



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES UNAM

PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE LOS NEUTRINOS EN MEDIOS EN
MOVIMIENTO.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
YAITHD DANIEL OLIVAS ARCOS

TUTOR PRINCIPAL:
DR. SARIRA SAHU
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DRA. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS
INSTITUTO DE FÍSICA UNAM

DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ
INSTITUTO DE FÍSICA UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DATOS GENERALES.

1. Datos alumno

Olivas
Arcos
Yaithd Daniel
62-36-25-93
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto en Ciencias Nucleares
Maestría en Ciencias (Física)
306209750

2. Datos del tutor.

Dr
Sarira
Sahu

3. Datos del sinodal 1.

Dr
Rodolfo Patricio
Martínez y Romero

4. Datos del sinodal 2.

Dr
Abdel
Pérez Lorenzana

5. Datos del sinodal 3.

Dr
Ricardo
Gaitán Lozano

6. Datos del sinodal 4.

Dr
Antonio
Ortiz Velásquez

AGRADECIMIENTOS.

Agradezco al Dr. Sarira Sahu por todo el apoyo que siempre me brindó desde que lo conocí. Agradezco enormemente las largas discusiones que me permitieron enriquecer esta tesis y, por supuesto, agradezco los consejos que me dio ya que estos ayudaron en mi formación como físico.

Agradezco también al Dr. José F. Nieves por su valiosa guía a lo largo del proceso de realización de este trabajo. Agradezco su tiempo, su interés y su paciencia en las largas discusiones que sostuvimos.

Agradezco a mis sinodales Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero, Dr. Abdel Pérez Lorenzana, Dr. Ricardo Gaitán Lozano y al Dr. Antonio Ortiz Velásquez por los valiosos comentarios que hicieron a este trabajo. También quiero agradecer su apoyo ya que siempre tuvieron una buena disposición conmigo.

Quiero agradecer a mi madre Diana María Carolina Arcos Martínez por todo el apoyo, amor y comprensión que me ha dado en todos mis años de vida.

Quiero agradecer a mi abuela María de Lourdes Martínez Laguna por su cariño y atenciones que me ha brindado a lo largo de mi vida, la verdad no sé como hubiera llegado a esta etapa de mi vida sin ella.

Agradezco a mi abuelo Eduardo Arcos Manzano por el apoyo que siempre me ha dado, gracias a él soy una persona íntegra y con valores. Agradezco que siempre me apoyaras en todas mis decisiones.

Quiero agradecer de todo corazón a Alejandra Liliana Gómez Paz, mi alma gemela, por estar conmigo en las buenas y en las malas, por apoyarme siempre y por ser ese pilar que sostiene todo mi ser. Sé que nos esperan más retos que debemos enfrentar juntos y tengo la certeza de que los superaremos con amor, unión y fortaleza.

Al proyecto PAPIIT-IN103812 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme la beca número 404945.

RESUMEN

En muchos trabajos en el campo de la física de neutrinos se ha enfatizado la importancia de estudiar las propiedades que desarrollan estas peculiares partículas al propagarse en un medio material debido a que pueden tener un impacto directo, por ejemplo, en sus oscilaciones de sabor y también debido a que existen muchos sistemas astrofísicos en donde la propagación de los neutrinos se da mayormente en un medio que en el vacío. En todos los casos, las cantidades de interés dependerán de manera adicional del cuadri-vector de velocidad del medio, por lo que resulta conveniente al final de los cálculos tomar el sistema de reposo del medio. Sin embargo, en un medio que tiene dos componentes, los cuales se encuentran en movimiento relativo, no es posible tomar simultáneamente ambos marcos en reposo. Tomando en cuenta lo anterior, en la presente tesis se analizaron las propiedades de los neutrinos al propagarse por un medio de electrones con dos componentes en movimiento relativo, esto es, adicionalmente al medio de fondo se toma un medio con una velocidad relativa a este, como complicación extra también se consideró la presencia de un campo magnético en el sistema en reposo. Principalmente se calculó la auto-energía del neutrino debido a que en ella se codifica la manera en la que la relación de dispersión del neutrino cambia respecto a la del vacío. El cálculo de la auto-energía se llevó a cabo usando dos caminos diferentes: el primero usando el vértice electromagnético del neutrino y el segundo calculando directamente la auto-energía usando el propagador de Schwinger. En el caso en donde sólo hay un medio de fondo se encontró que ambos acercamientos llevan exactamente a los mismos resultados. Sin embargo, para el caso de un medio con doble componente se encontró que el método del vértice contiene sutilezas relacionadas con la aparición de divergencias IR causadas por el medio en movimiento. Por otro lado, al utilizar el método del propagador de Schwinger tales divergencias no se presentan y en consecuencia, se encontró que adicionalmente a las contribuciones de la auto-energía causadas por un medio con campo magnético también existen contribuciones adicionales relacionadas con las componentes de campo magnético generadas en el medio en movimiento.

ABSTRACT

Many works on neutrino physics have emphasized the importance of studying the neutrino properties in a medium because they can have a direct impact, for example, on their flavor oscillations and also because there exist many astrophysical systems where the propagation of neutrinos is mostly in a medium than in the vacuum. In all cases the quantities of interest will generate an additional dependence on the medium four-velocity so, at the end of the calculation, for simplicity, is possible to take the rest frame of the medium. However in a medium which has two components in relative motion it is not possible to take simultaneously both frames at rest. Taking into account the above, in the present thesis the properties of neutrino were analyzed when propagating in a medium of electrons with two components in relative motion, that is, in addition to the normal electron background there is another medium with a relative velocity, as an extra complication we also take into account the presence of a magnetic field in the rest frame of the background medium. The self-energy of the neutrino is calculated mainly because it encodes the way in which the neutrino dispersion relation changes from that of the vacuum. The calculation of self-energy is carried out using two different paths: the first one using the electromagnetic vertex of the neutrino and the second one calculating directly the neutrino self-energy using the Schwinger propagator (weak field limit). First it was analyzed the case for which there is only the background medium and it was found that both approaches give exactly the same results. However, in the case of a double component medium it was found that the vertex method contains subtleties related to the appearance of IR divergences caused by the introduction of a moving medium. Using the Schwinger's propagator we found that such divergences are not present and as a consequence it was found that there are additional contributions to the self-energy related to the magnetic field generated in the moving frame.

ÍNDICE GENERAL

Índice general	v
Índice de figuras	vii
1 Introducción.	2
1.1. Breve historia del neutrino.	2
1.2. Oscilaciones de neutrinos y el problema de los neutrinos solares.	5
1.3. ¿Neutrinos zurdos y antineutrinos diestros?	6
2 Introducción a la Teoría Térmica de Campos.	8
2.1. Formalismo de tiempo imaginario.	8
2.2. Formalismo de tiempo real.	10
2.3. Funciones de correlación a temperatura finita.	12
2.4. Propagador de tiempo propio de Schwinger a orden lineal en B.	13
3 Propiedades electromagnéticas del neutrino en un medio magnetizado.	18
3.1. Vértice del neutrino en un baño térmico de electrones.	18
3.2. Estructura del vértice del neutrino	24
3.3. Auto-energía del neutrino apartir del vértice electromagnético.	26
3.4. Auto-energía del neutrino usando el propagador de Schwinger.	28
3.5. Aplicaciones.	31
4 Propiedades electromagnéticas del neutrino en medios en movimiento.	33
4.1. Auto-energía a partir del vértice electromagnético y sutilezas.	33
4.2. Auto-energía usando el propagador de Schwinger.	36
4.3. Aplicaciones.	38
5 Conclusiones.	40
A Cálculos restantes.	42
A.1. Integral $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)}$	42
A.2. Integral α	44
B Cálculo de integrales A,B y C	46
B.1. Cálculo de integral A	46
B.2. Cálculo de integral B	48
B.3. Cálculo de integral C	49

B.4. Límite no-relativista de A,B y C	51
C Propiedades de los tensores $R_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$ y $P_{\mu\nu}$	52
Bibliografía	54

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Espectro de energías característico del decaimiento beta.	3
1.2. Fragmento principal de la carta escrita por Pauli.	4
1.3. Esquema del fenómeno de oscilación entre los neutrinos.	6
3.1. Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice del neutrino en un baño térmico de electrones.	19
3.2. Diagramas de Feynman que contribuyen a la auto-energía del neutrino en un plasma magnetizado.	29
4.1. Diagramas de Feynman que contribuyen a la auto-energía del neutrino en un plasma magnetizado.	37

CONVENCIONES.

A lo largo de esta tesis se utilizará el sistema de unidades NATURALES en donde las constantes fundamentales tienen el siguiente valor:

$$(1) \quad c = \hbar = k_B = 1,$$

Entonces se tiene la siguiente relación:

$$(2) \quad [\text{distancia}] = [\text{tiempo}] = [\text{temperatura}]^{-1} = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}.$$

Para los cuadri-vectores contravariantes se adopta la siguiente forma:

$$(3) \quad x^\mu = (x_0, \vec{x}),$$

mientras que para los cuadri-vectores covariantes se tiene:

$$(4) \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, -\vec{x}),$$

donde

$$(5) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El operador derivada está dado por:

$$(6) \quad \partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}).$$

Las masas del electrón y de los bosones de norma W^\pm y Z^0 estarán indicadas por: m , M_W y M_Z respectivamente.

INTRODUCCIÓN.

A través del tiempo la física se ha cimentado en fundamentos teóricos y verificaciones experimentales construyendo así modelos que incrementan nuestro entendimiento de la naturaleza. En muchas ocasiones la discrepancia de estos modelos con la realidad dio pie al desarrollo de problemas conceptuales verdaderamente importantes. Ejemplo claro de esto fue el descubrimiento del neutrino. Esta partícula elemental, a diferencia de otras, posee características verdaderamente peculiares, entre las cuales resalta el hecho de que interactúan débilmente con la materia, no poseen carga y hasta hace algunas décadas se les creía no masivas. Indudablemente los neutrinos forman parte del pasado, presente y futuro de la física es por esto que en este capítulo se presenta un resumen tanto técnico como histórico que abarca desde su postulación teórica hasta los últimos experimentos que dieron certeza a sus propiedades.

1.1. Breve historia del neutrino.

En 1914 J. Chadwick [1] encontró experimentalmente el espectro de emisión para el decaimiento β y con este resultado se puso en duda uno de los principios fundamentales de la física: la conservación de la energía. Lo esencial de este hallazgo fue que, a diferencia de lo esperado, los electrones que eran emitidos de un núcleo radiactivo tenían un rango de energías que variaba continuamente desde valores cercanos a cero hasta un cierto valor máximo, ver fig. 1.1 (imagen tomada de [2]). Esto resultaba problemático ya que era desconocido el mecanismo por el cual era generado este espectro y ciertamente significaba la violación de la conservación de la energía ya que el electrón era detectado cada vez con diferente energía. Esto significaba la aparición de procesos más complejos y, por ende, se podría argumentar como un primer intento a la solución del problema que la pérdida de energía era causada por un proceso interno, pero experimentos más detallados desmintieron esta suposición. Los hechos experimentales estaban tan alejados de lo común que hicieron que

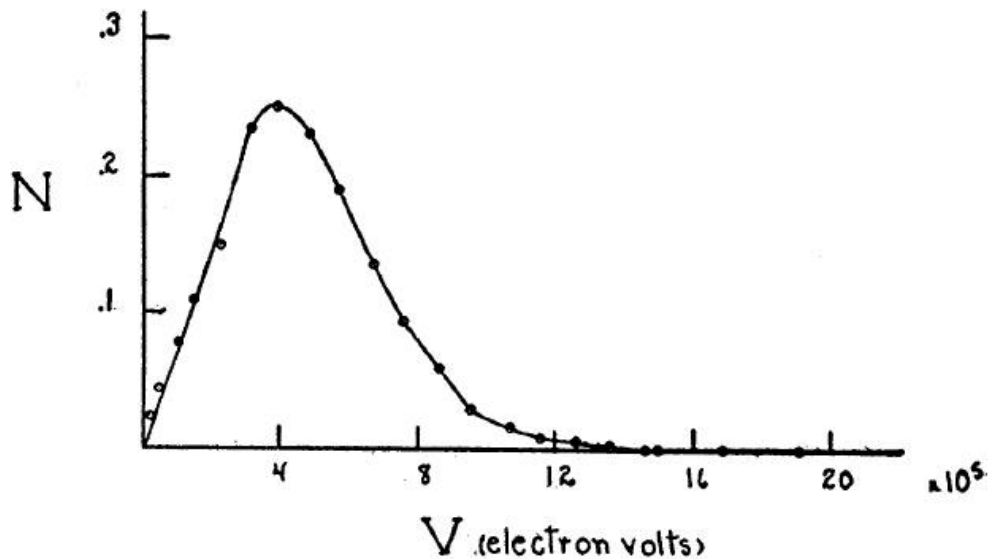


Figura 1.1: Espectro de energías característico del decaimiento beta.

físicos renombrados como Niels Bohr abandonaran el principio de la conservación de la energía, el cual hasta la época actual sigue siendo uno de los pilares fundamentales de la física teórica.¹ Los problemas no solo estaban enfocados en esta ley de conservación, ya que un análisis más detallado revelaría que también eran violadas la conservación de momento y momento angular, la primera ya que se encontraba que el protón y el electrón casi nunca viajaban en direcciones opuestas [4], y la segunda debido a que la configuración final de momento angular no era compatible con la inicial.

Años más tarde, en 1930, Wolfgang Pauli tuvo una idea ingeniosa para solucionar el vacío conceptual creado por el espectro del decaimiento β . En una carta dirigida a un grupo de físicos nucleares, los cuales se encontraban en una reunión en Tübingen, Pauli propuso la existencia de una nueva partícula sin carga, sujeta al principio de exclusión, de espín $1/2$ y con una masa muy pequeña (comparada con la masa del protón) a la cual nombró neutrón, ver fig. 1.2, la cual llevaba la energía faltante y por sus características daba un balance adecuado a las leyes de conservación. En años posteriores esta partícula adoptaría el nombre de neutrino y el nombre de neutrón sería asignado adecuadamente a la partícula descubierta por Chadwick en 1932 [5]. Con la hipótesis de Pauli ciertamente se salvaban los principios de conservación de la energía, el momento y el momento angular pero, debido a las características de esta nueva partícula, resultaba incierta la posibilidad de encontrarla experimentalmente.

En 1956 C. L. Cowan y F. Reines [6] dieron la primera confirmación experimental de la existencia del neutrino en un experimento realizado cerca de la planta de energía nuclear de Savannah River en E.U. Con este hallazgo quedaba claro que el proceso fundamental del

¹Un excelente compendio de historias sobre los inicios de la mecánica cuántica se pueden consultar en la ref. [3]

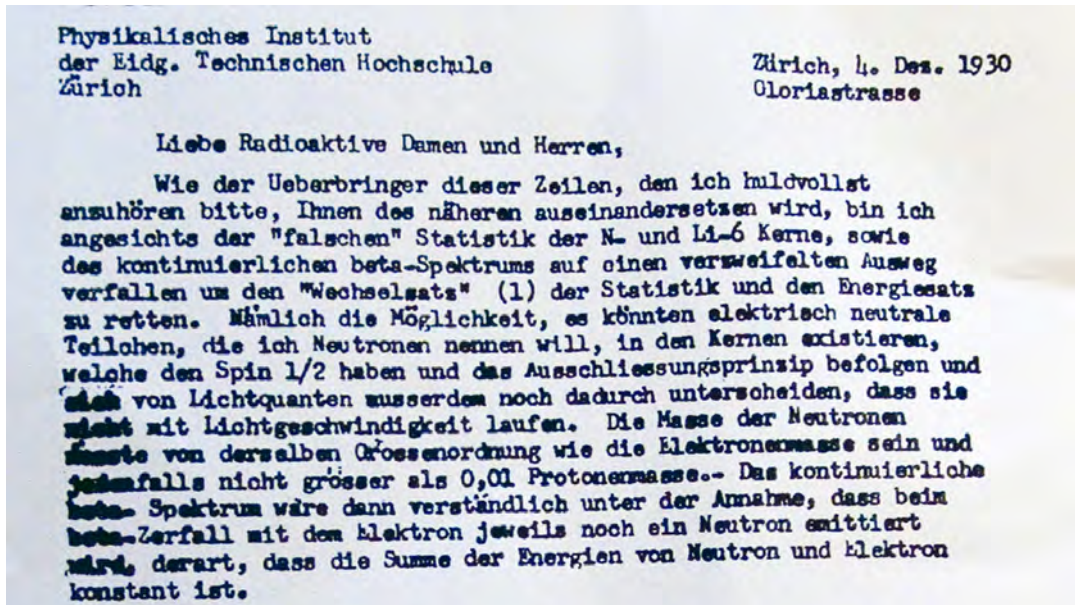


Figura 1.2: Fragmento principal de la carta escrita por Pauli.

decaimiento β era:

$$(1.1) \quad n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e.$$

Por supuesto la historia de los neutrinos no concluiría en esta época ya que con el descubrimiento del muón hecho por C. D. Anderson y S. Neddermeyer en 1937 [7] surgieron nuevas interrogantes relacionadas con los neutrinos. El muón, a diferencia del electrón, decae en partículas más ligeras. En 1941 se encontró que la única partícula producto del decaimiento era el electrón y en 1948 fue posible obtener el espectro de energías correspondiente. Dicho espectro era continuo por lo que, en analogía al decaimiento β , se especuló que en este proceso estaban involucrados dos neutrinos, uno relacionado al electrón y otro de naturaleza idéntica. Aunque era claro que además del electrón había dos neutrinos, no era del todo evidente que estos neutrinos debían ser el mismo. En 1962 L. Lederman, M. Schwartz y J. Steinberger [8] dieron certeza experimental de la diferencia entre estos dos neutrinos en un experimento realizado en el Laboratorio Nacional de Brookhaven y con esto se confirmaba el descubrimiento de una nueva especie de neutrino: el neutrino muónico o neutrino del muón. Con dos especies de neutrinos descubiertas fue natural postular la existencia de un nuevo neutrino después del descubrimiento de la partícula tau en 1975 por M. L. Perl et al. [9]. A este nuevo neutrino se le nombró neutrino tauónico. El avistamiento experimental de esta nueva especie de neutrino llegaría 25 años más tarde en el año 2001 en un experimento realizado en Fermilab [10].

1.2. Oscilaciones de neutrinos y el problema de los neutrinos solares.

El fenómeno de oscilación de sabor es un mecanismo puramente cuántico por el cual un neutrino de un sabor específico puede cambiar a otro sabor a medida que se propaga por el vacío o por un medio, ver fig. 1.3. Su postulación teórica fue hecha por B. Pontecorvo en 1957 [11] tomando como inspiración el fenómeno de oscilación que se presenta en el sistema $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$. Siguiendo la misma línea de pensamiento en un trabajo posterior Pontecorvo postuló la existencia de oscilaciones del tipo $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ y $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ [12] siendo la última la que da solución al problema de neutrinos solares (SNP por sus siglas en inglés). A nivel teórico, un estado de sabor de un neutrino es esencialmente la combinación lineal de estados del neutrino con masa bien definida, es decir:

$$(1.2) \quad |\nu_e\rangle = a|\nu_1\rangle + b|\nu_2\rangle + c|\nu_3\rangle,$$

en donde los coeficientes a , b y c dependerán principalmente de la mezcla de sabores presente en la naturaleza y de las simetrías de la teoría que se utilice. Una consecuencia importante de la teoría de oscilación de neutrinos es el hecho de que los neutrinos forzosamente deben de tener masa distinta de cero o por lo menos dos de las masas deben ser distintas para que el fenómeno pueda ocurrir [13].

Con el desarrollo del Modelo Estándar Solar (SSM) se volvió crucial la detección de neutrinos provenientes del núcleo solar, ya que prácticamente llegan a la Tierra sin interactuar con otras partículas, por lo tanto proveen información muy importante para la verificación o refutación de este modelo. El primer experimento en detectar neutrinos provenientes del sol fue el Observatorio de Neutrinos Solares Homestake localizado al sur de Dakota en U.S.A. El principio básico de su funcionamiento es el decaimiento β inverso de Pontecorvo-Alvares el cual está representado por el proceso



El experimento fue capaz de medir los neutrinos provenientes del sol creados por la reacción correspondiente a la etapa ${}^8\text{B}$ y con esta medición se encontró que existía un déficit en el flujo de neutrinos electrónicos respecto al predicho por el SSM. A esto se le conoció como el Problema de Neutrinos Solares.

Con el tiempo fue posible poner en marcha experimentos más precisos como el experimento Kamiokande y su versión mejorada Super-Kamiokande el cual está localizado en la mina de Kamioka en Japón. Este detector de agua por efecto Cherenkov fue capaz de medir el flujo de los neutrinos provenientes de la secuencia ${}^8\text{B}$ del Sol por lo que fue capaz de confirmar un déficit por debajo de la mitad del flujo esperado por el SSM. También fue posible

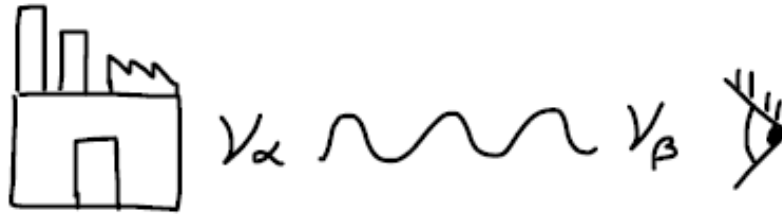
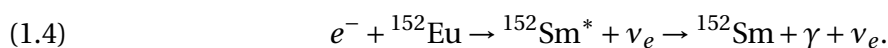


Figura 1.3: Esquema del fenómeno de oscilación entre los neutrinos.

descartar oscilaciones de sabor en el vacío ya que la variación del flujo a lo largo del tiempo empataba perfectamente con la variación esperada debido al movimiento de rotación de la Tierra. Otro experimento se llevó a cabo en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury (SNO por sus siglas en inglés) localizado en Ontario, Canadá. Su principio de funcionamiento también se basa en el efecto Cherenkov, solo que a diferencia con SK este utiliza agua pesada (D_2O) y consta de tres canales de medición en las cuales es posible distinguir procesos por Corrientes Cargadas (CC), Corrientes Neutras (NC) y procesos de dispersión (ES). Por lo anteriormente mencionado SNO fue capaz de medir el flujo total de neutrinos provenientes del sol incluyendo los tres sabores y además fue capaz de medir el flujo de neutrinos electrónicos de manera independiente. Con estas mediciones fue posible confirmar el cambio de sabor debido al efecto de oscilación y con ello se daba una confirmación experimental de este fenómeno. Desde entonces se ha recolectado mucha evidencia que apunta al hecho de que los neutrinos tienen oscilaciones de sabor y por ende tienen masa. Por esta confirmación experimental recientemente en 2015 se otorgó el premio Nobel de Física a T. Kajita y A. B. McDonald.

1.3. ¿Neutrinos zurdos y antineutrinos diestros?

Otra propiedad importante de los neutrinos es su helicidad, la cual es la proyección del espín sobre la dirección de movimiento. Siendo los neutrinos unas partículas tan escurridizas ciertamente representaba un reto diseñar un experimento para medir su helicidad. Esto fue logrado por primera vez en 1957 en un experimento realizado por M. Goldhaber [14]. El principio básico de su funcionamiento se fundamenta en la siguiente reacción:



En donde un núcleo de Europio absorbe un electrón de su capa K y como consecuencia se obtiene un núcleo excitado de Samario además de un neutrino electrónico. Posteriormente el núcleo de Samario decae a su estado base emitiendo un fotón en el proceso. Debido a que el núcleo de Europio absorbe uno de sus electrones su momento es cero por lo que el núcleo de Samario y el neutrino deben viajar en direcciones opuestas por conservación de momento. En el experimento solo se seleccionaron eventos en los cuales el fotón era

emitido en la misma dirección que el núcleo de Samario, por lo que midiendo la helicidad del fotón se podía deducir inmediatamente la helicidad del neutrino por conservación de momento angular. El experimento demostró, midiendo la dirección del neutrino y la helicidad del fotón, que al considerar las configuraciones inicial y final de momento angular solo son consistentes aquellas en donde el neutrino tiene helicidad negativa y por lo tanto por definición es zurdo. Más tarde experimentos similares demostraron que los antineutrinos tienen helicidad positiva por lo que son diestros.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA TÉRMICA DE CAMPOS.

La teoría cuántica de campos combina de manera consistente tres ideas fundamentales en la física: la mecánica cuántica, la relatividad especial y el concepto de campo. Siendo estas sus bases se ha demostrado que estas teorías tienen un alto grado de precisión, ejemplo claro es la electrodinámica cuántica, en la cual es posible calcular el momento anómalo del electrón con una precisión de hasta diez cifras decimales las cuales empatan a la perfección con los resultados del experimento [15]. Sin embargo existen sistemas astrofísicos, cosmológicos, de materia condensada y de QCD que requieren un estudio de sistemas cuánticos relativistas a cierta temperatura y presión. Es por esto que resulta indispensable el uso de la mecánica estadística dentro del esquema de la teoría de campos. A estas teorías que incorporan el efecto de la temperatura se les denomina Teorías Cuánticas de Campos a Temperatura Finita (FTQFT, por sus siglas en inglés) o simplemente Teorías Térmicas de Campos. En este capítulo se pretende desarrollar los elementos claves de esta teoría no con el objetivo de ser una introducción estrictamente formal sino más bien de presentar al lector los fundamentos que fueron clave para la realización de la presente tesis.

2.1. Formalismo de tiempo imaginario.

En las teorías térmicas de campos existen dos formalismos para calcular cantidades de interés. Uno es el formalismo de tiempo imaginario (ITF, por sus siglas en inglés) originalmente desarrollado por Matsubara [16] en 1955 y el otro es el formalismo de tiempo real (RTF) introducido por Schwinger, Keldysh y otros [17, 18] en los años 60's. Ambos esquemas tienen ventajas y ciertamente cada problema tendrá una dificultad diferente en cada uno pero lo importante a resaltar es el hecho que ambos son totalmente equivalentes [19–21]. Para clarificar los conceptos conviene primero trabajar con ITF ya que es la manera más natural de introducir preceptos de la termodinámica a la teoría cuántica de campos.

En mecánica estadística cuántica toda la información termodinámica de un sistema se encuentra contenida en su función de partición, cuya forma general siempre se puede escribir de la siguiente manera:

$$(2.1) \quad Z(\beta) = \text{Tr} \exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{O})] = \sum_a \int d\phi_a \langle \phi_a | \exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{O})] | \phi_a \rangle,$$

en donde \hat{H} es el hamiltoniano, β es el inverso de la temperatura, \hat{O} es un operador que commute con el hamiltoniano y $\{|\phi_a\rangle\}$ es una base de eigen-estados etiquetada de manera continua o discreta. Es interesante notar que al realizar los cambios de variable

$$(2.2) \quad \beta = i\Delta t,$$

$$(2.3) \quad \mathcal{H} = \hat{H} - \mu\hat{O}.$$

La función de partición adquiere la siguiente forma:

$$(2.4) \quad Z(\beta) = \sum_a \int d\phi_a \langle \phi_a | \exp(-i\Delta t \mathcal{H}) | \phi_a \rangle.$$

Entonces es inmediato ver que el argumento de la suma es la amplitud de probabilidad de regresar a la misma configuración de campo después de un tiempo Δt . Esta amplitud en el lenguaje de campos, específicamente para un campo escalar, se puede obtener calculando la siguiente integral funcional:

$$(2.5) \quad \langle \phi, t' | \phi, t \rangle = \langle \phi | e^{-i(t'-t)\hat{\mathcal{H}}} | \phi \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int_t^{t'} d\tau \int d^3x \mathcal{L}\right),$$

donde \mathcal{L} es la densidad langrangiana del obtenida a partir del hamiltoniano \mathcal{H} . Entonces al sustituir se obtiene que la función de partición es [22]:

$$(2.6) \quad Z(\beta) = \mathcal{N} \int_{\text{Periódicos}} \mathcal{D}\phi \exp\left(\int_0^\beta d\tilde{\tau} \int d^3x \mathcal{L}\right).$$

En la ecuación anterior se toma la integral funcional sobre todas las configuraciones de campos escalares que son periódicas en la coordenada temporal $\phi(0, \vec{x}) = \phi(\beta, \vec{x})$. Usando la ec. (2.6) se obtiene que el propagador a temperatura finita en espacio de frecuencias y momentos está dado por [23]:

$$(2.7) \quad \Delta_F(\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m_\phi^2},$$

donde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ son las frecuencias de Matsubara. Cabe recalcar que en este propagador las componentes del momento tienen una clara separación, mientras p_0 se mantiene discreta \vec{p} se mantiene variando continuamente.

2.2. Formalismo de tiempo real.

Para ilustrar el formalismo de tiempo real se toma de ejemplo el sistema de un campo escalar cargado. Una manera natural de introducir el formalismo de tiempo real es mediante la cuantización canónica en la cual el campo es descompuesto en operadores de creación y aniquilación, este análisis está basado en [24] y [25]. En la expansión perturbativa para este sistema en el lenguaje canónico entran en juego los siguientes propagadores:

$$(2.8) \quad i\Delta_{F11}(x-y) = \langle T\phi(x)\phi^*(y) \rangle,$$

$$(2.9) \quad i\Delta_{F12}(x-y) = \langle \phi^*(y)\phi(x) \rangle,$$

$$(2.10) \quad i\Delta_{F21}(x-y) = \langle \phi(x)\phi^*(y) \rangle,$$

$$(2.11) \quad i\Delta_{F22}(x-y) = \langle \bar{T}\phi(x)\phi^*(y) \rangle,$$

en las expresiones anteriores T y \bar{T} denotan los operadores de ordenamiento temporal y anti-temporal respectivamente y el promedio es tomado de acuerdo a la siguiente relación:

$$(2.12) \quad \langle \hat{O} \rangle = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}]}{\text{Tr}[\hat{\rho}]},$$

siendo $\hat{\rho}$ la matriz de densidad. En el caso de ensables térmicos se tiene

$$(2.13) \quad \hat{\rho} = \exp \left[-\beta\hat{H} - \sum_A \alpha_A \hat{Q}_A \right],$$

para un conjunto de operadores \hat{Q}_A y sus respectivos potenciales químicos α_A que conmuten con el hamiltoniano. Para un campo escalar complejo la expresión para los propagadores se obtiene utilizando la siguiente representación del campo en ondas planas ¹

$$(2.14) \quad \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + b^*(\vec{p})e^{ip \cdot x} \right],$$

donde $p_0 = E$. Entonces utilizando

$$(2.15) \quad \langle a(\vec{p})a^*(\vec{q}) \rangle = (2\pi)^3 2E \delta(\vec{p} - \vec{q}) [f(\vec{p}) + 1],$$

$$(2.16) \quad \langle b(\vec{p})b^*(\vec{q}) \rangle = (2\pi)^3 2E \delta(\vec{p} - \vec{q}) [\bar{f}(\vec{p}) + 1],$$

¹Consultar la Ref. [26] en el capítulo 2. En esta tesis se utiliza el factor de normalización $\frac{1}{2E}$.

donde

$$(2.17) \quad f(\vec{p}) = \frac{1}{e^{\beta(p \cdot u - \alpha)} - 1},$$

$$(2.18) \quad \bar{f}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{\beta(p \cdot u + \alpha)} - 1},$$

son las distribuciones de Bose-Einstein para las partículas y anti-partículas tomando en cuenta la 4-velocidad del medio u^μ y α engloba toda la información de los potenciales químicos. Sustituyendo las ecs. (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18) en las ecs. (2.8), (2.9), (2.10) y (2.11) se obtiene la forma explícita de los propagadores en espacio de momentos

$$(2.19) \quad \Delta_{F11}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u),$$

$$(2.20) \quad \Delta_{F12}(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m^2) [\eta(p \cdot u) + \theta(p \cdot u)],$$

$$(2.21) \quad \Delta_{F21}(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m^2) [\eta(p \cdot u) + \theta(-p \cdot u)],$$

$$(2.22) \quad \Delta_{F22}(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u),$$

donde θ es la función escalón y

$$(2.23) \quad \eta(x) = \frac{\theta(x)}{e^{\beta(x-\alpha)} - 1} + \frac{\theta(-x)}{e^{-\beta(x-\alpha)} - 1}.$$

En estas expresiones para los propagadores se pueden hacer dos observaciones importantes: la primera es que existe una clara separación entre los términos que son a temperatura cero y los que son a una temperatura finita, la segunda observación es que los momentos son tratados al mismo nivel, es decir, todas las componentes de p pueden variar de manera continua a diferencia del formalismo de tiempo imaginario por lo que se puede concluir que al agregar u^μ se puede hacer un tratamiento totalmente covariante bajo transformaciones de Lorentz [27].

Los propagadores (2.19), (2.20), (2.21) y (2.22) pueden ser expresados de manera conveniente si se toma en cuenta que el propagador a temperatura cero es

$$(2.24) \quad \Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$$

y utilizando la siguiente identidad de la delta de Dirac

$$(2.25) \quad \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon} \right),$$

se obtiene

$$(2.26) \quad \Delta_{F11}(p) = \Delta_F(p) + [\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)] \eta(p \cdot u),$$

$$(2.27) \quad \Delta_{F12}(p) = [\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)] [\eta(p \cdot u) + \theta(p \cdot u)],$$

$$(2.28) \quad \Delta_{F21}(p) = [\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)] [\eta(p \cdot u) + \theta(-p \cdot u)],$$

$$(2.29) \quad \Delta_{F22}(p) = -\Delta_F^*(p) + [\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)] \eta(p \cdot u).$$

Estas relaciones resultarán importantes en la sección (2.4) en donde servirán para construir el propagador a temperatura finita a partir del propagador de Schwinger.

2.3. Funciones de correlación a temperatura finita.

Para una teoría interactuante a temperatura finita las funciones de correlación importantes son

$$(2.30) \quad G_\beta(x_1, \dots, x_N) = \langle T\phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle,$$

en donde se debe hacer notar que el promedio es tomado respecto al ensamble térmico a diferencia del caso a temperatura cero en donde el producto temporalmente ordenado de los campos es tomado respecto al vacío de la teoría interactuante. Al igual que en $T = 0$ resulta conveniente trabajar en el esquema de interacción ², en este esquema el campo se representa de la siguiente forma:

$$(2.31) \quad \phi(x) = U^{-1}(t, t_0) \phi_I(x) U(t, t_0),$$

siendo $U(t, t_0)$ el operador de evolución, t_0 un tiempo de referencia y ϕ_I el campo en el esquema de interacción. Sin pérdida de generalidad se toma el siguiente orden en el tiempo en donde además se ha tomando en cuenta un tiempo adicional τ

$$(2.32) \quad -\tau < t_1 < \cdots < t_N < \tau.$$

Entonces utilizando que $U(\tau, -\tau) = U(\tau, t_0) U^{-1}(-\tau, t_0)$ se obtiene

$$(2.33) \quad \langle T\phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle = \langle U^{-1}(\tau, t_0) [T\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_N) U(\tau, -\tau)] U(-\tau, t_0) \rangle,$$

²Consultar Ref. [28] capítulo 8.

en el límite $\tau \rightarrow \infty$ y $t_0 \rightarrow -\infty$ se cumple que $U(-\tau, t_0) \rightarrow 1$ por lo que finalmente se tiene

$$(2.34) \quad G_\beta(x_1, \dots, x_N) = \langle U^{-1}(\infty, -\infty) [T\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_N)U(\infty, -\infty)] \rangle,$$

donde

$$(2.35) \quad U(\infty, -\infty) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right],$$

$$(2.36) \quad U^{-1}(\infty, -\infty) = \bar{T} \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right],$$

en la expresión anterior \bar{T} se refiere al ordenamiento anti-temporal de los operadores mientras que T se refiere al ordenamiento temporal, H_I es el hamiltoniano del sistema a estudiar en el esquema de interacción. Al desarrollar en serie de potencias las ecs. (2.35) y (2.36) básicamente se obtendrán términos como el siguiente:

$$(2.37) \quad \left\langle \left[\bar{T} \bar{O}_1(x_1) \cdots \bar{O}_N(x_N) \right] \left[T O_1(y_1) \cdots O_N(y_N) \right] \right\rangle,$$

de esta expresión resulta evidente la razón por la cual se tienen que trabajar con cuatro tipos de propagadores.

Mediante un análisis similar es posible obtener el propagador (11) [23] para el caso de fermiones el cual se pretende usar a lo largo de esta tesis. Su expresión está dada por

$$(2.38) \quad iS_{F11}(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - (2\pi)(\not{p} + m)\delta(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u)$$

en donde

$$(2.39) \quad \eta(x) = \frac{\theta(x)}{e^{\beta(x-\mu)} + 1} + \frac{\theta(-x)}{e^{-\beta(x-\mu)} + 1}$$

contiene la información de la distribución de Fermi-Dirac para partículas y anti-partículas.

2.4. Propagador de tiempo propio de Schwinger a orden lineal en B.

El propagador de Schwinger [29–31] está dado por la solución a la siguiente ecuación diferencial

$$(2.40) \quad (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)S(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'),$$

donde

$$(2.41) \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

es la derivada covariante asociada al grupo de norma $U(1)$. La solución a (2.40) se puede proponer de la siguiente forma:

$$(2.42) \quad S(x, x') = \Phi(x, x') \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} S_F(p),$$

en donde la fase Φ se define de tal modo que satisface

$$(2.43) \quad i\mathcal{D}_\mu \Phi(x, x') = \frac{e}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \Phi(x, x')$$

Tomando el caso de un campo magnético constante de fondo se tiene que el potencial vectorial puede ser expresado de la siguiente manera:

$$(2.44) \quad A_\mu(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu.$$

Entonces la fase

$$(2.45) \quad \Phi(x, x') = \exp\left(\frac{ie}{2} x^\mu F_{\mu\nu} x'^\nu\right)$$

satisface (2.40) ya que

$$(2.46) \quad \begin{aligned} i\mathcal{D}_\mu \Phi &= (i\partial_\mu - eA_\mu) \Phi \\ &= \left(-\frac{e}{2} F_{\mu\nu} x'^\nu + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} x^\nu\right) \Phi. \\ &= \frac{e}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \Phi \end{aligned}$$

Además al multiplicar por cualquier función f de las coordenadas espacio-temporales se tiene la siguiente propiedad

$$(2.47) \quad \mathcal{D}_\mu (\Phi f) = \Phi \left[\partial_\mu - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} (x - x')^\nu \right] f.$$

Si $f(x, x')$ es invariante bajo traslaciones, entonces su transformada de fourier esta dada por

$$(2.48) \quad f(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \tilde{f}(p),$$

entonces aplicando (2.47)

$$(2.49) \quad \mathcal{D}_\mu [S(x, x')] = i\Phi \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \left[p_\mu - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] S_F(p),$$

y sustituyendo de vuelta en la ec. (2.40) se obtiene

$$(2.50) \quad \Phi(x, x') \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \left[\not{p} - \frac{ieq_c}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} - m \right] S_F(p) = \delta^{(4)}(x - x'),$$

la cual solo se satisface si se cumple

$$(2.51) \quad \left[\not{p} - m - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] S_F(p) = 1.$$

Apartir de lo anterior resulta conveniente separar el propagador en espacio de momentos en una parte independiente del campo electromagnético y una dependiente de él. Es decir

$$(2.52) \quad S_F(p) = S_0(p) + S_B(p),$$

donde

$$(2.53) \quad S_0(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$$

entonces sustituyendo en la ec. (2.51) y solo considerando los términos que son lineales en el campo magnético se obtiene

$$(2.54) \quad [\not{p} - m] S_B = \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_0,$$

multiplicando por S_0 por el lado derecho se llega finalmente a

$$(2.55) \quad S_B = S_0 \left[\frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] S_0.$$

Por lo tanto sustituyendo la forma de S_0 y su derivada se obtiene:

$$(2.56) \quad S_B = \left(\frac{ie}{2} \right) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\frac{F^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{2F^{\mu\nu} \gamma_\mu p_\nu (\not{p} + m)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \right].$$

Para un campo puramente magnético el tensor electromagnético se puede escribir de la siguiente forma:

$$(2.57) \quad F_{\mu\nu} = -B \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b^\alpha u^\beta,$$

donde $b^\alpha = (0, \vec{b})$ solo contiene componentes espaciales que indican la dirección del campo magnético y u^β es el vector de velocidad del sistema en donde solo hay campo magnético. Al sustituir la expresión anterior se obtienen las siguientes identidades:

$$(2.58) \quad \begin{aligned} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu &= -B \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b^\alpha u^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= 2iB [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5 - g_{\mu\nu} \gamma_5] b^\alpha u^\beta \\ &= 2iB \gamma_5 \not{b} \not{u}, \end{aligned}$$

y adicionalmente

$$(2.59) \quad \begin{aligned} F_{\mu\nu} \gamma^\mu p^\nu &= -B \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b^\alpha u^\beta \gamma^\mu p^\nu \\ &= -iB \gamma_5 [-\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta + g_{\nu\alpha} \gamma_\beta - g_{\beta\nu} \gamma_\alpha + g_{\alpha\beta} \gamma_\nu] b^\alpha u^\beta p^\nu \\ &= iB \gamma_5 [\not{p} \not{b} \not{u} - (p \cdot b) \not{u} + (p \cdot u) \not{b}]. \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo en la ec. (2.56) y simplificando se obtiene:

$$(2.60) \quad \begin{aligned} S_B(p) &= \left(\frac{ie}{2} \right) \frac{2iB \gamma_5}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\frac{(-\not{p} + m) \not{b} \not{u}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{[\not{p} \not{b} \not{u} - (p \cdot b) \not{u} + (p \cdot u) \not{b}]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right], \\ &= \frac{eB \gamma_5}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} [-m \not{b} \not{u} + (p \cdot b) \not{u} - (p \cdot u) \not{b}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(2.61) \quad S_B(p) = \frac{eBG(p)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2},$$

donde

$$(2.62) \quad G(p) = m\psi\mathbf{b} + (p \cdot \mathbf{b})\psi - (p \cdot \mathbf{u})\mathbf{b}.$$

Utilizando la forma anterior del propagador de Schwinger y además utilizando la receta

$$(2.63) \quad S_e = S_F - \left[S_F - \bar{S}_F \right] \eta(p \cdot u),$$

la cual es el análogo fermionico de la ec. (2.26), en donde

$$(2.64) \quad \bar{S}_F = \gamma^0 S_F^\dagger \gamma^0,$$

entonces sustituyendo se encuentra que

$$(2.65) \quad S_e = S_0 + S_B - \left[S_0 - \bar{S}_0 \right] \eta_e(p \cdot u) + \left[S_B - \bar{S}_B \right] \eta_e(p \cdot u),$$

por lo que es evidente apreciar que el propagador linealizado en el campo magnético a temperatura finita tiene la siguiente descomposición:

$$(2.66) \quad S_e = S_0 + S_B + S_T + S_{TB},$$

donde

$$(2.67) \quad S_T(p) = (2\pi) i (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u),$$

y

$$(2.68) \quad S_{TB}(p) = -i(2\pi) e B G(p) \delta'(p^2 - m^2).$$

La descomposición dada en la ec. (2.66) resulta conveniente ya que al calcular diagramas de Feynman resulta fácil identificar el origen de cada contribución.

PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DEL NEUTRINO EN UN MEDIO MAGNETIZADO.

Los neutrinos al propagarse en un medio adquieren propiedades interesantes debido a las interacciones que estos tienen con las partículas que conforman el medio. El estudio de estas propiedades es crucial para un mejor entendimiento de las fuentes astrofísicas de su producción como lo son estrellas, GRBs, Supernovas, entre otros [32–34]. Por ejemplo, en un medio los neutrinos sienten un potencial efectivo el cual puede tener el efecto de aumentar drásticamente la probabilidad de cambiar a otro sabor de neutrino, a este comportamiento se le conoce comunmente como efecto MSW (Mikheev-Smirnov-Wolfenstein) [35]. Adicionalmente un neutrino de Majorana puede desarrollar interacciones dipolares eléctricas y magnéticas debido a que el medio crea asimetrías CPT en las interacciones electromagnéticas efectivas [36]. En este capítulo se pretende desarrollar los fundamentos técnicos que permitan entender los efectos que tienen los neutrinos al propagarse por medios que adicionalmente tienen presente un campo magnético estático y uniforme. Para ver los efectos de este peculiar medio se calcula la contribución a la auto-energía del neutrino ya que esta función codifica la manera en la que la relación de dispersión difere de la correspondiente al vacío.

3.1. Vértice del neutrino en un baño térmico de electrones.

Para conocer las contribuciones a la auto-energía del neutrino en esta sección se sigue el método del vértice el cual es ampliamente tratado en la Ref. [37]. Las contribuciones al vértice se presentan en la fig. (3.1). Usando las reglas de Feynman a temperatura finita [38] se obtiene que las contribuciones de cada diagrama están dadas por:

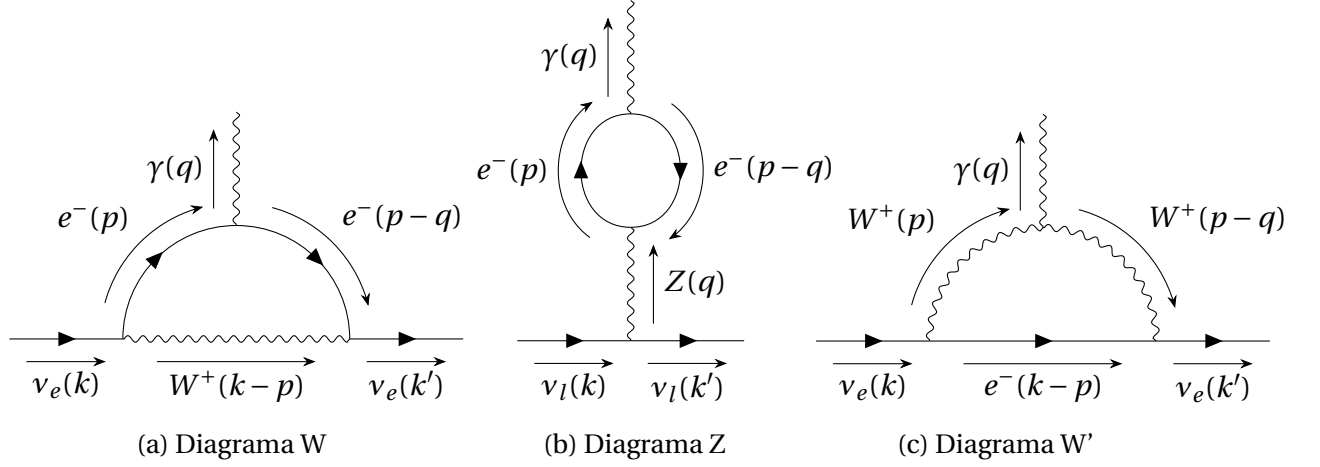


Figura 3.1: Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice del neutrino en un baño térmico de electrones.

$$(3.1) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(W)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{-ig\gamma_{\alpha}L}{\sqrt{2}} \right) iS_F(p-q) (-ie\gamma_{\mu}) iS_F(p) \left(\frac{-ig\gamma_{\beta}L}{\sqrt{2}} \right) iW_F^{\alpha\beta}(k-p) \quad ,$$

$$(3.2) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(Z)} = (-ig_Z\gamma_{\alpha}L) iZ_F^{\alpha\beta}(q) (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \text{Tr} \{ iS_F(p-q) (-ie\gamma_{\mu}) iS_F(p) [-ig_Z\gamma_{\beta}(a_Z + b_Z\gamma_5)] \} .$$

Donde

$$(3.3) \quad g_Z = \frac{g}{2\cos\theta_W} ,$$

$$(3.4) \quad a_Z = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W ,$$

$$(3.5) \quad b_Z = \frac{1}{2} .$$

Tomando contribuciones solo hasta orden M_W^{-2} se tiene que el diagrama de la fig. (3.1.c) no contribuye en el orden considerado debido a que tiene dos propagadores de W . Entonces tomando esta aproximación en los propagadores de Z y W se obtiene:

$$(3.6) \quad iW_F^{\alpha\beta}(k-p) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(k-p)^2 - M_W^2} ,$$

$$(3.7) \quad iZ_F^{\alpha\beta}(q) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 - M_Z^2} ,$$

sustituyendo la simplificación de los propagadores en las ecs. 3.1 y 3.2 se llega a

$$(3.8) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(W)} = \frac{eg^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_{\alpha} L i S_F(p-q) \gamma_{\mu} i S_F(p) \gamma^{\alpha} L \frac{1}{(k-p)^2 - M_W^2},$$

$$(3.9) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(Z)} = -\frac{eg_Z^2 \gamma_{\alpha} L}{q^2 - M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i S_F(p-q) \gamma_{\mu} i S_F(p) \gamma^{\alpha} (a_Z + b_Z \gamma_5)].$$

La siguiente aproximación que es conveniente tomar es el límite local en el cual se desprecia cualquier variación del momento sobre la masa. Entonces tomando esta aproximación se tiene

$$(3.10) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(W)} = -\frac{eg^2}{2M_W^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_{\alpha} L i S_F(p-q) \gamma_{\mu} i S_F(p) \gamma^{\alpha} L,$$

$$(3.11) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(Z)} = \frac{eg_Z^2 \gamma_{\alpha} L}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{i S_F(p-q) \gamma_{\mu} i S_F(p) \gamma^{\alpha} (a_Z + b_Z \gamma_5)\}.$$

Antes de proseguir conviene hacer uso de la siguiente identidad

$$(3.12) \quad \gamma_{\alpha} L A \gamma^{\alpha} L = -\text{Tr}[A \gamma^{\alpha} L] \gamma_{\alpha} L$$

en las ecs. (3.10) y (3.11). De esta manera se llega a las siguientes expresiones:

$$(3.13) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(W)} = \frac{eg^2 \gamma_{\alpha} L}{2M_W^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i S_F(p-q) \gamma_{\mu} i S_F(p) \gamma^{\alpha} L],$$

$$(3.14) \quad -i\Gamma_{\mu}^{(Z)} = \frac{eg_Z^2 \gamma_{\alpha} L}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{i S_F(p-q) \gamma_{\mu} i S_F(p) \gamma^{\alpha} (a_Z + b_Z \gamma_5)\}.$$

Con esta forma se puede notar que al calcular $-i\Gamma_{\mu}^{(Z)}$ se obtiene automáticamente $-i\Gamma_{\mu}^{(W)}$ haciendo la sustitución

$$(3.15) \quad \frac{g_Z^2}{M_Z} \rightarrow \frac{g^2}{2M_W^2}; \quad a_Z \rightarrow \frac{1}{2}; \quad b_Z \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Entonces para el resto de los cálculos solo se desarrollará $\Gamma_{\mu}^{(Z)}$ hasta su forma más simplificada y de esta se obtendrá la de $\Gamma_{\mu}^{(W)}$.

Usando el propagador del electrón dado por la ec. (2.38) se observa que este se descompone en una parte a temperatura cero y una parte a temperatura distinta de cero

$$(3.16) \quad i S_F(p) = i S_F^0(p) + i S_F^T(p)$$

para las contribuciones puramente dispersivas solo se tomarán las contribuciones con un solo factor de η . Las contribuciones solo térmicas al vértice se denotarán como Γ'_μ . Entonces se obtiene:

$$(3.17) \quad -i\Gamma'_\mu^{(Z)} = \frac{eg_Z^2\gamma_\alpha L}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ \times \text{Tr} \{ [iS_F^0(p-q)\gamma_\mu iS_F^T(p) + iS_F^T(p-q)\gamma_\mu iS_F^0(p)] \gamma^\alpha (a_Z + b_Z \gamma_5) \},$$

sustituyendo la ec. (2.38) en la expresión anterior y tomando solo los términos antes mencionados se encuentra

$$(3.18) \quad -i\Gamma'_\mu^{(Z)} = \frac{eg_Z^2\gamma_\alpha L}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \{ [(\not{p}-\not{q}+m)\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma^\alpha (a_Z + b_Z \gamma_5)] \} \\ \times \left[\frac{\delta(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u)}{(p-q)^2 - m^2} + \frac{\delta[(p-q)^2 - m^2]\eta[(p-q) \cdot u]}{p^2 - m^2} \right],$$

de esta manera es conveniente definir

$$(3.19) \quad \Gamma'_\mu^{(W,Z)} = \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(W,Z)} \gamma^\nu L,$$

donde

$$(3.20) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)} = \frac{eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \{ [(\not{p}-\not{q}+m)\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma_\nu (a_Z + b_Z \gamma_5)] \} \\ \times \left[\frac{\delta(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u)}{(p-q)^2 - m^2} + \frac{\delta[(p-q)^2 - m^2]\eta[(p-q) \cdot u]}{p^2 - m^2} \right].$$

Al realizar el cambio $(p-q) \rightarrow p$ en la segunda integral se obtiene

$$(3.21) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)} = \frac{eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\text{Tr} \{ [(\not{p}-\not{q}+m)\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma_\nu (a_Z + b_Z \gamma_5)] \}}{(p-q)^2 - m^2} \right. \\ \left. + \frac{\text{Tr} \{ [(\not{p}+m)\gamma_\mu(\not{p}+\not{q}+m)\gamma_\nu (a_Z + b_Z \gamma_5)] \}}{(p+q)^2 - m^2} \right] \delta(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u),$$

pero la trazas se pueden descomponer de la siguiente forma:

$$(3.22) \quad \text{Tr} \{ [(\not{p}+m)\gamma_\mu(\not{p}+\not{q}+m)\gamma_\nu (a_Z + b_Z \gamma_5)] \} = 4a_Z [2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} \\ + (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) - (p \cdot q)g_{\mu\nu}] + 4ib_Z \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} q^\sigma p^\rho,$$

$$(3.23) \quad \text{Tr} \left\{ [(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(a_Z + b_Z\gamma_5)] \right\} = 4a_Z [2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} - (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) + (p \cdot q)g_{\mu\nu}] + 4ib_Z \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} q^\sigma p^\rho,$$

reemplazando estas expresiones en la ec. (3.21) se llega a

$$(3.24) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)} = \frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{a_Z [2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} - (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) + (p \cdot q)g_{\mu\nu}]}{(p - q)^2 - m^2} + (q \rightarrow -q) + ib_Z \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} q^\sigma p^\rho \left[\frac{1}{(p - q)^2 - m^2} + (q \rightarrow -q) \right] \right\} \delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u),$$

realizando la integral sobre p_0 con ayuda de las ecs. (A.16), (A.17), (A.19) y (A.20) se obtiene:

$$(3.25) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)} = \frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left\{ a_Z (f_e + f_{\bar{e}}) \left[\frac{2p_\mu p_\nu + (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) - (p \cdot q)g_{\mu\nu}}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right] - b_Z (f_e - f_{\bar{e}}) i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho p^\sigma \left[\frac{1}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right] \right\},$$

donde

$$(3.26) \quad p^\mu = (E, \vec{p}),$$

$$(3.27) \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2},$$

$$(3.28) \quad f_{e,\bar{e}} = \frac{1}{e^{\beta(p \cdot u \mp \mu)} + 1}.$$

Es interesante resaltar que debido a la invariancia de norma se cumple la siguiente identidad

$$(3.29) \quad q^\mu \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(W,Z)}(q) = 0,$$

pero de la ec. que define a $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(W,Z)}(q)$ se puede apreciar que tiene la siguiente característica

$$(3.30) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(W,Z)}(q) = \mathcal{T}_{\nu\mu}^{(W,Z)}(-q),$$

entonces utilizando lo anterior igualmente se cumple que

$$(3.31) \quad q^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)}(q) = q^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}^{(W,Z)}(-q) = (-1) \left[-q^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}^{(W,Z)}(-q) \right] = 0.$$

Cumpliendo estas propiedades se puede demostrar que el tensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)}(q)$ tiene la siguiente descomposición:

$$(3.32) \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)} = \mathcal{F}_T^{(W,Z)} R_{\mu\nu} + \mathcal{F}_L^{(W,Z)} Q_{\mu\nu} + \mathcal{F}_P^{(W,Z)} P_{\mu\nu},$$

donde

$$(3.33) \quad R_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2},$$

$$(3.34) \quad Q_{\mu\nu} = \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2},$$

$$(3.35) \quad P_{\mu\nu} = \frac{i}{Q} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha u^\beta.$$

y además se han definido

$$(3.36) \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2},$$

$$(3.37) \quad \tilde{u}_\mu = \tilde{g}_{\mu\nu} u^\nu.$$

utilizando el hecho de que los tensores R, Q y P son ortogonales y están normalizados de acuerdo con el apéndice C. Se tiene

$$(3.38) \quad \mathcal{F}_T^{(W,Z)} = \frac{1}{2} R^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_\mu^{\mu(W,Z)} - \frac{\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu}{\tilde{u}^2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)} \right],$$

$$(3.39) \quad \mathcal{F}_L^{(W,Z)} = Q_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)} = \frac{\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu}{\tilde{u}^2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)},$$

$$(3.40) \quad \mathcal{F}_P^{(W,Z)} = -\frac{1}{2} P^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)},$$

pero las contracciones de los tensores están dadas por

(3.41)

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}_\mu^{\mu(W,Z)} = \frac{2eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} a_Z(f_e + f_{\bar{e}}) \left[\frac{2m^2 - 2(p \cdot q)}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right],$$

(3.42)

$$\frac{1}{2}u^\mu u^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)} = \frac{2eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} a_Z(f_e + f_{\bar{e}}) \left[\frac{2(p \cdot u)^2 + 2(q \cdot u)(p \cdot u) - (p \cdot q)}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right],$$

(3.43)

$$-\frac{1}{2}P^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(W,Z)} = -\frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} b_Z Q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e - f_{\bar{e}}) \frac{(p \cdot \tilde{u})}{\tilde{u}^2} \left[\frac{1}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right],$$

entonces tomando solo las contribuciones al diagrama (Z) y después de simplificar las expresiones se obtiene:

$$(3.44) \quad \mathcal{F}_T^{(Z)} = \frac{2eg_Z^2}{M_Z^2} a_Z \left[A - \frac{B}{\tilde{u}^2} \right],$$

$$(3.45) \quad \mathcal{F}_L^{(Z)} = \frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} a_Z \frac{B}{\tilde{u}^2},$$

$$(3.46) \quad \mathcal{F}_P^{(Z)} = -\frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} b_Z Q C.$$

En las fórmulas anteriores se han definido las variables A, B y C con el objetivo de simplificar en lo posible las integrales, estas integrales se definen de la siguiente manera:

$$(3.47) \quad A(\Omega, \vec{Q}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e + f_{\bar{e}}) \left[\frac{2m^2 - 2(p \cdot q)}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right],$$

$$(3.48) \quad B(\Omega, \vec{Q}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e + f_{\bar{e}}) \left[\frac{2(p \cdot u)^2 + 2(q \cdot u)(p \cdot u) - (p \cdot q)}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right],$$

$$(3.49) \quad C(\Omega, \vec{Q}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e - f_{\bar{e}}) \frac{(p \cdot \tilde{u})}{\tilde{u}^2} \left[\frac{1}{q^2 + 2(p \cdot q)} + (q \rightarrow -q) \right].$$

3.2. Estructura del vértice del neutrino

Como se vio en la sección anterior el vértice electromagnético del neutrino tiene la siguiente forma:

$$(3.50) \quad \Gamma_\mu^{(Z,W)} = \left[\mathcal{F}_T^{(Z,W)} R_{\mu\nu} \gamma^\nu + \mathcal{F}_L^{(Z,W)} Q_{\mu\nu} \gamma^\nu + \mathcal{F}_P^{(Z,W)} P_{\mu\nu} \gamma^\nu \right] L,$$

sin embargo para el análisis que se realizará en la presente sección es conveniente expresarlo como:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu}^{(Z,W)} &= \left[\mathcal{F}_T^{(Z,W)} \left(\tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{u}_{\mu}\tilde{u}_{\nu}}{\tilde{u}^2} \right) \gamma^{\nu} + \mathcal{F}_L^{(Z,W)} \left(\frac{\tilde{u}_{\mu}\tilde{u}_{\nu}}{\tilde{u}^2} \right) \gamma^{\nu} + \mathcal{F}_P^{(Z,W)} \left(\frac{i}{Q} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^{\alpha} u^{\beta} \right) \gamma^{\nu} \right] L, \\
 (3.51) \quad &= \left[\mathcal{F}_T^{(Z,W)} \tilde{g}_{\mu\nu} \gamma^{\nu} + \left(\mathcal{F}_L^{(Z,W)} - \mathcal{F}_T^{(Z,W)} \right) \left(\frac{\tilde{u}_{\mu}\tilde{u}_{\nu}}{\tilde{u}^2} \right) \gamma^{\nu} + \frac{i\mathcal{F}_P^{(Z,W)}}{Q} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^{\alpha} u^{\beta} \gamma^{\nu} \right] L.
 \end{aligned}$$

Usando la identidad $\tilde{u}_{\nu}\gamma^{\nu} = u_{\nu}\gamma^{\nu} - \frac{(q \cdot u)}{q^2} \not{q}$ y también la definición de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se obtiene:

$$(3.52) \quad \Gamma_{\mu}^{(Z,W)} = \left[F_1^{(Z,W)} \tilde{g}_{\mu\nu} \gamma^{\nu} + F_2^{(Z,W)} \tilde{u}_{\mu} \not{u} + iF_3^{(Z,W)} (\gamma_{\mu} u_{\nu} - \gamma_{\nu} u_{\mu}) q^{\nu} + iF_4^{(Z,W)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^{\alpha} u^{\beta} \gamma^{\nu} \right] L,$$

donde se definen los factores de forma

$$(3.53) \quad F_1^{(Z,W)} = \mathcal{F}_T^{(Z,W)} + \frac{\Omega^2}{Q^2} (\mathcal{F}_L^{(Z,W)} - \mathcal{F}_T^{(Z,W)}),$$

$$(3.54) \quad F_2^{(Z,W)} = \frac{1}{\tilde{u}^2} (\mathcal{F}_L^{(Z,W)} - \mathcal{F}_T^{(Z,W)}),$$

$$(3.55) \quad iF_3^{(Z,W)} = -\frac{\Omega}{Q^2} (\mathcal{F}_L^{(Z,W)} - \mathcal{F}_T^{(Z,W)}),$$

$$(3.56) \quad F_4^{(Z,W)} = \frac{\mathcal{F}_P^{(Z,W)}}{Q}.$$

En términos de las integrales A, B y C

$$(3.57) \quad F_1^{(Z)} = \frac{2eg_Z^2 a_Z}{M_Z^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Omega^2}{Q^2} \right) A - \left(1 - \frac{3\Omega^2}{Q^2} \right) \frac{B}{\tilde{u}^2} \right\},$$

$$(3.58) \quad F_2^{(Z)} = \frac{2eg_Z^2 a_Z}{M_Z^2} \frac{1}{\tilde{u}^2} \left[\frac{3B}{\tilde{u}^2} - A \right],$$

$$(3.59) \quad iF_3^{(Z)} = -\frac{2eg_Z^2 a_Z}{M_Z^2} \frac{\Omega}{Q^2} \left[\frac{3B}{\tilde{u}^2} - A \right],$$

$$(3.60) \quad F_4^{(Z)} = -\frac{4eg_Z^2 b_Z}{M_Z^2} C.$$

Es claro notar que las definiciones de A, B y C están construidas de tal manera que sus expresiones son las mismas sin importar de qué diagrama se esté tratando.

3.3. Auto-energía del neutrino apartir del vértice electromagnético.

La amplitud de dispersión fuera de la capa de masa para un neutrino en un campo electromagnético es:

$$(3.61) \quad i\mathcal{M} = \bar{u}^{s'}(k') [-i\Gamma_\mu(k, k')] u^s(k) A^\mu(q),$$

donde $A^\mu(q)$ es el potencial electromagnético en espacio de momentos. Entonces el elemento de matriz estará dado por:

$$(3.62) \quad S_{\nu\nu} = -i\Gamma_\mu(k, k') A^\mu(q),$$

en la expresión anterior se han incluido en Γ'_μ las contribuciones (las cuales tiene la misma forma funcional) de los diagramas (W) y (Z)

$$(3.63) \quad \Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{(Z)} + \Gamma_\mu^{(W)},$$

cada contribución a su vez se puede expresar de la siguiente manera:

$$(3.64) \quad \Gamma_\mu(k, k') A^\mu(q) = M_{\mu\nu}(q) F^{\mu\nu}(q),$$

donde el tensor electromagnético se considera en espacio de momentos

$$(3.65) \quad F^{\mu\nu}(q) = -i(q^\mu A^\nu - q^\nu A^\mu),$$

y el tensor $M_{\mu\nu}$ contiene las contribuciones de los diagramas (Z) y (W)

$$(3.66) \quad M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^{(W)} + M_{\mu\nu}^{(Z)},$$

para el caso de un campo magnético constante es suficiente hacer la siguiente sustitución

$$(3.67) \quad F^{\mu\nu} \rightarrow (2\pi)^4 \delta(q) F^{\mu\nu},$$

con $F^{\mu\nu}$ constante. Entonces al tomar el límite estático se obtiene

$$(3.68) \quad S_{\nu\nu} = -i(2\pi)^4 \delta(q) M_{\mu\nu} F^{\mu\nu} |_{q \rightarrow 0},$$

en esta expresión resulta evidente ver la contribución de la auto-energía la cual es:

$$(3.69) \quad \Sigma = M_{\mu\nu} F^{\mu\nu}|_{q \rightarrow 0}.$$

Entonces para encontrar las contribuciones a la auto-energía solo basta con encontrar la forma explícita del tensor $M_{\mu\nu}$ y después tomar su límite estático. Para ejecutar el procedimiento anterior primero se tiene:

$$(3.70) \quad \Gamma_{\mu}(k, k') A^{\mu}(q) = \left[F_1 \tilde{g}_{\mu\nu} \gamma^{\nu} + F_2 \tilde{u}_{\mu} \not{u} + i F_3 (\gamma_{\mu} u_{\nu} - \gamma_{\nu} u_{\mu}) q^{\nu} + i F_4 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^{\alpha} u^{\beta} \gamma^{\nu} \right] A^{\mu} L.$$

Para encontrar la forma de $M^{\mu\nu}$ se puede observar que el primer término de la expresión anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$(3.71) \quad \begin{aligned} F_1 \tilde{g}_{\mu\nu} \gamma^{\nu} A^{\mu} L &= F_1 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) \gamma^{\nu} A^{\mu} L \\ &= F_1 \left(\frac{\gamma_{\mu} q_{\nu} q^{\nu} A^{\mu}}{q^2} - \frac{q_{\mu} q_{\nu} \gamma^{\nu} A^{\mu}}{q^2} \right) L \\ &= F_1 \left(\frac{\gamma_{\nu} q_{\mu} q^{\mu} A^{\nu}}{q^2} - \frac{q_{\mu} \gamma_{\nu} q^{\nu} A^{\mu}}{q^2} \right) L \\ &= \frac{i F_1 q_{\mu} \gamma_{\nu}}{q^2} (-i) (q^{\mu} A^{\nu} - q^{\nu} A^{\mu}) L \\ &= \frac{i F_1 q_{\mu} \gamma_{\nu} L}{q^2} F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Empleando la misma técnica sobre los términos restantes se obtiene

$$(3.72) \quad M_{\mu\nu} = \left[\frac{i F_1}{q^2} q_{\mu} \gamma_{\nu} + \frac{i F_2}{q^2} q_{\mu} u_{\nu} \not{u} - F_3 u_{\mu} \gamma_{\nu} + \frac{1}{2} F_4 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha} u^{\beta} \right] L.$$

De la expresión anterior antes de tomar el límite estático se observa que $u_{\mu} F^{\mu\nu} = u_{\nu} F^{\mu\nu} = 0$ ya que no existe componente eléctrica y $F_1 = 0$ en el límite $q \rightarrow 0$ entonces se obtiene

$$(3.73) \quad \Sigma = (M_{\mu\nu}|_{q \rightarrow 0}) F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F_4|_{q \rightarrow 0}) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha} u^{\beta} F^{\mu\nu} L,$$

pero reescribiendo las expresiones usando la definición del campo magnético

$$(3.74) \quad B_{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} u^{\beta} F^{\mu\nu},$$

sustituyendo se obtiene:

$$(3.75) \quad \Sigma = \left(F_4^{(Z)}|_{q \rightarrow 0} + F_4^{(W)}|_{q \rightarrow 0} \right) \mathbf{B}L.$$

Entonces las contribuciones explícitas a la auto-energía son:

$$(3.76) \quad \Sigma^{(W)}(k) = \frac{eg^2}{M_W^2} C(0, Q \rightarrow 0) \mathbf{B}L,$$

$$(3.77) \quad \Sigma^{(Z)}(k) = -\frac{4b_Z eg_Z^2}{M_Z^2} C(0, Q \rightarrow 0) \mathbf{B}L.$$

Sustituyendo el valor de $C(0, Q \rightarrow 0)$ dado por la ec. (B.33) se obtienen:

$$(3.78) \quad \Sigma^{(W)}(k) = -\frac{eg^2}{8\pi^2 M_W^2} \int_0^\infty dP (f_e - f_{\bar{e}}) \mathbf{B}L,$$

$$(3.79) \quad \Sigma^{(Z)}(k) = \frac{eb_Z g_Z^2}{2\pi^2 M_Z^2} \int_0^\infty dP (f_e - f_{\bar{e}}) \mathbf{B}L.$$

Se puede apreciar que la contribución a la auto-energía del neutrino en un medio de electrones magnetizado es puramente magnética.

3.4. Auto-energía del neutrino usando el propagador de Schwinger.

Usando el método del propagador de Schwinger se calculan directamente los diagramas que contribuyen a la auto-energía ya que el propagador dado por la ec. (2.66) contiene los efectos a primer orden en el campo magnético. Los diagramas relevantes se muestran en la fig. (3.2). Usando las reglas de Feynman se obtienen las siguientes expresiones para los diagramas:

$$(3.80) \quad -i\Sigma_{TB}^{(W)}(k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}} \gamma_\mu L \right) iS_{TB}(p) \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}} \gamma_\nu L \right) iW^{\mu\nu}(k-p),$$

$$(3.81) \quad -i\Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = -ig_Z \gamma_\mu L iZ^{\mu\nu}(-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-ig_Z \gamma_\nu) (a_Z + b_Z \gamma_5) iS_{TB}(p) \right].$$

Entonces al igual que en la sección anterior el límite local de los propagadores de los bosones de norma es:

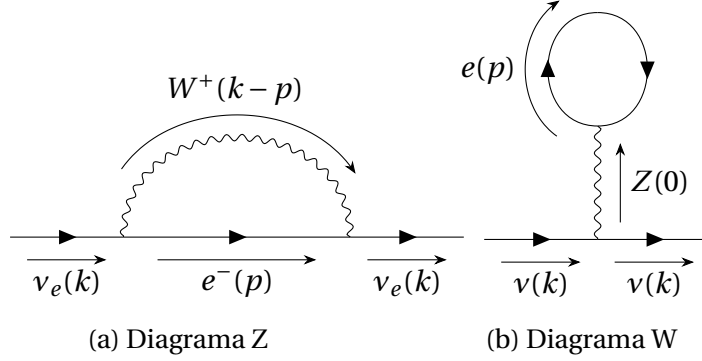


Figura 3.2: Diagramas de Feynman que contribuyen a la auto-energía del neutrino en un plasma magnetizado.

$$(3.82) \quad iW^{\mu\nu}(k-p) \approx \frac{ig^{\mu\nu}}{M_W^2},$$

$$(3.83) \quad iZ^{\mu\nu}(0) = \frac{ig^{\mu\nu}}{M_Z^2}.$$

Entonces al sustituir de vuelta en las ecs. (3.80) y (3.81) se obtienen:

$$(3.84) \quad -i\Sigma_{TB}^{(W)}(k) = \frac{-ig^2}{2M_W^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu L iS_{TB}(p) \gamma^\mu L,$$

$$(3.85) \quad -i\Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = \frac{ig_Z^2}{M_Z^2} \gamma^\mu L \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (a_Z + b_Z \gamma_5) iS_{TB}(p)].$$

Las expresiones a integrar se pueden simplificar usando la ec. (3.80) y propiedades de las trazas de las matrices de Dirac

$$(3.86) \quad \begin{aligned} \gamma_\mu L iS_{TB}(p) \gamma^\mu L &= \gamma_\mu L eB(2\pi) \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) G(p) \gamma^\mu L \\ &= eB(2\pi) \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) \gamma_\mu L \gamma_5 [m \not{u} \not{b} + (p \cdot b) \not{u} - (p \cdot u) \not{b}] \gamma^\mu L \\ &= eB(2\pi) \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) 2 [(p \cdot b) \not{u} - (p \cdot u) \not{b}] L, \end{aligned}$$

y

$$(3.87) \quad \begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (a_Z + b_Z \gamma_5) iS_{TB}(p)] &= eB(2\pi) \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) \text{Tr}[\gamma_\mu (a_Z + b_Z \gamma_5) G(p)] \\ &= eB(2\pi) \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) 4b_Z [(p \cdot b) u_\mu - (p \cdot u) b_\mu]. \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo

$$(3.88) \quad -i\Sigma_{TB}^{(W)}(k) = \frac{-ig^2}{2M_W^2} 2eB(2\pi) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) [(p \cdot b)\not{u} - (p \cdot u)\not{b}] L,$$

$$(3.89) \quad -i\Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = \frac{ig_Z^2}{M_Z^2} 4b_Z eB(2\pi) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) [(p \cdot b)\not{u} - (p \cdot u)\not{b}] L.$$

Entonces al realizar el cambio de variable dado por la ec. (3.15) es posible, al igual que en el caso anterior, obtener $\Sigma^{(W)}$ a partir de $\Sigma^{(Z)}$. De las expresiones para la auto-energía resulta conveniente definir

$$(3.90) \quad I_\mu = -2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) p_\mu.$$

sustituyendo se obtiene:

$$(3.91) \quad -i\Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = \frac{2ib_Z g_Z^2}{M_Z^2} eB [(I \cdot u)\not{b} - (I \cdot b)\not{u}] L.$$

Pero debido a que I_μ es un 4-vector que depende de u_μ se tiene lo siguiente:

$$(3.92) \quad I_\mu = \alpha u_\mu,$$

donde $\alpha = (I \cdot u)$. Entonces

$$(3.93) \quad -i\Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = \frac{2ib_Z g_Z^2}{M_Z^2} e\alpha \not{B} L$$

pero de la ec. (A.24) se conoce

$$(3.94) \quad \begin{aligned} \alpha &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \frac{d}{dE} (f_e - f_{\bar{e}}) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dP (f_e - f_{\bar{e}}). \end{aligned}$$

Entonces finalmente

$$(3.95) \quad \Sigma_{TB}^{(W)}(k) = -\frac{eg^2}{8\pi^2 M_W^2} \int_0^\infty dP (f_e - f_{\bar{e}}) \not{B} L,$$

$$(3.96) \quad \Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = \frac{eb_Z g_Z^2}{2\pi^2 M_Z^2} \int_0^\infty dP (f_e - f_{\bar{e}}) \not{B} L.$$

Se puede observar que las contribuciones obtenidas para la auto-energía coinciden a la perfección con las encontradas por el método del vértice.

3.5. Aplicaciones.

Como aplicación principal en esta sección se pretende calcular la relación de dispersión del neutrino así como su índice de refracción en el medio compuesto únicamente por electrones.

Se observó en las secciones anteriores que la auto-energía posee la siguiente forma:

$$(3.97) \quad \Sigma = (a\mathbf{k} + b\boldsymbol{\psi} + c\mathbf{B})L.$$

Entonces la relación de dispersión para el neutrino se encuentra resolviendo la siguiente ecuación

$$(3.98) \quad \det(\mathbf{k} - \Sigma) = 0,$$

sustituyendo la expresión para la auto-energía se tiene

$$(3.99) \quad \det[(1 - a)\mathbf{k} - b\boldsymbol{\psi} - c\mathbf{B}] = 0,$$

en la expresión anterior es posible poner $a = 0$ y utilizando la representación de Dirac de las matrices de gamma se obtiene

$$(3.100) \quad \det \begin{pmatrix} E - b & -(\vec{k} - c\vec{B}) \cdot \vec{\sigma} \\ (\vec{k} - c\vec{B}) \cdot \vec{\sigma} & -(E - b) \end{pmatrix} = 0.$$

Reduciendo el determinante a uno de menor dimensión se llega a

$$(3.101) \quad \det \left[-(E - b)^2 + (\vec{k} - c\vec{B}) \cdot \vec{\sigma} (\vec{k} - c\vec{B}) \cdot \vec{\sigma} \right] = 0,$$

pero $(\vec{k} - c\vec{B}) \cdot \vec{\sigma} (\vec{k} - c\vec{B}) \cdot \vec{\sigma} = (\vec{k} - c\vec{B})^2$ por lo que al sustituir se encuentra

$$(3.102) \quad -(E - b)^2 + (\vec{k} - c\vec{B})^2 = 0.$$

Por lo tanto la relación de dispersión del neutrino en un medio de electrones magnetizado es:

$$(3.103) \quad E_{\vec{k}} = |\vec{k} - c\vec{B}| + b.$$

Para campos magnéticos débiles ($|c\vec{B}| \ll |\vec{k}|$) se obtiene:

$$(3.104) \quad E_{\vec{k}} \approx |\vec{k}| - c\hat{k} \cdot \vec{B} + b.$$

Por otro lado el índice de refracción está dado por:

$$(3.105) \quad n = \frac{|\vec{k}|}{E_{\vec{k}}}.$$

Entonces al sustituir la relación de dispersión en el límite de campo débil

$$(3.106) \quad n \approx 1 + \frac{c\hat{k} \cdot \vec{B} - b}{|\vec{k}|},$$

tomando los resultados obtenidos en [39] se tiene que

$$(3.107) \quad b = (n_e - n_{\bar{e}}) \left[\delta_{e,s} \frac{g^2}{4M_W^2} - \frac{b_Z g_Z^2}{M_Z^2} \right]; \quad (s = e, \mu, \tau),$$

y del presente cálculo se obtuvo

$$(3.108) \quad c = - \int_0^\infty dP (f_e - f_{\bar{e}}) \left[\delta_{e,s} \frac{eg^2}{8\pi^2 M_W^2} - \frac{eb_Z g_Z^2}{2\pi^2 M_Z^2} \right]; \quad (s = e, \mu, \tau),$$

en el límite no relativista $n_{\bar{e}} \rightarrow 0$ y usando la ec. (B.37) se obtiene finalmente:

$$(3.109) \quad b = n_e \left[\delta_{e,s} \frac{g^2}{4M_W^2} - \frac{b_Z g_Z^2}{M_Z^2} \right]; \quad (s = e, \mu, \tau),$$

$$(3.110) \quad c = - \frac{\beta n_e}{m} \left[\delta_{e,s} \frac{eg^2}{8M_W^2} - \frac{eb_Z g_Z^2}{2M_Z^2} \right]; \quad (s = e, \mu, \tau).$$

PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DEL NEUTRINO EN MEDIOS EN MOVIMIENTO.

Actualmente experimentos como IceCube [40] han hecho posible la detección de neutrinos de tal forma que hoy en día es realizable la astronomía a partir de ellos [41, 42]. Es por esto que cada vez es más importante conocer las propiedades de los neutrinos al propagarse en medios cada vez más complejos ya que desde su producción hasta su detección pueden propagarse por baños térmicos de partículas de diferente especie y sujetas a campos electromagnéticos de fondo. Normalmente al realizar cálculos de estos sistemas es indispensable considerar el 4-vector de velocidad del medio el cual al final toma una forma trivial al elegir el sistema de reposo del medio, sin embargo al considerar la propagación de neutrinos en dos medios en movimiento relativo no es posible tomar la misma simplificación. En el presente capítulo se consideran los posibles efectos de la propagación de neutrinos en un sistema que contiene dos medios en movimiento relativo además de estar presente un campo magnético estático y uniforme en el sistema de reposo de uno de ellos.

4.1. Auto-energía a partir del vértice electromagnético y sutilezas.

El procedimiento para obtener las contribuciones a la auto-energía a partir del vértice es el mismo que en el capítulo anterior. Dentro de las suposiciones adicionales a considerar se toma cada medio lo suficientemente diluido como para considerar en una primera aproximación que no hay interacción entre las partículas de los dos medios.

Para distinguir los 4-velocidades de cada medio se denotarán como u_e^μ la 4-velocidad del medio considerado en reposo, mientras que se denotará por $u_{e'}^\mu$ a la 4-velocidad del medio en movimiento respecto al primero. Entonces, debido a que no se consideran interacciones del tipo $e - e'$ el vértice asociado al medio en movimiento contendrá factores de forma $F_{e'1}$,

$F_{e'2}$, $F_{e'3}$ y $F_{e'4}$ que dependerán de

$$(4.1) \quad \Omega_{e'} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{e'},$$

$$(4.2) \quad Q_{e'} = \sqrt{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_{e'})^2 - q^2},$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ es la diferencia de momentos de los estados inicial y final del neutrino. Entonces, evaluando los productos invariantes de Lorentz en el sistema que se toma en reposo se tiene

$$(4.3) \quad \Omega_{e'} = \Omega_e u_{e'}^0 - \vec{Q}_e \cdot \vec{U}_{e'},$$

$$(4.4) \quad Q_{e'} = \sqrt{[\Omega_e u_{e'}^0 - \vec{Q}_e \cdot \vec{U}_{e'}]^2 - \Omega_e^2 + Q_e^2}.$$

En donde se ha usado que $u_{e'}^\mu = (u_{e'}^0, \vec{U}_{e'})$. Entonces tomando el límite estático ($\Omega_e \rightarrow 0$)

$$(4.5) \quad \Omega_{e'} = -\vec{Q}_e \cdot \vec{U}_{e'},$$

$$(4.6) \quad Q_{e'} = \sqrt{[\vec{Q}_e \cdot \vec{U}_{e'}]^2 + Q_e^2}.$$

De la expresión anterior se puede observar que al tomar el límite uniforme $Q_e \rightarrow 0$ tanto $\Omega_{e'}$ como $Q_{e'}$ se vuelven cero. Esto resulta ser un problema debido a que las funciones de correlación a temperatura finita no tienen un comportamiento analítico cuando $q \rightarrow 0$, es decir, se obtienen diferentes resultados dependiendo del orden en que aproximen a cero los parámetros $\Omega_{e'}$ y $Q_{e'}$. Separando a \vec{Q}_e en sus componentes paralela y perpendicular a $\vec{U}_{e'}$ y tomando $Q_{e\parallel} \rightarrow 0$ se obtiene

$$(4.7) \quad \Omega_{e'} = 0,$$

$$(4.8) \quad Q_{e'} = Q_{e\perp},$$

con lo cual se asegura la obtención de un campo electromagnético estático y uniforme al igual que el obtenido en el sistema en reposo, con la diferencia que debido a las propiedades de transformación del campo electromagnético, en el sistema en movimiento se obtiene adicionalmente campo eléctrico.

Para el caso de dos medios esencialmente se tienen las siguientes contribuciones al vértice

$$(4.9) \quad \Gamma_\mu = [\Gamma_e^{(Z)}]_\mu + [\Gamma_e^{(W)}]_\mu + [\Gamma_{e'}^{(Z)}]_\mu + [\Gamma_{e'}^{(W)}]_\mu,$$

en donde los dos últimos componentes se refieren a los que se obtienen del medio en movimiento relativo. Es importante remarcar que esta separación de las contribuciones se debe a que no se están considerando los efectos de posibles interacciones entre los electrones de los dos medios. Las nuevas contribuciones al vértice provenientes del medio en movimiento relativo tienen la misma estructura que las ya calculadas en el capítulo 3. Entonces se tiene lo siguiente

$$(4.10) \quad \left[\Gamma_f^{(W,Z)} \right]_{\mu} = \left[\mathcal{F}_f^{(W,Z)} \right]_{\mu\nu} \gamma^{\nu} L,$$

en donde $f = e, e'$ indica la procedencia de la contribución. Su descomposición en términos de tensores R , Q y P es

$$(4.11) \quad \Gamma_{f\mu}^{(Z,W)} = \left[\mathcal{F}_{fT}^{(Z,W)} R_{f\mu\nu} \gamma^{\nu} + \mathcal{F}_{fL}^{(Z,W)} Q_{f\mu\nu} \gamma^{\nu} + \mathcal{F}_{fP}^{(Z,W)} P_{f\mu\nu} \gamma^{\nu} \right] L,$$

en la expresión se tiene que enfatizar que cada término tendrá una dependencia diferente respecto a u_e^{μ} o $u_{e'}^{\mu}$ por separado. Aplicando el razonamiento del capítulo 3 se encuentra que la contribución para la auto-energía es

$$(4.12) \quad \Sigma = (M_{\mu\nu}|_{q \rightarrow 0}) F^{\mu\nu},$$

donde en esta ocasión

$$(4.13) \quad M_{\mu\nu} = [M_e^Z]_{\mu\nu} + [M_e^W]_{\mu\nu} + [M_{e'}^Z]_{\mu\nu} + [M_{e'}^W]_{\mu\nu}.$$

La contribución del sistema en reposo fue calculada en el capítulo 3. Mientras que la estructura de la contribución del medio en movimiento es:

$$(4.14) \quad \left[M_{e'}^{(Z,W)} \right]_{\mu\nu} = \left[\frac{iF_{e'1}^{(Z,W)}}{q_{e'}^2} q_{e'\mu} \gamma_{\nu} + \frac{iF_{e'2}^{(Z,W)}}{q_{e'}^2} q_{e'\mu} u_{e'\nu} \psi_{e'} - F_{e'3}^{(Z,W)} u_{e'\mu} \gamma_{\nu} + \frac{1}{2} F_{e'4}^{(Z,W)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha} u_{e'}^{\beta} \right] L.$$

En esta etapa surgen dos problemas importantes: uno es que debido a que el sistema está en movimiento relativo se tiene tanto campo eléctrico como magnético debido a la transformación del campo electromagnético. Al tomar el límite estático se puede observar que $F_{e'1}$, $F_{e'2}$, $F_{e'3}$ y $F_{e'4}$ son finitas. Entonces las contribuciones a la auto-energía son

$$(4.15) \quad \Sigma = \left[\frac{iF_{e'1}^{(Z,W)}}{q_{e'}^2} q_{e'\mu} F^{\mu\nu} \gamma_{\nu} + \frac{iF_{e'2}^{(Z,W)}}{q_{e'}^2} q_{e'\mu} F^{\mu\nu} u_{e'\nu} \psi_{e'} - F_{e'3}^{(Z,W)} u_{e'\mu} F^{\mu\nu} \gamma_{\nu} + \frac{1}{2} F_{e'4}^{(Z,W)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha} u_{e'}^{\beta} F^{\mu\nu} \right] \Big|_{q_{e'} \rightarrow 0} L,$$

En donde se puede apreciar que $F_{e'1}$ y $F_{e'3}$ son cero en el límite estático. Pero a diferencia del caso anterior se tiene que $F_{e'2}$ contribuye debido a que en este sistema se tiene adicionalmente campo eléctrico (es decir, $F^{\mu\nu}u_{e'\nu} \neq 0$). Esto en el límite estático causa una divergencia de $\frac{1}{q}$ ya que $F_{e'2}$ es finito.

4.2. Auto-energía usando el propagador de Schwinger.

En este caso se tiene que el propagador a temperatura finita para los electrones del medio en movimiento es:

$$(4.16) \quad S_{e'} = S_F - \left[S_F - \bar{S}_F \right] \eta(p \cdot u_{e'}).$$

Entonces siguiendo la misma línea de pensamiento que en el capítulo anterior, el propagador se puede descomponer de la siguiente forma:

$$(4.17) \quad S_f = S_0 + S_B + S'_T + S'_{TB},$$

en donde es claro que la información perteneciente al medio en movimiento estará contenida en los términos con temperatura y la información perteneciente al campo es exactamente la misma que en el caso del medio de fondo. En particular se tiene que

$$(4.18) \quad iS'_{TB} = eB(2\pi)\delta'(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u_{e'})G(p).$$

Entonces usando las reglas de Feynman en los diagramas de la fig. (4.1) se tiene que las contribuciones a la auto-energía por parte del medio en movimiento son:

$$(4.19) \quad -i\Sigma'^{(W)}_{TB}(k) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\gamma_\mu L \right) iS'_{TB}(p) \left(\frac{-ig}{\sqrt{2}}\gamma_\nu L \right) iW^{\mu\nu}(k-p),$$

$$(4.20) \quad -i\Sigma'^{(Z)}_{TB}(k) = -ig_Z\gamma_\mu LiZ^{\mu\nu}(-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-ig_Z\gamma_\nu)(a_Z + b_Z\gamma_5) iS'_{TB}(p) \right].$$

En este caso se utiliza, al igual que en el capítulo 3, el límite local del propagador del bosón W y Z por lo que la parte del integrando adquiere la siguiente forma:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \gamma_\mu LiS'_{TB}(p)\gamma^\mu L &= \gamma_\mu LeB(2\pi)\delta'(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u_{e'})G(p)\gamma^\mu L \\ &= eB(2\pi)\delta'(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u_{e'})\gamma_\mu L\gamma_5 \left[m\mathbf{u}_e \mathbf{b} + (p \cdot \mathbf{b})\mathbf{u}_e - (p \cdot \mathbf{u}_e)\mathbf{b} \right] \gamma^\mu L, \\ &= eB(2\pi)\delta'(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u_{e'})2 \left[(p \cdot \mathbf{b})\mathbf{u}_e - (p \cdot \mathbf{u}_e)\mathbf{b} \right] L, \end{aligned}$$

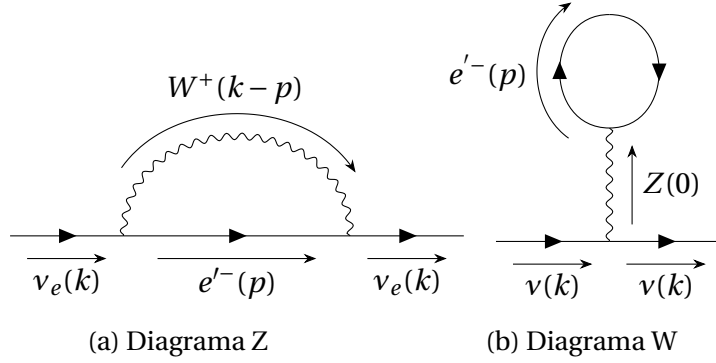


Figura 4.1: Diagramas de Feynman que contribuyen a la auto-energía del neutrino en un plasma magnetizado.

$$(4.22) \quad \text{Tr} [\gamma_\mu (a_Z + b_Z \gamma_5) i S'_{TB}(p)] = eB(2\pi) \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u_{e'}) 4b_Z [(p \cdot b) u_{e\mu} - (p \cdot u_e) b_\mu],$$

sustituyendo de vuelta en las ecs. (4.19) y (4.20)

$$(4.23) \quad -i \Sigma'_{TB}(W)(k) = \frac{-ig^2}{2M_W^2} 2eB(2\pi) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u_{e'}) [(p \cdot b) \not{u}_e - (p \cdot u_e) \not{b}] L,$$

$$(4.24) \quad -i \Sigma'_{TB}(Z)(k) = \frac{ig_Z^2}{M_Z^2} 4b_Z eB(2\pi) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u_{e'}) [(p \cdot b) \not{u}_e - (p \cdot u_e) \not{b}] L.$$

Aplicando la transformación de la ec. (3.15) se observa que es posible solo trabajar con la contribución de Z y a partir de esta obtener la de W. Entonces definiendo

$$(4.25) \quad I_{e'\mu} = -2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u_{e'}) p_\mu,$$

se obtiene

$$(4.26) \quad -i \Sigma'_{TB}(Z)(k) = \frac{ig_Z^2}{M_Z^2} 2b_Z eB [(I_{e'} \cdot u_e) \not{b} - (I_{e'} \cdot b) \not{u}_e] L$$

Pero I' solo puede depender del cuadrivector $u_{e'}^\mu$, entonces se propone

$$(4.27) \quad I_{e'}^\mu = \alpha_{e'} u_{e'}^\mu,$$

por lo tanto la auto-energía es:

$$(4.28) \quad -i\Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = \frac{ig_Z^2}{M_Z^2} 2b_Z eB \alpha_{e'} [(u_{e'} \cdot u_e) \mathbf{b} - (u_{e'} \cdot \mathbf{b}) \psi_e] L.$$

usando los resultados del apéndice A en específico la ec. (A.24) se obtiene

$$(4.29) \quad \alpha_{e'}(u_{e'}, \beta, \mu) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \frac{d}{dE} (f_{e'} - f_{\bar{e}'})$$

En donde es fácil reconocer que este factor es una función de la temperatura, el cuadri-vector del medio en movimiento y el potencial químico. Entonces finalmente se deduce que

$$(4.30) \quad \Sigma_{TB}^{(W)}(k) = \frac{eg^2}{2M_W^2} \alpha_{e'} [(u_{e'} \cdot u_e) \mathbf{B} - (u_{e'} \cdot \mathbf{B}) \psi_e] L,$$

$$(4.31) \quad \Sigma_{TB}^{(W)}(k) = -\frac{2eb_Z g_Z^2}{M_Z^2} \alpha_{e'} [(u_{e'} \cdot u_e) \mathbf{B} - (u_{e'} \cdot \mathbf{B}) \psi_e] L.$$

Lo que se puede concluir de estos resultados es que el medio en movimiento contribuye a \mathbf{B} y ψ pero ciertamente no genera un nuevo término en la auto-energía. Tomando el producto en el sistema en reposo y parametrizando $u_{e'}$ de la siguiente forma

$$(4.32) \quad u_{e'}^\mu = (\gamma, \gamma \vec{u})$$

donde $\gamma^2 = (1 - |\vec{u}|^2)^{-1}$. Al sustituir se sigue

$$(4.33) \quad \Sigma_{TB}^{(W)}(k) = \frac{eg^2}{M_W^2} \alpha_{e'} [\gamma \mathbf{B} + \gamma(\vec{u} \cdot \vec{B}) \psi_e] L,$$

$$(4.34) \quad \Sigma_{TB}^{(Z)}(k) = -\frac{2eb_Z g_Z^2}{M_Z^2} \alpha_{e'} [\gamma \mathbf{B} + \gamma(\vec{u} \cdot \vec{B}) \psi_e] L.$$

4.3. Aplicaciones.

Para el sistema de dos medios en movimiento relativo se encontró que la auto-energía tiene la siguiente forma

$$(4.35) \quad \Sigma = [a\mathbf{k} + (b_e + b_{e'} + b_{e'}^B) \psi + (c_e + c_{e'}) \mathbf{B}] L$$

donde b_e , $b_{e'}$ son las contribuciones usuales que se originan debido solo a la presencia de los medios, $b_{e'}^B$ es la contribución debida al campo magnético y al medio en movimiento y $c_{e'}$ es la contribución debida a la componente paralela al campo magnético. Usando las ecs. (4.33) y (4.34) se obtiene

$$(4.36) \quad b_{e'}^B = \gamma(\vec{u} \cdot \vec{B})\alpha_{e'} \left[\delta_{e,s} \frac{eg^2}{M_W^2} - \frac{2eb_Z g_Z^2}{M_Z^2} \right]; \quad (s = e, \mu, \tau)$$

$$(4.37) \quad c_{e'} = \gamma\alpha_{e'} \left[\delta_{e,s} \frac{eg^2}{M_W^2} - \frac{2eb_Z g_Z^2}{M_Z^2} \right]; \quad (s = e, \mu, \tau)$$

entonces en la relación de dispersión dada por la ec. (3.103) se obtiene

$$(4.38) \quad E_{\vec{k}} = |\vec{k} - (c_e + c_{e'})\vec{B}| + (b_e + b_{e'} + b_{e'}^B).$$

La inclusión de un flujo uniforme de electrones al sistema estudiado en el capítulo 3 genera una contribución en la relación de dispersión que depende del ángulo entre el vector que define la dirección del flujo y el campo magnético. Para un flujo que se propague perpendicularmente al campo magnético dicha contribución queda suprimida de la relación de dispersión. Otra característica importante se presenta cuando el potencial químico es nulo ($\mu = 0$), es que en este escenario $f_{e'}$ y $f_{\bar{e}'}$ son iguales y en consecuencia se suprimen todas las contribuciones encontradas incluyendo las estudiadas en el capítulo 3. Por lo tanto en un medio totalmente simétrico en el sentido de que hay la misma cantidad de electrones que de positrones no existen efectos del medio.

CONCLUSIONES.

En el capítulo 3 se encontró la contribución a la auto-energía del neutrino por la presencia de un campo magnético en el medio donde se propaga. Es importante resaltar que aunque el procedimiento para obtener los resultados es consistente y arrojó resultados finitos todo fue resultado de dos factores importantes: el límite estático y la existencia solamente de campo magnético. Para el caso de dos medios en movimiento relativo se partió de la premisa de no tomar en cuenta las interacciones entre los electrones de diferentes medios debido a que si los gases están lo suficientemente diluidos esto se puede aproximar a un escenario real. Por esto, el procedimiento para obtener las contribuciones a la auto-energía fue el mismo y en consecuencia para que el resultado fuera finito (por este método) se requería tomar el límite estático y además la no existencia de campo magnético. Como se discutió en el capítulo 4, esto no es posible ya que la existencia de solo campo magnético en el medio que se toma como estático necesariamente genera un campo eléctrico y magnético en el medio que se mueve. Un análisis preliminar podría revelar que estas divergencias son de origen puramente matemático, originadas principalmente por la forma funcional de la contribución en la capa de masa del propagador a temperatura finita, el cual tiene un comportamiento singular en la región explorada. Casos muy similares respaldan esta suposición [43, 44], sin embargo la obtención de resultados finitos usando el propagador de Schwinger desmiente esto, por lo menos en este caso. El método del propagador de Schwinger permite llegar a resultados consistentes debido a que provee una expansión en potencias del campo magnético. En el presente caso solo se usó la aproximación lineal de campo magnético. La inclusión del método del vértice en la presente tesis se realizó para mantener presente la simetría entre los dos métodos de solución y adicionalmente para hacer ver las dificultades que surgen al utilizar el método perturbativo a temperatura finita.

Mediante razonamientos muy generales, se puede argumentar que la auto-energía del

neutrino en el vacío está dada por la siguiente forma

$$(5.1) \quad \Sigma(p) = apL.$$

Donde a solo es un coeficiente que en general dependerá de los parámetros de la teoría. En un medio existe un nuevo 4-vector el cual es el de velocidad del medio, por lo que la auto-energía se puede descomponer de la siguiente forma

$$(5.2) \quad \Sigma(p) = (ap + b\psi) L.$$

En general para un medio con un campo electromagnético de fondo se obtendrán nuevas contribuciones provenientes del tensor electromagnético. En general [45] propone la siguiente forma para la auto-energía

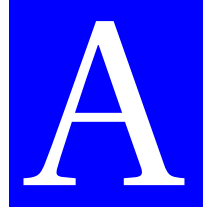
$$(5.3) \quad \Sigma(p) = (a_1 p_\mu + b_1 u_\mu + a_2 p^\nu F_{\nu\mu} + b_2 u^\nu F_{\nu\mu} + a_3 p^\nu \tilde{F}_{\nu\mu} + b_3 u^\nu \tilde{F}_{\nu\mu}) \gamma^\mu L.$$

Los términos a_1 , b_1 y b_3 fueron encontrados explícitamente en el capítulo 3. Por la forma antes mencionada se esperaría obtener los términos anteriores y adicionalmente el término b_2 debido a que este término representa la contribución del campo eléctrico. Sin embargo, como se vio en el capítulo 4 este término no está presente en la auto-energía. Los términos a_2 y a_3 no son posible reproducirlos en este cálculo debido a que en el cómputo de las cantidades se está tomando el límite local con lo cual cualquier dependencia en el momento del neutrino queda descartada.

Para analizar las contribuciones a la auto-energía encontradas en el capítulo 4 conviene recordar la regla de transformación de un campo puramente magnético en un sistema de referencia que tiene un vector de velocidad \vec{u} . La regla explícita es, ver Ref. [46]:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma \vec{u} \times \vec{B} \\ \vec{B}' &= \gamma \vec{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Debido a que en el resultado encontrado no se tiene contribución eléctrica solo se discutirá a \vec{B}' . Como se puede apreciar en las ecs. (4.33) y (4.34) se observa que en el medio en movimiento se genera un componente paralelo al campo magnético original y otro paralelo a la dirección de movimiento del medio. Lo primero que se puede decir del resultado obtenido es que si el medio viaja perpendicularmente a la dirección del campo magnético $b_{e'}^B$ no tendrá contribución alguna. Incluso en este caso $c_{e'}$ puede tener una contribución significativa debido a que este depende del factor γ y por ende si el medio viaja a una velocidad considerable la contribución a su vez lo será.



CÁLCULOS RESTANTES.

A.1. Integral $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)}$

La integral a calcular es la siguiente:

$$(A.1) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(Z)} = \frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{a_Z [2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} - (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) + (p \cdot q)g_{\mu\nu}]}{(p - q)^2 - m^2} + (q \rightarrow -q) \right. \\ \left. + ib_Z \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} q^\sigma p^\rho \left[\frac{1}{(p - q)^2 - m^2} + (q \rightarrow -q) \right] \right\} \delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u),$$

donde esencialmente existen cuatro tipos de integral a resolver, las cuales son:

$$(A.2) \quad I_1(q) = a_Z \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} [2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} - (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) + (p \cdot q)g_{\mu\nu}] \frac{\delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u)}{(p - q)^2 - m^2},$$

$$(A.3) \quad I_2(q) = a_Z \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} [2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} + (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) - (p \cdot q)g_{\mu\nu}] \frac{\delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u)}{(p + q)^2 - m^2},$$

$$(A.4) \quad I_3^\rho(q) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} p^\rho \frac{\delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u)}{(p - q)^2 - m^2},$$

$$(A.5) \quad I_4^p(q) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} p^\rho \frac{\delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u)}{(p+q)^2 - m^2},$$

las integrales anteriores cumplen las siguientes relaciones:

$$(A.6) \quad I_1(-q) = I_2(q),$$

$$(A.7) \quad I_3(-q) = I_4(q).$$

Por lo que basta con resolver las integrales I_1 y I_3 . Por comodidad es conveniente definir

$$(A.8) \quad \mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) = 2p_\mu p_\nu - (p^2 - m^2)g_{\mu\nu} - (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) + (p \cdot q)g_{\mu\nu}$$

entonces tomando en consideración primero

$$(A.9) \quad I_1(q) = a_Z \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) \frac{\delta(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u)}{(p-q)^2 - m^2}.$$

Usando la identidad

$$(A.10) \quad \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)],$$

donde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, se obtiene:

$$(A.11) \quad I_1(q) = a_Z \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{2E} \frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) \eta(p \cdot u)}{(p^2 - m^2) - 2p \cdot q + q^2} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)],$$

simplificando la expresión anterior se llega a

$$(A.12) \quad I_1(q) = a_Z \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[\frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) \eta(p \cdot u)}{q^2 - 2p \cdot q} \Big|_{p_0=E} + \frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) \eta(p \cdot u)}{q^2 - 2p \cdot q} \Big|_{p_0=-E} \right].$$

en la segunda integral es conveniente realizar el cambio $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, esto tiene el efecto de hacer el cambio $p \rightarrow -p$ y evaluar en la energía positiva.

$$(A.13) \quad I_1(q) = a_Z \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[\frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) \eta(p \cdot u)}{q^2 - 2p \cdot q} + \frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(-p, q) \eta(-p \cdot u)}{q^2 + 2p \cdot q} \right] \Big|_{p_0=E}.$$

Se observa de la expresión anterior que $\mathfrak{T}_{\mu\nu}(-p, q) = \mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, -q)$ y además

$$(A.14) \quad \eta(p \cdot u)|_{p_0=E} = \frac{\theta(E)}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} + \frac{\theta(-E)}{e^{-\beta(E-\mu)} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \equiv f_e,$$

$$(A.15) \quad \eta(-p \cdot u)|_{p_0=E} = \frac{\theta(-E)}{e^{\beta(-E-\mu)} + 1} + \frac{\theta(E)}{e^{-\beta(-E-\mu)} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(E+\mu)} + 1} \equiv f_{\bar{e}},$$

entonces simplificando aún más finalmente se obtiene:

$$(A.16) \quad I_1(q) = a_Z \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[\frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) f_e}{q^2 - 2p \cdot q} + \frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, -q) f_{\bar{e}}}{q^2 + 2p \cdot q} \right] \Big|_{p_0=E}.$$

Por lo tanto

$$(A.17) \quad I_2(q) = a_Z \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[\frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, -q) f_e}{q^2 + 2p \cdot q} + \frac{\mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) f_{\bar{e}}}{q^2 - 2p \cdot q} \right] \Big|_{p_0=E},$$

en donde

$$(A.18) \quad \mathfrak{T}_{\mu\nu}(p, q) \Big|_{p_0=E} = 2p_\mu p_\nu - (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) + (p \cdot q) g_{\mu\nu}.$$

Usando el mismo procedimiento se obtiene de manera inmediata el resultado para las integrales restantes

$$(A.19) \quad I_3^\rho(q) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^\rho}{2E} \left[\frac{f_e}{q^2 - 2(p \cdot q)} - \frac{f_{\bar{e}}}{q^2 + 2(p \cdot q)} \right] \Big|_{p_0=E},$$

por lo tanto

$$(A.20) \quad I_4^\rho(q) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^\rho}{2E} \left[\frac{f_e}{q^2 + 2(p \cdot q)} - \frac{f_{\bar{e}}}{q^2 - 2(p \cdot q)} \right] \Big|_{p_0=E}$$

A.2. Integral α

La integral a resolver es:

$$(A.21) \quad \alpha = -2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta'(p^2 - m^2) \eta(p \cdot u) (p \cdot u),$$

con ayuda de la identidad

$$(A.22) \quad \delta'(p^2 - m^2) = \frac{1}{4p_0 E} \frac{d}{dE} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)],$$

se obtienen todos los factores dentro del integrando de manera explícita

$$(A.23) \quad \begin{aligned} \alpha &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \int d p_0 \eta(p_0) \frac{d}{dE} [\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E)] \\ &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[-\frac{d\eta(E)}{dE} + \frac{d\eta(-E)}{dE} \right]. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(A.24) \quad \alpha = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \frac{d}{dE} (f_e - f_{\bar{e}}).$$

CÁLCULO DE INTEGRALES A, B Y C

B.1. Cálculo de integral A

La integral a resolver es:

$$(B.1) \quad A = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e + f_{\bar{e}}) \left\{ \frac{2m^2 - 2p \cdot q}{q^2 + 2p \cdot q} + \frac{2m^2 + 2p \cdot q}{q^2 - 2p \cdot q} \right\}.$$

Entonces expandiendo en componentes los productos dentro del integrando se obtiene:

$$(B.2) \quad p \cdot v = E$$

$$(B.3) \quad q \cdot v = \Omega_f$$

$$(B.4) \quad p \cdot q = E\Omega_f - \vec{P} \cdot \vec{Q}_f$$

$$(B.5) \quad p \cdot \tilde{v} = \frac{-EQ_f^2 + \vec{P} \cdot \vec{Q}_f \Omega_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2}$$

$$(B.6) \quad \tilde{v}^2 = -\frac{Q_f^2}{\Omega_f^2 - Q_f^2}$$

donde $p^\mu = (E, \vec{p})$ y $q = (\Omega_f, \vec{Q}_f)$. Utilizando $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$

$$(B.7) \quad A = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{f_\Sigma}{2E} \left\{ \frac{2m^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f \cos \theta}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f \cos \theta} + \frac{2m^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f \cos \theta}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f \cos \theta} \right\} \\ = \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_\Sigma}{2E} \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{2m^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x} + \frac{2m^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x} \right\},$$

donde $f_{\Sigma} = f_e + f_{\bar{e}}$ y se ha realizado el cambio de variable $x = \cos\theta$. Utilizando

$$(B.8) \quad \int_{-1}^1 dx \frac{c+dx}{a+bx} = \frac{2d}{b} + \frac{cb-ad}{b^2} \log \left| \frac{a+b}{a-b} \right|,$$

se obtiene:

$$(B.9) \quad \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{2m^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x} \right\} = -2 - \frac{[2m^2 + \Omega_f^2 - Q_f^2]}{2PQ_f} \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f + 2PQ_f} \right|,$$

$$(B.10) \quad \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{2m^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x} \right\} = -2 + \frac{[2m^2 + \Omega_f^2 - Q_f^2]}{2PQ_f} \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f - 2PQ_f} \right|,$$

reemplazando el resultado de las integrales

$$(B.11) \quad A = \int_0^{\infty} \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_{\Sigma}}{2E} \left\{ -4 + \frac{[2m^2 + \Omega_f^2 - Q_f^2]}{2PQ_f} \left[\log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f - 2PQ_f} \right| - \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f + 2PQ_f} \right| \right] \right\}.$$

Tomando $\Omega_f = 0$ se simplifica la expresión de la siguiente forma:

$$(B.12) \quad A = \int_0^{\infty} \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_{\Sigma}}{2E} \left\{ -4 + \frac{[2m^2 - Q_f^2]}{2PQ_f} \left[\log \left| \frac{Q_f - 2P}{Q_f + 2P} \right| - \log \left| \frac{Q_f + 2P}{Q_f - 2P} \right| \right] \right\}.$$

Las expansiones de los logaritmos para Q_f pequeño son:

$$(B.13) \quad \log \left| \frac{Q_f - 2P}{Q_f + 2P} \right| \approx -\frac{1}{P} Q_f + \mathcal{O}(Q_f^2),$$

$$(B.14) \quad \log \left| \frac{Q_f + 2P}{Q_f - 2P} \right| \approx \frac{1}{P} Q_f + \mathcal{O}(Q_f^2),$$

sustituyendo

$$(B.15) \quad A = \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{f_\Sigma P^2}{2E} \left\{ -4 + \frac{[2m^2 - Q_f^2]}{2PQ_f} \left[-\frac{2}{P} Q_f + \mathcal{O}(Q_f^2) \right] \right\},$$

simplificando

$$(B.16) \quad A = \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{1}{2E} (f_e + f_{\bar{e}}) \{-4P^2 - 2m^2 + \mathcal{O}(Q_f)\}.$$

entonces tomando el límite $Q_f \rightarrow 0$ finalmente se obtiene:

$$(B.17) \quad A(0, Q_f \rightarrow 0) = - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{1}{E} (f_- + f_+) \{2P^2 + m^2\}.$$

B.2. Cálculo de integral B

La integral a calcular es:

$$(B.18) \quad B = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e + f_{\bar{e}}) \left\{ \frac{2(p \cdot v)^2 + 2(p \cdot v)(q \cdot v) - p \cdot q}{q^2 + 2p \cdot q} + \frac{2(p \cdot v)^2 - 2(p \cdot v)(q \cdot v) + p \cdot q}{q^2 - 2p \cdot q} \right\}.$$

Utilizando las ecs. (B.2), (B.3), (B.4), (B.5) y (B.6) y haciendo el cambio de variable en la coordenada angular se obtiene:

$$(B.19) \quad B = \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_\Sigma}{2E} \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{2E^2 + E\Omega_f + PQ_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x} + \frac{2E^2 - E\Omega_f - PQ_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x} \right\}.$$

Resolviendo las integrales en x con ayuda de la ec. (B.8) se obtiene

$$(B.20) \quad B = - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_\Sigma}{2E} \left\{ 2 + \frac{(4E^2 + 4E\Omega_f + \Omega_f^2 - Q_f^2)}{4PQ_f} \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f + 2PQ_f} \right| - \frac{(4E^2 - 4E\Omega_f + \Omega_f^2 - Q_f^2)}{4PQ_f} \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f - 2PQ_f} \right| \right\}.$$

Tomando $\Omega_f = 0$ y simplificando

$$(B.21) \quad B = - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_\Sigma}{2E} \left\{ 2 + \frac{(4E^2 - Q_f^2)}{4PQ_f} \left[\log \left| \frac{Q_f + 2P}{Q_f - 2P} \right| - \log \left| \frac{Q_f - 2P}{Q_f + 2P} \right| \right] \right\}.$$

A orden más bajo en Q_f se obtiene:

$$(B.22) \quad B = - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{P^2 f_\Sigma}{2E} \left\{ 2 + (4E^2 - Q_f^2) \left[\frac{1}{2P^2} + \mathcal{O}(Q_f) \right] \right\},$$

simplificando

$$(B.23) \quad B = - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{(f_e + f_{\bar{e}})}{E} \{P^2 + E^2 + \mathcal{O}(Q_f)\},$$

tomando el límite $Q_f \rightarrow 0$ y recordando que $E^2 = P^2 + m^2$ finalmente se obtiene:

$$(B.24) \quad B(0, Q_f \rightarrow 0) = - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{1}{E} (f_e + f_{\bar{e}}) \{2P^2 + m^2\}.$$

Por lo tanto se concluye que

$$(B.25) \quad A(0, Q_f \rightarrow 0) = B(0, Q_f \rightarrow 0).$$

B.3. Cálculo de integral C

La integral a resolver es:

$$(B.26) \quad C = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_e - f_{\bar{e}}) \frac{p \cdot \tilde{v}}{\tilde{v}^2} \left\{ \frac{1}{q^2 + 2p \cdot q} + \frac{1}{q^2 - 2p \cdot q} \right\}.$$

Utilizando las ecs. (B.2), (B.3), (B.4), (B.5) y (B.6) y haciendo el cambio de variable en la coordenada angular se obtiene:

$$(B.27) \quad C = - \int \frac{dPP^2}{(2\pi)^2} \frac{f_\Delta}{2EQ_f^2} \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{-EQ_f^2 + PQ_f \Omega_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x} + \frac{-EQ_f^2 + PQ_f \Omega_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x} \right\},$$

donde se ha definido $f_{\Delta} = f_e - f_{\bar{e}}$. El resultado de las integrales resultantes es

$$(B.28) \quad \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{-EQ_f^2 + PQ_f\Omega_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f x} \right\} = -\Omega_f - \frac{(\Omega_f^2 - Q_f^2)(2E + \Omega_f)}{4PQ_f} \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f + 2PQ_f} \right|,$$

$$\int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{-EQ_f^2 + PQ_f\Omega_f x}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f x} \right\} = \Omega_f + \frac{(\Omega_f^2 - Q_f^2)(2E - \Omega_f)}{4PQ_f} \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f - 2PQ_f} \right|.$$

Luego al sustituir de vuelta se obtiene

$$(B.29) \quad C = - \int \frac{dPP^2}{(2\pi)^2} \frac{f_{\Delta}}{2EQ_f^2} \frac{(\Omega_f^2 - Q_f^2)}{4PQ_f} \left\{ (2E - \Omega_f) \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f + 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 - 2E\Omega_f - 2PQ_f} \right| \right. \\ \left. - (2E + \Omega_f) \log \left| \frac{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f - 2PQ_f}{\Omega_f^2 - Q_f^2 + 2E\Omega_f + 2PQ_f} \right| \right\},$$

Tomando el límite $\Omega_f = 0$ se obtiene

$$(B.30) \quad C = \int \frac{dPP}{(2\pi)^2} \frac{f_{\Delta}}{4Q_f} \left\{ \log \left| \frac{Q_f - 2P}{Q_f + 2P} \right| - \log \left| \frac{Q_f + 2P}{Q_f - 2P} \right| \right\}$$

La expansión para valores pequeños de Q_f es:

$$(B.31) \quad C = - \int \frac{dPP}{(2\pi)^2} \frac{f_{\Delta}}{4Q_f} \left\{ \frac{2}{P} Q_f + \mathcal{O}(Q_f^2) \right\}$$

simplificando se llega a

$$(B.32) \quad C = - \int \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{f_{\Delta}}{2} \{1 + \mathcal{O}(Q_f)\}$$

Por lo tanto tomando el límite estático se tiene

$$(B.33) \quad C(0, Q_f \rightarrow 0) = - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} dP (f_- - f_+)$$

B.4. Límite no-relativista de A, B y C

En el límite no-relativista se tiene

$$(B.34) \quad \begin{aligned} f_e &\approx e^{-\beta(E-\mu)} \\ f_{\bar{e}} &\approx 0 \end{aligned}$$

donde $E = m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Entonces

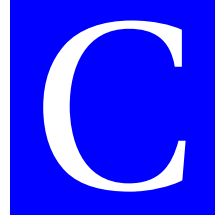
$$(B.35) \quad \begin{aligned} n_e &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\beta(E-\mu)} \\ &= \frac{1}{\pi^2} e^{-\beta(m-\mu)} \int_0^\infty dP P^2 e^{-\frac{\beta P^2}{2m}} \\ &= \frac{1}{\pi^2} e^{-\beta(m-\mu)} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} e^{-\beta(m-\mu)} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado en el límite no relativista y adicionalmente en el límite estático la integral A tiene la siguiente forma

$$(B.36) \quad \begin{aligned} A(0, Q_f \rightarrow 0) &= - \int_0^\infty \frac{dP}{(2\pi)^2} \frac{1}{m} e^{-\beta\left(m + \frac{P^2}{2m} - \mu\right)} m^2 \\ &= - \frac{m}{4\pi^2} e^{-\beta(m-\mu)} \int_0^\infty dP e^{-\frac{\beta P^2}{2m}} \\ &= - \frac{m}{4\pi^2} e^{-\beta(m-\mu)} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\ &= - \frac{\beta}{4} n_e. \end{aligned}$$

En el caso de C se tiene

$$(B.37) \quad \begin{aligned} C(0, Q_f \rightarrow 0) &= - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dP e^{-\beta\left(m + \frac{P^2}{2m} - \mu\right)} \\ &= - \frac{1}{8\pi^2} e^{-\beta(m-\mu)} \int_0^\infty dP e^{-\beta \frac{P^2}{2m}} \\ &= - \frac{\beta}{8m} n_e \end{aligned}$$



PROPIEDADES DE LOS TENSORES $R_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$ Y $P_{\mu\nu}$

Dado $K^\mu \in \mathbb{R}^4$ su parte perpendicular a q^μ respecto a el producto interno generado por $g_{\mu\nu}$ es

$$(C.1) \quad \tilde{K}_\mu = \tilde{g}_{\mu\nu} K^\nu = K_\mu - \frac{(K \cdot q) q_\mu}{q^2}$$

donde

$$(C.2) \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$$

es el operador que proyecta a cualquier cuadri-vector sobre su componente perpendicular a q . De esta observación es trivial observar que

$$(C.3) \quad q_\mu R^{\mu\nu} = 0$$

$$(C.4) \quad q_\mu Q^{\mu\nu} = 0$$

$$(C.5) \quad q_\mu P^{\mu\nu} = 0$$

De acuerdo a las definiciones se tiene

$$(C.6) \quad R_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2}$$

$$(C.7) \quad Q_{\mu\nu} = \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2}$$

$$(C.8) \quad P_{\mu\nu} = \frac{i}{Q} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha u^\beta$$

De las definiciones anteriores se puede notar que

$$\begin{aligned}
 (C.9) \quad R_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} &= \left(\tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2} \right) \left(\frac{\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu}{\tilde{u}^2} \right) \\
 &= 1 - \frac{(q \cdot \tilde{u})^2}{q^2 \tilde{u}^2} - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ya que $q \cdot \tilde{u} = 0$. Luego

$$(C.10) \quad R_{\mu\nu}P^{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}P^{\mu\nu} = 0$$

ya que $R_{\mu\nu}$ y $Q_{\mu\nu}$ son tensores simétricos. Entonces podemos concluir que los tensores son en cierto sentido ortogonales entre sí. La contracción consigo mismo es

$$\begin{aligned}
 (C.11) \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \left(\tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2} \right) \left(\tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu}{\tilde{u}^2} \right) \\
 &= \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} - 2 \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu}{\tilde{u}^2} + 1 \\
 &= 3 - 2 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

para los otros se tiene

$$\begin{aligned}
 (C.12) \quad Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} &= \frac{\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu}{\tilde{u}^2} \frac{\tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu}{\tilde{u}^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 (C.13) \quad P_{\mu\nu}P^{\mu\nu} &= -\frac{1}{Q^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha u^\beta \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} q_\sigma u_\lambda \\
 &= \frac{2}{Q^2} \left(g^\sigma_\alpha g^\lambda_\beta - g^\sigma_\beta g^\lambda_\alpha \right) q^\alpha u^\beta q_\sigma u_\lambda \\
 &= \frac{2}{Q^2} [q^2 - (q \cdot u)^2] \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Chadwick, "Intensitätsverteilung im magnetischen Spectrum der β -Strahlen von radium B + C," *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, vol. 16, p. 383, 1914.
- [2] F. A. Scott, "Energy spectrum of the beta-rays of radium e," *Phys. Rev.*, vol. 48, pp. 391–395, Sep 1935.
- [3] G. Gamow, *Thirty years that shook physics: the story of quantum theory*. Science study series, Doubleday, 1966.
- [4] A. Beiser, *Concepts of Modern Physics*. Physics series, McGraw-Hill, 1987.
- [5] J. Chadwick, "Possible existence of a neutron," *Nature*, vol. 192, no. 312, 1932.
- [6] C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, and A. D. McGuire, "Detection of the free neutrino: a confirmation," *Science*, vol. 124, no. 3212, pp. 103–104, 1956.
- [7] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson, "Note on the nature of cosmic-ray particles," *Phys. Rev.*, vol. 51, pp. 884–886, May 1937.
- [8] G. Danby, J.-M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger, "Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, pp. 36–44, Jul 1962.
- [9] M. L. Perl, "Evidence for anomalous lepton production in $e^+ - e^-$ annihilation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 1489–1492, Dec 1975.
- [10] K. K. D. Collaboration), "Observation of tau neutrino interactions," *Physics Letters B*, vol. 504, no. 218, 2001.
- [11] B. Pontecorvo, "Mesonium and antimesonium," *Sov. Phys. JETP*, vol. 6, no. 2, 1958.
- [12] B. Pontecorvo, "Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge," *Sov. Phys. JETP*, vol. 26, no. 5, 1968.
- [13] C. Giunti, "Theory of neutrino oscillations," in *Proceedings, 16th Conference on High Energy Physics (IFAE 2004): Turin, Italy, April 14-16, 2004*, pp. 427–438, 2004.
- [14] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar, "Helicity of neutrinos," *Phys. Rev.*, vol. 109, pp. 1015–1017, Feb 1958.
- [15] T. Kinoshita and M. Nio, "Improved α^4 term of the electron anomalous magnetic moment," *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 013003, 2006.
- [16] T. Matsubara, "A new approach to quantum-statistical mechanics," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 14, no. 4, pp. 351–378, 1955.

-
- [17] J. Schwinger, “Brownian motion of a quantum oscillator,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 3, 1961.
- [18] L. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Sov. Phys.-JETP*, vol. 20, no. 4, 1964.
- [19] R. Kobes, “Correspondence between imaginary-time and real-time finite-temperature field theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 42, pp. 562–572, Jul 1990.
- [20] J. C. Taylor, “Real- and imaginary-time thermal field theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 47, pp. 725–726, Jan 1993.
- [21] R. Kobes, “Three-point function at finite temperature in the real-time formalism,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, pp. 1384–1387, Sep 1991.
- [22] J. I. Kapusta, “Bose-einstein condensation, spontaneous symmetry breaking, and gauge theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 24, pp. 426–439, Jul 1981.
- [23] L. Dolan and R. Jackiw, “Symmetry behavior at finite temperature,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 3320–3341, Jun 1974.
- [24] J. F. Nieves, “Canonical approach to the propagation of elementary particles in a medium,” *Phys. Rev. D*, vol. 42, pp. 4123–4134, Dec 1990.
- [25] J. F. Nieves, “Erratum: Canonical approach to the propagation of elementary particles in a medium,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 3067–3067, Mar 1994.
- [26] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. 1995.
- [27] H. A. Weldon, “Covariant calculations at finite temperature: The relativistic plasma,” *Phys. Rev. D*, vol. 26, pp. 1394–1407, Sep 1982.
- [28] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer, 1996.
- [29] J. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.*, vol. 82, pp. 664–679, Jun 1951.
- [30] J. F. Nieves, “Nucleon contribution to the induced charge of neutrinos in a matter background and a magnetic field,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 073001, Oct 2004.
- [31] J. F. Nieves and P. B. Pal, “Perturbative versus Schwinger-propagator method for the calculation of amplitudes in a magnetic field,” *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 105003, 2006.
- [32] B. Collaboration, “Neutrinos from the primary proton–proton fusion process in the sun,” *Nature*, vol. 512, p. 383–386, 2014.
- [33] M. Petropoulou, “The role of hadronic cascades in GRB models of efficient neutrino production,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 442, no. 4, pp. 3026–3036, 2014.
- [34] A. Mirizzi, I. Tamborra, H.-T. Janka, N. Saviano, K. Scholberg, R. Bollig, L. Hudepohl, and S. Chakraborty, “Supernova Neutrinos: Production, Oscillations and Detection,” *Riv. Nuovo Cim.*, vol. 39, no. 1-2, pp. 1–112, 2016.
- [35] L. Wolfenstein, “Neutrino oscillations in matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 17, pp. 2369–2374, May 1978.

-
- [36] J. F. Nieves and P. B. Pal, “Electromagnetic properties of neutrinos in a medium,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, pp. 1693–1696, Sep 1989.
- [37] J. C. D’Olivo, J. F. Nieves, and P. B. Pal, “Electromagnetic properties of neutrinos in a background of electrons,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, pp. 3679–3687, Dec 1989.
- [38] R. J. Furnstahl and B. D. Serot, “Covariant feynman rules at finite temperature: Time-path formulation,” *Phys. Rev. C*, vol. 44, pp. 2141–2174, Nov 1991.
- [39] J. F. Nieves, “Neutrinos in a medium,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, pp. 866–872, Aug 1989.
- [40] F. Halzen and S. R. Klein, “IceCube: An Instrument for Neutrino Astronomy,” *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 81, p. 081101, 2010.
- [41] W. P. Wright, G. Nagaraj, J. P. Kneller, K. Scholberg, and I. R. Seitenzahl, “Neutrinos from type Ia supernovae: The deflagration-to-detonation transition scenario,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 2, p. 025026, 2016.
- [42] M. G. Aartsen *et al.*, “Lowering IceCube’s Energy Threshold for Point Source Searches in the Southern Sky,” *Astrophys. J.*, vol. 824, no. 2, p. L28, 2016.
- [43] P. F. Bedaque and A. K. Das, “On the zero momentum limit of Feynman amplitudes at finite temperature,” *Phys. Rev.*, vol. D45, pp. 2906–2910, 1992.
- [44] P. S. Gribovsky and B. R. Holstein, “The zero momentum limit of the vacuum polarization at finite temperature,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 47, no. 2, pp. 205–214, 1990.
- [45] K. Bhattacharya and P. B. Pal, “Neutrinos and magnetic fields: A Short review,” *Proc. Indian Natl. Sci. Acad.*, vol. A70, no. 1, pp. 145–161, 2004.
- [46] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*.
New York, NY: Wiley, 3rd ed. ed., 1999.