UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
MATEMÁTICAS.

Diseño y Desarrollo de las Actividades de Inducción, Aprendizaje y Cierre, así como la Presentación de Contenidos correspondientes al Curso Optativa Disciplinaria II, “Avances y Desarrollos en el Álgebra”, en la modalidad a Distancia

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:
GASTÓN ORTEGA MORENO

TUTOR
Maestro Víctor José Palencia Gómez.
Facultad de Estudios Superiores Acatlán

COMITÉ TUTOR

Maestro Víctor José Palencia Gómez	FES – ACATLÁN, MATEMÁTICAS
Dra. Beatriz Trueba Ríos	FES – ACATLÁN, MATEMÁTICAS
Dra. Verónica Quijada Monroy	FES – ACATLÁN, EDUCACIÓN
Maestro Juan Bautista Recio Zubieta	FES – ACATLÁN, MATEMÁTICAS
M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza	FAC. CIENCIAS, MATEMÁTICAS

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México febrero de 2017

TABLA DE CONTENIDO.

Dedicatoria.

A Luzma y a Roxy, con todo mi amor.

A mis padres y a mis hermanos.

Agradecimientos

Al programa MADEMS de la UNAM, por la oportunidad de profesionalizar mi práctica docente.

Al Maestro Juan Recio Zubieta, por su valioso apoyo durante mi estancia en este posgrado y por permitirme participar en este proyecto.

A la planta docente del programa.

A los sinodales, sus valiosas aportaciones han dado forma a este documento.

Lista de tablas.

Resumen

Con la finalidad de ofrecer en línea la asignatura Optativa Disciplinaria II, se diseñan y desarrollan las actividades que permiten abordar las cuatro Unidades de Aprendizaje (UA) que conforman el programa de contenidos de la materia en la modalidad presencial, éstos a su vez contienen veintidós Unidades Mínimas de Aprendizaje (UMA).

En el presente trabajo se ilustra el diseño y desarrollo de las actividades correspondientes a la asignatura Optativa Disciplinaria II, “Avances y Desarrollos en el Álgebra”, mediante la presentación de la Unidad Mínima de Aprendizaje (UMA) denominada “Concepto de grupo”, perteneciente a la Unidad de Aprendizaje II, “Teoría de grupos”.

En el primer capítulo se presentan las características más importantes del programa educativo Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS), una semblanza de la modalidad a distancia del programa y se reseña el curso Avances y Desarrollos en el Álgebra. El capítulo dos refiere consideraciones teóricas, tanto del ámbito instruccional como didáctico y disciplinar, correspondiente al concepto de grupo conmutativo. Finalmente, en el capítulo tres se muestran la metodología del diseño y desarrollo de las actividades de la UMA.

I. Introducción.

I.1. Contexto – Problemática.

La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) ha implementado una estrategia que permite ofertar la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) en la modalidad a distancia, dicha estrategia consta de siete fases que permiten ofrecer cada uno de los cursos contenidos en el programa. En las etapas denominadas “Diseñar los cursos” y “Desarrollar los cursos” se establece que los materiales empleados en la modalidad presencial deberán adaptarse para su implementación en la plataforma tecnológica. (Vázquez, Sierra, Weber, Contreras, & Romero., 2005)

La asignatura “Avances y Desarrollos en Álgebra” perteneciente a la especialidad de Matemáticas deberá ofertarse en línea, para lo cual será necesario basarse en el programa de contenidos de la modalidad presencial, posteriormente, atendiendo los protocolos del Diseño Instruccional, se deberán proponer actividades y tareas que promuevan el aprendizaje de los tópicos del Álgebra Abstracta. (Vázquez, Sierra, Weber, Contreras, & Romero., 2005)

I.2. Planteamiento del problema.

La estrategia diseñada para impartir el programa MADEMS a distancia establece que se deberán ofertar en línea todas las asignaturas del posgrado para los ocho campos de conocimiento, sin embargo actualmente no se ha diseñado ni desarrollado el curso “Avances y desarrollos en álgebra” perteneciente a la especialidad de Matemáticas.

I.3. Justificación.

Debido a que la UNAM, planeó ofrecer en línea las asignaturas de los campos de conocimiento que brinda la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS), se han diseñado las actividades correspondientes a la asignatura Optativa Disciplinaria II, “Avances y Desarrollos en el Álgebra”.

I.4. Objetivos.

I.4.1. Objetivo general.

Realizar el diseño instruccional, aportar los materiales didácticos y organizar las actividades de aprendizaje y los recursos del curso “Avances y desarrollos en álgebra”, el cual corresponde a la Optativa Disciplinaria II y que será impartido en el programa de la MADEMS en la modalidad a distancia.

I.4.2. Objetivos específicos.

- *Revisar o establecer el marco teórico que sustente el diseño instruccional del curso “Avances y desarrollos en álgebra”.*
- *Analizar los contenidos incluidos en el programa de actividades del curso Avances y Desarrollos en Álgebra en la modalidad presencial, con la finalidad de adaptarlos a la modalidad a distancia.*
- *Organizar las actividades de aprendizaje y los recursos del curso “Avances y desarrollos en álgebra”*
- *Diseñar las Actividades de Inducción, de Aprendizaje y de Cierre correspondientes a las unidades propuestas en el programa del curso “Avances y desarrollos en álgebra”*

I.5. Preguntas de investigación.

- *¿Es factible la adaptación del curso “Avances y desarrollos en álgebra” de la modalidad presencial a la modalidad a distancia?*
- *¿Son todas las Unidades de Aprendizaje susceptibles de aplicación en la modalidad a distancia?*
- *¿Será posible diseñar actividades que permitan interactuar a distancia con los conocimientos del curso?*
- *En la modalidad en línea ¿Las actividades de Inducción, presentación de contenidos, de aprendizaje y cierre serán las adecuadas para que un alumno comprenda los conceptos matemáticos incluidos en el curso Avances y Desarrollos del Álgebra?*

1. Antecedentes.

1.1. La Maestría en Docencia para la Educación Media Superior.

La Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) es un programa que oferta la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), está orientado a la formación profesional multidisciplinaria e innovadora de profesores de nivel medio superior, tanto en su área de conocimiento como en el campo de la didáctica.

> "El Programa de Maestría en Docencia para la Educación Media Superior fue aprobado por el Consejo Universitario el 26 de septiembre de 2003, y entró en operaciones en febrero de 2004, en los campos de conocimiento de: Biología, Ciencias Sociales, Español, Filosofía, Física, Historia, Matemáticas y Química". (UNAM, 2014)

El plan de estudios de la MADEMS está constituido por actividades académicas, de las obligatorias y suman 56 créditos, las restantes son optativas con 18 créditos,

> "El plan de estudios propuesto para la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior tiene un valor total de 74 créditos: 32 corresponden a cuatro actividades académicas obligatorias; 24 a cuatro actividades académicas obligatorias de elección, y 18 a tres actividades académicas optativas". (UNAM, 2014)

En el Proyecto de Adecuación y Modificación del Plan de Estudios de la MADEMS, (CUAED, 2015), se ha establecido que las actividades se organizan en tres áreas de formación:

La Docencia General, consta de las actividades correspondientes al tronco común.

- *El área de la Docencia Disciplinaria agrupa aquellas dirigidas a fortalecer el dominio del campo de conocimiento respectivo y de la didáctica.*
- *En la Integración de la Docencia se conjugan los aprendizajes de las anteriores y se enfatiza en el trabajo de elaboración de la tesis.*

Así mismo, en el mismo documento se plantea que las *actividades académicas* se organizan en *líneas de formación*:

- *La línea Socio-Ético-Educativa incluye la actividad obligatoria Historia, Sociedad y Educación, así como dos optativas, la socio-educativa y la ético-educativa, ésta línea ofrece al estudiante elementos necesarios para lograr un desarrollo humano que le permita adquirir, enriquecer y transformar sus valores ético-morales;*
- *Actividades tales como Desarrollo del Adolescente y Psicopedagogía de la Enseñanza y el Aprendizaje pertenecen a la línea Psicopedagógica-Didáctica, con la cual se intenta formar al profesor del siglo XXI para la sociedad del conocimiento, con saberes en los terrenos psicológico, pedagógico y didáctico aplicados a su área y disciplina.*
- *En cuanto a la línea de formación Disciplinaria, ésta "Ofrece una formación especializada en los contenidos de un campo de conocimiento y su didáctica. Pone en contacto al estudiante de la Maestría con los más recientes avances y desarrollos científicos en su disciplina, para responder a las necesidades actuales de aprendizaje de los alumnos en la EMS", la conforman actividades tales como Didáctica de la Disciplina I, Didáctica de la Disciplina II, Optativa Disciplinaria I, Optativa Disciplinaria III y la Optativa Disciplinaria II, en la cual se propone profundizar en los conocimientos básicos de la disciplina, desde una perspectiva actual, atendiendo a las necesidades de la formación y del ejercicio docente. Su propósito es promover el dominio conceptual, metodológico y práctico de los contenidos de la asignatura que impartirá el estudiante en la EMS.*
- *Finalmente, la Integración de las líneas de formación y los ámbitos de docencia agrupa actividades académicas dedicadas a los aspectos de integración en cada una de las disciplinas: Seminario-taller de Integración para el trabajo de grado, Optativa de apoyo al desarrollo de la tesis, Práctica Docente I, Práctica Docente II y Práctica Docente III.*

> "MADEMS ofrece una estructura curricular mixta, conformada por un tronco común que contiene dos líneas de 57 formación (socio – ético - educativa y psicopedagógica), denominado Docencia General; un ámbito de docencia de

> especialización que contiene a la línea disciplinaria llamado Docencia Disciplinar; así como un tercer ámbito de docencia práctica denominado Integración de la Docencia que conjunta las tres líneas de formación" (UNAM, 2014)

El programa MADEMS se ofrece en los campos de conocimiento que corresponden a disciplinas básicas y obligatorias comprendidas en los planes de estudio de la EMS y que presentan altos índices de reprobación, en particular una de las especialidades es Matemáticas.

1.2. Maestría en Docencia para la Educación Media Superior a distancia.

De acuerdo con Contreras (2006), en México y particularmente en la UNAM, los docentes de nivel bachillerato carecen de una sólida preparación tanto en didáctica como en el área de su adscripción.

> "Una componente fundamental de la problemática del bachillerato de la UNAM, en sus dos subsistemas, el Colegio de Ciencias y Humanidades y la Escuela Nacional Preparatoria, es la falta de preparación formal de sus profesores para la docencia, tanto en el área de las ciencias de la educación, como en el área en que se ejerce la docencia".

Sin embargo, a pesar de esta problemática, las Estadísticas del Personal Académico 2013 presentadas por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, (DGAPA, 2017), muestran que de los 5966 docentes adscritos a la UNAM en el nivel de Educación Media Superior (EMS), ya sea la Escuela Nacional Preparatoria o la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, 1305 ostentan el grado de maestría, de los cuales solamente 193 han sido graduados por la MADEMS, lo que significa el 3% de los profesores adscritos en la EMS de la UNAM.

Los datos anteriores revelan la situación en que se encuentran los docentes de bachillerato en la UNAM, a esto "se agrega un crecimiento importante en la demanda educativa para las siguientes décadas, complicada por el hecho de que está por jubilarse un número significativo de profesores actualmente en ejercicio" (Contreras, 2006).

Considerando que la MADEMS tiene el propósito de brindar formación profesional al docente del NMS, tanto en la línea disciplinar como en el ámbito didáctico, se puede afirmar que una forma de fomentar la profesionalización de los profesores es incrementar la matrícula atendida, para lo cual se debe fortalecer la modalidad a distancia del programa.

El Consejo Asesor de la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia (CUAED, 2015) de la UNAM, define *Educación a Distancia* en su documento "Las figuras académicas participantes en el sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia":

> "Modalidad educativa que implica la separación geográfica entre el asesor y el estudiant e; promueve el aprendizaje independiente con la mediación de materiales didácticos y de tecnologías de información y comunicación; además, propicia la interacción cooperativa y colaborativa de los diferentes actores del proceso educativo, de manera síncrona y asíncrona" (CUAED, 2005)

De acuerdo con la definición, en esta modalidad educativa los alumnos no coinciden espacialmente ni entre ellos ni con el instructor, por lo que el aprendizaje se promueve por medio de materiales didácticos y a través de tecnologías de información y comunicación. Se necesitan técnicas especiales de diseño instruccional, una plataforma tecnológica que le dé soporte a la comunicación y un sistema de administración y organización propio de esta modalidad.

En (Vázquez, Sierra, Weber, Contreras, & Romero., 2005), se ha establecido una estrategia para incluir en la oferta educativa de la UNAM el programa MADEMS a distancia, incluye las siguientes etapas.

1. *Definir los objetivos de aprendizaje.*
2. *Seleccionar la tecnología adecuada.*
3. *Diseñar los cursos.*
4. *Desarrollar los cursos.*
5. *Impartir los cursos.*
6. *Evaluar los cursos.*

7. *Revisar los cursos*

En la etapa “Diseñar los cursos” se enfatizó en las necesidades de los alumnos y los tutores, mientras que al “Desarrollar los cursos” deberá considerarse el material elaborado para la modalidad presencial, el cual será adaptado para su empleo en la nueva modalidad.

> “Desarrollar los cursos. El punto de partida ha sido el material que se tiene para la modalidad presencial y se está adaptando para su uso en la plataforma tecnológica”. (Vázquez, Sierra, Weber, Contreras, & Romero., 2005)

Para llevar a cabo las tareas del diseño y desarrollo de los cursos se ha designado al “*Autor*”, sus funciones principales son “Realizar el diseño instruccional, aportar los materiales didácticos y organizar las actividades de aprendizaje y los recursos del curso” (Vázquez, Sierra, Weber, Contreras, & Romero., 2005)

Una de las acciones estratégicas requeridas para impartir la MADEMS a distancia es poner en línea todas las asignaturas de la MADEMS para los ocho campos de conocimiento.

1.3. “Avances y Desarrollos en Álgebra” en la especialidad de Matemáticas.

El programa MADEMS en la especialidad de Matemáticas está constituido por nueve actividades obligatorias y seis optativas con 74 y 46 créditos respectivamente.

La *Línea Disciplinaria* la conforman Didáctica de la Disciplina I, Didáctica de la Disciplina II, Optativa Disciplinaria I, Optativa Disciplinaria II y Optativa Disciplinaria III.

La actividad denominada Optativa Disciplinaria II aporta ocho créditos al plan de estudios, se imparte en la modalidad de seminario y se ofrece en dos alternativas: Avances y Desarrollos en Álgebra o Avances y Desarrollos en Variable Compleja.

Con la impartición de la asignatura “Avances y Desarrollos en Álgebra” se pretende que el educando profundice en el estudio de la matemática.

> “OBJETIVOS GENERALES: Mostrar capacidad para realizar estudios profundos en algún área de las Matemáticas, lo cual le permitirá al alumno tener una visión del quehacer matemático, visión que es necesaria para poder orientar y transmitir los conocimientos matemáticos a sus futuros estudiantes (UNAM, 2014)”

En sus objetivos específicos se establecen acciones dirigidas al estudio del Álgebra Abstracta, tanto en sus técnicas como en su objeto de estudio.

Los contenidos se han estructurado en cuatro unidades de conocimientos.

1. *Introducción:* Axiomas de campos, Ejemplos de campos, Anillos de polinomios con coeficientes en un campo.
2. *Anillos conmutativos* Axiomas de anillos, Homomorfismos, Ideales y anillos cociente, Divisores de cero y dominios enteros, Anillos euclidianos, Dominios de factorización única, Anillos de polinomios, Polinomios sobre el campo de los racionales.
3. *Grupos* Axiomas de grupos, Ejemplos de grupos, Subgrupos, Subgrupos normales y grupos cocientes, Homomorfismos, Automorfismos, Grupos de permutaciones, Teorema de Sylow.
4. *Campos* Extensiones de campos, Raíces de polinomios, Construcciones con regla y compas, Elementos de la teoría de Galois, Solubilidad por radicales.

2. Consideraciones Teóricas.

2.1. Aprendizaje con Comprensión.

Según Hiebert y Carpenter (1992) la comunidad de educación matemática acepta la idea de que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión.

Los autores proponen un marco de trabajo para explorar la comprensión en matemáticas, y fundamentan esta propuesta en la suposición de que el conocimiento se representa internamente y que las representaciones internas se encuentran estructuradas.

Según los autores para comunicar y pensar conceptos matemáticos, éstos se deben representar en alguna forma. Afirman que la comunicación requiere representaciones externas, tales como lenguaje natural, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos y, para pensar se requieren representaciones internas de manera que la mente opere sobre ellas.

El marco de trabajo que Hiebert y Carpenter (1992) proponen se ha construido sobre dos suposiciones que surgen de la ciencia cognitiva. En la primera de estas suposiciones se afirma que las representaciones externas y las internas están relacionadas, mientras que en la segunda se asume que las representaciones internas se pueden conectar o relacionar con otras de manera útil.

Hiebert y Carpenter (1992) afirman que la naturaleza de la representación interna se ve influenciada por la situación externa que está siendo representada, para ellos la forma de una representación externa con la cual un estudiante interactúa determina la forma en que el estudiante la representa internamente. Inversamente la manera en que un estudiante genera una representación externa revela de alguna manera cómo ha representado las relaciones internas.

Los autores afirman que cuando se construyen relaciones entre representaciones internas, se producen redes de conocimiento y aunque admiten que no es posible especificar la naturaleza exacta de las redes, consideran útil visualizarlas en términos de dos metáforas. Una de estas metáforas consiste en visualizar las redes como estructuras verticales jerarquizadas, en cuyo caso algunas representaciones son subsumidas por otras más generales; en la segunda metáfora, la red se visualiza como una telaraña estructurada horizontalmente, los nodos se pueden pensar como las piezas de información representada y los hilos entre ellos como las conexiones entre esta información.

En el marco que se analiza se define la comprensión matemática en términos de la forma en que la información está representada y estructurada. La definición de comprensión es:

> "Una idea, procedimiento o hecho matemático se ha comprendido si es parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas se comprenden si su representación mental es parte de una red de representaciones" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 67).

Otro tema que analizan los autores mencionados se refiere a las diferentes clases de conexiones que se pueden construir para crear redes de conocimiento, éstas incluyen similitudes, diferencias e inclusión. Las relaciones de similitudes y diferencias se pueden construir al observar correspondencias entre diferentes o la misma forma de representación, mencionan que las relaciones de similitudes y diferencias que se establecen dentro de una misma forma de representación a menudo incrementan la cohesión y estructura de la red. La clase de relaciones basada en la inclusión o nociones de casos generales y específicos se encuentran en estructuras verticales jerarquizadas.

Basándose en la definición de comprensión, Hiebert y Carpenter (1992) afirman que las redes de representaciones mentales se construyen gradualmente al conectar la nueva información a redes existentes o al construir nuevas relaciones entre la información que previamente estaba desconectada. Para los autores las redes grandes y bien estructuradas producen mayor comprensión.

El crecimiento de las redes puede ocurrir de varias formas, una de ellas es cuando se conecta nueva información a una red existente, otra manera de lograrlo es formar nuevas conexiones entre información con que el alumno cuenta previamente, las viejas conexiones son abandonadas o modificadas. Una consecuencia de esta reorganización es que las redes internas se pueden caracterizar como procesos dinámicos.

En cuanto al aprendizaje con comprensión, los autores enlistan cinco consecuencias que éste tiene en el estudiante: Es generativa, promueve el recuerdo, reduce la cantidad de información que debe ser recordada, mejora la transferencia, influye en las creencias, a continuación, se hace una descripción de éstas consecuencias.

Es generativa. La primera consecuencia que abordan los autores se centra en la idea de que el estudiante construye su propio conocimiento, lo cual significa que a partir de su interacción con el mundo el estudiante crea sus propias representaciones internas, un aspecto crucial de este proceso de construcción es su inventiva ya que los estudiantes continuamente inventan formas de lidiar con el mundo, particularmente en matemáticas los alumnos inventan estrategias para resolver una variedad de problemas. Hiebert y Carpenter (1992) afirman que las invenciones no necesariamente dan origen a matemáticas productivas, aunque si los argumentos de las invenciones de los alumnos son piezas de redes de conocimiento bien conectadas, las matemáticas resultantes pueden ser productivas.

Promueve el recuerdo. En este marco se acepta que la memoria es un proceso constructivo o reconstructivo más que una actividad pasiva de almacenamiento.

Los autores afirman que una ventaja de conectar los conocimientos nuevos con los que previamente existen es que los conocimientos bien conectados se recuerdan mejor, y sustentan esta afirmación con dos posibles explicaciones, la primera es que consideran menos probable que se deteriore una red completa de conocimiento que piezas aisladas de información y la segunda es que la recuperación de la información se ve reforzada si se encuentra conectada a una red más grande.

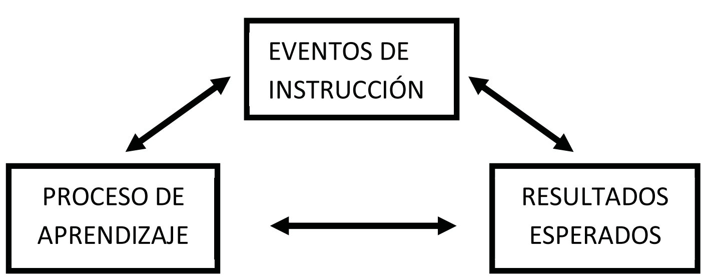
Reduce la cantidad de información que debe ser recordada. Hiebert y Carpenter (1992) establecen que la cantidad de información que debe ser recordada es una consecuencia de la comprensión. Según ellos cuando algo es comprendido, es representado de manera que se conecta a una red. Así que en una red bien estructurada, la información es menor, ya que al recordar cualquier parte individual de la red se viene a la memoria la red completa, lo que reduce el número de elementos que deben ser recordados.

Mejora la transferencia. La transferencia es esencial porque generalmente nuevos problemas se necesitan resolver empleando las estrategias previamente aprendidas por el alumno, sería imposible ser competente si se necesitara aprender una estrategia nueva para cada problema.

En el marco propuesto, los autores afirman que la forma en que las representaciones internas se encuentran conectadas ayuda a explicar el potencial de la transferencia. Sin embargo sugieren que la situación en que se presenta el problema influye en las representaciones internas y en sus conexiones con otras representaciones.

2.2. Diseño Instruccional.

El Diseño Instruccional (DI) es una guía que emplea el tecnólogo instruccional para ayudar al alumno a aprender, con éste se intenta relacionar eventos de instrucción con el proceso de aprendizaje y los resultados esperados, como se muestra en la siguiente figura.



DISEÑO INSTRUCCIONAL

El DI es la rama de conocimiento que se encarga de desarrollar investigación y crear teoría acerca de las estrategias de enseñanza, así como de su implementación, por tal motivo orienta al tecnólogo instruccional en el desarrollo de la instrucción. De acuerdo a Simonson, Samaldino, Albright y Zveck (2003), "el DI constituye la guía que orienta al tecnólogo instruccional con reglas para pensar y resolver problemas de la instrucción".

Para Reigeluth (1999), "Una teoría de diseño educativo es una teoría que ofrece una guía explícita sobre la mejor forma de ayudar a que la gente aprenda y se desarrolle". Así mismo, señala, existen dos aspectos importantes en el diseño: "las circunstancias bajo las cuales se desarrolla la enseñanza y los resultados deseados de la misma".

Smaldino, Russell, Hernich y Molenda (2005), establecen que los pasos del proceso del Diseño Instruccional son los siguientes:

- *Análisis: Del sistema con el propósito de comprenderlo y describir las metas que se desean alcanzar para atender la necesidad identificada.*
- *Diseño: Selección del método para lograr las metas.*
- *Desarrollo: Desarrollo del modelo en un producto (curso).*
- *Aplicación: Aplicar el curso.*
- *Evaluación: Valoración del curso, revisión de las cuatro fases y exploración en el campo para asegurar la orientación deseada y lograr los resultados deseados.*

2.3. El modelo ASSURE para Diseño Instruccional.

Para el desarrollo de un *Diseño Instruccional* es necesario emplear un modelo que facilite la elaboración y desarrollo de la instrucción, el modelo ASSURE, propuesto por Heinich, Molenda, Russell y Smaldino en 1993, incorpora los eventos de instrucción de Robert Gagné para asegurar el uso efectivo de los medios en la instrucción.

Según los creadores de ASSURE, este modelo es una guía para planear y conducir la instrucción cuando se incorpora la tecnología, aseguran que un proceso de diseño instruccional deberá inicialmente valorar las necesidades para determinar si la instrucción es la solución adecuada, el modelo se centra en la planeación que circunda aquellas aulas en las cuales es común el uso de la tecnología

Los pasos del modelo son:

1. *A - Análisis de los estudiantes.*
2. *S - Establecimiento de objetivos.*
3. *S - Selección de métodos, medios y materiales.*
4. *U - Uso de medios y materiales.*
5. *R - Requerimiento de participación de los estudiantes.*
6. *E - Evaluar y revisar.*

De acuerdo a los autores de este modelo, la enseñanza y el aprendizaje se pueden pensar como un proceso que avanza a través de varios estados a los cuales Robert Gagné denomina "eventos de instrucción"

> "La investigaciones de Gagné revelaron que las lecciones bien diseñadas comienzan estimulando el interés de los alumnos y posteriormente los mueven hacia la presentación de nuevo material, los involucra en actividades prácticas, evalúa su comprensión y avanza a las siguientes actividades". (Smaldino, Instructional technology and media for learning, 2008)

En este modelo se establece como primer paso el análisis de los estudiantes. "Si los medios de instrucción y la tecnología se emplean adecuadamente, debe existir una relación entre las características del estudiante y los contenidos de los métodos, medios y materiales" (Smaldino, Instructional technology and media for learning, 2008)

Con la finalidad de tomar decisiones adecuadas respecto al diseño, se deben analizar las principales características de los estudiantes, de manera que se puedan seleccionar métodos de instrucción adecuados.

Durante la planeación de cualquier lección, se supone que los alumnos carecen de los conocimientos o las herramientas que serán enseñadas, asimismo que poseen los conocimientos o las herramientas necesarias para aprender esta lección. Los instructores deben verificar los supuestos acerca de las competencias de inicio, mediante mecanismos formales o informales.

Una vez que se ha llevado a cabo el análisis de los alumnos, se establecen los objetivos de la instrucción, mediante los cuales se proponen las nuevas capacidades que deberán poseer los alumnos al término del proceso.

Un objetivo es una proposición que determina aquello que los alumnos obtendrán al realizar una acción, es un enunciado en el cual se indica lo que será aprendido. "un objetivo es una proposición no acerca de lo que el instructor planea colocar en la lección, sino de lo que el estudiante debe obtener al término de la misma" (Smaldino, 2008)

El diseño de las estrategias de la instrucción determina los siguientes aspectos:

- *Elección de un sistema de ejecución.*
- *Secuencia y agrupamiento de contenidos,*
- *Descripción de los componentes de aprendizaje que serán incluidos en la instrucción,*
- *Especificación de cómo los estudiantes se agruparán durante la instrucción,*
- *Establecimiento de la estructura de la lección,*
- *Selección de los medios para la instrucción.*

"En cualquier tipo de experiencia educativa formal, se emplea una metodología para la gestión y ejecución de las actividades de enseñanza y aprendizaje que llamamos instrucción. Ésta se denomina *sistema de ejecución"* (Smaldino, 2008, pág. 184)

Los autores señalan que, en un diseño de instrucción ideal, se debe considerar las metas, las características de los alumnos, el contexto de aprendizaje, los objetivos y los requisitos de evaluación, y entonces trabajar a través de las decisiones para llegar a la selección del mejor sistema de ejecución:

1. *Revisar el análisis de la instrucción e identificar las agrupaciones lógicas de objetivos que se impartirán en las secuencias apropiadas.*
2. *Planear las componentes del aprendizaje que serán empleadas durante la instrucción.*
3. *Elegir la agrupación de alumnos más efectiva para el aprendizaje.*
4. *Especificar los medios y materiales más efectivos que se encuentran en el rango de costos, conveniencia y practicidad para el ambiente de aprendizaje.*
5. *Asignar objetivos a las lecciones y consolidar la selección de los medios.*
6. *Seleccionar el desarrollo de un sistema de ejecución que mejor se adapte a las decisiones tomadas en los pasos anteriores.*

Secuencia y agrupamiento de contenidos.

Al desarrollar una estrategia de instrucción se debe identificar una secuencia de enseñanza y agrupación manejable de contenidos. Se puede comenzar con las habilidades de nivel inferior, es decir, aquellas que se encuentran justo sobre la línea que separa a los prerrequisitos de la instrucción de los conocimientos que serán impartidos y luego progresar a través de la jerarquía.

Agrupamiento de instrucción.

La siguiente actividad corresponde a la selección del tamaño de los estratos de información, según el autor existen dos extremos en un continuo, es posible presentarla mediante el desarrollo lineal de instrucción programada, en este caso se fracciona la información en unidades pequeñas de aprendizaje y requiere respuestas constantes de parte del alumno o bien como es presentada en los libros de texto, en cuyo caso cada capítulo es una unidad de información.

El diseñador puede elegir presentar la información mediante objetivos separados con actividades intermedias o bien presentar objetivos previos a cualquier clase de actividad.

Los siguientes factores son determinantes al elegir la cantidad de información que será presentada.

- *La edad y nivel de los alumnos.*
- *La complejidad del material*
- *El tipo de aprendizaje que tendrá lugar.*
- *Cuando la actividad puede variar, siempre centrando la atención en la tarea.*

2.4. El proceso de desarrollo de una Estrategia de Instrucción

Sharon E. Smaldino (2008), proponen una secuencia de pasos para desarrollar un buen diseño de la estrategia de instrucción.

1. *Indicar la secuencia de objetivos y cómo serán agrupados para la instrucción. Al hacer esto, se deben considerar tanto la secuencia como el tamaño apropiados de los grupos, así como el tiempo estimado para cada sesión.*
2. *Indicar lo que va a hacer con respecto a las actividades preinstructional, de evaluación, y seguimiento. Las decisiones acerca de los grupos de alumnos y de los medios de instrucción se toman al realizar la planeación, así mismo estos componentes son aplicados para todos lo objetivos.*
3. *Indicar los contenidos que se presentarán y las actividades de participación del alumno para cada objetivo o grupo de objetivos.*
4. *Revisar la secuencia y grupos de objetivos, actividades preinstruccionales, de evaluación, presentación de contenidos, estrategias de participación de los estudiantes, así como la forma de agrupar a los estudiantes y la selección de medios de la instrucción. Usando esta información, asignar objetivos por lección o sesión de aprendizaje.*
5. *Realizar una revisión de la estrategia completa nuevamente, con la finalidad de consolidar las decisiones que se han tomado,*

2.5. El estudio del Álgebra Abstracta.

De acuerdo con Herstein (1988), el estudio del *Álgebra abstracta* se inicia con la selección de un conjunto, posteriormente deberá definirse una operación entre sus elementos, para finalmente identificar las propiedades que cumple tal operación, de esta forma es posible clasificar la estructura algebraica generada.

> "Se comienza con alguna colección *S* de objetos y luego se le dota de una estructura algebraica, suponiendo que pueden combinarse los elementos de este conjunto S de una o de varias maneras (usualmente dos), para obtener de nuevo elementos de dicho conjunto. A estas formas de combinar elementos de S se les llama operaciones en S. Luego se trata de condicionar o regular la naturaleza de S imponiendo ciertas reglas sobre cómo se comportan estas operaciones en S. Tales reglas suelen denominarse los axiomas que definen la estructura particular en S" (Herstein, 1988, pág. 1)

El autor propone que el objeto de estudio del Álgebra Abstracta es el análisis de ciertas estructuras algebraicas "(e)n este libro se estudiarán algunos de los sistemas algebraicos axiomáticos básicos, a saber, grupos, anillos y campos" (Herstein, 1988, pág. 2).

El concepto de Grupo.

El sistema axiomático denominado *Grupo* está constituido por un conjunto y una operación, la cual cumple cuatro axiomas o propiedades: cerradura, asociatividad, existencia de un elemento neutro y existencia de elementos inversos, si además la operación es conmutativa, se denomina *Grupo Abeliano*. "El concepto de grupo es de fundamental importancia en el estudio del álgebra. Los grupos que desde el punto de vista de su estructura algebraica, son esencialmente el mismo se dicen ser isomorfos" (Hungerford, 1989, pág. 23).

3. Metodología y Desarrollo.

3.1. Metodología del Diseño.

Desarrollo de la Estrategia de Instrucción

Considerando las fases del Diseño Instruccional propuestas por Sharon E. Smaldino (2008), se diseña una Estrategia de Instrucción para el desarrollo de las actividades de aprendizaje, este proceso se lleva a cabo bajo las siguientes directrices:

1. *Se investiga el perfil del estudiante, con la finalidad de tomar decisiones adecuadas respecto al diseño.*
2. *Una vez que se ha llevado a cabo el análisis de los alumnos, se indica la secuencia de objetivos de la instrucción, así como de las Unidades de Aprendizaje.*
3. *Identificar las unidades didácticas:*
    - *Unidades de Aprendizaje (UA).*
    - *Unidades Mínimas de Aprendizaje (UMA). Las UMA son los temas específicos o subtemas del programa que se trabajan de forma independiente.*
4. *Análisis de tareas de cada unidad de aprendizaje.*
5. *Se proponen las actividades del curso.*
    a. *Preinstructional o de inducción.*
    b. *De evaluación.*
    c. *De seguimiento.*

Actividad de Inducción.

De acuerdo con el marco de trabajo propuesto por Hiebert y Carpenter (1992), las matemáticas se comprenden si su representación mental es parte de una red de representaciones, es a partir de las actividades de inducción que el alumno activa sus conocimientos previos para construir las redes de representación que fomentarán la comprensión de los conceptos del curso.

Algunas actividades que pueden diseñarse para facilitar la activación de los conocimientos previos por parte de los estudiantes, son las siguientes:

- *Elaborar un esquema (por ejemplo, un mapa conceptual).*
- *Presentar los nodos y sus relaciones.*
- *Recordar los temas previos del currículo, para asegurarse de que el alumno los conozca, en caso de que se tenga incertidumbre al respecto.*
- *De manera opcional, podría presentarse un organizador anticipado; esto es, una pantalla con los temas del desarrollo del curso.*

Presentación de contenidos.

En función del conocimiento identificado en cada UMA, se construyen esquemas de exposición en el material de la instrucción.

- *La construcción de conceptos: Se proponen ejemplos y contraejemplos, se analizó cada uno de ellos e identificaron similitudes y diferencias, se construyen categorías con ellos, así mismo se solicitó realizar investigación documental y ejercicios.*
- *Resultados y principios: Presentar casos en que se cumplen tales principios, enunciado del principio, planteamiento de ejemplos, contraejemplos y analogías, ejercicios y evaluaciones.*
- *Procedimientos: explicar el procedimiento y los pasos contemplados, realización de ejercicios y evaluación o autoevaluación.*

En esta fase se consideran los conocimientos que serán presentados a los estudiantes por medio de los cuales lograrían comprender los fundamentos del Álgebra Abstracta. Dado que se sustenta en el modelo basado en Aprendizaje con comprensión propuesto por Hiebert y Carpenter, se desarrollan Unidades Mínimas de Aprendizaje (UMA) con la finalidad de construir o fortalecer las redes de información que servirán para que el estudiante construya sus redes internas, así que cada UMA promueve la construcción o extensión de redes de información.

En el diseño de los contenidos se tuvo presente el análisis de tareas, que se lleva a cabo en la fase inicial del diseño instruccional, de manera que a partir del propósito de aprendizaje, la complejidad cognitiva y el dominio de contenidos que se espera por parte de los estudiantes, se seleccione la representación de los contenidos que más se adecue para cubrir estos fines.

Actividades de Aprendizaje.

En esta fase se proponen Actividades de Aprendizaje, en su resolución el estudiante puede hacer uso de la información adquirida en la fase anterior. Las actividades de aprendizaje representan la parte central del modelo instruccional seleccionado; a través de ellas el estudiante construye sus aprendizajes.

Como apoyo al estudiante se ofrecen en línea videos demostrativos, formularios, formatos que pueden emplear en el desempeño de las tareas, el espacio para colocar las evidencias de la tarea desempeñada y, por supuesto, el apoyo del asesor en línea y de los compañeros, para resolver dudas, comentar y ampliar la perspectiva propia.

Desde la fase del diseño instruccional se sugieren algunas actividades de aprendizaje, basadas en el análisis de tareas. Es importante tener siempre presente, como eje central de este apartado, cuál es el propósito de aprendizaje que se pretende lograr, así como el nivel de dominio que se espera que logren los estudiantes y la naturaleza de los contenidos (conceptuales, procedimentales o actitudinales) para diseñar las actividades de aprendizaje.

Fase de cierre.

En esta fase el estudiante demuestra el aprendizaje que logró en la instrucción, tanto en contenidos de los conceptos, procedimientos y actitudes que se promovieron como objetivo en la Unidad de Aprendizaje (UA) o durante la Unidad Mínima de Aprendizaje (UMA). La Actividad de Cierre puede ser referente para la evaluación.

A través de las actividades propuestas en esta fase se pueden interpretar las redes de información que los estudiantes han construido internamente, tanto en los conocimientos como en sus conexiones y de esta manera valorar el nivel de aprendizaje que han logrado en las fases anteriores. El resultado que se observa en las explicaciones de los estudiantes, es el de la negociación de significados, gracias a la acción mediadora de “otros”: el profesor, los compañeros o el mismo material.

3.2. El curso “Avances y Desarrollos en Álgebra”

3.2.1. Análisis de los alumnos

Perfil del estudiante.

El curso se encuentra dirigido a estudiantes del programa de Maestría en Enseñanza en Educación Media Superior, en la especialidad de Matemáticas y en la modalidad de Educación a Distancia.

De acuerdo a la convocatoria publicada por el programa de la MADEMS y en particular en el área de Matemáticas (UNAM, 2014), los requisitos de ingreso al posgrado son:

- Contar con título o acta de examen profesional de una licenciatura que corresponda a alguna de las asignaturas de los planes y programas de estudio de la EMS, establecidas en las convocatorias respectivas.
- Aprobar el examen de conocimientos generales y de habilidades básicas del campo de conocimiento al que se desea inscribir y obtener un dictamen favorable de la comisión de admisión correspondiente.

Los aspirantes a ingresar al posgrado cuentan con título profesional de una licenciatura relacionada con la matemática, sin embargo, algunos de ellos no han cursado asignaturas de Álgebra Abstracta.

3.2.2. Unidades de Aprendizaje y secuencia de objetivos de la instrucción.

De acuerdo a lo establecido por la MADEMS, el diseño del curso en línea se sustenta en el programa de contenidos que se ofrece en la modalidad presencial, sin embargo, al considerar como marco teórico el desarrollado por Hiebert y Carpentier, cuyo supuesto consiste en que el educando posee estructuras conceptuales internas que se fortalecen e incrementan con la instrucción, se propone ordenar de forma distinta las Unidades de Aprendizaje. En la siguiente tabla se describe la propuesta del orden sugerido, así como una breve descripción y objetivo por cada una de las Unidades de Aprendizaje.

Unidades de aprendizaje	Descripción	Objetivo
Conceptos Preliminares	En esta unidad se realiza una revisión de conceptos básicos de teoría de conjuntos, relaciones, funciones y números enteros, tales como conjunto, operaciones entre conjuntos, relaciones de equivalencia, división de enteros y congruencias módulo n.	El alumno aplicará conocimientos de Teoría de conjuntos, Funciones y Números enteros, en la construcción de conjuntos finitos e infinitos determinados.
Teoría de Grupos.	Se presentan ejemplos de grupos finitos, con la finalidad de construir los conceptos de grupo y grupo conmutativo, posteriormente se analizan los resultados fundamentales de la teoría de grupos.	El alumno será capaz de elaborar un mapa conceptual cuyo tema sea el concepto de grupo. Así mismo construirá la operación que determina algunos grupos finitos e identificará las propiedades que se cumplen en ella.
Anillos.	Se define una segunda operación en algunos de los grupos de la unidad anterior y se analizan sus propiedades, para construir una estructura algebraica con dos operaciones. Se ejemplifica éste tipo de estructura con los Números Enteros.	El estudiante comprenderá las propiedades de estructuras algebraicas con dos operaciones, tales como: Anillo, Dominio Entero y Anillo Euclidiano, a partir de la definición de grupo.
Campos.	Considerando los ejemplos de Anillos presentados en la unidad correspondiente, se escala al concepto de Campo.	Comprenderá las propiedades de la estructura algebraica denominada Campo, y la conceptualizará como una extensión de la estructura de Anillo.

Tabla 1: Propuesta de reestructuración del Programa Avances y Desarrollos en Álgebra

Unidades didácticas.

Cada Unidad de Aprendizaje se desagrega en Unidades Mínimas de Aprendizaje, para integrar tales UMA se seleccionan los tópicos planteados en el programa de estudios en la versión presencial de la MADEMS. Las tablas muestran la estructura del curso que se diseñará para la modalidad a distancia.

UNIDAD I	**UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE**	**CONTENIDOS**
I. CONCEPTOS PRELIMINARES	1.1. Teoría de conjuntos	• Introducción a la teoría de conjuntos. • Álgebra de conjuntos. • Ejemplos de conjuntos finitos.
	1.2. Relaciones.	• El producto de conjuntos. • Relaciones binarias y su representación. • Relaciones y clases de equivalencia.
	1.3. Funciones y operaciones	• El concepto Función. • Una clasificación de funciones.
	1.4. Aplicaciones biyectivas.	• El concepto de Función Biyectiva. • El conjunto A(S) de aplicaciones biyectivas de un conjunto sobre sí mismo.
	1.5. Números Enteros.	• El algoritmo de la división. • Divisibilidad en los números enteros. • Congruencia $módulo\ 3$. • El conjunto $\mathbb{Z}_n$ • Máximo Común Divisor. • El conjunto $\mathbb{U}_n$

UNIDAD II	UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE	CONTENIDOS
II. TEORÍA DE GRUPOS	2.1. Grupo	• Definiciones. • Grupo de Simetrías del cuadrado. • Grupo S_3 de permutaciones del conjunto $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ • Grupo Cíclico (a) • Grupos aditivos numéricos: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ • Congruencia $módulo\ n$ y el grupo $\mathbb{Z}_n$. • Congruencia $módulo\ n$ y el grupo $\mathbb{U}_n$.
	2.2. Subgrupos.	• Construcción de subgrupos.
	2.3. Teorema de Lagrange.	• Clases laterales. • Congruencia $módulo\ H$, para subgrupo H • El grupo Cociente. • Orden de un subgrupo.
	2.4. Teorema de Euler.	• Orden en grupos aditivos o multiplicativos. • Función de Euler. • Teorema de Euler. • Corolario de Fermat.
	2.5. Subgrupos Normales.	• Clases laterales Izquierdas. • Clases Laterales Derechas. • Subgrupos Normales. • Grupo Cociente.
	2.6. Homomorfismos	• Funciones inyectivas y suprayectivas. • Homomorfismos, Monomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Endomorfismos, Automorfismos. • Nucleo e Imagen.

UNIDAD III	UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE	CONTENIDOS
III. ANILLOS	3.1. Anillo y sus axiomas	• Axiomas de Anillo. • Anillo con unidad, Anillo conmutativo.
	3.2. Dominio entero.	• Anillo conmutativo. • Divisores de cero. • Estudio del Anillo $\mathbb{Z}_n$
	3.3. Anillo con División.	• Anillo con unidad. • Inversos multiplicativos • Estudio del anillo conmutativo $\mathbb{Z}_n$
	3.4. Ideales y Anillo Cociente.	• Ideales. • El Anillo cociente. • El anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$
	3.5. Anillo Euclidiano.	• El algoritmo de la División. • El anillo Euclidiano de los números enteros $\mathbb{Z}$. • Divisibilidad.
	3.6. Anillo de Polinomios.	• Polinomios. • Operaciones entre polinomios. • El Anillo de polinomios sobre un campo. • El algoritmo de la División.
UNIDAD IV	**UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE**	**CONTENIDOS**
IV. CAMPOS.	3. Axiomas de campo.	• Concepto de Campo. • Estudio del anillo conmutativo $\mathbb{Z}_n$ • Ejemplos de Campos Numéricos.
	4. El campo de los números Racionales.	• El campo de los Números Racionales. • Operaciones con Números Racionales.
	5. Polinomios en el campo de los Números Racionales.	• Polinomios en el campo de los Números Racionales. • Criterio de Eisenstein para polinomios irreductibles.
	6. Extensión de Campos.	• Campos de Extensión.
	7. El campo de los Números Complejos.	• Concepto de Número Complejo. • Operaciones con números complejos.

Tabla 2: Programa de contenidos modalidad a distancia

3.4. Desarrollo de la Unidad Mínima de Aprendizaje “Concepto de Grupo”.

Previo al estudio de cada *Unidad de Aprendizaje* se presentan los objetivos que se desea alcanzar en la instrucción. El estudiante deberá desarrollar actividades de Inducción, en ellas se diagnostican las herramientas que posee y se promueve la adquisición de las habilidades y conocimientos necesarios para la instrucción.

Posteriormente le son presentados los Contenidos de la Unidad, cuyo diseño incluye conceptos, definiciones, resultados fundamentales y ejemplos, algunos de los cuales son interactivos y con animación, su finalidad es construir redes de conocimientos que promuevan la comprensión de los contenidos matemáticos.

Las Actividades de Aprendizaje proporcionan al estudiante la oportunidad de estructurar sus redes de información por medio de la resolución de ejercicios matemáticos, en algunos casos construyendo y en otros investigando conceptos. El profesor brindará retroalimentación en estas tareas, se ha incluido una descripción detallada del mecanismo de entrega.

Finalmente deberá resolver una *Actividad de Cierre*, cuyo propósito es concluir con la unidad de aprendizaje, ya sea con la aplicación de los conocimientos adquiridos o bien con un resumen cualitativo de ellos.

3.4.1. Unidad Mínima de Aprendizaje “Concepto de Grupo”

En la siguiente tabla se muestra la Unidad Mínima de Aprendizaje “Concepto de Grupo”, incluida en la Unidad de Aprendizaje II, “Teoría de grupos”, así como los contenidos que la constituyen.

Unidad II: “TEORÍA DE GRUPOS”.

Unidad Mínima de Aprendizaje: Concepto de Grupo.

Contenidos.

- *Definiciones.*
- *Grupo de Simetrías del cuadrado.*
- *Grupo* $\boldsymbol{S_3}$ *de permutaciones del conjunto* $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}\}$
- *Grupo Cíclico* $(\boldsymbol{a})$
- *Grupos aditivos numéricos:* $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$
- *Congruencia* $\boldsymbol{m\acute{o}dulo\ n}$ *y el grupo* $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$.
- *Congruencia* $\boldsymbol{m\acute{o}dulo\ n}$ *y el grupo* $\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$.

3.4.2. Objetivos de la UMA.

Los objetivos que se proponen para la Unidad de aprendizaje 2, “Teoría de Grupos” son los siguientes:

Objetivo general: El alumno identificará los componentes que estructuran la definición de un grupo conmutativo, así como las características fundamentales que debe tener un subgrupo.

Objetivos particulares:

- *El estudiante identificará los tópicos matemáticos que componen la definición de grupo.*
- *Identificar las características fundamentales que definen un subgrupo específico.*
- *Identificar las consecuencias del teorema de Lagrange, con la finalidad de justificar la razón por la cual un subconjunto no es subgrupo.*
- *Emplear los conceptos: clases laterales, clases de equivalencia y subgrupos normales para construir un grupo cociente.*

Los conceptos centrales de esta UMA son grupo y grupo conmutativo, y su propósito es que el estudiante comprenda tales conceptos, lo cual se pretende lograr por medio de las tareas siguientes:

- *El alumno construirá una operación determinada en cada uno de los conjuntos elaborados en la Actividad de Inducción de la Unidad de Aprendizaje 2.*
- *El estudiante determinará los axiomas que debe cumplir la estructura algebraica llamada un Grupo.*
- *El alumno será capaz de verificar los axiomas de grupo que cumplen los conjuntos y sus operaciones listados en la unidad de aprendizaje.*
- *El alumno será capaz de identificar las similitudes y diferencias que existe entre cada par de conjuntos y su estructura listados en la Unidad de Aprendizaje.*

3.4.3. Actividad de Inducción.

La actividad de inducción propuesta en esta UMA tiene la finalidad de guiar al estudiante en la construcción de una red de conocimientos relacionados con la teoría de conjuntos, empleando los conceptos estudiados en la unidad anterior.

Los conocimientos que el alumno deberá poseer al iniciar esta unidad son:

- *Concepto de Conjunto.*
- *Números enteros.*
- *Congruencias.*
- *Divisibilidad en los números enteros.*
- *Números primos.*
- *Relación de equivalencia.*
- *Congruencia "módulo n"*

Debido a que se pretende contar con una red de información con diferentes conjuntos, tanto finitos como infinitos, se proponen las siguientes construcciones:

1. *Conjunto de simetrías del cuadrado, (D_4^*).*

“Considera el cuadrado con vértices numerados consecutivamente 1, 2, 3, 4, centrado en el origen del plano cartesiano, y de lados paralelos a los ejes. Sea D_4^* el conjunto de “transformaciones” del cuadrado, por ejemplo:

- R_1 *es la rotación de 90°.*
- R_3 *es la rotación de 270° ambas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.*
- T_x *es una reflexión en torno al eje “x”.*
- T_{13} *es una reflexión en torno a la diagonal que conecta los vértices 1 con 3.*

Nótese que cada $U \in D_4^*$, es una biyección del cuadrado sobre sí mismo*”* (Hungerford, 1989).

1. *Observa la animación que se presenta en la liga denominada “simetrías del cuadrado”*
2. *Describe todas las “transformaciones” del cuadrado.*
3. *Construye el conjunto D_4^*.*

Tabla 3: Conjunto de simetrías del cuadrado

2. *Conjunto de simetrías del triángulo, (D_3^*).*

Actividad: Revisa la construcción del conjunto de simetrías del cuadrado, y construye el conjunto de simetrías del triángulo equilátero D_3^*.

1. *Dibuja un triángulo equilátero en una cartulina.*
2. *Recorta la figura dibujada y enumera los vértices del uno al tres.*
3. *Describe todas las “transformaciones” o movimientos del triángulo sobre sí mismo, por ejemplo.*
   a. *Toma la figura recortada y desde una posición inicial, realiza una rotación de* $120°$ *en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj.*
   b. *Toma la figura recortada y desde una posición inicial, realiza una reflexión en torno al vértice que marcaste con el número uno, invirtiendo solamente los otros dos vértices.*
4. *Denota cada transformación, de manera análoga a la designación que se dio en la construcción de D_4^*.*
5. *Construye el conjunto D_3^**
6. *Elabora un video que registre tu actividad y envíalo a tu portafolio de evidencias.*

Tabla 4: Conjunto de simetrías del triángulo

3. *Conjuntos de $3, 4, 5, 6 \; y \; 7$ puntos sobre una circunferencia:*

$$G = (a) = \left\{a^i \,\middle|\, i = 0,1,2\right\}, \left\{a^i \,\middle|\, i = 0,1,2,3\right\}, \left\{a^i \,\middle|\, i = 0,1,2,3,4\right\},$$
$$\left\{a^i \,\middle|\, i = 0,1,2,3,4,5\right\}, \left\{a^i \,\middle|\, i = 0,1,2,3,4,5,6\right\}$$

Conjuntos de puntos sobre una circunferencia.

Dada la circunferencia "S" en el plano, ubicamos sobre ella n puntos equidistantes, con n un número natural cualquiera, construye el conjunto de tales puntos, el cual se denota por:

$$G = (a) = \left\{a^i \,\middle|\, i = 0,1,2,3,4 \ldots\right\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3 \ldots \; a^{n-1}\}$$

En este conjunto $a^0 = a^n$.

1. *Construye el conjunto (a) si $n = 3$*
2. *Elabora un dibujo del círculo unitario que coincida con la descripción del texto.*
3. *Calcula el ángulo que existe entre cada par de puntos vecinos con la fórmula:*

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} radianes$$

4. *Coloca el punto a^0 en cualquier posición sobre la circunferencia.*
5. *Para identificar la posición de los puntos a^1, a^2, a^3 ..., se mide el ángulo α a partir de a^0 en sentido contrario a las manecillas del reloj.*
   a. *a^1, una vez α.*
   b. *a^2, dos veces α.*
   c. *a^3, tres veces α. Etc...*

Tabla 5: Conjunto de puntos sobre la circunferencia

1. *Construye los siguientes conjuntos:*

Conjunto (a)	
n	Conjunto
4	
5	
6	
7	

.

4. *Conjunto de clases de equivalencia, considerando la relación de equivalencia:* $"Congruencia\ módulo\ n", con\ n = 4, 5, 6{,}7{,}8, 13, 14$

$$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \ \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{14}.$$

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

"Dos números enteros están relacionados si el número seis es un divisor de su diferencia"

$$aRb\ si\ y\ solo\ si\ 6|(\ b - a).$$

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

$[a] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{Z}|\mathrm{xR}a\}$. Donde a es el residuo de la división de x entre **6.**

- $20\ y\ 56$, están relacionados, ya que $6|(\ 56 - 20)$.
- Además $20\ y\ 56\ \in\ [2]$, ya que el residuo de dividir $\mathbf{20}$ **o 56 entre 6** es dos.

1. *Describe la relación* "congruencia módulo seis"*.*
2. *Demuestra que dicha relación es una relación de equivalencia.*
3. *Identifica la clase de equivalencia en que se encuentran los siguientes números:*

NÚMERO	1785	2923	3210	4888	4440	4666	2238	3077	4807	3340
CLASE										

4. *¿Cuáles se encuentran en la misma clase de equivalencia?*
5. *¿Cuántas clases de equivalencia se forman con esta relación?*
6. *Construye el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo seis* $\mathbb{Z}_6$*.*

Tabla 6: Congruencia módulo 6

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

“Dos números enteros están relacionados si el número tres es un divisor de su diferencia”
$aRb \text{ } si \text{ } y \text{ } solo \text{ } si \text{ } 7|(\, b - a)$.

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

$[a] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{Z} | \mathrm{xR}a\}$. Donde a es el residuo de la división de x entre **7.**

- $4220 \; y \; 2652$, están relacionados, ya que $7|(4220 - 2652)$.
- Además $4220 \; y \; 2652 \; \in \; [6]$, ya que el residuo de dividir $4220 \; o \; 2652$ **entre 7** es seis.

1. *Describe la relación* “congruencia módulo siete”*.*
2. *Demuestra que dicha relación es una relación de equivalencia.*
3. ***3.*** *Identifica la clase de equivalencia en que se encuentran los siguientes números:*

NÚMERO	3714	3776	1829	2002	1081	1820	1781	3709	3055	4977
CLASE										

4. *¿Cuáles de ellos se encuentran en la misma clase de equivalencia?*
5. *¿Cuántas clases de equivalencia se forman con esta relación?*
6. *Construye el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo siete* $\mathbb{Z}_7$*.*

Tabla 7: Congruencia módulo 7

TAREA: CONJUNTOS DE CLASES DE EQUIVALENCIA, PARA LA CONGRUENCIA MÓDULO n

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

"Dos números enteros están relacionados si el número n es un divisor de su diferencia"

aRb *si y solo si* $n|(b-a)$.

Las clases de equivalencia se determinan:

- $[a]=\{x\in\mathbb{Z}|xRa\}$. Donde a es el residuo de la división de x entre n.
- Se denota $\mathbb{Z}_n=\{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$ al conjunto de las clases de equivalencia *módulo* n

Construye los siguientes conjuntos:

Nombre.	Conjunto
$\mathbb{Z}_4$	
$\mathbb{Z}_5$	
$\mathbb{Z}_8$	
$\mathbb{Z}_{13}$	
$\mathbb{Z}_{14}$	

.

Tabla 8: Tarea: Construcción de conjuntos con la congruencia módulo n

5. *Conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número* $n, con\ n = 6,7,9,10,11,12,13$

$$\mathbb{U}_6\ ,\ \mathbb{U}_7,\ \mathbb{U}_9\ ,\ \mathbb{U}_{10},\ \mathbb{U}_{11}\ ,\ \mathbb{U}_{12},\ \mathbb{U}_{13}\ ,\ \mathbb{U}_{14}.$$

"$\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}} = \{[\boldsymbol{a}] \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{6}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] \mid \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 6}\}$" Objetivo: El alumno construirá el conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número 6. En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*: "Dos números enteros están relacionados si el número seis es un divisor de su diferencia" $aRb\ si\ y\ solo\ si\ 6 \mid (\ b - a)$. Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan: $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], \dots, [5]\}$ $\mathbb{U}_{\boldsymbol{6}} = \{[\boldsymbol{a}] \in \mathbb{Z}_6 \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] \in \mathbb{Z}_6 \mid \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ n}\}$ *De todas las clases de equivalencia del conjunto* $\mathbb{Z}_6$ *, selecciona aquellas cuyo representante cumple* $(a, 6) = 1$ *, es decir aquellos que son primos relativos con el número trece.* *Construye el conjunto* $\mathbb{U}_{\boldsymbol{6}}$

*Tabla 9: Conjunto de clases de equivalencia de primos relativos con **6***

"$\mathbb{U}_{\mathbf{14}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \mathbf{14}) = \mathbf{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ } \mathbf{14}\}$"

Objetivo: El alumno construirá el conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número 14.

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

"Dos números enteros están relacionados si el número tres es un divisor de su diferencia"
$aRb\ si\ y\ solo\ si\ 14|(\ b - a)$.

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

$[a] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{Z} | \mathrm{xR}a\}$. Donde a es el residuo de la división de x entre **14.**

1. *Construye el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo trece* $\mathbb{Z}_{14}$.
2. *De todas las clases de equivalencia del conjunto* $\mathbb{Z}_{14}$ *, selecciona aquellas cuyo representante cumple* $(a, 14) = 1$ *, es decir aquellos que son primos relativos con el número trece.*
3. *Construye el conjunto* $\mathbb{U}_{\mathbf{14}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \mathbf{14}) = \mathbf{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ } \mathbf{14}\}$

Considerando que $\varphi(n)$ *representa el número de elementos del conjunto* $\mathbb{U}_n$*, calcula* $\varphi(14)$

Tabla 10: Conjunto de clases de equivalencia de primos relativos con 14

Los conjuntos construidos son:

1. *Conjuntos de simetrías del* D_4^* *y* D_3^*.
2. *Conjuntos de puntos sobre una circunferencia:*

$G = (a) = \{a^i | i = 0,1,2\}$, $\{a^i | i = 0,1,2,3\}$, $\{a^i | i = 0,1,2,3,4\}$, $\{a^i | i = 0,1,2,3,4,5\}$, $\{a^i | i = 0,1,2,3,4,5,6\}$.

3. *Conjunto de clases de equivalencia,* "$Congruencia\ módulo\ n$".

$$\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_5,\ \mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_7,\ \mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_{13},\ \mathbb{Z}_{14}.$$

4. *Conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número* n

$$\mathbb{U}_6 \ , \ \mathbb{U}_7, \ \mathbb{U}_9 \ , \ \mathbb{U}_{10}, \ \mathbb{U}_{11} \ , \ \mathbb{U}_{12}, \ \mathbb{U}_{13} \ , \ \mathbb{U}_{14}.$$

Nota: Las indicaciones que se proponen para la construcción, y que aparecen en la sesión del alumno se incluyen como anexos.

Después de haber construido los conjuntos, se pretende que el alumno observe las relaciones que existen entre ellos, ya sea de similitud, diferencia o inclusión, de tal manera que surjan redes externas de conocimiento, se pretende que el alumno elabore un escrito en el cual enmarque las relaciones existentes entre los conjuntos.

Para los conjuntos:

Simetrías del cuadrado	$\longleftrightarrow$	Simetrías del triángulo	$\longleftrightarrow$	Puntos sobre una circunferencia de radio unitario y de centro en el origen de un sistema cartesiano.

- *Existen relaciones de similitud, ya que los tres son generados a partir de manipulación con figuras geométricas.*
- *Los dos primeros constan tanto de rotaciones como de reflexiones.*
- *El tercer conjunto está formado por rotaciones, por lo que se puede observar que existe una relación de diferencia con los dos primeros.*

Mientras que para el siguiente par de conjuntos:

Clases de equivalencia formadas con la congruencia módulo n	$\longleftrightarrow$	Clases de equivalencia modulo n cuyo representante es un primo relativo de un número dada.

- *Similitud: Ambos conjuntos se construyen con base en relaciones de congruencia* $\textit{módulo } n$
- *Diferencia: El representante de las clases de equivalencia es distinto en ambos casos.*

3.4.4. Presentación de contenidos.

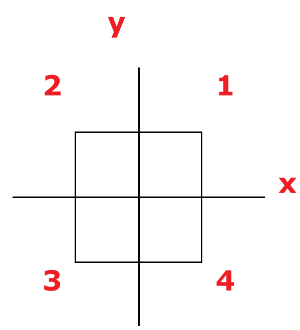
Al término del desarrollo de la Actividad de Inducción, el estudiante accede a los contenidos del curso, en esta UMA se presentan los conjuntos previamente construidos, en los cuales se define una operación binaria y posteriormente se analizan las posibles propiedades que cumple tal operación. Se anexan las tareas para la presentación de contenidos.

Para cada uno de los conjuntos construidos, se elaboró la siguiente secuencia de tareas:

1. *Se enlistan los elementos del conjunto, en algunos casos se realiza una descripción de cada uno de ellos.*

EL GRUPO DE SIMETRÍAS DEL CUADRADO.

Considera el cuadrado con vértices numerados consecutivamente, su centro en el origen de coordenadas y cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos.



Sea $D_4^* = \{R_1, R_2, R_3, e, T_x, T_y, T_{13}, T_{24}\}$ el conjunto de "simetrías "de éste cuadrado. Recuerda que el conjunto ya se construyó en la primera unidad.

R_1	Rotación de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
R_2	Rotación de 180° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
R_3	Rotación de 270° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
e	Rotación de 360° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
T_x	Reflexión sobre el eje horizontal.
T_y	Reflexión sobre el eje vertical.
T_{13}	Reflexión sobre la diagonal de los vértices 1 y 3.
T_{24}	Reflexión sobre la diagonal de los vértices 2 y 4.

Tabla 11: Grupo de simetrías del cuadrado

2. *Se define una operación en el conjunto.*

En D_4^* se define la función $f: D_4^* \to D_4^*$ de la siguiente manera $f(U,V) = U \circ V$, en la cual $U \circ V$ Significa que "se aplica la transformación V y posteriormente se aplica la transformación U". Esta función define una operación en D_4^* que se denomina una composición de transformaciones.

3. *Los resultados de operar los elementos del conjunto son colocados en un arreglo matricial.*

"Tabla de composición de D_4^*".

$\circ$	e	R_1	R_2	R_3	T_{13}	T_{24}	T_x	T_y
e	e	R_1	R_2	R_3	T_{13}	T_{24}	T_x	T_y
R_1	R_1	R_2	R_3	e	T_y	T_x	T_{13}	T_{24}
R_2	R_2	R_3	e	R_1	T_{24}	T_{13}	T_y	T_x
R_3	R_3	e	R_1	R_2	T_x	T_y	T_{24}	T_{13}
T_{13}	T_{13}	T_x	T_{24}	T_y	e	R_2	R_1	R_3
T_{24}	T_{24}	T_y	T_{13}	T_x	R_2	e	R_3	R_1
T_x	T_x	T_{24}	T_y	T_{13}	R_3	R_1	e	R_2
T_y	T_y	T_{13}	T_x	T_{24}	R_1	R_3	R_2	e

4. *En un archivero, se presentan las cinco posibles propiedades de la operación y se describe cada una de ellas.*

CERRADURA	ASOCIATIVA	EXISTENCIA DE NEUTRO	EXISTENCIA DE INVERSOS	CONMUTATIVA
Texto 1.	Texto 2.	Texto 3.	Texto 4.	Texto 5.

Al seleccionar, leerá los siguientes textos, dependiendo de la casilla que elija.

- ***Texto 1***: *Al operar cualquier par de elementos del conjunto se obtiene como resultado otro elemento del mismo*

$$Para\ cualquier\ pareja\ U, V \in D_4^*, el\ elemento\ U \circ V \in D_4^*.$$

- ***Texto 2***. *Esta propiedad permite operar tres elementos en una operación binaria*

$$Para\ los\ elementos\ \ U, V\ y\ W\ \in D_4^*, se\ cumple\ \ U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$$

- ***Texto 3***. *Existe un único elemento en el conjunto* D_4^* *tal que:*

$$Para\ cualquier\ \ U \in D_4^*,\ \ se\ cumple\ \ U \circ e = e \circ U = U.$$

- ***Texto 4***. *Para cada elemento de* D_4^*, *existe otro en el mismo conjunto tal que :*

$$U \circ V = e$$

- ***Texto 5***. *El orden en que se opera no afecta el resultado, la operación definida en el conjunto* D_4^* *no es conmutativa.*

Tabla 12: Axiomas de grupo

5. *En cada propiedad, se escribieron recomendaciones para el diseñador, con la finalidad de que el estudiante observe en la tabla dicha propiedad, por ejemplo, para la propiedad: Existencia de inversos.*
    a. *Se resalta cualquier elemento de la columna de encabezados.*
    b. *Se sobre esa línea se ubica el elemento neutro y se resalta.*
    c. *Sobre esa columna se resalta el primer elemento y se resalta.*
    d. *Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la palabra INVERSOS.*
6. *Finalmente aparece una lista de las propiedades de esta operación.*

Esta operación cumple las siguientes propiedades:
1. *Cerradura.* 2. *Asociativa.* 3. *Existencia de neutro.* 4. *Existencia de inversos.* 5. *No es conmutativa.*

La exposición anterior se repite para los conjuntos siguientes:

- $S_3 = \{e, \phi\psi, \phi, \psi^2, \psi, \psi\phi\}$ *de funciones biyectivas de* $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}\}$ *sobre sí mismo con la composición de funciones como operación.*
- *Cíclico* $(a) = \{a^i \,|\, i = 0,1,2,3,4 \dots\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3 \dots\ a^{n-1}\}$, *cuya operación es la composición.*
- $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1][2]\}$ *de las clases de equivalencia módulo tres, con la adición de clases de equivalencia.*
- $\mathbb{U}_8 = \{[1], [3][5], [7]\}$ *de todos los números primos relativos con el ocho, con el producto de clases de equivalencia.*

3.4.5. Actividades de aprendizaje.

En el caso de la UMA "Concepto e grupo" que corresponde a la Unidad "Teoría de grupos", se proponen dos Actividades de Aprendizaje:

Actividad de Aprendizaje 1

Objetivo. Al realizar la siguiente actividad identificarás los conceptos matemáticos que componen la definición de grupo, y serás capaz de elaborar un mapa conceptual con ellos.
Tareas.

1. *Elabora una lista con los ejemplos de grupos que se proponen en la UMA1.*

Grupo	Elementos	Operación	Propiedades

2. *Realiza una investigación documental, con respecto al concepto de grupo.*
3. *Identifica los elementos que forman la definición y elabora un mapa conceptual de tales elementos.*
4. *Envía en archivo de Word con la definición de grupo y el mapa.*

Tabla 13: Actividad de aprendizaje 1

Actividad de Aprendizaje 2 "Construcción de un grupo"

Objetivo: Al realizar las siguientes tareas construirás una estructura algebraica que consta de un conjunto y una operación, así como las propiedades de ésta última.
Tareas.
Resolver cada una de las siguientes tareas.
Descarga cada una de ellas, resuélvela y envíala en el mismo formato.

1. *Grupo de simetrías del triángulo.*
2. *Grupo cíclico.*
3. *Grupo de clases de equivalencia de la congruencia* $\text{módulo } 6$.
4. *Grupo de clases de equivalencia de la congruencia* $\text{módulo } 7$.
5. *Grupo de clases de equivalencia* $\text{módulo } 6$*, cuyo representante es primo relativo con el número 5.*
6. *Grupo de clases de equivalencia* $\text{módulo } 7$*, cuyo representante es primo relativo con el número 7.*

Tabla 14: Actividad de aprendizaje 2

3.4.6. Actividad de cierre.

La *Actividad de Cierre* que se ha propuesto en esta Unidad consiste en la elaboración de una Línea de tiempo acerca de la evolución cronológica del concepto de grupo.

Objetivo. Con el desarrollo de ésta actividad conocerás la evolución cronológica de la teoría de grupos. Actividad. Observa los videos que se presentan en las siguientes dos ligas y con la información contenida en ellos elabora una "Línea de tiempo". Video. Historia de la teoría de grupos parte 1.avi http://www.youtube.com/watch?v=CRezdP2y7iI Video. Historia de la teoría de grupos parte 2.avi http://www.youtube.com/watch?v=cYfAqumFfTA

Tabla 15: Actividad de cierre

Conclusiones.

En la Universidad Autónoma de México se implementó una estrategia que tiene el propósito de ofertar el Programa MADEMS en la modalidad a distancia, dicha estrategia comprende, entre otras, las siguientes etapas:

- *Diseñar los cursos*
- *Desarrollar los cursos.*

La presente tesis tuvo como objetivo realizar el diseño instruccional, aportar los materiales didácticos y organizar las actividades de aprendizaje del curso "Avances y desarrollos en álgebra", el cual corresponde a la Optativa Disciplinaria II y que será impartido en el programa de la MADEMS en la modalidad a distancia.

Para alcanzar el objetivo, se llevó a cabo un análisis del plan de estudios del programa educativo: Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS), que oferta la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), en la modalidad presencial, con esto se obtuvo información acerca de la estructura del programa educativo, su mapa curricular y el programa de contenidos de la asignatura que sería desarrollada.

La investigación documental referente a la implementación del programa MADEMS en la modalidad a distancia, aportó datos estadísticos acerca de las características de formación de los profesores del nivel medio superior en la UNAM, en esta etapa del proyecto, también se examinó la estrategia propuesta para diseñar y desarrollar los cursos que serán implementados en línea.

Dado que la UNAM cuenta con un modelo de diseño instruccional para la elaboración de las actividades que estructuran sus cursos virtuales, la elaboración de los materiales se sustentó en el modelo institucional de referencia. El programa de contenidos en su totalidad fue desarrollado bajo éste protocolo, en el presente documento se reporta, a manera de ejemplo, una Unidad Mínima de Aprendizaje.

El diseño de las Unidades Mínimas de Aprendizaje para un curso en la modalidad no presencial, implicó la necesidad de investigar acerca de los mecanismos de aprendizaje, puesto que el docente y el estudiante mantienen una relación asíncrona, esto conlleva diferentes formas de transmisión de información. Al tratarse de una asignatura del área de matemáticas, resulta complicado no cometer el error de simplificar las tareas al planteamiento de listas de ejercicios prototipo.

En el desarrollo, se contó con el apoyo del Licenciado en Pedagogía Luis Samuel García Díaz, quien se encargó de dirigir el diseño de las tareas que serían colocadas en la plataforma correspondiente, hubo excelente comunicación, lo cual promovió la pertinencia de las unidades de aprendizaje.

Bibliografía

CUAED. (2005). *Las figuras académicas participantes en el sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia.* Ciudad de México.

CUAED. (2015). *PROYECTO DE ADECUACIÓN Y MODIFICACIÓN DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LA.*

DGAPA. (10 de 01 de 2017). *http://dgapa.unam.mx/.*

Herstein, I. N. (1988). *Álgebra Abstracta.* Ciudad de México: Grupo ditorial Iberoamérica.

Hungerford, T. W. (1989). *Algebra.* New York: Springer-Verlag.

M Albright, M. S. (2006). *Teaching and Learning at a Distance: Foundations of Distance Education.* Pearson Education Inc.

Reigeluth, C. M. (1999). *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos.* Aula XXI Santillana.

Simonson, M. Smaldino, S. Albright, M. S. Zveck. (2003). *Teaching and Learning at Distance. Foundation of Distance Education.* United States of America: Merril Prentice Hall.

Simonson, M., Smaldino, S., Albright, M., & Zvacek, S. (2003). *Foundations of Distance Education.* Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.

Smaldino, S. E. (2008). *Instructional technology and media for learning.* Upper Saddle River, N.J.: Pearson Merrill Prentice Hall.

Smaldino, S. E. (2008). *Instructional Technology and Media for Learning.* Upper Saddle River: Pearson Education, Inc.

Smaldino, S. E., Russell, J. D., Heinich, R., & Molenda, M. (2005). *Instruccional Technology and Media for Learning.*

UNAM. (2014). *Posgrado.unam.mx*.

UNAM. (2014). *www.posgrado.unam.madems*.

UNAM. (2014). *www.posgrado.unam.mx*. Recuperado el 2014, de www.posgrado.unam.mx.

UNAM. (2014). *www.posgrado.unam.mx/madems*.

Vázquez, Sierra, F. J., Weber, J. B., Contreras, G. O., & Romero., R. M. (2005). Desarrollo a distancia de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). *Revista Iberoamericana de Educación a distancia, 8*(1-2), 291-306.

Anexos.

El programa del curso “Avances en el desarrollo del Álgebra”, en la modalidad presencial.

OPTATIVA DISCIPLINARIA II (AVANCES Y DESARROLLOS EN ÁLGEBRA)	
NÚMERO DE CRÉDITOS:	8
UBICACIÓN CURRICULAR:	Primer semestre
LÍNEA DE FORMACIÓN:	Disciplinaria
MODALIDAD:	Seminario de un paquete de optativas
OBJETIVOS GENERALES:	Mostrar capacidad para realizar estudios profundos en algún área de las Matemáticas, lo cual le permitirá al alumno tener una visión del quehacer matemático, visión que es necesaria para poder orientar y transmitir los conocimientos matemáticos a sus futuros estudiantes.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:	• *Comprender las técnicas del álgebra moderna y utilizarlas en casos sencillos.* • *Conocer las diferentes estructuras algebraicas así como los resultados principales de la teoría de Galois.*

CONTENIDOS TEMÁTICOS:

1. Introducción	*1.1. Axiomas de campos.* *1.2. Ejemplos de campos* *1.3. Anillos de polinomios con coeficientes en un campo.*
2. Anillos conmutativos	*2.1. Axiomas de anillos* *2.2. Homomorfismos* *2.3. Ideales y anillos cociente* *2.4. Divisores de cero y dominios enteros* *2.5. Anillos euclidianos* *2.6. Dominios de factorización única.* *2.7. Anillos de polinomios.* *2.8. Polinomios sobre el campo de los racionales*
3. Grupos	*7.1. Axiomas de grupos* *7.2. Ejemplos de grupos*

		7.3. Subgrupos
		7.4. Subgrupos normales y grupos cocientes
		7.5. Homomorfismos
		7.6. Automorfismos
		7.7. Grupos de permutaciones
		7.8. Teorema de Sylow
8. Campos	*.4.*	*Extensiones de campos*
	.5.	*Raíces de polinomios*
	.6.	*Construcciones con regla y compass*
	.7.	*Elementos de la teoría de Galois*
	.8.	*Solubilidad por radicals*

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA:	Algunos de los temas serán expuestos por los estudiantes quienes deberán resolver gran cantidad de problemas y ejercicios
EVALUACIÓN:	Se evaluará mediante tareas, participación en clase y exámenes.

Unidades de Aprendizaje y secuencia de objetivos de la instrucción.

Unidades de aprendizaje	Descripción	Objetivo
Conceptos Preliminares	*En esta unidad se realiza una revisión de conceptos básicos de teoría de conjuntos, relaciones, funciones y números enteros, tales como conjunto, operaciones entre conjuntos, relaciones de equivalencia, división de enteros y congruencias $\text{módulo } n$.*	*El alumno aplicará conocimientos de Teoría de conjuntos, Funciones y Números enteros, en la construcción de conjuntos finitos e infinitos determinados.*
Teoría de Grupos.	*Se presentan ejemplos de grupos finitos, con la finalidad de construir los conceptos de grupo y grupo conmutativo, posteriormente se analizan los resultados fundamentales de la teoría de grupos.*	*El alumno será capaz de elaborar un mapa conceptual cuyo tema sea el concepto de grupo. Así mismo construirá la operación que determina algunos grupos finitos e identificará las propiedades que se cumplen en ella.*
Anillos.	*Se define una segunda operación en algunos de los grupos de la unidad anterior y se analizan sus propiedades, para construir una estructura algebraica con dos operaciones. Se ejemplifica éste tipo de estructura con los Números Enteros.*	*El estudiante comprenderá las propiedades de estructuras algebraicas con dos operaciones, tales como: Anillo, Dominio Entero y Anillo Euclidiano, a partir de la definición de grupo.*
Campos.	*Considerando los ejemplos de Anillos presentados en la unidad correspondiente, se escala al concepto de Campo.*	*Comprenderá las propiedades de la estructura algebraica denominada Campo, y la conceptualizará como una extensión de la estructura de Anillo.*

Unidades didácticas

- *Unidades de Aprendizaje (UA).*
- *Unidades Mínimas de Aprendizaje (UMA).*

Análisis de tareas de cada unidad de aprendizaje

- *Contenidos que deberán ser aprendidos.*
- *Acción intelectual que se requiere.*
- *Unidades Mínimas de Aprendizaje (UMA).*
- *Tipo de contenidos de acuerdo con la taxonomía propuesta: conocimiento factual, conceptual, de principios y procedimientos.*

Unidad de Aprendizaje	Objetivo	Nivel de conocimiento
Conceptos Preliminares	El alumno aplicará conocimientos de Teoría de conjuntos, Funciones y Números enteros, en la construcción de conjuntos finitos e infinitos determinados.	Modelo acerca de la construcción de conjuntos finitos e infinitos. Estructura de los Números Enteros, así como las congruencias módulo n.
Teoría de Grupos	El alumno será capaz de elaborar un mapa conceptual cuyo tema sea el concepto de grupo. Así mismo construirá la operación que determina algunos grupos finitos e identificará las propiedades que se cumplen en ella.	Identificar las propiedades de una operación definida en un conjunto particular. Concepto de la estructura de grupo y grupo conmutativo.
Teoría de Anillos	A partir de la definición de grupo y de ejemplos específicos de grupos, comprenderá las propiedades de estructuras algebraicas con dos operaciones, tales como: Anillo, Dominio Entero y Anillo Euclidiano.	Propiedades algebraicas de la estructura con dos operaciones denominada Anillo.
Teoría de Campos	Comprenderá las propiedades de la estructura algebraica denominada Campo, y la conceptualizará como una extensión de la estructura de Anillo.	Propiedades algebraicas de la estructura con dos operaciones denominada Campo.

UNIDAD I	UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE	CONTENIDOS
V. CONCEPTOS PRELIMINARES	*2.7. Teoría de conjuntos*	• *Introducción a la teoría de conjuntos.* • *Álgebra de conjuntos.* • *Ejemplos de conjuntos finitos.*
	2.8. Relaciones.	• *El producto de conjuntos.* • *Relaciones binarias y su representación.* • *Relaciones y clases de equivalencia.*
	2.9. Funciones y operaciones	• *El concepto Función.* • *Una clasificación de funciones.*
	2.10. Aplicaciones biyectivas.	• *El concepto de Función Biyectiva.* • *El conjunto A(S) de aplicaciones biyectivas de un conjunto sobre sí mismo.*
	2.11. Números Enteros.	• *El algoritmo de la división.* • *Divisibilidad en los números enteros.* • *Congruencia* $módulo\ 3.$ • *El conjunto* $\mathbb{Z}_n$ • *Máximo Común Divisor.* • *El conjunto* $\mathbb{U}_n$

UNIDAD II	UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE	CONTENIDOS
VI. TEORÍA DE GRUPOS	*3.1. Grupo*	• *Definiciones.* • *Grupo de Simetrías del cuadrado.* • *Grupo* S_3 *de permutaciones del conjunto* $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ • *Grupo Cíclico* (a) • *Grupos aditivos numéricos:* $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ • *Congruencia* $módulo\ n$ *y el grupo* $\mathbb{Z}_n$. • *Congruencia* $módulo\ n$ *y el grupo* $\mathbb{U}_n$.
	3.2. Subgrupos.	• *Construcción de subgrupos.*
	3.3. Teorema de Lagrange.	• *Clases laterales.* • *Congruencia* $módulo\ H$, *para subgrupo* H • *El grupo Cociente.* • *Orden de un subgrupo.*
	3.4. Teorema de Euler.	• *Orden en grupos aditivos o multiplicativos.* • *Función de Euler.* • *Teorema de Euler.* • *Corolario de Fermat.*
	3.5. Subgrupos Normales.	• *Clases laterales Izquierdas.* • *Clases Laterales Derechas.* • *Subgrupos Normales.* • *Grupo Cociente.*
	3.6. Homomorfismos	• *Funciones inyectivas y suprayectivas.* • *Homomorfismos, Monomorfismos, Epimorfismos, Isomorfismos, Endomorfismos, Automorfismos.* • *Nucleo e Imagen.*

UNIDAD III	UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE	CONTENIDOS
VII. ANILLOS	*3.7. Anillo y sus axiomas*	• *Axiomas de Anillo.* • *Anillo con unidad, Anillo conmutativo.*
	3.8. Dominio entero.	• *Anillo conmutativo.* • *Divisores de cero.* • *Estudio del Anillo* $\mathbb{Z}_n$
	3.9. Anillo con División.	• *Anillo con unidad.* • *Inversos multiplicativos* • *Estudio del anillo conmutativo* $\mathbb{Z}_n$
	3.10. Ideales y Anillo Cociente.	• *Ideales.* • *El Anillo cociente.* • *El anillo de los números enteros* $\mathbb{Z}$
	3.11. Anillo Euclidiano.	• *El algoritmo de la División.* • *El anillo Euclidiano de los números enteros* $\mathbb{Z}$*.* • *Divisibilidad.*
	3.12. Anillo de Polinomios.	• *Polinomios.* • *Operaciones entre polinomios.* • *El Anillo de polinomios sobre un campo.* • *El algoritmo de la División.*

UNIDAD IV	UNIDADES MÍNIMAS DE APRENDIZAJE	CONTENIDOS
VIII. CAMPOS.	*9. Axiomas de campo.*	• *Concepto de Campo.* • *Estudio del anillo conmutativo* $\mathbb{Z}_n$ • *Ejemplos de Campos Numéricos.*
	10. El campo de los números Racionales.	• *El campo de los Números Racionales.* • *Operaciones con Números Racionales.*
	11. Polinomios en el campo de los Números Racionales.	• *Polinomios en el campo de los Números Racionales.* • *Criterio de Eisenstein para polinomios irreductibles.*
	12. Extensión de Campos.	• *Campos de Extensión.*
	13. El campo de los Números Complejos.	• *Concepto de Número Complejo.* • *Operaciones con números complejos.*

Actividades de Inducción.

BLOQUE INDUCCIÓN.

“CONJUNTO DE SIMETRÍAS DEL CUADRADO”

Consigna:

“Considera el cuadrado con vértices numerados consecutivamente 1,2,3,4, centrado en el origen del plano cartesiano, y de lados paralelos a los ejes. Sea D_4^* el conjunto de “transformaciones” del cuadrado, por ejemplo:

- R_1 *es la rotación de 90°.*
- R_3 *es la rotación de 270° ambas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.*
- T_x *es una reflexión en torno al eje “x”.*
- T_{13} *es una reflexión en torno a la diagonal que conecta los vértices 1 con 3.*

Nótese que cada $U \in D_4^*$, es una biyección del cuadrado sobre sí mismo*”* (Hungerford, 1989).

1. *Elabora un esquema del cuadrado que coincida con la descripción del texto del ejemplo.*
2. *Observa la animación que se presenta en la liga denominada “simetrías del cuadrado”*
3. *Describe todas las “transformaciones” del cuadrado.*
4. *Construye el conjunto* D_4^*
5. *Elabora un enunciado que describa las características genéricas de los elementos de* D_4^*

Tabla 16: Actividad de inducción, simetrías del cuadrado

BLOQUE INDUCCIÓN.

"CONJUNTO DE SIMETRÍAS DEL TRIÁNGULO"

Nombre: Evaluación:

Objetivo: Tomando como modelo la construcción del conjunto de simetrías del cuadrado, el alumno construirá en conjunto de simetrías del triángulo.

Actividad: Revisa la construcción del conjunto de simetrías del cuadrado, y construye el conjunto de simetrías del triángulo equilátero D_3^*.

1. *Dibuja un triángulo equilátero en una cartulina.*
2. *Recorta la figura dibujada y enumera los vértices del uno al tres.*
3. *Describe todas las "transformaciones" o movimientos del triángulo sobre sí mismo, por ejemplo.*
    a. *Toma la figura recortada y desde una posición inicial, realiza una rotación de* $120°$ *en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj.*
    b. *Toma la figura recortada y desde una posición inicial, realiza una reflexión en torno al vértice que marcaste con el número uno, invirtiendo solamente los otros dos vértices.*
4. *Denota cada transformación, de manera análoga a la designación que se dio en la construcción de* D_4^*.
5. *Construye el conjunto* D_3^*
6. *Elabora un video que registre tu actividad y envíalo a tu portafolio de evidencias.*

Tabla 17: Actividad de inducción, simetrías del triángulo

BLOQUE INDUCCIÓN.

CONJUNTO DE PUNTOS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO EN EL ORIGEN DE UN SISTEMA CARTESIANO

Objetivo: Tomando como modelo la construcción del conjunto cíclico de cinco elementos, el alumno construirá el conjunto de tres elementos.

Dada la circunferencia $"S"$ en el plano, ubicamos sobre ella n puntos equidistantes, con n un número natural cualquiera, construye el conjunto de tales puntos, el cual se denota por:

$$G = (a) = \{a^i \mid i = 0,1,2,3,4 \dots\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3 \dots \; a^{n-1}\}$$

En este conjunto $a^0 = a^n$.

1. *Construye el conjunto* (a) *si* $n = 3$
2. *Elabora un dibujo del círculo unitario que coincida con la descripción del texto.*
3. *Calcula el ángulo que existe entre cada par de puntos vecinos con la fórmula:*

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} radianes$$

4. *Coloca el punto* a^0 *en cualquier posición sobre la circunferencia.*
5. *Para identificar la posición de los puntos* $a^1, a^2, a^3 \dots,$ *se mide el ángulo* α *a partir de* a^0 *en sentido contrario a las manecillas del reloj.*
   a. a^1, *una vez* α.
   b. a^2, *dos veces* α.
   c. a^3, *tres veces* α. *Etc…*

Tabla 18: Actividad de inducción, grupo cíclico

BLOQUE INDUCCIÓN.

CONJUNTOS DE PUNTOS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO EN EL ORIGEN DE UN SISTEMA CARTESIANO

Objetivo: Tomando como modelo la construcción del conjunto cíclico, el alumno construirá conjuntos cíclicos.

Dada la circunferencia $"S"$ en el plano, ubicamos sobre ella n puntos equidistantes, con n un número natural cualquiera, se denota al conjunto de tales puntos como:

$$G = (a) = \{a^i \mid i = 0,1,2,3,4 \dots\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3 \dots\ a^{n-1}\}$$

En este conjunto $a^0 = a^n$.

1. *Construye los siguientes conjuntos:*

Conjunto (a)	
n	Conjunto
4	
5	
6	
7	

Tabla 19: Actividad de inducción, grupo cíclico

BLOQUE INDUCCIÓN.

CONJUNTO DE CLASES DE EQUIVALENCIA, PARA LA CONGRUENCIA MÓDULO 6

Objetivo: El alumno construirá los conjuntos de clases de equivalencia módulo seis.

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

“Dos números enteros están relacionados si el número tres es un divisor de su diferencia”
$aRb \text{ si y solo si } 6|(b-a)$.

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

$[\square] = \{x \in \mathbb{Z} | xR\square\}$. Donde □ es el residuo de la división de □ entre **6.**

- *20 y 56, están relacionados, ya que $6|(56-20)$.*
- *Además 20 y $56 \in [2]$, ya que el residuo de dividir **20 o 56 entre 6** es dos.*

6. *Describe la relación “congruencia módulo seis”.*
7. *Demuestra que dicha relación es una relación de equivalencia.*
8. ***8.*** *Identifica la clase de equivalencia en que se encuentran los siguientes números:*

NÚMERO	1785	2923	3210	4888	4440	4666	2238	3077	4807	3340
CLASE										

9. *¿Cuáles se encuentran en la misma clase de equivalencia?*
10. *¿Cuántas clases de equivalencia se forman con esta relación?*
11. *Construye el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo seis $\square_6$.*

Tabla 20: Actividad de inducción, Clases de equivalencia, congruencia módulo 6

BLOQUE INDUCCIÓN.

CONJUNTO DE CLASES DE EQUIVALENCIA, PARA LA CONGRUENCIA MÓDULO 7

Objetivo: El alumno construirá el conjunto de clases de equivalencia módulo siete.

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

"Dos números enteros están relacionados si el número tres es un divisor de su diferencia"
$aRb\ si\ y\ solo\ si\ 7|(\,b-a)$.

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

$$[a]=\{\mathrm{x}\in\mathbb{Z}|xRa\}.\text{ Donde } a \text{ es el residuo de la división de x entre } \mathbf{7}.$$

- *4220 y 2652 , están relacionados, ya que $7|(4220-2652)$.*
- *Además 4220 y $2652\ \in\ [6]$, ya que el residuo de dividir 4220 o 2652 **entre 7** es seis.*

12. *Describe la relación "congruencia módulo siete".*
13. *Demuestra que dicha relación es una relación de equivalencia.*
14. ***14.*** *Identifica la clase de equivalencia en que se encuentran los siguientes números:*

NÚMERO	3714	3776	1829	2002	1081	1820	1781	3709	3055	4977
CLASE										

15. *¿Cuáles de ellos se encuentran en la misma clase de equivalencia?*
16. *¿Cuántas clases de equivalencia se forman con esta relación?*
17. *Construye el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo siete $\mathbb{Z}_7$.*

Tabla 21: Clases de equivalencia, congruencia módulo 7

BLOQUE INDUCCIÓN.

CONJUNTOS DE CLASES DE EQUIVALENCIA, PARA LA CONGRUENCIA MÓDULO n

Objetivo: El alumno construirá conjuntos de clases de equivalencia $Congruencia\ módulo\ n$

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

"Dos números enteros están relacionados si el número tres es un divisor de su diferencia"
$aRb\ si\ y\ solo\ si\ n|(\ b - a)$.

Las clases de equivalencia se determinan:

- $[a] = \{x \in \mathbb{Z}|xRa\}$. *Donde* a *es el residuo de la división de* x *entre* n.
- *Se denota* $\mathbb{Z}_n = \{[0],[1],[2],\dots,[n-1]\}$ *al conjunto de las clases de equivalencia* $módulo\ n$

2. *Construye los siguientes conjuntos:*

Nombre.	Conjunto
$\mathbb{Z}_4$	
$\mathbb{Z}_5$	
$\mathbb{Z}_8$	
$\mathbb{Z}_{13}$	
$\mathbb{Z}_{14}$	

Tabla 22: Clase de equivalencia, congruencia módulo n

BLOQUE INDUCCIÓN.

"$\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{6}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 6}\}$"

Objetivo: El alumno construirá el conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número 6.

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

"Dos números enteros están relacionados si el número seis es un divisor de su diferencia"
$aRb\ si\ y\ solo\ si\ 6|(\ b - a)$.

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

- $[a] = \{a \in \mathbb{Z} | xRa\}$. *Donde a es el residuo de la división de x entre **6.***
- $\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ n}\}$

1. *De todas las clases de equivalencia del conjunto $\mathbb{Z}_6$, selecciona aquellas cuyo representante cumple $(a, 6) = 1$, es decir aquellos que son primos relativos con el número trece.*
2. *Construye el conjunto* $\mathbb{U}_{\boldsymbol{6}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{6}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 6}\}$

Tabla 23: Conjuntos de clases de primos relativo con 6

BLOQUE INDUCCIÓN.

“$\mathbb{U}_{\mathbf{14}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \mathbf{14}) = \mathbf{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ } \mathbf{14}\}$”

Objetivo: Tomando como modelo la construcción del conjunto de clases de equivalencia módulo catorce, el alumno construirá los conjuntos de clases de equivalencia módulo cinco, seis y siete.

En el conjunto de números enteros, se define la relación *R*:

“Dos números enteros están relacionados si el número catorce es un divisor de su diferencia” $aRb\ si\ y\ solo\ si\ 14|(\ b - a)$.

Esta relación es una relación de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva, las clases de equivalencia se determinan:

$[a] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{Z} | \mathrm{xR}a\}$. Donde a es el residuo de la división de $x$entre **14.**

1. *Construye el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo trece* $\mathbb{Z}_{14}$.
2. *De todas las clases de equivalencia del conjunto* $\mathbb{Z}_{14}$ *, selecciona aquellas cuyo representante cumple* $(a, 14) = 1$ *, es decir aquellos que son primos relativos con el número catorce.*
3. *Construye el conjunto* $\mathbb{U}_{\mathbf{14}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \mathbf{14}) = \mathbf{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ } \mathbf{14}\}$
4. *Considerando que* $\varphi(n)$ *representa el número de elementos del conjunto* $\mathbb{U}_n$*, calcula* $\varphi(14)$

Tabla 24: Conjuntos de clases de primos relativo con 14

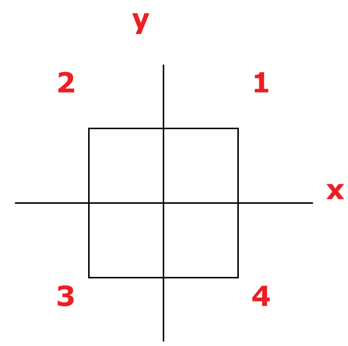
Presentación de Contenidos

Tabla 25: El grupo de simetrías del cuadrado.

UMA 1

1. EL GRUPO DE SIMETRÍAS DEL CUADRADO.

Considera el cuadrado con vértices numerados consecutivamente, su centro en el origen de coordenadas y cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos.



Sea $D_4^* = \{R_1, R_2, R_3, e, T_x, T_y, T_{13}, T_{24}\}$ el conjunto de "simetrías" de éste cuadrado.

Recuerda que el conjunto ya se construyó en la primera unidad.

Recurso: archivero

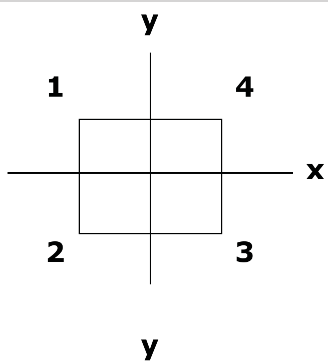
R_1	Rotación de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
R_2	Rotación de 180° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
R_3	Rotación de 270° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
e	Rotación de 360° en sentido contrario a las manecillas del reloj.
T_x	Reflexión sobre el eje horizontal.
T_y	Reflexión sobre el eje vertical.
T_{13}	Reflexión sobre la diagonal de los vértices 1 y 3.
T_{24}	Reflexión sobre la diagonal de los vértices 2 y 4.

En D_4^* se define la función $f: D_4^* \to D_4^*$ de la siguiente manera $f(U,V) = U \circ V$, en la cual $U \circ V$ Significa que "se aplica la transformación V y posteriormente se aplica la transformación U". Esta función define una operación en D_4^* que se denomina una composición de transformaciones.

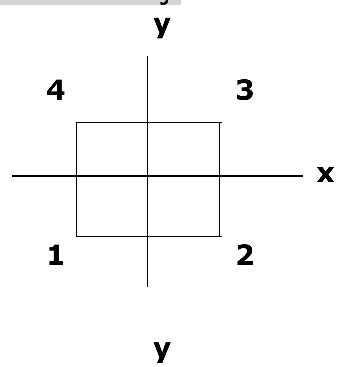
En virtud de que D_4^* es finito, es posible elaborar todas las composiciones entre sus elementos, por ejemplo:

Animación. Aplicar movimiento a cada una de las transformaciones del cuadrado.
A1 y A2. Giro del cuadrado $90°$ en sentido inverso a las manecillas del reloj.

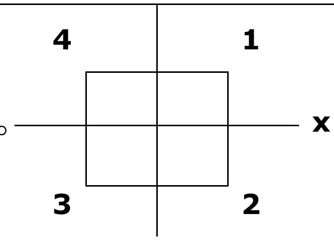
$R_1 \circ R_1 =$ $R_1 \circ$

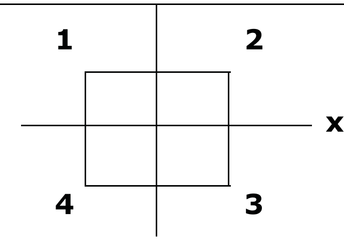


=



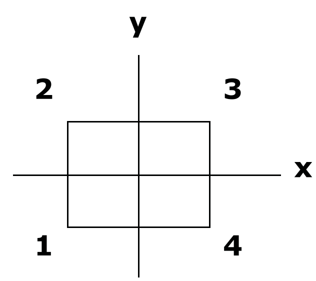
= R_2

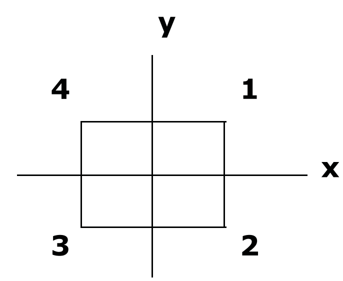
$R_1 \circ T_{13} =$ $R_1 \circ$ 

$=$ 

$= T_y$

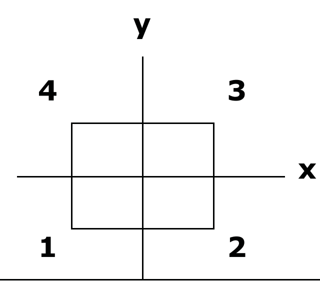
A3. Giro del cuadrado $180°$ en sentido inverso a las manecillas del reloj.

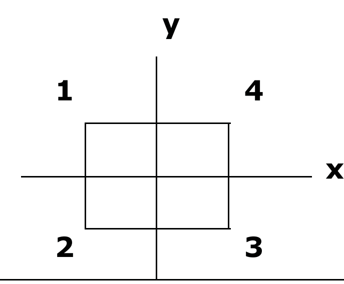
$R_2 \circ T_{24} =$ $R_2 \circ$ 

$=$ 

$= T_{13}$

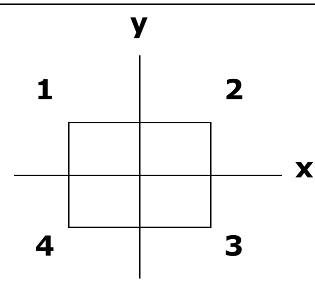
A4 y A5. Giro del cuadrado $270°$ en sentido inverso a las manecillas del reloj.

$R_3 \circ R_2 =$ $R_3 \circ$ 

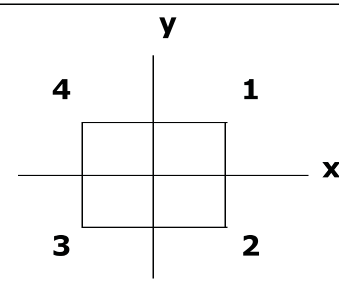
$=$ 

$= R_1$

$R_3 \circ T_y = \quad R_3 \circ$



$=$



$= T_{13}$

Las demás operaciones se realizan de forma análoga.

TABLA CON LAS OPERACIONES.

"Tabla de composición de D_4^*".

$\circ$	e	R_1	R_2	R_3	T_{13}	T_{24}	T_x	T_y
e	e	R_1	R_2	R_3	T_{13}	T_{24}	T_x	T_y
R_1	R_1	R_2	R_3	e	T_y	T_x	T_{13}	T_{24}
R_2	R_2	R_3	e	R_1	T_{24}	T_{13}	T_y	T_x
R_3	R_3	e	R_1	R_2	T_x	T_y	T_{24}	T_{13}
T_{13}	T_{13}	T_x	T_{24}	T_y	e	R_2	R_1	R_3
T_{24}	T_{24}	T_y	T_{13}	T_x	R_2	e	R_3	R_1
T_x	T_x	T_{24}	T_y	T_{13}	R_3	R_1	e	R_2
T_y	T_y	T_{13}	T_x	T_{24}	R_1	R_3	R_2	e

Propiedades de la operación.

Recurso: archivero

CERRADURA	ASOCIATIVA	EXISTENCIA DE NEUTRO	EXISTENCIA DE INVERSOS	CONMUTATIVA
Texto 1.	Texto 2.	Texto 3.	Texto 4.	Texto 5.

Visible la "Tabla de composición de D_4^*"

Texto: visible.

Consulta la "Tabla de composición de D_4^*"

$$D_4^* = \{R_1, R_2, R_3, e, T_x, T_y, T_{13}, T_{24}\}$$

- Texto 1. Al operar cualquier par de elementos del conjunto D_4^* se obtiene como resultado otro elemento del mismo. $Para\ cualquier\ pareja\ U, V \in D_4^*, el\ elemento\ U \circ V \in D_4^*.$

Animación:

1. Se resalta el elemento R_3 en la columna de encabezados (primera columna).
2. Se resalta el elemento T_{13} en la fila de encabezados (primera fila).
3. Se resalta el elemento T_x la intersección de la fila y columna correspondientes a los elementos resaltados.

4. Se resalta el elemento T_x en el conjunto D_4^*.

- Texto 2. Esta propiedad permite operar tres elementos en una operación binaria.

  $Para\ los\ elementos\ U, V\ y\ W\ \in D_4^*,\ se\ cumple\ U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$

Animación:
Con un color específico (rojo).

1. Se resaltan los elementos T_{13} en la columna de encabezados y T_x en la fila de encabezados.
2. Se resalta el elemento R_1 la intersección de la fila y columna correspondientes.
3. Se resalta R_1 en la fila de encabezados, simultáneamente con el punto anterior.
2. Se resalta T_{24} en la columna de encabezados.
4. Se resalta el elemento T_y la intersección de la fila y columna correspondientes a R_1 y T_{24}.

Con un color diferente (azúl).

4. Se resaltan los elementos T_{24} en la columna de encabezados y T_{13} en la fila de encabezados.
5. Se resalta el elemento R_2 la intersección de la fila y columna correspondientes y en la columna de encabezados.
6. Se resaltan los elementos R_2 en la columna de encabezados y T_x en la fila de encabezados.
7. Se resalta el elemento T_y la intersección de la fila y columna correspondientes.

$$\left.\begin{aligned} T_{24} \circ (T_{13} \circ T_x) = T_{24} \circ R_1 = T_y \\ (T_{24} \circ T_{13}) \circ T_x = R_2 \circ T_x = T_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{24} \circ (T_{13} \circ T_x) = (T_{24} \circ T_{13}) \circ T_x$$

- La operación es ***asociativa***, los siguientes casos particulares pueden ser considerados ejemplos.

$$\left.\begin{aligned} T_{13} \circ (R_1 \circ R_2) = T_{13} \circ R_3 = T_y \\ (T_{13} \circ R_1) \circ R_2 = T_x \circ R_2 = T_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{13} \circ (R_1 \circ R_2) = (T_{13} \circ R_1) \circ R_2$$

$$\left.\begin{array}{r} R_1 \circ (T_x \circ R_3) = R_1 \circ T_{13} = T_y \\ (R_1 \circ T_x) \circ R_3 = T_{13} \circ R_3 = T_y \end{array}\right\} \Rightarrow R_1 \circ (T_x \circ R_3) = (R_1 \circ T_x) \circ R_3$$

$$\left.\begin{array}{r} T_{13} \circ (T_x \circ R_2) = T_{13} \circ T_y = R_3 \\ (T_{13} \circ T_x) \circ R_2 = R_1 \circ R_2 = R_3 \end{array}\right\} \Rightarrow T_{13} \circ (T_x \circ R_2) = (T_{13} \circ T_x) \circ R_2$$

- Texto 3. Existe un único elemento en el conjunto D_4^* tal que:

$Para\ cualquier\ U \in D_4^*,\ se\ cumple\ U \circ e = e \circ U = U.$

Animación:

1. Se resalta el elemento e en la columna de encabezados y toda la fila correspondiente.
2. Se resalta el elemento e en la fila de encabezados y toda la columna correspondiente.

- Texto 4. Para cada elemento de D_4^*, existe otro en el mismo conjunto tal que:

$$U \circ V = e$$

Animación:

1. Se resalta cualquier elemento de la columna de encabezados.
2. Se sobre esa línea se ubica el elemento neutro y se resalta.
3. Sobre esa columna se resalta el primer elemento y se resalta.
4. Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la palabra INVERSOS.

Elemento	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{R_2}$	$\boldsymbol{R_3}$	$\boldsymbol{T_{13}}$	$\boldsymbol{T_{24}}$	$\boldsymbol{T_x}$	$\boldsymbol{T_y}$
Inverso	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{R_3}$	$\boldsymbol{R_2}$	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{T_{13}}$	$\boldsymbol{T_{24}}$	$\boldsymbol{T_x}$	$\boldsymbol{T_y}$

- Texto 5. El orden en que se opera no afecta el resultado, la operación definida en el conjunto D_4^* no es conmutativa.

	Animación: 1. Se resalta el elemento R_3 de la columna de encabezados y el elemento T_x de la fila de encabezados. 2. Se resalta el elemento T_{24} en la intersección de los elementos correspondientes. 3. Se resalta el elemento T_x de la columna de encabezados y el elemento R_3 de la fila de encabezados. 4. Se resalta el elemento T_{13} en la intersección de los elementos correspondientes. Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la frase NO CONMUTA. Esta operación cumple las siguientes propiedades: 6. Cerradura. 7. Asociativa. 8. Existencia de neutro. 9. Existencia de inversos. 10. No es conmutativa.

Tabla 26: Grupo de permutaciones de tres elementos.

<table>
<tr>
<td>UMA 1</td>
<td>

2. EL GRUPO $S_3 = \{e, \phi\psi, \phi, \psi^2, \psi, \psi\phi\}$ DE PERMUTACIONES DEL CONJUNTO $S = \{x_1, x_2, x_3\}$

El conjunto $S_3 = \{e, \phi\psi, \phi, \psi^2, \psi, \psi\phi\}$ de funciones biyectivas de $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}\}$ sobre sí mismo.

En S_3 se define la función $f: S_3 \to S_3$ de la siguiente manera $f(U,V) = U \circ V$, en la cual $U \circ V$ Significa que "se aplica la permutación V y posteriormente se aplica la permutación U". Esta función define una operación en S_3 que se denomina una composición de permutaciones.

En virtud de que S_3 es finito, es posible elaborar todas las composiciones entre sus elementos.

$$\psi \cdot \phi\psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = e$$

$$\phi\psi \cdot \phi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \psi^2$$

$$\phi\psi \cdot \psi^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \phi$$

$$\phi\psi \cdot \psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \psi\phi$$

</td>
</tr>
</table>

	$\phi\psi \cdot \psi\phi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \psi$ $\phi \cdot \phi\psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \psi$ $\phi \cdot \psi^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \psi\phi$ $\phi \cdot \psi\phi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \psi^2$ $\psi^2 \cdot \phi\psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \psi\phi$ $\psi^2 \cdot \phi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \phi\psi$ $\psi^2 \cdot \psi^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \psi$

$$\psi^2 \cdot \psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = e$$

$$\psi^2 \cdot \psi\phi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \phi$$

$$\psi . \phi\psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \phi$$

$$\psi . \psi^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = e$$

$$\psi\phi \cdot \psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \phi$$

$$\psi\phi \cdot \psi\phi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = e$$

"Tabla de composición de $\boldsymbol{S_3}$"

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\bullet & e & \phi\psi & \phi & \psi^2 & \psi & \psi\phi \\
\hline
e & e & \phi\psi & \phi & \psi^2 & \psi & \psi\phi \\
\phi\psi & \phi\psi & e & \psi^2 & \phi & \psi\phi & \psi \\
\phi & \phi & \psi & e & \psi\phi & \phi\psi & \psi^2 \\
\psi^2 & \psi^2 & \psi\phi & \phi\psi & \psi & e & \phi \\
\psi & \psi & \phi & \psi\phi & e & \psi^2 & \phi\psi \\
\psi\phi & \psi\phi & \psi^2 & \psi & \phi\psi & \phi & e
\end{array}
$$

Propiedades de la operación.

Recurso: archivero

CERRADURA	**ASOCIATIVA**	**EXISTENCIA DE NEUTRO**	**EXISTENCIA DE INVERSOS**	**CONMUTATIVA**
Texto 1.	Texto 2.	Texto 3.	Texto 4.	Texto 5.

	Visible la "Tabla de composición de $\boldsymbol{S_3}$" Texto: visible. Consulta la "Tabla de composición de $\boldsymbol{S_3}$" • Texto 1. Al operar cualquier par de elementos del conjunto $S_3 = \{e, \phi\psi\ , \phi, \psi^2, \psi, \psi\phi\ \}$ se obtiene como resultado otro elemento del mismo. $Para\ cualquier\ pareja\ U, V \in S_3, el\ elemento\ U \circ V \in S_3$ Animación: 1. Se resalta el elemento $\phi\psi$ en la columna de encabezados (primera columna). 2. Se resalta el elemento ϕ en la fila de encabezados (primera fila). 3. Se resalta el elemento ψ^2 la intersección de la fila y columna correspondientes. 4. Se resalta el elemento ψ^2en el conjunto S_3. • Texto 2. Esta propiedad permite operar tres elementos en una operación binaria. $Para\ los\ elementos\ \ U, V\ y\ W\ \ \in S_3,$ $se\ cumple\ \ U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$ Animación:

Con un color específico (rojo).

1. Se resaltan los elementos $\phi\psi$ en la columna de encabezados y ψ^2 en la fila de encabezados.
2. Se resalta el elemento ϕ la intersección de la fila y columna correspondientes.
3. Se resalta ϕ en la fila de encabezados, simultáneamente con el punto anterior.
4. Se resalta ψ en la columna de encabezados.
5. Se resalta el elemento $\psi\phi$ la intersección de la fila y columna correspondientes a $\psi\ y\ \ \phi$.

Con un color diferente (azúl).

6. Se resaltan los elementos ψ en la columna de encabezados y $\phi\psi$ en la fila de encabezados.
7. Se resalta el elemento ϕ la intersección de la fila y columna correspondientes y en la columna de encabezados.
9. Se resaltan los elementos ϕ en la columna de encabezados y ψ^2 en la fila de encabezados.
10. Se resalta el elemento $\psi\phi$ la intersección de la fila y columna correspondientes.

$$\left.\begin{array}{r}\psi \circ (\phi\psi \circ \psi^2) = \psi \circ \phi = \psi\phi \\ (\psi \circ \phi\psi) \circ \psi^2 = \phi \circ \psi^2 = \psi\phi\end{array}\right\} \Rightarrow \psi \circ (\phi\psi \circ \psi^2) = (\psi \circ \phi\psi) \circ \psi^2$$

- Texto 3. Existe un único elemento en el conjunto S_3 tal que:

$Para\ cualquier\ \ U \in S_3,\ \ se\ cumple\ \ U \circ e = e \circ U = U.$

Animación:

1. Se resalta el elemento e en la columna de encabezados y toda la fila correspondiente.
2. Se resalta el elemento e en la fila de encabezados y toda la columna correspondiente.

- Texto 4. Para cada elemento de S_3, existe otro en el mismo conjunto tal que:

$$U \circ V = e$$

Animación:

1. Se resalta cualquier elemento de la columna de encabezados.
2. Se sobre esa línea se ubica el elemento neutro y se resalta.
3. Sobre esa columna se resalta el primer elemento y se resalta.
4. Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la palabra INVERSOS.

Elemento	$\boldsymbol{e}$	$\phi\psi$	ϕ	ψ^2	ψ	$\psi\phi$
Inverso	$\boldsymbol{e}$	$\phi\psi$	ϕ	ψ	ψ^2	$\psi\phi$

- Texto 5. El orden en que se opera no afecta el resultado, la operación definida en el conjunto S_3 no es conmutativa.

Animación:

1. Se resalta el elemento ϕ de la columna de encabezados y el elemento $\phi\psi$ de la fila de encabezados.

2. Se resalta el elemento ψ en la intersección de los elementos correspondientes.

3. Se resalta el elemento $\phi\psi$ de la columna de encabezados y el elemento ϕ de la fila de encabezados.

4. Se resalta el elemento ψ^2 en la intersección de los elementos correspondientes.

Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la frase NO CONMUTA.

Esta operación cumple las siguientes propiedades:

1. Cerradura.
2. Asociativa.
3. Existencia de neutro.
4. Existencia de inversos.
5. No es conmutativa.

Nota: En la tabla se puede observar que su forma es de un arreglo cuadrado de resultados, por lo que se puede trazar imaginariamente una diagonal, con lo cual se prueba que esta operación no conmuta, por ejemplo:

$$\phi \cdot \phi\psi = \psi \neq \psi^2 = \phi\psi \cdot \phi$$

Tabla 27: El grupo cíclico

<table>
<tr>
<td>UMA 1</td>
<td>

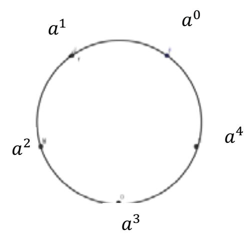
3. EL GRUPO CÍCLICO $(\boldsymbol{a})$.

Uno de los ejemplos de conjuntos que se presentó en la unidad anterior fue el conjunto cíclico

$(a) = \{a^i \,|i = 0,1,2,3,4 \dots\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3 \dots\ \ a^{n-1}\}$.

Presentar animación de la construcción del conjunto cíclico, sin a explicación, ya que ésta fue desarrollada en la unidad anterior.

Considera como ejemplo de un conjunto cíclico al conjunto: $(a) = \{a^i \,|i = 0,1,2,3,4\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3,\ \ a^4\}$



En (a) se define la operación $a^i \cdot a^j$ de la siguiente manera:

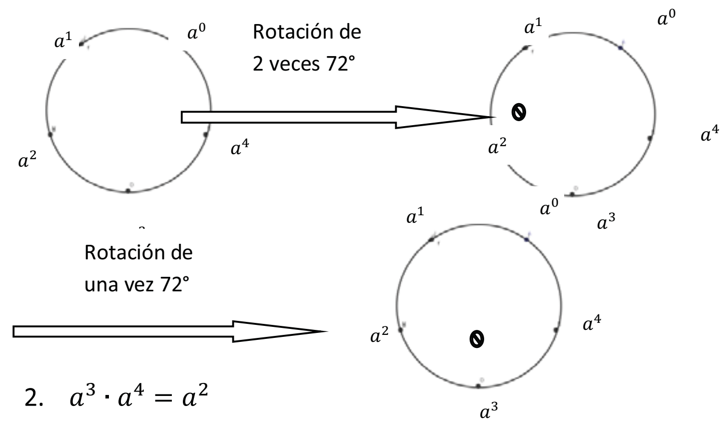
1. Se coloca un punto en la posición de a^0
2. Se aplica una rotación de $j\ veces\ 72°$ seguida de otra de $i\ veces\ 72°$

</td>
</tr>
</table>

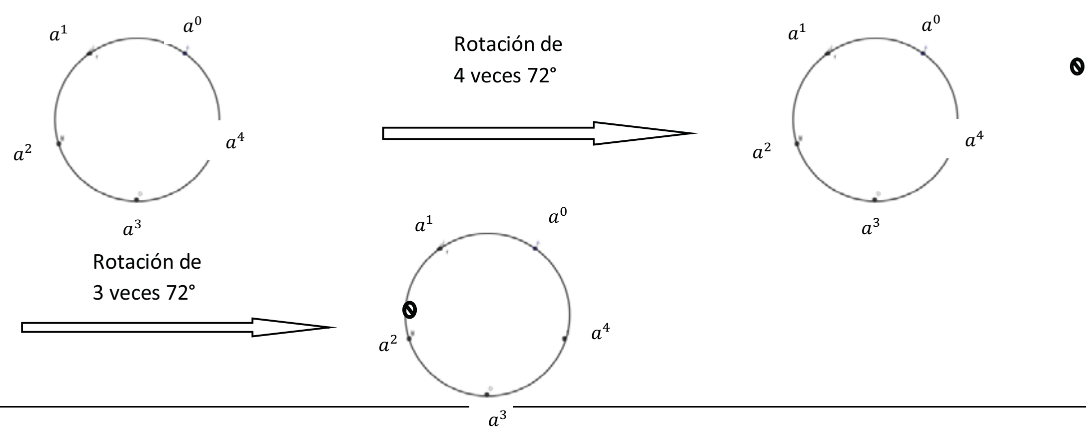
Presentar animación que represente la operación definida.

Ejemplo:

1. $a^1 \cdot a^2 = a^3$



2. $a^3 \cdot a^4 = a^2$



Otra forma de interpretar la misma operación:

$$a^i \cdot a^j = \begin{cases} a^{i+j} & si\ i+j \leq 4 \\ a^{i+j-5} & si\ i+j > 4 \end{cases}$$

3. $a^1 \cdot a^2 = a^3$ puesto que $1+2 \leq 4$
4. $a^3 \cdot a^4 = a^2$ puesto que $3+4 > 4$

Tabla de operación en $(\boldsymbol{a})$

$\cdot$	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
a^0	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
a^1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^0
a^2	a^2	a^3	a^4	a^0	a^1
a^3	a^3	a^4	a^0	a^1	a^2
a^4	a^4	a^0	a^1	a^2	a^3

Recurso: archivero

CERRADURA	ASOCIATIVA	EXISTENCIA DE NEUTRO	EXISTENCIA DE INVERSOS	CONMUTATIVA
Texto 1.	Texto 2.	Texto 3.	Texto 4.	Texto 5.

Visible la “Tabla de composición de$(\boldsymbol{a})$”

Texto: visible.

Consulta la “Tabla de composición de $(\boldsymbol{a})$”

Las propiedades de esta operación son:

- Texto 1. Al operar cualquier par de elementos del conjunto $(a) = \{a^i \mid i = 0,1,2,3,4\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4\}$ se obtiene como resultado otro elemento del mismo. $Para\ cualquier\ pareja\ a^i, a^j \in (a), el\ elemento\ a^i\, a^j \in (a)$

Animación:

5. Se resalta el elemento a^2 en la columna de encabezados (primera columna).
6. Se resalta el elemento a^3 en la fila de encabezados (primera fila).
7. Se resalta el elemento a^0 la intersección de la fila y columna correspondientes.

8. Se resalta el elemento a^0en el conjunto (a).

- Texto 2. Esta propiedad permite operar tres elementos en una operación binaria. $Para\ los\ elementos\ \ a^i\ , a^j\ \ y\ a^k\ \ \in (a)$, $se\ cumple\ \ a^i\ \circ \left(a^j\ \ \ a^k\ \right) = (a^i\ \circ a^j\ ) \circ\ a^k$

Animación:

Con un color específico (rojo).

1. Se resaltan los elementos a^3 en la columna de encabezados y a^4 en la fila de encabezados.
2. Se resalta el elemento a^2 la intersección de la fila y columna correspondientes.
3. Se resalta a^2 en la fila de encabezados, simultáneamente con el punto anterior.
4. Se resalta a^1 en la columna de encabezados.
5. Se resalta el elemento a^3 la intersección de la fila y columna correspondientes.

Con un color diferente (azúl).

6. Se resaltan los elementos a^1 en la columna de encabezados y a^3 en la fila de encabezados.
7. Se resalta el elemento a^4 la intersección de la fila y columna correspondientes y en la columna de encabezados.
8. Se resaltan los elementos a^4 en la columna de encabezados y a^4en la fila de encabezados.
9. Se resalta el elemento a^3 la intersección de la fila y columna correspondientes.

$$\left.\begin{array}{r} a^1 \circ (a^3 \circ a^4) = a^1 \circ a^2 = a^3 \\ (a^1 \circ a^3) \circ a^4 = a^4 \circ a^4 = a^3 \end{array}\right\} \Rightarrow a^1 \circ (a^3 \circ a^4) = (a^1 \circ a^3) \circ a^4$$

- Texto 3. Existe un único elemento en el conjunto $(a) = \{a^i \mid i = 0,1,2,3,4\} = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4\}$ tal que:

$Para\ cualquier\ \ a^i \in (a),\ \ se\ cumple\ \ a^i \circ e = e \circ a^i = a^i.$

Animación:

3. Se resalta el elemento a^0 en la columna de encabezados y toda la fila correspondiente.
4. Se resalta el elemento a^0 en la fila de encabezados y toda la columna correspondiente.

- Texto 4. Para cada elemento de (a), existe otro en el mismo conjunto tal que:

$$a^i \circ a^j = e$$

Animación:

1. Se resalta cualquier elemento de la columna de encabezados.
2. Se sobre esa línea se ubica el elemento neutro y se resalta.
3. Sobre esa columna se resalta el primer elemento y se resalta.
4. Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la palabra INVERSOS.

Elemento	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
Inverso	a^0	a^4	a^3	a^2	a^1

- Texto 5. El orden en que se opera no afecta el resultado, la operación definida en el conjunto (a) si es conmutativa.

Animación:

1. Se traza una línea diagonal principal en la tabla.
2. Se resaltan elementos simétricos en la matriz.

Permanecen resaltados los elementos que se operan y aparece la frase CONMUTA.

Esta operación cumple las siguientes propiedades:

- Cerradura.
- Asociativa.
- Existencia de neutro.
- Existencia de inversos.
- Conmutativa.

Se denomina como ***grupo cíclico*** de orden *n*

Tabla 28: Grupos de números, Enteros, Racionales, Reales.

<table>
<tr><td>UMA 1</td><td>

1. Los grupos numéricos.

<table>
<tr><td colspan="3">Los conjuntos de los números enteros, racionales y reales con la suma común forman cada uno de ellos un grupo conmutativo.</td></tr>
<tr><td>Grupo aditivo de los números enteros.

$(\mathbb{Z}, +)$</td><td>Grupo aditivo de los números racionales.

$(\mathbb{Q}, +)$</td><td>Grupo aditivo de los números reales.

$(\mathbb{R}, +)$</td></tr>
<tr><td>Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces:

$(a + b) \in \mathbb{Z}$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a + b = b + a$

Existe $0 \in \mathbb{Z}$, tal que $a + 0 = a$

Existe $-a \in \mathbb{Z}$, tal que

$a + (-a) = -a + a = 0$</td><td>Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$, entonces:

$(a + b) \in \mathbb{Q}$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a + b = b + a$

Existe $0 \in \mathbb{Q}$, tal que $a + 0 = a$

Existe $-a \in \mathbb{Q}$, tal que

$a + (-a) = -a + a = 0$</td><td>Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

$(a + b) \in \mathbb{R}$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a + b = b + a$

Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a$

Existe $-a \in \mathbb{R}$, tal que

$a + (-a) = -a + a = 0$</td></tr>
</table>

Dado que el cero no tiene inverso para el producto, entonces ninguna de las siguientes estructuras $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Q}, \times)\ ni\ (\mathbb{R}, \times)$ son grupos.

</td></tr>
</table>

Los conjuntos de los números racionales diferentes de cero y reales diferentes del cero con el producto común forman cada uno de ellos un grupo conmutativo.	
Grupo multiplicativo de los números racionales distintos de cero. $(\mathbb{Q}-\{0\},\times)$	Grupo multiplicativo de los números reales distintos de cero. $(\mathbb{R}-\{0\},\times)$
Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}-\{0\}$, entonces: $(a \times b) \in \mathbb{Q}-\{0\}$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $a \times b = b \times a$ Existe $1 \in (\mathbb{Q}-\{0\})$, tal que $a \times 1 = a$ Existe $\frac{1}{a} \in (\mathbb{Q}-\{0\})$, tal que $a \times \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \times a = 1$	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}-\{0\}$, entonces: $(a \times b) \in \mathbb{R}-\{0\}$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $a \times b = b \times a$ Existe $1 \in \mathbb{R}-\{0\}$, tal que $a \times 1 = a$ Existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}-\{0\}$, tal que $a \times \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \times a = 1$

Actividades de Aprendizaje

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

TAREA 1

"EL GRUPO DE SIMETRÍAS DEL TRIÁNGULO"

Objetivo: Al realizar la siguiente actividad construirás una estructura algebraica que consta de un conjunto, "el conjunto se simetrías del triángulo" y una operación, "la composición", así como las propiedades de ésta última.

En el conjunto D_3^* de "simetrías" del triángulo que construiste en la tarea 1 de la actividad de inducción, define la operación $U \circ V$ de la siguiente manera: $U \circ V$ Significa que "se aplica la transformación V y posteriormente se aplica la transformación U".

4. ***Considera el conjunto de simetrías de un triángulo equilátero D_3^****
5. ***De forma análoga a la aplicación de la operación en los elementos de D_4^*, aplica la operación a los del conjunto D_3^*, por ejemplo, para operar $R_1 \circ T_1$***
   a. ***Toma la figura recortada y desde una posición inicial, realiza el movimiento T_1, posteriormente y desde la nueva posición, aplica la transformación R_1.***
   b. ***Compara el resultado con los elementos del conjunto D_3^* e identifica si aparece.***
6. ***Elabora una tabla de la operación, análoga a la obtenida en la UMA 1 para el conjunto D_4^****
7. ***Elabora un video que registre tu actividad y envíalo a tu portafolio de evidencias.***

Empleando la tabla como material de apoyo, explica los siguientes conceptos en este conjunto y con esta operación.

1. ***Cerradura de la operación.***

2. ***Existencia de una identidad.***

¿Cuál de los elementos funciona como identidad?

3. ***Existencia de elementos neutros.***
4. ***Asociatividad de la operación.***
5. ***Conmutatividad de la operación.***
6. ***Enlista aquellas propiedades que cumple la operación en este caso.***

Tabla 29: El grupo de simetrías del triángulo.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

TAREA 2: “EL GRUPO CÍCLICO”

Objetivo: Al realizar la siguiente actividad construirás una estructura algebraica que consta de un conjunto, “el conjunto de puntos sobre una circunferencia de radio uno y centro en el origen del sistema cartesiano” y una operación, “la composición”, así como las propiedades de ésta última.

Considera el conjunto de n puntos sobre la circunferencia:

$$(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{i}} \,|\, \boldsymbol{i} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \dots\} = \{\boldsymbol{a}^{\mathbf{0}}, \boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}, \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}} \dots \ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} \}$$

En (a) se define la multiplicación $a^i \cdot a^j$ de la siguiente manera:

- ***a. Se coloca un punto en la posición de a^0***
- ***b. Se aplica una rotación de j veces el ángulo $\propto$ seguida de otra de i veces $\propto$***

8. Elabora la tabla de la operación.

*	a^0	a^1	a^2
a^0			
a^1			
a^2			

9. Describe brevemente la propiedad de cerradura en la tabla de la operación.

____

____

____

10. ***Identifica si alguno de los elementos funciona como neutro, es este caso escribe cual es.***

.

11. ***Si existe un elemento neutro, identifica si cada elemento tiene inverso, en cuyo caso llena la siguiente tabla.***

Elemento	a^0	a^1	a^2
Inverso			

12. ***Muestra un ejemplo en el cual se exponga la propiedad asociativa.***

____

____

____

13. ***Describe la forma en que se puede observar la conmutatividad de la operación en la tabla de la adición.***

____

____

____

14. ***Enlista aquellas propiedades que cumple la operación en este caso.***

Propiedad	***¿Esta operación la cumple?***
Cerradura	
Existe elemento neutro.	
Cada elemento tiene un inverso	
Asociatividad	
Conmutatividad	

Tabla 30: El grupo cíclico

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

TAREA 3: Congruencia módulo 6

Objetivo: Al realizar la siguiente actividad construirás una estructura algebraica que consta de un conjunto, "el conjunto de clases de equivalencia de la congruencia módulo seis" y una operación, "la suma", así como las propiedades de ésta última.

Considera el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo seis $\mathbb{Z}_6$.

En $\mathbb{Z}_6$ ***se define la suma de la siguiente manera:***

$[a] + [b] = [c]$, ***Donde*** c ***es el residuo de dividir*** $a + b$ ***entre seis.***

15. ***Elabora la tabla de la operación.***

+	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$						
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						

16. ***Describe brevemente la propiedad de cerradura en la tabla de la operación.***

____

____

____

17. ***Identifica si alguno de los elementos funciona como neutro, es este caso escribe cual es.***

.

18. ***Si existe un elemento neutro, identifica si cada elemento tiene inverso, en cuyo caso llena la siguiente tabla.***

Elemento	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
Inverso						

19. ***Muestra un ejemplo en el cual se muestre la propiedad asociativa.***

____

____

____

20. ***Describe la forma en que se puede observar la conmutatividad de la operación en la tabla de la adición.***

____

____

____

21. ***Enlista aquellas propiedades que cumple la operación en este caso.***

Propiedad	***¿Esta operación la cumple?***
Cerradura	
Existe elemento neutro.	
Cada elemento tiene un inverso	
Asociatividad	
Conmutatividad	

Tabla 31: Grupo de congruencias módulo 6

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

TAREA 4: Congruencia módulo 7

Objetivo: Al realizar la siguiente actividad construirás una estructura algebraica que consta de un conjunto, “el conjunto de clases de equivalencia de la congruencia módulo siete” y la operación denominada “suma”, así como las propiedades de ésta última.

Considera el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo siete $\mathbb{Z}_7$.

En $\mathbb{Z}_7$ se define la suma de la siguiente manera:

$[a] + [b] = [c]$, ***(c es el residuo de dividir $a + b$ entre siete)***

22. ***Elabora la tabla de la operación.***

+	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$
$[0]$							
$[1]$							
$[2]$							
$[3]$							
$[4]$							
$[5]$							
$[6]$							

23. ***Describe brevemente la propiedad de cerradura en la tabla de la operación.***

____

____

____

24. ***Identifica si alguno de los elementos funciona como neutro, es este caso escribe cual es.***

    .

25. ***Si existe un elemento neutro, identifica si cada elemento tiene inverso, en cuyo caso llena la siguiente tabla.***

Elemento	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$
Inverso							

26. ***Muestra un ejemplo en el cual se muestre la propiedad asociativa.***

    ____

    ____

    ____

27. ***Describe la forma en que se puede observar la conmutatividad de la operación en la tabla de la adición.***

    ____

    ____

    ____

28. ***Enlista aquellas propiedades que cumple la operación en este caso.***

Propiedad	***¿Esta operación la cumple?***
Cerradura	
Existe elemento neutro.	
Cada elemento tiene un inverso	
Asociatividad	
Conmutatividad	

.

Tabla 32: Grupo de congruencias módulo 7

BLOQUE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

TAREA 5: "$\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{6}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 6}\}$"

Objetivo: El alumno construirá el conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número 6.

Considera el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo seis $\mathbb{U}_{\boldsymbol{6}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{6}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 6}\}$

En $\mathbb{U}_{\boldsymbol{6}}$ se define el producto de la siguiente manera:

$[a][b] = [c]$, Donde c es el residuo de dividir ab entre seis.

29. Elabora la tabla de la operación.

x	[1]	[5]
[1]		
[5]		

30. Describe brevemente la propiedad de cerradura en la tabla de la operación.

____

____

____

31. Identifica si alguno de los elementos funciona como neutro, es este caso escribe cual es.

   _.

32. Si existe un elemento neutro, identifica si cada elemento tiene inverso, en cuyo caso llena la siguiente tabla.

Elemento	[1]	[5]
Inverso		

33. Muestra un ejemplo en el cual se muestre la propiedad asociativa.

____

____

____

34. Describe la forma en que se puede observar la conmutatividad de la operación en la tabla en la cual se desplegaron todas las multiplicaciones.

____

____

____

35. Enlista aquellas propiedades que cumple la operación en este caso.

Propiedad	**¿Esta operación la cumple?**
Cerradura	
Existe elemento neutro.	
Cada elemento tiene un inverso	
Asociatividad	
Conmutatividad	

Tabla 33: Grupo de clases de primos relativo con 6

BLOQUE ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

TAREA 6: “$\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{6}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 7}\}$”

Objetivo: El alumno construirá el conjunto de clases de equivalencia cuyo representante es primo relativo con el número 7.

Considera el conjunto de clases de equivalencia en los números enteros para la congruencia módulo seis $\mathbb{U}_{\boldsymbol{7}} = \{[\boldsymbol{a}] | (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{7}) = \boldsymbol{1}\} = \{[\boldsymbol{a}] | \boldsymbol{a\ es\ primo\ relativo\ con\ 7}\}$

En $\mathbb{U}_{\boldsymbol{7}}$ se define el producto de la siguiente manera:

$[a][b] = [c]$, (c es el residuo de dividir ab entre siete)

36. Elabora la tabla de la multiplicación.

x	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						
$[6]$						

37. Describe brevemente la propiedad de cerradura en la tabla de la operación.

____

____

____

38. Identifica si alguno de los elementos funciona como neutro, es este caso escribe cual es.

.

39. Si existe un elemento neutro, identifica si cada elemento tiene inverso, en cuyo caso llena la siguiente tabla.

Elemento	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
Inverso						

40. Muestra un ejemplo en el cual se muestre la propiedad asociativa.

____

____

____

41. Describe la forma en que se puede observar la conmutatividad de la operación en la tabla en la cual se desplegaron todas las multiplicaciones.

____

____

____

42. Enlista aquellas propiedades que cumple la operación en este caso.

Propiedad	**¿Esta operación la cumple?**
Cerradura	
Existe elemento neutro.	
Cada elemento tiene un inverso	
Asociatividad	
Conmutatividad	

Tabla 34: Grupo de clases de primos relativo con 7