A(H)$  cualquiera de los colores presentes en la coloración de  $H$ . Esto no se cumple al considerar el número de conexidad fuerte por arcoíris, pues  $src(\overleftrightarrow{K}_n) = 1$  y toda subdigráfica fuerte generadora propia  $H$  de  $\overleftrightarrow{K}_n$  cumple que  $src(H) \geq 2$ , y por otro lado tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.15.** *Para cualquier  $k \geq 7$ , existen una digráfica  $D$  y una subdigráfica generadora  $H$  de  $D$  tales que  $k = src(D) > src(H)$ .*

**Demostración.** Sea  $\overleftrightarrow{K}_{2,3}$  con bipartición  $A = \{a_1, a_2\}$  y  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  y consideremos a  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4$  y  $v_4$  nuevos vértices distintos, tales que  $C_i = u_i v_i w_i u_i$  con  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  son ciclos tales que  $w_j = a_1$  para  $1 \leq j \leq 3$  y  $w_4 = a_2$ . Definamos las digráficas  $H = \overleftrightarrow{K}_{2,3} \cup (\bigcup_{i=1}^4 C_i)$ , y

$D = H + a_1a_2$  (Figura 1.2), veremos que  $src(D) = 7$  y  $src(H) = 6$ . Sea  $\rho$  una 6-coloración fuerte por arcoíris de  $D$ , y notemos que la  $u_iv_j$ -geodésica es única (para cualesquiera  $i$  y  $j$ ) y contiene las flechas  $u_iv_i$  y  $u_jv_j$ , por lo cual no hay dos flechas del tipo  $u_iv_i$  con el mismo color, sin pérdida de generalidad sea  $\rho(u_iv_i) = i$ . Por el mismo argumento,  $P_i = u_iv_ia_1a_2u_4v_4$  es la única  $u_iv_4$ -geodésica para  $i \leq 3$ , y  $a_1a_2, a_2u_4 \in A(P_i)$ , lo que implica que tales flechas tienen colores 5 y 6 respectivamente. Si asignamos cualquiera de esos seis colores a la flecha  $v_1a_1$ , entonces no hay  $u_1v_j$ -arcoíris para algún  $j \geq 2$ , contradiciendo la elección de  $\rho$ . Por tanto  $src(D) \geq 7$ . Por otro lado, notemos que  $diám(H) = 6$  y además es fácil verificar que las coloraciones en la Figura 1.2 son coloraciones fuertes por arcoíris.

Además, podemos considerar  $k - 7$  ciclos de longitud 3,  $C_i = a_1u_iv_ia_1$  con  $5 \leq i \leq k - 3$ , donde  $u_5, \dots, u_{k-3}, v_5, \dots, v_{k-3}$  son vértices nuevos y distintos. Al unir todos esos ciclos a  $H$  para formar la digráfica  $H'$ , podemos usar argumentos anteriores y notar que las nuevas flechas que no inciden en  $a_1$  deben tener asignado un color único y además podemos asignar el color de  $v_1a_1$  a las nuevas flechas que entran a  $a_1$  y el color de  $a_1u_1$  a las nuevas flechas que salen de  $a_1$ . Si consideramos a  $D' = H' + a_1a_2$ , a partir de lo anterior es fácil de verificar que  $src(D') = k$  y  $src(H') = k - 1$ . ■

Si consideramos una digráfica  $D$  y una subdigráfica fuerte generadora  $H$  de  $D$  con  $src(H) = 2$ , entonces por (1.1) y el Teorema 1.12, tenemos que  $src(D) \leq rc(D) \leq rc(H) \leq src(H) = 2$ , es decir,  $D$  es completa o  $src(D) = 2$ , es decir, el Teorema 1.15 no se cumple para  $k = 3$ . Dado que las digráficas en la Figura 1.2 son hasta el momento el ejemplo más pequeño, respecto a sus número de conexidad fuerte por arcoíris, que cumplen el Teorema 1.15, es natural que se formule el siguiente problema.

**Problema 1.** *Determinar si existen  $D$  digráfica y  $H$  subdigráfica fuerte generadora tales que  $6 \geq src(D) > src(H) \geq 3$ .*

A pesar del Teorema 1.15, existen condiciones que nos permiten relacionar los números de conexidad fuerte por arcoíris entre digráfica y subdigráficas inducidas.

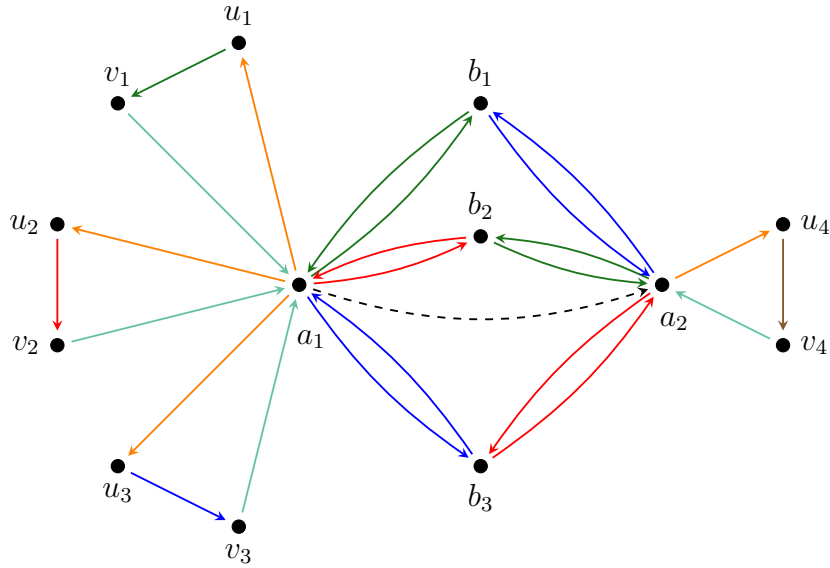


Figura 1.2: Las digráficas  $D$  y  $H$  del Teorema 1.15.

**Proposición 1.16.** *Sea  $H$  una subdigráfica inducida fuerte de  $D$ . Si toda geodésica en  $D$  con extremos en  $V(H)$  está contenida en  $H$ , entonces  $src(H) \leq src(D)$ .*

**Demostración.** Sea  $\rho$  una coloración por arcoíris sobre  $D$  y sea  $\rho \upharpoonright_H$  la restricción de  $\rho$  en  $H$ . Sean  $u, v \in V(H)$  y  $P$  una  $uv$ -geodésica arcoíris en  $D$  bajo  $\rho$ , dado que toda geodésica con extremos en  $V(H)$  está contenida en  $H$ , en particular  $P \subseteq H$ . Por tanto  $P$  es una  $uv$ -geodésica arcoíris en  $H$  bajo  $\rho \upharpoonright_H$ . Concluimos que  $src(H) \leq src(D)$ . ■

Dada una gráfica  $G$  y su biorientación  $\overleftrightarrow{G}$ , para cualquier coloración (fuerte) por arcoíris de  $G$  se puede definir una coloración (fuerte) por arcoíris de  $\overleftrightarrow{G}$  tal que si la coloración de  $G$  asigna el color  $i$  a una arista, entonces la nueva coloración de  $\overleftrightarrow{G}$  asigna ese color a las flechas respectivas en  $\overleftrightarrow{G}$ . Por tanto,  $rc(\overleftrightarrow{G}) \leq rc(G)$  y  $src(\overleftrightarrow{G}) \leq src(G)$ .

Análogamente, cualquier coloración por arcoíris en  $\vec{G}$  induce una coloración por arcoíris sobre  $G$ , donde cada arista en  $G$  tiene el color de la flecha correspondiente. De esta forma, a cualquier arcoíris en  $\vec{G}$  le corresponde un arcoíris en  $G$ . Así  $rc(G) \leq rc(\vec{G})$ .

En el caso de la primer cota, podemos observar que es justa ya que (como veremos en la Sección 1.2)  $rc(C_n) = src(C_n) = rc(\overleftrightarrow{C}_n) = src(\overleftrightarrow{C}_n)$ , aunque en algunos casos, la diferencia puede ser tan grande como queramos, observemos que  $rc(K_{1,n}) = n$ , pero  $rc(\overleftrightarrow{K}_{1,n}) = 2$ . La desigualdad estricta también se cumple en el caso de la rueda  $W_n$  y de las gráficas completas  $k$ -partitas.

Para terminar esta sección veremos un par de resultados generales. En el primero veremos una condición que nos permite asegurar cuando un subconjunto de flechas de la digráfica es heterocromático, mientras que el segundo establece una relación entre el número de conexidad por arcoíris y el número de cubierta por vértices.

**Proposición 1.17.** *Sea  $D$  una digráfica conexa por arcoíris y sea  $A$  un conjunto de flechas tal que para cada par de flechas distintas  $uv$  y  $xy$  en  $A$ , se cumpla que  $d^+(u) = 1 = d^-(y)$  con  $u \neq y$ , o  $d^+(x) = 1 = d^-(v)$  con  $x \neq v$ . Entonces cada flecha en  $A$  tiene distinto color.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $d^+(u) = 1 = d^-(y)$ , entonces cada  $uy$ -trayectoria debe contener las flechas  $uv$  y  $xy$ , en particular cada  $uy$ -arcoíris en  $D$  contiene ambas flechas, por tanto los colores de  $uv$  y  $xy$  son distintos. ■

Una *cubierta* en  $D$  es un subconjunto  $X$  de vértices de  $D$  tal que cada flecha tiene al menos uno de sus extremos en  $X$ . El *número de cubierta* de  $D$ , denotado  $\beta(D)$ , es la cardinalidad de una cubierta mínima de  $D$ .

**Teorema 1.18.** *Sea  $D$  cualquier digráfica, entonces  $rc(D) \leq 2\beta(D)$ .*

**Demostración.** Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_\beta\}$  una cubierta mínima de  $D$ . Para cada flecha  $a \in A(D)$  definamos  $f(a) = \min\{i \mid x_i \text{ es cabeza ó es cola de } a\}$ . Consideremos una  $2\beta$ -coloración  $\rho$  tal que  $\rho(a) = f(a)$  si  $x_{f(a)}$  es la cola de  $a$  o  $\rho(a) = \beta + f(a)$  si  $x_{f(a)}$  es la cabeza de  $a$ . Nótese que dos flechas  $a$  y  $b$  tienen el mismo color sólo si  $f(a) = f(b)$  y ambas flechas salen de  $x_{f(a)}$  o ambas entran en  $x_{f(a)}$ . Por tanto, cada trayectoria es un arcoíris. ■

## 1.2. Biorientación de ciclos y trayectorias

Se denota por  $\overleftrightarrow{C}_n$  al *ciclo biorientado* de orden  $n$ , es decir, la digráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(\overleftrightarrow{C}_n) = \{v_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$  y tal que  $v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i \in A(\overleftrightarrow{C}_n)$  para cada  $0 \leq i \leq n-1$ , donde  $i+1$  es considerado (mod  $n$ ). En esta sección, denotaremos por  $\overrightarrow{C}_n$  y  $\overleftarrow{C}_n$  a los ciclos  $v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$  y  $v_0 v_{n-1} \dots v_1 v_0$  respectivamente, los cuales son subdigráficas de  $\overleftrightarrow{C}_n$ . También, la digráfica  $\overleftrightarrow{P}_n$  se define como la *trayectoria biorientada* de orden  $n$ , donde  $V(\overleftrightarrow{P}_n) = V(\overleftrightarrow{C}_n)$  y  $A(\overleftrightarrow{P}_n) = A(\overleftrightarrow{C}_n) \setminus \{v_0 v_{n-1}, v_{n-1} v_0\}$ .

**Proposición 1.19.** Para  $n \geq 1$ , se cumple que  $rc(\overleftrightarrow{P}_n) = src(\overleftrightarrow{P}_n) = n - 1$ .

**Demostración.** Claramente, el resultado se sigue a partir de observar que  $n - 1 = \text{diám}(\overleftrightarrow{P}_n) \leq rc(\overleftrightarrow{P}_n) \leq src(\overleftrightarrow{P}_n) \leq src(P_n) = n - 1$ . ■

**Teorema 1.20.** Para cada  $n \geq 4$ , se cumple  $rc(\overleftrightarrow{C}_n) = src(\overleftrightarrow{C}_n) = \lceil n/2 \rceil$ .

**Demostración.** Primero notemos que  $src(\overleftrightarrow{C}_n) \leq src(C_n) = \lceil n/2 \rceil$  para  $n \geq 4$ . Además, si  $n$  es par  $\lceil n/2 \rceil = \text{diám}(\overleftrightarrow{C}_n) \leq rc(\overleftrightarrow{C}_n)$ . Por otro lado, sea  $n = 2k + 1$  con  $k \geq 2$  y sea  $\rho$  una  $k$ -coloración por arcoíris de  $\overleftrightarrow{C}_n$ , dado que  $P_i = v_i v_{i+1} \dots v_{i+k}$  es la única  $v_i v_{i+k}$ -trayectoria de longitud a lo más  $k$  en  $\overleftrightarrow{C}_n$  para cada  $0 \leq i \leq n-1$ , entonces los  $k$  colores de  $\rho$  ocurren en cada diámetro de  $\overleftrightarrow{C}_n$ . Más aún, como  $n/k > 2$ , hay un color que aparece al menos tres veces en  $\overleftrightarrow{C}_n$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_0 v_1, v_s v_{s+1}$  y

$v_t v_{t+1}$  tienen el mismo color, donde  $0 < s < t \leq n - 1$ . Dado que  $P_0$  y  $P_{k+2}$  son arcoíris que contienen a  $v_0 v_1$ , entonces  $k \leq s < t \leq k + 1$ , es decir,  $k = s$  y  $k + 1 = t$ . Esto implica que el diámetro  $P_2$  tiene dos flechas del mismo color, contradiciendo la elección de  $\rho$ . Por tanto  $\lceil n/2 \rceil \leq rc(\overleftrightarrow{C}_n)$ . Así en cualquier caso  $rc(\overleftrightarrow{C}_n) = src(\overleftrightarrow{C}_n) = \lceil n/2 \rceil$ . ■

Sea  $\mathcal{H}$  el conjunto conformado por las subdigráficas fuertes generadoras de  $\overleftrightarrow{C}_n$  distintas de  $\overleftrightarrow{P}_n$ . A continuación, establereceremos los números de conexión por arcoíris de los elementos de  $\mathcal{H}$ .

**Proposición 1.21.** *Si  $H \in \mathcal{H}$ , entonces  $\overrightarrow{C}_n \subseteq H$  o  $\overleftarrow{C}_n \subseteq H$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $\overrightarrow{C}_n \not\subseteq H$  y  $\overleftarrow{C}_n \not\subseteq H$ , entonces existen  $0 \leq i, j \leq n - 1$  tales que  $v_i v_{i+1}, v_{j+1} v_j \notin A(H)$ . Dado que  $H$  es fuerte tenemos que  $v_{j+1} \overrightarrow{C}_n v_j$  y  $v_i \overleftarrow{C}_n v_{i+1}$  están contenidos en  $H$ . Si  $i = j + 1$ , entonces  $H \cong \overleftrightarrow{P}_n$ , contradiciendo que  $H \in \mathcal{H}$ . Por otro lado, si  $i \neq j + 1$ , entonces no hay  $v_i v_j$ -trayectorias en  $H$ , contradiciendo que  $H$  es fuerte. Por tanto  $\overrightarrow{C}_n \subseteq H$  o  $\overleftarrow{C}_n \subseteq H$ . ■

Se sigue de la proposición anterior, que podemos caracterizar a los elementos de  $\mathcal{H}$  por el número de flechas asimétricas que contienen. Además, es claro que cualquier elemento de  $\mathcal{H}$  que contiene a  $\overleftarrow{C}_n$  es isomorfo a algún elemento de  $\mathcal{H}$  que contiene a  $\overrightarrow{C}_n$ .

**Teorema 1.22.** *Si  $H \in \mathcal{H}$  tiene  $k$  flechas asimétricas, entonces*

$$rc(H) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } k \leq 2; \\ n & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

**Demostración.** Sea  $H \in \mathcal{H}$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $\overrightarrow{C}_n \subseteq H$ . Nótese que  $n - 1 = \text{diám}(H) \leq rc(H)$  para cada  $k \geq 1$ . Si  $k = 1$ , el resultado se sigue pues  $\overleftrightarrow{P}_n \subseteq H$ . Cuando  $k = 2$ , supongamos que  $v_{n-1} v_0$  y  $v_i v_{i+1}$ , donde  $i \neq n - 1$ , son las flechas asimétricas de  $H$ , es decir,  $H = \overrightarrow{C}_n \cup v_i \overleftarrow{C}_n v_0 \cup v_{n-1} \overleftarrow{C}_n v_{i+1}$ . Ahora, sea  $\rho$  la  $(n - 1)$ -coloración (simétrica) tal que  $v_j v_{j+1}, v_{j+1} v_j \in \rho^{-1}(j)$  para cada  $j \neq i, n - 1$ , y  $v_{n-1} v_0, v_i v_{i+1} \in \rho^{-1}(i)$ . Sean  $v_r, v_s \in V(H)$  con  $r < s$ . Tenemos dos casos.

1. Si  $0 \leq r, s \leq i$  o  $i + 1 \leq r, s \leq n - 1$ , entonces  $v_r \overrightarrow{C_n} v_s$  y  $v_s \overleftarrow{C_n} v_r$  son arcoíris.
2. Si  $0 \leq r \leq i$  y  $i + 1 \leq s \leq n - 1$ , entonces  $v_r \overrightarrow{C_n} v_s$  y  $v_s \overrightarrow{C_n} v_r$  son arcoíris.

Lo cual implica que  $rc(H) = n - 1$ . Ahora, supongamos que  $H$  tiene al menos tres flechas asimétricas, digamos  $v_{n-1}v_0$ ,  $v_i v_{i+1}$  y  $v_j v_{j+1}$  con  $i < j < n - 1$ , y sea  $\rho$  una  $(n - 1)$ -coloración por arcoíris. Nótemos que  $v_0 \overrightarrow{C_n} v_{n-1}$  es la única  $v_0 v_{n-1}$ -trayectoria, por tanto es un arcoíris. En particular  $v_i v_{i+1}$  y  $v_j v_{j+1}$  tienen distintos colores, digamos  $r$  y  $s$  respectivamente. Análogamente,  $v_{i+1} \overrightarrow{C_n} v_i$  es un arcoíris que comparte  $n - 2$  flechas y colores con  $v_0 \overrightarrow{C_n} v_{n-1}$ , esto implica que  $v_{n-1}v_0$  tiene color  $r$ . El mismo argumento aplicado a  $v_{j+1} \overrightarrow{C_n} v_j$  obtenemos que  $v_{n-1}v_0$  tiene color  $s$ , contradiciendo que  $r \neq s$ , entonces  $rc(H) \geq n$ . Además,  $rc(H) \leq n$ , dado que  $\overrightarrow{C_n} \subseteq H$ . Por tanto  $rc(H) = n$ . ■

**Teorema 1.23.** *Sea  $H \in \mathcal{H}$  con  $k$  flechas asimétricas. Si  $k = 1$ , o bien,  $k = 2$  donde  $v_i v_{i+1}$  y  $v_j v_{j+1}$  son las flechas asimétricas contenidas en  $H$  tales que  $\lfloor n/2 \rfloor \leq |i - j| \leq \lceil n/2 \rceil$ , entonces  $src(H) = n - 1$ . En cualquier otro caso se cumple que  $src(H) = n$ .*

**Demostración.** Si  $k = 1$ , sea  $u_0 u_1$  la flecha asimétrica de  $H$ . Consideremos la coloración  $\rho$  tal que asignamos el color  $i$  a las flechas  $u_i u_{i+1}$  y  $u_{i+1} u_i$  para cada  $1 \leq i \leq n - 1$  y el color  $\lfloor n/2 \rfloor$  a  $u_0 u_1$ . Si  $k = 2$  y  $H$  tiene flechas asimétricas  $v_i v_{i+1}$  y  $v_j v_{j+1}$  tales que  $\lfloor n/2 \rfloor \leq |i - j| \leq \lceil n/2 \rceil$ , entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $i = 0$  y  $j = \lfloor n/2 \rfloor$ . Definamos la coloración  $\rho$  tal que asignamos el color  $i$  a las flechas  $u_i u_{i+1}$  y  $u_{i+1} u_i$  para cada  $i \neq 0, \lfloor n/2 \rfloor$  y el color 0 a  $u_0 u_1$  y  $u_{\lfloor n/2 \rfloor} u_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ . En cualquiera de los dos casos anteriores es fácil de verificar que  $\rho$  es una coloración fuerte por arcoíris sobre  $H$ . Ésto junto al teorema anterior implica que  $src(H) = n - 1$ . Además, también por el teorema anterior, tenemos que si  $k \geq 3$ , entonces  $src(H) = n$ .



Así, sólo falta considerar  $H$  con dos flecha asimétricas  $u_0u_1$  y  $u_iu_{i+1}$  donde  $i \neq \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil$ . Supongamos que  $H$  es conexa fuertemente por arcoíris. Dado que  $P = v_1 \overrightarrow{C_n} v_0$  y  $P' = v_{i+1} \overrightarrow{C_n} v_i$  son ambas las únicas geodésicas entre sus extremos, vemos que  $n - 1 \geq \text{src}(H)$ . Observemos que cualquier otra flecha del tipo  $u_ju_{j+i}$  pertenece a ambas geodésicas  $P$  y  $P'$ . Si suponemos que  $\text{src}(H) = n - 1$ , entonces  $u_0u_1$  y  $u_iu_{i+1}$  deben tener un mismo color. Pero  $i \neq \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil$ , lo cual implica que  $v_0 \overrightarrow{C_n} v_{i+1}$  o  $v_i \overrightarrow{C_n} v_1$  es una geodésica en  $H$  que no es arcoíris. Por tanto  $\text{src}(H) = n$ . ■

# Capítulo 2

## Familias de digráficas

Debido a que la naturaleza de la conexidad por arcoíris implica que las digráficas a estudiar deben ser fuertemente conexas, digráficas que se pueden construir a partir de ciclos, o bien, donde estructuras cíclicas ocurren frecuentemente son el objeto natural a observar. En este capítulo estudiaremos el comportamiento de los números de conexión por arcoíris en ciertas familias de digráficas que poseen tales propiedades.

Primero será el turno de las digráficas circulantes, para las cuales podremos establecer sus números de conexidad por arcoíris dependiendo del valor que tomen los parámetros que las definen. Para los cactus determinaremos las cotas inferior y superior para sus números de conexidad por arcoíris, para luego caracterizar las subfamilias de cactus que alcanzan dichas cotas, además de presentar una forma de construir un cactus de un orden dado y cuyo número de conexidad por arcoíris sea cualquier valor que elijamos en el intervalo definido por las cotas mencionadas. Posteriormente, mostraremos la existencia de torneos de orden arbitrariamente grande y número de conexidad por arcoíris igual a 2, completando la construcción presentada en [11], donde fue hecho un estudio similar al que se presenta aquí para cactus. Finalmente, inspirándonos en la gráfica de Rado (conocida también como la gráfica universal o aleatoria), construiremos una familia de digráficas infinitas cuyo número de conexidad por arcoíris igual a 2.

## 2.1. Digráficas circulantes

Dado un número entero  $n \geq 2$  y un conjunto  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ , la *digráfica circulante*  $C_n(S)$  es definida de forma que

$$V(C_n(S)) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\} \quad y$$

$$A(C_n(S)) = \{v_i v_j \mid j - i \equiv s, s \in S\},$$

los elementos de  $S$  son llamados *generadores*, y una flecha  $v_i v_j$  donde  $j - i \equiv k \pmod{n}$  es llamada un  $k$ -salto. Si  $k \in S$ , se denota por  $C_{(k)}$  a la subdigráfica generadora de  $C_n(S)$  inducida por todos los  $k$ -saltos. Nótese que para cada par de vértices  $v_i$  y  $v_j$  hay a lo más una  $v_i v_j$ -trayectoria en  $C_{(k)}$ , en caso de existir tal trayectoria se denota por  $v_i C_{(k)} v_j$ . De aquí en adelante, los subíndices de los vértices serán considerados módulo  $n$ .

Primero estudiaremos a las digráficas circulantes  $C_n([k])$ , donde  $[k]$  denota al conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$  para  $1 \leq k \leq n-1$ . Del Teorema 1.12 se sigue que ambos números de conexión por arcos de la digráfica  $C_n([n-1])$  son igual a 1, ya que tal digráfica es isomorfa a la digráfica completa de orden  $n$ . Para cualquier otro valor de  $k$  se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.** *Si  $k \leq n-2$ , entonces  $rc(C_n([k])) = src(C_n([k])) = \lceil n/k \rceil$ .*

Dado que el caso  $k=1$  se estableció en el Teorema 1.13, nos enfocaremos en el caso  $2 \leq k \leq n-2$ . Antes de entrar de lleno a la prueba del teorema anterior, primero definiremos una partición de los vértices de la digráfica y luego estudiaremos ciertas propiedades de ésta. Asimismo, estableceremos el diámetro de  $C_n([k])$ , para finalmente usar tales resultados en la demostración del Teorema 2.1.

Por el algoritmo de la división, podemos suponer que  $n = ak + b$  donde  $a \geq 0$  y  $0 \leq b < k$ . Para poder establecer la igualdad anterior, consideremos a  $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_{\lceil n/k \rceil - 1}\}$ , la partición de  $V(C_n([k]))$  tal que:

- $V_r = \{v_{rk}, \dots, v_{(r+1)k-1}\}$ , para cada  $0 \leq r \leq \lceil n/k \rceil - 2$ ;

$$\blacksquare V_{\lceil n/k \rceil - 1} = \{v_{(\lceil n/k \rceil - 1)k}, \dots, v_{n-1}\}.$$

Siempre que un elemento de  $\mathcal{V}$  sea mencionado, el subíndice correspondiente será considerado (mód  $\lceil n/k \rceil$ ). Ahora, observemos algunas propiedades de la partición  $\mathcal{V}$  que son consecuencia directa de su definición.

**Propiedad A.** Se cumple que:

1. Si  $k \mid n$ , entonces  $|V_r| = k$  y  $N^+(V_r) = V_{r+1}$  para  $0 \leq r \leq \lceil n/k \rceil - 1$ .
2. Si  $k \nmid n$ , entonces  $|V_{\lceil n/k \rceil - 1}| = b$  y  $|V_r| = k$  para  $r \neq \lceil n/k \rceil - 1$ ; además, se tiene que  $N^+(V_{\lceil n/k \rceil - 2}) = V_{\lceil n/k \rceil - 1} \cup \{v_0, \dots, v_{k-b-1}\}$  y  $N^+(V_r) = V_{r+1}$  para  $r \neq \lceil n/k \rceil - 2$ .

Esto significa que las primeras  $\lceil n/k \rceil - 1$  clases de tienen exactamente  $k$  elementos, mientras la última clase tiene a lo más  $k$  elementos. Además, si  $(v_i, v_j)$  es una flecha cuyos extremos pertenecen a elementos no consecutivos de  $\mathcal{V}$  (mód  $\lceil n/k \rceil$ ), entonces  $v_i \in V_{\lceil n/k \rceil - 2}$  y  $v_j \in V_0$ , esta observación se refina en el siguiente resultado.

**Propiedad B.** Sea  $v_i \in V_r$ , entonces

$$\begin{aligned} v_{i-k} &\in V_{\lceil n/k \rceil - 2} && \text{si } r = 0 \text{ y } 0 \leq i \leq k - 1 - |V_{\lceil n/k \rceil - 1}|; \\ v_{i-k} &\in V_{r-1} && \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

Dados dos subconjuntos (no necesariamente ajenos) de vértices  $A$  y  $B$  en una digráfica, se define a la *distancia* desde  $A$  hacia  $B$ , denotada por  $d(A, B)$ , como la mínima distancia que hay desde cualquier elemento de  $A$  hacia cualquier elemento de  $B$ , es decir,  $d(A, B) = \min\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ .

**Proposición 2.2.** Sean  $V_i$  y  $V_{i+j}$  elementos de  $\mathcal{V}$  con  $1 \leq j \leq \lceil n/k \rceil - 1$ , entonces  $j - 1 \leq d(V_i, V_{i+j}) \leq j$ .

**Demostración.** Veamos que  $j - 1 \leq d(V_i, V_{i+j})$ . Sea  $P = x_0x_1 \dots x_{j-2}$  una trayectoria con extremos en  $V_i$  y  $V_{i+j}$ . Si  $P$  tiene a lo más una flecha cuyos extremos pertenecen a elementos no consecutivos de  $\mathcal{V}$ , entonces tenemos que  $x_r \in \bigcup_{t=i}^{i+r+1} V_t$  para cada  $0 \leq r \leq j-2$ , es decir,  $x_{j-2} \notin V_{i+j}$ , contradiciendo la elección de  $P$ . Ahora, sean  $x_r x_{r+1}$  y  $x_s x_{s+1}$  flechas disitintas de  $P$  con  $0 \leq r < s \leq j-3$  tales que sus extremos están en elementos no consecutivos de  $\mathcal{V}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que no hay otra flecha de este tipo en  $x_{r+1} P x_s$ , por la Propiedad B tenemos que  $x_{r+1} \in V_0$  y  $x_s \in V_{\lceil n/k \rceil - 2}$ . Por tanto  $x_{r+1} P x_s$  tiene longitud al menos  $\lceil n/k \rceil - 2$ , lo cual implica que  $P$  tiene longitud  $j - 2 \geq \lceil n/k \rceil - 1$ , contradiciendo que  $j \leq \lceil n/k \rceil - 1$ . Así obtenemos que  $j - 1 \leq d(V_i, V_{i+j})$ .

La segunda desigualdad se cumple, pues  $P = v_{ik} v_{(i+1)k} \dots v_{(i+j)k}$  es una trayectoria de longitud  $j$ , donde  $i + s$  es considerado (mód  $\lceil n/k \rceil$ ) para cada  $0 \leq s \leq j$ , y los vértices extremos de  $P$  pertenecen a  $V_i$  y  $V_{i+j}$  respectivamente (por la definición de  $\mathcal{V}$ ). ■

**Proposición 2.3.** *Sea  $P = x_0 x_1 \dots x_t$  una trayectoria en  $C_n(\lceil k \rceil)$  tal que  $x_0, x_t \in V_i$ ,  $x_1 \in V_j$  con  $i \neq j$ , entonces  $t \geq \lceil n/k \rceil - 1$ .*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $P$  es una trayectoria de longitud mínima con tal propiedad. De la Propiedad A se sigue que  $j \in \{i + 1, i + 2\}$ . Si  $j = i + 1$ , entonces  $d(V_j, V_i) \geq \lceil n/k \rceil - 2$ , es decir,  $x_1 P x_t$  tiene longitud al menos  $\lceil n/k \rceil - 2$ . Por otro lado, si  $j = i + 2$ , entonces  $i = \lceil n/k \rceil - 2$  y  $j = 0$ . Por lo cual cada flecha de  $x_1 P x_t$  tiene sus extremos en elementos no consecutivos de  $\mathcal{V}$  o en el mismo elemento, esto implica que  $x_1 P x_t$  tiene al menos un vértice en  $V_r$  para cada  $r \neq \lceil n/k \rceil - 1$ . Por tanto la longitud de  $x_1 P x_t$  es al menos  $\lceil n/k \rceil - 2$ . En cualquier caso obtenemos que  $t \geq \lceil n/k \rceil - 1$ . ■

Observemos que para cada par de vértices  $v_i$  y  $v_j$  en  $C_n(\lceil k \rceil)$ , por el algoritmo de la división se tiene que existen únicos  $0 \leq t \leq \lceil n/k \rceil - 1$  y  $0 \leq s \leq k - 1$  tales que  $j - i \stackrel{n}{\equiv} tk + s$ . Claramente,  $v_i C_{(k)} v_{i+tk} C_{(s)} v_{i+tk+s}$

es un a  $v_i v_j$ -trayectoria que tiene  $t$   $k$ -saltos y 1  $s$ -salto, es decir, es una  $v_i v_j$ -geodésica, de lo cual se sigue que

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} t & \text{si } s = 0; \\ t + 1 & \text{si } s \neq 0. \end{cases}$$

**Proposición 2.4.** *Sea  $2 \leq k \leq n - 2$  tal que  $n = ak + b$ , donde  $a \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq b \leq k - 1$ , entonces*

$$\text{diám}(C_n([k])) = \begin{cases} a = \lceil n/k \rceil & \text{si } b = 0; \\ a = \lceil n/k \rceil - 1 & \text{si } b = 1; \\ a + 1 = \lceil n/k \rceil & \text{si } b \neq 0, 1. \end{cases}$$

**Demostración.** Claramente  $d(v_0, v_{n-1}) = \text{diám}(C_n([k]))$ . Si  $b = 0$ , entonces  $n - 1 = ak - 1$  y  $v_0 C_{(k)} v_{(a-1)k} v_{ak-1}$  es una  $v_0 v_{n-1}$ -geodésica de longitud  $a = \lceil n/k \rceil$ ; cuando  $b = 1$ , tenemos que  $n - 1 = ak$  y  $v_0 C_{(k)} v_{ak}$  es una  $v_0 v_{n-1}$ -geodésica, por lo cual  $d(v_0, v_{n-1}) = a = \lceil n/k \rceil - 1$ . Por otro lado, si  $b \neq 0, 1$ , se tiene que  $v_0 C_{(k)} v_{ak} v_{ak+b-1}$  es una  $v_0 v_{n-1}$ -geodésica de longitud  $a + 1 = \lceil n/k \rceil$ . ■

Ahora, ya que han sido establecidas las propiedades anteriores de la partición  $\mathcal{V}$ , así como el diámetro de la digráfica  $C_n([k])$ , procederemos a ver que  $rc(C_n([k])) = src(C_n([k])) = \lceil n/k \rceil$ .

**Demostración del Teorema 2.1** Definamos una  $\lceil n/k \rceil$ -coloración  $\rho$  tal que  $v_i v_j \in \rho^{-1}(r)$  si  $v_i \in V_r$  para cada  $0 \leq r \leq \lceil n/k \rceil - 1$ . Notemos que todas las flechas que salen de los primeros  $k$  vértices tienen color 0, todas las flechas que salen de los siguientes  $k$  vértices son de color 1 y así sucesivamente, hasta que las flechas que salen de los últimos  $n - (\lceil n/k \rceil - 1)k$  vértices tienen color  $\lceil n/k \rceil - 1$ .

Sea  $v_i, v_j \in V(D)$  con  $j \stackrel{n}{\equiv} i + tk + s$  para algún  $0 \leq t \leq \lceil n/k \rceil - 1$  y algún  $0 \leq s \leq k - 1$ . Si  $d(v_i, v_j) \leq \lceil n/k \rceil - 1$ , entonces  $P = v_i C_{(k)} v_{i+tk} v_{i+tk+s}$  es un arcoíris, pues todos los vértices cuyo exgrado en  $P$  es igual a 1 pertenecen a

distintos elementos de  $\mathcal{V}$ . Ahora, supongamos que  $d(v_i, v_j) = \lceil n/k \rceil$ , entonces  $t = \lceil n/k \rceil - 1$  y  $s > 0$ . Consideremos las siguientes  $v_i v_{i+tk+s}$ -geodésicas:

$$P = v_i C_{(k)} v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k} v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s},$$

$$Q = v_i v_{i+s} C_{(k)} v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s}.$$

Claramente las secciones  $v_i P v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k}$  y  $v_{i+s} Q v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s}$  son arcoíris, pues ambas son geodésicas de longitud  $\lceil n/k \rceil - 1$ . Si  $P$  y  $Q$  no son arcoíris, entonces por la Proposición 2.3 se tiene que los vértices  $v_i, v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k}, v_{i+s}$  y  $v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s}$  están todos en el mismo elemento de  $\mathcal{V}$ . Dado que la trayectoria  $v_i P v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k}$  tiene  $\lceil n/k \rceil$  vértices, hay una única flecha  $v_{i+rk} v_{i+(r+1)k}$  para algún  $0 \leq r \leq \lceil n/k \rceil - 2$  tal que sus extremos están en elementos no consecutivos de  $\mathcal{V}$ , por lo cual  $v_{i+rk} \in V_{\lceil n/k \rceil - 2}$  y  $v_{i+(r+1)k} \in V_0$ . Esto implica que  $v_i, v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k}, v_{i+s}, v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s} \in V_{\lceil n/k \rceil - 2 - r}$ , pues, por la Propiedad B, toda flecha en  $v_i P v_{i+rk}$  tiene sus extremos en elementos consecutivos de  $\mathcal{V}$ . Además, dado que  $v_{i+s} \in V_{\lceil n/k \rceil - 2 - r}$ , se tiene que  $v_{i+rk+s} \in V_{\lceil n/k \rceil - 2}$ , entonces  $v_{i+(r+1)k+s} \in V_0$ , por lo cual toda flecha en  $v_{i+(r+1)k+s} Q v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s}$  tiene sus extremos en elementos consecutivos de  $\mathcal{V}$ , de nuevo por la Propiedad B.

Observemos que  $v_{n-1} \in N^+(v_{i+rk}) \cap N^-(v_{i+(r+1)k+s})$  y consideremos la trayectoria  $P' = v_i P v_{i+rk} v_{i+(r+1)k+s} Q v_{i+(\lceil n/k \rceil - 1)k+s}$ , la cual tiene longitud igual a  $r + 2 + \lceil n/k \rceil - (r + 2) = \lceil n/k \rceil$ . De esta forma,  $P'$  es una  $v_i v_{i+tk+s}$ -geodésica donde, por construcción, cada flecha tiene sus extremos en elementos consecutivos de  $\mathcal{V}$ . Entonces  $P'$  es un arcoíris, y por tanto  $src(C_n([k])) \leq \lceil n/k \rceil$ .

Recordemos que  $n = ak + b$  donde  $a \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq b \leq k - 1$ . Para probar que  $\lceil n/k \rceil \leq rc(C_n([k]))$  tenemos dos casos. Si  $b \neq 1$ , por la Proposición 2.4, se tiene que  $\lceil n/k \rceil = \text{diám}(C_n([k])) \leq rc(C_n([k]))$ . Si  $b = 1$ , entonces  $a = \lceil n/k \rceil - 1 = \text{diám}(C_n([k])) \leq rc(C_n([k]))$ . Supongamos que  $\rho_0$  es una  $a$ -coloración por arcoíris de  $C_n([k])$  y notemos que  $n$  y  $k$  son primos relativos (pues si existe  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $d \mid n$  y  $d \mid k$ , entonces  $(n - xk)/d \in \mathbb{N}$ , es decir,  $1/d \in \mathbb{N}$ , por lo cual  $d = 1$ ) lo que implica que  $C = v_0 v_k \dots v_{(n-2)k} v_{(n-1)k} v_0$  es un ciclo de longitud  $n$ . Más aún, para cada  $0 \leq t \leq n - 1$  tenemos que

$v_{tk}Cv_{(t+a)k}$  es la única  $v_{tk}v_{(t+a)k}$ -geodésica en  $C_n([k])$  de longitud  $a$ . Nótese además que cualquier otra  $v_{tk}v_{(t+a)k}$ -trayectoria tiene longitud al menos  $a+1$ , por lo cual tiene dos flechas del mismo color. Por tanto  $v_{tk}Cv_{(t+a)k}$  debe ser un arcoíris que usa todos los colores de  $\rho_0$ .

En particular, para  $v_0Cv_{ak}$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $v_{ik}v_{(i+1)k} \in \rho_0^{-1}(i)$  para  $0 \leq i \leq a-1$ . Dado que  $v_1Cv_{(a+1)k}$  es un arcoíris y los colores de las  $a-1$  flechas anteriores a  $v_{ak}v_{(a+1)k}$  han sido asignados, entonces  $v_{ak}v_{(a+1)k} \in \rho^{-1}(0)$ . Así, por argumento inductivo, es fácil ver que  $v_{(ra+i)k}v_{(ra+i+1)k} \in \rho_0^{-1}(i)$  donde  $0 \leq i \leq a-1$ ,  $0 \leq ra+i \leq n-1$ . Esto nos dice que  $v_{n-1}v_0, v_0v_1 \in \rho^{-1}(0)$ , contradiciendo que  $v_{(n-1)k}Cv_{(a-1)k}$  es un arcoíris, por tanto  $\lceil n/k \rceil \leq rc(C_n([k]))$ .

Concluimos que  $\lceil n/k \rceil \leq rc(C_n([k])) \leq src(C_n([k])) \leq \lceil n/k \rceil$  para cada  $2 \leq k \leq n-2$ , es decir,  $rc(C_n([k])) = src(C_n([k])) = \lceil n/k \rceil$ . ■

A partir del resultado anterior, se deduce que, para cualesquiera  $n \geq 4$  y  $n/2 \leq k \leq n-2$ , los números de conexión por arcoíris de  $C_n([k])$  son iguales a 2, este es otro ejemplo de una familia de digráficas arbitrariamente grandes con tal propiedad.

Ahora, estudiaremos a las digráficas circulantes con dos generadores, es decir,  $C_n(\{a_1, a_2\})$  donde  $a_1$  y  $a_2$  son elementos distintos de  $1, 2, \dots, n-1$ . Además, para simplificar la notación, escribiremos  $C_n(a_1, a_2)$  en lugar de  $C_n(\{a_1, a_2\})$ . En particular, nos enfocaremos en el caso cuando al menos uno de los generadores es primo relativo con  $n$ . Los resultados presentados a continuación pueden ser consultados en [19].

**Proposición 2.5.** *Si  $(a, n) = 1$  y  $ab_1 \stackrel{n}{\equiv} ab_2$ , entonces  $b_1 \stackrel{n}{\equiv} b_2$ .*

**Proposición 2.6.** *Si  $b_1, b_2, \dots, b_r$  es un sistema completo (reducido) de residuos (mód  $n$ ) y  $(a, n) = 1$ , entonces  $ab_1, ab_2, \dots, ab_r$  es también un sistema completo (reducido) de residuos (mód  $n$ ).*

**Proposición 2.7.** *Si  $(a, n) = 1$ , entonces  $ax \stackrel{n}{\equiv} 1$  tiene exactamente una solución en  $\mathbb{Z}_n$ .*



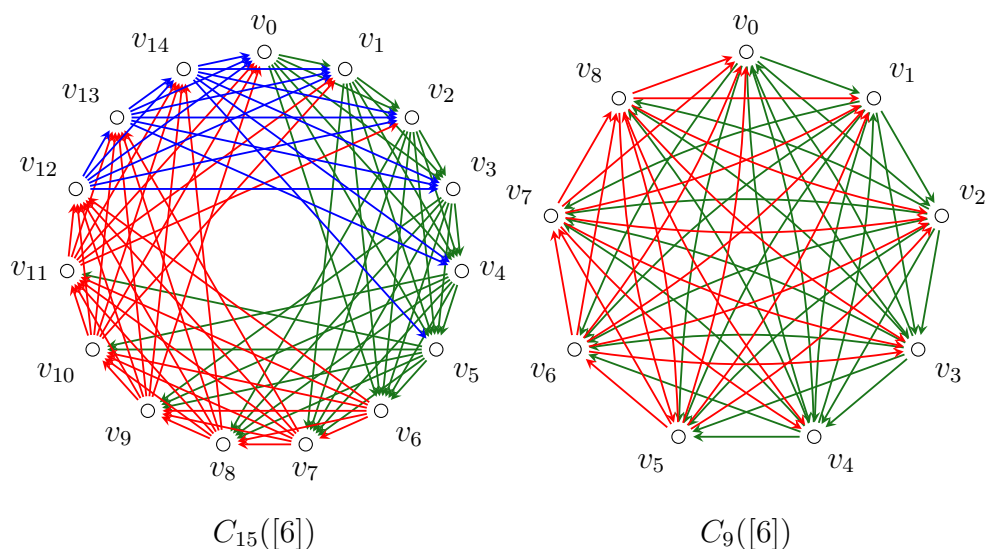


Figura 2.1: Ejemplos de coloraciones en el Teorema 2.1.

Estas proposiciones implican que, si  $(a_1, n) = 1$  y  $b \in \mathbb{Z}_n$  es la solución de  $a_1 x \stackrel{n}{\equiv} 1$ , entonces  $C_n(1, ba_2) \cong C_n(a_1, a_2)$ , es decir, si al menos un generador es primo relativo a  $n$ , basta estudiar a las digráficas circulares del tipo  $C_n(1, k)$  donde  $2 \leq k \leq n - 1$ . Dado que los casos  $k = 2, n - 1$  han sido establecidos en el Lema 2.1 y el Teorema 1.20, podemos enfocarnos al caso  $3 \leq k \leq n - 2$ .

**Teorema 2.8.** *Si  $C_n(1, k_1)$  y  $C_n(1, k_2)$  son digráficas circulares tales que  $k_1, k_2 \geq 2$  y  $k_1 k_2 \stackrel{n}{\equiv} 1$ , entonces  $rc(C_n(1, k_1)) = rc(C_n(1, k_2))$  y también  $src(C_n(1, k_1)) = src(C_n(1, k_2))$ .*

**Demostración.** Dado que  $C_n(1, k_1) \cong C_n(1, k_2)$ , se obtiene el resultado. ■

**Corolario 2.9.** *Para cualesquiera  $n \geq 3$  y  $k \geq 2$  se cumple:*

$$(i) \quad rc(C_n(1, 2)) = src(C_n(1, 2)) = \lceil n/2 \rceil.$$

$$(ii) \quad rc(C_{2k+1}(1, k+1)) = src(C_{2k+1}(1, k+1)) = k+1.$$

**Demostración.** El primer inciso, es el caso  $k = 2$  del Teorema 2.1. Para (ii), simplemente combinemos (i) con el Teorema 2.8. ■

Ahora, para cualesquiera  $v_i, v_j \in V(C_n(1, k))$  tenemos que

$$d(v_i, v_j) = \text{mín}\{r + s \mid rk + s \stackrel{n}{\equiv} j - i; r, s \geq 0\}$$

Notemos que, dados  $r, s \geq 0$  tales que  $r + s = d(v_i, v_j)$  y  $rk + s \stackrel{n}{\equiv} j - i$  se tiene que  $s < k$ , de lo contrario  $(r + 1) + (s - k) < r + s$ , entonces  $(r + 1)k + s - k \stackrel{n}{\equiv} j - i$ , contradiciendo que  $r + s = d(v_i, v_j)$ . De esta forma, definimos al conjunto  $\mathfrak{D}_n^k(i, j) := \{(r, s) \mid rk + s \stackrel{n}{\equiv} j - i; r, s \geq 0; s < k\}$ , por lo cual  $d(v_i, v_j) = \text{mín}\{r + s \mid (r, s) \in \mathfrak{D}_n^k(i, j)\}$ .

**Teorema 2.10.** Para  $k \geq 2$  se cumple:

$$(i) \quad rc(C_{2k}(1, k)) = src(C_{2k}(1, k)) = k.$$

$$(ii) \quad rc(C_{2k}(1, k + 1)) = src(C_{2k}(1, k + 1)) = k.$$

**Demostración.** Consideremos la partición  $\mathcal{V} = (V_0, \dots, V_{k-1})$  sobre el conjunto de vértices, de forma que  $V_r = \{v_r, v_{r+k}\}$  para cualquier  $0 \leq r \leq k - 1$ .

Primero probaremos (i). Consideremos  $v_i$  y  $v_j$  vértices de  $C_{2k}(1, k)$ , por el algoritmo de la división tenemos que  $j - i \stackrel{2k}{\equiv} p(n/2) + q$  donde  $0 \leq p \leq 1$  y  $0 \leq q < k$ . Es claro que  $\mathfrak{D}_n^{n/2}(i, j) = \{(2t + p, q) \mid t \geq 0\}$ , por lo cual  $d(v_i, v_j) = p + q$ . Así  $k = \text{diám}(C_{2k}(1, k)) \leq rc(C_{2k}(1, k))$ . Por otro lado, definamos a la  $k$ -coloración  $\rho$  tal que  $uu' \in \rho^{-1}(r)$  si  $u \in V_r$ . Dado que  $P = v_i C_{(1)} v_{i+q} v_{i+pk+q}$  es una  $v_i v_j$ -geodésica y los vértices  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+q}$  están en distintos elementos de la partición  $\mathcal{V}$ , entonces  $P$  es un arcoíris. Por lo tanto  $src(C_{2k}(1, k)) \leq k$ , obteniendo así la igualdad.

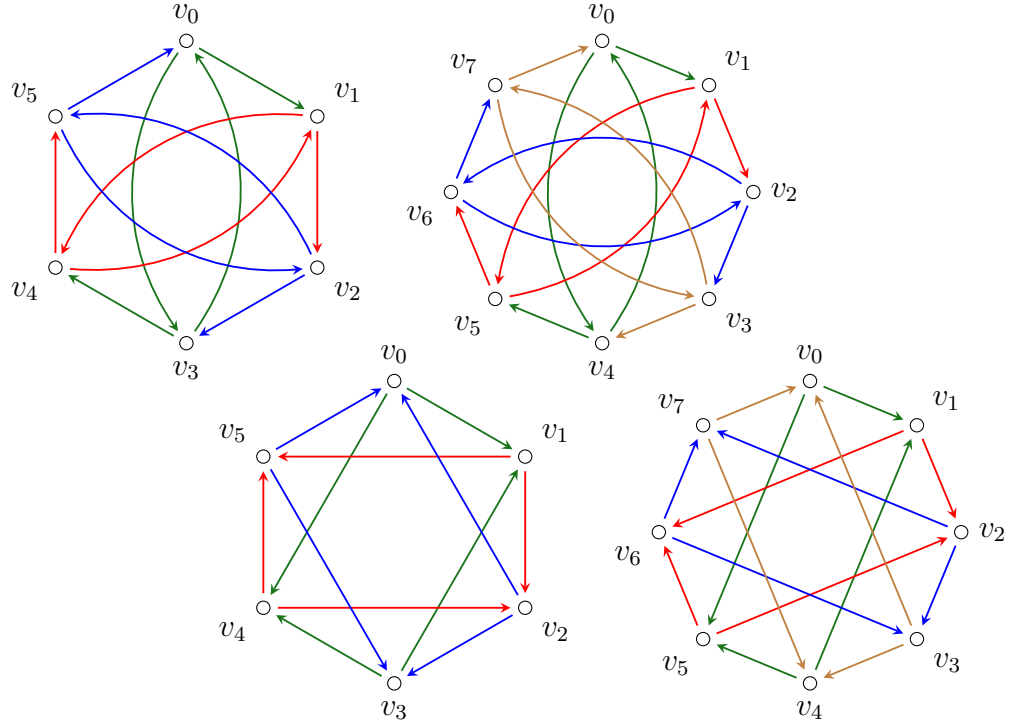


Figura 2.2: Ejemplos del Teorema 2.10 cuando  $k = 3, 4$ .

Para probar (ii), observemos que  $N^+(u) = V_{r+1}$  para cada  $u \in V_r$ , donde  $r + 1$  es considerado (mód  $k$ ). Más aún, si  $u_0 u_1 u_2 \dots u_s$  es una trayectoria tal que  $u_0 \in V_r$ , entonces  $u_i \in V_{r+i}$ . Por lo cual, si  $v_i \neq v_j$ , tenemos que  $d(v_i, v_j) = t \equiv j - i$  donde  $1 \leq t \leq k$ . Por tanto  $\text{diám}(C_{2k}(1, k + 1)) = k$ . Ahora, consideremos la  $k$ -coloración  $\rho$  tal que  $uu' \in \rho^{-1}(r)$  si  $u \in V_r$  y sea  $u_0 u_1 \dots u_s$  una trayectoria tal que  $u_0 \in V_r$  donde  $s \leq k$ , entonces  $u_i u_{i+1}$  es de color  $r + i$ . Dado que  $s \leq k$ , todas las flechas de la trayectoria tienen distintos colores, entonces cualquier trayectoria de longitud a lo más  $k$  es un arcoíris, en particular, toda geodésica es un arcoíris. La segunda igualdad se sigue de lo anterior. ■

Ahora, procederemos a estudiar las distancias y los diámetros en las circulares  $C_n(1, k)$  tales que  $n$  es suficientemente grande respecto a  $n/k$ , lo cual

usaremos como herramienta para determinar los números de conexidad por arcoíris. Asimismo, cabe señalar que la conversa de la siguiente proposición siempre es cierta, sin importar el valor de  $k$ .

**Proposición 2.11.** *Sea  $k \leq n/2$  y sean  $(q, r), (q', r') \in \mathfrak{D}_n^k(i, j)$ . Si  $qk + r = q'k + r'$ , entonces  $(q, r) = (q', r')$ .*

**Demostración.** Sea  $z = qk + r$ , por el algoritmo de la división  $q$  y  $r$  son los únicos enteros tales que  $(q, r) \in \mathfrak{D}_n^k(i, j)$ , es decir, si  $qk + r = q'k + r' = z$ , entonces  $(q, r) = (q', r')$ . ■

Si  $r$  y  $k$  son enteros positivos, por el algoritmo de la división, existen únicos  $a, b \geq 0$  tales que  $b < k$  y  $r = ak + b$ . De aquí en adelante denotaremos a tales número por  $a_{r,k}$  y  $b_{r,k}$  respectivamente, o simplemente por  $a_r$  y  $b_r$  cuando no haya lugar a confusión. Nótese que  $a_n = \lfloor n/k \rfloor$ . Observemos que para cualquier par de vértices  $v_i$  y  $v_j$  en  $C_n(1, k)$  se tiene que  $(a_{j-i,k}, b_{j-i,k}) \in \mathfrak{D}_n^k(i, j)$  donde  $j - i$  es considerado (mód  $n$ ). También, nótese que (por la simetría de cualquier digráfica circulante) para cualesquiera vértices  $v_i$  y  $v_j$  se cumple que  $d(v_i, v_j) = d(v_0, v_{j-i})$ , es decir, basta calcular la distancia de  $v_0$  hacia cualquier otro vértice para determinar el diámetro de dichas digráficas. A continuación probaremos algunos resultados referentes a las distancias y el diámetro dentro de las digráficas circulantes.

**Proposición 2.12.** *Sea  $v_i \in V(C_n(1, k))$ , entonces  $d(v_0, v_i) \neq a_i + b_i$  si y sólo si  $d(v_0, v_{b_i}) \neq b_i$ .*

**Demostración.** Para probar la suficiencia, sea  $(q, r) \in \mathfrak{D}_n^k(i, j)$  tal que  $d(v_0, v_i) = q + r < a_i + b_i$ , entonces  $qk + r = i + tn$  para algún  $t > 0$ , es decir,  $q \geq a_i$ , por tanto  $(q - a_i)k + r \stackrel{n}{\equiv} b_i$  y  $q - a_i + r < b_i$ , de esta forma  $d(v_0, v_{b_i}) < b_i$ . La necesidad del enunciado es análoga. ■

**Proposición 2.13.** *Si  $a_n \geq k - 1$ , entonces  $d(v_0, v_i) = a_i + b_i$ .*

**Demostración.** Por la proposición anterior, basta probar que  $d(v_0, v_i) = i$  para cada  $i < k$ . Sea  $(q, r) \in \mathfrak{D}_n^k(i, 0)$  con  $q \neq 0$ , dado que  $qk + r = i + tn$  para algún  $t \geq 0$ , entonces se tiene que  $q \geq a_n \geq k - 1 \geq i$ , de lo cual se deduce que  $d(v_0, v_i) = i$ . ■

**Proposición 2.14.** *Si  $a_n \geq k - 1$ , Entonces  $\text{diám}(C_n(1, k)) = a_n + k - 2$ .*

**Demostración.** Por la proposición anterior  $d(v_0, v_i) = a_i + b_i$  y observemos que  $n - b_n - 1 = a_n k + b_n - b_n - 1 = (a_n - 1)k + k - 1$ , es decir,  $a_n - 1 = a_{n-b_n-1}$  y  $b_{n-b_n-1} = k - 1$ , por lo cual  $d(v_0, v_{n-b_n-1}) = a_n + k - 2$ . Ahora veremos que  $d(v_0, v_i) \leq d(v_0, v_{n-b_n-1})$  para toda  $0 \leq i < n$ . Primero, si  $i \leq n - b_n - 1$ , entonces es claro que  $a_i \leq a_n - 1$  y  $b_i \leq k - 1$ , por lo cual se cumple la afirmación. Por otro lado si  $i > n - b_n - 1$ , notemos que  $b_i \leq k - 2$ , de lo contrario  $b_i = k - 1$ , lo cual implica que  $i = a_n k + k - 1 \geq n$ , contradiciendo que  $i < n$ . Además  $a_i = a_n$ , por lo cual  $a_i + b_i \leq a_n + k - 2$ . Concluimos que  $\text{diám}(C_n(1, k)) = a_n + k - 2$ . ■

Para simplificar el desarrollo en los siguientes resultados, dada una digráfica circulante de  $n = a_n k$  vértices, también denotaremos al vértice  $v_i$  por  $\langle a_i, b_i \rangle$  (del algoritmo de la división se sigue que ésta es una correspondencia biyectiva). A continuación establereceremos una cota superior del número de arcoíris para las circulantes  $C_n(1, k)$  donde  $k \mid n$ , para después determinar el número exacto de ambos números de arcoíris en el caso  $k \mid n$  con  $a_n \geq k - 1$ .

**Proposición 2.15.** *Sea  $C_n(1, k)$  una digráfica circulante donde  $n = a_n k$  y  $a_n \geq 3$ , entonces  $rc(C_n(1, k)) \leq a_n + k - 1$ .*

**Demostración.** Primero, definamos  $V_r = \{u_i \mid (r - 1)k \leq i < rk\}$  para cada  $1 \leq r \leq a_n$ , y sea  $\rho$  una coloración sobre  $C_n(1, k)$  tal que

$$\rho(u_i, u_j) = \begin{cases} r & \text{si } u_i \in V_r \text{ y } u_j \notin V_r; \\ a_n + s & \text{si } i + 1 = j \text{ y } j \equiv s \pmod{k}. \end{cases}$$

Ahora, sean  $v_i$  y  $v_j$  vértices distintos de la digráfica y consideremos a la trayectoria  $P = v_i C_{(k)} v_{i+a_j-k} C_{(1)} v_j$ , la cual es claramente un arcoíris, pues por la definición de  $\rho$  se sigue que las trayectorias  $v_i C_{(k)} v_{i+a_j-k}$  y  $v_{i+a_j-k} C_{(1)} v_j$  son arcoíris cuyos colores están en los conjuntos  $\{1, 2, \dots, a_n\}$  y  $\{a_n + 1, a_n + 2, \dots, a_n + k - 1\}$  respectivamente. ■

**Teorema 2.16.** *Si  $n = a_n k$  con  $a_n \geq k - 1 \geq 2$ , entonces*

$$\text{src}(C_n(1, k)) = \text{rc}(C_n(1, k)) = a_n + k - 2.$$

**Demostración.** Dado que  $\text{src}(C_n(1, k)) \geq \text{diám}(C_n(1, k)) = a_n + k - 2$ , basta encontrar una coloración fuerte por arcoíris que use  $a_n + k - 2$  colores exactamente. Consideremos a  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{a_n}\}$  la partición de  $V(C_n(1, k))$  tal que  $V_r = \{\langle r, s \rangle \mid 0 \leq s \leq k - 1\}$  para  $0 \leq r \leq a_n$ . Definamos la  $(a_n + k - 2)$ -coloración  $\rho$  tal que para  $0 \leq r \leq a_n - 1$ :

- $\langle r, s \rangle \langle r + 1, s \rangle \in \rho^{-1}(r)$  para cada  $k$ -salto.
- Si  $r \geq k - 2$ , entonces
  - ▶  $\langle r, 0 \rangle \langle r, 1 \rangle, \langle r, k - 1 \rangle \langle r + 1, 0 \rangle \in \rho^{-1}(r)$ ;
  - ▶  $\langle r, j \rangle \langle r, j + 1 \rangle \in \rho^{-1}(a_n - 1 + j)$ , para  $1 \leq j \leq k - 2$ .
- Si  $r < k - 2$ , entonces
  - ▶  $\langle r, k - 2 - r \rangle \langle r, k - 1 - r \rangle \in \rho^{-1}(r)$ ;
  - ▶  $\langle r, j \rangle \langle r, j + 1 \rangle \in \rho^{-1}(a_n + 1 + r + j)$ , si  $j < k - 2 - r$ ;
  - ▶  $\langle r, j \rangle \langle r, j + 1 \rangle \in \rho^{-1}(a_n + 1 + j - k + r)$ , si  $j > k - 2 - r$ .

Ahora, sean  $\langle r, s \rangle$  y  $\langle r', s' \rangle$  vértices distintos de  $C_n(1, k)$ . Exhibiremos un arcoíris  $P$  que conecta tales vértices, considerando los siguientes casos:

**Caso 1.**  $r \neq r'$ . Entonces

$$P = \begin{cases} \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r', s \rangle C_{(1)} \langle r', s' \rangle & \text{si } s \leq s'; \\ \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r' - 1, s \rangle C_{(1)} \langle r', s' \rangle & \text{si } s' < s. \end{cases}$$

**Caso 2.**  $r = r'$ . Si  $s < s'$ , sea  $P = \langle r, s \rangle C_{(1)} \langle r, s' \rangle$ . Por otro lado, si  $s' < s$ , entonces tenemos dos subcasos:

**Subcaso 2.1.**  $\langle r, t \rangle \langle r, t + 1 \rangle \notin \rho^{-1}(r)$  para cada  $t < s'$ . Entonces consideramos  $P = \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r - 1, s \rangle C_{(1)} \langle r, s' \rangle$ .

**Subcaso 2.2.**  $\langle r, t \rangle \langle r, t + 1 \rangle \in \rho^{-1}(r)$  para algún  $t < s'$ . Nótese que  $t$  es única, por la definición de  $\rho$ . Así definimos

$$P = \begin{cases} \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle a_n - 1, s \rangle C_{(1)} \langle 0, s' \rangle C_{(k)} \langle r, s' \rangle & \text{si } r \geq k - 2; \\ \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle k - 2 - s, s \rangle C_{(1)} \langle k - 1 - s, s' \rangle C_{(k)} \langle r, s' \rangle & \text{si } r < k - 2. \end{cases}$$

En cualquier caso, el número de  $k$ -saltos de  $P$ , digamos  $p_k$ , es a lo más  $a_n - 1$  y su número de 1-saltos, digamos  $p_1$ , es a lo más  $k - 1$ , entonces, por la Proposición 2.13,  $P$  es una geodésica. Observemos que, en el Subcaso 2.2,  $a_n - 1$  colores ocurren en  $P \cap C_{(k)}$ , es decir, existe algún  $t < a_n$  que no ocurre en tal digráfica. Más aún, los colores  $t, a_n, a_n + 1, \dots, a_n + p_1 - 2$  ocurren en  $P \cap C_{(1)}$ . En cualquier otro caso, los colores  $r, r + 1, \dots, r + p_k - 1$  (mód  $a_n$ ) ocurren en  $P \cap C_{(k)}$  y  $P \cap C_{(1)}$  tiene  $p_1$  colores en  $\{r + p_k, a_n, a_n + 1, \dots, a_n + k - 2\}$ . Por tanto, en cada caso  $P$  es arcoíris. ■

**Teorema 2.17.** Para  $k \geq 3$  se cumple que

$$\text{src}(C_{(k-1)^2}(1, k)) = \text{rc}(C_{(k-1)^2}(1, k)) = 2k - 4.$$

**Demostración.** Dado que  $C_4(1, 3) \cong \overleftrightarrow{C_4}$ , el caso  $k = 3$  se sigue del Teorema 1.20. Para  $k \geq 4$ , sea  $n = (k - 1)^2$ , entonces  $n = (k - 2)k + 1$ . Además,  $k - 1$  y  $k$  son primos relativos, entonces  $C_{(k)}$  es un ciclo. Ahora, verificaremos que  $d(v_0, v_i) = i$  para  $i < k$ . Sea  $(p, q) \in \mathfrak{D}_n^k(0, i)$ , entonces  $pk + q = tn + i$  para algún  $t \geq 0$ . Si  $t = 0$ , entonces  $q = i$ ; en otro caso  $i \leq k - 1 \leq p$ . Por tanto  $p + q \geq i$ , es decir,  $d(v_0, v_i) = i$ . Concluimos que  $\text{diám}(C_n(1, k)) = 2k - 4$ .

Consideremos a  $\mathcal{V} = \{V_0, \dots, V_{k-1}\}$ , una partición de  $V(C_n(1, k))$ , donde  $V_r = \{\langle r, s \rangle \mid 0 \leq s \leq k - 2\}$  para  $0 \leq r \leq k - 2$ . Ahora, definamos la  $(2k - 4)$ -coloración  $\rho$  tal que para cada  $r$ :

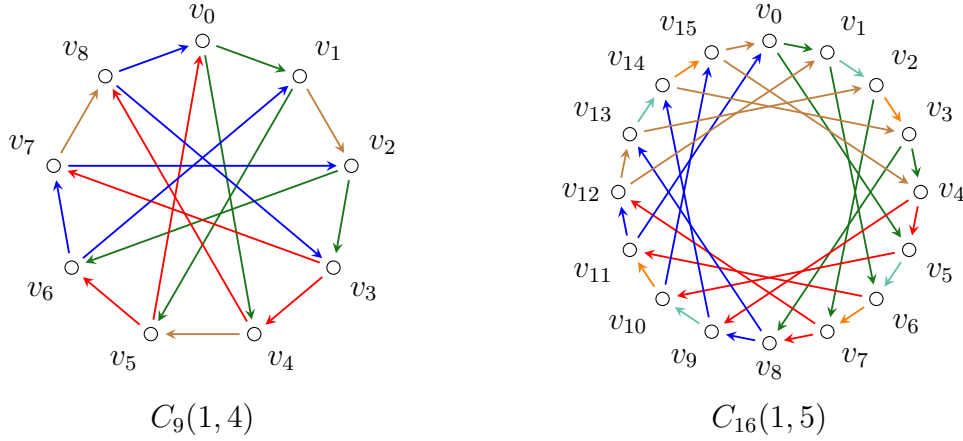


Figura 2.3: Ejemplos del Teorema 2.17.

- (a) El  $k$ -salto que sale de  $\langle r, s \rangle$  tiene color  $r$ , donde  $0 \leq s \leq k - 1$ .
- (b) Las flechas  $\langle r, 0 \rangle \langle r, 1 \rangle$  y  $\langle r, k - 2 \rangle \langle r + 1, 0 \rangle$  tienen color  $r$ .
- (c) La flecha  $\langle r, s \rangle \langle r, s + 1 \rangle$  tiene color  $k - 2 + s$ , para  $s \neq 0, k - 2$ .

Primero, notemos que toda trayectoria de longitud a lo más  $k - 1$  en  $C_{(k)}$  es un arcoíris. Ahora, sean  $v_i = \langle r, s \rangle$  y  $v_j = \langle r', s' \rangle$  vértices distintos, por la observación previa tenemos que  $d(v_i, v_j) = a_{j-i} + b_{j-i}$ , donde  $j - i$  es considerado (mód  $n$ ). De aquí en adelante, cuando un vértice  $\langle t, t' \rangle$  sea mencionado, los números  $t$  y  $t'$  serán considerados (mód  $a_n$ ) y (mód  $k - 1$ ) respectivamente. Consideremos los siguientes casos:

**Caso 1.**  $r \neq r'$ .

**Subcaso 1.1.**  $b_{j-1} < k - 1$  o  $s' \neq 0$ . Consideremos a la trayectoria  $P = \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r'', s'' \rangle C_{(1)} \langle r', s' \rangle$ , donde  $\langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r'', s'' \rangle$  tiene longitud  $a_{j-i}$  y  $\langle r'', s'' \rangle C_{(1)} \langle r', s' \rangle$  tiene longitud  $b_{j-i}$ .

**Subcaso 1.2.**  $b_{j-i} = k - 1$  y  $s' = 0$ . Entonces

$$P = \begin{cases} \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r', s' \rangle & \text{si } a_{j-i} = 0; \\ \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r' - 3, k - 2 \rangle \langle r' - 2, 0 \rangle \langle r' - 1, 1 \rangle C_{(1)} \langle r', 0 \rangle & \text{si } a_{j-i} > 0. \end{cases}$$



Observemos que, si  $a_{j-i} = 0$ , entonces  $(k-1)k \stackrel{n}{\equiv} k-1$ , por tanto  $P$  es una  $v_i v_j$ -geodésica.

**Caso 2.**  $r = r'$ . Si  $s < s'$ , entonces  $\langle r, s \rangle C_{(1)} \langle r', s' \rangle$ . Por otro lado, cuando  $s' < s$  consideramos los subcasos:

**Subcaso 2.1.**  $b_{j-i} = 0$ . Entonces  $P = \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r, s' \rangle$ .

**Subcaso 2.2.**  $b_{j-i} \neq 0$ . Nótese que  $s' < b_{j-i}$ .

**Subcaso 2.2.1.**  $s' \neq 0$ . Entonces

$$P = \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r-2, k-b_{j-i}+s'-1 \rangle C_{(1)} \langle r-1, 0 \rangle \langle r, 1 \rangle C_{(1)} \langle r, s' \rangle.$$

**Subcaso 2.2.2.**  $s = 0$ . Entonces  $P = \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r-1, k-b_{j-i} \rangle C_{(1)} \langle r, 0 \rangle$ , cuando  $b_{j-i} \neq k-1$ . De lo contrario  $b_{j-i} = k-1$ , y consideramos la trayectoria  $P = \langle r, s \rangle C_{(k)} \langle r-3, k-2 \rangle \langle r-2, 0 \rangle \langle r-1, 1 \rangle C_{(1)} \langle r, 0 \rangle$ . ■

**Corolario 2.18.** Para  $r \geq 1$ , se cumple  $\text{src}(C_{(r+1)^2}(1, r^2 + r + 1)) = 2r$ .

**Demostración.** Basta considerar el caso  $k = r + 2$  en el teorema anterior y observar que

$$\begin{aligned} (r^2 + r + 1)(r + 2) &= r^3 + r^2 + r + 2r^2 + 2r + 2 \\ &= r^3 + 3r^2 + 3r + 2 \\ &= (r + 1)^3 + 1 \\ &\equiv 1 \pmod{(r + 1)^2}. \end{aligned}$$

De esta forma  $C_{(r+1)^2}(1, (r+1)^2 - r) \cong C_{(r+1)^2}(1, r+2)$ . ■

Ahora, estableceremos los números de conexión por arcoíris de las digráficas circulantes  $C_n(1, 3)$ . En los siguientes dos lemas estudiamos el caso  $(n, 3) = 1$ , donde debe notarse que  $C_{(3)}$  es un ciclo y  $a_n = \lfloor n/3 \rfloor$ .

**Lema 2.19.** Para  $n \geq 4$  con  $n \stackrel{3}{\equiv} 1$ , entonces  $\text{src}(C_n(1, 3)) \leq \lfloor n/3 \rfloor + 1$ .

**Demostración.** Primero notemos que el caso  $n = 4$  es consecuencia del Teorema 1.20, pues  $C_4(1, 3) = \overleftrightarrow{C_4}$ . Ahora, si  $n \geq 7$ , entonces  $n = 3a_n + 1$ , es decir,  $a_n \geq 2$ . De esta forma, por las proposiciones 2.13 y 2.14, obtenemos que  $\text{diám}(C_n(1, 3)) = \lfloor n/3 \rfloor + 1$ . Consideremos la  $(a_n + 1)$ -coloración  $\rho$  tal que:

- (i) Para cada  $0 \leq r \leq a_n - 1$ , se le asigna el color  $r$  a las flechas  $v_{3r}v_{3r+3}$ ,  $v_{3r+1}v_{3r+4}$ ,  $v_{3r+2}v_{3r+5}$ ,  $v_{3r}v_{3r+1}$  y  $v_{3r+2}v_{3r+3}$ .
- (ii)  $\rho^{-1}(a_n) = \{v_{3s+1}v_{3s+2} \mid 0 \leq s \leq a_n - 1\} \cup \{v_{n-1}v_0, v_{n-1}v_2\}$ .

Claramente toda trayectoria  $P \subseteq C_{(3)}$  de longitud  $j \leq a_n$  es una geodésica donde  $j$  colores ocurren cíclicamente, dichos colores están contenidos en  $0, 1, \dots, a_n$  si  $v_{n-1}v_2 \in A(P)$ , o bien, contenidos en  $0, 1, \dots, a_n - 1$  si  $v_{n-1}v_2 \notin A(P)$ . Entonces para cada par de vértices  $v_i$  y  $v_{i+3j}$  con  $j \leq a_n$  se tiene que la geodésica  $P = v_i C_{(3)} v_{i+3j}$  es un arcoíris. Para  $v_i$  y  $v_{i+3j+1}$  donde  $j < a_n$ , veremos que la geodésica  $v_i C_{(3)} v_{i+3j} v_{i+3j+1}$  es un arcoíris, primero nótese que en  $v_i C_{(3)} v_{i+3j}$  ocurren  $j$  colores consecutivos, a saber  $r, r + 1, \dots, r + j - 1$  considerados (mód  $a_n$ ) cuando  $v_{n-1}v_2 \in A(P)$ , o bien, si  $v_{n-1}v_2 \notin A(P)$ , se consideran (mód  $a_n - 1$ ), y también observemos que:

- si  $v_{i+3j} = v_{n-1}$  o  $i + 3j \equiv 1 \pmod{3}$ , entonces  $v_{i+3j}v_{i+3j+1} \in \rho^{-1}(a_n)$ ;
- si  $i + 3j \equiv 0 \pmod{3}$  y  $v_{i+3j} \neq v_{n-1}$ , entonces  $v_{i+3j}v_{i+3j+1} \in \rho^{-1}(r + j)$ , donde  $r + j$  es considerado (mód  $a_n - 1$ );
- si  $i + 3j \equiv 2 \pmod{3}$ , entonces  $v_{i+3j}v_{i+3j+1} \in \rho^{-1}(r + j)$ , con  $r + j$  (mód  $a_n$ ).

En cada caso el color asignado a  $v_{i+3j}v_{i+3j+1}$  no ocurre en  $v_i C_{(3)} v_{i+3j}$ , entonces  $P$  es un arcoíris geodésico.

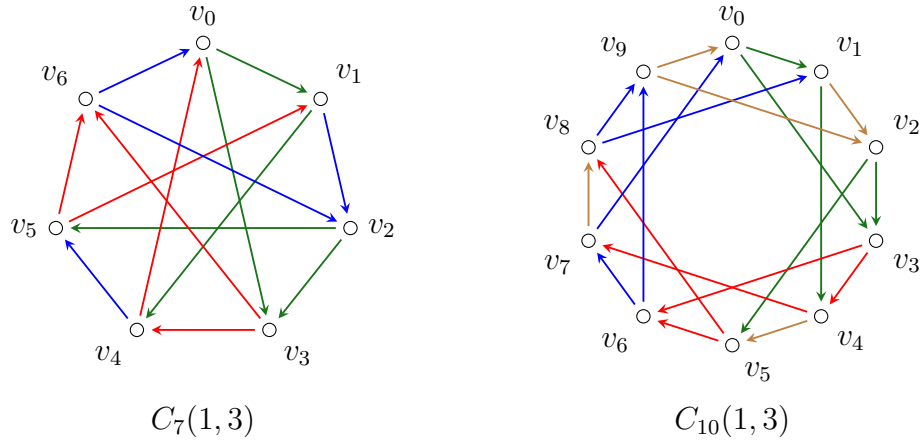


Figura 2.4: Ejemplos de coloraciones para el caso  $n \equiv 1$  (mód 3).

Finalmente, para todo par de vértices  $v_i$  y  $v_{i+3j+2}$  con  $j < a_n$  veremos que la geodésica  $P = v_i C_{(3)} v_{i+3j} v_{i+3j+1} v_{i+3j+2}$  es un arcoíris. Como el caso anterior, hay  $j$  colores consecutivos que ocurren sobre  $v_i C_{(3)} v_{i+3j}$ , a saber  $r, r+1, \dots, r+j-1$ , además

- ▶ si  $i+3j \equiv 0$  y  $v_{i+3j} \neq v_{n-1}$ , entonces  $v_{i+3j} v_{i+3j+1}$  y  $v_{i+3j+1} v_{i+3j+2}$  tienen colores  $r+j$  (mód  $a_n - 1$ ) y  $a_n$  respectivamente;
- ▶ si  $v_{i+3j} = v_{n-1}$  o  $i+3j \equiv 1$ , entonces  $v_{i+3j} v_{i+3j+1}$  y  $v_{i+3j+1} v_{i+3j+2}$  tienen colores  $a_n$  y  $r+j$  (mód  $a_n - 1$ );
- ▶ si  $i+3j \equiv 2$ , entonces  $v_{i+3j} v_{i+3j+1}$  y  $v_{i+3j+1} v_{i+3j+2}$  tienen colores  $r+j$  y  $r+j+1$  (mód  $a_n$ ).

De nuevo, en cada caso, los colores de  $v_{i+3j} v_{i+3j+1}$  y  $v_{i+3j+1} v_{i+3j+2}$  no ocurren sobre  $v_i C_{(3)} v_{i+3j}$ , por tanto  $P$  es arcoíris geodésico. Por tanto  $\rho$  es una coloración fuerte por arcoíris. ■

Si  $\mathbf{s} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es una sucesión y  $k \leq n$ , se denota por  $\mathbf{s}^k$  a la subsucesión de los primeros  $k$  elementos de  $\mathbf{s}$ , es decir,  $\mathbf{s}^k = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Sea  $\rho$  una coloración sobre una digráfica  $D$  y sea  $P \subseteq D$  una trayectoria, se denotará por  $\rho[P]$  a la sucesión de colores de las flechas de  $P$ .

**Lema 2.20.** Si  $n \geq 11$  con  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , entonces  $\text{src}(C_n(1, 3)) \leq \lfloor n/3 \rfloor + 1$ .

*Demostración.* Definamos la  $(a_n + 1)$ -coloración  $\rho$  tal que

- (i) A las flechas  $v_1v_4, v_1v_2, v_2v_3, v_5v_6$  y  $v_{n-2}v_{n-1}$  se les asigna el color 0.
- (ii) Para cada  $1 \leq r \leq a_n - 3$ , se les asigna el color  $r$  a las flechas contenidas en el conjunto

$$\{v_i v_{i+3} \mid i = 3r - 1, 3r, 3r + 1\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i = 3r + 1, 3r + 3, 3r + 5\}.$$

- (iii) El color  $a_n - 2$  es asignado a las flechas del conjunto

$$\{v_i v_{i+3} \mid i = n - 9, n - 8, n - 7\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i = n - 7, n - 5, 0\}.$$

- (iv) Las flechas  $v_{n-6}v_{n-3}, v_{n-4}v_{n-1}, v_{n-2}v_1, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_0$  y  $v_2v_3$  tienen color  $a_n - 1$ .
- (v) Se les asigna el color  $a_n$  a las flechas  $v_{n-5}v_{n-2}, v_{n-3}v_0, v_{n-1}v_2, v_{n-3}v_{n-2}$  y  $v_3v_4$ .

De la definición de  $\rho$ , se sigue que la sucesión de colores de  $C_{(3)}$  (iniciando en  $v_0$ ) es  $(0, 1, \dots, a_n - 2, a_n, a_n - 1, 0, \dots, a_n, 1, \dots, a_n)$ , y además, no hay dos flechas consecutivas en  $C_{(1)}$  con el mismo color. Entonces, para  $0 \leq i \leq n - 1$ , las siguientes geodésicas son arcoíris:  $v_i v_{i+1}$ ,  $v_i v_{i+1} v_{i+2}$  y  $v_i C_{(3)} v_{i+3j}$  donde  $1 \leq j \leq a_n$ . Para  $v_i$  y  $v_{i+3j+1}$ , con  $0 \leq i \leq n - 1$  y  $1 \leq j \leq a_n$ , consideremos los siguientes arcoíris:

- (a) Si  $i = 0$  o  $i = 3s + 2$  con  $s < a_n - 2$ , entonces  $P = v_i v_{i+3} v_{i+4} C_{(3)} v_{i+3j+1}$ , donde la sucesión de colores de  $P$  es  $(0, a_n, 1, 2, \dots, a_n - 1)^{j+1}$  si  $i = 0$ , o bien,  $(s + 1, s, s + 2, s + 3, \dots, a_n - 2, a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, s - 1)^{j+1}$  cuando  $i \neq 0$ .

- (b) Si  $i = n-3, n-2$  o  $i = 3s+1$  con  $1 \leq s \leq a_n$ , sea  $P = v_i v_{i+1} C_{(3)} v_{i+3j+1}$ , donde

$$\rho[P] = \begin{cases} (a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, a_n - 2)^{j+1} & \text{si } i = n - 3; \\ (0, a_n, 1, 2, \dots, a_n - 1)^{j+1} & \text{si } i = n - 2; \\ (a_n - 1, 0, 1, \dots, a_n - 2, a_n)^{j+1} & \text{si } i = n - 1; \\ (s, s + 1, \dots, a_n, 0, 1, \dots, s - 1)^{j+1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (c) Si  $i = 3s$  con  $1 \leq s \leq a_n - 1$ , entonces  $P = v_i C_{(3)} v_{i+3j} v_{i+3j+1}$  si  $j \neq a_n$ , o  $P = v_i v_{i+1} C_{(3)} v_{i+3j+1}$  si  $j = a_n$ , donde

$$\rho[P] = \begin{cases} (a_n, 1, 2, \dots, a_n - 1)^{j+1} & \text{si } i = 3 \text{ y } j \neq a_n; \\ (s - 1, s, \dots, a_n, 0, 1, \dots, s - 3)^{j+1} & \text{si } i \neq 3 \text{ y } j \neq a_n; \\ (s, s + 1, \dots, a_n - 2, a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, s - 1) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (d) Cuando  $i = n - 6$ , consideramos la trayectoria  $P = v_i v_{i+3} v_{i+4}$  si  $j = 1$ , o bien,  $P = v_i C_{(3)} v_{i+6} v_{i+7} C_{(3)} v_{i+3j+1}$  si  $j \neq 1$ , donde tenemos que  $\rho[P] = (a_n - 1, a_n, 0, 1, \dots, a_n - 2)^{j+1}$ .

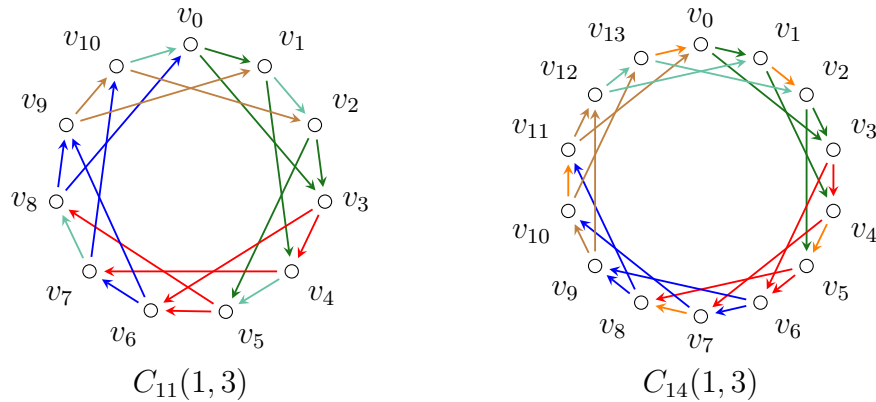


Figura 2.5: Ejemplos de coloraciones fuertes por arcoíris del Teorema 2.20.

Para  $v_i$  y  $v_{i+3j+2}$ , donde  $0 \leq i \leq n - 1$  y  $1 \leq j \leq a_n - 1$ , consideramos los siguientes arcoíris.

(a) Si  $i = 0$ , sea  $P = v_0v_3v_4v_5C_{(3)}v_{3j+2}$  donde

$$\rho[P] = (0, a_n, 1, 2, \dots, a_n - 1)^{j+2}.$$

(b) Si  $i = 3s$  con  $1 \leq s \leq a_n - 1$ , consideramos  $P = v_3C_{(3)}v_{n-2}v_{n-1}v_0$  si  $i = 3$  y  $j = a_n$ , o  $P = v_iv_{i+1}v_{i+2}C_{(3)}v_{i+3j+2}$  en otro caso, donde

$$\rho[P] = \begin{cases} (1, 2, \dots, a_n - 2, a_n, 0, a_n - 1) & \text{si } i = 3 \text{ y } j = a_n; \\ (a_n, 1, 2, \dots, a_n - 1)^{j+2} & \text{si } i = 3 \text{ y } j \neq a_n; \\ (s - 1, s, \dots, a_n, 0, 1, \dots, s - 2)^{j+2} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(c) Si  $i = 3s + 1$  con  $0 \leq s \leq a_n - 2$ , entonces  $P = v_iv_{i+1}v_{i+2}C_{(3)}v_{i+3j+2}$  donde  $\rho[P] = (0, a_n - 1, 1, 2, \dots, a_n - 2, a_n)^{j+2}$  si  $i = 1$ . Por otro lado,  $\rho[P] = (a_n - 2, a_n - 3, a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, a_n - 4)^{j+2}$ , si  $i = n - 7$ . En cualquier otro caso

$$\rho[P] = (s, s - 1, s + 1, s + 2, \dots, a_n - 2, a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, s - 2)^{j+2}.$$

(d) Si  $i = 3s + 2$  con  $s \leq a_n - 1$  y  $j \neq a_n - 1$ , sea  $P = v_iv_{i+1}v_{i+2}C_{(3)}v_{i+3j+2}$  donde

$$\rho[P] = \begin{cases} (a_n - 1, a_n, 1, 2, \dots, a_n - 2)^{j+2} & \text{si } i = 2; \\ (0, 1, \dots, a_n - 1)^{j+2} & \text{si } i = 5; \\ (s - 1, s, \dots, a_n, 1, 2, \dots, s - 2)^{j+2} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(e) Si  $i = 3s + 2$  con  $s \leq a_n - 1$  y  $j = a_n - 1$ , consideramos los siguientes casos. Si  $i = 2$ , entonces  $P = v_2C_{(3)}v_{n-3}v_{n-2}v_{n-1}$  donde  $\rho[P] = (1, 2, \dots, a_n, 0)$ . Si  $i = n - 6$ , sea  $P = v_{n-6}v_{n-3}v_0v_1v_2C_{(3)}v_{n-9}$  donde  $\rho[P] = (a_n - 1, a_n, a_n - 2, 0, 1, \dots, a_n - 3)$ . En otro caso, sea  $P = v_iv_{i+3}v_{i+4}C_{(3)}v_{i+3j+1}v_{i+3j+2}$  donde para  $i = n - 9$  se tiene que  $\rho[P] = (a_n - 2, a_n - 3, a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, a_n - 4)$ , o bien, en otro caso  $\rho[P] = (s + 1, s, s + 2, s + 3, \dots, a_n - 2, a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, s - 1)$ .

(f) Si  $i = n - 4, n - 3, n - 2, n - 1$ , entonces  $P = v_i v_{i+1} v_{i+4} v_{i+5} C_{(3)} v_{i+3j+2}$  donde

$$\rho[P] = \begin{cases} (a_n - 1, a_n, a_n - 2, 0, 1, \dots, a_n - 3)^{j+2} & \text{si } i = n - 4; \\ (a_n, a_n - 1, 0, 1, \dots, a_n - 2)^{j+2} & \text{si } i = n - 3; \\ (0, a_n, a_n - 1, 1, 2, \dots, a_n - 2)^{j+2} & \text{si } i = n - 2; \\ (a_n - 1, 0, a_n, 1, 2, \dots, a_n - 2)^{j+2} & \text{si } i = n - 1. \end{cases}$$

En cada caso  $P$  es un arcoíris geodésico entre sus extremos, por lo cual  $\rho$  es una coloración fuerte por arcoíris. ■

Con lo desarrollado al momento, sólo queda determinar  $src(C_n(1, 3))$  para el caso  $n = 8$ . En el siguiente lema se establece tal parámetro, pero omitiremos la prueba por el momento, debido a que su longitud resta fluidez al camino que nos lleva al resultado buscado. Bastará por el momento mostrar en la Figura 2.6 un ejemplo de una 4-coloración por arcoíris fuerte de  $C_8(1, 3)$ . De cualquier forma, dicha demostración puede consultarse en el Apéndice.

**Lema 2.21.**  $rc(C_8(1, 3)) = src(C_8(1, 3)) = 4$ . ■

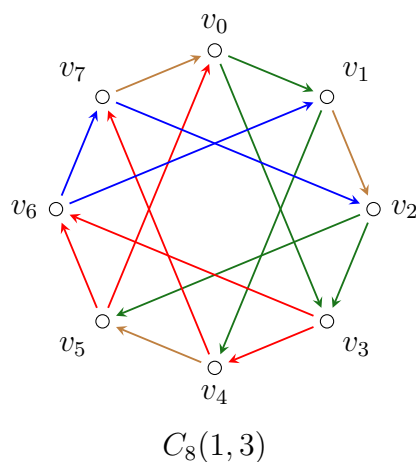


Figura 2.6: Una 4-coloración fuerte por arcoíris de  $C_8(1, 3)$ .

**Teorema 2.22.** *Para  $n \geq 4$  se cumple*

$$rc(C_n(1, 3)) = src(C_n(1, 3)) = \begin{cases} \lfloor n/3 \rfloor + 2 & \text{si } n = 5, 8; \\ \lfloor n/3 \rfloor + 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Demostración.** Primero, observemos que  $C_5(1, 3) \cong C_5(1, 2)$ , entonces por el Teorema 2.9 obtenemos  $rc(C_5(1, 3)) = src(C_5(1, 3)) = 3$ . El caso  $n = 8$  ha sido establecido en el lema anterior. El caso  $n \equiv 0 \pmod 3$  es consecuencia del Teorema 2.16. Para  $n \equiv 1, 2 \pmod 3$  donde  $n \neq 5, 8$ , los lemas 2.19 y 2.20 implican que  $src(C_n(1, 3)) \leq \lfloor n/3 \rfloor + 1$ . Además  $rc(C_n(1, 3)) \geq diám(C_n(1, 3)) = \lfloor n/3 \rfloor + 1$ , a partir de lo cual el resultado se sigue. ■

**Corolario 2.23.** *Para  $k \geq 1$*

$$(i) \quad rc(C_{3k+1}(1, 2k+1)) = src(C_{3k+1}(1, 2k+1)) = k+1.$$

$$(ii) \quad rc(C_{3k+2}(1, k+1)) = src(C_{3k+2}(1, k+1)) = \begin{cases} k+2 & \text{si } k = 1, 2; \\ k+1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Demostración.** Dado que  $3(2k+1) \equiv 1 \pmod{3k+1}$  y  $3(k+1) \equiv 1 \pmod{3k+2}$ , por los Teoremas 2.8 y 2.22, el resultado se sigue. ■

Vale la pena observar que en los resultados vistos hasta el momento se ha establecido la igualdad entre los números de conexidad por arcoíris en las circulantes correspondientes. A continuación, estableceremos sólo el número de conexidad fuerte por arcoíris para las circulantes del tipo  $C_n(1, n-2)$  con  $n$  par.

**Lema 2.24.** *Sea  $n \geq 5$ , entonces  $diám(C_n(1, n-2)) = \lfloor n/3 \rfloor + 1$ .*

**Demostración.** Si  $n \equiv 0 \pmod 3$ , notemos que hay exactamente dos  $v_i v_{n/3}$ -geodésicas para cada  $i$ , a saber,  $v_i C_{(1)} v_{i+(n/3)}$  y  $v_i C_{(n-2)} v_{i+(n/3)}$ . A partir de lo anterior, es fácil verificar que  $d(v_i, v_{i+(n/3)+1}) = (n/3) + 1$ . Por otro lado, cuando  $n \equiv 1 \pmod 3$ , entonces para cualquier  $i$  se tiene que  $v_i C_{(n-2)} v_{i+\lfloor n/3 \rfloor + 1}$  es la única  $v_i v_{i+\lfloor n/3 \rfloor + 1}$ -geodésica, la cual tiene longitud  $\lfloor n/3 \rfloor$ . Por lo cual



$d(v_i, v_{i+\lfloor n/3 \rfloor + 2}) = \lfloor n/3 \rfloor + 1$ . Finalmente, si  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , observemos que  $v_i C_{(1)} v_{i+\lfloor n/3 \rfloor + 1}$  es la única  $v_i v_{i+\lfloor n/3 \rfloor + 1}$ -geodésica para cualquier  $i$ , es decir,  $d(v_i, v_{i+\lfloor n/3 \rfloor + 1}) = \lfloor n/3 \rfloor + 1$ . Además, en cualquier caso, podemos observar que  $d(v_i, v_j) \leq \lfloor n/3 \rfloor + 1$  para cualesquiera vértices  $v_i$  y  $v_j$ . Concluimos que  $\text{diám}(C_n(1, n-2)) = \lfloor n/3 \rfloor + 1$ . ■

**Lema 2.25.**  $\text{src}(C_{2k}(1, 2k-2)) \leq k$  para toda  $k \geq 5$ .

**Demostración.** Procederemos a definir una  $k$ -coloración en  $C_{2k}(1, 2k-2)$  para dos casos distintos. Cuando  $k = 2r + 1$  con  $r \geq 2$ , entonces sea  $\rho_1$  tal que  $\rho_1(v_i v_j) = p$ , siempre que  $i \in \{p, p+k\}$  donde  $0 \leq p \leq k-1$ . Por otro lado, si  $k = 2r$  con  $r \geq 3$ , consideramos a  $\rho_1$  tal que  $\rho_2^{-1}(p) = \{v_{2p+1} v_{2p+2}, v_{2p+k} v_{2p+k+1}, v_{2p} v_{2p-2}, v_{2p+1} v_{2p-1}\}$  para cada  $0 \leq p \leq k-1$ .

Sean  $v_i, v_j \in V(C_{2k}(1, 2k-2))$ . Durante el resto de la prueba, el número  $j-i$  siempre será tomado (mód  $2k$ ). Consideremos la trayectoria

$$P_{i,j} = \begin{cases} v_i C_{(1)} v_j & \text{si } j-i \leq k/3; \\ v_i C_{(2k-2)} v_j & \text{si } j-i \equiv 0 \pmod{2} \text{ y } j-i < k/3; \end{cases}$$

Es claro que  $P_{i,j}$  es un arcoíris bajo  $\rho_m$  con  $m \in \{1, 2\}$ . Supongamos entonces que  $j-i \equiv 1 \pmod{2}$  y  $j-i > k/3$ . Si  $k = 2r + 1$  con  $r \geq 2$ , notemos que  $P_{i,j} = v_i C_{(2k-2)} v_{j-1} v_j$  usa los colores  $i, i-2, \dots, i-2s$  donde  $s = d(v_i, v_j) \leq k/3 < k$  e  $i-2t$  es considerado mód  $k$  para cada  $0 \leq t \leq s$ , por tanto  $P_{i,j}$  es un arcoíris. Ahora bien, si  $k = 2r$  con  $r \geq 3$ , entonces sea

$$P_{i,j} = \begin{cases} v_i v_{i-2} v_{i-1} C_{(2k-2)} v_j & \text{si } i \text{ es par;} \\ v_i C_{(2k-2)} v_{j-1} v_j & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

En cualquier caso es fácil verificar que  $P_{i,j}$  es un arcoíris. Dado además que  $P_{i,j}$  es una geodésica, concluimos que  $\text{src}(C_{2k}(1, 2k-2)) \leq k$ . ■

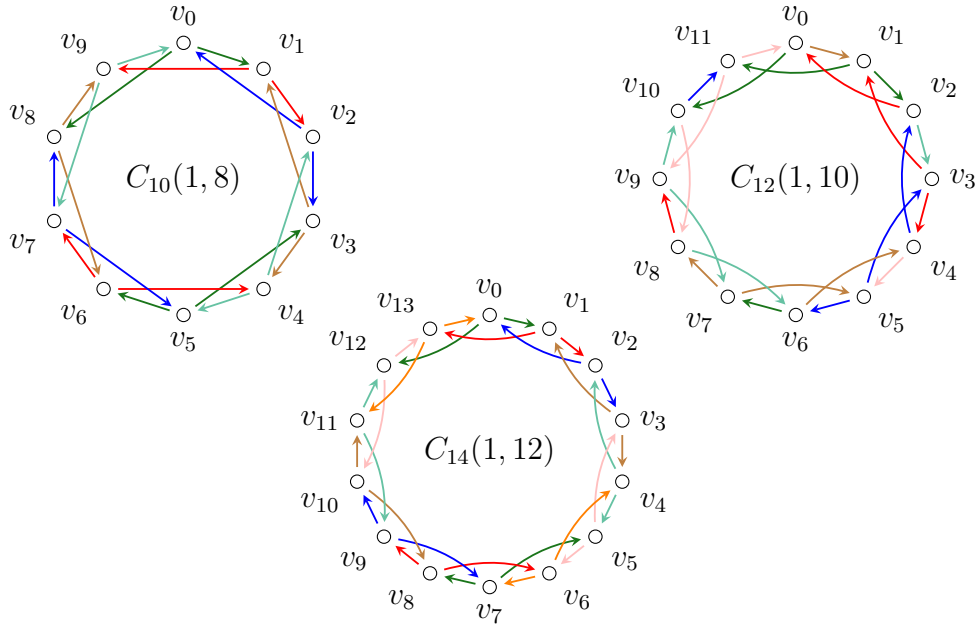


Figura 2.7:  $C_n(1, n - 2)$  para  $9 \leq n \leq 17$ .

**Teorema 2.26.**  $\text{src}(C_{2k}(1, 2k - 2)) \geq k$  para toda  $k \geq 5$ ,  $k \neq 6$ .

*Demostración.* Observemos que  $C_{(2k-2)}$  es la unión ajena de dos  $k$ -ciclos, sea  $C$  uno de tales ciclos. Así, cualquier  $(k - 1)$ -coloración  $\rho$  asigna el mismo color a al menos dos flechas  $a$  y  $b$  de  $C$ . Ahora, si  $k = 2r + 1$  con  $r \geq 2$ , notemos que  $a$  y  $b$  deben estar contenidas en una trayectoria  $v_i C v_{i+k-1}$  para algún  $i$ , y notemos que dicha trayectoria es la única  $v_i v_{i+k-1}$ -geodésica en  $C_{2k}(1, 2k - 2)$  (pues  $k - 1 > r + 1$  y  $d(v_i, v_{i+k-1}) = r + 1$ ).

Análogamente, si  $k = 2r$  con  $r \geq 4$ , notemos que  $a$  y  $b$  deben estar contenidas en una trayectoria  $v_i C v_{i+k-2}$  para algún  $i$ , y notemos que dicha trayectoria es la única  $v_i v_{i+k-2}$ -geodésica en  $C_{2k}(1, 2k - 2)$  (pues  $k - 2 > r + 1$  y  $d(v_i, v_{i+k-2}) = r + 1$ ). En cualquier caso,  $\rho$  no es una coloración fuerte por arcoíris, es decir,  $\text{src}(C_{2k}(1, 2k - 2)) \geq k$ . ■

**Teorema 2.27.**  $\text{src}(C_{2k}(1, 2k - 2)) = k$  para toda  $k \geq 2$ ,  $k \neq 6$ .

**Demostración.** Los casos  $k = 2, 3, 4$  fueron probados en los Teoremas 2.9, 2.10 y 2.28 respectivamente. Mientras que para  $k \geq 5$  tenemos los Lemas 2.26 y 2.25. ■

Del teorema anterior se deriva que existen digráficas  $D$  tales que la diferencia entre  $src(D)$  y  $diám(D)$  puede ser arbitrariamente grande, pues para las circulante del tipo  $C_{2k}(1, 2k - 2)$  su número de conexidad fuerte por arcoíris es igual a  $k$ , mientras que su diámetro es  $\lfloor 2k/3 \rfloor + 1$ . Además, dado que  $rc(D)$  pertenece al intervalo definido por esa diferencia, se presenta el siguiente problema.

**Problema 2.** *Determinar si existen  $n > 0$  y  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n - 1\}$  tales que  $rc(C_n(S)) < src(C_n(S))$ .*

En el siguiente teorema estudiamos los números de conexidad por arcoíris en las circulantes  $C_n(1, k)$ , donde  $n \leq 10$ , que no han sido determinados anteriormente.

**Teorema 2.28.** *Sea  $D \in \{C_8(1, 6), C_9(1, 6), C_{10}(1, 4)\}$ , entonces se cumple que  $src(D) = rc(D) = 4$ .*

**Demostración.** Sea  $\rho$  una 3-coloración de  $C_8(1, 6)$ , entonces hay (al menos) dos flechas del mismo color en una trayectoria de longitud 3 contenida en  $C_{(1)}$ , sin pérdida de generalidad supongamos que tales flechas están en  $v_0v_1v_2v_3$ . Dado que cualquier otra  $v_0v_3$ -trayectoria tiene longitud al menos 4, entonces no hay  $v_0v_3$ -arcoíris, por lo cual  $rc(C_8(1, 6)) \geq 4$ . Por otro lado, las digráficas  $C_9(1, 6)$  y  $C_{10}(1, 4)$  tienen diámetro igual a 4. Así, en cualquier caso tenemos que  $rc(D) \geq 4$ . Además, es fácil verificar que las 4-coloraciones de las digráficas presentadas en la Figura 2.8 son coloraciones fuertes por arcoíris, por tanto  $src(D) = rc(D) = 4$  para cada  $D$ . ■

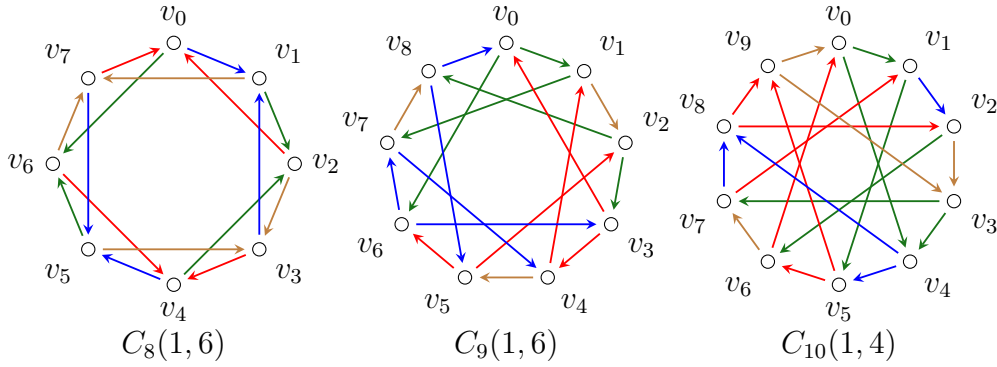


Figura 2.8: Coloraciones fuertes por arcoíris.

En la siguiente tabla presentamos los números de conexidad por arcoíris para digráficas circulantes del tipo  $C_n(1, k)$  para  $n \leq 17$  y  $k \leq 14$ . Por ejemplo, las primeras dos columnas se corresponden al Corolario 2.9 y Teorema 2.22 respectivamente, mientras que la diagonal superior se corresponde al Teorema 1.20. El número aparece entre paréntesis cuando es igual al diámetro, y tiene un asterisco cuando sólo se refiere al número de conexidad fuerte por arcoíris, de lo contrario ambos números son iguales.

En dicha tabla podemos observar un comportamiento simétrico en los primeros niveles, el cual se rompe en el caso del número de conexidad fuerte por arcoíris cuando  $n = 10$ , pues  $src(C_{10}(1, 3)) = 4$  y  $src(C_{10}(1, 8)) = 5$ . Asimismo, podemos formular los siguientes problemas.

**Problema 3.** *Determinar si existen  $n \geq 10$  y  $2 \leq k < n/2$  tales que  $rc(C_n(1, k)) \neq rc(C_n(1, n - k + 1))$ .*

**Problema 4.** *Determinar si para cualesquiera  $n \geq 3$  y  $2 \leq k \leq n - 2$  se cumple que  $rc(C_n(1, k)) \leq rc(C_{n+1}(1, k))$  o  $src(C_n(1, k)) \leq src(C_{n+1}(1, k))$ .*

$n \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	(2)	(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	3	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	(3)	(3)	(3)	(3)	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	4	(3)	4	(3)	4	-	-	-	-	-	-	-	-
8	(4)	4	(4)	(4)	4	(4)	-	-	-	-	-	-	-
9	5	(4)	(4)	5	(4)	(4)	5	-	-	-	-	-	-
10	(5)	(4)	(4)	(5)	(5)	(4)	5*	(5)	-	-	-	-	-
11	6	(4)	(4)		6				6	-	-	-	-
12	(6)	(5)	(5)		(6)	(6)				(6)	-	-	-
13	7	(5)				7		(5)			7	-	-
14	(7)	(5)		(5)		(7)	(7)				7*	(7)	-
15	8	(6)					8						8
16	(8)	(6)	(6)				(8)	(8)		(6)			8*
17	9	(6)			(6)			9					
18	(9)	(7)						(9)	(9)				

## 2.2. Cactus

Sea  $Q$  una digráfica fuerte asimétrica con conjunto de vértices  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , se dice que  $Q$  es un *cactus* si toda flecha de  $Q$  pertenece a exactamente un ciclo dirigido. Esta sección estará enfocada a la familia de digráficas cactus. Primero, presentaremos un teorema de caracterización de esta familia y ciertas propiedades estructurales que cumplen las coloraciones por arcoíris en los cactus. Luego, se establecerán cotas (inferior y superior) justas para el número de conexión por arcoíris de cualquier cactus, las cuales se darán en función del orden y el número de ciclos del cactus. Además, mediante la estructura formada por los vértices de corte, se caracterizará a las subfamilias que cumplen dichas cotas. Finalmente, se presentará una construcción para obtener

un cactus de orden arbitrario cuyo número de conexión por arcos sea igual a cualquier valor dado dentro del intervalo determinado por las cotas.

Recordemos, que un *bloque* de una digráfica es una subdigráfica máxima por contención con la propiedad de no tener vértices de corte. La *gráfica de bloques* de  $D$ , denotada  $B(D)$ , es la gráfica con conjunto de vértices  $V(B(D)) = \{B_i \mid B_i \text{ es bloque de } D\}$  y donde  $B_i B_j \in E(B(D))$  si  $B_i$  y  $B_j$  tiene un vértice en común. Además, dada una digráfica  $D$  con  $A(D) = \{a_1, \dots, a_m\}$ , la *gráfica subyacente* de  $D$ , denotada por  $G(D)$ , es la gráfica tal que  $V(D) = V(G(D))$  y  $E(G(D)) = \{e_1, \dots, e_m\}$  donde la arista  $e_i$  tiene los mismo extremos que  $a_i$  para  $1 \leq i \leq m$ , y  $e_i \neq e_j$  para  $i \neq j$ . Se dice que  $D$  es *conexa* si  $G(D)$  es también conexa, y  $x$  es un *vértice de corte* de  $D$  si es a su vez un vértice de corte de  $G(D)$ . A continuación, veremos una caracterización de las digráficas cactus.

**Teorema 2.29.** *Sea  $Q$  una digráfica con  $n$  vértices y  $m$  flechas, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (I)  $Q$  es un cactus.
- (II)  $Q$  es una digráfica fuerte tal que todo bloque es un ciclo dirigido.
- (III) Sea  $q$  el número de bloques de  $Q$ , entonces  $Q$  tiene una descomposición en ciclos dirigidos  $C_{n_1}, \dots, C_{n_q}$  tal que, para cada  $k = 2, \dots, q$  se tiene

$$\left| V(C_{n_k}) \cap \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} V(C_{n_i}) \right) \right| = 1$$

$$\text{y } q = m - n + 1.$$

- (IV) Entre cada par de vértices de  $Q$  hay exactamente una trayectoria dirigida.

**Demostración.** [(I)  $\Rightarrow$  (II)] Sean  $Q$  un cactus,  $B$  un bloque de  $Q$  y  $C$  un ciclo inducido de longitud máxima en  $B$ . Supongamos que  $C \neq B$ , entonces

hay una  $xy$ -trayectoria  $P$  en  $B$  tal que  $x, y \in V(C)$  y  $A(P) \cap A(C) = \emptyset$ . Por lo cual  $C$  y  $yCxPy$  son dos ciclos distintos que contienen cada flecha en  $yCx$ , contradiciendo que  $Q$  es un cactus.

[[*II*]  $\Rightarrow$  [*III*]] Si  $Q$  cumple (*II*), basta mostrar que  $q = m - n + 1$ . Procederemos por inducción sobre  $q$ . Si  $q = 1$ , entonces  $Q$  es un ciclo y  $m - n = 0$ . Supongamos que el enunciado es cierto para cualquier cactus con  $q - 1$  bloques. Sean  $B$  un bloque terminal de  $Q$  y  $u \in V(B) \cap K_Q$ , notemos que  $n(B) = m(B)$ , pues  $B$  es un ciclo. Entonces  $Q' = Q - (B - u)$  es un cactus con  $q - 1$  bloques, así por la hipótesis inductiva

$$q = m(Q') - n(Q') + 2 = m - m(B) - (n - n(B) + 1) + 2 = m - n + 1.$$

[[*IV*]  $\Rightarrow$  (*I*)] Supongamos que  $Q$  cumple (*IV*) y que tiene una flecha  $uv$  contenida en al menos dos ciclos distintos  $C$  y  $C'$ . Entonces  $vCu$  y  $vC'u$  son dos  $vu$ -trayectorias, contradiciendo la elección de  $Q$ .

Dado que las pruebas de (*I*)  $\Rightarrow$  (*IV*), (*II*)  $\Rightarrow$  (*I*) y (*III*)  $\Rightarrow$  (*II*) son directas, el resultado se cumple. ■

De ahora en adelante, siempre consideraremos un cactus junto con la descomposición en ciclos dada en el inciso (*III*) del teorema anterior, es claro que tal descomposición es única, salvo por el orden de los ciclos. Dado que hay una única trayectoria dirigida entre cualesquiera dos vértices de  $Q$ , entonces  $rc(Q) = src(Q)$ . Dados  $u, v \in V(Q)$ , se denotará por  $uQv$  a la única  $uv$ -trayectoria en  $Q$ . Ahora, notemos que por (*IV*), tenemos que para cada flecha  $uv \in A(Q)$  se cumple que  $Q - uv$  no tiene  $uv$ -trayectorias, es decir,  $Q - uv$  no es fuerte. Además, denotaremos por  $K_Q$  al conjunto formado por todos los vértices de corte de  $Q$ . También, por cada flecha  $a \in A(Q)$  se denotará por  $C(a)$  al ciclo dirigido que contiene dicha flecha.

El siguiente resultado se sigue a partir del teorema de caracterización anterior.

**Proposición 2.30.** *Sean  $Q$  un cactus y  $u \in V(Q)$ , entonces  $d^+(u) = d^-(u)$ . Más aún,  $u \in K_Q$  si y sólo si  $d^+(u) = d^-(u) > 1$ .  $\square$*

Ahora definiremos una operación de digráficas. Sea  $H$  una subdigráfica de  $D$ . La *contracción* de  $H$  en  $D$  es la digráfica  $D/H$  con conjunto de vértices  $V(D/H) = \{h\} \cup (V(D) \setminus V(H))$ , donde  $h$  es un nuevo vértice que no pertenece a  $D$ , y  $xy \in A(D/H)$  si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:

- (a)  $x, y \in V(D) - V(H)$  y  $xy \in A(D)$ ,
- (b)  $x = h, y \neq h$  y  $yz \in A(D)$  para alguna  $z \in V(H)$ ,
- (c)  $x \neq h, y = h$  y  $zy \in A(D)$  para alguna  $z \in V(H)$ .

En el siguiente lema usamos la contracción aplicada solamente sobre una flecha, pero más adelante será utilizada sobre subdigráficas más complejas.

**Lema 2.31.** *Sea  $\rho$  una coloración por arcoíris sobre un cactus  $Q$  y sea  $uv \in A(Q)$  donde  $u, v \notin K_Q$ , entonces  $|\rho^{-1}(uv)| = 1$ . Más aún, si  $uv$  además está contenido en un ciclo de longitud al menos cuatro, entonces  $rc(Q) = rc(Q/uv) + 1$ .*

**Demostración.** Sea  $a = uv$  con  $u, v \notin K_Q$ , y sea  $b = xy$  cualquier otra flecha de  $Q$ , sean  $C(a)$  y  $C(b)$  los ciclos que contienen a dichas flechas respectivamente. Si  $C(a) = C(b)$ , entonces  $\rho(a) \neq \rho(b)$  por (IV) en el Teorema 2.29. Por otro lado, si  $C(a) \neq C(b)$ , cada  $C(a)C(b)$ -trayectoria contiene un vértice de corte  $w \in V(C(b))$ , sin pérdida de generalidad  $w \neq x$ , entonces  $uQy$  contiene ambas flechas, por lo cual  $\rho(a) \neq \rho(b)$  y  $|\rho^{-1}(a)| = 1$ .

Ahora, sea  $h$  el nuevo vértice en  $Q/a$ . Definimos  $\rho_a$  como la coloración inducida por  $\rho$  en  $Q/a$  tal que

$$\rho_a(xy) = \begin{cases} \rho(xy) & \text{si } x, y \neq h; \\ \rho(vy) & \text{si } x = h; \\ \rho(xu) & \text{si } y = h. \end{cases}$$



Claramente,  $\rho_a$  usa un color menos que  $\rho$ , y cada arcoíris en  $Q$  se corresponde a un arcoíris en  $Q/a$ , entonces  $rc(Q) \geq rc(Q/uv) + 1$ . Análogamente, obtenemos que  $rc(Q) \leq rc(Q/uv) + 1$ , completando el resultado. ■

Del lema anterior se desprende que podemos restringir nuestro estudio en cactus al suponer que los bloques terminales son ciclos de longitud 3, y donde toda arista tiene al menos un vértice de corte como extremo. Ahora estableceremos una condición equivalente para que una coloración en un cactus sea coloración por arcoíris.

**Teorema 2.32.** *Sea  $\rho$  una coloración sobre un cactus  $Q$ . Entonces,  $\rho$  es una coloración por arcoíris si y sólo si para cualesquiera flechas distintas  $a$  y  $b$  tales que  $\rho(a) = \rho(b)$ , se cumple que  $C(a) \neq C(b)$  y toda  $C(a)C(b)$ -trayectoria contiene las colas y sólo las colas de  $a$  y  $b$ , o contiene las cabezas y sólo las cabezas de ambas flechas.*

**Demostración.** Primero, sea  $\rho$  una coloración por arcoíris y sean  $a = uv$  y  $b = xy$  con  $\rho(a) = \rho(b)$ . Notemos que  $C(a) \neq C(b)$  pues cada ciclo en  $Q$  debe ser heterocromático. Claramente, cada  $C(a)C(b)$ -trayectoria contiene dos vértices  $w_a \in K_Q \cap V(C(a))$  y  $w_b \in K_Q \cap V(C(b))$ , no necesariamente distintos. Afirmamos que  $w_a$  y  $w_b$  son las colas o las cabezas de  $a$  y  $b$  respectivamente, de lo contrario sin pérdida de generalidad, sean  $w_a \neq u$  y  $w_b \neq y$ , entonces  $uQy$  contiene ambas flechas  $a$  y  $b$ , contradiciendo que  $\rho$  es una coloración por arcoíris.

Por otro lado, supongamos que  $\rho$  es una coloración donde para cualquier par de flechas  $a$  y  $b$  con  $\rho(a) = \rho(b)$ , entonces  $C(a) \neq C(b)$  y toda  $C(a)C(b)$ -trayectoria contiene las colas o contiene las cabezas de ambas flechas. Ahora, supongamos que  $\rho$  no es una coloración por arcoíris, entonces existe una trayectoria  $P$  que contiene dos flechas  $uv$  y  $xy$  del mismo color. Por hipótesis tenemos que  $C(uv) \neq C(xy)$ , pero  $vPx$  es una  $C(uv)C(xy)$ -trayectoria que no contiene las dos colas, ni las dos cabezas de  $uv$  y  $xy$ , contradiciendo la elección de  $\rho$ . ■

Nótese que el teorema anterior implica que, en una coloración por arcoíris en un cactus, para cada clase cromática con al menos dos flechas, existe un subcactus que contiene todas las colas (cabezas) y sólo las colas (cabezas) de las flechas en dicha clase cromática.

Recordemos que, dado un vértice  $u$  en  $Q$ , la *vecindad* de  $u$  es el conjunto formado por todos los vértices adyacentes a  $u$ , denotada por  $N(u)$ , y el *grado* de  $u$  en  $Q$ , denotado por  $d(u)$ , es el número de flechas incidentes en  $u$ . Claramente  $N(u) = N^+(u) \cup N^-(u)$  y  $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$ . Ahora, si  $u \in V(C_{n_i})$  definimos la  *$i$ -ramificación* de  $u$ , denotada por  $B_i(u)$ , como el subcactus de  $Q$  máximo por contención tal que  $C_{n_i} \subseteq B_i(u)$  y donde  $u$  no es vértice de corte de  $B_i(u)$ . Notemos que cualesquiera dos ramificaciones de un mismo vértice son ajenas por flechas, por lo cual que cada vértice induce una decomposición de  $Q$  en sus ramificaciones. En particular, si un vértice no es de corte, entonces tiene sólo una ramificación, la cual es igual a  $Q$ .

**Lema 2.33.** *Sea  $Q$  un cactus  $k$ -coloreable por arcoíris y sea  $u \in K_Q$  con  $N(u) \cap K_Q = \emptyset$ . Entonces existe una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$  tal que hay un color asignado a todas las flechas que entran a  $u$  y hay otro color asignado a todas las flechas que salen de  $u$ .*

**Demostración.** Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u \in V(C_{n_i})$ , donde para cada  $1 \leq i \leq d^+(u)$  consideramos a  $u_i$  el exvecino de  $u$  en  $C_{n_i}$ . Sea  $\rho$  una  $k$ -coloración arcoíris sobre  $Q$  con  $\rho(uu_1) = 1$  y  $\rho(uu_2) = 2$ . Dado que  $u, u_1 \notin K_{B_1(u)}$  y  $\rho(uu_2) = 2$ , tenemos que  $(uu_1)$  es la única flecha en  $B_1(u) \cup C_{n_2}$  de color 1. Análogamente,  $(uu_2)$  es la única flecha en  $B_2(u) \cup C_{n_1}$  de color 2. Ahora, definamos una  $k$ -coloración  $\rho'$  tal que

$$\rho'(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = uu_2; \\ 2 & \text{si } \rho(a) = 1 \text{ y } a \in A(B_2(u)); \\ \rho(a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean  $a, b \in A(Q)$  con  $\rho'(a) = \rho'(b)$ . Si  $\rho'(a) \neq 1, 2$  o  $a, b \in A(B_2(u))$  o  $a, b \in A(Q) - A(B_2)$ , entonces la condición del Teorema 2.32 se cumple,

pues  $\rho(a) = \rho(b)$  en cada caso. Supongamos que  $\rho(a) = 1$ ,  $a \in A(B_2(u))$  y  $b \in A(Q) - A(B_2)$ , entonces  $a = uu_2$  y  $\rho(b) = 1$ , por lo cual tenemos dos casos. Primero, si  $b \in B_1(u)$ , entonces  $b = uu_1$  y la condición del Teorema 2.32 se cumple trivialmente. En otro caso  $b \in B_i(u)$  con  $i \geq 3$ . Dado que  $\rho(uu_1) = \rho(b)$ , cada  $C_{n_1}C(b)$ -trayectoria contiene  $u$  y la cola de  $b$ , entonces cada  $C_{n_2}C(b)$ -trayectoria contiene las colas de  $a$  y  $b$ .

Este proceso puede ser aplicado a cualquier flecha que sale de  $u$  tal que  $\rho(uu_i) \neq 1$ , de forma que la coloración resultante sea una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$  tal que todas las flechas que salen de  $u$  tengan el color 1. Análogamente, podemos usar esta última coloración para construir una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$  tal que todas las flechas que entren a  $u$  sean de un mismo color (distinto a 1). ■

**Proposición 2.34.** *Sea  $C_{n_i}$  un bloque terminal de un cactus  $Q$  y sea  $u$  el único vértice de corte de  $Q$  contenido en  $C_{n_i}$ . Si  $Q' = Q - (C_{n_i} - u)$ , entonces*

$$rc(Q') + n_i - 2 \leq rc(Q) \leq rc(Q') + n_i - 1.$$

*Más aún, si  $N(u) \cap K_Q = \emptyset$  o existe otro bloque terminal  $C_{n_j}$  que contiene a  $u$ , entonces  $rc(Q) = rc(Q') + n_i - 2$ .*

**Demostración.** La primera desigualdad se sigue del Lema 2.31, pues cada flecha de  $C_{n_i} - u$  tiene un color único. Para la segunda desigualdad, dado que  $u \in K_Q$ , entonces existe  $C_{n_j}$  tal que contiene a  $u$  donde  $j \neq i$ . Sean  $v$  y  $w$  los invECINOS de  $u$  en  $C_{n_i}$  y  $C_{n_j}$  respectivamente y sean  $v'$  y  $w'$  los correspondientes exvecINOS de  $u$ . Por el Lema 2.31 podemos asumir que  $C_{n_i} = wvuv$ . Ahora, sea  $\rho_0$  una coloración por arcoíris mínima sobre  $Q'$  donde  $\rho_0(v'u) = c$  y definimos a la coloración  $\rho$  sobre  $Q$  tal que

$$\rho(a) = \begin{cases} r & \text{si } a = vw; \\ r + 1 & \text{si } a = uv \text{ o } a \in \rho_0^{-1}(c) \setminus A(B_j(v')); \\ c & \text{si } a = vu; \\ \rho_0(a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $r$  y  $r + 1$  son colores nuevos. Sean  $a, b \in A(Q)$  con  $\rho(a) = \rho(b)$ . Si  $a, b \in A(Q')$ , entonces la condición del Teorema 2.32 se cumple, por lo cual podemos suponer  $a \in A(C_{n_i})$  y  $b \in A(Q')$ . Sea  $\rho(a) = r + 1$ , entonces  $a = uw$  y  $b \in A(B_k(v'))$  con  $k \neq j$ . Dado que  $\rho_0(b) = \rho_0(v'u)$  tenemos que toda  $C(b)C_{n_j}$ -trayectoria contiene las colas de  $b$  y  $v'u$ , por lo cual toda  $C(b)C_{n_i}$ -trayectoria contiene las colas de  $b$  y  $uw$ . Ahora, sea  $\rho(a) = \rho_0(v'u)$ , entonces  $a = vu$  y  $b \in A(B_j(v_j))$ . Si  $b = v'u$ , claramente cada  $C_{n_i}C_{n_j}$ -trayectoria contiene  $u$ . Si  $b \neq v'u$  toda  $C(b)C_{n_j}$ -trayectoria contiene las cabezas de  $b$  y  $v'u$  pues  $\rho_0(b) = \rho_0(v'u)$ . Entonces cada  $C(b)C_{n_i}$ -trayectoria contiene las cabezas de  $b$  y  $vu$ . Así en cualquier caso la condición del Teorema 2.32 se cumple, por lo tanto  $\rho$  es una coloración por arcoíris sobre  $Q$  que usa  $rc(Q') + n_i - 1$  colores.

Por otro lado, si  $N(u) \cap K_Q = \emptyset$ , sea  $\rho$  una  $rc(Q)$ -coloración por arcoíris. Por el Teorema 2.33 podemos suponer que todas las flechas que entran a  $u$  son de color 1 y todas las flechas que salen de  $u$  son de color 2. Entonces  $\rho \upharpoonright_{Q'}$ , la restricción de  $\rho$  en  $Q'$ , es una  $(rc(Q') + n_i - 2)$ -coloración por arcoíris. Ahora, si  $C_{n_j}$  es otro bloque terminal que contiene a  $u$ , sea  $\rho$  una coloración por arcoíris mínima sobre  $Q'$  y extendamos esta coloración en  $Q$  de forma que las flechas que entren y salgan de  $u$  en  $C_{n_i}$  tengan los mismos colores que las flechas que entran y salgan de  $u$  en  $C_{n_j}$  respectivamente y asignamos nuevos colores a cada flecha en  $C_{n_i}$  que no incida en  $u$ . Claramente tal coloración es una coloración por arcoíris sobre  $Q$  que usa  $rc(Q') + n_i - 2$  colores. En cualquier caso la igualdad se cumple. ■

La proposición anterior nos dirige al siguiente resultado, en el cuál se establecen cotas inferior y superior para el número de conexidad por arcoíris de cualquier cactus.

**Corolario 2.35.** *Sea  $Q$  un cactus de  $n$  vértices y  $q \geq 2$  ciclos, entonces*

$$n - q + 1 \leq rc(Q) \leq n - 1. \quad \square$$

**Proposición 2.36.** *Sea  $K_Q^* = \{u \in K_Q \mid N(u) \cap K_Q = \emptyset\}$ , entonces se cumple que:*

- (a) Si  $P$  es una trayectoria dirigida de longitud  $k$  con extremos en  $K_Q^*$ , donde  $V(P) \subseteq K_Q^* \cup (V(Q) \setminus K_Q)$ , entonces  $rc(Q) = rc(Q/P) + k$ .
- (b) Si hay un bloque  $C_{n_i}$  de  $Q$  tal que  $V(C_{n_i}) \subseteq K_Q^* \cup (V(Q) \setminus K_Q)$ , entonces  $rc(Q) = rc(Q/C_{n_i}) + n_i - 2$ .
- (c) Si  $H$  es una subdigráfica conexa de  $Q$  con  $V(H) \subseteq K_Q^* \cup (V(Q) \setminus K_Q)$  y todo vértice  $u$  de  $H$  con  $d_H(u) = 1$  es un vértice de corte de  $Q$ , entonces  $rc(Q) = rc(Q/H) + |A(H)| - 2q(H)$ , donde  $q(H)$  es el número de ciclos en  $H$ .

**Demostración.** (a) Por el Lema 2.31 podemos asumir que  $P = x_0x_1 \dots x_k$  es una sucesión alternante de vértices en  $K_Q^*$  y  $V(Q) \setminus K_Q$ , entonces  $k = 2r$  para algún  $r \geq 0$ . Sea  $\rho$  una coloración por arcoíris sobre  $Q$ , por el Teorema 2.33 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las flechas que salen de  $x_{2s}$  tienen color  $2s$  y todas las flechas que entran a  $x_{2s}$  tienen color  $2s + 1$ , para cada  $0 \leq s \leq r$ . Nótese que tales colores no aparecen en ninguna otra flecha de  $Q$ . Sea  $w$  el nuevo vértice de  $Q/P$ , así definimos  $\rho'$  la coloración en  $Q/P$  tal que

$$\rho'(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ sale de } w; \\ 2r + 1 & \text{si } a \text{ entra en } w; \\ \rho(a) & \text{si } a \in A(Q). \end{cases}$$

Claramente  $\rho'$  es una coloración por arcoíris sobre  $G/H$  que usa  $2r$  colores menos que  $\rho$ . Por tanto  $rc(Q) \geq rc(Q/P) + k$ . Análogamente, obtenemos que  $rc(Q) \leq rc(Q/P) + k$ .

(b) Por inducción sobre  $|V(C_{n_i}) \cap K_Q^*|$ . El caso  $|V(C_{n_i}) \cap K_Q^*| = 1$  se sigue de la Proposición 2.34. Supongamos que el enunciado es cierto cuando  $|V(C_{n_i}) \cap K_Q^*| < k$  y consideremos el caso  $|V(C_{n_i}) \cap K_Q^*| = k$ , donde  $k > 1$ . Ahora, el resultado se sigue de (a) y la hipótesis inductiva.

Por otro lado, es claro que (c) se sigue de (a) y (b). ■

Dado  $u \in K_Q$ , sea  $K_Q(u)$  la componente conexa que contiene a  $u$  en la subdigráfica de  $Q$  inducida por  $K_Q$ , y definamos la componente cerrada de  $u$  como la digráfica

$$\overline{K_Q}(u) = K_Q(u) + \{xy \in A(Q) \mid x \in V(K_Q(u)) \text{ o } y \in V(K_Q(u))\}.$$

En el siguiente teorema caracterizaremos a la familia de cactus cuyo número de conexidad por arcoíris es igual a la cota inferior.

**Teorema 2.37.** *Sea  $Q$  un cactus de  $n$  vértices y  $q$  ciclos. Entonces  $K_Q$  es independiente si y sólo si  $rc(Q) = n - q + 1$ .*

**Demostración.** Sea  $K_Q$  independiente, probaremos la suficiencia por inducción sobre  $q$ . Si  $q = 1$  el enunciado se cumple trivialmente. Supongamos que el resultado es cierto para cualquier cactus con  $q - 1$  ciclos. Ahora, sea  $C_{n_1}, \dots, C_{n_q}$  una descomposición en ciclos de  $Q$  (Teorema 2.29) donde  $C_{n_q}$  es un bloque terminal. Además, sea  $Q' = \cup_{i=1}^{q-1} C_{n_i}$ , entonces por hipótesis inductiva tenemos que  $rc(Q') = (n - n_q + 1) - (q - 1) + 1$ . Ahora, por el Teorema 2.34 obtenemos que  $rc(Q) = n - n_q - q + 3 + n_q - 2 = n - q + 1$ .

Por otro lado, si  $K$  no es independiente, sea  $(u, v) \in A(Q)$  tal que  $u, v \in K_Q$ . Notemos que hay al menos 3 ciclos en  $Q$ : el primero contiene a  $(u, v)$ , el segundo contiene a  $u$  pero no a  $v$ , y el último contiene a  $v$  pero no a  $u$ , sin pérdida de generalidad sean  $C_{n_1}, C_{n_2}$  y  $C_{n_3}$  tales ciclos respectivamente y consideremos a  $Q' = C_{n_1} \cup C_{n_2} \cup C_{n_3}$  donde  $Q'$  tiene  $n' = n_1 + n_2 + n_3 - 2$  vértices y  $q' = 3$  ciclos (Figura 2.9). Denotemos por  $x_i^-$  y  $x_i^+$  al predecesor y al sucesor del vértice  $x \in \{u, v\}$  en  $C_{n_i}$ . Dado que  $v_3^+ Q u_2^-$  es un trayectoria hamiltoniana y por el Corolario 2.35 tenemos que  $rc(Q') = n' - 1$ . Por tanto, por el Teorema 2.34,  $rc(Q) \geq rc(Q') + \sum_{i=4}^q (n_i - 1) = n - q + 2$ . ■

**Teorema 2.38.** *Sea  $Q$  un cactus de  $n$  vértices y  $q$  ciclos y sea  $K_Q$  no independiente. Si  $K_Q$  está contenido en un ciclo, entonces  $rc(Q) = n - q + 2$ .*

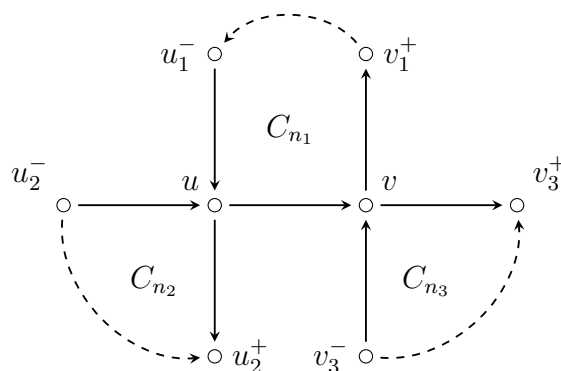


Figura 2.9: El cactus  $Q'$  del Teorema 2.37.

**Demostración.** Por el teorema anterior, basta encontrar una  $(n - q + 2)$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$ . Sea  $V(Q) = \{u_1, \dots, u_n\}$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $K_Q$  está contenido en  $C_{n_1}$ . Además, consideremos el conjunto  $U = \{u_i u_j \in A(Q) \mid u \notin V(C_{n_1}), u_j \in V(C_{n_1})\}$ . Ahora, definamos la  $(n - q + 2)$ -coloración  $\rho$  tal que

$$\rho(a) = \begin{cases} i & \text{si } a \notin U; \\ 0 & \text{si } a \in U. \end{cases}$$

Sean  $a, b \in A(Q)$  con el mismo color. Si  $\rho(a) = \rho(b) \neq 0$ , entonces  $a$  y  $b$  tienen la misma cola. De lo contrario,  $a, b \in U$ , entonces  $C(a) \neq C(b)$  y las cabezas de ambas flechas están en  $C_{n_1}$ . Claramente, toda  $C(a)C(b)$ -trayectoria contiene las cabezas de ambas flechas. Dado que  $|U| = q - 1$ , entonces  $\rho$  es una  $(n - q + 2)$ -coloración por arcoíris. ■

**Teorema 2.39.** Sea  $Q$  un cactus de  $n$  vértices y  $q$  ciclos. Si  $C_{n_i}$  es un ciclo de  $Q$  tal que  $N(V(C_{n_i})) \subseteq V(Q) \setminus K_Q$  y  $V(C_{n_i}) \cap K_Q$  no es independiente, entonces  $rc(Q) = rc(Q/C_{n_i}) + n_i - 1$ .

**Demostración.** Sea  $C_{n_i} = u_1 u_2 \dots u_{n_i} u_1$  y sea  $\rho$  una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$ . Notemos que  $\rho[\partial(V(C_{n_i}))] \not\subseteq \rho[C_{n_i}]$ , entonces existen vértices

$u_r \in V(C_{n_i}) \cap K_Q$  y  $v \in V(C_{n_j})$  con  $j \neq i$  tales que, sin pérdida de generalidad,  $\rho(vu_r) \notin \rho[C_{n_i}]$ . Sean  $u_s \in V(C_{n_i}) \cap K_Q$  y  $w \in N^-(u_s) \setminus C_{n_i}$  tales que  $\rho(wu_s) \neq \rho(vu_r)$  donde  $w \in C_{n_k}$  para  $k \neq i, j$ . Ahora, definamos una nueva coloración

$$\rho'(a) = \begin{cases} \rho(vu_r) & \text{si } a = wu_s; \\ \rho(wu_s) & \text{si } \rho(a) = \rho(vu_r) \text{ y } a \in A(B_k(u_s)); \\ \rho(a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, sólo intercambiamos las ocurrencias de los colores  $\rho(wu_s)$  y  $\rho(vu_r)$  en  $B_k(u_s)$ . Así, como en la prueba del Teorema 2.33, la coloración resultante  $\rho'$  es una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$ . Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\rho(u_i u_{i+1}) = i$  para  $1 \leq i \leq n_i$  y  $\rho(\partial^-(V(C_{n_i}))) = n_i + 1$ . Ahora, si  $\rho(u_r v) \neq r$  para algún  $v \in N^+(u_r)$  con  $v \in V(C_{n_j})$  donde  $j \neq i$ , entonces definimos

$$\rho''(a) = \begin{cases} r & \text{si } a = u_r v; \\ \rho(u_r v) & \text{si } \rho(a) = r \text{ y } a \in A(B_j(u_r)); \\ \rho(a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De nuevo, hemos intercambiado las ocurrencias de los colores  $r$  y  $\rho(u_r v)$  en  $B_j(u_r)$ , por lo tanto  $\rho''$  es una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $Q$ . De esta forma las flechas en  $C_{n_i} \cup \partial(V(C_{n_i}))$  usan exactamente  $n_i + 1$  colores, y tales colores no tienen ocurrencias en ninguna otra flecha, pues  $u_r$  y sus vecinos no son vértice de corte para cualquier  $B_j(u_r)$  con  $j \neq i$ . Entonces podemos suponer que  $\rho(a) = r$  para cada flecha que sale de  $u_r \in V(C_{n_i})$  y  $\rho(\partial(V(C_{n_i}))) = \{n_i + 1\}$ . Ahora, sea  $h$  el nuevo vértice que reemplaza a  $C_{n_i}$  en  $Q/C_{n_i}$  y definamos a  $\rho^*$  una coloración sobre  $Q/C_{n_i}$  tal que

$$\rho^*(xy) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = h; \\ 2 & \text{si } y = h; \\ \rho(xy) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Resulta claro que  $\rho^*$  es una coloración por arcoíris sobre  $Q/C_{n_i}$  que usa  $k - n_i + 1$  colores, por tanto  $rc(Q/C_{n_i}) \leq rc(Q) - n_i + 1$ . Análogamente obtenemos que  $rc(Q) \leq rc(Q/C_{n_i}) + n_i - 1$ . ■



Dado un cactus  $Q$ , si su gráfica de bloques  $B(Q)$  es una trayectoria, entonces cada bloque no terminal de  $Q$  contiene exactamente dos vértices de corte de  $Q$ , y podemos ordenar los bloques de  $Q$  desde un bloque terminal hacia el otro. Denotaremos por  $u_i$  al vértice de corte contenido en  $C_{n_i} \cap C_{n_{i+1}}$  para  $i = 1, \dots, q - 1$ . Además, denotaremos por  $v_{i,j}$  y  $w_{i,j}$  al invecino y al exvecino de  $u_i$  contenido en  $C_{n_j}$  respectivamente. Si  $Q[K_Q]$  es una trayectoria dirigida, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $u_{i+1} = w_{i,i+1}$  para cada  $i = 1, \dots, q - 2$ . A continuación, caracterizaremos a la familia de cactus donde el número de conexidad por arcoíris es igual a la cota superior.

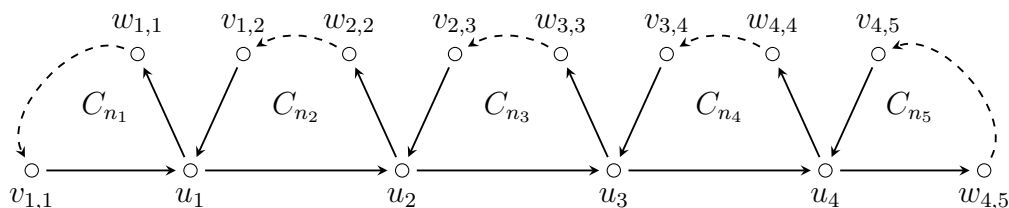


Figura 2.10: Un cactus  $Q$  con  $B(Q) \cong P_5$  y  $Q[K_Q] \cong \overrightarrow{P_4}$ .

**Teorema 2.40.** *Sea  $Q$  un cactus  $Q$  de  $n$  vértices y  $q \geq 2$  ciclos. Entonces  $rc(Q) = n - 1$  si y sólo si  $B(Q) \cong P_q$  y  $Q[K_Q] \cong \overrightarrow{P_{q-1}}$ .*

**Demostración.** Primero, supongamos que  $B(Q) \cong P_q$  y  $Q[K_Q] \cong \overrightarrow{P_{q-1}}$  con  $q \geq 2$ . Notemos que  $w_{q-1,q}Qv_{1,1}$  es una trayectoria de longitud  $n - 1$ , por lo cual  $rc(Q) \geq n - 1$ . Ahora, sea  $\rho$  una coloración sobre  $Q$  que asigna los colores  $1, 2, \dots, n - 1$  a las flechas de  $w_{q-1,q}Qv_{1,1}$  y  $\rho(v_{1,1}u_1) = \rho(v_{1,2}u_1)$ ,  $\rho(u_{q-1}w_{q-1,q}) = \rho(u_{q-1}w_{q-1,q-1})$  y  $\rho(u_i u_{i+1}) = \rho(v_{i+1,i+2}u_{i+1})$  para cualquier  $i = 1, \dots, q - 2$ . Claramente  $\rho$  es una coloración por arcoíris sobre  $Q$ . Por tanto  $rc(Q) = n - 1$ .

Para la suficiencia procederemos por inducción sobre  $q$ . Los casos  $q = 2, 3$  se siguen de los teoremas 2.37 y 2.38. Supongamos cierto el resultado para

cualquier cactus con  $q \geq 3$  ciclos y sea  $Q$  un cactus con  $q + 1$  ciclos. Por el Lema 2.31 podemos asumir que los bloques terminales de  $Q$  tienen longitud 3. Si  $C_{n_i}$  es cualquier bloque terminal donde  $x_i$  es el único vértice de corte de  $Q$  contenido en tal ciclo, y definimos  $Q_i = Q - (C_{n_i} - x_i)$ , entonces  $rc(Q_i) = n - 3$  (de lo contrario  $rc(Q) < n - 1$  por la Proposición 2.34) y por la hipótesis inductiva  $B(Q_i) \cong P_q$  y  $Q_i[K_{Q_i}] \cong \overrightarrow{P_{q-1}}$ . Si  $Q$  tiene tres bloques terminales, entonces  $B(Q) \cong K_{1,3}$  (y por tanto  $rc(Q) < n - 1$  por los teoremas 2.37 y 2.38) o  $B(Q_i)$  no es una trayectoria para algún  $i$ , es decir,  $Q$  tiene exactamente dos bloques terminales, por lo cual  $B(Q) \cong P_q$ . Ahora, podemos ordenar los bloques de  $Q$  desde un bloque terminal hacia el otro de forma que denotemos por  $u_i$  al vértice de corte contenido en  $C_{n_i} \cap C_{n_{i+1}}$  para  $i = 1, \dots, q - 1$ , y  $u_j u_{j+i} \in A(Q)$  para  $j < q$ .

Si  $u_{q+1}$  no es el exvecino de  $u_q$  en  $C_{n_q}$ , entonces  $Q_1(K_{Q_1}) \not\cong \overrightarrow{P_{q-1}}$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto tenemos que  $u_q u_{q+1} \in A(Q)$ , y entonces  $Q[K_Q] \cong \overrightarrow{P_q}$ . ■

Ahora construiremos cactus de  $n$  vértices cuyo número de conexidad por arcoíris sea igual a cualquier valor elegido entre las cotas inferior y superior.

**Teorema 2.41.** *Sea  $q \geq 2$ . Para todo  $n \geq 2q + 1$  hay un cactus  $Q$  de  $n$  vértices y  $q$  ciclos con  $rc(Q) = n - q + k$  para  $k \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$ .*

**Demostración.** Primero, sea  $Q$  un cactus con  $2q + 1$  vértices y  $q$  ciclos tales que  $C_{n_i} = u_i v_i w_i u_i$  para  $1 \leq i \leq q$ , donde  $\{u_j\} = C_{n_j} \cap (\bigcup_{r=1}^{j-1} C_{n_r})$  para  $2 \leq j \leq q$ , y además

$$u_t = \begin{cases} v_{t-1} & \text{si } 2 \leq t \leq k + 1; \\ u_1 & \text{si } k + 2 \leq t \leq q. \end{cases}$$

Ahora sea  $Q' = \bigcup_{r=1}^{k+1} C_{n_r}$ , notemos que  $Q'[K_{Q'}] \cong \overrightarrow{P_k}$  y  $B(Q') \cong P_{k+1}$ , entonces  $rc(Q') = 2k + 2$  por el Teorema 2.40. Además, dado que  $C_{n_t}$  es un bloque terminal que contiene a  $u_1$  para  $k + 2 \leq t \leq q - 1$ , entonces tenemos que

$rc(Q) = rc(Q') + q - (k + 1)$  por la Proposición 2.34. Por lo anterior decucimos que  $rc(Q) = 2k + 2 + q - k - 1 = q + k + 1 = (2q + 1) - q + k$ . Ahora, para todo  $n > 2q + 1$  subdividimos  $n - 2q - 1$  veces la flecha  $v_1w_1$ , de está forma obtenemos un cactus de  $n$  vértices y  $q$  ciclos que tiene número de conexidad por arcoíris igual a  $n - q + k$  por el Lema 2.31. ■

### 2.3. Torneos y digráficas infinitas

Recordemos que un *torneo* es una digráfica donde cualesquiera dos vértices tienen exactamente una flecha que los une, es decir, tal digráfica es una orientación de una gráfica completa. Los siguientes teoremas fueron probados en [11].

**Teorema 2.42** (Dorbec et al. [11]). *Si  $T$  es un torneo fuerte con  $n \geq 5$  vértices, entonces  $2 \leq rc(T) \leq n - 1$ .*

**Teorema 2.43** (Dorbec et al. [11]). *Sean  $n$  y  $k$  tales que  $3 \leq k \leq n - 1$ . Entonces existe un torneo  $T$  de  $n$  vértices tal que  $rc(T) = k$ .*

Notemos que en el primer teorema se establecen cotas para el número de conexión por arcoíris de los torneos, mientras que en el segundo muestra la existencia de un torneo  $T$  de orden arbitrario, donde  $rc(T)$  puede tomar cualquier valor el intervalo del Teorema 2.42, salvo el caso donde  $rc(T) = 2$ . A continuación probaremos la existencia de los torneos, de orden al menos 6, cuyo número de conexión por arcoíris alcanza la cota justa. Cuando el orden del torneo es a lo más 5 veremos que no hay torneos con tal propiedad.

**Proposición 2.44.** *Si  $T$  es un torneo fuerte de orden  $n = 3, 4, 5$ , entonces  $rc(T) \geq 3$ .*

**Demostración.** Primero, sean  $T_3$  y  $T_4$  los únicos torneos fuertes (salvo isomorfismo) que hay de orden 3 y 4 respectivamente. Del Teorema 1.13

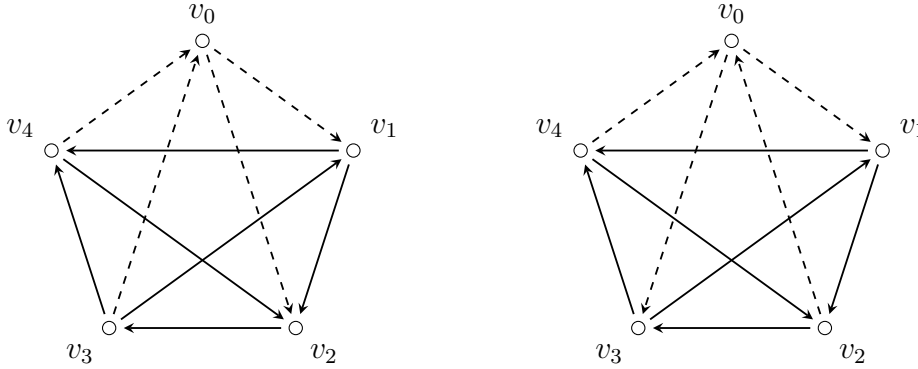


Figura 2.11: Torneos de orden 5 y diámetro 2.

obtenemos que  $rc(\vec{T}_3) = 3$ . Por otro lado, dado que  $diám(T_4) = 3$ , entonces  $rc(T_4) \geq 3$ . Ahora sean  $T$  un torneo fuerte de orden 5 y  $\rho$  una 2-coloración por arcoíris de  $T$ . Además, supongamos sin pérdida de generalidad que  $T[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}] = T_4$  tiene la configuración mostrada en la Figura 2.11. Dado que  $diám(T) = 2$ , entonces  $v_4v_0, v_0v_1 \in A(T)$ . Ahora, si  $v_0v_2 \in A(T)$ , entonces  $v_3v_0 \in A(T)$  (de lo contrario  $diám(T) > 2$ ). Dado que el 3-ciclo  $v_0v_1v_4v_0$  contiene a todas las geodésicas entre sus vértices, tenemos que  $rc(T) \geq rc(C_3) = 3$  (Proposición 1.16). Por otro lado, si  $v_2v_0 \in A(T)$ , entonces  $v_0v_3 \in A(T)$  (de lo contrario  $diám(T) > 2$ ). Así  $T \cong C_5(1, 2)$ , es decir,  $rc(T) = 3$ . ■

**Teorema 2.45.** *Para cada  $n \geq 6$ , existe un torneo  $T$  de orden  $n$  tal que  $rc(T) = 2$ .*

**Demostración.** Para  $n = 6$ , sea  $T$  el primer torneo en la Figura 2.12. Ahora, si  $n = 2k + 1$  donde  $k \geq 3$ , definamos  $T = C_{2k+1}(1, 2, 4, \dots, 2(k-1))$  y consideremos la partición de  $A(T)$  en los conjuntos

$$A_0 = \{u_0u_1, u_0u_2, u_1u_{2k-1}\} \cup (\{u_ru_s \mid r \equiv 0 \pmod{2}, r \geq 2\} \setminus \{u_2u_{2k}\})$$

y  $A_1 = A(T) \setminus A_0$ . Además, sea  $\rho$  la coloración tal que  $\rho(a) = t$  si  $a \in A_t$  para  $t = 0, 1$ . Claramente, basta verificar que existe un  $u_iu_j$ -arcoíris para

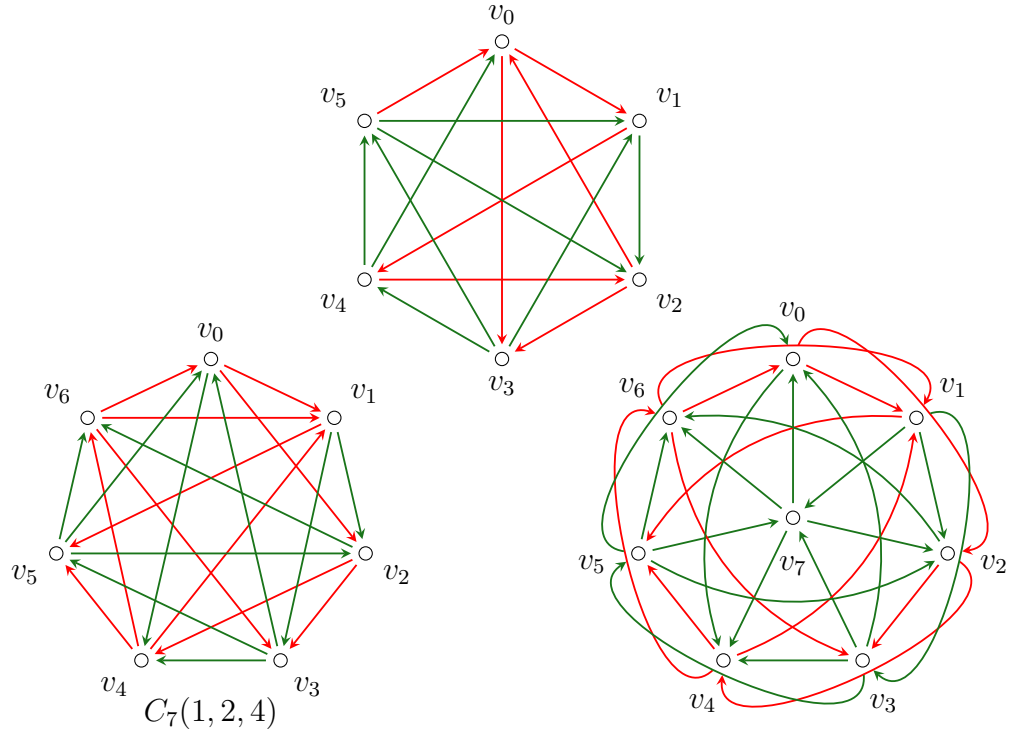


Figura 2.12: Torneos de orden  $n = 6, 7, 8$ , ejemplos del Teorema 2.45.

$0 \leq i \leq n - 1$  y  $j = i + 3, i + 5, \dots, i + 2k - 1, i + 2k$ , denotaremos por  $P_{i,j}$  a tal trayectoria. Primero, consideremos  $P_{i,i+3} = u_i u_{i+1} u_{i+3}$  para  $i \neq 2k$  y  $P_{2k,2} = u_{2k} u_1 u_2$ . Ahora, sea  $3 \leq i \leq n - 1$ , entonces  $P_{i,i+r} = u_i u_{i+1} u_{i+r}$  para cada  $r = 5, \dots, 2k - 1$  y  $P_{i,i+2k} = u_i u_{i+2k-2} u_{i+2k}$ . Además, si  $i = 1, 2$ , entonces

$$P_{i,j} = \begin{cases} u_i u_{i+1} u_j & \text{si } j = i + 3, \dots, i + 2k - 3; \\ u_i u_{i+2k-2} u_j & \text{si } j = i + 2k - 1, i + 2k; \end{cases}$$

Finalmente, cuando  $i = 0$  sea

$$P_{0,j} = \begin{cases} u_0 u_{j-1} u_j & \text{si } j \geq 5 \text{ es impar}; \\ u_0 u_{j-2} u_j & \text{si } j = 3, 2k; \end{cases}$$

En cualquier caso, claramente  $P_{i,j}$  es un arcoíris por la definición de  $\rho$ . Por tanto  $rc(T) = 2$ .

Por otro lado, si  $n = 2k \geq 8$ , consideramos a  $T$ , el torneo resultante de añadir un nuevo vértice  $u_{n-1}$  a  $C_{2k-1}(1, 2, 4, \dots, 2(k-2))$  de forma que  $u_{n-1}u_i \in A(T)$  si  $i$  es par y  $u_i u_{n-1} \in A(T)$  si  $i$  es impar. Ahora, sea  $\rho$  la coloración por arcoíris sobre  $C_{2k-1}(1, 2, 4, \dots, 2(k-2))$  descrita anteriormente y la extendemos sobre  $T$  de forma que  $\rho(a) = 1$  para cada flecha  $a$  incidente a  $u_{n-1}$ . Claramente, hay un  $u_i u_j$ -arcoíris si  $i, j \neq n-1$ . Para  $i = n-1$  consideramos las siguientes trayectorias

$$P_{n-1,i} = \begin{cases} u_{n-i}u_i & \text{si } i \text{ es par;} \\ u_{n-1}u_{i-1}u_i & \text{si } i \text{ es impar;} \end{cases}$$

$$\text{y } P_{i,n-1} = \begin{cases} u_i u_{n-i} & \text{si } i \text{ es impar;} \\ u_{n-2}u_1u_{n-1} & \text{si } i = n-2; \\ u_i u_{i+1}u_{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por construcción tales trayectorias son arcoíris, entonces  $rc(T) = 2$ . ■

Finalmente, combinando los Teoremas 2.43 y 2.45 obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 2.46.** *Para toda  $n \geq 6$  y toda  $k$  tales que  $2 \leq k \leq n-1$ , existe un torneo  $T$  de  $n$  vértices tal que  $rc(T) = k$ .* ■

Hemos visto que existen digráficas de orden arbitrario y cuyo número de conexión por arcoíris es 2, ahora estudiaremos algunas digráficas infinitas que también tienen tal propiedad. Las siguientes digráficas están basadas en la gráfica de Rado, la cual veremos al final de esta sección. Cada una de las siguientes digráficas tiene a los enteros no negativos como conjunto de vértices. Primero, en la *digráfica de Rado*  $RD$ , cada entero es considerado con su expansión base 4, donde la flecha  $ij \in A(RD)$  si y sólo si el  $i$ -ésimo dígito de  $j$  es 1 o 3, o bien, el  $j$ -ésimo dígito de  $i$  es 2 o 3. Para el *torneo de*

*Rado*  $RT$ , y la *digráfica simétrica de Rado*  $RS$ , cada entero es considerado expansión binaria, y siempre que el  $i$ -ésimo dígito de  $j$  es 1 o viceversa, entonces  $ij \in A(RT)$ , en otro caso  $ji \in A(RT)$ ; mientras que  $ij, ji \in A(RS)$  si el  $i$ -ésimo dígito de  $j$  es 1 o viceversa. Por otro lado, en la *digráfica asimétrica de Rado*  $RA$  todo número es considerado en su expansión base 3 y se tiene que la flecha  $ij \in A(RA)$  si y sólo si el  $i$ -ésimo dígito de  $j$  es 1 o el  $j$ -ésimo dígito de  $i$  es 2, y finalmente para la *digráfica semicompleta de Rado*  $RC$  tenemos que su conjunto de flechas es  $A(RC) = A(RA) \cup \{ij, ji \mid \text{el } i\text{-ésimo dígito de } j \text{ y el } j\text{-ésimo dígito de } i \text{ son } 0\}$ .

**Teorema 2.47.** *Sea*  $D \in \{RD, RT, RC, RS, RA\}$ , *entonces*  $rc(D) = 2$ .

**Demostración.** Sean  $i < j$  tales que  $ij \in A(D)$ , definimos la coloración  $\rho$  tal que

$$\rho(ij) = \begin{cases} 1 & \text{si } i < j; \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean  $i, j$  vértices no adyacentes de  $D$  tales que  $i < j$ , y sea  $b$  la base de la expansión de los vértices en  $D$ . Consideremos al vértice  $k = b^i + ab^j$ , donde

$$a = \begin{cases} 0 & \text{si } D = RT; \\ 1 & \text{si } D = RS; \\ 2 & \text{si } D = RD, RC, RA. \end{cases}$$

Entonces  $ik, kj \in E(D)$  donde  $k > i, j$ , por tanto ambas flechas tienen distintos colores y  $\rho$  es una coloración por arcoíris sobre  $D$ . ■

Finalmente, estudiaremos a la *gráfica de Rado*  $R$ , la cual tiene a todos los enteros no negativos como vértices, donde cada entero es considerado con expansión base 2, y dos vértices distintos  $i$  y  $j$  son adyacentes si y sólo si el  $i$ -ésimo dígito en la expansión binaria de  $j$  es 1 o viceversa.

**Teorema 2.48.**  $rc(R) = 2$ .

**Demostración.** Sean  $i < j$  tales que  $ij \in E(R)$ , definamos la coloración  $\rho$  tal que

$$\rho(ij) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 1 \text{ y } j \text{ son adyacentes;} \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean  $i, j$  dos vértices no adyacentes de  $R$  tales que  $i < j$ , y consideremos el vértice  $k = 2^i + \dots + 2^j$  (Figura 2.13). Nótese que el  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo dígitos de  $k$  son 1, entonces  $ik, jk \in E(R)$ . Además, dado que el  $(i + 1)$ -ésimo dígito de  $k$  es 1 y el  $(j + 1)$ -ésimo dígito de  $k$  es 0, obtenemos que  $\rho(ik) = 1$  y  $\rho = (jk) = 2$ . Por tanto  $ikj$  es un  $ij$ -arcoíris. ■

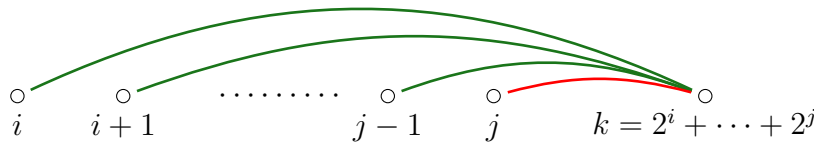


Figura 2.13: Ejemplo de arcoíris  $ikj$  en la gráfica de Rado.

**Teorema 2.49.** Sea  $G$  una digráfica (gráfica) infinita localmente finita, entonces  $rc(G) = \infty$ . ■

Lo anterior se sigue a partir de que para cualquier digráfica infinita localmente finita  $G$  se tiene que  $diám(G) = \infty = |V(G)|$  y  $diám(G) \leq rc(G) \leq |V(G)|$ , o bien, si  $G$  es gráfica, entonces  $diám(G) = \infty = |E(G)|$  y  $diám(G) \leq rc(G) \leq |E(G)|$ .





# Capítulo 3

## Productos y otras operaciones

El contenido de este capítulo está enfocado a estudiar el comportamiento de la conexidad por arcos bajo algunas operaciones de digráficas. En la primera sección se presentan los productos clásicos entre digráficas y se establecen cotas superiores del número de conexidad por arcos del producto en función de los números de conexidad por arcos de las digráficas que se operan. Dentro de la segunda sección se estudia a las operaciones de flechas, bajo las cuales se podrá observar que el número de conexidad por arcos y el número de conexidad fuerte por arcos tienen comportamientos distintos. Finalmente, en la tercera sección, se determina el comportamiento de los números de conexidad por arcos cuando a un ciclo se le agrega un conjunto de flechas *bien portadas*, las cuales serán definidas en su momento.

### 3.1. Productos

Consideremos una digráfica  $D_0$  donde  $V(D_0) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ , y sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas ajenas por vértices. La *composición* o *producto lexicográfico* de  $D_0$  con la familia  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , se define como la digráfica  $D_0[D_1, D_2, \dots, D_n]$  con conjunto de vértices  $\bigcup_{i=1}^n V(D_i)$  y conjunto de flechas

$$\left( \bigcup_{i=1}^n A(D_i) \right) \cup \{v_i v_j \mid v_i \in V(D_i), v_j \in V(D_j), u_i u_j \in A(D_0)\}.$$

Para cada vértice  $v$  en  $D$ , se denota por  $g(v)$  a la longitud del ciclo inducido (no trivial) más corto que contiene a  $v$ , y se define al *cuello grueso* de  $D$ , denotado  $g^*(D) = \max\{g(v) \mid v \in V\}$ . Dado que  $g(D)$ , el *cuello* de  $D$ , se define como  $\min\{g(v) \mid v \in V\}$ , y  $\text{circ}(D)$ , la *circunferencia* de  $D$ , es la longitud del ciclo más largo contenido en  $D$ , claramente se cumple que  $g(D) \leq g^*(D) \leq \text{circ}(D)$ . Notemos además que  $g^*(D) \leq \text{diám}(D) + 1$ . A partir de estas observaciones, es fácil establecer el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** *Sea  $D_0$  una digráfica fuerte de orden  $n$  y sea  $D_1, \dots, D_n$  una familia de digráficas. Entonces  $\text{diám}(D_0[D_1, \dots, D_n]) \leq \text{diám}(D_0) + 1$ . Más aún, la igualdad se cumple si y sólo si hay un vértice  $v_i$  en  $D_0$  tal que  $g(v_i) = \text{diám}(D_0) + 1$  y  $D_i$  no es fuerte.*

**Teorema 3.2.** *Sea  $D = D_0[D_1, \dots, D_n]$  tal que  $|V(D_i)| \geq 2$  para cada  $i$  y  $D_0$  es fuerte, entonces  $rc(D) \leq rc(D_0) + 1$ .*

**Demostración.** Sea  $V(D_i) = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}\}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , y sea  $\rho$  una  $k$ -coloración por arcoíris sobre  $D_0$  y definamos  $\rho'$  sobre  $D$  de forma que

$$\rho'(v_{i,p}v_{j,q}) = \begin{cases} \rho(v_iv_j) & \text{si } i \neq j \text{ y } p \neq q \\ k + 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dada una flecha  $(v_i, v_j)$  en  $D_0$  y un vértice  $v_{i,p}$  en  $D$ , definimos

$$f_j(v_{i,p}) = \begin{cases} v_{j,0} & \text{si } p \neq 0 \\ v_{j,1} & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Ahora, veremos que hay un arcoíris entre cualquier par de vértices  $v_{i,p}$  y  $v_{j,q}$  de  $D$ . Primero, si  $i \neq j$ , sea  $P_{i,j} = v_{r_0}v_{r_1} \dots v_{r_s}$  un  $v_iv_j$ -arcoíris en  $D_0$  y consideremos la trayectoria

$$F_{p,q}(P_{i,j}) = v_{i,p}f_{r_1}(v_{i,p})f_{r_2}(f_{r_1}(v_{i,p})) \dots f_{r_{s-1}}(\dots(f_{r_1}(v_{i,p}) \dots))v_{j,q}.$$

Por otro lado, si  $i = j$ , entonces sea  $v_t \in N^-(v_i)$  y sea  $P_{i,t} = v_{r_0}v_{r_1} \dots v_{r_s}$  un  $v_iv_t$ -arcoíris en  $D_0$ , así definimos

$$F_{p,q}(P_i) = v_{i,p}f_{r_1}(v_{i,p})f_{r_2}(f_{r_1}(v_{i,p})) \dots f_t(f_{r_{s-1}}(\dots(f_{r_1}(v_{i,p}) \dots))v_{i,q}.$$

Claramente, por la definición de  $\rho'$ , las flechas en la  $v_{i,p}v_{j,q}$ -trayectoria tiene los mismos colores (y en el mismo orden) que el arcoíris respectivo en  $D_0$ , con excepción de la última flecha, la cual puede tener el color  $k + 1$  o el color de la respectiva flecha en  $D_0$ . En cualquier caso, hay un  $v_{i,p}v_{j,q}$ -arcoíris en  $D$ . ■

De la Proposición 3.1 se sigue que la cota del Teorema 3.2 es justa, en la Figura 3.1 se muestran ejemplos de tales digráficas. Se puede mejorar dicha cota bajo ciertas condiciones. Dada una digráfica coloreada por flechas, se define un *ciclo arcoíris* como un ciclo dirigido tal que no contiene dos flechas con el mismo color.

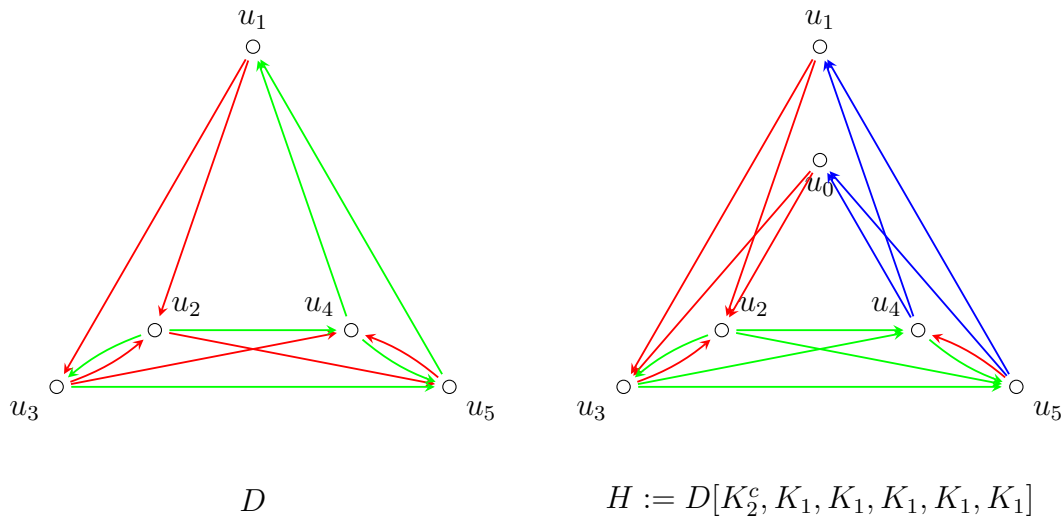


Figura 3.1: Ejemplo de composición de digráficas.

**Teorema 3.3.** Si  $D_0$  tiene una coloración por arcoíris mínima tal que cada vértice está contenido en un ciclo arcoíris de longitud al menos 2, entonces  $rc(D_0[D_1, D_2, \dots, D_n]) \leq rc(D_0)$ .

**Demostración.** Sea  $\rho$  coloración por arcoíris sobre  $D_0$  tal que todo vértice está contenido en un ciclo arcoíris de longitud al menos 2, y definamos la

coloración  $\rho'$  sobre  $D = D_0[D_1, D_2, \dots, D_n]$  tal que  $\rho'(v_{i,p}v_{j,q}) = \rho(v_iv_j)$ . Dados dos vértices  $v_{i,p}$ , y  $v_{j,q}$  de  $D$ , consideremos a  $P = v_iv_{r_1} \dots v_{r_s}v_j$  un  $v_iv_j$ -arcoíris en  $D_0$  si  $i \neq j$ , o bien, un ciclo arcoíris en  $D_0$  si  $i = j$ . De la definición de  $\rho'$  se sigue que  $P' = v_{i,p}v_{r_1,0} \dots v_{r_s,0}v_{j,q}$  es un  $v_{i,p}v_{j,q}$ -arcoíris contenido en  $D$ . ■

**Corolario 3.4.** *Se  $D_0$  es una digráfica hamiltoniana, entonces se cumple que  $rc(D_0[D_1, D_2, \dots, D_n]) \leq n$ .* ■

**Corolario 3.5.** *Si  $rc(D_0) = \text{diám}(D_0)$  y, para algún  $j$ ,  $D_j$  no es fuerte y  $g(v_j) = \text{diám}(D_0) + 1$ , entonces  $rc(D) = rc(D_0) + 1$ .* ■

Una digráfica  $D$  es llamada *cíclicamente  $k$ -partita completa* si existe una  $k$ -partición  $V_0, V_1, \dots, V_{k-1}$  de los vértices de  $D$  tal que  $uv \in A(D)$  si y sólo si  $u \in V_i$  y  $v \in V_{i+1}$  para algún  $0 \leq i \leq k-1$ , donde  $i+1$  es considerado módulo  $k$ . Resulta claro que,  $D$  es cíclicamente  $k$ -partita completa si y sólo si  $D = \overrightarrow{C}_k[D_1, D_2, \dots, D_k]$  donde  $A(D_i) = \emptyset$  para cada  $1 \leq i \leq k$ .

**Teorema 3.6.** *Si  $D$  es cíclicamente  $k$ -partita completa,  $rc(D) = k$ .*

**Demostración.** Dado que  $D = \overrightarrow{C}_k[D_1, D_2, \dots, D_k]$  donde  $A(D_i) = \emptyset$  para cada  $1 \leq i \leq k$ , se sigue de los Teoremas 1.13 y 3.3 que  $rc(D) \leq k$ . Ahora, si  $|V(D_j)| \geq 2$  para algún  $1 \leq j \leq k$ , entonces  $\text{diám}(D) = k$  por el Teorema 3.1 y por tanto  $rc(D) = k$ . Por otro lado,  $|V(D_i)| = 1$  para cada  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $D = \overrightarrow{C}_k$ , y la igualdad se cumple. ■

Sea  $D_1, D_2, \dots, D_n$  una familia de digráficas donde  $n \geq 2$ , se define al *producto cartesiano* de dicha familia, denotado por  $D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n$ , como la digráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(D) = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \mid w_i \in V(D_i), 1 \leq i \leq n\}$  y donde hay flecha del vértice  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  hacia el vértice  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  si y sólo si  $u_r v_r \in A(D_r)$  para algún  $1 \leq r \leq n$  y  $u_i = v_i$  para todo  $i \neq r$ . Sea  $H$  una subdigráfica de  $D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n$  y sea  $1 \leq r \leq n$ , la *proyección* de  $H$  sobre  $D_r$ , denotada por  $\pi_r(H)$ , es la subdigráfica de  $D_r$  con conjunto de vértices  $\{u_r \mid (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V(H)\}$  y tal que  $u_r v_r \in A(\pi_r(H))$  si hay una flecha de  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  hacia  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  en el producto.

**Lema 3.7.** *Si  $D = D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n$  y  $u, v \in V(D)$ , entonces*

$$d_D(u, v) = \sum_{i=1}^n d_{D_i}(\pi_i(u), \pi_i(v)).$$

El lema anterior ha sido demostrado para gráficas no orientadas en [14], dicha prueba es análoga en el caso de las digráficas. Además, se sigue que:

**Corolario 3.8.** *Sea  $P$  una trayectoria en  $D = D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n$ , entonces  $P$  es una geodésica si y sólo si  $\pi_r(P)$  es una geodésica para cada  $r$ . Más aún,  $\text{diám}(D) = \sum_{i=1}^n \text{diám}(D_i)$ .*

**Teorema 3.9.** *Si  $D_1, D_2, \dots, D_n$  una familia de digráficas fuertes con  $n \geq 2$ , entonces se cumple:*

$$(i) \text{ src}(D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n) \leq \sum_{i=1}^n \text{src}(D_i);$$

$$(ii) \text{ rc}(D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n) \leq \sum_{i=1}^n \text{rc}(D_i).$$

**Demostración.** Para probar (i), sea  $\rho_i$  una coloración fuerte por arcoíris sobre  $D_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , donde cada par de coloraciones distintas tienen distintos conjuntos de colores. Ahora, definamos la coloración  $\rho$  sobre  $D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n$  de forma que si hay una flecha  $a$  de  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  hacia  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que  $u_r v_r \in A(D_r)$  para algún  $r$  y  $u_i = v_i$  para cada  $i \neq r$ , entonces  $\rho(a) = \rho_r(u_r v_r)$ .

Ahora, sea  $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V(D)$ , y sea  $P_i$  un  $u_i v_i$ -arcoíris geodésico en  $D_i$  con la coloración  $\rho_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . Definimos  $Q_i = \{u_1\} \square \dots \square \{u_{i-1}\} \square P_i \square \{v_{i+1}\} \square \dots \square \{v_n\}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , y sea  $Q = \bigcup_{i=2}^n Q_i$ . Se sigue del Corolario 3.8, que  $Q$  es una  $\hat{u}\hat{v}$ -geodésica. Más aún, dado que cada  $Q_i$  es un arcoíris y no hay dos coloraciones  $\rho_i$  que usen un mismo color, obtenemos que  $Q$  es un arcoíris. Por tanto  $\rho$  es una coloración fuerte por arcoíris.

La prueba de (ii) es análoga. ■

Bajo las hipótesis del teorema anterior, resulta claro que si  $\text{diám}(D_i) = rc(D_i)$  para cada  $D_i$ , entonces se cumple la igualdad en (ii). Dado que existen una cantidad infinita de digráficas  $D$  tales que  $\text{diám}(D) = rc(D)$ , por ejemplo las trayectorias biorientadas, los ciclos biorientados pares, las  $k$ -partitas completas e incluso ciertas circulantes y cactus, resulta natural plantearnos el siguiente problema, que es tan interesante como difícil para probar.

**Problema 5.** *Caracterizar aquellas digráficas  $D$  tales que  $\text{diám}(D) = rc(D)$ , o determinar condiciones suficientes para garantizar que  $\text{diám}(D) = rc(D)$ .*

De forma análoga, podemos considerar el problema anterior usando a  $\text{src}(D)$ .

**Proposición 3.10.** *Sean  $\vec{C}_r$  y  $\vec{C}_s$  ciclos donde  $r, s \geq 3$ , entonces*

$$r + s - 2 \leq \text{src}(\vec{C}_r \square \vec{C}_s) \leq r + s - 1.$$

**Demostración.** Dado que  $\text{diam}(\vec{C}_r \square \vec{C}_s) = r + s - 2$ , entonces la primera desigualdad se cumple. Por otro lado, consideramos a  $\vec{C}_r = u_0 u_1 \dots u_{r-1} u_0$  y  $\vec{C}_s = v_0 v_1 \dots v_{s-1} v_0$  donde  $r \leq s$  y definamos la coloración  $\rho$  sobre  $\vec{C}_r \square \vec{C}_s$  tal que  $\rho((u_i, v_j)(u_{i+1}, v_j)) = i$  y

$$\rho((u_i, v_j)(u_i, v_{j+1})) = \begin{cases} i & \text{si } i + j \equiv 0 \pmod{s} \\ r + k & \text{si } i + j \equiv k \pmod{s}, \text{ donde } 1 \leq k \leq s - 1. \end{cases}$$

Por tanto, para cualesquiera  $(u_i, v_j)$  y  $(u_k, v_i)$  vértices distintos de  $\vec{C}_r \square \vec{C}_s$  la trayectoria

$$P = (u_i, v_j)(u_{i+1}, v_j)(u_{i+2}, v_j) \dots (u_k, v_j)(u_k, v_{j+1})(u_k, v_{j+2}) \dots (u_k, v_l)$$

es claramente un arcoíris. ■

Sea  $D_1, D_2, \dots, D_n$  una familia de digráficas con  $n \geq 2$ , se define al *producto fuerte* de dicha familia, denotado  $D_1 \boxtimes D_2 \boxtimes \dots \boxtimes D_n$ , como la

digráfica con conjunto de vértices  $V(D_1) \times V(D_2) \times \cdots \times V(D_n)$  y donde se tiene la flecha del vértice  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  hacia el vértice  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  si y sólo si existe  $s \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $u_s v_s \in A(D_s)$  y  $u_r = v_r$  para todo  $r \neq s$ , o bien,  $u_r v_r \in A(D_r)$  para todo  $1 \leq r \leq n$ . Claramente el producto cartesiano es una subdigráfica generadora del producto fuerte, por lo cual tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.11.** *Si  $D_1, D_2, \dots, D_n$  una familia de digráficas fuertes donde  $n \geq 2$ , entonces  $rc(D_1 \boxtimes D_2 \boxtimes \cdots \boxtimes D_n) \leq \sum_{i=1}^n rc(D_i)$ .*

## 3.2. Operaciones de flechas

Ahora estudiaremos operaciones de flechas sobre una digráfica. Sean  $D$  una digráfica y  $a$  una flecha que no pertenece a  $A(D)$  pero cuyos extremos están en  $V(D)$ , entonces la *adición* de  $a$  en  $D$  se define como la digráfica  $D + a$  donde  $V(D + a) = V(D)$  y  $A(D + a) = A(D) \cup \{a\}$ . Claramente, podemos definir la operación inversa: dados  $D$  y  $a \in A(D)$  el *borrado* de la flecha  $a$  en  $D$  es la digráfica obtenida a partir de borrar la flecha  $a$  en  $D$ , denotada  $D - a$ , es tal que  $V(D - a) = V(D)$  y  $A(D - a) = A(D) - \{a\}$ . Por otro lado, la *subdivisión* de una flecha  $uv$  de  $D$  resulta de reemplazar  $uv$  por dos flechas  $uw$  y  $wv$ , donde  $w$  es un nuevo vértice, tal digráfica es denotada por  $D \bullet(u, v)$ . Además de las anteriores operaciones, también consideraremos a la *contracción* de una flecha, dicha operación fue definida en la Sección 2.2.

Notemos que para la adición, contracción y subdivisión de una flecha, la digráfica inicial es fuerte si y sólo si la digráfica resultante es fuerte. Pero tal afirmación no es cierta si consideramos el borrado de una flecha. Por esta razón, en el siguiente teorema se asumirá que  $D - a$  es fuerte en (ii).

**Teorema 3.12.** *Para cualquier digráfica fuerte  $D$  se cumple:*

- (i)  $rc(D + a) \leq rc(D)$  para cada  $a \notin A(D)$ .



(ii)  $rc(D - a) \geq rc(D)$  para cada  $a \in A(D)$ .

(iii)  $rc(D/a) \leq rc(D)$  para cada  $a \in A(D)$ .

(iv)  $rc(D \bullet a) \leq rc(D) + 1$  para cada  $a \in A(D)$ .

**Demostración.** Dado que  $D$  es una subdigráfica generadora de  $D + a$ , la afirmación en (i) se cumple. Análogamente, el inciso (ii) se sigue de que  $D - a$  es subdigráfica generadora de  $D$ . Para (iii), sea  $\rho : A(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una coloración por arcoíris sobre  $D$  y  $h$  el nuevo vértice, y observemos que hay un biyección natural  $\phi$  entre  $A(D) - \{a\}$  y  $A(D/a)$ . Así definimos  $\rho' : A(D/a) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tal que  $\rho'(\phi(b)) = \rho(b)$ , la cual es claramente una coloración por arcoíris de  $D/a$ .

Finalmente, sea  $\rho : A(D) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una coloración por arcoíris sobre  $D$ , y sea  $w$  el nuevo vértice en  $D \bullet a$  que aparece al subdividir  $a$ . Definimos  $\rho' : A(D \bullet a) \rightarrow \{1, \dots, k + 1\}$  tal que  $\rho'(uw) = \rho(uv)$ ,  $\rho'(wv) = k + 1$  y  $\rho'(a) = \rho(a)$  para  $a \in A(D) \setminus \{uv\}$ , la cual es una coloración por arcoíris de  $D \bullet a$ , así (iv) se cumple. ■

Contrasta con lo anterior el hecho de que no es posible establecer alguna relación general para la conexidad fuerte por arcoíris bajo ninguna de las operaciones anteriores, es decir, en cualquier caso podemos encontrar dos digráficas  $D_1$  y  $D_2$  y dos flechas  $a_1$  y  $a_2$  para cada digráfica respectivamente tales que  $src(D_1 * a_1) > src(D_1)$  y  $src(D_2 * a_2) < src(D_2)$ , esto será denotado por  $src(D * a) \not\approx src(D)$  donde  $(*)$  representa la adición, el borrado, la contracción y la subdivisión de la flecha  $a$ .

**Teorema 3.13.**  $src(D * a) \not\approx src(D)$ , donde  $(*)$  representa cualquiera de las siguientes operaciones: adición de una flecha (+), borrado de una flecha (-), contracción de una flecha (/), subdivisión de una flecha ( $\bullet$ ).

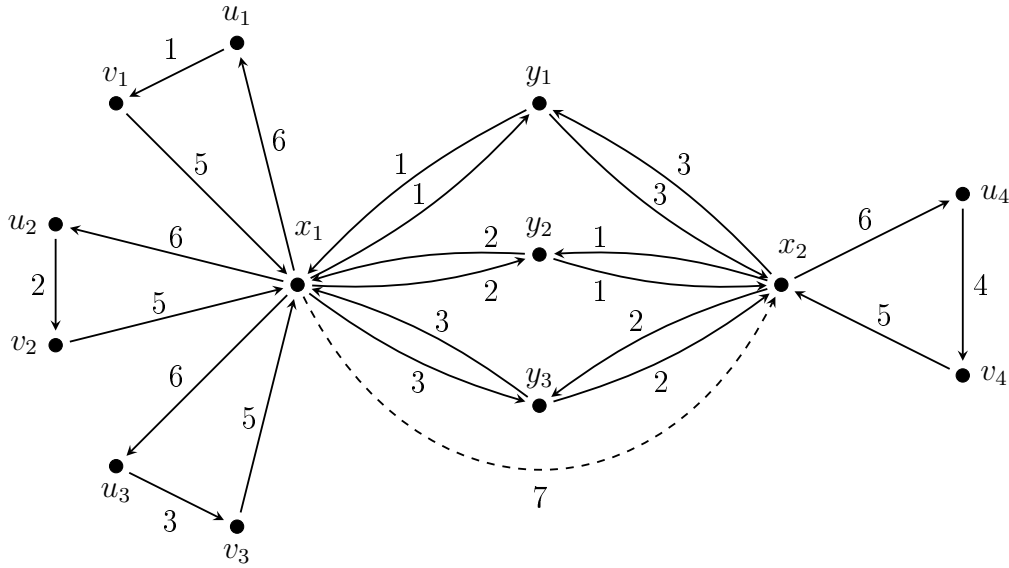


Figura 3.2: Una digráfica  $G$  con  $src(G) = 7$  y una subdigráfica generadora  $G' = G - x_1x_2$  con  $src(G') = 6$ .

**Demostración.** Primero, notemos que las digráficas en la Figura 3.2 son tales que  $src(G - x_1x_2) < src(G)$  y  $src(G' + x_1x_2) > src(G')$ . Además, para cualquier flecha  $a \in A(\overleftrightarrow{K}_3)$  se cumple que  $2 = src(\overleftrightarrow{K}_3 - a) > src(\overleftrightarrow{K}_3) = 1$  y  $1 = src((\overleftrightarrow{K}_3 - a) + a) < src(\overleftrightarrow{K}_3 - a) = 2$ . Por lo tanto  $src(D - a) \not\approx src(D)$  y  $src(D + a) \not\approx src(D)$

Ahora, veremos que  $src(D/a) \not\approx src(D)$ . Sea  $G'$  como en la Figura 3.2 y sea  $w$  un vértice que no pertenece a  $G'$ . Definamos  $H = G' + \{x_1w, wx_2\}$ , entonces  $7 = src(H/x_1w) > src(H) = 6$ . Por otro lado, para cualquier flecha  $a$  en  $\overrightarrow{C}_4$  se tiene que  $\overrightarrow{C}_3 = \overrightarrow{C}_4/a$ , por tanto  $3 = src(\overrightarrow{C}_3) < src(\overrightarrow{C}_4) = 4$ .

Finalmente, primero notemos que  $4 = src(\overrightarrow{C}_3 \bullet a) > src(\overrightarrow{C}_3) = 3$  para toda  $a \in A(C_3)$ . Además, consideremos a  $G$  como en la Figura 3.2, y sea  $w$  el nuevo vértice en  $G \bullet x_1x_2$ . Para colorear  $G \bullet x_1x_2$ , simplemente a cada flecha no incidente en  $w$  le asignamos el mismo color que en la coloración presentada en la Figura 3.2 y asignamos a  $x_1w$  y  $wx_2$  los colores 6 y 5 respectivamente.

Para verificar que ésta es una coloración fuerte por arcoíris de  $G \bullet x_1 x_2$  basta observar primero que  $w$  tiene sólo a  $x_1$  como invecino, y además, por como se definió la coloración, para cualquier vértice  $z \neq w$  existe  $P_z$  un  $zx_1$ -arcoíris geodésico que no usa el color 6. De esta forma  $zP_z x_1 w$  es un  $zw$ -arcoíris geodésico. Análogamente, podemos construir un  $wz$ -arcoíris geodésico para todo  $z \neq w$ . Por tanto  $6 = \text{src}(G \bullet x_1 x_2) < \text{src}(G) = 7$ , y así concluimos que  $\text{src}(D \bullet a) \not\approx \text{src}(D)$ . ■

### 3.3. Conjuntos de flechas bien portadas

Sea  $\overrightarrow{C_n} = u_0 u_1 \dots u_{n-1} u_0$  un ciclo dirigido, denotaremos por  $u_i \overrightarrow{C_n} u_j$  a la única  $u_i u_j$ -trayectoria contenida en  $\overrightarrow{C_n}$ . Ahora, estudiaremos los números de conexidad por arcoíris de la digráfica  $\overrightarrow{C_n} + T$ , donde  $T$  es un conjunto de nuevas flechas con ambos extremos en  $\overrightarrow{C_n}$ . Diremos que  $T = \{u_{i_s} \overrightarrow{C_n} u_{i_s+k_s} \mid 1 \leq s \leq t\}$  es un *conjunto de flechas bien portadas* si  $u_{i_p+k_p} \in u_{i_p} \overrightarrow{C_n} u_{i_q}$  para cada  $p \neq q$ , además diremos que la flecha  $u_{i_s} \overrightarrow{C_n} u_{i_s+k_s}$  es un  $k_s$ -salto. Resulta claro, por la definición, que si  $T$  es un conjunto de flechas bien portadas, entonces

- (a)  $2 \leq k_s \leq n - 1$  para cada  $s$ , pues podemos considerar a  $k_s$  módulo  $n$ .
- (b)  $i_p \neq i_q$  para cualesquiera  $p \neq q$ , así podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n - 1$ .
- (c)  $C_T = u_{i_1} u_{i_1+k_1} \overrightarrow{C_n} u_{i_2} u_{i_2+k_2} \overrightarrow{C_n} \dots \overrightarrow{C_n} u_{i_t} u_{i_t+k_t} \overrightarrow{C_n} u_{i_1}$  es un ciclo.
- (d) Ahora, para cada  $u_p \in V(\overrightarrow{C_n} + T)$  elegimos  $t(p), t'(p) \in \{1, \dots, t\}$  tal que

$$d(u_p, u_{i_{t(p)}}) = \text{mín}\{d(u_p, u_{i_s}) \mid 1 \leq s \leq t\} \quad \text{y}$$

$$d(u_{i_{t'(p)}+k_{t'(p)}}, u_p) = \text{mín}\{d(u_{i_s+k_s}, u_p) \mid 1 \leq s \leq t\}$$

Entonces, para cualesquiera vértices  $u_p, u_q \in V(\overrightarrow{C_n + T})$ , observamos que la única  $u_p u_q$ -geodésica  $P_{p,q}$  en  $\overrightarrow{C_n + T}$  es de la forma

$$P_{p,q} = \begin{cases} u_p \overrightarrow{C_n} u_{i_{t(p)}} C_T u_{i_{t'(q)}+k_{t'(q)}} \overrightarrow{C_n} u_q & \text{si } u_{i_{t(p)}}, u_{i_{t'(q)}+k_{t'(q)}} \in u_p \overrightarrow{C_n} u_q; \\ u_p \overrightarrow{C_n} u_q & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

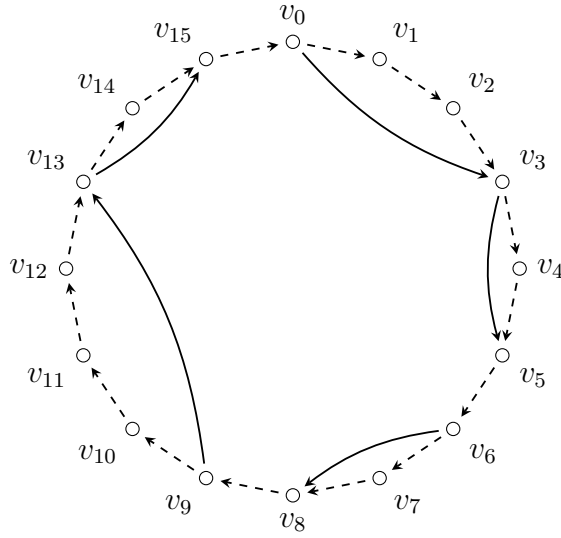


Figura 3.3:  $C_{16} + \{v_0 v_3, v_3 v_5, v_5 v_8, v_8 v_{13}, v_{13} v_{15}\}$ .

**Teorema 3.14.** *Sea  $T$  un conjunto de flechas bien portadas de tamaño  $t$ , donde  $r$  es el número de 2-saltos en  $T$ , entonces*

$$\text{src}(\overrightarrow{C_n + T}) = \begin{cases} n - r - 2(t - r - 1) & \text{si } r \leq t - 2; \\ n - r & \text{si } r \geq t - 1. \end{cases}$$

**Demostración.** Sea  $T = \{u_{i_s} u_{i_s+k_s} \mid 1 \leq s \leq t\}$ . Primero, definamos la coloración  $\rho$  tal que

$$\rho(u_i u_j) = \begin{cases} n & \text{si } i = i_s, j = i_s + 1 \text{ y } k_s \geq 3, \text{ con } s \in \{1, \dots, t\}; \\ n + 1 & \text{si } i = i_s + k_s - 1, j = i_s + k_s \text{ y } k_s \geq 3, \text{ con } s \in \{1, \dots, t\}; \\ i_s & \text{si } i = i_s + 1 \text{ con } s \in \{1, \dots, t\}; \\ i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

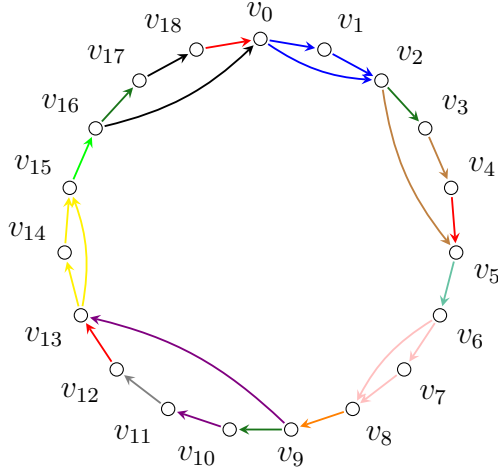


Figura 3.4:  $C_{19} + \{v_0v_2, v_2v_5, v_6v_8, v_9v_{13}, v_{13}v_{15}, v_{16}v_0\}$ .

Nótese que  $\rho^{-1}(n) = \{u_{i_s}u_{i_s+k_s} \mid 1 \leq s \leq t \text{ y } k_s \geq 3\}$ . Si existe alguna  $u_pu_q$ -trayectoria  $P$  con dos flechas de color  $n$ , digamos  $u_{i_r}u_{i_r+k_r}$  y  $u_{i_s}u_{i_s+k_s}$  donde  $u_{i_r}$  ocurre antes que  $u_{i_s}$  sobre  $P$ , es claro que  $u_{i_r+k_r} \in P$ , entonces  $P' = u_pPu_{i_r}u_{i_r+k_r}Pu_q$  es una  $u_pu_q$ -trayectoria más corta que  $P$ , por lo cual no hay geodésicas con dos flechas de color  $n$ . Análogamente, no hay geodésicas con dos flechas de color  $n+1$ . Ahora,  $\rho^{-1}(i_s) = \{u_{i_s}u_{i_s+1}, u_{i_s+1}u_{i_s+2}, u_{i_s}u_{i_s+2}\}$  para  $k_s = 2$ , si  $P$  es una  $u_pu_q$ -trayectoria con dos flechas de color  $i_s$ , entonces  $u_{i_s}u_{i_s+1}$  y  $u_{i_s+1}u_{i_s+2}$  deben ser tales flechas, lo cual implica que  $P' = u_pPu_{i_s}u_{i_s+2}Pu_q$  es una  $u_pu_q$ -trayectoria de longitud más corta que  $P$ . Además,  $\rho^{-1}(i_s) = \{u_{i_s+1}u_{i_s+2}, u_{i_s}u_{i_s+2}\}$  para  $k_s \geq 3$ , y claramente no hay trayectorias con dos flechas en tal clase cromática, por lo cual no hay geodésicas con dos flechas de color  $i_s$ . Dado que cualquier otra clase cromática tiene sólo una flecha, concluimos que toda geodésica es un arcoíris, por lo cual  $\rho$  es una coloración fuerte por arcoíris sobre  $\overrightarrow{C_n} + T$ . Es claro que  $\rho$  usa  $n - r - 2(t - r - 1)$  colores si  $r \leq t - 2$ , y usa  $n - r$  colores cuando  $r \geq t - 1$ . Por tanto la cota superior para  $src(\overrightarrow{C_n} + T)$  está establecida.

Para probar la igualdad procederemos por inducción sobre  $t$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u_{i_t+k_t} = u_0$  y  $k_t = \min\{k_s \mid 1 \leq s \leq t\}$ . Para

$t = 1$  hay dos casos. Primero, si  $k_1 = 2$ , notemos que  $\overrightarrow{C_{n-1}} \subseteq \overrightarrow{C_n} + T$ , lo que implica que  $\text{src}(\overrightarrow{C_n} + T) \geq \text{src}(\overrightarrow{C_{n-1}}) = n - 1$  por la Proposición 1.16. Por otro lado, si  $k_1 \geq 3$  notemos que  $u_0\overrightarrow{C_n}u_{n-1}$  es la única  $u_0u_{n-1}$ -geodésica, por lo cual necesitamos  $n - 1$  colores para sus flechas. Además,  $u_{n-2}u_{n-1}u_0$  y  $u_{n-1}\overrightarrow{C_n}u_{n-2}$  son las únicas geodésicas entre sus extremos y  $u_{n-1}u_0$  pertenece a ambas trayectorias. Lo anterior implica que  $u_{n-1}u_0$  tiene un color distinto a todas las flechas en  $u_0\overrightarrow{C_n}u_{n-1}$ , es decir,  $\text{src}(\overrightarrow{C_n} + T) \geq n$ . Así, en cualquier caso, la igualdad se cumple. Ahora, supongamos que la igualdad se cumple para cualquier conjunto de  $t - 1$  flechas. Sea  $T' = T - \{u_{i_t}u_{i_t+k_t}\}$  y  $t \geq 2$ .

**Caso 1.** Si  $k_t = 2$ , entonces  $\text{src}(\overrightarrow{C_n} + T) \geq \text{src}(\overrightarrow{C_{n-1}} + T')$  por la Proposición 1.16, ya que  $\overrightarrow{C_{n-1}} + T' \subseteq \overrightarrow{C_n} + T$ . Por la hipótesis de inducción tenemos dos subcasos:

**Subcaso 1.1** Si  $r - 1 \geq t - 2$ , entonces

$$\text{src}(\overrightarrow{C_{n-1}} + T') = (n - 1) - (r - 1) = n - r.$$

**Subcaso 1.2** Si  $r - 1 \leq t - 3$ , entonces

$$\text{src}(\overrightarrow{C_{n-1}} + T') = (n - 1) - (r - 1) - 2((t - 1) - (r - 1) - 1) = n - r - 2(t - r - 1).$$

**Caso 2.** Si  $k_t \geq 3$ , tenemos que  $\overrightarrow{C_{n-k_t+1}} + T' \subseteq \overrightarrow{C_n} + T$ . Además,  $r = 0$ , dado que  $k_t = \min\{k_s \mid 1 \leq s \leq t\}$ . Sea  $\rho$  una coloración fuerte por arcoíris sobre  $\overrightarrow{C_n} + T$ . Primero, notemos que  $P_0 = u_{i_t+1}\overrightarrow{C_n}u_{n-1}$  es la única geodésica entre sus extremos contenida en  $\overrightarrow{C_n} + T$ , por lo cual no hay dos flechas en  $P_0$  con el mismo color. A continuación, probaremos que ninguna flecha de  $P_0$  comparte el mismo color con alguna flecha en  $D = (\overrightarrow{C_{n-k_t+1}} + T') - u_{i_t}u_0$ . Sean  $u_ju_{j+1} \in P_0$  y  $u_pu_q \in D$ . Si  $p = i_s + k_s - 1$  y  $q = i_s + k_s$  para  $1 \leq s \leq t - 1$ , entonces definimos  $P' = u_{i_s+k_s-1}\overrightarrow{C_n}u_{i_s+1}C_Tu_{i_t-1+k_{t-1}}\overrightarrow{C_n}u_{j+1}$ , en otro caso  $P' = u_j\overrightarrow{C_n}u_{i_1}C_Tu_{i_t'(p)+k_{t'(p)}}\overrightarrow{C_n}u_q$ . En cualquier caso  $P'$  es la única geodésica entre sus extremos y contiene a las flechas  $u_ju_{j+1}$  y  $u_pu_q$ , por lo cual tales flechas tienen distinto color. Por la Proposición 1.16, hay al menos

$\overrightarrow{\text{src}}(\overrightarrow{C_{n-k_t+1}} + T') - 1$  colores de  $\rho$  que ocurren en  $D$  y otros  $k_t - 2$  distintos colores en  $P_0$ , es decir,  $\rho$  tiene al menos  $\overrightarrow{\text{src}}(\overrightarrow{C_{n-k_t+1}} + T') + k_t - 3$  colores, de la hipótesis de inducción se siguen dos subcasos:

**Subcaso 2.1** Si  $t - 1 = 1$ , entonces

$$\overrightarrow{\text{src}}(\overrightarrow{C_{n-k_t+1}} + T') + k_t - 3 = (n - (k_t - 1)) + k_t - 3 = n - 2.$$

**Subcaso 2.2** Si  $t - 1 \geq 2$ , entonces

$$\overrightarrow{\text{src}}(\overrightarrow{C_{n-k_t+1}} + T') + k_t - 3 = (n - (k_t - 1)) - 2((t - 1) - 1) + k_t - 3 = n - 2(t - 1).$$

Por lo tanto, la igualdad se cumple en cualquier caso. ■

# Conclusiones y preguntas abiertas

Hemos presentado y estudiado la conexidad por arcoíris en digráficas, definiendo dos parámetros: el número de conexidad por arcoíris y el número de conexidad fuerte por arcoíris, para los cuales se observan comportamientos bastante distintos, a pesar de la similitud en su planteamiento. Muestra de lo anterior, es el hecho del comportamiento monótono de la conexidad por arcoíris, donde el número de conexidad por arcoíris de una digráfica es menor o igual que el de cualquier subdigráfica, mientras que el número de conexidad fuerte por arcoíris puede crecer o decrecer. Tal diferencia en comportamiento puede observarse también bajo cualquiera de las operaciones de flechas definidas en el tercer capítulo.

Además de estudiar las propiedades y cotas generales, durante el primer capítulo se estableció la relación que guardan la conexidad por arcoíris en digráficas y su equivalente en gráficas no orientadas, a través de las orientaciones fuertes y las biorientaciones. Asimismo, se determinó los números de conexidad por arcoíris en distintas familias de digráficas fuertes, como lo son los ciclos, ciclos biorientados, trayectorias biorientadas, completas  $k$ -partitas, circulantes, cactus, torneos y ciertas digráficas infinitas. Finalmente, estudiamos el comportamiento de los números de conexidad por arcoíris bajo los productos clásicos de digráficas, para los cuales establecimos cotas en función de los números de conexidad fuerte de las digráficas operadas, mostrando que



dichas cotas son justas si a las digráficas originales les son impuestas ciertas condiciones relacionadas al diámetro.

Parte de la relevancia de la conexidad por arcoíris es debida a su aplicación en la seguridad en redes de información, cuya importancia crece cada día en la actualidad. Cabe mencionar que cuando iniciamos el desarrollo del material aquí presentado, la conexidad por arcoíris era un tema ampliamente estudiado en gráficas no orientadas, pero que aún no se había definido propiamente en el terreno de las digráficas. El primer artículo enfocado en digráficas [11] fue publicado en 2014, momento en el cual, de forma paralela, habíamos desarrollado gran parte de los resultados que comprenden los primeros dos capítulos.

A continuación enumeraremos las conjeturas y los problemas abiertos más relevantes que hemos encontrado durante el desarrollo del presente trabajo, los cuales son muestra de que aún queda mucho por explorar dentro de la conexidad por arcoíris.

1. Caracterizar aquellas digráficas  $D$  tales que  $rc(D) = 2$ ,  $rc(D) = n - 1$  o  $rc(D) = n$ , o bien, determinar condiciones suficientes para garantizar alguna de las igualdades.
2. Caracterizar aquellas digráficas  $D$  tales que  $rc(D) = src(D)$ , o determinar condiciones suficientes para garantizar que  $rc(D) = src(D)$ . Calcular la diferencia  $src(D) - rc(D)$  respecto a otros parámetros de la digráfica, o bien, bajo ciertas condiciones estructurales.
3. Caracterizar aquellas digráficas  $D$  tales que  $diám(D) = rc(D)$  (o bien,  $diám(D) = src(D)$ ), o determinar condiciones suficientes para garantizar que la igualdad se cumple.
4. Determinar si existen digráficas  $G$  y  $H$ , donde  $H$  es subdigráfica generadora de  $G$  tales que  $3 \leq rc(H) < rc(G) \leq 6$ .
5. Encontrar un algoritmo que determine  $rc(Q)$  para cualquier cactus  $Q$ .

6. Determinar si  $rc(C_n(1, k)) \leq rc(C_{n+1}(1, k))$  para cualesquiera  $n \geq 3$  y  $2 \leq k \leq n - 1$ .
7. Encontrar alguna digráfica circulante tal que  $rc(C_n(S)) < src(C_n(S))$ .
8. Estudiar el comportamiento de los números de conexidad por arcoíris en potencias de digráficas. En particular, determinar si se cumple que  $rc(D^2) \leq \lceil rc(D)/2 \rceil$ .



# Apéndice

En este apéndice demostraremos que  $rc(C_8(1, 3)) = src(C_8(1, 3)) = 4$ , dicho resultado fue usado en el Teorema 2.22, para el cual sólo representa un caso. El siguiente lema es constancia de que existen parámetros que son difíciles de determinar en una gráfica particular, a pesar de ser manejables en diversas familias de digráficas.

Para obtener el resultado, inicialmente construiremos una 4-coloración fuerte por arcoíris, obteniendo que  $src(C_8(1, 3)) \leq 4$ , y luego veremos que no hay 3-coloraciones fuertes por arcoíris. La segunda parte del problema es la que resulta bastante larga por sus características combinatorias.

La estrategia a seguir para esta última parte es asumir que existe una 3-coloración fuerte por arcoíris de  $C_8(1, 3)$ , observando que el ciclo formado por los 1-saltos y el ciclo formado por los 3-saltos deben cumplir simultáneamente ciertas restricciones sobre la coloración. Después, veremos que sólo hay cuatro formas posibles de colorear el ciclo de los 3-saltos, para luego descartar cada una de dichas formas de la coloración, estableciendo así que  $src(C_8(1, 3)) \geq 4$ . Finalmente se demostrará que  $rc(C_8(1, 3)) = 4$ , procediendo nuevamente por contradicción, asumiremos que existe una 3-coloración por arcoíris de  $C_8(1, 3)$ . Por lo visto anteriormente, dicha coloración no puede ser una coloración fuerte por arcoíris, ésto nos permitirá encontrar cierto comportamiento en la coloración que provocará la contradicción.

**Lema 2.21.**  $rc(C_8(1, 3)) = src(C_8(1, 3)) = 4$ .

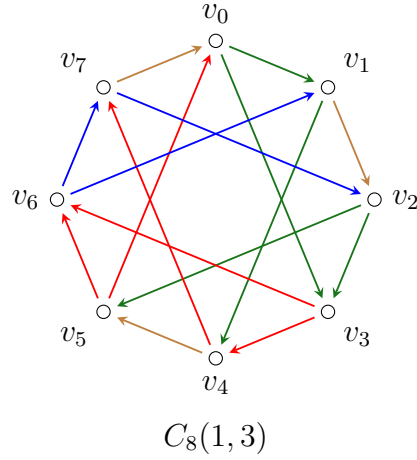


Figura 5: Una 4-coloración fuerte por arcoíris de  $C_8(1,3)$ .

**Demostración.** Primero, nótese que la 4-coloración de  $C_8(1,3)$  en la Figura 5 es una coloración fuerte por arcoíris, pues para cualesquiera  $0 \leq i, j \leq 7$ , es fácil verificar que la geodésica  $P_{i,j}$  es un arcoíris, donde

$$P_{i,j} = \begin{cases} v_i v_{i+1} & \text{si } j = i + 1; \\ v_i v_{i+1} v_{i+2} & \text{si } j = i + 2; \\ v_i v_{i+3} & \text{si } j = i + 3; \\ v_i v_{i+3} v_{i+4} & \text{si } j = i + 4; \\ v_i v_{i+3} v_{i+4} v_{i+5} & \text{si } j = i + 5; \\ v_i v_{i+3} v_{i+6} & \text{si } j = i + 6; \\ v_i v_{i+3} v_{i+6} v_{i+1} & \text{si } j = i + 7, i \neq 2, 5; \\ v_2 v_5 v_6 v_1 & \text{si } j = i + 7, i = 2; \\ v_5 v_0 v_1 v_4 & \text{si } j = i + 7, i = 5. \end{cases}$$

Ahora, sea  $\rho$  una 3-coloración fuerte por arcoíris de  $C_8(1,3)$ . Nótese que el automorfismo  $\psi(v_i) = v_{3i}$  es tal que  $\psi[C_{(1)}] = C_{(3)}$  y  $\psi[C_{(3)}] = C_{(1)}$ , de lo cual se sigue que cualquier propiedad de  $C_{(1)}$  es también cumplida por  $C_{(3)}$  y viceversa. De aquí en adelante, diremos que una trayectoria es un *arcoíris forzado* si cualquier otra trayectoria entre sus extremos tiene (al menos) dos

flechas con el mismo color. A continuación demostraremos varias afirmaciones respecto a la estructura de la coloración  $\rho$  en  $C_8(1, 3)$

**Afirmación 1.** No hay dos flechas consecutivas en  $C_{(1)}$  (o  $C_{(3)}$ ) con el mismo color.

Dado que  $v_i v_{i+1} v_{i+2}$  es la única  $v_i v_{i+2}$ -geodésica para cada  $i$ , la afirmación se cumple.

Ahora, diremos que  $H(i, i + 7) \subseteq C_8(1, 3)$  si para alguna  $i$  las flechas  $v_i v_{i+3}$ ,  $v_{i+4} v_{i+7}$  tienen color  $a$ ,  $v_{i+1} v_{i+4}$ ,  $v_{i+3} v_{i+6}$  tienen color  $b$ , y  $v_{i+7} v_i$  tiene color  $c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los distintos colores de  $\rho$ .

**Afirmación 2.** Para toda  $i$  se tiene que  $H(i, i + 7) \not\subseteq C_8(1, 3)$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $H(0, 7) \subseteq C_8(1, 3)$ , notemos que hay exactamente tres  $v_0 v_7$ -geodésicas. Primero  $v_0 v_3 v_4 v_7$  no es arcoíris, pues  $v_0 v_3$  y  $v_4 v_7$  tienen el mismo color; dado que  $v_7 v_0$  tiene color  $c$ , entonces  $v_0 v_1$  y  $v_6 v_7$  tienen color  $a$  o  $b$  (por la Afirmación 1), lo que implica que  $v_0 v_1 v_4 v_7$  y  $v_0 v_3 v_6 v_7$  no son arcoíris, contradiciendo la elección de  $\rho$ .

**Afirmación 3.** En  $C_{(1)}$  y en  $C_{(3)}$  ocurren al menos 3 colores.

Supongamos que las flechas en  $C_{(3)}$  tienen colores 0 y 1, por la Afirmación 1 tales colores deben alternarse. Además, dado que  $\rho$  es una 3-coloración, hay una flecha  $v_i v_{i+1}$  de color 2, entonces  $H(i + 7, i) \subseteq C_8(1, 3)$ , contradiciendo la Afirmación 2.

Para auxiliarnos en las siguientes afirmaciones representaremos los diferentes casos en distintas figuras, en todas ellas el color 0 será representado en verde, el color 1 en rojo y el color 2 en azul. También, podremos observar flechas continuas y punteadas, las flechas continuas representan a las flechas que ya se tienen por las hipótesis del subcaso en cuestión, mientras que las flechas punteadas son aquellas que se implican a partir de las anteriores. Además, en cada figura aparecen un par de vértices de color negro, nótese que

entre estos vértices no existen arcoíris en alguna dirección.

**Afirmación 4.** No hay cuatro flechas en  $C_{(1)}$  (o  $C_{(3)}$ ) con el mismo color.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_0v_3, v_4v_7, v_2v_5$  y  $v_6v_1$  tienen color 0, por la Afirmación 3, hay al menos una flecha  $v_i v_{i+1}$  en  $C_{(1)}$  de color 0.

(a) Si  $i$  es par, supongamos que  $i = 0$ , dado que  $v_0v_3v_6v_7$  es un arcoíris forzado, sin pérdida de generalidad, asignemos los colores 1 y 2 a las flechas  $v_3v_6$  y  $v_6v_7$  respectivamente. Entonces  $v_7v_0 \in \rho^{-1}(1)$  por la Afirmación 1. Además,  $v_2v_3v_6v_1$  es un arcoíris forzado, por lo cual  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(2)$ , y por la Afirmación 1 tenemos  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(1)$ . De nuevo, de la Afirmación 1 se sigue que  $v_7v_2$  tiene color 1 o 2. Si  $v_7v_2 \in \rho^{-1}(1)$ , entonces  $H(3, 2) \subseteq C_8(1, 3)$ . Ahora, si  $v_7v_2 \in \rho^{-1}(2)$ , nótese que  $v_7v_2v_5v_6$  es un arcoíris forzado, entonces  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(1)$ , lo que implica que  $v_5v_0v_1v_2$  es un arcoíris forzado, por lo cual  $v_5v_0 \in \rho^{-1}(2)$ . Por la Afirmación 1 se tiene que  $v_4v_5 \notin \rho^{-1}(1)$ , por lo cual no hay  $v_4v_3$ -arcoíris.

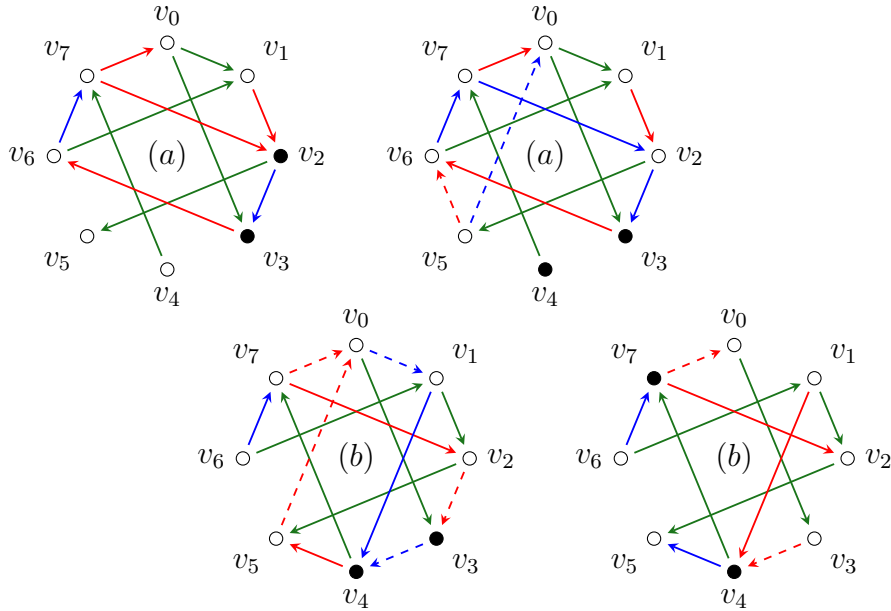


Figura 6: Los casos en la Afirmación 4.

(b) Si  $i$  es impar, supongamos que  $i = 1$ . Notemos que  $v_1v_4v_5$  y  $v_6v_7v_2$  son arcoíris forzados, pero ninguna de sus flechas tienen color 0, por la Afirmación 1 y (a). Tenemos dos casos (salvo isomorfismo), primero supongamos que  $v_7v_2, v_4v_5 \in \rho^{-1}(1)$  y  $v_6v_7, v_1v_4 \in \rho^{-1}(2)$ , y observemos que las flechas  $v_0v_1$  y  $v_2v_3$  no son de color 0, por lo cual  $v_0v_3v_4v_5$  y  $v_6v_7v_0v_3$  son arcoíris forzados, es decir,  $v_3v_4 \in \rho^{-1}(2)$  y  $v_7v_0 \in \rho^{-1}(1)$ . Por la Afirmación 1 tenemos que  $v_0v_1 \in \rho^{-1}(2)$  y  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(1)$ , lo que implica que  $v_5v_0v_3v_4$  es un arcoíris forzado, entonces  $v_5v_0 \in \rho^{-1}(1)$ . Por tanto  $H(4, 3) \not\subseteq C_8(1, 3)$ . Por otro lado, supongamos que  $v_7v_2, v_1v_4 \in \rho^{-1}(1)$  y  $v_6v_7, v_4v_5 \in \rho^{-1}(2)$ . Por la Afirmación 1 tenemos que  $v_0v_1, v_2v_3 \notin \rho^{-1}(0)$ , entonces  $v_0v_3v_4v_5$  y  $v_6v_7v_0v_3$  son arcoíris forzados, es decir,  $v_3v_4, v_7v_0 \in \rho^{-1}(1)$ . Por lo cual no hay  $v_7v_4$ -arcoíris. En cada caso se contradice la elección de  $\rho$ .

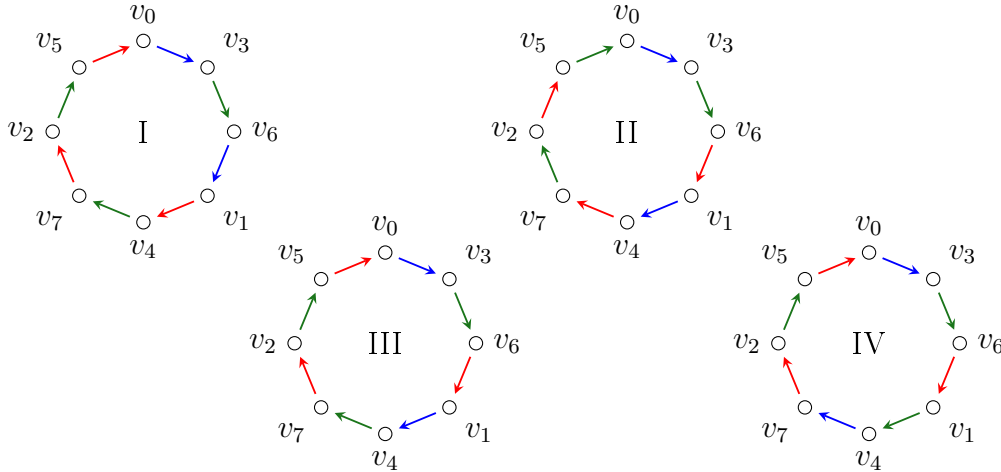


Figura 7: Los cuatro tipos de coloraciones en  $C_{(3)}$

Así, por las afirmaciones anteriores, se deduce que, sin pérdida de generalidad,  $C_{(3)}$  tiene exactamente tres flechas de color 0, tres flechas de color 1, y dos flechas de color 2. Es fácil verificar que, salvo isomorfismo, hay exactamente cuatro coloraciones en  $C_{(3)}$  (Figura 7):



Tipo I:  $\rho^{-1}(0) = \{v_3v_6, v_4v_7, v_2v_5\}$ ,  $\rho^{-1}(1) = \{v_1v_4, v_7v_2, v_5v_0\}$  y  
 $\rho^{-1}(2) = \{v_0v_3, v_6v_1\}$ .

Tipo II:  $\rho^{-1}(0) = \{v_3v_6, v_7v_2, v_5v_0\}$ ,  $\rho^{-1}(1) = \{v_6v_1, v_4v_7, v_2v_5\}$  y  
 $\rho^{-1}(2) = \{v_0v_3, v_1v_4\}$ .

Tipo III:  $\rho^{-1}(0) = \{v_3v_6, v_4v_7, v_2v_5\}$ ,  $\rho^{-1}(1) = \{v_6v_1, v_7v_2, v_5v_0\}$  y  
 $\rho^{-1}(2) = \{v_0v_3, v_1v_4\}$ .

Tipo IV:  $\rho^{-1}(0) = \{v_3v_6, v_4v_7, v_2v_5\}$ ,  $\rho^{-1}(1) = \{v_1v_4, v_7v_2, v_5v_0\}$  y  
 $\rho^{-1}(2) = \{v_0v_3, v_4v_7\}$ .

**Afirmación 5.** La coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo I.

(a)  $v_0v_1 \notin \rho^{-1}(2)$  y  $v_4v_5 \notin \rho^{-1}(0)$ , por la Afirmación 2.

(b)  $v_1v_2 \notin \rho^{-1}(0)$ ; en otro caso, por (a) y la Afirmación 1, tenemos que  $v_0v_1 \notin \rho^{-1}(1)$ . Dado que  $v_1v_4v_5v_6$  es un arcoíris forzado y por (a), se sigue que  $v_4v_5 \in \rho^{-1}(2)$  y  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(0)$ , por lo cual no hay  $v_0v_5$ -arcoíris.

(c)  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(2)$ ; en otro caso  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(1)$ , por (a) y la Afirmación 1 tenemos que  $v_0v_1 \in \rho^{-1}(0)$ . Dado que  $v_1v_4v_7v_0$  es un arcoíris forzado, se tiene  $v_7v_0 \in \rho^{-1}(2)$ . Por la Afirmación 1,  $v_2v_3 \notin \rho^{-1}(1)$ , entonces  $v_2v_5v_6v_1$  es un arcoíris forzado, por lo cual  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(1)$ . Por tanto no hay  $v_5v_2$ -arcoíris.

(d)  $v_3v_4 \notin \rho^{-1}(1)$ ; de lo contrario, por (c) y la Afirmación 1, tenemos  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(2)$  y  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(0)$ . Ahora, de la Afirmación 1 y (a), se sigue que  $v_4v_5 \in \rho^{-1}(2)$ . Dado que  $v_5v_6v_1v_4$  es arcoíris forzado, tenemos  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(0)$ , entonces no existen  $v_2v_6$ -arcoíris.

(e)  $v_3v_4 \in \rho^{-1}(0)$ ; en otro caso  $v_3v_4 \in \rho^{-1}(2)$ , del inciso (c) se sigue que  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(2)$ . Por (a) y la Afirmación 1 tenemos  $v_4v_5 \in \rho^{-1}(1)$ . Además,  $v_6v_7v_2v_5$  es un arcoíris forzado, entonces  $v_6v_7 \in \rho^{-1}(2)$ , y por la Afirmación 1  $v_0v_1 \notin \rho^{-1}(2)$ . Por lo cual no hay  $v_0v_7$ -arcoíris.

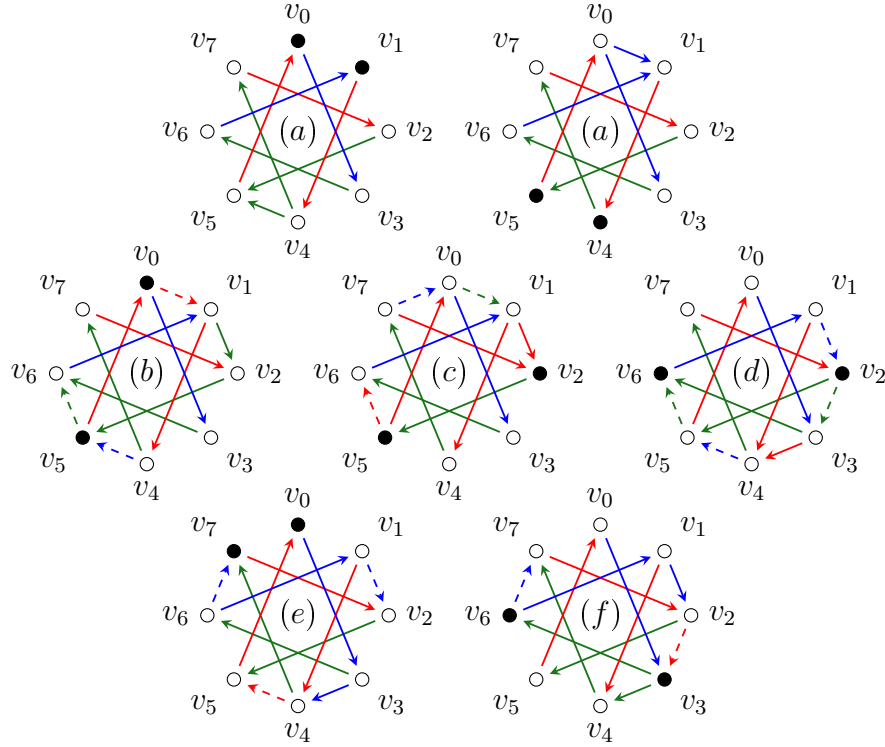


Figura 8: Casos de la Afirmación 5.

(f) A partir de (c) y (e) se sigue que  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(2)$  y  $v_3v_4 \in \rho^{-1}(0)$ . Además, por la Afirmación 1  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(1)$ , entonces  $v_3v_6v_7v_2$  es un arcoíris forzado, es decir,  $v_6v_7 \in \rho^{-1}(2)$ . Así, no hay  $v_6v_3$ -arcoíris.

Entonces la coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo I.

**Afirmación 6.** La coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo II.

(a)  $v_1v_2, v_2v_3 \notin \rho^{-1}(2)$ , por la Afirmación 2. Ahora, por la Afirmación 1, hay dos casos.

(b)  $v_1v_2 \notin \rho^{-1}(0)$  y  $v_2v_3 \notin \rho^{-1}(1)$ ; en otro caso  $v_3v_4v_7v_2$  y  $v_2v_5v_0v_1$  son arcoíris forzados, entonces  $v_0v_1, v_3v_4 \notin \rho^{-1}(2)$ . Por tanto no hay  $v_0v_4$ -arcoíris.

(c)  $v_1v_2 \notin \rho^{-1}(1)$  y  $v_2v_3 \notin \rho^{-1}(0)$ ; en otro caso  $v_3v_4v_7v_2$  y  $v_2v_5v_0v_1$  son arcoíris forzados, entonces  $v_0v_1, v_3v_4 \notin \rho^{-1}(2)$ . Lo cual implica que no existen  $v_0v_4$ -arcoíris.

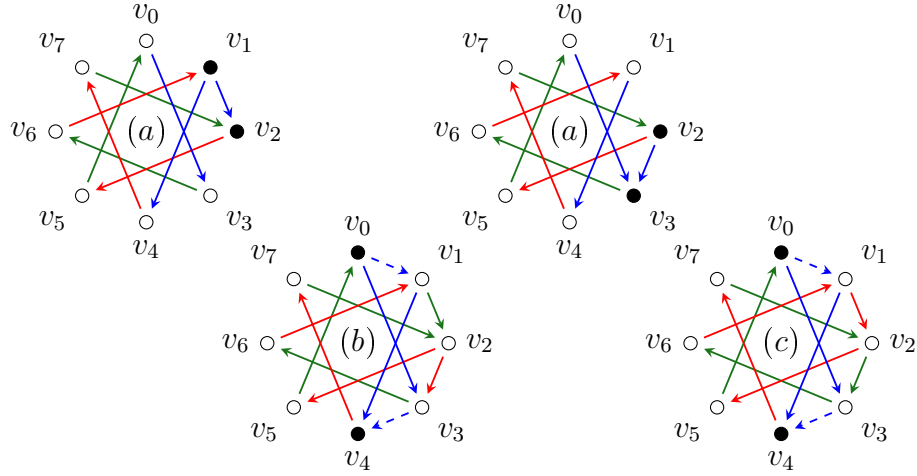


Figura 9: Casos de la Afirmación 6.

Así tenemos que la coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo II.

**Afirmación 7.** La coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo III.

(a)  $v_1v_2 \notin \rho^{-1}(2)$ ; en otro caso, por la Afirmación 1  $v_0v_1, v_2v_3 \notin \rho^{-1}(2)$ , entonces  $v_2v_5v_6v_1$  es un arcoíris forzado, así  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(2)$ . Ahora,  $v_1v_2v_3v_6$  es un arcoíris forzado, entonces  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(1)$ . Nótese que  $v_7v_0, v_0v_1, v_4v_5 \notin \rho^{-1}(2)$ , ya que  $v_7v_0v_3$  es un arcoíris forzado y por la Afirmación 1, por lo cual  $v_4v_5v_6v_1$  es arcoíris forzado, entonces  $v_4v_5 \notin \rho^{-1}(0)$ , y por la Afirmación 1  $v_3v_4 \in \rho^{-1}(2)$ . Dado que  $v_5v_0v_1v_4$  es arcoíris forzado tenemos  $v_0v_1 \in \rho^{-1}(0)$ . Por lo cual no hay  $v_0v_5$ -arcoíris.

(b)  $v_2v_3 \notin \rho^{-1}(2)$ ; en otro caso, por la Afirmación 1,  $v_3v_6v_7v_2$  es arcoíris forzado, entonces  $v_6v_7 \notin \rho^{-1}(2)$ . Ahora,  $v_6v_1v_2v_3$  es arcoíris forzado, así  $v_1v_2 \notin \rho^{-1}(0)$ . Notemos que  $v_4v_5 \in \rho^{-1}(1)$  (de lo contrario, no habría  $v_5v_4$ -arcoíris o  $v_1v_5$ -arcoíris) y por la Afirmación 1,  $v_3v_4, v_5v_6 \in \rho^{-1}(0)$ . Por tanto no existen  $v_2v_7$ -arcoíris.

Dado que  $v_1v_2$  y  $v_2v_3$  son flechas consecutivas en  $C_{(1)}$ , por la Afirmación 1 tenemos dos casos.

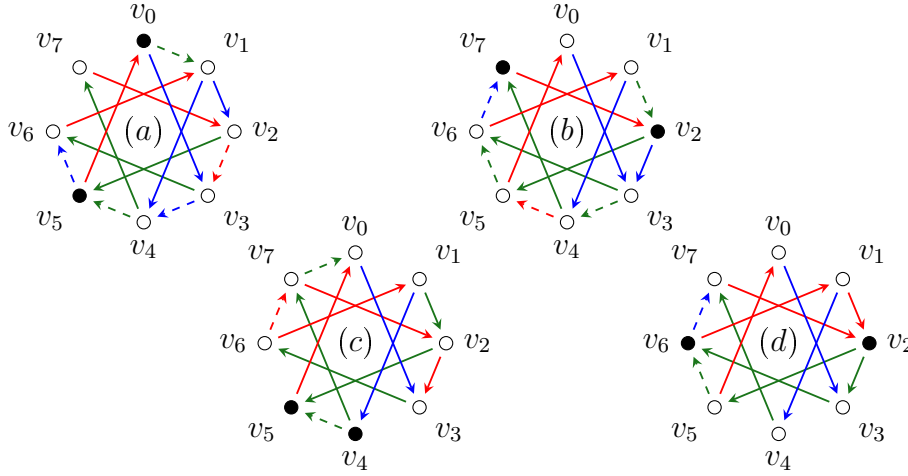


Figura 10: Casos de la Afirmación 7.

(c) Si  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(0)$  y  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(1)$ , entonces  $v_6v_7v_0v_3$  es arcoíris forzado. Además  $v_7v_0 \notin \rho^{-1}(1)$  (de lo contrario, no habría  $v_0v_7$ -arcoíris), por lo cual  $v_6v_7 \in \rho^{-1}(1)$  y  $v_7v_0 \in \rho^{-1}(0)$ . Ahora,  $v_1v_4v_5v_0$  es un arcoíris forzado, es decir,  $v_4v_5$  tiene color 0. Así, por la Afirmación 1, no hay  $v_5v_4$ -arcoíris.

(d) Si  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(1)$  y  $v_2v_3 \in \rho^{-1}(0)$ , nótese que  $v_6v_7 \in \rho^{-1}(2)$  (de lo contrario, no habría  $v_2v_7$ -arcoíris o  $v_6v_2$ -arcoíris). Dado que  $v_5v_6v_7v_2$  es arcoíris forzado se tiene que  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(0)$ . Entonces no hay  $v_2v_6$ -arcoíris.

Se deduce que la coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo III.

**Afirmación 8.** La coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo IV.

(a)  $v_7v_0 \notin \rho^{-1}(1)$  y  $v_3v_4 \notin \rho^{-1}(0)$ , por la Afirmación 2.

(b)  $v_0v_1, v_4v_5 \notin \rho^{-1}(2)$ . Si  $v_0v_1 \in \rho^{-1}(2)$ , notemos que  $v_0v_3v_6v_7$  es arcoíris forzado, entonces  $v_6v_7 \in \rho^{-1}(1)$ , y por la Afirmación 1 se sigue que  $v_7v_0 \in \rho^{-1}(0)$ . Dado que  $v_6v_1v_2$  es arcoíris forzado y por la Afirmación 1,  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(0)$ . Así  $v_1v_4v_5v_0$  es arcoíris forzado, es decir,  $v_4v_5 \in \rho^{-1}(2)$ . Por la Afirmación 1, no hay  $v_4v_3$ -arcoíris. Por simetría, se deduce que  $v_4v_5 \notin \rho^{-1}(2)$ .

(c)  $v_6v_7, v_2v_3 \notin \rho^{-1}(2)$ . Si  $v_6v_7 \in \rho^{-1}(2)$ , entonces  $v_0v_1v_4v_7$  es arcoíris forzado, entonces  $v_0v_1 \in \rho^{-1}(1)$ , y por la Afirmación 1 se tiene  $v_7v_0 \in \rho^{-1}(0)$ .

Además,  $v_5v_6v_1$  es un arcoíris forzado, por lo cual  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(0)$ . Ahora,  $v_5v_0v_3v_4$  es arcoíris forzado, es decir,  $v_3v_4 \in \rho^{-1}(0)$ . Así, por la Afirmación 1, no hay  $v_4v_3$ -arcoíris. De nuevo, por simetría, tenemos  $v_2v_3 \notin \rho^{-1}(2)$ .

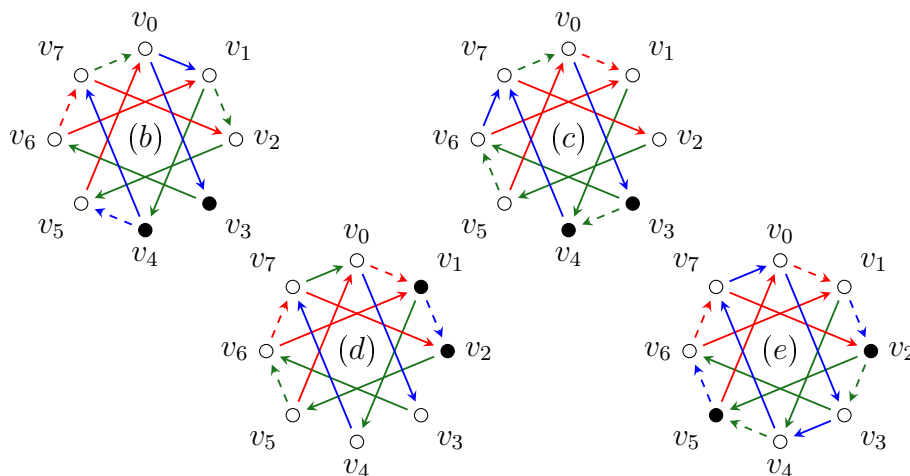


Figura 11: Casos de la Afirmación 8.

(d)  $v_7v_0 \notin \rho^{-1}(0)$  y  $v_3v_4 \notin \rho^{-1}(1)$ . Supongamos que  $v_7v_0$  tiene color 0, por la Afirmación 1, (b) y (c) deducimos que  $v_0v_1, v_6v_7 \in \rho^{-1}(1)$ . Más aún, se tiene que  $v_4v_5 \notin \rho^{-1}(2)$  (por (b) y la Afirmación 1), por lo cual  $v_1v_2v_5v_0$  es arcoíris forzado, es decir,  $v_1v_2 \in \rho^{-1}(2)$ . Ahora,  $v_5v_6v_1v_2$  es arcoíris forzado, entonces  $v_5v_6 \in \rho^{-1}(0)$ . Por la Afirmación 1, no hay  $v_2v_1$ -arcoíris. Análogamente obtenemos  $v_3v_4 \notin \rho^{-1}(1)$ .

(e) De (a) y (d) se sigue que  $v_7v_0, v_3v_4 \in \rho^{-1}(2)$ . Por la Afirmación 1 y dado que  $v_0v_1v_4, v_3v_6v_7, v_4v_5v_0$  y  $v_7v_2v_3$  son arcoíris forzados, tenemos  $v_0v_1, v_6v_7 \in \rho^{-1}(1)$  y  $v_4v_5, v_2v_3 \in \rho^{-1}(0)$ . Nuevamente, por la Afirmación 1,  $v_1v_2, v_5v_6 \in \rho^{-1}(2)$ , por lo tanto no existen  $v_5v_2$ -arcoíris.

Por tanto, la coloración en  $C_{(3)}$  no es del Tipo IV.

Finalmente, las afirmaciones 5,6,7 y 8 contradicen la elección de la coloración  $\rho$ , concluimos que  $src(C_8(1,3)) = 4$ .

Ahora, supongamos que  $\rho$  es una 3-coloración por arcoíris. De lo anterior se sigue que  $\rho$  no puede ser una 3-coloración fuerte por arcoíris. Por lo cual, debe haber un par de vértices  $u$  y  $v$  tales que no hay  $uv$ -geodésicas arcoíris, pero donde existe un  $uv$ -arcoíris que los conecta. Si la  $d(u, v) = 1$ , entonces la flecha  $uv$  es una geodésica arcoíris. Por otro lado, cuando  $d(u, v) = 2, 3$ , es fácil observar que cualquier trayectoria que no es geodésica tiene longitud al menos 4, por lo cual no puede haber  $uv$ -arcoíris, pues  $\rho$  es una 3-coloración. Por lo tanto  $4 \leq rc(C_8(1, 3)) \leq src(C_8(1, 3)) = 4$ , obteniendo el resultado. ■



# Bibliografía

- [1] J. Alva-Samos, J.J. Montellano-Ballesteros. Rainbow connection in some digraphs. *Graphs and Combinatorics*. **32(6)** (2016), 2199-2209.
- [2] J. Alva-Samos, J.J. Montellano-Ballesteros. Rainbow connectivity in cacti digraphs and some infinite digraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. Aceptado.
- [3] J. Alva-Samos, J.J. Montellano-Ballesteros. Rainbow connectivity on some operations of digraphs. Enviado.
- [4] J. Bang-Jensen, G. Gutin. *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2002.
- [5] J.A. Bondy, U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Springer. 2008.
- [6] G. Chartrand, P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. CRC Press. 2009
- [7] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica* **133** (2008), 85-98.
- [8] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. The rainbow connectivity of a graph. *Networks* **54** (2009), 75-81.
- [9] S. Chakraborty, E. Fischer, A. Matsliah, R. Yuster. Hardness and algorithms for rainbow connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization* **21(3)** (2011), 330-347.



- 
- [10] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2005.
- [11] P. Dorbec, I. Schiermeyer, E. Sidorowicz, E. Sopena. Rainbow connection in oriented graphs. *Discrete Applied Mathematics* **179** (2014), 69-78.
- [12] P. Erdős, M. Simonovits, V.T. Sós. Anti-Ramsey Theorems, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolya* **10** (1973), 633-643.
- [13] A. Ericksen. A matter of security. *Graduating Engineer & Computer Careers* (2007), 24-28.
- [14] R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar. *Handbook of Product Graphs*. CRC Press, 2011.
- [15] G.H. Hardy, E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 2002.
- [16] M. Krivelevich, R. Yuster. The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree, *Journal of Graph Theory* **63** (2009), 185-191.
- [17] X. Li, Y. Sun. *Rainbow Connections of Graphs*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, 2012.
- [18] X. Li, Y. Sun. Characterization of graphs with large rainbow connection number and rainbow connection numbers of some graph operations. *Discrete Mathematics*, por aparecer.
- [19] I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [20] I. Schiermeyer. Rainbow connection in graphs with minimum degree three. *Lecture Notes in Computer Science* **5874** (2009), 435-437.
- [21] I. Schiermeyer. Bounds for the rainbow connection number of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **30** (2011), 387-395.

# Índice de símbolos

## Términos matemáticos generales

$A \times B$	El producto cartesiano entre dos conjuntos $A$ y $B$ .
$ A $	La cardinalidad del conjunto $A$ .
$\lfloor n \rfloor$	El mayor entero menor o igual a $n$ .
$\lceil n \rceil$	El menor entero mayor o igual a $n$ .
$\stackrel{n}{\equiv}$	Congruencia módulo $n$ .
$(m, n)$	El máximo común divisor de $m$ y $n$ .

## Digráficas y familias de digráficas

$C_n$	El ciclo de orden $n$ .
$\overrightarrow{C_n}$	El ciclo dirigido de orden $n$ .
$\overleftrightarrow{C_n}$	El ciclo biorientado de orden $n$ .
$C_n(S)$	La digráfica circulante de orden $n$ respecto al conjunto $S$ .
$D[X]$	La subdigráfica inducida de $D$ por el subconjunto de vértices $X$ .
$K_{n_1, \dots, n_k}$	La gráfica k-partita completa.
$\overleftrightarrow{K}_{n_1, \dots, n_k}$	La digráfica k-partita completa.
$P_n$	La trayectoria de orden $n$ .
$\overrightarrow{P_n}$	La trayectoria dirigida de orden $n$ .
$\overleftrightarrow{P_n}$	La trayectoria biorientada de orden $n$ .

## Parámetros de digráficas

$\beta(D)$	El número de cubierta de la digráfica $D$ .
$circ(D)$	La circunferencia de la digráfica $D$ .
$d^+(u)$	El exgrado del vértice $u$ .
$d^-(u)$	El ingrado del vértice $u$ .
$d(u)$	El grado del vértice $u$ .
$d(u, v)$	La distancia entre los vértices $u$ y $v$ .
$diám(D)$	El diámetro de la digráfica $D$ .
$\delta_D^+$	El exgrado mínimo de $D$ .
$\delta_D^-$	El ingrado mínimo de $D$ .
$g(D)$	El cuello de la digráfica $D$ .
$g^*(D)$	El cuello grueso de la digráfica $D$ .
$N^+(u)$	La exvecindad del vértice $u$ .
$N^-(u)$	La invecindad del vértice $u$ .
$N(u)$	La vecindad del vértice $u$ .
$rc(D)$	Número de conexidad por arcoíris de la (di)gráfica $D$ .
$src(D)$	Número de conexidad fuerte por arcoíris de la (di)gráfica $D$ .

## Relaciones y operaciones entre digráficas

$H \subseteq D$	$H$ es sub(di)gráfica de $D$ .
$D \cong H$	Isomorfismo de las (di)gráficas $D$ y $H$ .
$D \square D'$	El producto catesiano entre dos digráficas $D, D'$ .
$D \boxtimes D'$	El producto fuerte entre dos digráficas $D, D'$ .
$D[H_1, H_2, \dots, H_n]$	La composición de $D$ con $H_1, H_2, \dots, H_n$ .
$D + a$	La adición de la flecha $a$ en la digráfica $D$ .
$D - a$	El borrado de la flecha $a$ en la digráfica $D$ .
$D/a$	La contracción de la flecha $a$ en la digráfica $D$ .
$D \bullet a$	La subdivisión de la flecha $a$ en la digráfica $D$ .
$\vec{G}$	Una orientación de la gráfica $G$ .
$\overleftrightarrow{G}$	La biorientación de la gráfica $G$ .

# Índice alfabético

$k$ -coloración por arcoíris, 9

adición, 73

arcoíris, 9

arcoíris geodésico, 9

bloque, 47

borrado, 73

cabeza, 8

cactus, 46

ciclo

    dirigido, 8

ciclo arcoíris, 69

ciclo biorientado, 15

circunferencia, 68

cola, 8

coloración de las flechas, 8

coloración fuerte por arcoíris, 9

coloración por arcoíris, 9

composición, 67

contracción, 49

cubierta, 14

cuello, 68

cuello grueso, 68

diámetro, 8

digráfica

$k$ -partita completa, 11

    asimétrica de Rado, 64

    cíclicamente  $k$ -partita completa,  
    70

    completa, 9

    conexa, 47

    conexa por arcoíris, 9

    de Rado, 63

    fuertemente conexa, 8

        por arcoíris, 9

    semicompleta de Rado, 64

    simétrica, 9

    simétrica de Rado, 64

    vacía, 7

distancia, 8

    entre conjuntos, 21

exgrado, 8

exvecindad, 8

exvecino, 7

flecha

    adición de una, 73

    borrado de una, 73

    cabeza de una, 8

- cola de una, 8
- contracción de una, 49
- simétrica, 9
- subdivisión de una, 73
- geodésica, 8
- gráfica
  - de bloques, 47
  - de Rado, 64
  - subyacente, 47
- ingrado, 8
- invecindad, 8
- invecino, 7
- longitud, 8
- número de conexidad
  - fuerte por arcoíris, 9
  - por arcoíris, 9
- número de cubierta, 14
- orden, 7
- producto
  - cartesiano, 70
  - fuerte, 72
- proyección, 70
- Rado
  - digráfica asimétrica de, 64
  - digráfica de, 63
  - digráfica semicompleta de, 64
  - digráfica simétrica de, 64
  - gráfica de, 64
  - torneo de, 63
- ramificación, 51
- subdigráfica, 8
  - generadora, 8
  - inducida, 8
- subdivisión, 73
- tamaño, 7
- torneo, 60
  - de Rado, 63
- trayectoria, 8
- trayectoria biorientada, 15
- vértice
  - de corte, 47
  - exgrado de un, 8
  - exvecindad de un, 8
  - grado de un, 51
  - ingrado de un, 8
  - invecindad de un, 8
  - ramificación de un, 51
  - vecindad de un, 51