



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS

**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA COMPRENSIÓN DEL
CONCEPTO DE VARIABLE EN EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES LINEALES**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:

ROCÍO VARGAS VELÁZQUEZ

Directoras de Tesis:

M. en. C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

FACULTAD DE CIENCIAS

DRA. KIRA PADILLA MARTÍNEZ

FACULTAD DE QUÍMICA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. febrero 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIAS

A mi madre que con su esfuerzo y dedicación incanzable me brindó la oportunidad de poder estudiar una carrera y superarme día a día.

A mi padre que partió en el camino por alcanzar este sueño, que hoy es una realidad.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por brindarme la oportunidad de crecer profesionalmente y enseñarme que la educación en nuestro país puede mejorar si los docentes nos comprometemos cada día con nuestro alumnado.

A David por su apoyo incondicional y motivación en cada etapa de mi vida.

A mis tutoras por su guía, apoyo y motivación en la realización de esta tesis.

A mis sinodales por el tiempo dedicado a la revisión de la tesis y sus comentarios.

A mis compañeros, cuyas intenciones abonan a mejorar la educación.

A CEP por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de Maestría.

Resumen

Este trabajo de investigación muestra los resultados del análisis de la interpretación, simbolización, manipulación y comprensión que mostraron un grupo de estudiantes del IEMS (Instituto de Educación Media Superior) al trabajar con el concepto variable, dando énfasis en el uso de la variable como una relación funcional. La investigación consiste en el diseño y aplicación de una secuencia didáctica basada en el *Modelo 3UV* propuesto por Ursini y col. (2005), la cual incluye distintas actividades que sirven para detectar la forma en que los alumnos trabajan con el concepto de variable cuando se enfrentan a una relación funcional. Para realizar el análisis de las respuestas dadas a la secuencia y evaluaciones, se utilizó el marco teórico del *Modelo 3UV* (tres usos de la variable). La secuencia se aplicó a estudiantes de educación media superior entre 15 y 16 años que cursaban el primer semestre de matemáticas.

Abstract

This research paper shows the results of the analysis of interpretation, symbolization, manipulation and comprehension displayed by a group of students from the IEMS (Instituto de Educación Media Superior) as they worked with the concept of variable, stressing the use of the variables a functional relation. The research consists of the design and application of a didactic sequence based on the *3UV Model* proposed by Ursini and collaborators (2005), which include different activities that allow the detection of the way students work with the concept of variable when faced to a functional relation. To perform the analysis of the answers given to the sequence and evaluations, the theoretic frame of the *3UV Model* (3 uses of the variable) was employed. The sequence was applied to students of upper secondary education between the ages of 15 and 16 that were taking first semester of mathematics.

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 3 |
| Abstract | 3 |
| Introducción | 6 |
| CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES | 9 |
| 1.1 Antecedentes | 9 |
| 1.2 Interpretaciones de la variable | 11 |
| 1.3 Dificultades en la comprensión del concepto de variable | 14 |
| 1.4 Objetivo de la investigación | 18 |
| CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO | 19 |
| 2.1 La variable como incógnita | 20 |
| 2.2 La variable como número general | 21 |
| 2.3 La variable como relación funcional | 22 |
| 2.4 El Modelo 3UV | 23 |
| CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA | 26 |
| 3.1 Propuesta e hipótesis | 26 |
| 3.2 Sujetos | 26 |
| 3.3 Diseño de secuencia didáctica | 27 |
| 3.4 Diseño de instrumentos e implementación | 28 |
| 3.5 Secuencia didáctica | 28 |

| | |
|--|-----------|
| 3.6 Metodología para análisis | 43 |
| | |
| CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE DATOS | 45 |
| 4.1 Análisis de datos | 45 |
| 4.2 Análisis de las actividades de la secuencia didáctica | 45 |
| 4.3 Análisis global de la secuencia didáctica | 59 |
| 4.4 Análisis de las evaluaciones | 61 |
| 4.5 Análisis global de las evaluaciones | 69 |
| | |
| Conclusiones | 72 |
| | |
| Bibliografía | 76 |
| | |
| Apéndice | 78 |

Introducción

Diversas investigaciones en el área de la matemática educativa han encontrado que los estudiantes presentan dificultades en el manejo adecuado del concepto variable y en su comprensión profunda; dicho obstáculo se asocia con lo multifacético del concepto, ya que la variable se puede analizar como un número general, como una incógnita y como una relación funcional; por lo tanto la variable asume un significado según el contexto en el cual se desenvuelva (Trigueros & Ursini, 2001).

Desde los primeros años escolares cuando los estudiantes comienzan a trabajar con letras en geometría o álgebra van desarrollando técnicas de repetición que no les dejan profundizar en la comprensión adecuada del concepto de variable; se van quedando con ideas superficiales sobre los usos de la variable y mecanizan los métodos manipulativos que les servirán para resolver las situaciones que comúnmente tratan en clase, mismos que les impiden profundizar en el concepto y poder pasar de un uso al otro de manera flexible.

Se considera que si durante la enseñanza del concepto de variable se trabaja con diversos ejercicios que apoyen a diferenciar los distintos usos de la variable (incógnita, número general, relación funcional) es posible que los alumnos logren desarrollar habilidades de interpretación, simbolización y manipulación de la variable de una forma más adecuada, dados los resultados que se han reportado en algunos experimentos de enseñanza (Montes, 2003).

El trabajo de investigación de esta tesis tiene la intención de proponer una secuencia didáctica que ayude a minimizar esas dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con la variable, enfocándose a un grupo de estudio particular, los alumnos del IEMS (Instituto de Educación Media Superior); dichos estudiantes presentan severas dificultades en conocimientos básicos. El diseño de la secuencia se sustenta en el marco teórico del “*Modelo 3UV*” que estudia a la variable desde tres perspectivas: número general, incógnita y relación funcional. A su vez considera que, en el salón de clase, se debe propiciar la zona de desarrollo próximo, propuesta por Vygostky, a partir de la solución de problemas que impliquen a los estudiantes en diálogos colaborativos y el docente sea un guía en la construcción del conocimiento (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

Las actividades de la secuencia se diseñaron de forma gradual en cuanto a su dificultad buscando que conforme se avanzara en su aplicación los estudiantes analizaran cada uso de la variable de forma separada y poco a poco los fueran integrando; también se consideró que su diseño facilitara analizar el avance de los estudiantes en cada uso de la variable y posteriormente se hiciera un análisis global de cada actividad en conjunto, para el diseño de las evaluaciones se consideraron en los tres casos, situaciones que involucrarán los mismos usos de la variable para tener un parámetro de comparación conforme se aplicaba la secuencia.

La tesis está dividida en cuatro capítulos y su apéndice. En el capítulo uno se exponen los antecedentes del concepto de variable a través del tiempo, en el intento de establecer una definición para el mismo, también se hace mención a varias investigaciones relacionadas con las interpretaciones y usos que se le han dado a la variable desde la perspectiva de diferentes investigadores, se abordan algunas de las dificultades presentadas por los alumnos en el trabajo de la variable, que surgen a partir de su carácter multifacético; y finalmente se expone el objetivo de la investigación.

En el segundo capítulo se presenta el *Modelo 3UV* como marco teórico en el que se sustenta la secuencia didáctica, se muestra de manera específica los tres usos de la variable (número general, incógnita y relación funcional) así como las características necesarias para asumir que los estudiantes dominan cada uno de ellos. Se aborda el rol del docente y algunas sugerencias a seguir en el salón de clase al momento de aplicar situaciones basadas en el modelo que propicien *la zona de desarrollo próximo* propuesta por Vigostky (1978) y ayuden a trabajar cada uso de la variable de forma separada y en conjunto.

En el tercer capítulo se aborda la propuesta de la tesis, las características de los sujetos con los que se implementará la secuencia didáctica; la forma en que se diseñó la secuencia y las evaluaciones para medir su eficacia siguiendo las especificaciones del *Modelo 3UV*. Posteriormente se presenta un apartado donde se analiza cada una de las actividades que conforman la secuencia y evaluaciones, de acuerdo con los objetivos que apoya cada pregunta para lograr que los estudiantes comprendan los usos de la variable. Finalmente se aborda la forma en que se analizarán los datos obtenidos conforme a categorías y especificaciones señaladas por el *Modelo 3UV*.

En el cuarto capítulo se expone la forma en que se presentará el análisis de los datos basándose en dos etapas, una para la secuencia, y otra, para las evaluaciones. Cada etapa va acompañada del análisis a partir del *Modelo 3UV* para la solución esperada de las preguntas que componen las actividades; seguidas de tablas resumen con los porcentajes conforme a cada categoría y especificaciones señaladas por el *Modelo 3UV* de los alumnos que se ubican en ellos y su análisis. Al finalizar dicho análisis se presenta una tabla resumen de las seis actividades de la secuencia y las tres evaluaciones; enfocándose a analizar los avances que tuvieron los estudiantes en el uso de la variable como relación funcional y las dificultades que se presentaron; esto dado que, el objetivo principal de la tesis fue probar que la secuencia didáctica ayudaría a mejorar la comprensión del concepto variable en ese uso particular.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas después de aplicar la propuesta didáctica, abordando las problemáticas presentadas, las acciones correctivas implementadas y los avances que se obtuvieron a lo largo de la aplicación.

Se anexa un apéndice donde se presenta un compilado de las respuestas dadas por los estudiantes en diversas actividades de la secuencia y las evaluaciones, así como la bibliografía consultada durante la realización de la tesis.

CAPÍTULO 1

1.1 Antecedentes

El álgebra es parte de un proceso de razonamiento y abstracción del concepto de número, en ella encontramos las estrategias para resolver problemas de la vida cotidiana y a la vez es una herramienta que nos “entrena” para pensar matemáticamente y nos permite comunicarnos con matemáticas (Lodholz, 1999). El éxito al trabajar con las matemáticas, en gran medida, depende de los conceptos del álgebra; debido a que cada rama de las matemáticas utiliza ideas fundamentales del álgebra para razonar y modelar diferentes fenómenos (Christmas & Fey, 1990); por tanto, entender el concepto de variable es la puerta de acceso a una comprensión de los diferentes mundos del álgebra, a saber: el mundo de las expresiones abiertas, el de las identidades, el de las relaciones funcionales y el de las ecuaciones (Ursini, 1996).

Durante varios años se han realizado diversas investigaciones que indican que los estudiantes tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión adecuada del uso de las letras en álgebra y lograr una capacidad aceptable para trabajar con ellas (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005); lo cual es alarmante, ya que juegan un rol central en la comprensión del álgebra. También se ha señalado que a los estudiantes les cuesta trabajo apropiarse de la esencia del concepto de variable, y, en consecuencia, desarrollar la capacidad de pasar de manera flexible entre los distintos usos que ésta tiene (Matz, 1982; Usiskin, 1988; Trigueros & Ursini, 1999).

El concepto de variable es difícil de definir, debido a que su definición y uso depende en gran medida del contexto en que se utilice. Las variables pueden ser utilizadas en identidades, fórmulas, propiedades, parámetros o ecuaciones (McIntyre, 2005). La mayoría de los estudiantes percibe a las variables como letras que representan números, sin embargo, éste es únicamente uno de los usos que tiene la variable. Por ejemplo, en geometría, las variables se utilizan para etiquetar coordenadas; en lógica, las variables p y q sirven para escribir proposiciones; en el estudio de las funciones se utilizan para representar funciones, etcétera. En resumen, las variables tienen muchas posibles definiciones, referentes y símbolos. El intentar compactar la idea de variable en una definición

“simplifica demasiado la idea y, a su vez distorsiona el propósito del álgebra” (Usiskin, 1988).

Schoenfeld y Arcavi (1988) realizaron una investigación para intentar reexaminar la noción de variable y con eso, redescubrir la riqueza y multiplicidad de su significado. Dentro de esta investigación, tomaron una la muestra conformada por: matemáticos, profesores de matemáticas, científicos del área de computación, lingüistas y lógicos. La intención de Schoenfeld y Arcavi era que las personas involucradas en el estudio capturaran el sentido del concepto con una sola palabra. ~~capturaran el corazón del concepto~~. Algunos de los términos que encontraron fueron: símbolo, marcador de posición, pronombre, parámetro, argumento, punto, un nombre, espacio vacío, referencia y ejemplo. La razón del porqué surgieron infinidad de respuestas radica en el significado que cada persona le da a la variable desde su contexto.

Sin embargo, Philipp (1999) plantea que “La noción de variable representando ya una variación de cantidades fue introducida por los padres del Cálculo Diferencial, Leibniz (1646-1716) y Newton (1643-1727). Su concepto estaba estrechamente ligado con el de función, de hecho fue Leibniz quien introdujo los términos de función y variable.” La estrecha relación entre el concepto variable y el concepto de función continúa a lo largo de la primera mitad del siglo XX. Durante este periodo la mayoría de los libros distinguía entre cantidades que representan valores simples y son llamados *constantes*, y cantidades que representan muchos valores, las cuáles son llamadas *variables*. Una típica distinción de esta definición es de Osborne (1909): “Una cantidad que asume un ilimitado número de valores es llamada variable”. Una cantidad cuyo valor no cambia es llamado constante. Por ejemplo, en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, x , y son variables, pero a es una constante (Osborne, 1909).

La reforma matemática a finales de los 50's y principio de los 60's provocó un cambio sustancial en la definición de variable. Como respuesta para unificar el concepto en el currículo de matemáticas, éste se enseñaría en su forma más general desde el principio, todos los símbolos literales se refieren a variables (Kieran, 1989). Una década más tarde, la variable ya no se asocia con una función, ahora se asocia con un conjunto específico, llamado el conjunto de reemplazo o dominio de la variable (Philipp, 1999).

Actualmente se puede afirmar que el concepto de variable involucra múltiples significados, mismos que son representados por símbolos literales, esto debido a que su uso depende del contexto donde se encuentre, cumpliendo en cada caso con ciertas propiedades. Por ejemplo, el uso de una literal puede relacionarse con la denominación de un punto, una recta, una incógnita, un número general, un elemento de una relación funcional, etcétera, tal como se puede observar en los libros de textos.

La complejidad de la conceptualización de la variable, por parte de los estudiantes, podría radicar en que los símbolos literales que se utilizan para representarla tienen un significado distinto de acuerdo al contexto en que se trabajen; dichas dificultades pueden ser la causa del bajo rendimiento en álgebra y en otras ramas de las matemáticas escolares (Ursini Legovich, 1996).

1.2 Interpretaciones de la variable

Durante los años 70's y 80's Kuchemman identificó seis maneras en que los estudiantes interpretaban los símbolos literales en un contexto aritmético (Kuchemann, 1980), a saber:

- **Letra evaluada:** aquella a la que se le asigna un valor numérico.
- **Letra no utilizada:** la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no le atribuyen ningún significado.
- **Letra como objeto:** se considera la letra como la abreviación del nombre del objeto o como a un objeto en sí.
- **Letra como incógnita específica:** la letra representa un número particular, pero desconocido y los estudiantes son capaces de operar con ella.
- **Letra como número generalizado:** se considera que la letra representa o asume distintos valores.
- **Letra como variable:** se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En estos resultados destaca el hecho de que los alumnos tienen diferentes formas de interpretar las letras utilizadas para representar variables, lo que indica que quienes se

inician en el estudio del álgebra consideran que los símbolos literales se pueden interpretar de diferentes formas y que su significado puede variar con el problema.

Kuchemann considera que esta clasificación de la interpretación de los símbolos literales refleja el grado de dificultad creciente; afirma que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la “letra como variable”.

Kuchemann agrupó sus interpretaciones en cuatro niveles, el nivel uno es el de menor grado de comprensión. En este nivel los estudiantes interpretan las variables y las utilizan como una “letra evaluada”, como “letra no utilizada” y como “letra que abrevia un objeto”. El nivel dos de comprensión implica que los estudiantes podrían manejar problemas ligeramente más complejos, sin embargo, no logran enfrentarse a las letras desconocidas y a los números generalizados como variables (Kuchemann, 1981). En el tercer nivel, los estudiantes son capaces de manejar la mayoría de las preguntas que tienen que ver con las variables como incógnitas específicas. Finalmente, el cuarto nivel, el de mayor grado de comprensión según la escala de Kuchemann, los estudiantes se apropian e interpretan de todas las variables, dependiendo del contexto dado.

En resumen, el orden de Kuchemann sugiere que es más fácil para un niño trabajar con la “letra como incógnita específica” que con la “letra como número generalizado”, y que es más fácil trabajar con la “letra como número generalizado” que con la “letra como variable”.

Por su parte Usiskin (1988) destaca en su investigación cuatro usos diferentes de la variable y las asocia a diferentes concepciones del álgebra. Por ejemplo, en la aritmética generalizada la idea de variable es un patrón generalizado; en el estudio de procedimientos para resolver cierto tipo de problemas, las variables son incógnitas o constantes; en el estudio de relaciones son argumentos o parámetros; y en el estudio de las estructuras son marcas arbitrarias sobre el papel.

Usiskin subraya, a su vez, que el concepto de variable es multifacético e incluye diversos aspectos. Señala que los propósitos de la enseñanza del álgebra, las concepciones de la asignatura y los usos de la variable están íntimamente relacionados, ya que los propósitos

dependen de las diferentes concepciones del álgebra y éstas se relacionan con la importancia que se adjudica a los diferentes usos. Por tal motivo, considera que los alumnos empiezan a estudiar álgebra desde que se enfrentan a las variables (Usiskin, 1988).

Por su lado, Philipp (1999) lista siete usos diferentes para los símbolos literales: como etiquetas, constantes, incógnitas, números generalizados, cantidades que varían, parámetros y como símbolos abstractos. Él afirma que muchas de las dificultades, que los estudiantes encuentran con las variables, se relacionan con su inhabilidad para reconocer el rol correcto de los símbolos literales.

Por su parte, Ursini (1994; 1996) y Trigueros (2000), investigaron los usos que se le daba a la variable en el contexto escolar. Ellas establecieron tres clasificaciones del término variable, como: incógnita, número generalizado y relación funcional. Como incógnita se refiere a identificar el símbolo como un valor específico, ya sea en una ecuación o problema. Como número generalizado, implica manipular la letra para representar una situación general, una regla o un método, o relacionar expresiones generales entre sí. La variable como relación funcional implica reconocer que existen cantidades cuyos valores están relacionados y que la variación de una cantidad afecta la variación de la otra cantidad (Ursini, 1994; Ursini, 1996; Trigueros, Ursini, & Lozano, 2000).

Como ya se mencionó anteriormente, es difícil dar una definición del concepto de variable dado su carácter multifacético. Incluso no es necesario construir una definición que incluya todas las características que asume una variable en diferentes contextos matemáticos. Sin embargo, sus diferentes usos son fundamentales en la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental, a pesar de que en la solución de los problemas algebraicos no se hagan explícitos y simplemente se trabaje con ellos.

Cada uno de los diferentes usos que se hace de la variable tiene características específicas y los alumnos deben conocerlas para favorecer su comprensión. Ya que, como lo menciona Matz (1982), el no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable puede significar un bloqueo en el aprendizaje del álgebra.

1.3 Dificultades en la comprensión del concepto de variable

En los últimos treinta años se han realizado diversas investigaciones con el propósito de identificar las dificultades de los alumnos que comienzan a trabajar con el álgebra elemental así como de los que llevan algunos cursos de álgebra, en particular, se encuentran varios estudios enfocados a las dificultades que tienen los estudiantes con el concepto de variable. A continuación se hace una breve recapitulación de los mismos.

Kuchemann (1981) realizó un estudio con más de 300 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 13 y 15 años, y aplicó un cuestionario escrito que contenía problemas típicos del álgebra, en los cuáles requerían simplificar y sustituir, así como construir, interpretar y resolver ecuaciones. El diseño del cuestionario fue de acuerdo a la complejidad estructural de los problemas así como la naturaleza de los elementos implícitos en cada uno de ellos. Su finalidad fue investigar cuál era el significado que los alumnos le darían a las literales, señalando que la interpretación de las variables depende de la naturaleza de los problemas.

Con base en las respuestas de los estudiantes, Kuchemann identificó las seis categorías anteriormente mencionadas: letra evaluada, letra no usada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable. A manera general, él mostró que los alumnos interpretan y usan las letras de manera distinta y que sus interpretaciones no siempre son las más adecuadas, ya que los conducen a obtener respuestas erróneas.

Este autor señala que los estudiantes que interpretan las literales dentro de las primeras tres categorías tienen un bajo nivel de comprensión, mientras que aquellos que las interpretan como incógnitas, números generales y como variable, se están acercando al álgebra. Él afirma que cuando un alumno es capaz de trabajar con “la letra como variable”, éste ha comprendido el uso de las literales en el álgebra (Kuchemann, 1981).

En la misma línea, Rosnick (1981) se interesó en investigar las concepciones erróneas del uso de los símbolos literales en estudiantes de nivel superior, y encontró que al trabajar con relaciones funcionales tendían a confundirse entre la variable dependiente y la variable independiente. Por otra parte, Matz (1982) identificó algunos de los errores más frecuentes y sugirió explicaciones al respecto. Comenta que los errores cometidos son resultado de la

adaptación del conocimiento previo a las nuevas situaciones. A su vez indica que mediante el análisis de los errores se puede aprender acerca de la naturaleza de la competencia algebraica que un sujeto ha desarrollado. Señala que los símbolos literales son utilizados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable, y que diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización. Considera que este uso de los símbolos literales puede contribuir a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor (Matz, 1982).

De igual manera, Wagner (1983) en su estudio plantea algunas reflexiones acerca de los problemas que presentan los estudiantes que inician el estudio del álgebra con símbolos literales o variables. Plantea una dualidad que ocasiona dificultad: los símbolos literales como números y los símbolos literales como letras, así como las características propias; y que la presencia de estas características, si bien puede facilitar el uso de las variables, también puede provocar dificultades para entenderlas. Por ejemplo, en matemáticas se usan generalmente las mismas letras para representar distintos usos de la variable, y de la misma forma se usan diferentes letras para representar un mismo uso de la variable, es decir, los símbolos literales pueden representar números y letras, por ejemplo π y e .

Booth (1988) realizó un estudio que tuvo el propósito de identificar los errores más comunes que los alumnos cometían en álgebra e hizo un análisis del porqué cometían esos errores. Los resultados de su investigación reportaron que los errores se centran en los siguientes aspectos:

- La transición de la aritmética al álgebra.
- El uso de la notación y convención en álgebra.
- El significado de las letras y variables.
- El tipo de relaciones y métodos en aritmética.

Su análisis reflejó que existe una dificultad en los estudiantes para aceptar expresiones abiertas como una solución válida; además de que trasladan sus conocimientos aritméticos al trabajar con el álgebra, por lo que es complicado para los estudiantes ver al signo de

igual como un indicador de la equivalencia entre dos partes e interpretar las letras de diferentes maneras a como se interpretan en aritmética.

Dado que en aritmética los símbolos que se trabajan representan cantidades con valores únicos, a los alumnos se les dificulta entender que en álgebra dos letras pueden representar el mismo número y por lo tanto, suponen que las letras distintas siempre representan diferentes números. Si bien muchos de los errores que cometen los estudiantes se debe a las diferencias que existen entre la aritmética y el álgebra, al tratar de comprender procedimientos y generalizar relaciones aritméticas se concibe el álgebra como aritmética generalizada y esto genera confusión en los alumnos. Booth menciona que la lista de las posibles causas de las dificultades en el aprendizaje del álgebra es extensa, sin embargo, este tipo de investigación proporciona la posibilidad de identificar los tipos de dificultades que enfrentan los estudiantes y cuáles son los más frecuentes (Booth, 1988).

Por su parte, Ursini (1996) señala que existe una confusión en los estudiantes en cuanto a cuáles son las acciones apropiadas a llevar a cabo en los distintos contextos en los que aparece la variable. Cuando el estudiante se enfrenta a una expresión algebraica a menudo duda si tiene que asignar valores a los símbolos literales que aparecen o calcular su valor; si la letra representa uno o más valores; si tiene que obtener un resultado numérico o una expresión algebraica como solución. De igual manera surgen confusiones cuando se debe manipular los símbolos literales o utilizarlos en problemas que requieren de una simbolización algebraica para representar la solución en sí misma o como parte del proceso de solución.

Desde el siglo XX hubo investigadores que asociaban las dificultades a la complejidad del concepto de variable, a las distintas interpretaciones de los símbolos literales, al número de variables que están involucradas en los problemas, así como también que los símbolos que se utilizan para representar la variable no son los más adecuados ya que contribuyen a crear cierta confusión (Wagner, 1981; Matz, 1982). Posiblemente, las diferentes combinaciones entre los tres componentes (símbolo, referente y contexto) y los tres aspectos (semántico, sintáctico y matemático) que están implícitos en diversos problemas, sea otro de los factores que influyen para que los estudiantes tengan dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Según Wagner (1981), los símbolos para las variables matemáticas adquieren un significado cuando aparecen en un contexto y representan algún referente: el símbolo y su referente determinan el papel semántico de una variable; el símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable.

Debido a que los símbolos para las variables son arbitrariamente intercambiables en el contexto y el referente, juntos, aparte de cualquier símbolo particular, determinan un aspecto de las variables que es único en matemáticas. Esto es, el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable.

Las tres componentes, símbolo, referente y contexto, así como el papel semántico, el sintáctico y el matemático se combinan para contribuir en la interpretación que los estudiantes le dan a la variable. Un cambio en cualquiera de estos componentes puede o no, dependiendo de la naturaleza del cambio, causar un cambio correspondiente en cada aspecto de la variable. Es decir, un cambio en el contexto o en el referente pueden o no afectar el papel matemático de la variable, excepto donde interviene el uso convencional (Morales & Díaz, 2003).

En cuanto a los orígenes de la interpretación de la sintaxis algebraica, Stacey y MacGregor (1997) encontraron que la base de las interpretaciones incorrectas se encuentra en las relaciones que establecen con otros sistemas de símbolos, justo en la intersección de conocimientos previos con nuevos aprendizajes en matemáticas, y que las concepciones que los estudiantes tienen de los diferentes conceptos matemáticos son el resultado de la enseñanza que han recibido.

Warren (1999), a su vez, realizó una investigación con respecto a la comprensión del concepto variable y encontró que la manera en la que se formulan las preguntas y el contexto, parecen influir en las respuestas de los estudiantes. Observó también que existe una necesidad por parte de los alumnos de cerrar las expresiones algebraicas, por lo que sugiere que se deben considerar dichas cuestiones cuando se quiere comprender las tendencias cognitivas de los estudiantes.

De manera general las investigaciones de Kuchemann (1981), Rosnick (1981), Matz (1982), Wagner (1983) y Booth (1984) marcaron una línea de investigación respecto a las

diferentes interpretaciones que los estudiantes hacen de las variables. Por ello otros investigadores como, Schoenfeld y Arcavi (1988), Usiskin (1988), Phillip (1992), Ursini (1994), Stacey y MacGregor (1997) y Warren (1999), indagaron sobre el tema y se reafirmó que la variable puede tener diferentes usos y por tanto diferentes interpretaciones, las cuáles son importantes para desarrollar el conocimiento algebraico. De igual manera se observó que aunque los estudiantes son capaces de manipular la variable, no son conscientes de los diferentes significados que ésta tiene y algunos autores también señalan la importancia que tiene el contexto matemático para determinar el uso de la variable (Usiskin, 1988; Philipp, 1999; Ursini 1996).

Los datos y evidencias mostradas por los investigadores indican, que la construcción de la noción de variable no es sencilla, pues surgen dificultades, confusiones y concepciones alternativas que interfieren en el proceso. Ante estas dificultades, es conveniente que los estudiantes comprendan este concepto, ya que es pieza fundamental para la adquisición de nuevos conceptos como el de función, concepto importante en las matemáticas de la variación y el cambio. Consideramos que si los estudiantes construyen y forman en su mente la comprensión de la noción de variable, entonces les será más sencillo adquirir los nuevos conceptos asociados a esta noción.

1.4 Objetivo de la investigación

Existe un tema en común entre los investigadores de la matemática educativa: los estudiantes tienen muchas ideas falsas acerca de la noción de variable y la forma en que se utilizan de acuerdo al contexto. Por ello, el objetivo de esta investigación es diseñar una secuencia didáctica apoyada en el “*Modelo 3UV*” propuesto por Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005), herramienta teórica que permite analizar los distintos usos de variable. El propósito de aplicar la secuencia es en primera instancia identificar las ideas alrededor del concepto de variable en una población de estudiantes de la IEMS (Instituto de Educación Media Superior); en un segundo momento se busca evaluar el avance de los estudiantes en el manejo del concepto de variable al aplicar la secuencia didáctica; y finalmente se aporta la secuencia didáctica para que futuros profesores puedan aplicarla y de ser posible mejorarla para lograr una mejor comprensión del concepto en los alumnos.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

Una buena comprensión del concepto de variable es fundamental para comprender el álgebra y las matemáticas en general. Sin embargo, dada la complejidad de este concepto, no se puede esperar que los alumnos logren entenderlo aceptablemente sin una enseñanza explícita y deliberada que resalte los distintos usos y que los ayude a moverse con flexibilidad entre ellos (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

Considerando lo anterior, Ursini y Trigueros (2005) propusieron el “*El Modelo 3UV*”, herramienta teórica que permite analizar los distintos usos de la variable que a su vez ellas proponen. El modelo surgió de analizar qué se requiere para poder resolver ejercicios y problemas típicos del álgebra elemental. Las autoras proponen una desarticulación del concepto de variable, con el fin de tener elementos para analizar el papel que tienen las variables en los problemas típicos del álgebra y de igual manera poder analizar las respuestas de los estudiantes.

Para las autoras “la comprensión del concepto de variable implica la posibilidad de superar la simple realización de cálculos y operaciones con letras o símbolos, para alcanzar una comprensión de las razones por las que funcionan estos procedimientos, la capacidad de ver hacia dónde conducen y la posibilidad de establecer relaciones entre los distintos aspectos que asume la variable en el contexto del álgebra elemental. Diremos que un estudiante es capaz de trabajar con la variable como un objeto matemático integrado, cuando la emplea en una situación específica, pasa de uno a otro de sus aspectos de manera flexible y los integra como componentes de un mismo ente matemático”(Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

Es decir, el alumno debe adquirir la capacidad primero de identificar el contexto en que se encuentra la variable, de manipularla adecuadamente y finalmente, utilizarla para representar un problema de manera abstracta y simbólica.

De acuerdo con estos investigadores, existen tres usos de la variable dentro del álgebra elemental:

- La variable como incógnita
- La variable como número general
- La variable en una relación funcional

A su vez para cada uso de la variable existen diferentes aspectos que implican interpretar, simbolizar y manipular variables.

2.1 La variable como incógnita

De acuerdo con Ursini y col.(2005) para comprender el uso de la variable como incógnita específica, y poder resolver exitosamente los problemas, es necesario reconocer que en una situación está involucrada una cantidad cuyo valor no se conoce, pero es posible determinar tomando en consideración los datos proporcionados; de igual manera se debe representar simbólicamente la cantidad desconocida relacionándola con los datos del problema, para desarrollar una expresión algebraica que refleje esta relación; es decir, una ecuación.

Al enfrentarse con una ecuación, ya sea dada o construida, es necesario ser capaz de operar los símbolos que involucra para encontrar el o los valores de la incógnita específica que hacen que la ecuación sea verdadera. Es importante, también, ser capaces de sustituir los valores obtenidos para la incógnita y verificar que satisface la ecuación.

En resumen para trabajar con problemas y ejercicios que involucran la incógnita es necesario:

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

2.2 La variable como número general

En el *Modelo 3UV* (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005) se sugiere que un requisito para comprender el uso de la variable como número general consiste en desarrollar la capacidad para reconocer patrones, hallar reglas, deducir métodos generales y describirlos. Por ello, es necesario distinguir entre los aspectos invariantes y los que varían en una multiplicidad de situaciones, que pueden incluir situaciones geométricas o numéricas, o estar relacionadas con la estructura de familias de problemas.

Para trabajar con la variable como número general se requiere que el alumno sea capaz de usar símbolos para representar una situación general, una regla o un método, o relacionar expresiones generales entre sí. También se espera que ante una expresión general, dada o construida por el estudiante, éste tiene que interpretar los símbolos involucrados como números generales, los cuales representan cantidades indeterminadas que no se puede, ni es necesario, determinar. Tiene que manipular este tipo de expresiones (por ejemplo, factorizar o simplificar) cuando así lo requiere el problema, sin necesidad de asignarle valores específicos a las variables.

Los números generales aparecen en expresiones abiertas ($4x + 7$), en tautologías ($3 + x = x + 3$), en fórmulas generales ($A = b \times h$), como parámetros en las ecuaciones ($x^2 + 5mx + 7 = 0$) y en las ecuaciones generales ($ax + b = cx + d$). Es necesario que el alumno los interprete como cantidades generales y logre distinguirlos de las variables simbólicas, que representan cantidades desconocidas pero específicas.

En resumen para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario:

- G1** Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
- G2** Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
- G3** Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
- G4** Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
- G5** Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

2.3 La variable como relación funcional

Ursiniy col. (2005) señalan que, para comprender la variable en una relación funcional, es necesario reconocer situaciones donde estén presentes la correspondencia entre las variables y la variación. Estas representaciones pueden presentarse en tablas, gráficas, expresiones analíticas o en problemas verbales; es importante que para estas representaciones se logre reconocer la correspondencia entre variables y reconocer que el cambio de una de ellas implica la variación de la otra. El reconocimiento de las relaciones funcionales implica la capacidad de ver que cada variable puede tomar muchos valores, dependiendo del intervalo donde esté definida la relación.

Trabajar con la correspondencia implica ser capaz de asignar valores a una de las variables y determinar, en correspondencia, el valor de la otra. Trabajar con la variación implica: desarrollar la capacidad para determinar los intervalos de variación de una de las variables, dados los de la otra; determinar dónde una función crece o decrece; determinar en qué puntos alcanza un valor máximo o un mínimo; cuándo sus valores son positivos o negativos, y cuándo su valor permanece constante.

También es importante que pueda simbolizar una relación funcional de manera analítica, estableciendo una relación simbólica entre las variables involucradas, independientemente de cómo se le proporcione la información (verbal, tabla, gráfica). Finalmente, debe poder diferenciar entre una expresión simbólica que representa una relación funcional, y otras que representan, por ejemplo, una ecuación o una tautología.

En resumen trabajar con la idea de variable en una relación funcional implica:

F1 Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

2.4 El Modelo 3UV

Después de analizar los requerimientos para poder resolver los distintos usos de la variable antes mencionados y buscando que los estudiantes logren desarrollar las capacidades que les permitan resolver exitosamente problemas y ejercicios que involucran los distintos usos de la variable, Ursiniy col.(2005) contemplan que una adecuada comprensión del concepto de variable, puede enfocarse en las siguientes capacidades básicas:

- Realizar operaciones con símbolos literales.
- Comprender la funcionalidad de estas operaciones.
- Predecir las consecuencias de utilizar variables.
- Distinguir los diferentes usos de la variable.
- Cambiar de un uso a otro, de manera flexible.
- Integrar los diferentes usos de la variable.

Por tal motivo, se considera que la solución competente de problemas algebraicos requiere de un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno, así como la integración y diferenciación de los distintos usos de la variable (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

El *Modelo 3UV* muestra, de manera explícita, los aspectos que caracterizan cada uno de los usos de la variable con los que se trabaja en los cursos de álgebra elemental. Por tanto, para el docente, representa un instrumento que le permite llevar a cabo diferentes tareas. Por un lado es un auxiliar para planificar y estructurar las sesiones de clase, por otro se puede utilizar como guía en el diseño de actividades que realizarán los alumnos y finalmente, resulta útil para diseñar instrumentos de diagnóstico.

De acuerdo con Ursiniy col.(2005) para que la propuesta de enseñanza del *Modelo 3UV* tenga éxito y los alumnos avancen en su aprendizaje del álgebra es fundamental el papel del profesor; en este sentido él tendrá que:

1. Organizar el entorno social en que se desarrolla la clase, de manera que exista una participación activa por parte de los estudiantes durante las actividades, con el fin de propiciar el intercambio de ideas acerca del concepto de variable.
2. Guiar a los alumnos durante las actividades y discusiones de grupo, con el propósito de que desarrollen habilidades para trabajar, primero, con cada uno de los diferentes usos de la variable de manera separada y, después, integrando los distintos usos de la variable y poder pasar de uno a otro de manera flexible.

Respecto al punto uno, se consideran convenientes las discusiones grupales, ya que en gran medida, el diálogo hará que en el salón de clases vayan surgiendo las nuevas ideas que llevarán a los estudiantes a apropiarse de nuevos conceptos. Es importante retomar respuestas equivocadas y analizarlas en colectivo con el fin de ir modificándolas hasta

lograr un consenso alrededor de una respuesta válida que ayude a los alumnos a acercarse al concepto deseado.

En cuando al segundo punto, su justificación emana de algunas ideas fundamentales de la teoría sociocultural de Vigotsky (1978). Uno de los conceptos de mayor importancia para la educación es el de *la zona de desarrollo próximo*. Ésta se define como la distancia entre el nivel de desarrollo real, determinado por la capacidad del niño para resolver un problema de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por su capacidad para resolver un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces. Según Vigotsky, un aspecto esencial del aprendizaje es que éste va creando la zona de desarrollo próximo, ya que despierta una variedad de procesos internos de desarrollo que operan sólo cuando el niño interactúa con otras personas de su entorno y con sus compañeros. Una vez que tales procesos son interiorizados, se vuelven parte del propio desarrollo del niño.

Aplicada a la enseñanza en el salón de clases, esta perspectiva hace evidente que el profesor no es un trasmisor de conocimientos, sino más bien un guía hacia la adquisición de los conceptos del álgebra.

En resumen, las acciones prácticas que son convenientes a seguir por el docente bajo esta perspectiva de Vygotsky y las implicaciones de los usos de la variable en el *Modelo 3UV* son las siguientes:

1. Crear un contexto de aprendizaje que involucre de manera integrada a los alumnos, el objeto de estudio y los instrumentos que se utilizan.
2. Planificar actividades que propicien el crecimiento de la zona de desarrollo próximo de los alumnos. Debe considerar las conexiones entre el conocimiento previo y los nuevos conceptos.
3. Prever que exista una participación activa y colaborativa de los estudiantes durante la ejecución de una actividad, bajo la guía de alguien más capaz. Se pretende que bajo la guía del docente, los estudiantes resuelvan los problemas planteados y que, poco a poco adquieran el control de la situación hasta ser capaces de resolverlos sin la intervención del experto. Específicamente se busca que, desde los primeros acercamientos al álgebra, los alumnos comiencen a :
 - Diferenciar entre los distintos usos de la variable.
 - Verbalizar las características de cada uso.
 - Desarrollar la idea de variable como un concepto multifacético, pasando entre sus distintos usos con flexibilidad.
 - Usar el lenguaje algebraico para expresarse.
4. Utilizar estrategias de comunicación adecuadas, que lleven a los estudiantes a la observación de aspectos relevantes.

Estas recomendaciones para implementar la propuesta de enseñanza con base en el *Modelo 3UV* pretenden resaltar la importancia que tiene, para la adquisición de conocimientos nuevos, el tipo de interacciones que se establecen en el salón de clase con el profesor y entre pares, y por otro lado, la relación que existe entre la adquisición de conocimientos nuevos y las actividades en las que se involucra a los estudiantes en el aula (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

CAPÍTULO 3

Metodología

Este capítulo inicia reconociendo la propuesta e hipótesis de este trabajo de investigación, enseguida se menciona el grupo de sujetos donde se aplicó la secuencia didáctica, posteriormente se presenta la secuencia de pasos que se siguió para el diseño de las actividades realizadas. Más tarde se presenta el diseño de los instrumentos utilizados: pretest, materiales de apoyo y postest, el procedimiento realizado a lo largo de su aplicación, así como el objetivo de cada una de las actividades de la secuencia; todo con base en las especificaciones marcadas por el *Modelo 3UV* (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005). Finalmente se mencionan las categorías a utilizar para analizar los resultados obtenidos.

3.1 Propuesta e hipótesis

La propuesta del trabajo de investigación es diseñar una secuencia didáctica que ayude a minimizar los principales errores que cometen los estudiantes cuando trabajan con el concepto de variable en situaciones contextualizadas; la secuencia se enfocará principalmente al estudio de los aspectos característicos del uso de la variable en la relación funcional.

La hipótesis es que, mediante el diseño e implementación de una secuencia didáctica con actividades centradas en el *Modelo 3UV*, que se enfoquen al reconocimiento y fortalecimiento de los aspectos que caracterizan el uso de la variable como una relación funcional y apoyándose en los otros dos usos como incógnita y como número general, se pueden lograr mejoras significativas en la comprensión del concepto variable en los alumnos del IEMS (Instituto de Educación Media Superior).

3.2 Los sujetos

La secuencia didáctica se aplicó en el Instituto de Educación Media Superior del D.F (IEMS), en el plantel “Ricardo Flores Magón” ubicado en Calzada de Tlalpan No 3463 y/o3465 Avenida Acoxta, Col. Viejo Ejido de Santa Úrsula, Delegación Coyoacán.

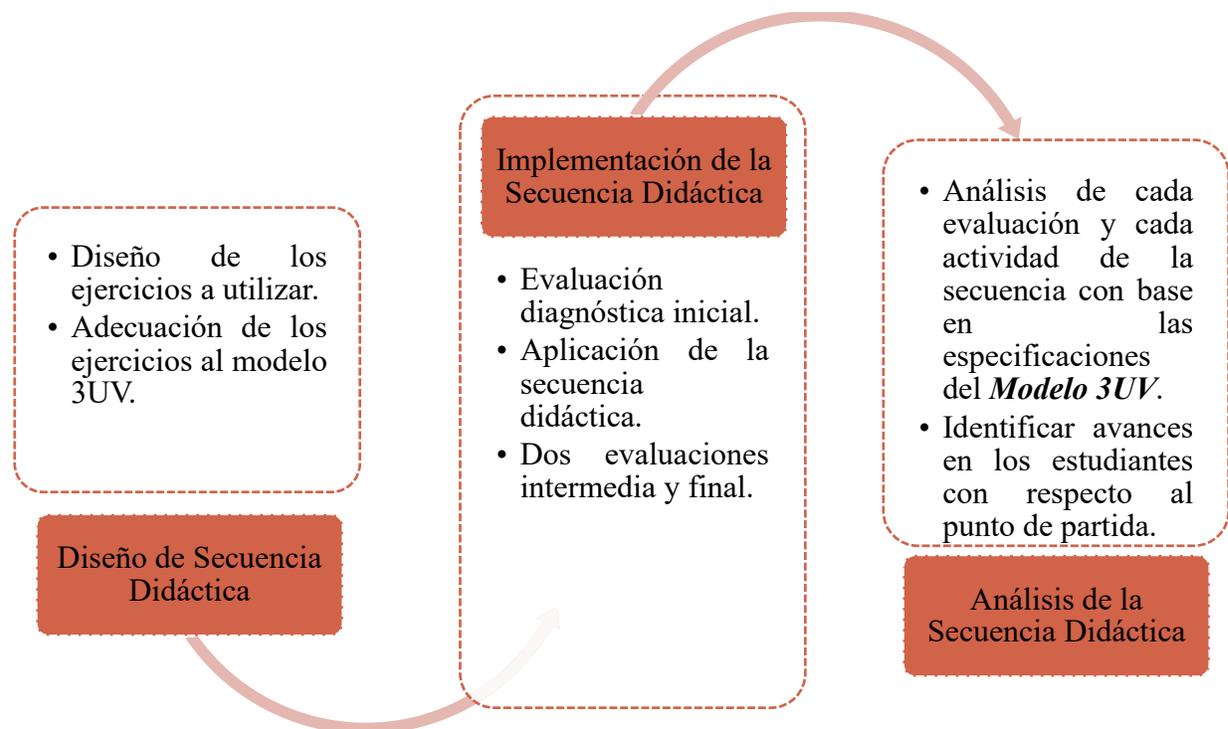
Se trabajó con un grupo de 14 estudiantes que cursaban el primer semestre en el turno vespertino, el horario de la clase fue de 6 a 7pm durante 3 días de la semana, en el calendario 2012-2013B. Las edades de los participantes oscilaban entre los 15 y 16 años; debido al horario y a la deserción solamente de 6 a 8 estudiantes acudieron con regularidad a la implementación de la secuencia.

Se decidió trabajar con este grupo muestra debido a las facilidades otorgadas en el curso de práctica docente y a la inquietud de analizar las problemáticas académicas presentadas en dicho sector de la población.

Los grupos de la IEMS son particularmente pequeños, debido a que se enfocan en canalizar a los estudiantes que terminan su educación básica y son rechazados en otras instituciones debido a la alta demanda y a los escasos lugares disponibles, dichos estudiantes residen en zonas marginadas de la ciudad, se caracterizan por provenir de familias sujetas al desempleo y subempleo, que carecen de garantías laborales y de prestaciones; además sus ingresos son eventuales, generalmente inferiores al salario mínimo(Varela y Alavez, 2012).

3.3 Diseño de secuencia didáctica

A fin de satisfacer la propuesta planteada sobre diseñar una secuencia didáctica basada en el *Modelo 3UV* que abone a una mejor comprensión del concepto variable en los alumnos de la IEMS, se llevaron a cabo los siguientes pasos:



3.4 Diseño de instrumentos e implementación

Para el diseño de la secuencia didáctica y las evaluaciones pretest y postest se consideraron los requerimientos (ver marco teórico) estipulados en el *Modelo 3UV*, mismos que indican el éxito de un estudiante al trabajar con problemas y ejercicios que involucran los tres usos de la variable: incógnita, número general y relación funcional (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

La secuencia didáctica se conformó de 6 actividades enfocadas a situaciones contextualizadas, cercanas a la vida cotidiana de los estudiantes, las preguntas fueron abiertas y requirieron de procedimientos matemáticos y una reflexión entre las variables involucradas. La implementación de cada actividad se realizó durante dos sesiones clase de una hora cada una, los estudiantes trabajaron de manera individual. Posteriormente, en plenaria dirigida por el docente, se exponían las respuestas de cada uno, mismas que se escribían en el pizarrón para tener un mejor marco de análisis, en algunos casos se requirió apoyo visual de gráficas. El docente se encargó de propiciar la participación de todos los estudiantes y la reflexión de cada actividad.

Al finalizar, cada actividad de la secuencia los alumnos llenaba una hoja de auto reflexión sobre lo que habían aprendido durante la sesión, dichos comentarios se analizaban para verificar si las actividades habían sido encaminadas a validar la hipótesis, en caso contrario se replanteaban las posteriores actividades.

Con el fin de evaluar la efectividad de la secuencia didáctica se realizaron 3 evaluaciones centradas en el *Modelo 3UV*, un pretest que buscaba identificar las concepciones acerca del concepto variable en los estudiantes previo a la implementación de la secuencia y dos postest ambos con el mismo grado de dificultad, que sirvieron para evaluar los avances después de aplicar la secuencia. Los postest se aplicaron en dos momentos, el primero al finalizar las tres primeras sesiones y el segundo al finalizar las últimas tres. Cada una de las evaluaciones se aplicó en una sesión de una hora.

3.5 Secuencia didáctica

A continuación se presentan las actividades que conformaron la secuencia didáctica con el objetivo correspondiente a cada bloque de preguntas o situación en particular, diseñadas conforme a las especificaciones que indica el *Modelo 3UV* para cada uso de la variable que fue involucrado. Para facilitar el manejo y análisis de las situaciones implementadas así como su objetivo, se presentan en una tabla de doble entrada, donde se separan por filas las preguntas o incisos de acuerdo al uso y especificación de la variable que se desea observar.

| Situación 1 | Objetivo a partir del <i>Modelo 3UV</i> |
|--|--|
| Una persona puede exponerse al sol durante 10 minutos sin sufrir quemaduras, además si utiliza una loción con un factor de protección solar de 5 FPS podría exponerse al sol durante 50 minutos más. | |
| a) ¿Cuántos minutos puede exponerse al sol una persona que utiliza una loción con un FPS 20, FPS 25, FPS 50? | F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). |
| b) Considerando que los principales factores de protección solar a la venta son 6, 10, 15, 20, 25, 30 y 50. Construye una tabla que relacione los FPS y el tiempo. | G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. |
| c) Explica con palabras la forma en que obtuviste los resultados | G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas. |
| d) ¿Cómo escribirías una fórmula que represente la cantidad de minutos que se puede exponer una persona en el sol, utilizando una loción con un FPS cualquiera? | G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales. F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. |

| Situación 2 | Objetivo a partir del <i>Modelo 3UV</i> | | | | | | | | | | | | |
|--|--|----------------------|-------------|-------------|----------------------|----------------------|------------|--|--|--|--|--|--|
| A partir de la regla que sirve para encontrar el tiempo en minutos que se puede permanecer en el sol, con cualesquiera FPS, analiza las preguntas. | | | | | | | | | | | | | |
| $tiempo\ en\ minutos = 10(FPS) + 10$ | | | | | | | | | | | | | |
| 1) ¿Existe alguna relación entre el tiempo que se puede exponer una persona al sol y el factor de protección? 2) ¿Qué le pasa al tiempo cuando se va aumentando el FPS? 3) Y si el tiempo va aumentando, ¿qué se puede decir del FPS? 4) ¿Qué ocurre con el tiempo, si disminuye el FPS utilizado? | F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). | | | | | | | | | | | | |
| 5) Aplica la regla para determinar el tiempo que se puede permanecer en el sol, con un FPS 7, 13, 28. | F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. | | | | | | | | | | | | |
| 6) Aplica la regla para determinar el FPS que se utilizó para lograr los siguientes tiempos de protección solar: | F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente. I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="width: 100%;"> <tbody> <tr> <td style="width: 15%;">Tiempo</td> <td style="width: 30%;">3 horas y 10 minutos</td> <td style="width: 15%;">y</td> <td style="width: 30%;">350 minutos</td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;">7 horas y 50 minutos</td> </tr> <tr> <td>FPS</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | Tiempo | 3 horas y 10 minutos | y | 350 minutos | | 7 horas y 50 minutos | FPS | | | | | | |
| Tiempo | 3 horas y 10 minutos | y | 350 minutos | | 7 horas y 50 minutos | | | | | | | | |
| FPS | | | | | | | | | | | | | |

| | |
|--|--|
| | <p>I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</p> <p>I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.</p> |
| <p>Ahora supongamos que podemos permanecer en el sol 20 minutos sin quemarnos.</p> <p>7) ¿Cómo modificamos la regla propuesta?</p> | <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.</p> |
| <p>8) ¿Cuántos minutos se puede permanecer en el sol con un FPS 5, 15, 25?</p> <p>9) ¿Qué observas?</p> | <p>F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.</p> <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> |
| <p>Y si ahora podemos permanecer en el sol 30 minutos sin quemarnos.</p> <p>10) ¿Cómo simbolizamos la regla propuesta?</p> <p>11) ¿Cuál elemento de la regla original es el que se modifica?</p> <p>12) ¿Cuáles elementos permanecen iguales en la regla?</p> | <p>F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.</p> <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> |
| <p>Explica con tus palabras, cómo se modificaría el tiempo de protección solar que nos brinda una loción, si pudiéramos permanecer más de 10 minutos en el sol sin quemarnos la piel.</p> | <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> |

Situación 3

Objetivo a partir del *Modelo 3UV*

Retomemos la tabla de la actividad 1, que representa el tiempo que brindan de protección los FPS 6, 10, 15, 20, 25, 30 y 50.

| FPS | 6 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Minutos | 70 | 110 | 160 | 210 | 260 | 310 | 510 |

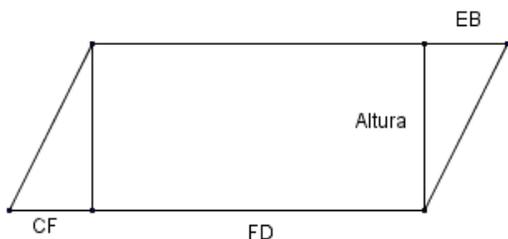
| | |
|--|---|
| <p>1) En una hoja de cuadrícula representa en un plano cartesiano los datos de la tabla anterior.</p> <p>A partir de la gráfica contesta:</p> <p>a) ¿Puedes saber cuántos minutos te puedes asolear, con cualquier FPS que se encuentre dentro del intervalo establecido?</p> <p>b) ¿Qué se tendría que hacer para saber cuántos minutos te puedes exponer al sol, con un FPS cualquiera?</p> | <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> |
| <p>Aplicando tu propuesta y a partir de la gráfica responde:</p> <p>a) ¿Cuántos minutos te puedes asolear con un FPS 35? ¿Y con un FPS 33?</p> <p>b) Si se tiene un tiempo de protección de 280 minutos, ¿qué FPS se utilizó? Y si en lugar de 280 minutos, se tienen 430 minutos, ¿qué FPS se utilizó?</p> | <p>F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.</p> <p>F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.</p> |
| <p>c) En términos de la situación planteada, ¿cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha?</p> <p>d) ¿Cómo se interpretaría la situación, si la gráfica fuera una recta horizontal?</p> | <p>F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> |
| <p>2) Si una persona desea obtener un tiempo de protección mayor a los 160 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar?</p> <p>3) Un vacacionista que busca tener un tiempo de protección mayor que 210 minutos, pero menor que 310 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar?</p> <p>4) ¿Cuál es el periodo de tiempo que se puede permanecer en el sol, si se utiliza una loción con un FPS mayor o igual que 25?</p> <p>5) ¿Cuál es el rango de FPS que permite permanecer en el sol entre 240 minutos y 440 minutos?</p> | <p>F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.</p> |

Situación 4

Objetivo a partir del *Modelo 3UV*

En la siguiente figura considera las medidas dadas para cada segmento y responde.

$$\overline{EB} = 2\text{cm}, \overline{CF} = 2\text{cm}, \overline{FD} = 6\text{cm}$$



| | |
|---|--|
| 1) ¿Cómo represento la altura del paralelogramo si no conozco su valor? | I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. |
| 2) ¿Cuánto mide la base del paralelogramo? | |
| 3) Expresa simbólicamente el área del paralelogramo a partir de sus dimensiones. | I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. |
| 4) Si el área de uno de los triángulos rectángulos es de 4cm^2 , ¿cuál es el valor de la altura del paralelogramo? | I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. |
| 5) ¿Cuál es el valor del área del paralelogramo? | I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos. |
| 6) ¿Qué valores puede tomar el área del paralelogramo cuando la altura vale 1cm, 5cm, 9cm, 10cm? | F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. |
| 7) ¿De qué depende el valor del área del paralelogramo? | F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). |

La siguiente tabla muestra el área que puede tomar un paralelogramo con diferentes alturas.

| | | | | | |
|---------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Altura | 1cm | 2cm | 3cm | 5cm | 7cm |
| Área | 8cm^2 | 16cm^2 | 24cm^2 | 40cm^2 | 56cm^2 |

Auxíliate de ella para contestar las siguientes preguntas:

| | |
|--|--|
| 8) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 56cm^2 , ¿qué valores puede tomar la altura? | F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra. |
| 9) Si queremos que el área del paralelogramo sea menor que 40cm^2 , ¿cuál es el intervalo de valores puede tomar la altura? | |

| | |
|--|--|
| 10) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 16cm^2 pero menor que 120cm^2 , ¿cuál es el intervalo de valores que toma la altura? | |
| 11) Explica cómo se afecta el valor del área cuando se le van haciendo cambios al valor de la altura. | F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). |
| 12) Si la representación simbólica del área del paralelogramo es $A = bh$ y específicamente para este ejercicio es $A = 8h$ a) ¿Qué valores puede tomar la altura? b) ¿Qué valores puede tomar el área? | G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. |
| c) En la fórmula $A = 8h$, ¿cuáles son las variables? d) ¿Por qué consideras que son variables? e) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué? f) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué? g) Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del área y el valor de la altura. | F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). |

Situación 5

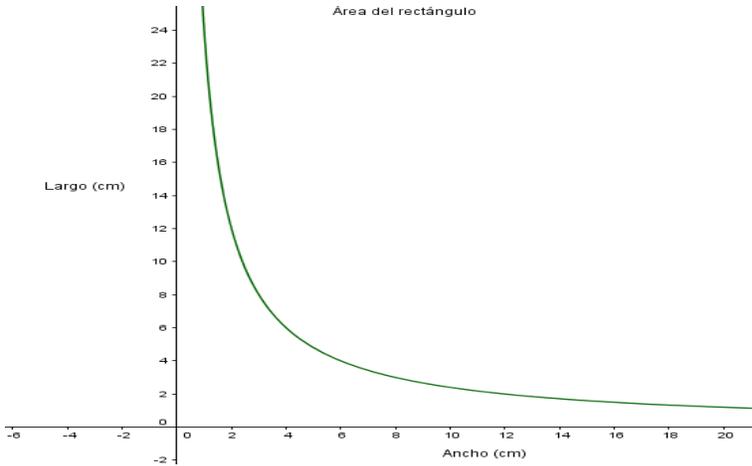
Objetivo a partir del *Modelo 3UV*

Se tiene una pieza rectangular de cobre con las siguientes dimensiones: el largo del rectángulo es cinco veces el ancho y el ancho del rectángulo es un número desconocido.

| | |
|--|--|
| 1) Traza un dibujo donde representes la información proporcionada. 2) Escribe una fórmula que te represente el perímetro del rectángulo que dibujaste | I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones |
| 3) Supongamos que el perímetro del rectángulo mide 84mm , ¿qué ecuación se puede plantear a partir del valor del perímetro y las dimensiones del rectángulo? 4) ¿Cuánto miden sus dimensiones? | I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. I4 Determinar la cantidad desconocida que |

| | aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos. | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|-------|------|------|------|-------|-----|------|-----------|------|------|------|------|------|-------|
| 5) Ahora supongamos que el ancho del rectángulo vale 1mm, 5mm, 7mm, 10mm. a) ¿Qué valores puede tomar el largo del rectángulo? b) ¿De qué depende el valor del largo del rectángulo? | F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. | | | | | | | | | | | | | | |
| 6) ¿Qué valores toma el perímetro del rectángulo cuando el ancho mide 2mm, 4mm, 6mm, 8mm? 7) ¿De qué depende el valor del perímetro? 8) ¿Qué pasa con el valor del perímetro cuando se aumenta o disminuye el valor del ancho? | F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. | | | | | | | | | | | | | | |
| 9) Si se tiene una pieza rectangular de cobre con un perímetro de 192mm, ¿cuánto mide su ancho? | I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos. I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. | | | | | | | | | | | | | | |
| La siguiente tabla muestra el perímetro que tiene la pieza de cobre cuando el valor de su ancho se va variando. | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ancho</th> <th>1mm</th> <th>2mm</th> <th>4mm</th> <th>6mm</th> <th>8mm</th> <th>10mm</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>Perímetro</th> <td>12mm</td> <td>24mm</td> <td>48mm</td> <td>72mm</td> <td>96mm</td> <td>120mm</td> </tr> </tbody> </table> | | Ancho | 1mm | 2mm | 4mm | 6mm | 8mm | 10mm | Perímetro | 12mm | 24mm | 48mm | 72mm | 96mm | 120mm |
| Ancho | 1mm | 2mm | 4mm | 6mm | 8mm | 10mm | | | | | | | | | |
| Perímetro | 12mm | 24mm | 48mm | 72mm | 96mm | 120mm | | | | | | | | | |
| Apóyate en ella para contestar las siguientes preguntas: | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1) Si se busca que la pieza de cobre tenga un perímetro mayor o igual que 24mm, ¿qué valores debe tomar el ancho? 2) Y si se quiere que el perímetro sea menor o igual que 72mm, ¿qué valores puede tomar el ancho? 3) Si ahora se desea que el perímetro sea mayor que 24mm, pero menor que 120mm, ¿cuál es el intervalo | F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra. | | | | | | | | | | | | | | |

| | |
|--|--|
| de valores que puede tomar el ancho? | |
| Si la fórmula particular que representa el perímetro del rectángulo es $P = 12a$ | G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. |
| a) ¿Qué valores puede tomar el ancho? b) ¿Qué valores puede tomar el perímetro? c) En la fórmula escrita, ¿cuáles son las variables? d) ¿Por qué consideras que son variables? e) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué? f) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué? g) Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del perímetro y el valor del ancho. | F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). |

| | | |
|---|--|---|
| Situación 6 | | Objetivo a partir del <i>Modelo 3UV</i> |
| Supongamos que el área de un rectángulo cuyas dimensiones son “a” y “b”, se mantiene constante en 24cm^2 . | | |
| 1) Traza un dibujo donde representes la información dada 2) Escribe una fórmula que represente el área del rectángulo 3) ¿Qué significa que el área del rectángulo se mantenga constante en 24cm^2 ? | | I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales. |
| 4) Observa la siguiente gráfica y contesta cada inciso | | |
|  | | |
| a) ¿Qué información proporciona la gráfica? | | F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). |

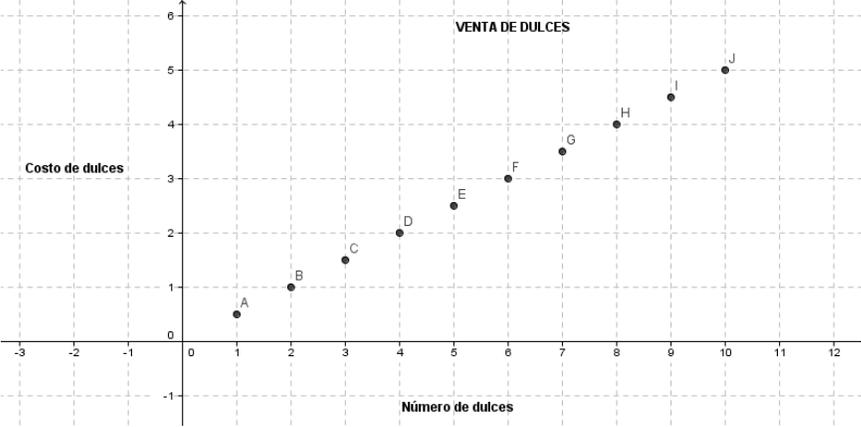
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|----------------------|--|--|-----|--|-----|--|-----|-----|---|
| <p>b) Completa la siguiente tabla</p> <table border="1" data-bbox="228 254 911 365"> <tr> <td>Ancho del rectángulo</td> <td>1cm</td> <td>2cm</td> <td></td> <td>4cm</td> <td></td> <td>8cm</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Largo del rectángulo</td> <td></td> <td></td> <td>8cm</td> <td></td> <td>4cm</td> <td></td> <td>2cm</td> <td>1cm</td> </tr> </table> | Ancho del rectángulo | 1cm | 2cm | | 4cm | | 8cm | | | Largo del rectángulo | | | 8cm | | 4cm | | 2cm | 1cm | <p>F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.</p> <p>F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.</p> |
| Ancho del rectángulo | 1cm | 2cm | | 4cm | | 8cm | | | | | | | | | | | | | |
| Largo del rectángulo | | | 8cm | | 4cm | | 2cm | 1cm | | | | | | | | | | | |
| <p>5) Si se mantiene constante el área y se varía el valor del ancho del rectángulo:</p> <p>a) ¿Qué sucede con el valor del largo?</p> <p>b) ¿De qué depende el valor que toma el largo?</p> <p>c) ¿Cuál es la variable dependiente?</p> <p>d) ¿Cuál es la variable independiente?</p> <p>6) Supongamos que ahora se varía el valor del largo del rectángulo:</p> <p>a) ¿Qué sucede con el valor del ancho?</p> <p>b) ¿De qué depende el valor que toma el ancho?</p> <p>c) ¿Cuál es la variable dependiente?</p> <p>d) ¿Cuál es la variable independiente?</p> | <p>F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>7) Para que se cumpla la condición de que el área permanezca constante en 24cm^2:</p> <p>a) ¿Qué valores debe tomar el ancho?</p> <p>b) ¿Qué valores debe tomar el largo?</p> | <p>F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>8) ¿Qué sucede con los valores del largo, cuando los del ancho van aumentando?</p> <p>9) ¿Qué sucede con los valores del ancho, cuando los del largo van disminuyendo?</p> | <p>F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>La fórmula para obtener el área de un rectángulo cualquiera es la siguiente:</p> $A = (m)(n)$ <p>a) En la fórmula escrita ¿Cuáles son las variables?</p> <p>b) ¿Qué representa A?</p> <p>c) ¿Qué tipo de variable es?</p> <p>d) ¿Qué representa m?</p> <p>e) ¿Qué tipo de variable es?</p> <p>f) ¿Qué representa n?</p> <p>g) ¿Qué tipo de variable es?</p> <p>h) Escribe dos fórmulas equivalentes a la dada</p> <p>i) ¿Por qué consideras que son equivalentes a la fórmula original?</p> | <p>I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.</p> <p>G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.</p> <p>F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Evaluación diagnóstica | Objetivo a partir del <i>Modelo 3UV</i> |
|---|--|
| <p>1.- Una persona que desea viajar a San Diego, California acude al banco para comprar dólares americanos. Al llegar al banco observa que el precio de venta de cada dólar es de \$13 pesos.</p> <p>a) ¿Cuántos dólares puede comprar la persona si tiene \$1,300 pesos?</p> <p>b) Y si tiene \$2,600 pesos, ¿cuántos dólares puede comprar?</p> <p>c) Y si tiene \$9,100 pesos, ¿cuántos dólares puede comprar?</p> <p>2.- ¿Observas alguna relación entre el dinero en pesos que tiene la persona y el costo por cada dólar americano?</p> | <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> |
| <p>3.- Una persona que tiene entre 130 pesos y 650 pesos</p> <p>a) ¿Cuál es la mínima cantidad de dólares que puede comprar?</p> <p>b) Y ¿cuál es la máxima cantidad de dólares que puede comprar?</p> | <p>F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.</p> |
| <p>4.- Para obtener la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene 13, 39, 65, 91, ..., 117 pesos.</p> <p>a) ¿Qué operaciones se tienen que hacer?</p> <p>b) ¿Observas algún patrón en las operaciones que se realizan? ¿Cuál?</p> | <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.</p> |
| <p>5.-Construye una tabla que te ayude a representar la cantidad de dólares americanos que se pueden comprar de acuerdo a las cantidades de dinero que se dieron en la pregunta 4.</p> <p>Observa la tabla que llenaste y contesta:</p> <p>a) ¿Existe algún patrón? ¿Cuál?</p> <p>b) ¿Qué significa el patrón que encontraste?</p> <p>c) ¿Consideras que ese patrón te puede servir para construir una regla o fórmula que te ayude a encontrar más fácil la cantidad de dólares que puedes comprar según el dinero que tengas?</p> | <p>I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.</p> <p>I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</p> <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> |
| <p>6.- ¿Cómo escribirías la regla o fórmula que te represente la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene una cantidad cualquiera de dinero?</p> | <p>G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.</p> <p>F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.</p> |

| | |
|--|--|
| <p>7.- ¿Cómo utilizarías la regla que construiste para calcular la cantidad de dólares que se pueden comprar con \$5, 850?</p> | <p>F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.</p> <p>I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.</p> <p>I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.</p> <p>I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.</p> <p>I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</p> <p>I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.</p> |
| <p>8.- ¿Cómo utilizarías la regla que construiste para saber cuánto dinero tendrías que pagar por 155 dólares americanos?</p> | <p>F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.</p> <p>I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.</p> <p>I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.</p> <p>I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.</p> <p>I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.</p> <p>I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.</p> |

Una persona vende dulces y refrescos cada mañana a la salida de una estación del metro; los dulces que vende cuestan 50 centavos cada uno y los refrescos 5 pesos cada uno.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|---|---|---|---|------|----|-------|------|--|--|--|--|------|--|
| <p>1) Con base en la información sobre el costo de los dulces completa la siguiente tabla.</p> <table border="1" data-bbox="224 415 797 506"> <tr> <td>Número de dulces</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Costo</td> <td>0.50</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>5.00</td> </tr> </table> | Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | Costo | 0.50 | | | | | 5.00 | <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> <p>F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.</p> |
| Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | | | | | | | | | |
| Costo | 0.50 | | | | | 5.00 | | | | | | | | | |
| <p>2) Observa detenidamente la tabla que llenaste y contesta:</p> <p>a) ¿Qué información nos da la tabla?</p> <p>b) ¿Cómo sé cuánto dinero tengo que pagar?</p> <p>c) ¿De qué depende el dinero que pago?</p> <p>d) Conforme aumenta la cantidad de dulces que se venden, ¿qué pasa con el costo?</p> | <p>G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> <p>F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>e) Supongamos que se desea ampliar la tabla de costos de los dulces,</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿cuántos valores se pueden poner en la fila del número de dulces? • ¿y cuáles valores se deben poner en la fila del costo? | <p>G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.</p> | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>f) ¿Qué operación realizas para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 6 dulces?</p> <p>g) ¿Qué representa 0.50? Y ¿qué representa el 5?</p> <p>h) Ahora, ¿qué se tiene que hacer para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 12 dulces?</p> <p>i) ¿Cuál es el valor que permanece constante en las operaciones que realizaste?</p> <p>j) ¿Cuál es el valor que va cambiando?</p> <p>k) ¿Por qué el valor que mencionaste en el inciso anterior puede tomar diferentes valores?</p> | <p>G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.</p> <p>G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.</p> | | | | | | | | | | | | | | |

| | |
|---|---|
| l) ¿Cómo se puede representar? | |
| m) Con ayuda de las operaciones que realizaste y las observaciones antes mencionadas, escribe una fórmula que sirva para calcular el costo total de una cantidad cualquiera de dulces. | F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. |
| <p>3) Observa la gráfica y contesta:</p>  | |
| <p>a) ¿Qué tengo que hacer para saber cuánto cuestan 4 dulces? Márcalo en la gráfica</p> <p>b) ¿Qué tengo que hacer para saber cuántos dulces puedo comprar con 4.00 pesos? Márcalo en la gráfica</p> <p>c) ¿Cuánto pago por 8 dulces? Márcalo en la gráfica</p> | <p>F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).</p> <p>F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.</p> <p>F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.</p> |
| <p>d) Si quiero gastarme entre 2.00 pesos y 5.00 pesos, ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar?</p> <p>e) Si quiero gastarme más de 5.00 pesos, ¿cuántos dulces puedo comprar?</p> <p>f) Si quiero gastarme menos de 5.00 pesos pero más de 1.00 peso ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar?</p> | <p>F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.</p> |

Evaluación 2 Postest

Objetivo a partir del *Modelo 3UV*

Se sabe que el corazón humano bombea aproximadamente 5 litros de sangre cada minuto, lo que representa la totalidad del volumen de sangre que tenemos en nuestro cuerpo.

1) Con base en la información proporcionada completa la siguiente tabla.

| | | | | | | | | | | |
|--------|---|----|---|----|---|----|---|---|----|----|
| Minuto | 1 | | 3 | | 5 | | 7 | 8 | | 10 |
| Litros | | 10 | | 20 | | 30 | | | 45 | |

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

2) Observa la tabla y contesta:

- a) ¿Qué información te proporciona la tabla?
- b) ¿Cómo obtienes el volumen en litros de sangre que bombea el corazón en el minuto 1, 2, ..., n?
- c) Expresa simbólicamente el volumen de sangre que bombea el corazón en un minuto cualquiera.

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

d) Con base en la fórmula propuesta contesta:

- ✓ ¿Cuánta sangre bombea el corazón en 75 minutos?
- ✓ Si se sabe que el corazón bombeó 325 litros de sangre, ¿cuántos minutos transcurrieron?

e) Explica cómo cambia el volumen que bombea el corazón cuando se le van haciendo variaciones al tiempo.

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y

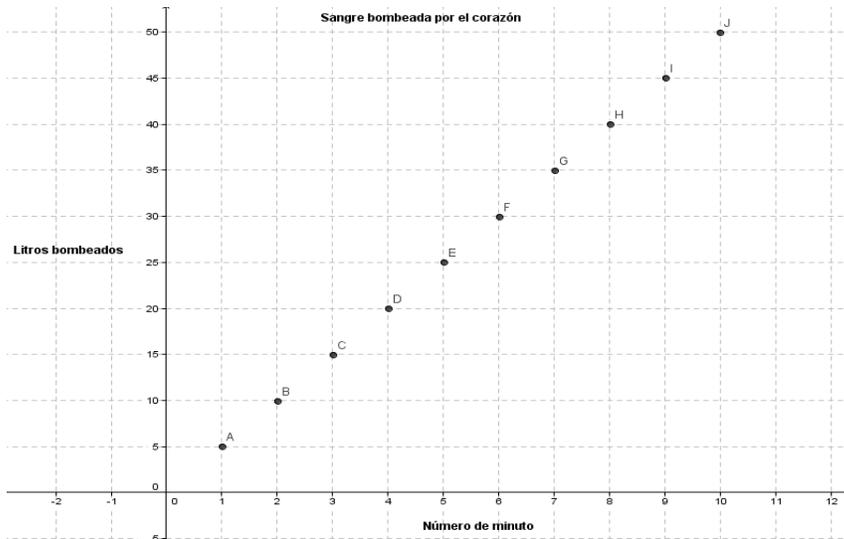
utilizarlas para plantear ecuaciones.

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

Observa la siguiente gráfica y contesta las preguntas correspondientes



3) ¿Cuáles son las variables involucradas en la gráfica?

4) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?

5) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

6) Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea **menor que** 25 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?

7) Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea **mayor que** 45 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?

8) Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea **mayor o igual que** 15 litros pero **menor o igual que** 50 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

| | |
|--|--|
| 9) Entre los 4 y 9 minutos, ¿cuál es el intervalo de litros de sangre que bombea el corazón? | |
|--|--|

3.6 Metodología para análisis

Una vez aplicadas las actividades de la secuencia didáctica y los instrumentos para medir su efectividad, se procedió a seleccionar una muestra de siete alumnos de los catorce enlistados, dado que fueron los que acudieron con mayor constancia a las prácticas realizadas. Las respuestas que los estudiantes dieron a las preguntas trabajadas en el salón de clase se analizaron en dos etapas. Ante todo, se analizó en cada estudiante su capacidad para trabajar con cada aspecto de la variable involucrado en las preguntas. Se dio la libertad de que contestaran bajo sus conocimientos previos y los que fueron adquiriendo conforme avanzó la secuencia didáctica. En ningún momento se brindó ayuda extra a los estudiantes o se les pidió el uso de un lenguaje específico.

Para fin de organizar y analizar los datos, en una primera etapa se determina cuántos alumnos respondieron las preguntas en las siguientes categorías: bien, manipulación aritmética, incomprensión, no contestó. Estos resultados se expresaron en porcentaje a manera de poder comparar conforme avanzan en las actividades, si se muestran avances en el manejo de los usos de la variable (incógnita, número general y relación funcional). Posteriormente se realiza un análisis de los porcentajes obtenidos para cada pregunta o situación problemática considerando los aspectos de la variable involucrada en la pregunta en cuestión. En la segunda etapa se analizan las evaluaciones aplicadas siguiendo los mismos criterios mencionados.

En las categorías propuestas se consideran bien las respuestas por parte de los alumnos que demuestren que dominan el aspecto característico en cuestión; la categoría manipulación aritmética se asociará con los intentos numéricos que realicen los estudiantes para darle respuestas a las preguntas; la categoría incomprensión será asociada con aquellas propuestas que intentan llegar a un resultado sin asociarlo con los aspectos analizados; finalmente, la categoría no contestó será utilizada para las preguntas en blanco.

Los aspectos a considerar para cada uso de la variable se sustentan en el marco teórico propuesto en el *Modelo 3UV*, (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005) y son los siguientes:

La variable como incógnita:

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

La variable como número general:

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

La variable como relación funcional:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

CAPÍTULO 4

4.1 Análisis de datos

El análisis de los datos enfocado al manejo de los tres usos de la variable: incógnita, número general y relación funcional se sustenta en el *Modelo 3UV*, (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005) que ha probado ser un instrumento de gran utilidad en el diseño de actividades para los alumnos y para planear y estructurar estrategias de enseñanza (Montes, 2003); diseñar instrumentos de diagnóstico (Ursini & Trigueros, 1997); analizar el uso de las variables en los libros de texto (Benitez, 2004) y analizar la comprensión del concepto de variable de los profesores (Juárez, 2001).

Con el fin de identificar y analizar los aspectos de las variables involucradas, se analizaron las tres evaluaciones y las seis actividades de la secuencia didáctica, esto permitirá observar si existió un avance en el manejo de los usos de la variable conforme se fue aplicando la secuencia didáctica. El análisis de los datos se presentará en dos momentos, en el primero se analiza la secuencia didáctica apoyándose en una tabla donde se relaciona la situación y su análisis particular con base en los aspectos que marca el *Modelo 3UV* (véase marco teórico), seguida de una tabla resumen con las categorías: bien, manipulación aritmética, incompreensión, no contestó, donde se muestra el porcentaje de alumnos que se ubica en cada categoría un breve análisis de los resultados. En el segundo momento se analizan los instrumentos de evaluación (evaluación diagnóstica, evaluación 1 y evaluación 2) que midieron la efectividad de la secuencia didáctica, se sigue el mismo formato de la primera etapa para realizar el análisis de cada pregunta a partir del *Modelo 3UV*, posteriormente se observa el porcentaje de avance en cada instrumento y finalmente se realiza un análisis general de las tres evaluaciones.

4.2 Análisis de las actividades de la secuencia didáctica

A continuación se procede al análisis de las situaciones implementadas en el salón de clase respetando el orden de aparición

| Situación 1 | Análisis a partir del <i>Modelo 3UV</i> |
|---|--|
| Una persona puede exponerse al sol durante 10 minutos sin sufrir quemaduras, adicional si utiliza una loción con un factor de protección solar de 5 FPS podría exponerse al sol durante 50 minutos más. | Al leer y plantearse la situación se espera que los estudiantes reconozcan la correspondencia entre el tiempo que se puede permanecer en el sol y el FPS que se utilice para protegerse de los rayos ultravioleta (F1). |
| a) ¿Cuántos minutos puede exponerse al sol una persona que utiliza una loción con un FPS 20, FPS 25, FPS 50? | Al momento de identificar que existe una correspondencia los alumnos identifican que los datos siguen patrones y reglas; multiplican el factor |

| | |
|---|--|
| b) Considerando que los principales factores de protección solar a la venta son 6, 10, 15, 20, 25, 30 y 50. Construye una tabla que relacione los FPS y el tiempo | de protección solar por 10 y le agregan 10 minutos. (G1) . Al identificar que tienen presente el valor de la variable independiente se espera que logren utilizar el patrón o regla establecida para obtener los valores de la variable independiente (F2) |
| c) Explica con palabras la forma en que obtuviste los resultados | Los alumnos explican con palabras lo que observan en los patrones que aplicaron para obtener los resultados de la tabla anterior (G3) y tratan simbolizar sus ideas (G5) asociándolo con una relación funcional y lo escriben mediante una regla o fórmula (F6) . |
| d) ¿Cómo escribirías una fórmula que represente la cantidad de minutos que se puede exponer una persona en el sol, utilizando una loción con un FPS cualquiera? | |

Tabla 1

| Porcentaje de Situación 1 | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | |
| | G1 | G3 | G5 | F1 | F2 | F6 |
| Bien | 100% | 28.5% | 42.8% | 28.5% | 28.5% | 42.8% |
| Manipulación aritmética | 0% | 57.2% | 28.5% | 0% | 71.5% | 28.5% |
| Incomprensión | 0% | 14.2% | 28.5% | 71.5% | 0% | 28.5% |
| No contestó | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |

Los datos de la tabla 1 muestran que todos los estudiantes lograron identificar que existe un patrón **(G1)** en los datos del problema, sin embargo sólo 2 de los 7 estudiantes logra deducir la regla y la correspondencia entre variables **(G3, F1)** que siguen los datos y son capaces de explicarla con palabras, la mayoría hace intentos numéricos para explicarla. Por otro lado, poco menos de la mitad de los estudiantes simboliza la relación funcional y la asocia con un patrón que siguen los datos **(G5, F6)**, el resto intenta simbolizar la relación funcional, pero no lo logra; debido a que no reconocen la correspondencia entre las variables relacionadas **(F1)** por ello al momento de determinar los valores de la variable dependiente **(F2)** la mayoría hace intentos numéricos que no los llevan al resultado correcto.

Estos resultados muestran que la mayoría de los estudiantes se focalizan en resolver las preguntas apoyándose en métodos numéricos, son capaces de identificar patrones, pero no

logran identificar una relación funcional ni logran simbolizarla. Por ende, los resultados arrojan que la mayoría de los alumnos no dominan los tres usos de la variable y sólo pocos tienen alguna noción de los mismos.

| Situación 2 | | Análisis a partir del <i>Modelo 3UV</i> | | | | | | | | | |
|---|--------------------|--|----------------------|------------|----------------------|------------|--|--|--|--|--|
| <p>A partir de la regla que sirve para encontrar el tiempo que se puede permanecer en el sol, con cualesquiera FPS, analiza las siguientes preguntas y responde:</p> $\text{Tiempo en minutos} = 10(\text{FPS}) + 10$ | | | | | | | | | | | |
| <p>1) ¿Existe alguna relación entre el tiempo que se puede exponer una persona al sol y el factor de protección?</p> <p>2) ¿Qué le pasa al tiempo cuando se va aumentando el FPS?</p> <p>3) ¿Qué ocurre con el tiempo, si disminuye el FPS utilizado?</p> | | <p>Las preguntas van enfocadas a que los alumnos identifiquen la variación conjunta entre las variables relacionadas, tiempo y FPS (F4).</p> | | | | | | | | | |
| <p>4) Aplica la regla para determinar el tiempo que se puede permanecer en el sol, con un FPS 7, 13, 28.</p> <p>5) Aplica la regla para determinar el FPS que se utilizó para lograr los siguientes tiempos de protección solar:</p> <table border="1" data-bbox="224 1031 792 1213"> <tr> <td>Tiempo</td> <td>3horas y 10minutos</td> <td>350minutos</td> <td>7 horas y 50 minutos</td> </tr> <tr> <td>FPS</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> | | Tiempo | 3horas y 10minutos | 350minutos | 7 horas y 50 minutos | FPS | | | | <p>Para poder llenar la tabla del punto 4 y 5 es necesario que se reconozca e identifique la presencia de un valor desconocido (I1) que a su vez puede ser determinado siguiendo la regla propuesta, la cual los lleva a operaciones algebraicas y aritméticas sencillas (I4). Al analizar las tablas el alumno debe interpretar la variable simbólica, FPS o tiempo, según sea el caso como la representación de valores específicos (I2) y así poder determinar los valores de cada una dados los de la otra (F2, F3).</p> | |
| Tiempo | 3horas y 10minutos | 350minutos | 7 horas y 50 minutos | | | | | | | | |
| FPS | | | | | | | | | | | |
| <p>Ahora supongamos que podemos permanecer en el sol 20 minutos sin quemarnos.</p> <p>6) ¿Cómo modificamos la regla propuesta?</p> <p>7) ¿Cuánto tiempo se puede permanecer en el sol con un FPS 5, 15, 25?</p> <p>8) ¿Qué observas?</p> <p>Y si ahora podemos permanecer en el sol 30 minutos sin quemarnos.</p> <p>9) ¿Cómo simbolizamos la regla propuesta?</p> <p>10) ¿Cuál elemento de la regla original es el que se modifica?</p> <p>11) ¿Cuáles elementos permanecen iguales en la regla?</p> | | <p>Al modificar el tiempo que se puede permanecer en el sol por 20 y 30 minutos respectivamente se busca que el estudiante reconozca un patrón que ha sido modificado (G1) y a su vez pueda simbolizar la relación funcional con base en el análisis de los datos que ha venido llenando en las tablas previas (F6).</p> <p>Por otra parte cuando se le pide que calcule el tiempo que puede permanecer en el sol con diferentes FPS se pretende que determine el valor de la variable dependiente dados los de la independiente (F2). Finalmente al cuestionarle los elementos que se pueden modificar y los que no de la regla propuesta se busca que logre interpretar la variable como una representación que puede asumir cualquier valor (G2).</p> | | | | | | | | | |

| | |
|--|--|
| Explica con tus palabras, cómo se modificaría el tiempo de protección solar que nos brinda una loción, si pudiéramos permanecer más de 10 minutos en el sol sin quemarnos la piel. | Con este análisis final de la actividad se pretende reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional (F4). |
|--|--|

Tabla 2

| Porcentaje de Situación 2 | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | |
| | I1 | I2 | I4 | G1 | G2 | F2 | F3 | F4 | F6 |
| Bien | 85.7% | 85.7% | 85.7% | 100% | 71.4% | 57.1% | 57.1% | 42.8% | 0% |
| Manipulación aritmética | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 28.6% | 28.6% | 14.3% | 0% |
| Incomprensión | 14.3% | 14.3% | 14.3% | 0% | 28.6% | 14.3% | 14.3% | 28.6% | 100% |
| No contestó | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 0% |

Los datos de la tabla 2 muestran que todos los estudiantes logran identificar que existe una variación conjunta (**F4**) entre el tiempo y el FPS, en sus respuestas se menciona que una variable depende de la otra y que si aumenta o disminuye el FPS entonces el tiempo de igual manera lo hará. La mayoría identifica la presencia de algo desconocido (**I1**) que pueden determinar siguiendo operaciones algebraicas sencillas (**I4**) al momento que asume un valor específico el FPS o el tiempo (**I2**) y resuelven la ecuación resultante en cada caso, otros llegan al resultado por métodos aritméticos donde hacen pruebas y errores (**F2, F3**).

Todos logran identificar que el patrón de los 10 minutos que se podía permanecer en el sol ha sido modificado por 20 y 30 respectivamente (**G1**), sin embargo, nadie logra comprender que el tiempo de protección que brinda cada FPS continúa igual, por ello todos los estudiantes simbolizan inadecuadamente la regla (**F6**) y por ende completan mal los datos que se les pide calcular con cada nueva situación, pese a ello logran identificar que la variable va tomando valores específicos (**I2**) y los sustituyen y operan en la fórmula de manera adecuada. Sólo tres estudiantes logran identificar que existe una relación entre el tiempo y los FPS (**F4**); mencionan que el tiempo puede ser modificado conforme

modifiquen el FPS y/o el tiempo que pueden permanecer en el sol, esto debido a que pueden aumentar o disminuir el valor del FPS.

Continúa siendo notorio que los estudiantes están más familiarizados con la variable como número general cuando de seguir patrones y manipular datos se trata, de igual manera se sienten más cómodos cuando la variable, como incógnita específica, asume valores específicos y pueden plantear y resolver una ecuación que les llevará a un resultado; sin embargo, la variable como relación funcional muestra mayor dificultad debido a que no se observa que los estudiantes estén familiarizados con identificar relaciones entre variables y/o simbolizar reglas específicas a partir de problemas, datos y tablas.

Situación 3 **Análisis a partir del *Modelo 3UV***

Retomemos la tabla de la actividad 1, que representa el tiempo que brindan de protección los FPS 6, 10, 15, 20, 25, 30 y 50.

| | | | | | | | |
|----------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| FPS | 6 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 |
| Minutos | 70 | 110 | 160 | 210 | 260 | 310 | 510 |

| | |
|---|--|
| <p>1) En una hoja de cuadrícula representa en un plano cartesiano los datos de la tabla anterior.</p> <p>A partir de la gráfica contesta:</p> <p>a) ¿Puedes saber cuántos minutos te puedes asolear, con cualquier FPS que se encuentre dentro del intervalo establecido?</p> <p>b) ¿Qué se tendría que hacer para saber cuántos minutos te puedes exponer al sol, con un FPS cualquiera?</p> | <p>Al momento de graficar y cuestionarle con las preguntas indicadas, se espera que los estudiantes identifiquen que para cada valor de entrada (x) existe un solo valor de salida (y) con ello demostrará que reconoce la correspondencia entre las variables (F1), de igual manera se espera que logre identificar la variación entre las variables involucradas.</p> |
| <p>Aplicando tu propuesta y a partir de la gráfica responde:</p> <p>c) ¿Cuántos minutos te puedes asolear con un FPS 35? ¿Y con un FPS 33?</p> <p>d) Si se tiene un tiempo de protección de 280 minutos, ¿qué FPS se utilizó? Y si en lugar de 280 minutos, se tienen 430 minutos, ¿qué FPS se utilizó?</p> | <p>Para responder el inciso c a partir de la gráfica, el alumno debe ser capaz de identificar la variable dependiente y determinar el valor que le corresponde a su variable independiente (F2). Mientras que en el inciso d se busca el proceso contrario, dada la variable independiente se pide sacar la variable dependiente (F3).</p> <p>En ambos casos el alumno debe tener nociones del concepto función para que pueda leer la gráfica que obtuvo en el punto 1.</p> |
| <p>c) En términos de la situación planteada, ¿cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha?</p> | <p>Para responder estas preguntas es necesario que se establezca la variación conjunta de las variables FPS y tiempo en la gráfica (F4).</p> |

| | |
|---|--|
| d) ¿Cómo se interpretaría la situación, si la gráfica fuera una recta horizontal? | |
| e) Si una persona desea obtener un tiempo de protección mayor a los 160 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar? | Para dar respuesta a las preguntas, es necesario que se establezcan los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de la otra (F5). |
| f) Un vacacionista que busca tener un tiempo de protección mayor que 210 minutos, pero menor que 310 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar? | |
| g) ¿Cuál es el periodo de tiempo que se puede permanecer en el sol, si se utiliza una loción con un FPS mayor o igual que 25? | |
| h) ¿Cuál es el rango de FPS que permite permanecer en el sol entre 240 minutos y 440 minutos? | |

Tabla 3

| Porcentaje de Situación 3 | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | |
| | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 |
| Bien | 28.5% | 42.8% | 28.5% | 57.2% | 0% |
| Manipulación aritmética | 0% | 57.2% | 0% | 0% | 57.2% |
| Incomprensión | 71.5% | 0% | 42.8% | 0% | 28.5% |
| No contestó | 0% | 0% | 28.5% | 42.8% | 14.3% |

La tabla 3 muestra que la mayoría de los estudiantes no logra identificar la correspondencia de las variables involucradas (**F1**), esto se debió a que no tenían clara la forma en que se tenían que ubicar las coordenadas en un plano cartesiano. Por otro lado, no les quedaba claro cuál era la variable dependiente y cuál la independiente por ende tampoco lograron explicar adecuadamente cómo leer los datos en la gráfica. Después de una explicación grupal sobre la forma correcta de graficar y leer los datos de una gráfica, fueron pocos los alumnos que lograron obtener los valores de la variable dependiente e independiente respectivamente (**F2, F3**), sin embargo, se observa en la tabla que les resulta más sencillo

obtener la variable dependiente dada la independiente por manipulación aritmética basada en la tabla y/o fórmula previas.

Respecto a la variación conjunta de las variables poco más de la mitad de los estudiantes logra identificarla (F4) de forma adecuada, para los intervalos de variación se observa que ningún estudiante logra contestar adecuadamente, la mayoría tiende a manipulaciones aritméticas y dan por respuesta los límites del intervalo o proponen valores que lo satisfacen, pero no logran comprender el significado de un intervalo.

A manera general se pudo observar y corroborar, con los datos, que los estudiantes tienen dificultades para reconocer la variable en una relación funcional y serias deficiencias en conocimientos previos sobre funciones en sus representaciones en tablas, gráficas y ecuaciones. Por ende, se tuvo que dar una sesión de asesoría sobre las principales deficiencias que se identificaron, ejemplo: identificar variables dependiente e independiente, graficar en un plano cartesiano, leer y escribir desigualdades, resolver ecuaciones lineales resultantes de la sustitución de valores en una función, se explicó qué significaba un intervalo y verbalmente los definieron, etcétera.

| Situación 4 | Análisis a partir del <i>Modelo 3UV</i> |
|---|--|
| En la siguiente figura considera las medidas dadas para cada segmento y responde. | |
| $\overline{EB} = 2\text{cm}, \overline{CF} = 2\text{cm}, \overline{FD} = 6\text{cm}$ | |
|  <p>El diagrama muestra un paralelogramo con una línea vertical que representa la altura. Esta línea de altura divide la base del paralelogramo en dos segmentos: CF a la izquierda y FD a la derecha. En la parte superior del paralelogramo, el segmento EB está etiquetado. El segmento EB es una línea horizontal que conecta los puntos E y B, donde E es el punto superior de la línea de altura y B es el punto superior derecho del paralelogramo.</p> | |
| 1) ¿Cómo represento la altura del paralelogramo si no conozco su valor? | Para responder las preguntas el alumno debe reconocer que tiene un dato desconocido y a su vez puede obtener su valor considerando las restricciones del problema (I1). |
| 2) ¿Cuánto mide la base del paralelogramo? | Para responder las preguntas el alumno debe reconocer que tiene un dato desconocido y a su vez puede obtener su valor considerando las restricciones del problema (I1). |
| 3) Expresa simbólicamente el área del paralelogramo a partir de sus dimensiones. | Cuando el alumno escribe la fórmula para el área logra simbolizarla con las restricciones de un valor desconocido, que al darle diferentes valores lo llevará al planteamiento de una ecuación (I5). |
| 4) Si el área de uno de los triángulos rectángulos es de 4cm^2 , ¿cuál es el valor de la altura del paralelogramo? | Para responder las preguntas, en un primer momento los alumnos deben interpretar los valores específicos que se le asignaron a las variables y sustituirlas en su representación |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----|-----|-------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 5) ¿Cuál es el valor del área del paralelogramo? | simbólica del área (I2), para después calcular la cantidad desconocida resolviendo la ecuación resultante, apoyándose en operaciones algebraicas y aritméticas (I4). | | | | | | | | | | | | |
| 6) ¿Qué valores puede tomar el área del paralelogramo cuando la altura vale 1cm, 5cm, 9cm, 10cm? | Para contestar los alumnos tienen que identificar a que variable pertenecen los valores dados, sustituirlos en la fórmula y resolver para determinar el valor de la otra variable dada (F2). | | | | | | | | | | | | |
| 7) ¿De qué depende el valor del área del paralelogramo? | Al responder la pregunta se demuestra que logran reconocer que existe una correspondencia entre los valores de la altura y del área (F1). | | | | | | | | | | | | |
| <p>La siguiente tabla muestra el área que puede tomar un paralelogramo con diferentes alturas.</p> <table border="1" data-bbox="529 680 1092 741"> <tr> <td>Altura</td> <td>1cm</td> <td>2cm</td> <td>3cm</td> <td>5cm</td> <td>7cm</td> </tr> <tr> <td>Área</td> <td>8cm²</td> <td>16cm²</td> <td>24cm²</td> <td>40cm²</td> <td>56cm²</td> </tr> </table> <p>Auxíliate de ella para contestar las siguientes preguntas:</p> | | Altura | 1cm | 2cm | 3cm | 5cm | 7cm | Área | 8cm ² | 16cm ² | 24cm ² | 40cm ² | 56cm ² |
| Altura | 1cm | 2cm | 3cm | 5cm | 7cm | | | | | | | | |
| Área | 8cm ² | 16cm ² | 24cm ² | 40cm ² | 56cm ² | | | | | | | | |
| <p>8) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 56cm², ¿qué valores puede tomar la altura?</p> <p>9) Si queremos que el área del paralelogramo sea menor que 40cm², ¿cuál es el intervalo de valores que puede tomar la altura?</p> <p>10) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 16cm² pero menor que 120cm², ¿cuál es el intervalo de valores que toma la altura?</p> | En este bloque de preguntas es necesario que los estudiantes demuestren que comprenden lo que es un intervalo de variación de una variable cuando se conoce el intervalo de variación de la otra variable (F5). | | | | | | | | | | | | |
| 11) Explica cómo se afecta el valor del área cuando se le van haciendo cambios al valor de la altura. | Si los alumnos logran identificar la variación conjunta del área y la altura, entonces podrán dar respuesta a la pregunta (F4). | | | | | | | | | | | | |
| <p>Si la representación simbólica del área del paralelogramo es $A = bh$ y específicamente para este ejercicio es $A = 8h$</p> <p>a) ¿Qué valores puede tomar la altura?</p> <p>b) ¿Qué valores puede tomar el área?</p> <p>c) ¿Por qué consideras que son variables?</p> | Para dar respuesta, es necesario que identifiquen la variable como una representación de algo indeterminado, que puede asumir cualquier valor (G2). | | | | | | | | | | | | |
| <p>En la fórmula $A = 8h$, ¿cuáles son las variables?</p> <p>d) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?</p> <p>e) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?</p> <p>f) Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del área y el valor de la altura.</p> | Cuando identifica las variables y explica porqué las considera dependiente o independiente, así como la relación entre ellas, entonces logra identificar que existe una correspondencia entre ellas (F1) y que a su vez varían conjuntamente en una relación funcional (F4). | | | | | | | | | | | | |

Tabla 4

| Porcentaje de Situación 4 | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | |
| | I1 | I2 | I4 | I5 | G2 | F1 | F2 | F4 | F5 |
| Bien | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 85.8% | 100% | 71.4% | 42.9% | 28.6% | 100% |
| Manipulación aritmética | 0% | 14.3% | 14.3% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 71.4% | 0% |
| Incomprensión | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 28.6% | 0% | 0% | 0% |
| No contestó | 28.6% | 14.3% | 14.3% | 14.3% | 0% | 0% | 42.9% | 0% | 0% |

La tabla muestra avances significativos en las respuestas obtenidas por los estudiantes dado que la mayoría logra identificar el dato desconocido (**I1**) y propone a su vez simbolizarlo mediante una letra (**I5**), para después asignarle valores específicos (**I2**) y calcular su valor apoyándose en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales (**I4**). Por otro lado, todos los estudiantes mencionan que la altura del paralelogramo al ser una entidad general puede asumir cualquier valor y que a su vez el área depende de ella (**G2, F1**), sin embargo, sólo pocos estudiantes pueden explicar adecuadamente la variación conjunta del área del paralelogramo y su altura (**F4**), la mayoría identifica el patrón que sigue la tabla y trata de explicarlo numéricamente. Finalmente, todos los estudiantes lograron explicar por escrito los intervalos de variación de las variables involucradas (**F5**), aún es necesario enseñarles a escribirlos de forma matemática, pero se tuvieron mejores resultados que la primera vez que se les presentó este tipo de pregunta.

En resumen se observa que los estudiantes que asisten regularmente a las sesiones tienen mejorías con respecto a su punto de partida y al mismo tiempo las sesiones de asesoría brindadas a todo el grupo apoyaron a mejorar los resultados.

Situación 5

Análisis a partir del *Modelo 3UV*

Se tiene una pieza rectangular de cobre con las siguientes dimensiones: el largo del rectángulo es cinco veces el ancho y el ancho del rectángulo es un número desconocido.

| | |
|--|--|
| <p>1) Traza un dibujo donde representes la información proporcionada.</p> <p>2) Escribe una fórmula que te represente el perímetro del rectángulo que dibujaste</p> | <p>Una vez que el alumno lee la situación e identifica los datos conocidos y desconocidos, tiene que proceder a dibujar un rectángulo y escribir sus medidas mediante expresiones algebraicas (I1) que podrán asumir cualquier valor. Posteriormente simboliza mediante una fórmula la forma en que puede obtener el perímetro de la figura (I5) dadas las restricciones del problema.</p> |
| <p>3) Supongamos que el perímetro del rectángulo mide 84mm, ¿qué ecuación se puede plantear a partir del valor del perímetro y las dimensiones del rectángulo?</p> <p>4) ¿Cuánto miden sus dimensiones?</p> | <p>Para obtener el valor de las dimensiones del rectángulo el alumno debe interpretar el valor dado (I2) y sustituirlo en la ecuación previamente planteada (I3), posteriormente determina la cantidad desconocida realizando las operaciones algebraicas y aritméticas que sean necesarias (I4).</p> |
| <p>5) Ahora supongamos que el ancho del rectángulo vale 1mm, 5mm, 7mm, 10mm.</p> <p>c) ¿Qué valores puede tomar el largo del rectángulo?</p> <p>d) ¿De qué depende el valor del largo del rectángulo?</p> | <p>Para dar respuesta el alumno debe identificar que a cada valor del ancho le corresponde un solo valor del largo (F1) y al identificar que tiene los valores de la variable dependiente, debe ser capaz de calcular los valores de la variable independiente (F2) apoyándose en operaciones algebraicas y/o numéricas.</p> |
| <p>6) ¿Qué valores toma el perímetro del rectángulo cuando el ancho mide 2mm, 4mm, 6mm, 8mm?</p> <p>7) ¿De qué depende el valor del perímetro?</p> <p>8) ¿Qué pasa con el valor del perímetro cuando se aumenta o disminuye el valor del ancho?</p> | <p>En esta situación se le modifica la perspectiva del problema al estudiante; ahora se le dan valores al ancho y se le pide el perímetro en lugar del largo, ahora debe ser capaz de identificar que el perímetro depende de los valores del ancho (F1) y que al conocer los valores de su variable dependiente puede calcular los datos de la variable independiente a partir de operaciones algebraicas y/o numéricas (F2).</p> |
| <p>9) Si se tiene una pieza rectangular de cobre con un perímetro de 192mm, ¿cuánto mide su ancho?</p> | <p>Para responder primero debe identificar que tiene un dato desconocidos (I1) que puede obtener si logra interpretar el valor del perímetro como un dato específico (I2) que le servirá para plantear una ecuación (I5) y al resolverla obtener la cantidad desconocida que se le solicita (I4).</p> |

La siguiente tabla muestra el perímetro que tiene la pieza de cobre cuando el valor de su ancho se va variando.

| | | | | | | |
|------------------|------|------|------|------|------|-------|
| Ancho | 1mm | 2mm | 4mm | 6mm | 8mm | 10mm |
| Perímetro | 12mm | 24mm | 48mm | 72mm | 96mm | 120mm |

| | |
|--|---|
| Apóyate en ella para contestar las siguientes preguntas: | |
| <p>4) Si se busca que la pieza de cobre tenga un perímetro mayor o igual que 24mm, ¿qué valores debe tomar el ancho?</p> <p>5) Y si se quiere que el perímetro sea menor o igual que 72mm, ¿qué valores puede tomar el ancho?</p> <p>6) Si ahora se desea que el perímetro sea mayor que 24mm, pero menor que 120mm, ¿cuál es el intervalo de valores que puede tomar el ancho?</p> | <p>Para dar respuesta los alumnos deben ser capaces de identificar que se les pide un intervalo de variación (F5) ya que se les dio el otro intervalo de variación.</p> |
| <p>Si la fórmula particular que representa el perímetro del rectángulo es $P = 12a$</p> <p>h) ¿Qué valores puede tomar el ancho?</p> <p>i) ¿Qué valores puede tomar el perímetro?</p> <p>j) En la fórmula escrita, ¿cuáles son las variables?</p> <p>k) ¿Por qué consideras que son variables?</p> <p>l) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?</p> <p>m) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?</p> <p>n) Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del perímetro y el valor del ancho.</p> | <p>Al responder las preguntas, los estudiantes deben comprender que las variables pueden asumir cualquier valor dado que son entidades generales (G2); así mismo al identificar las variables dependiente e independiente logran establecer la variación conjunta entre ellas (F4) y por ende pueden explicar cómo se relacionan.</p> |

Tabla 5

| Porcentaje de Situación 5 | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|------|------|------|------|-------|-------|------|-------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | | |
| | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | G2 | F1 | F2 | F4 | F5 |
| Bien | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% | 85.7% | 85.7% | 100% | 71.4% | 71.4% |
| Manipulación aritmética | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 28.6% | 28.6% |
| Incomprensión | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 14.3% | 0% | 0% | 0% |
| No contestó | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |

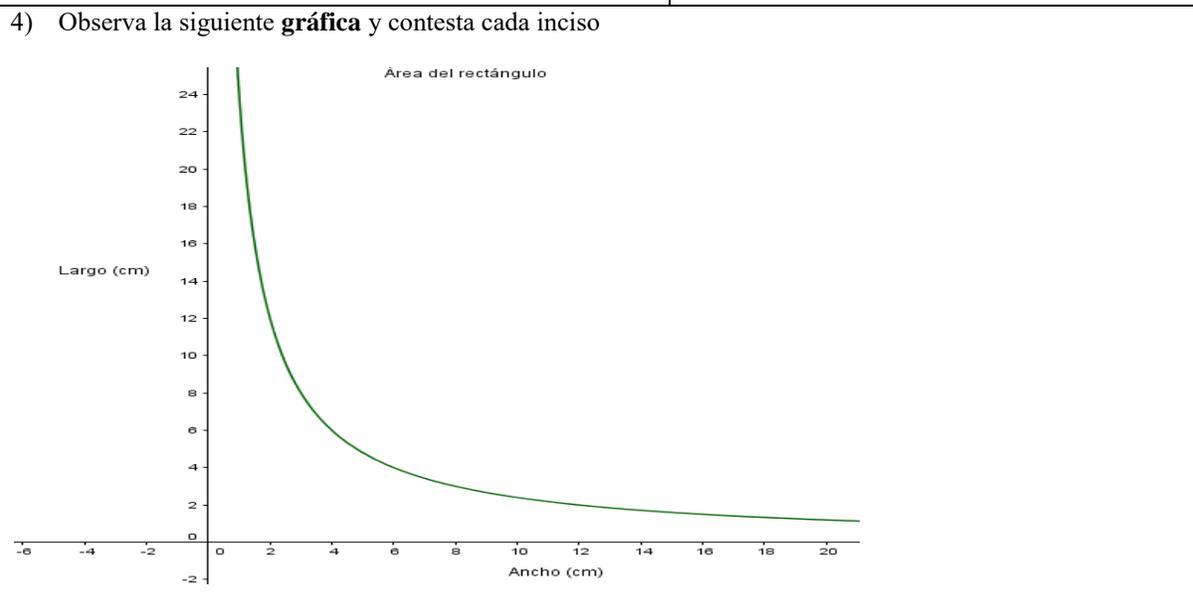
La tabla 5 muestra que todos los estudiantes seleccionados dominaron los aspectos característicos de la variable como incógnita y fueron capaces de identificar, plantear ecuaciones, sustituir valores en las mismas y darles solución para determinar los valores faltantes (**I1, I2, I3, I4, I5**). De igual manera, la mayoría logra interpretar la variable como

una entidad general que puede asumir cualquier valor (**G2**); finalmente se nota un avance que consiste en las características de la variable como relación funcional, dado que los estudiantes logran identificar y explicar con sus palabras la correspondencia entre las variables involucradas (**F1**), también mencionan la variación conjunta que existe entre el perímetro y ancho (**F4**), así como la adecuada manipulación algebraica que sirve para obtener los valores de una variable dados los de la otra variable (**F2**); para los intervalos de variación se observa en las respuestas que los alumnos lograron establecer los intervalos de manera más formal apoyándose en las desigualdades, de igual manera dejan plasmado con palabras lo que están comprendiendo por el intervalo que satisface las restricciones del problema (**F5**). En resumen, se observa un avance consistente en los estudiantes que asistieron con regularidad a la secuencia didáctica.

Situación 6 **Análisis a partir del *Modelo 3UV***

Supongamos que el área de un rectángulo cuyas dimensiones son “a” y “b”, se mantiene constante en 24cm^2 .

| | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) Traza un dibujo donde representes la información dada 2) Escribe una fórmula que represente el área del rectángulo 3) ¿Qué significa que el área del rectángulo se mantenga constante en 24cm^2? | <p>Para dibujar el modelo geométrico los alumnos deben identificar que tienen presentes dos variables que pueden tomar distintos valores pero a su vez deben cumplir una restricción (G2) y que deben simbolizarlas de alguna forma para posteriormente plantear ecuaciones (I5), finalmente deben lograra simbolizar de manera general el área del rectángulo conforme a las restricciones que marca la situación (G5).</p> |
|---|---|



| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---------------------------|--|--|---|--|---|--|---|---|---|
| <p>a) ¿Qué información proporciona la gráfica?</p> <p>b) Completa la siguiente tabla</p> <table border="1" data-bbox="228 373 867 541"> <tr> <td>Ancho del rectángulo (cm)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td></td> <td>4</td> <td></td> <td>8</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Largo del rectángulo (cm)</td> <td></td> <td></td> <td>8</td> <td></td> <td>4</td> <td></td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> </table> | Ancho del rectángulo (cm) | 1 | 2 | | 4 | | 8 | | | Largo del rectángulo (cm) | | | 8 | | 4 | | 2 | 1 | <p>Para poder analizar la gráfica, los estudiantes deben ser capaces de reconocer que existe una correspondencia entre los valores que pueden tomar el ancho y el largo para que satisfagan la condición dada (F1). Posteriormente dado el valor de cada variable deben obtener los valores de la otra variable, se espera que puedan lograrlo a partir de la gráfica y su lectura adecuada (F2, F3).</p> |
| Ancho del rectángulo (cm) | 1 | 2 | | 4 | | 8 | | | | | | | | | | | | | |
| Largo del rectángulo (cm) | | | 8 | | 4 | | 2 | 1 | | | | | | | | | | | |
| <p>5) Si se mantiene constante el área y se varía el valor del ancho del rectángulo:</p> <p>e) ¿Qué sucede con el valor del largo?</p> <p>f) ¿De qué depende el valor que toma el largo?</p> <p>g) ¿Cuál es la variable dependiente?</p> <p>h) ¿Cuál es la variable independiente?</p> <p>6) Supongamos que ahora se varía el valor del largo del rectángulo:</p> <p>a) ¿Qué sucede con el valor del ancho?</p> <p>b) ¿De qué depende el valor que toma el ancho?</p> <p>c) ¿Cuál es la variable dependiente?</p> <p>d) ¿Cuál es la variable independiente?</p> | <p>Para responder las preguntas en ambos casos, los alumnos deben identificar el tipo de variable que están manejando y posteriormente identificar su variación conjunta en la relación funcional que guardan, ya sea en la gráfica o en la tabla (F4).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>7) Para que se cumpla la condición de que el área permanezca constante en 24cm^2:</p> <p>c) ¿Qué valores debe tomar el ancho?</p> <p>d) ¿Qué valores debe tomar el largo?</p> | <p>La respuesta de la pregunta involucra una mayor profundidad del dominio de los intervalos de variación (F5), ya que debe analizarlo desde la gráfica verificando de manera intuitiva el dominio y rango de la función bajo la restricción que se estableció al inicio.</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>8) ¿Qué sucede con los valores del largo, cuando los del ancho van aumentando?</p> <p>9) ¿Qué sucede con los valores del ancho, cuando los del largo van disminuyendo?</p> | <p>La respuesta involucra que se reconozca la variación conjunta de las variables largo y ancho cuando se aplican variaciones a una u otra, independientemente de si utiliza la tabla o la gráfica (F4).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>La fórmula para obtener el área de un rectángulo cualquiera es la siguiente:</p> $A = (m)(n)$ <p>j) En la fórmula escrita ¿Cuáles son las variables?</p> <p>k) ¿Qué representa A?</p> <p>l) ¿Qué tipo de variable es?</p> <p>m) ¿Qué representa m?</p> <p>n) ¿Qué tipo de variable es?</p> <p>o) ¿Qué representa n?</p> | <p>Al analizar la fórmula los alumnos deben interpretar la variable simbólica como una entidad general que podrá asumir cualquier valor (G2) y puede llevarlos al planteamiento de una ecuación (I2).</p> <p>Finalmente se pide que simbolicen la relación funcional con otras expresiones equivalentes a la fórmula inicial (F6).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | |
|--|--|
| p) ¿Qué tipo de variable es? | |
| q) Escribe dos fórmulas equivalentes a la dada | |
| r) ¿Por qué consideras que son equivalentes a la fórmula original? | |

Tabla 6

| Porcentaje de Situación 6 | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|------|-------|------|-------|------|------|------|-------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | | |
| | I2 | I5 | G2 | G5 | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Bien | 71.4% | 100% | 71.4% | 100% | 57.1% | 100% | 100% | 100% | 0% | 85.7% |
| Manipulación aritmética | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 85.7% | 0% |
| Incomprensión | 28.6% | 0% | 28.6% | 0% | 42.9% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| No contestó | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 14.3% |

La tabla muestra que todos los estudiantes, considerados para el análisis, lograron simbolizar las cantidades desconocidas mediante una letra (**I5**), también simbolizaron reglas generales para obtener el área del rectángulo (**G5**), fueron capaces de obtener los valores de las variables dependiente e independiente a partir de la gráfica y según las restricciones de cada situación (**F2**, **F3**), lograron reconocer que existían una variación entre el largo y el ancho del rectángulo (**F4**). Por otro lado en su mayoría se alcanzó que los estudiantes pudieran interpretar la variable simbólica como una entidad general (**G2**) que posteriormente podía asumir un valor específico (**I2**), también se observa que lograron simbolizar la relación funcional con expresiones simbólicas equivalentes a la planteada (**F6**). Finalmente, se observa que poco más de la mitad identificó la existencia de una correspondencia entre la variables (**F1**), sin embargo, para los intervalos de variación ningún alumno logró plantear adecuadamente el intervalo, la mayoría propone los valores enteros que satisfacen la restricción y que observa en la gráfica, pero omiten todas las posibilidades decimales (**F5**).

4.3 Análisis global de la secuencia didáctica conforme a las características de la variable como relación funcional

Tabla 7

| Porcentajes globales | | | | | | |
|--|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Características de la variable | Actividades de la secuencia didáctica | | | | | |
| | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 |
| F1: reconoce la correspondencia entre variables relacionadas. | 28.5% | NA | 28.5% | 71.4% | 85.7% | 57.1% |
| F2: determina el valor de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. | 28.5% | 57.1% | 42.8% | 42.9% | 100% | 100% |
| F3: determina el valor de la variable independiente, dados los valores de la dependiente. | NA | 57.1% | 28.5% | NA | NA | 100% |
| F4: reconoce la variación conjunta de las variables involucradas. | NA | 42.8% | 57.2% | 28.6% | 71.4% | 100% |
| F5: determina los intervalos de variación | NA | NA | 0% | 100% | 71.4% | 0% |
| F6: simboliza una relación funcional | 42.8% | 0% | NA | NA | NA | 85.7% |

Los datos de la tabla 7 muestran el porcentaje de alumnos que contestaron bien las preguntas de cada actividad de la secuencia, para cada característica de la variable como relación funcional. Cabe recordar que el objetivo principal de la propuesta didáctica va enfocado a mejorar la comprensión de la variable en esta característica en particular.

En la tabla se puede observar que durante las primeras tres actividades fueron pocos los estudiantes que lograban reconocer la correspondencia entre variables (**F1**), conforme fue avanzando la secuencia la cantidad de alumnos fue aumentando y para la última parte de la secuencia se tuvo un aumento considerable y respuestas más enriquecedoras por parte de los estudiantes, en el sentido de que utilizaban un lenguaje más aterrizado y podían identificar fácilmente la existencia de una correspondencia entre variables.

Para la característica de obtener el valor de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente (**F2**) pocos estudiantes lograban calcularlo al inicio, conforme

avanzó la secuencia fueron incrementando los estudiantes que lo hacían, para el final de la secuencia todos alcanzaron la característica. En la característica de obtener el valor de la variable independiente dado el valor de la dependiente (**F3**) sucedió algo similar, al inicio poco más de la mitad lo calculaba, después se tuvo una disminución considerable y al final se logró que todos pudieran obtener su valor, para lograr que los estudiantes mejoraran en dicho aspecto se tuvo que brindar asesoría grupal sobre el planteamiento y solución de ecuaciones lineales de primer grado, así como la identificación de la variable dependiente e independiente.

En la característica de reconocer la variación conjunta (**F4**) se inició con poco menos de la mitad de los estudiantes que la reconocían y se fue poco a poco incrementando su número, hasta lograr que todos los alumnos alcanzaran dicha característica. Por otro lado, con los intervalos de variación (**F5**) no se tuvo el mismo éxito, desde el inicio se observa que ningún estudiante logra plantear los intervalos de variación, después de una sesión de asesoría se tuvo un despunte en la actividad 4 y 5, pero al final de la secuencia se volvió a tener un descenso total. Un factor detonante fue el tipo de forma en que se planteó la pregunta, la cual requería de mayor comprensión de los intervalos de variación, por ello se considera que no se logra alcanzar una comprensión profunda de los mismos.

Para la última característica referente a simbolizar una relación funcional (**F6**) se inició con menos de la mitad que lograban escribir una expresión algebraica que modelara los datos, al finalizar la secuencia se alcanzó a duplicar esa cifra. Lo que ayudó a mejorar dicho número fue que se trabajó con los estudiantes la identificación de patrones y reglas generales, así como la forma de generalizarlos.

En resumen, se observa que existen mejoras del punto de partida de la secuencia al punto final de la misma en todas las características, salvo la referente a intervalos de variación; sin embargo, sí se podría considerar que algunos casos aislados de estudiantes lograron aprender qué significa tener un intervalo de variación, la forma de obtenerlo y plantearlo en situaciones de análisis directas.

4.4 Análisis de las evaluaciones

A continuación se procede al análisis de las tres evaluaciones implementadas en el salón de clase respetando el orden de aparición, cada una se analiza por separado y posteriormente se presenta una tabla comparativa de los resultados obtenidos antes, durante y después de aplicar la secuencia didáctica.

| Evaluación diagnóstica | Análisis a partir del <i>Modelo 3UV</i> |
|---|---|
| <p>1.- Una persona que desea viajar a San Diego, California acude al banco para comprar dólares americanos. Al llegar al banco observa que el precio de venta de cada dólar es de \$13pesos.</p> <p>a) ¿Cuántos dólares puede comprar la persona si tiene \$1,300pesos?</p> <p>b) Y si tiene \$2,600 pesos, ¿cuántos dólares puede comprar?</p> <p>c) Y si tiene \$9,100 pesos, ¿cuántos dólares puede comprar?</p> <p>2.- ¿Observas alguna relación entre el dinero en pesos que tiene la persona y el costo por cada dólar americano?</p> | <p>Para dar respuesta a los incisos los alumnos deben reconocer que existe un patrón constante, el costo de cada dólar (G1), el cual les va servir para determinar en un futuro los valores de las variables involucradas, dinero y cantidad de dólares respectivamente (F1). También se espera que logren identificar que las dos variables guardan una variación conjunta (F4).</p> |
| <p>3.- Una persona que tiene entre 130 pesos y 650 pesos</p> <p>c) ¿Cuál es la mínima cantidad de dólares que puede comprar?</p> <p>d) Y ¿cuál es la máxima cantidad de dólares que puede comprar?</p> | <p>Para responder la pregunta los estudiantes deben identificar que tienen un mínimo y un máximo de dólares que pueden comprar dadas las restricciones de la situación y que con ellos pueden construir todo un intervalo de posibilidades (F5).</p> |
| <p>4.- Para obtener la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene 13, 39, 65, 91, ..., 117 pesos.</p> <p>c) ¿Qué operaciones se tienen que hacer?</p> <p>d) ¿Observas algún patrón en las operaciones que se realizan? ¿Cuál?</p> | <p>La respuesta esperada va encaminada a que identifiquen el patrón de dividir entre 13 la cantidad de dinero que tienen, este patrón representa el precio de venta de cada dólar, una vez que lo reconocen pueden deducir la regla y método general que van a utilizar para calcular cualquier valor que se les solicite (G1, G3).</p> |
| <p>5.-Construye una tabla que te ayude a representar la cantidad de dólares americanos que se pueden comprar de acuerdo a las cantidades de dinero que se dieron en la pregunta 4.</p> <p>Observa la tabla que llenaste y contesta:</p> <p>d) ¿Existe algún patrón? ¿Cuál?</p> <p>e) ¿Qué significa el patrón que encontraste?</p> <p>f) ¿Consideras que ese patrón te puede servir para construir una regla o fórmula que te ayude a encontrar más fácil la cantidad de dólares que puedes comprar según el dinero que tengas?</p> | <p>Para responder los alumnos deben partir de la construcción de una tabla que los llevará a identificar que tienen datos desconocidos (I1) que pueden ser determinados realizando las operaciones aritméticas o algebraicas necesarias (I4), para ello deben previamente reconocer las reglas que siguen sus datos y el método a seguir para llegar a un resultado (G1). Por otro lado al construir la tabla también demuestran que tienen un conocimiento intuitivo de que a cada valor de dinero le corresponde un solo valor de dólar (F1).</p> |

| | |
|---|--|
| 6.- ¿Cómo escribirías la regla o fórmula que te represente la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene una cantidad cualquiera de dinero? | La respuesta a la pregunta sugiere que los estudiantes son capaces de simbolizar mediante una relación funcional el enunciado con base en el análisis de los datos presentados (G5, F6). |
| 7.- ¿Cómo utilizarías la regla que construiste para calcular la cantidad de dólares que se pueden comprar con \$5, 850 pesos? | Para responder, se tiene que identificar que en la situación existe un valor desconocido (I1) que a su vez se puede interpretar como una variable simbólica de la relación previamente planteada como una representación que puede tomar valores específicos (I2), posteriormente sustituirlos para plantear la ecuación (I3, I5) y finalmente resolver la ecuación para determinar los valores de la variable dependiente dados los de la independiente (I4, F2). |
| 8.- ¿Cómo utilizarías la regla que construiste para saber cuánto dinero tendrías que pagar por 155 dólares americanos? | Para el caso de la pregunta 8 se necesita lo mismo, salvo el último punto, donde se deben determinar los valores de la variable independiente dados los de la dependiente (I4, F3). |

Tabla 8

| Porcentaje de Evaluación diagnóstica | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------|-------------|-------------|-------|-------------|-------|--------------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | | | | | | |
| | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | G1 | G3 | G5 | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Bien | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 71.4% | 14.3% | 42.8% | 71.4% | 0% | 0% | 0% | 0% | 42.8% |
| Manipulación aritmética | 71.4% | 0% | 0% | 71.4% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 57.2% | 42.8% | 0% | 0% | 0% |
| Incomprensión | 14.3% | 100% | 100% | 28.6% | 100% | 28.6% | 85.7% | 57.2% | 28.6% | 42.8% | 57.2% | 85.7% | 100% | 57.2% |
| No contestó | 14.3% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 0% | 0% |

La tabla 8 muestra las serias deficiencias que tienen los estudiantes de la IEMS en cuanto a los aspectos de la variable se refiere y otros tantos detalles de matemáticas. Se puede observar que ningún estudiante es capaz de interpretar la variable simbólica en una ecuación (**I2**) para posteriormente sustituir su valor y simbolizar una ecuación (**I3, I5**). Otra porción considerable de estudiantes alcanza a reconocer los patrones y reglas en una situación problemática, así como la presencia de valores desconocidos (**I1, G1**) y logran calcular sus valores mediante operaciones aritméticas (**I4**). Sin embargo, cuando se les pide

que deduzcan y expliquen verbalmente o algebraicamente el patrón que observan (**G3, G5, F6**) no son capaces en su mayoría de escribirlo ni visualizarlo.

Con respecto al llenado de tablas que impliquen identificar la correspondencia de variables (**F1**) se observa que son capaces de llenarlas, sin embargo, sus operaciones indican que lo hacen como un proceso automático que no les demanda un mayor análisis de porqué lo llenan así. Para la obtención de los valores de las variables dependientes e independientes (**F2, F3**) se observa que la mitad de los estudiantes logran obtener su valor por métodos numéricos y la otra mitad no tiene una idea clara de qué hacer, pero ningún estudiante es capaz de conectar dichas características con el planteamiento y solución de una ecuación.

En lo que respecta a la variación conjunta de las variables (**F4**) la mayoría de los estudiantes muestra una incomprensión, sus respuestas indican que no comprenden qué se les cuestiona, para los intervalos de variación (**F5**) ningún estudiante sabe que contestar y finalmente para la simbolización de las relaciones funcionales (**F6**) pocos alumnos hacen intentos por escribir sus reglas algebraicas, apoyándose de palabras y ejemplos numéricos.

| Evaluación 1 Postest | Análisis a partir del <i>Modelo 3UV</i> | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|------|----|-------|------|--|--|--|--|------|--|
| Una persona vende dulces y refrescos cada mañana a la salida de una estación del metro; los dulces que vende cuestan 50 centavos cada uno y los refrescos 5 pesos cada uno. | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>1) Con base en la información sobre el costo de los dulces completa la siguiente tabla.</p> <table border="1" data-bbox="224 1262 800 1352"> <tr> <td>Número de dulces</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Costo</td> <td>0.50</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>5.00</td> </tr> </table> | Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | Costo | 0.50 | | | | | 5.00 | <p>Para completar la tabla los alumnos deben reconocer la presencia de un patrón constante que es el costo de los dulces (G1), después llegan a la deducción de una regla que sigue el llenado de la tabla, deben multiplicar el número de dulces por el costo unitario (G3). Conforme van obteniendo los valores de la variable dependiente (F2) ellos a su vez van reconociendo que existe una correspondencia entre las variables involucradas (F1) cada una tiene un solo valor.</p> |
| Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | | | | | | | | | |
| Costo | 0.50 | | | | | 5.00 | | | | | | | | | |
| <p>2) Observa detenidamente la tabla que llenaste y contesta:</p> <p>a) ¿Qué información nos da la tabla?</p> <p>b) ¿Cómo sé cuánto dinero tengo que pagar?</p> <p>c) ¿De qué depende el dinero que pago?</p> <p>d) Conforme aumenta la cantidad de dulces que se venden, ¿qué pasa con el costo?</p> | <p>Después de analizar la tabla los estudiantes deben que los datos les muestran los costos que les corresponden a cada número de dulces (F1), la presencia de un valor unitario que se mantiene constante en todas las operaciones (G1) y la existencia de una variación conjunta entre las variables dinero y cantidad de dulces (F4).</p> | | | | | | | | | | | | | | |

| <p>e) Supongamos que se desea ampliar la tabla de costos de los dulces,</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿cuántos valores se pueden poner en la fila del número de dulces? • ¿y cuáles valores se deben poner en la fila del costo? | <p>Al analizar y responder las preguntas se espera que los alumnos logren interpretar la variable simbólica como una entidad general, que no está determinada y que podría tomar cualquier valor (G2).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|------------------|-----------------|-------|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|----|------|---|
| <p>f) ¿Qué operación realizas para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 6 dulces?</p> <p>g) ¿Qué representa 0.50? Y ¿qué representa el 5?</p> <p>h) Ahora, ¿qué se tiene que hacer para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 12 dulces?</p> <p>i) ¿Cuál es el valor que permanece constante en las operaciones que realizaste?</p> <p>j) ¿Cuál es el valor que va cambiando?</p> <p>k) ¿Por qué el valor que mencionaste en el inciso anterior puede tomar diferentes valores?</p> <p>l) ¿Cómo se puede representar?</p> | <p>Al responder las preguntas el estudiante se da cuenta que existen patrones que lo van llevando a seguir reglas y métodos generales (G3) con ellos logra calcular los datos faltantes. A su vez puede identificar que esas reglas al aplicarse a cualquier situación modelable dentro del problema se pueden simbolizar y generar reglas generales (G5).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>m) Con ayuda de las operaciones que realizaste y las observaciones antes mencionadas, escribe una fórmula que sirva para calcular el costo total de una cantidad cualquiera de dulces.</p> | <p>Una vez que analizó los patrones, determinó reglas generales y observó que se presenta una correspondencia y una variación entre las variables involucradas, es capaz de simbolizar dicha relación funcional (F6).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>3) Observa la gráfica y contesta:</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <caption>Datos extraídos de la gráfica 'VENTA DE DULCES'</caption> <thead> <tr> <th>Número de dulces</th> <th>Costo de dulces</th> <th>Punto</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.50</td><td>A</td></tr> <tr><td>2</td><td>1.00</td><td>B</td></tr> <tr><td>3</td><td>1.50</td><td>C</td></tr> <tr><td>4</td><td>2.00</td><td>D</td></tr> <tr><td>5</td><td>2.50</td><td>E</td></tr> <tr><td>6</td><td>3.00</td><td>F</td></tr> <tr><td>7</td><td>3.50</td><td>G</td></tr> <tr><td>8</td><td>4.00</td><td>H</td></tr> <tr><td>9</td><td>4.50</td><td>I</td></tr> <tr><td>10</td><td>5.00</td><td>J</td></tr> </tbody> </table> | | Número de dulces | Costo de dulces | Punto | 1 | 0.50 | A | 2 | 1.00 | B | 3 | 1.50 | C | 4 | 2.00 | D | 5 | 2.50 | E | 6 | 3.00 | F | 7 | 3.50 | G | 8 | 4.00 | H | 9 | 4.50 | I | 10 | 5.00 | J |
| Número de dulces | Costo de dulces | Punto | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.50 | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1.00 | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 1.50 | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 2.00 | D | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 2.50 | E | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 3.00 | F | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 3.50 | G | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 4.00 | H | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 4.50 | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 5.00 | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>a) ¿Qué tengo que hacer para saber cuánto cuestan 4 dulces? Márcalo en la gráfica</p> <p>b) ¿Qué tengo que hacer para saber cuántos dulces puedo comprar con 4.00 pesos? Márcalo en la gráfica</p> <p>c) ¿Cuánto pago por 8 dulces? Márcalo en la gráfica</p> | <p>Para analizar la gráfica es necesario que los estudiantes reconozcan la correspondencia entre el número de dulces y el costo pagado por cada uno de ellos (F1), una vez que lo dominen, serán capaces de determinar los valores de la variable dependiente o independiente según las condiciones dadas (F2, F3).</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | |
|--|--|
| d) Si quiero gastarme entre 2.00 pesos y 5.00 pesos, ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar? | La respuesta a las preguntas implica un análisis a profundidad de la gráfica que los llevará al establecimiento de los intervalos de variación (F5) que satisfacen las condiciones establecidas en cada inciso. |
| e) Si quiero gastarme más de 5.00 pesos, ¿cuántos dulces puedo comprar? | |
| f) Si quiero gastarme menos de 5.00 pesos pero más de 1.00 peso ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar? | |

Tabla 9

| Porcentaje de Evaluación 1 (Pretest) | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | | |
| | G1 | G2 | G3 | G5 | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Bien | 100% | 71.4% | 57.1% | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 100% | 42.9% | 71.4% |
| Manipulación aritmética | 0% | 0% | 42.9% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| Incomprensión | 0% | 28.6% | 0% | 28.6% | 14.3% | 14.3% | 14.3% | 0% | 57.1% | 28.6% |
| No contestó | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 14.3% | 14.3% | 0% | 0% | 0% |

La evaluación uno se aplicó después de implementar tres actividades de la secuencia didáctica y varias asesorías fuera de la secuencia donde se les explicaban diversos temas a los estudiantes para poder continuar con las actividades propuestas.

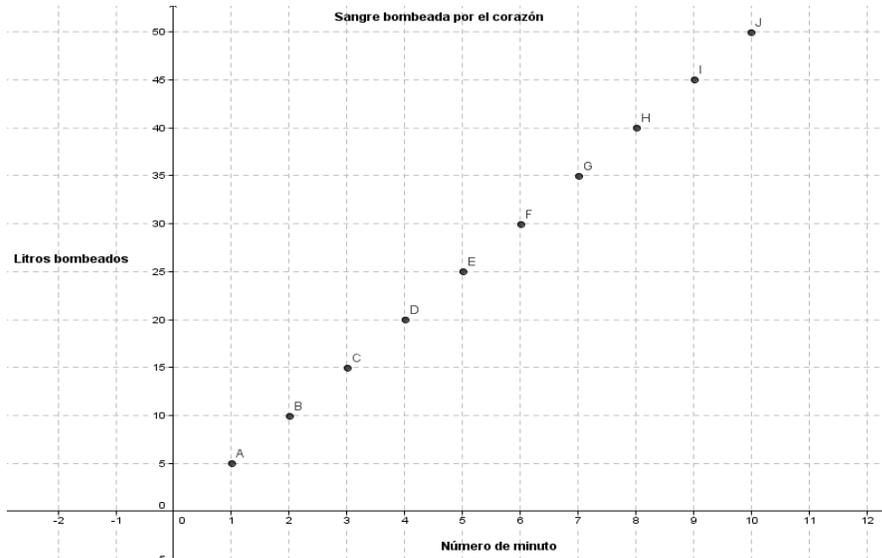
En la tabla 9 se puede observar que todos los estudiantes son capaces de reconocer patrones y reglas (**G1**) en datos organizados en tablas, pero sólo poco más de la mitad logra deducir la regla que siguen al multiplicar el número de dulces por el costo unitario (**G3**), a pesar de ello, tienen nociones aritméticas de cómo obtener los resultados a partir de sumas y lo reflejan en sus procedimientos. Por otra parte, al interpretar la variable simbólica como una entidad general que asume cualquier valor (**G2**) la mayoría logra simbolizar las reglas o métodos generales que están siguiendo (**G5**).

Para las características de relación funcional se puede observar que la mayoría de los estudiantes logra identificar la correspondencia de variables en la tabla y en la gráfica (**F1**), lo que les ayuda a que les sea más sencillo calcular las variables dependiente e independiente (**F2, F3**) a partir de la gráfica. En el establecimiento de los intervalos de variación (**F5**) se nota que menos de la mitad de los alumnos logra establecer adecuadamente los intervalos, la otra parte los plantea aún como posibilidades específicas o como extremos del intervalo. Finalmente, para la simbolización de la relación funcional se tiene que, la mayoría fue capaz de escribir una fórmula que les relacionara la cantidad de dinero que se paga por cierto número de dulces (**F6**).

| Evaluación 2 Postest | | Análisis a partir del <i>Modelo 3UV</i> | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----|---|----|---|----|----|---|----|--------|----|----|----|--|----|--|---|--|
| Se sabe que el corazón humano bombea aproximadamente 5 litros de sangre cada minuto, lo que representa la totalidad del volumen de sangre que tenemos en nuestro cuerpo. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>1) Con base en la información proporcionada completa la siguiente tabla.</p> <table border="1"> <tr> <td>Mínuto</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Litros</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td></td> <td>45</td> <td></td> </tr> </table> | | Mínuto | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | Litros | 10 | 20 | 30 | | 45 | | <p>Para completar la tabla los estudiantes deben reconocer que existe una correspondencia entre los minutos que transcurren y los litros de sangre que bombea el corazón (F1), de igual manera deben percibir que los datos siguen un patrón (G1) y deducir la regla (G3). Posteriormente apoyándose de cálculos numéricos o algebraicos determinan el valor de la variable dependiente e independiente (F2, F3) según el valor que se les proporciona en cada celda.</p> | |
| Mínuto | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | | | | | | | | | | | |
| Litros | 10 | 20 | 30 | | 45 | | | | | | | | | | | | |
| <p>2) Observa la tabla y contesta:</p> <p>a) ¿Qué información te proporciona la tabla?</p> <p>b) ¿Cómo obtienes la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón en el minuto 1, 2, ..., n?</p> <p>c) Expresa simbólicamente la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón en un minuto cualquiera.</p> | | <p>La respuesta a las preguntas implica que después de reconocer el patrón que siguieron los datos (G1) y la correspondencia entre las variables (F1), los estudiantes simbolicen la relación funcional (G5, F6).</p> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>d) Con base en la fórmula propuesta contesta:</p> <p>✓ ¿Cuánta sangre bombea el corazón en 75 minutos?</p> <p>✓ Si se sabe que el corazón bombeo 325 litros de sangre, ¿cuántos minutos transcurrieron?</p> <p>e) Explica cómo cambia la cantidad de litros que bombea el corazón cuando se le van haciendo variaciones al número de minutos.</p> | | <p>La solución involucra que dentro de la situación se identifique la existencia de un valor desconocido, que puede ser interpretado como una variable simbólica y que en la situación está asumiendo un valor específico, el cual se sustituye en la relación funcional planteada previamente, que lo llevará a una ecuación que tiene que ser resuelta mediante operaciones algebraicas y aritméticas (I1, I2, I3, I4, I5).</p> <p>Una vez que resuelve la ecuación obtenida, habrá determinado los valores de las variables dependiente e independiente (F2, F3). Finalmente</p> | | | | | | | | | | | | | | | |

al contestar la pregunta sobre los cambios que sufren las variables, los alumnos reflejan que reconocen la variación conjunta de la cantidad de litros de sangre bombeada y el tiempo (F4).

Observa la siguiente gráfica y contesta las preguntas correspondientes



- f) ¿Cuáles son las variables involucradas en la gráfica?
- g) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
- h) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

La respuesta involucra el reconocimiento de la variación conjunta entre el tiempo y los litros de sangre bombeados que describen una relación funcional a partir de una gráfica (F4).

- i) Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea **menor que** 25 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
- j) Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea **mayor que** 45 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
- k) Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea **mayor o igual que** 15 litros pero **menor o igual que** 50 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
- l) Entre los 4 y 9 minutos, ¿cuál es el intervalo de litros de sangre que bombea el corazón?

La solución de las preguntas involucra un análisis a detalle del comportamiento de la gráfica y una comprensión sobre el significado de intervalo, para determinar los intervalos de variación de cada situación (F5).

Tabla 10

| Porcentaje de Evaluación 2 (Postest) | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|-------|
| Categorías | Aspectos involucrados | | | | | | | | | | | | | |
| | I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | G1 | G3 | G5 | F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Bien | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 71.4% | 85.7% | 100% | 100% | 100% | 71.4% | 28.6% | 87.7% |
| Manipulación aritmética | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 28.6% | 28.6% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 28.6% | 0% |
| Incomprensión | 28.6% | 28.6% | 28.6% | 28.6% | 28.6% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 28.6% | 0% | 0% |
| No contestó | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 14.3% |

La evaluación 2 (postest) se aplicó después de implementar 3 actividades de la secuencia didáctica. Los datos de la tabla 10 muestran que la mayoría de los estudiantes fue capaz identificar los datos desconocidos en la situación planteada y verlos como una variable que podía asumir cualquier valor, pero dadas las restricciones del problema fueron capaces de visualizar los valores específicos que tomaría y los sustituyeron para obtener una ecuación que finalmente lograron resolver por los métodos que conocían (**I1, I2, I3, I4, I5**).

Para la característica del número general se nota que gran parte reconocer los patrones que sigue la secuencia numérica y logran deducir la regla o el método general que deben utilizar (**G1, G3**); una vez que alcanzan numéricamente sus resultados, pueden simbolizar con enunciados las operaciones que realizan (**G5**) y posteriormente escriben la relación funcional entre las variables a manera de fórmula (**F6**).

Finalmente, con relación a los aspectos de la relación funcional, se puede observar que todos los estudiantes son capaces de identificar la correspondencia entre las variables (**F1**) y mediante métodos numéricos, algebraicos o gráficos son capaces de determinar el valor de las variables dependiente e independiente (**F2, F3**). En el reconocimiento de la variación conjunta los alumnos demuestran que la identifican a partir de las tablas, preguntas verbales y gráficas (**F4**), para los intervalos de variación (**F5**) no se observa un avance dado que los estudiantes continuaron dando los extremos del intervalo o sólo algunas posibilidades, para el caso de los que tienen idea, solamente lo expresan con sus palabras.

4.5 Análisis global de las evaluaciones

Las siguientes tablas muestran el resumen de los tres usos de la variable que sugiere el *Modelo 3UV*, para obtener los resultados se consideraron solamente los estudiantes que tienen bien las características; los datos servirán para medir la efectividad de la secuencia didáctica propuesta.

- **La variable como número general**

Tabla 11

| Porcentajes globales | | | |
|---|--------------|---------|----------|
| Características de la variable | Evaluaciones | | |
| | Diagnóstica | Pretest | Posttest |
| G1: reconoce patrones, reglas y métodos. | 71.4% | 100% | 71.4% |
| G2: interpreta la variable como una entidad general que asume cualquier valor. | NA | 71.4% | NA |
| G3: deduce reglas y métodos generales. | 14.2% | 57.1% | 71.4% |
| G4: manipular la variable simbólica. | NA | NA | NA |
| G5: simboliza enunciados, reglas o métodos. | 42.8% | 71.4% | 85.7% |

Los datos de la tabla 11 muestran que los estudiantes, que asistieron regularmente a la aplicación de la secuencia didáctica, tuvieron un avance notorio en el reconocimiento y deducción de reglas o métodos generales dentro de situaciones contextualizadas que involucraron el llenado de tablas y preguntas que los llevaban a explicar mediante palabras los patrones que seguían, eso a su vez les ayudó a mejorar en la simbolización de las reglas o métodos que fueron percibiendo.

- **La variable como incógnita específica**

Tabla 12

| Porcentajes globales | | | |
|--|---------------------|----------------|----------------|
| Características de la variable | Evaluaciones | | |
| | Diagnóstica | Pretest | Postest |
| I1: reconoce e identifica la presencia de algo desconocido. | 71.4% | NA | 71.4% |
| I2: interpreta la variable simbólica como la representación de valores específicos. | 0% | NA | 71.4% |
| I3: sustituye la variable por los valores que hacen verdadera la ecuación. | 0% | NA | 71.4% |
| I4: determina cantidades desconocidas que aparecen en ecuaciones. | 0% | NA | 71.4% |
| I5: simboliza las cantidades desconocidas en una situación específica. | 0% | NA | 71.4% |

La tabla 12 muestra las deficiencias que tenían los estudiantes cuando se arrancó la secuencia didáctica y el avance que lograron al finalizarla. Ciertamente no eran capaces de visualizar la variable como algo simbólico que podía tomar valores específicos y después convertirse en una ecuación, pero algunos tenían ideas numéricas que les podrían haber ayudado a resolver las situaciones problemáticas iniciales. Por ello se decidió brindarles apoyo y se ofrecieron algunas asesorías para que recordaran qué es una incógnita y cómo funciona; otra estrategia a seguir fue la retroalimentación en plenaria durante la aplicación de la secuencia didáctica cuando se presentaban estas características.

- **La variable como relación funcional**

Tabla 13

| Porcentajes globales | | | |
|--|--|----------------|----------------|
| Características de la variable | Actividades de la secuencia didáctica | | |
| | Diagnóstica | Pretest | Postest |
| F1: reconoce la correspondencia entre variables relacionadas. | 71.4% | 71.4% | 100% |
| F2: determina el valor de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. | 0% | 71.4% | 100% |
| F3: determina el valor de la variable independiente, dados los valores de la dependiente. | 0% | 71.4% | 100% |
| F4: reconoce la variación conjunta de las variables involucradas. | 0% | 100% | 71.4% |
| F5: determina los intervalos de variación | 0% | 42.8% | 28.5% |
| F6: simboliza una relación funcional | 42.8% | 71.4% | 85.7% |

La tabla 13 muestra que en la mayoría de las características de la variable como una relación funcional se lograron avances consistentes, salvo los intervalos de variación. Al inicio se observó que los estudiantes en las características F2, F3 trabajaban con intentos numéricos sin llegar a ninguna conclusión, se retomaron esos conocimientos previos y se comenzó a trabajar con la secuencia didáctica haciendo énfasis en la forma de conectar la variable como incógnita, para el caso de la variación conjunta se observó que no estaban acostumbrados al tipo de preguntas y no tenían clara la identificación de las variables; en los intervalos de variación no se tuvo respuesta dejando claro que no sabían de qué se les hablaba. Finalmente, sólo pocos eran capaces de simbolizar una relación funcional. Para la aplicación de la evaluación pretest justo a la mitad de la secuencia, se observa que los porcentajes mejoraron; para la última evaluación se obtuvieron resultados significativos con respecto al punto de partida. Es probable que el manejo de situaciones contextualizadas como fue el caso del factor de protección solar, fueran de poco uso común en clases previas

de matemáticas y eso afectaría que los estudiantes logran identificar la variación conjunta de las variables durante el primer bloque de actividades de la secuencia, dado que al pasar al uso de figuras geométricas se observó más participación y fue más clara la relación que existía entre las variables involucradas. En resumen se puede considerar que la secuencia didáctica sí apoyó a mejorar la comprensión de la variable como relación funcional, se tienen detalles a discutir y mejoras a considerar que serán discutidas en las conclusiones de esta tesis.

Conclusiones

Al inicio de la tesis se consideraron tres propósitos básicos: identificar las ideas alrededor del concepto variable en la población de los estudiantes de la IEMS (Instituto de Educación Media Superior), evaluar el avance en el manejo del concepto variable al aplicar la secuencia didáctica y aportar las actividades a futuros profesores interesados en la línea de estudio. Las conclusiones de este trabajo se enfocarán en los primeros dos propósitos, dando por sentado que la secuencia didáctica se puede reutilizar y mejorar.

El análisis de las respuestas a las distintas actividades que se aplicaron en el aula de clase y la evaluación diagnóstica, revelan que el conocimiento de los alumnos sobre el concepto de variable en sus distintos usos es muy limitado, saben que una variable se puede representar con una literal y que puede tomar diferentes valores, pero mostraron deficiencias al momento de tener que manipularla.

En el arranque de la secuencia se identificó que sus conocimientos previos eran deficientes; a pesar de que no se abordaron conceptos totalmente nuevos o de manera compleja; algunos de los temas fueron: simbolización de patrones, planteamiento y solución de ecuaciones, desigualdades, incógnitas, identificación de variables dependiente e independiente, sustitución de valores en ecuaciones, trazo de gráficas, lectura de gráficas, correspondencia entre variables, entre otras. Ante dicha situación se tuvo una constante limitación durante toda la aplicación de la secuencia, debido a que se requería en varias ocasiones detener la aplicación de la secuencia y dar clases de tipo asesoría al grupo para retomar los conceptos involucrados, posteriormente durante la retroalimentación de las actividades se buscaba un ambiente propicio donde la mayoría aportara y juntos resolvieran sus dudas. Con dichas

sesiones se fue paulatinamente logrando que los estudiantes que asistían con regularidad fueran avanzando.

Cada una de las actividades de la secuencia fue diseñada para apoyar en los tres usos de la variable, tratando de darle mayor enfoque a la relación funcional. Se dividieron en dos bloques para aumentar lentamente la complejidad. En las primeras tres actividades se buscó que los alumnos trabajaran con la identificación y simbolización de patrones, planteamiento y solución de ecuaciones y las ideas básicas de las relaciones funcionales. Dichos puntos a partir de contextos cercanos al alumno que se apoyaron de situaciones verbales, tablas y gráficas.

El análisis de los resultados para el primer bloque de la secuencia didáctica mostró que los estudiantes se encontraron familiarizados con la variable como número general, en el manejo de patrones numéricos, esto debido a que fácilmente identificaron las secuencias que siguen las tablas y las llenaron adecuadamente siguiendo operaciones aritméticas, su debilidad se centró en la generalización de dichos patrones para el establecimiento de una regla general, no lograron establecer ni verbalmente ni algebraicamente una regla que les sirviera para llenar su tabla.

En el manejo de la variable como incógnita se observó que los estudiantes fueron capaces de percibir los datos desconocidos, identificar y sustituir los valores específicos y resolver ecuaciones sencillas; se reafirma según los estudios previos, que al ser el uso más común en el estudio del álgebra, los estudiantes se mueven con más facilidad en él, a pesar de que sus conocimientos previos eran bajos. Esto no quiere decir que comprendan a profundidad el significado de las ecuaciones que plantean y los resultados que obtienen, sus respuestas demuestran que lo trabajan de manera mecánica con la única finalidad de obtener resultados, más allá de analizarlos.

Para el uso de la variable como relación funcional no se tienen avances, los datos muestran que los estudiantes no se mueven con facilidad en el campo de las funciones; es notorio que no son capaces de distinguir las variables, establecer la relación que guardan entre sí, definir la regla simbólica que representa cada situación, graficar una situación y obtener datos específicos de la gráfica que sirven para construir intervalos de variación. Dadas las

circunstancias se recurrió nuevamente a sesiones de asesoría y después se continuó con la secuencia.

Al finalizar el primer bloque se aplicó la evaluación 1 (pretest) para medir los avances de los estudiantes en los tres usos de la variable, los resultados nos muestran de manera general que más del 50% de los estudiantes fueron capaces de: visualizar los patrones numéricos, verbalizarlos y representarlos simbólicamente mediante una expresión algebraica que modelara la relación funcional que guardaban las variables, también alcanzan a identificar que las variables pueden asumir distintos valores y que al tener una tabla de valores, ellos la pueden extender tanto como deseen, pero que existe una correspondencia que determina el crecimiento de valores para la otra variable. Demuestran que tienen mayor facilidad para reconocer la variable dependiente e independiente y la variación conjunta que sufren entre sí cuando se vea afectada una o la otra, este logro ayudó para que interpretaran mejor las gráficas y obtuvieran los valores de ambas variables según fuera el dato que se les proporcionara; finalmente en los intervalos de variación se notó que los estudiantes no comprenden el significado de intervalo y brindan respuestas que consideran una de las tantas soluciones o simplemente mencionan los límites del intervalo.

El segundo bloque de la secuencia didáctica se enfocó en medir las habilidades de los estudiantes para resolver problemas que involucran figuras geométricas y análisis de gráficas; se decidió trabajar la variable como incógnita y continuar profundizando en la variable como relación funcional, cabe notar que toda la aplicación de la secuencia se trató para que los estudiantes comprendieran los tres usos de la variable, aunque por las características del grupo no se tuvo el éxito esperado.

El análisis de los resultados nos muestra que la mayoría de los estudiantes identificaron la variable como una entidad general que puede asumir cualquier valor, y la forma en que deben manipularlas cuando se estudian como incógnita. Los datos también revelan que poco más del 70% de los estudiantes logró visualizar los datos desconocidos, los simbolizaron con literales y los sustituyeron en las reglas algebraicas que les generaron ecuaciones. Una vez planteadas las ecuaciones, fueron capaces de resolverlas y obtener los valores de las variables dependiente e independiente, a partir de los datos que cada una de ellas iba tomando según las restricciones del problema.

Al momento de llenar las tablas fueron capaces de identificar la correspondencia que existía entre las variables involucradas y en palabras sencillas trataron de plasmar la variación conjunta entre variables, fue más notorio que la identificación de variables ya no les causó conflictos y se tuvieron avances en el establecimiento de intervalos de variación con palabras escritas, no se logró que pudieran plasmarlo de manera formal dado que no comprendieron el uso de las desigualdades, finalmente se considera que se tuvo un avance en la simbolización algebraica de las relaciones funcionales con respecto al punto de partida.

Finalmente, se aplicó la segunda evaluación (postest) que se diseñó para medir el avance final de los estudiantes en la variable como incógnita, algunos puntos de la variable como número general y como relación funcional. Los resultados indican que más del 70% de los estudiantes fue capaz de identificar las reglas y patrones que siguieron los datos y pudieron generalizar el método numérico que seguían para calcular los valores de la tabla, plasmándolo en una regla algebraica que modelara la relación funcional; a su vez identificaron adecuadamente el tipo de variable que se les presentó en la tabla y fueron capaces de plantear las ecuaciones necesarias para obtener los valores de la variable dependiente e independiente según fuera el caso. En cuanto a la variación conjunta los alumnos la identificaron con mayor facilidad y la expresaron en sus respuestas de manera más segura, finalmente en los intervalos de variación no se alcanzaron mejoras muy significativas pese a que los estudiantes lograron plantear en casos aislados los intervalos de las variables con sus palabras.

En resumen, se puede considerar que con respecto al punto de partida de los estudiantes que iniciaron la secuencia didáctica, sí se tuvieron mejoras significativas en el manejo y conocimiento de la variable, quizás no se llegó a una comprensión profunda de la misma dadas las condiciones académicas de los estudiantes, pero sí se logró que pudieran trabajar combinando los tres usos de la variable y que identificaran en los distintos contextos manejados que se les estaba pidiendo realizar. El **modelo 3UV** demostró ser efectivo en el diseño de actividades secuenciadas y se considera que en otro contexto escolar como el CCH o Prepa UNAM, la secuencia didáctica posiblemente habría tenido mayor efectividad.

Bibliografía

- Benitez, E. (2004). *Los usos de la variable en algunos libros de texto de matemáticas para la escuela secundaria*. México: DME-Cinvestav.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra, K-12. *NCTM* , 20-32.
- Christmas, P., & Fey, J. T. (1990). Communicating the Importance of Algebra to Students. In Algebra for Everyone. Algebraic Thinking, Grades K-12. *NCTM* , 63-73.
- Juárez, J. (2001). *La comprensión del concepto de variable en profesores de secundaria*. DME-Cinvestav.
- Kieran, C. (1989). "The early learning of algebra: a structural perspective". (S. Wagner, & C. Kieran, Edits.) *In Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* , 157-162.
- Kuchemann, D. (1981). (K. Hart, Ed.) *En: Children's understanding of mathematics* .
- Kuchemann, D. (1980). *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children. Unpublished doctoral dissertation*. Chelsea College, University of London.
- Lodholz, R. (1999). "The Transition of Arithmetic to Algebra". En Algebraic Thinking Grades K-12. *National Council of Teachers of Mathematics* , 52-58.
- Matz, M. (1982). "Towards a process model for high school algebra errors". (D. Sleeman, & J. Brown, Edits.) *Intelligent tutoring systems* .
- McIntyre, Z. (2005). *An analysis of variable misconceptions before and after various collegiate level mathematics courses*. Requirements for the Degree of Master of Science in Teaching, University of Maine.
- Montes, D. (2003). *Iniciación al álgebra a través de la variable: una aplicación didáctica del Modelo 3UV*. México: DME-Cinvestav.
- Morales, L., & Díaz, J. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos* , 109-114.
- Osborne, G. (1909). *Differential and Integral Calculus*. Boston: Heath & Co.
- Philipp, R. (1999). The many uses of algebraic variables. *En Algebraic Thinking Grades K-12. National Council of Teachers of Mathematics* , 157.
- Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). "Does the understanding of variable evolves through schooling?". *Proceedings of the XXIII PME Conference*, (págs. 4-280). Haifa, Israel.
- Trigueros, M., & Ursini, S. (2001). Approaching the study of algebra through the concept of variable. *The future of the teaching and learning of algebra, Proceedings of the 12th ICMI study*. The University of Melbourne, Australia.

- Trigueros, M., Ursini, S., & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática* , 27-48.
- Ursini Legovich, S. (1996). Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable. En D. d. Cinvestav.IPN, *Investigaciones en Matemática Educativa* (págs. 423-439). México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática* , 90-108.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. *Proceedings of the XXI PME Conference*, (págs. 254-261). Lahti, Finlandia.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, D.F: TRILLAS.
- Usiskin, Z. (1988). "Conceptions of school algebra and uses of variables". (A.F. & A. Shulte, Edits.) *Coxford* , 8-19.
- Varela, G., & Alavez, D. (2012). El proyecto del Instituto de educación media superior del Distrito Federal. *Redalyc* , 119-153.
- Vigotsky, L. (1978). *Mind in Society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Wagner, S. (1981). An analytical Framework for mathematical variable. In *Proceedings of the Fifth Conference of the Psychology of Mathematics Education*, edited by C. Comiti and G. Vernaud, 165-70. Grenoble, France.
- Warren, E. (1999). The concept of variable: Gauging students understanding. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,4*, 313-320.

Apéndice

En éste apéndice se pueden consultar algunas de las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes en la aplicación de la secuencia didáctica y las evaluaciones aplicadas. Se organizan en una tabla por actividades de la secuencia, seguidas de las evaluaciones y se presentan dos tipos de respuesta a la misma pregunta con la finalidad de contrastar.

| Actividad 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Alumno 1 | Alumno 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>1) Una persona que vive en la ciudad y utiliza una loción con un FPS 9, ¿cuánto tiempo puede permanecer en el sol, sin quemarse? 90</p> $\frac{10}{90}$ <p>2) Un vacacionista que está en la playa y utiliza una loción con un FPS 30, ¿cuánto tiempo puede aislarse? 300</p> $\frac{10}{300}$ <p>4) Para facilitar el manejo de la información, construye una tabla con los principales FPS que se encuentran a la venta en el mercado y los minutos que puedes durar en el sol sin quemarte.</p> <table border="1"> <tr> <td>FPS 6</td> <td>FPS 10</td> <td>FPS 15</td> <td>FPS 20</td> <td>FPS 25</td> <td>FPS 30</td> <td>FPS 40</td> <td>FPS 50</td> <td>FPS 90</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>100</td> <td>150</td> <td>200</td> <td>250</td> <td>300</td> <td>360</td> <td>450</td> <td>900</td> </tr> <tr> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> <td>+10</td> </tr> </table> <p>9) ¿Cómo escribirías una fórmula que te represente la cantidad de minutos que se puede exponer una persona en el sol, utilizando una loción con un FPS cualquiera?</p> $10(x) = \text{min}$ $x \cdot 10 = \text{min}$ | FPS 6 | FPS 10 | FPS 15 | FPS 20 | FPS 25 | FPS 30 | FPS 40 | FPS 50 | FPS 90 | 60 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 360 | 450 | 900 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | <p>1) Una persona que vive en la ciudad y utiliza una loción con un FPS 9, ¿cuánto tiempo puede permanecer en el sol, sin quemarse? 90 min = FPS 9</p> $\frac{10}{90}$ <p>2) Un vacacionista que está en la playa y utiliza una loción con un FPS 30, ¿cuánto tiempo puede aislarse? 300 min = FPS 30</p> $\frac{10}{300} + 10 = 40$ <p>4) Para facilitar el manejo de la información, construye una tabla con los principales FPS que se encuentran a la venta en el mercado y los minutos que puedes durar en el sol sin quemarte.</p> <table border="1"> <tr> <td>6 FPS</td> <td>10 FPS</td> <td>15 FPS</td> <td>20 FPS</td> <td>25 FPS</td> <td>30 FPS</td> <td>40 FPS</td> <td>50 FPS</td> <td>+10 %</td> </tr> <tr> <td>60 min</td> <td>100 min</td> <td>150 min</td> <td>200 min</td> <td>250 min</td> <td>300 min</td> <td>360 min</td> <td>450 min</td> <td>900 min</td> </tr> </table> <p>9) ¿Cómo escribirías una fórmula que te represente la cantidad de minutos que se puede exponer una persona en el sol, utilizando una loción con un FPS cualquiera?</p> $\text{FPS} = 50 \cdot 10 = 500 \text{ min}$ $x / (x) 10 = \text{min}$ | 6 FPS | 10 FPS | 15 FPS | 20 FPS | 25 FPS | 30 FPS | 40 FPS | 50 FPS | +10 % | 60 min | 100 min | 150 min | 200 min | 250 min | 300 min | 360 min | 450 min | 900 min |
| FPS 6 | FPS 10 | FPS 15 | FPS 20 | FPS 25 | FPS 30 | FPS 40 | FPS 50 | FPS 90 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 60 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 360 | 450 | 900 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | +10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 FPS | 10 FPS | 15 FPS | 20 FPS | 25 FPS | 30 FPS | 40 FPS | 50 FPS | +10 % | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 60 min | 100 min | 150 min | 200 min | 250 min | 300 min | 360 min | 450 min | 900 min | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Actividad 2 | |
|--|---|
| Alumno 1 | Alumno 2 |
| <p>1) ¿Existe alguna relación entre la cantidad de minutos que se puede exponer una persona al sol y el factor de protección solar que se utilice? Justifica tu respuesta</p> <p>Si por que si los FPS aumentan los minutos aumentan y si disminuye el FPS disminuyen los minutos. A cada factor le corresponde una cantidad de minutos.</p> <p>2) ¿Qué le pasa a la cantidad de minutos cuando se va aumentando el FPS? Aumentan</p> <p>3) Y si la cantidad de minutos va aumentando, ¿qué se puede decir del FPS? Aumenta</p> <p>4) ¿Qué ocurre con la cantidad de minutos, si disminuye el FPS utilizado? Son menos minutos</p> <p>5) ¿Qué puedes concluir? que mientras más FPS sera más tiempo puedes estar en el sol</p> | <p>1) ¿Existe alguna relación entre la cantidad de minutos que se puede exponer una persona al sol y el factor de protección solar que se utilice? Justifica tu respuesta</p> <p>Acada factor le corresponde una cantidad de min. que la cantidad de minutos aumenta o igual que el FPS y si disminuye el FPS también hace la cantidad de minutos.</p> <p>2) ¿Qué le pasa a la cantidad de minutos cuando se va aumentando el FPS? Aumenta</p> <p>3) Y si la cantidad de minutos va aumentando, ¿qué se puede decir del FPS? Aumenta</p> <p>4) ¿Qué ocurre con la cantidad de minutos, si disminuye el FPS utilizado? Disminuye</p> <p>5) ¿Qué puedes concluir? que conforme al FPS va aumentando el tiempo que pueda estar en el sol</p> |

Retomemos la regla propuesta: $\text{Cantidad de minutos} = 10(\text{FPS}) + 10$

6) Aplica la regla para determinar la cantidad de minutos que se puede permanecer en el sol, con un FPS 7, 13, 28.

$10(7) + 10 = 80$ $10(13) + 10 = 140$ $10(28) + 10 = 290$

7) Aplica la regla para determinar el FPS que se utilizó para lograr los siguientes tiempos de protección solar:

| Tiempo | 3hrs. y 10min. | 350 minutos | 7 hrs. y 50 min. |
|--------|----------------|-------------|------------------|
| FPS | 18 | 34 | 47 |

$190 = 10x + 10$
 $190 - 10 = 10x$
 $180 = 10x$
 $18 = x$

$350 = 10x + 10$
 $350 - 10 = 10x + 10 - 10$
 $340 = 10x$
 $34 = x$

$470 = 10x + 10$
 $470 - 10 = 10x + 10 - 10$
 $460 = 10x$
 $46 = x$

Y si ahora podemos permanecer en el sol 30 minutos sin quemarnos.

- ¿Cómo simbolizamos la regla propuesta?
 $30(\text{FPS}) + 30 = \text{min}$
- ¿Cuál elemento de la regla original es el que se modifica?
los minutos
- ¿Cuáles elementos permanecen iguales en la regla?
(FPS) y los minutos

$$\left. \begin{aligned} \text{min} &= 20(\text{FPS}) + 20 \\ \text{Min} &= 20(x) + 20 \\ n &= 20x + 20 \\ m &= 20y + 20 \end{aligned} \right\} \text{Son iguales}$$

Retomemos la regla propuesta: $\text{Cantidad de minutos} = 10(\text{FPS}) + 10$

6) Aplica la regla para determinar la cantidad de minutos que se puede permanecer en el sol, con un FPS 7, 13, 28.

$10(7) + 10 = 80$ $10(13) + 10 = 140$ $10(28) + 10 = 290$

7) Aplica la regla para determinar el FPS que se utilizó para lograr los siguientes tiempos de protección solar:

| Tiempo | 3hrs. y 10min. | 350 minutos | 7 hrs. y 50 min. |
|--------|----------------|-------------|------------------|
| FPS | 9 | 34 | 46 |

$190 = 10x + 10$
 $190 - 10 = 10x + 10 - 10$
 $180 = 10x$
 $18 = x$

$350 = 10x + 10$
 $350 - 10 = 10x + 10 - 10$
 $340 = 10x$
 $34 = x$

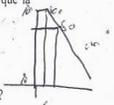
$470 = 10x + 10$
 $470 - 10 = 10x + 10 - 10$
 $460 = 10x$
 $46 = x$

Y si ahora podemos permanecer en el sol 30 minutos sin quemarnos.

- ¿Cómo simbolizamos la regla propuesta?
 $30(\text{FPS}) + 30 = \text{Tiempo}$
- ¿Cuál elemento de la regla original es el que se modifica?
los minutos
- ¿Cuáles elementos permanecen iguales en la regla?
el FPS y los min.

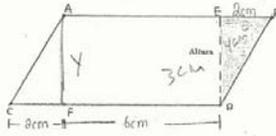
$$\left. \begin{aligned} \text{Min} &= 20(\text{FPS}) + 20 \\ \text{Min} &= 20(x) + 20 \end{aligned} \right\} \text{Son equivalentes}$$

Actividad 3

| Alumno 1 | Alumno 2 |
|---|--|
| <p>A partir de la gráfica contesta:</p> <p>a) ¿Puedes saber cuántos minutos te puedes asolear, con cualquier FPS que se encuentre dentro del intervalo establecido? <i>Si</i></p> <p>b) ¿Qué se tendría que hacer para saber cuántos minutos te puedes exponer al sol, con un FPS cualquiera? <i>Señalar la línea (con el gesto que inicia en el eje x y choca con la línea ya trazada) FPS y cuando se quiere saber el FPS el gesto inicia en el eje y y termina en x!</i></p>  <p>Aplicando tu propuesta, contesta:</p> <p>a) ¿Cuántos minutos te puedes asolear con un FPS 35? ¿Y con un FPS 33?</p> <p style="text-align: center;"><i>360 y 320</i></p> <p>b) Si se tiene un tiempo de protección de 280 minutos, ¿qué FPS se utilizó? Y si en lugar de 280 minutos, se tienen 430 minutos, ¿qué FPS se utilizó?</p> <p style="text-align: center;"><i>26 y 42</i></p> <p>2) En términos de la situación planteada, ¿cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha?</p> <p><i>Por que si el FPS cada vez va siendo mayor en los minutos también (Creciente)</i></p> <p>3) ¿Cómo se interpretaría la situación, si la gráfica fuera una recta horizontal?</p> <p><i>Sería constante Todo vale lo mismo</i></p> <p>4) Si una persona desea obtener un tiempo de protección mayor a los 160 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar?</p> <p><i>Cualquier FPS de 15 a 50</i></p> <p>5) Un vacacionista que busca tener un tiempo de protección mayor que 210 minutos, pero menor que 310 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar?</p> <p><i>Cualquier FPS de 20 a 30</i></p> <p>6) ¿Cuál es el periodo de tiempo que se puede permanecer en el sol, si se utiliza una loción con un FPS mayor o igual que 25?</p> <p><i>de 260 a 510</i></p> <p>7) ¿Cuál es el rango de FPS que permite permanecer en el sol entre 240 minutos y 440 minutos?</p> <p><i>23 y 43 se necesita un FPS de 23 al 43</i></p> | <p>A partir de la gráfica contesta:</p> <p>a) ¿Puedes saber cuántos minutos te puedes asolear, con cualquier FPS que se encuentre dentro del intervalo establecido?</p> <p style="text-align: center;"><i>Si</i></p> <p>b) ¿Qué se tendría que hacer para saber cuántos minutos te puedes exponer al sol, con un FPS cualquiera?</p> <p><i>Con el gesto de la mano por la derecha trazar una línea hasta tocar con la línea trazada y girar a la izquierda y ver que número es y formar 2 líneas Perpendiculares formando un ángulo de 90° e hacerlo</i></p>  <p>Aplicando tu propuesta, contesta:</p> <p>a) ¿Cuántos minutos te puedes asolear con un FPS 35? ¿Y con un FPS 33?</p> <p><i>3(35,360) - b) (33,390)</i></p> <p>b) Si se tiene un tiempo de protección de 280 minutos, ¿qué FPS se utilizó? Y si en lugar de 280 minutos, se tienen 430 minutos, ¿qué FPS se utilizó?</p> <p><i>c) (27,280) (42,430)</i></p> <p>2) En términos de la situación planteada, ¿cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha?</p> <p><i>Aumenta el FPS y los minutos igual</i></p>  <p>3) ¿Cómo se interpretaría la situación, si la gráfica fuera una recta horizontal?</p> <p><i>que vale lo mismo</i></p> <p>4) Si una persona desea obtener un tiempo de protección mayor a los 160 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar?</p> <p><i>uno mayor que 15 y menor que 50</i></p> <p>5) Un vacacionista que busca tener un tiempo de protección mayor que 210 minutos, pero menor que 310 minutos, ¿qué opciones de FPS puede comprar?</p> <p><i>A cual FPS dentro del intervalo de 20 y 30</i></p> <p>6) ¿Cuál es el periodo de tiempo que se puede permanecer en el sol, si se utiliza una loción con un FPS mayor o igual que 25?</p> <p><i>Cualquiera que este de 260 a 510</i></p> <p>Se necesitan un FPS 440 minutos? dentro del rango 23 al 43</p> |

Actividad 4

Alumno 1



- 1) ¿Cómo represento la altura del paralelogramo si no conozco su valor?
cuando no tiene altura con una variable o que le tra.
- 2) ¿Cuánto mide la base del paralelogramo?
8 cm
- 3) Expresa simbólicamente el área del paralelogramo a partir de sus dimensiones.
 $A = B \cdot Y$
- 4) Si el área del triángulo sombreado es de 4 cm^2 , ¿cuál es el valor de la altura del paralelogramo? Escribe las operaciones.
 $A = \frac{b \cdot h}{2} = A \quad \frac{2 \text{ cm} \cdot Y}{2} = 3 \text{ cm}$
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$
- 5) ¿Cuál es el valor del área del paralelogramo? Escribe las operaciones.
4 cm^2
- 6) ¿Qué valores puede tomar el área del paralelogramo cuando la altura vale 1 cm, 5 cm, 9 cm, 10 cm? Escribe las operaciones.
 $a = 8 \cdot h$ $a = 8 \cdot h$ $a = 8 \cdot h$
 $a = 8 \cdot 1$ $a = 8 \cdot 5$ $a = 8 \cdot 9 \text{ cm}$ $a = 8 \cdot 10 \text{ cm}$
 $a = 8 \text{ cm}^2$ $a = 40 \text{ cm}^2$ $a = 72 \text{ cm}^2$ $a = 80 \text{ cm}^2$
- 7) ¿De qué depende el valor del área del paralelogramo?
Base

La siguiente tabla muestra el área que puede tomar un paralelogramo con diferentes alturas.

| | | | | | | | | | |
|--------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Altura | 1cm | 2cm | 3cm | 5cm | 7cm | 9cm | 12cm | 15cm | 20cm |
| Área | 8cm ² | 16cm ² | 24cm ² | 40cm ² | 56cm ² | 72cm ² | 96cm ² | 120cm ² | 160cm ² |

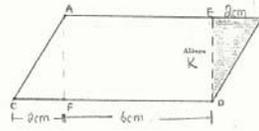
Auxiliante de ella para contestar las siguientes preguntas:

- 8) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 56 cm^2 , ¿qué valores puede tomar la altura?
una altura desde el 7 hasta el ∞
- 9) Si queremos que el área del paralelogramo sea menor que 40 cm^2 , ¿cuál es el intervalo de valores que puede tomar la altura?
Mayor que cero pero menor que 5 cm
- 10) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 16 cm^2 pero menor que 120 cm^2 , ¿cuál es el intervalo de valores que toma la altura?
Mayor que 2 cm y menor que 15 cm
- 11) Explica cómo se afecta el valor del área cuando se le van haciendo cambios al valor de la altura.
El área cambia 8 veces la altura, el valor de ambas se multiplica.

Si la representación simbólica del área del paralelogramo es $A = bh$ y específicamente para este ejercicio es $A = 8h$

- ¿Qué valores puede tomar la altura?
cualquier valor o número.
- ¿Qué valores puede tomar el área?
Depende de la altura
- En la fórmula $A = 8h$, ¿cuáles son las variables?
A y la h.
- ¿Por qué consideras que son variables?
Por las sustituye por valores o números
- ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
A: por que me esta pidiendo el area
- ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
La h por que puede tomar cualquier valor
- Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del área y el valor de la altura.
pues que los 2 pueden tomar cualquier valor

Alumno 2



- 1) ¿Cómo represento la altura del paralelogramo si no conozco su valor?
con variables (a, b).
- 2) ¿Cuánto mide la base del paralelogramo?
8
- 3) Expresa simbólicamente el área del paralelogramo a partir de sus dimensiones.
 $a = 8 \text{ cm} \times K$
- 4) Si el área del triángulo sombreado es de 4 cm^2 , ¿cuál es el valor de la altura del paralelogramo? Escribe las operaciones.
 $a = \frac{b \times a}{2} \quad 4 = \frac{2 \times K}{2} \quad 4 = K$
 $4 = \frac{2 \times K}{2} \quad 4 = K = K$
 $K = 4$
- 5) ¿Cuál es el valor del área del paralelogramo? Escribe las operaciones.
 $a = b \times K$
 $a = 8 \times 4 \quad a = 32$
- 6) ¿Qué valores puede tomar el área del paralelogramo cuando la altura vale 1 cm, 5 cm, 9 cm, 10 cm? Escribe las operaciones.
 $a = 8 \times 1 \quad a = 8 \times 5 \quad a = 8 \times 9 \quad a = 8 \times 10$
 $a = 8 \text{ cm}^2 \quad a = 40 \text{ cm}^2 \quad a = 72 \text{ cm}^2 \quad a = 80 \text{ cm}^2$
- 7) ¿De qué depende el valor del área del paralelogramo?
Depende de la variable que tengamos.

La siguiente tabla muestra el área que puede tomar un paralelogramo con diferentes alturas.

| | | | | | | | | | |
|--------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Altura | 1cm | 2cm | 3cm | 5cm | 7cm | 9cm | 12cm | 15cm | 20cm |
| Área | 8cm ² | 16cm ² | 24cm ² | 40cm ² | 56cm ² | 72cm ² | 96cm ² | 120cm ² | 160cm ² |

Auxiliante de ella para contestar las siguientes preguntas:

- 8) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 56 cm^2 , ¿qué valores puede tomar la altura?
 $R =$ la altura puede tomar un valor 7 hasta ∞
- 9) Si queremos que el área del paralelogramo sea menor que 40 cm^2 , ¿cuál es el intervalo de valores que puede tomar la altura?
mayor que 0 pero menor que 5
- 10) Si queremos que el área del paralelogramo sea mayor que 16 cm^2 pero menor que 120 cm^2 , ¿cuál es el intervalo de valores que toma la altura?
mayor que 2 pero menor que 15 cm
- 11) Explica cómo se afecta el valor del área cuando se le van haciendo cambios al valor de la altura.
Cuando la altura cambia el valor de la altura puede 8 a más veces su valor

Conclusiones

Si la representación simbólica del área del paralelogramo es $A = bh$ y específicamente para este ejercicio es $A = 8h$

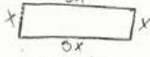
- ¿Qué valores puede tomar la altura?
cualquier valor
- ¿Qué valores puede tomar el área?
depende de la altura.
- En la fórmula $A = 8h$, ¿cuáles son las variables?
"A" y "h"
- ¿Por qué consideras que son variables?
por que, puede tomar cualquier valor
- ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
el área porque depende del resultado de la base y la altura
- ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
h por que no necesita de un sucesor para encontrarla.
- Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del área y el valor de la altura.
La relación es que una depende de el valor de la otra para encontrarse.

Actividad 5

Alumno 1

Se tiene una pieza rectangular de cobre con las siguientes dimensiones: el largo del rectángulo es cinco veces el ancho y el ancho del rectángulo es un número desconocido.

- 1) Traza un dibujo donde representes la información proporcionada.



- 2) Escribe una fórmula que te represente el perímetro del rectángulo que dibujaste.

$$P = 5x + 5x + x + x$$

$$P = 10x + 2x$$

$$P = 12x$$

- 3) Supongamos que el perímetro del rectángulo mide 81mm, ¿qué ecuación se puede plantear a partir del valor del perímetro y las dimensiones del rectángulo?

$$P = 81 \text{ mm con esta ecuación}$$

$$81 = 12x \text{ obtengo el ancho}$$

- 4) ¿Cuánto miden sus dimensiones? Escribe las operaciones.

$$12 \overline{) 81} = 6.75$$

17 mm es Ancho
Largo 35 mm

- 5) Ahora supongamos que el ancho del rectángulo vale 1mm, 5mm, 7mm, 10mm.
 a) ¿Qué valores puede tomar el largo del rectángulo?
 Si ancho = 1 entonces el largo mide 35 Si ancho = 7 entonces largo = 35
 Si ancho = 5 entonces el largo mide 25 Si ancho = 10 entonces largo = 20

- b) ¿De qué depende el valor del largo del rectángulo?

Del ancho

- 6) ¿Qué valores toma el perímetro del rectángulo cuando el ancho mide 2mm, 4mm, 6mm, 8mm?

$$\text{Si } z = 2 \text{ mm} \rightarrow P = 24 \quad \text{Si } z = 4 \text{ mm} \rightarrow P = 48$$

$$\text{Si } z = 6 \text{ mm} \rightarrow P = 72$$

- 7) ¿De qué depende el valor del perímetro?

Del ancho

- 8) ¿Qué pasa con el valor del perímetro cuando se aumenta o disminuye el valor del ancho?

Se aumenta 12 veces el ancho
Se disminuye 12 veces el ancho

- 9) Si se tiene una pieza rectangular de cobre con un perímetro de 192mm, ¿cuánto mide su ancho? Escribe las operaciones.

$$192 = 12z \quad 192 \div 12 = z \quad 16 = z$$

La siguiente tabla muestra el perímetro que tiene la pieza de cobre cuando el valor de su ancho se va variando.

| Ancho | 1mm | 2mm | 4mm | 6mm | 8mm | 10mm |
|-----------|------|------|------|------|------|-------|
| Perímetro | 12mm | 24mm | 48mm | 72mm | 96mm | 120mm |

- 10) Si se busca que la pieza de cobre tenga un perímetro mayor o igual que 24mm, ¿qué valores debe tomar el ancho?
 $z \geq 2 \text{ mm}$ o 4 mm $f \geq 2 \text{ mm}$ adelante
- 11) Y si se quiere que el perímetro sea menor o igual que 72mm, ¿qué valores puede tomar el ancho?
 6 mm o 4 mm mayor que 0 pero menor que 6 $f \leq 6 \text{ mm}$
- 12) Si ahora se desea que el perímetro sea mayor que 24mm, pero menor que 120mm, ¿cuál es el intervalo de valores que puede tomar el ancho?
 $48 \text{ mm} < f < 96 \text{ mm}$

Conclusiones

Si la fórmula particular que represente el perímetro del rectángulo es $P = 12a$

a) ¿Qué valores puede tomar el ancho?
 R: cualquier variable puede tomar el ancho

b) ¿Qué valores puede tomar el perímetro?
 R: depende del ancho

c) En la fórmula escrita, ¿cuáles son las variables?
 R: la a y P

d) ¿Por qué consideras que son variables?
 Por que puede tomar el valor que quiera y por que hay dependencia

e) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
 R depende del ancho

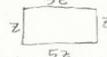
f) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
 el ancho por que es independiente y pendiente

g) Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del perímetro y el valor del ancho.
 Por que el perímetro depende del ancho y el ancho del perímetro y a cada valor del ancho tiene perímetro

Alumno 2

Se tiene una pieza rectangular de cobre con las siguientes dimensiones: el largo del rectángulo es cinco veces el ancho y el ancho del rectángulo es un número desconocido.

- 1) Traza un dibujo donde representes la información proporcionada.



- 2) Escribe una fórmula que te represente el perímetro del rectángulo que dibujaste.

$$P = 12z$$

- 3) Supongamos que el perímetro del rectángulo mide 81mm, ¿qué ecuación se puede plantear a partir del valor del perímetro y las dimensiones del rectángulo?

$$81 = 12z \quad \frac{81}{12} = \frac{12z}{12} \quad 7 = 1z$$

- 4) ¿Cuánto miden sus dimensiones? Escribe las operaciones.

Ancho vale 7 mm
 Largo = 5z Largo = (5)(7) Largo = 35 mm

- 5) Ahora supongamos que el ancho del rectángulo vale 1mm, 5mm, 7mm, 10mm.

- a) ¿Qué valores puede tomar el largo del rectángulo?
 Si ancho = 1 entonces el largo mide 5 Si ancho = 7 entonces largo = 35 mm
 Si ancho = 5 entonces el largo mide 25 mm Si ancho = 10 entonces largo = 50 mm
- b) ¿De qué depende el valor del largo del rectángulo?
 Del ancho

- 6) ¿Qué valores toma el perímetro del rectángulo cuando el ancho mide 2mm, 4mm, 6mm, 8mm?

$$12 \times 2 \text{ Si } z = 2 \Rightarrow P = 24 \quad \text{Si } z = 6 \Rightarrow P = 72 \text{ mm}$$

$$12 \times 4 \text{ Si } z = 4 \Rightarrow P = 48 \quad \text{Si } z = 8 \Rightarrow P = 96 \text{ mm}$$

- 7) ¿De qué depende el valor del perímetro?

Del ancho

- 8) ¿Qué pasa con el valor del perímetro cuando se aumenta o disminuye el valor del ancho?

Se aumenta 12 veces el ancho
Se disminuye 12 veces el ancho

- 9) Si se tiene una pieza rectangular de cobre con un perímetro de 192mm, ¿cuánto mide su ancho? Escribe las operaciones.

$$192 = 12z \quad 192 \div 12 = z \quad 16 = z$$

La siguiente tabla muestra el perímetro que tiene la pieza de cobre cuando el valor de su ancho se va variando.

| Ancho | 1mm | 2mm | 4mm | 6mm | 8mm | 10mm |
|-----------|------|------|------|------|------|-------|
| Perímetro | 12mm | 24mm | 48mm | 72mm | 96mm | 120mm |

- 10) Si se busca que la pieza de cobre tenga un perímetro mayor o igual que 24mm, ¿qué valores debe tomar el ancho?
 $z \geq 2 \text{ mm}$ en adelante $f \geq 2 \text{ mm}$
- 11) Y si se quiere que el perímetro sea menor o igual que 72mm, ¿qué valores puede tomar el ancho?
 $f \leq 6 \text{ mm}$
- 12) Si ahora se desea que el perímetro sea mayor que 24mm, pero menor que 120mm, ¿cuál es el intervalo de valores que puede tomar el ancho?
 $24 \text{ mm} < f < 96 \text{ mm}$

Conclusiones

Si la fórmula particular que represente el perímetro del rectángulo es $P = 12a$

a) ¿Qué valores puede tomar el ancho?
 Puede tomar cualquier valor

b) ¿Qué valores puede tomar el perímetro?
 Depende del ancho

c) En la fórmula escrita, ¿cuáles son las variables?
 Perímetro y ancho

d) ¿Por qué consideras que son variables?
 Pueden tomar cualquier valor

e) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
 Perímetro, depende del ancho

f) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
 Ancho del perímetro

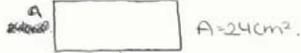
g) Explica con tus palabras la relación que existe entre el valor del perímetro y el valor del ancho.
 Cada valor de ancho corresponde un valor de perímetro

Actividad 6

Alumno 1

Supongamos que el área de un rectángulo cuyas dimensiones son "a" y "b", se mantiene constante en 24cm².

1. Traza un dibujo donde representes la información dada

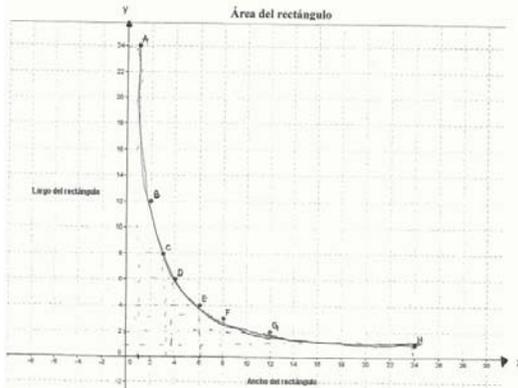


2. Escribe una fórmula que represente el área del rectángulo

$24 = ab$ $A = a \cdot b$
General

3. ¿Qué significa que el área del rectángulo se mantenga constante en 24cm²?
El área sólo puede valer 24.

4. Observa la siguiente gráfica y contesta cada inciso



- a) ¿Qué información proporciona la gráfica?
Los valores del ancho del rectángulo y los valores del largo del rectángulo para la constante del área 24cm². Es inversa, cuando un valor sube el otro tiene que bajar.

- b) Completa la siguiente tabla

| | | | | | | | | |
|----------------------|------|------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| Ancho del rectángulo | 1cm | 2cm | 3cm | 4cm | 6cm | 8cm | 12cm | 24cm |
| Largo del rectángulo | 24cm | 12cm | 8cm | 6cm | 4cm | 3cm | 2cm | 1cm |

Apóyate de la gráfica y la tabla para contestar las siguientes preguntas:

5. Si se mantiene constante el área y se varía el valor del ancho del rectángulo:
a) ¿Qué sucede con el valor del largo?
Si el ancho disminuye el largo aumenta. Si el ancho aumenta el largo disminuye.
b) ¿De qué depende el valor que toma el largo?
Del ancho.
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
El largo.
d) ¿Cuál es la variable independiente?
El ancho.
6. Supongamos que ahora se varía el valor del largo del rectángulo:
a) ¿Qué sucede con el valor del ancho?
Si el largo aumenta el ancho disminuye. Si el largo disminuye el ancho aumenta.
b) ¿De qué depende el valor que toma el ancho?
Del largo.
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
El ancho.
d) ¿Cuál es la variable independiente?
El largo.
7. Para que se cumpla la condición de que el área permanezca constante en 24cm²:
a) ¿Qué valores debe tomar el ancho?
1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
b) ¿Qué valores debe tomar el largo?
24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.
8. ¿Qué sucede con los valores del largo, cuando los del ancho van aumentando?
Disminuye.
9. ¿Qué sucede con los valores del ancho, cuando los del largo van disminuyendo?
Aumenta.

Alumno 2

Supongamos que el área de un rectángulo cuyas dimensiones son "a" y "b", se mantiene constante en 24cm².

1. Traza un dibujo donde representes la información dada

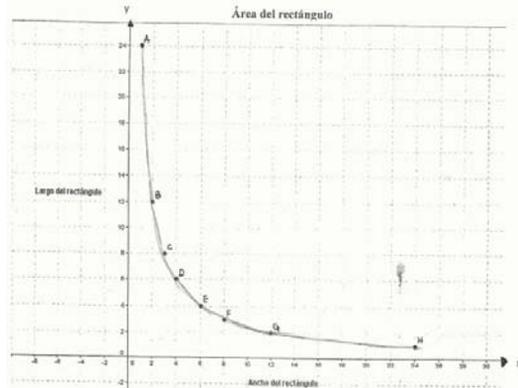


2. Escribe una fórmula que represente el área del rectángulo

$A = a \cdot b$ $24 = ab$

3. ¿Qué significa que el área del rectángulo se mantenga constante en 24cm²?
QUE SIEMPRE SERIA MISMA

4. Observa la siguiente gráfica y contesta cada inciso



- a) ¿Qué información proporciona la gráfica?

LOS VALORES QUE TOMA EL ANCHO Y EL LARGO PARA QUE CONSTANTE EL AREA Y MIENTRAS EL AREA AUMENTA EL LARGO DISMINUYE

- b) Completa la siguiente tabla

| | | | | | | | | |
|----------------------|------|------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| Ancho del rectángulo | 1cm | 2cm | 3cm | 4cm | 6cm | 8cm | 12cm | 24cm |
| Largo del rectángulo | 24cm | 12cm | 8cm | 6cm | 4cm | 3cm | 2cm | 1cm |

Apóyate de la gráfica y la tabla para contestar las siguientes preguntas:

5. Si se mantiene constante el área y se varía el valor del ancho del rectángulo:
a) ¿Qué sucede con el valor del largo?
Disminuye el largo o el largo aumenta y el ancho disminuye.
b) ¿De qué depende el valor que toma el largo?
Del ancho.
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
El largo.
d) ¿Cuál es la variable independiente?
El ancho.
6. Supongamos que ahora se varía el valor del largo del rectángulo:
a) ¿Qué sucede con el valor del ancho?
El ancho disminuye y el largo aumenta.
b) ¿De qué depende el valor que toma el ancho?
Del largo.
c) ¿Cuál es la variable dependiente?
El ancho.
d) ¿Cuál es la variable independiente?
El largo.
7. Para que se cumpla la condición de que el área permanezca constante en 24cm²:
a) ¿Qué valores debe tomar el ancho?
1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
b) ¿Qué valores debe tomar el largo?
24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.
8. ¿Qué sucede con los valores del largo, cuando los del ancho van aumentando?
Disminuye.
9. ¿Qué sucede con los valores del ancho, cuando los del largo van disminuyendo?
Aumenta.

| | |
|---|---|
| <p>La fórmula para obtener el área de un rectángulo cualquiera es la siguiente:</p> $A = (m)(n)$ <p>a) En la fórmula escrita ¿Cuáles son las variables? a y n.</p> <p>b) ¿Qué representa A? el área.</p> <p>c) ¿Qué tipo de variable es? dependiente.</p> <p>d) ¿Qué representa m? un número.</p> <p>e) ¿Qué tipo de variable es? independiente.</p> <p>f) ¿Qué representa n? un número.</p> <p>g) ¿Qué tipo de variable es? independiente.</p> <p>h) Escribe dos fórmulas equivalentes a la dada</p> <p>1) $A = k \cdot m$.</p> <p>2) $A = w \cdot h$.</p> <p>i) ¿Por qué consideras que son equivalentes a la fórmula original? Por que representan lo mismo.</p> | <p>La fórmula para obtener el área de un rectángulo cualquiera es la siguiente:</p> $A = (m)(n)$ <p>a) En la fórmula escrita ¿Cuáles son las variables? M y N</p> <p>b) ¿Qué representa A? El Área</p> <p>c) ¿Qué tipo de variable es? DEPENDIENTE</p> <p>d) ¿Qué representa m? CUALQUIER NÚMERO</p> <p>e) ¿Qué tipo de variable es? INDEPENDIENTE</p> <p>f) ¿Qué representa n? CUALQUIER NUMERO</p> <p>g) ¿Qué tipo de variable es? DEPENDIENTE</p> <p>h) Escribe dos fórmulas equivalentes a la dada</p> <p>1) $A = u \cdot v$</p> <p>2) $A = MN$</p> <p>i) ¿Por qué consideras que son equivalentes a la fórmula original? REPRESENTA LA MISMA FÓRMULA</p> |
|---|---|

Evaluación diagnóstica

| Alumno 1 | Alumno 2 |
|--|--|
| <p>1.- Una persona que desea viajar a San Diego, California acude al banco para comprar dólares americanos. Al llegar al banco observa que el precio de venta de cada dólar es de \$13.</p> <p>a) ¿Cuántos dólares puede comprar la persona si tiene \$1,300? 100 dólares</p> $13 \overline{) 1300}$ <p>b) Y si tiene \$2,600, ¿cuántos dólares puede comprar? 200 dólares</p> $13 \overline{) 2600}$ <p>2.- ¿Observas alguna relación entre el dinero en pesos que tiene la persona y el costo por cada dólar americano? Explica con tus palabras por qué crees que si existe o no existe alguna relación.</p> <p>3.- Una persona que cuenta con 650 pesos:</p> <p>a) ¿Cuántos dólares mínimo podría comprar? $13 \overline{) 650}$</p> <p>b) Y ¿cuántos dólares máximo podría comprar? 50 dólares</p> <p>4.- Para obtener la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene 13, 26, 39, 52, ..., 130 pesos.</p> <p>a) ¿Qué operaciones se tienen que hacer? una división y también una multiplicación</p> | <p>1.- Una persona que desea viajar a San Diego, California acude al banco para comprar dólares americanos. Al llegar al banco observa que el precio de venta de cada dólar es de \$13.</p> <p>a) ¿Cuántos dólares puede comprar la persona si tiene \$1,300? $R = 100$</p> $13 \overline{) 1300}$ <p>b) Y si tiene \$2,600, ¿cuántos dólares puede comprar? $R = 200$</p> $13 \overline{) 2600}$ <p>2.- ¿Observas alguna relación entre el dinero en pesos que tiene la persona y el costo por cada dólar americano? Explica con tus palabras por qué crees que si existe o no existe alguna relación.</p> <p>$R =$ si pague una cantidad que tiene una persona, por ejemplo 13 pesos, es el costo que tiene un dólar.</p> <p>3.- Una persona que cuenta con 650 pesos:</p> <p>a) ¿Cuántos dólares mínimo podría comprar? $R = 50$</p> $13 \overline{) 650}$ <p>b) Y ¿cuántos dólares máximo podría comprar? $R = 50$</p> <p>4.- Para obtener la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene 13, 26, 39, 52, ..., 130 pesos.</p> <p>a) ¿Qué operaciones se tienen que hacer? división</p> |

5.- Construye una tabla que te ayude a representar la cantidad de dólares americanos que se pueden comprar de acuerdo a las cantidades de dinero que se dieron en la pregunta 4.

| el dólar cuesta | Pesos | dólares |
|-----------------|-------|---------|
| 13 pesos | 13 | 1 |
| 26 pesos | 26 | 2 |
| 39 pesos | 39 | 3 |
| 52 pesos | 52 | 4 |
| 65 pesos | 65 | 5 |
| 78 pesos | 78 | 6 |
| 91 pesos | 91 | 7 |
| 104 pesos | 104 | 8 |
| 117 pesos | 117 | 9 |
| 130 pesos | 130 | 10 |

Observa la tabla que llenaste y contesta:

a) ¿Existe algún patrón? ¿Cuál?
 Si, del 13 al 52 porque van multiplicando 13·1, 13·2 ...

b) ¿Qué significa el patrón que encontraste?
 que se van multiplicando por 13

6.- ¿Cómo escribirías la regla o fórmula que te represente la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene una cantidad cualquiera de dinero?
 13 por la cantidad de dólares (13x)

8.- ¿Cómo utilizarías la regla que construiste para saber cuánto dinero tendrías que pagar por 155 dólares americanos? Escribe las operaciones o explica con tus palabras el proceso que seguirías.

11.91538461...
 13(11.91538461...) = 155

5.- Construye una tabla que te ayude a representar la cantidad de dólares americanos que se pueden comprar de acuerdo a las cantidades de dinero que se dieron en la pregunta 4.

| Pesos | Dólares |
|-------|---------|
| 13 | 1 |
| 26 | 2 |
| 39 | 3 |
| 52 | 4 |
| 65 | 5 |
| 78 | 6 |
| 91 | 7 |
| 104 | 8 |
| 117 | 9 |
| 130 | 10 |

Observa la tabla que llenaste y contesta:

a) ¿Existe algún patrón? ¿Cuál?
 Si, si lo observas se le van sumando 13 por ejemplo; 13+13 = 26+13 = 39.

b) ¿Qué significa el patrón que encontraste?
 que los números van aumentando siguiendo la orden, es sumarle a cada número 13.

6.- ¿Cómo escribirías la regla o fórmula que te represente la cantidad de dólares americanos que puede comprar una persona que tiene una cantidad cualquiera de dinero?
 $\frac{N}{13} = \text{cantidad de dólares}$

8.- ¿Cómo utilizarías la regla que construiste para saber cuánto dinero tendrías que pagar por 155 dólares americanos? Escribe las operaciones o explica con tus palabras el proceso que seguirías.

$\frac{155}{13} = 13$
 Primero multiplico 155 que es la cantidad de dólares que quiero comprar por 13 lo que quedan. El resultado es 2015. Para comprobar ahora si usamos la regla: $(\frac{2015}{13} = 155)$. Ahora sería 2015 entre 13 y el resultado tiene que ser 155.

Evaluación 1

| Alumno 1 | Alumno 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|------------------|------|------|------|------|------|----|-------|------|---|------|------|------|------|---|------------------|---|---|---|---|---|----|-------|------|------|------|------|------|------|
| <p>Una persona vende dulces y refrescos cada mañana a la salida de una estación del metro; los dulces que vende cuestan 50 centavos cada uno y los refrescos 5 pesos cada uno.</p> <p>1. Con base en la información sobre el costo de los dulces completa la siguiente tabla.</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <thead> <tr> <th>Número de dulces</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>5</th> <th>7</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Costo</td> <td>0.50</td> <td>1</td> <td>2.50</td> <td>3.50</td> <td>4.50</td> <td>5.00</td> </tr> </tbody> </table> <p>Operaciones</p> $\begin{array}{r} 7 \\ 5 \times \\ \hline 35 \end{array}$ | Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | Costo | 0.50 | 1 | 2.50 | 3.50 | 4.50 | 5.00 | <p>Una persona vende dulces y refrescos cada mañana a la salida de una estación del metro; los dulces que vende cuestan 50 centavos cada uno y los refrescos 5 pesos cada uno.</p> <p>1. Con base en la información sobre el costo de los dulces completa la siguiente tabla.</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <thead> <tr> <th>Número de dulces</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>5</th> <th>7</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Costo</td> <td>0.50</td> <td>1.00</td> <td>2.50</td> <td>3.50</td> <td>4.50</td> <td>5.00</td> </tr> </tbody> </table> <p>Operaciones</p> $\begin{array}{r} 5.50 \\ .50 \\ \times 10 \\ \hline 55.00 \end{array}$ | Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | Costo | 0.50 | 1.00 | 2.50 | 3.50 | 4.50 | 5.00 |
| Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Costo | 0.50 | 1 | 2.50 | 3.50 | 4.50 | 5.00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Número de dulces | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Costo | 0.50 | 1.00 | 2.50 | 3.50 | 4.50 | 5.00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2. Observa detenidamente la tabla que llenaste y contesta:

- a) ¿Qué información nos da la tabla?
el costo y la cantidad de dulces
- b) ¿Cómo se cuánto dinero tengo que pagar?
Dependiendo la cantidad de dulces
- c) ¿De qué depende el dinero que pago?
De los dulces que compre
- d) Conforme aumenta la cantidad de dulces que se venden, ¿qué pasa con el costo?
Se multiplica el costo
- e) Supongamos que se desea ampliar la tabla de costos de los dulces,
- ¿cuántos valores se pueden poner en la fila del número de dulces?
los que quiera
 - ¿y cuáles valores se deben poner en la fila del costo?
10 y quiera

f) ¿Qué operación realizas para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 6 dulces?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 0.50 \\ \hline 3.00 \end{array} = 3 \text{ pesos}$$

g) ¿Qué representa 0.50? Y ¿qué representa el 5?
El precio y el 5 la cantidad de dulces

h) Ahora, ¿qué se tiene que hacer para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 12 dulces?
Multiplicar $12 \times 0.50 = 6.00$

i) ¿Cuál es el valor que permanece constante en las operaciones que realizaste?
el 0.50

j) ¿Cuál es el valor que va cambiando?
la cantidad

k) ¿Por qué el valor que mencionaste en el inciso anterior puede tomar diferentes valores?
Por que puedo comprar una cantidad diferente de dulces

l) ¿Cómo se puede representar?
con una tabla

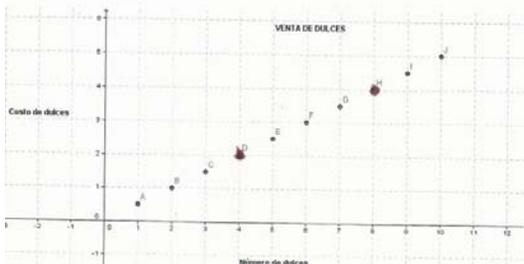
m) Con ayuda de las operaciones que realizaste y las observaciones antes mencionadas, escribe una fórmula que sirva para calcular el costo total de una cantidad cualquiera de dulces?

| D | C |
|----|------|
| 1 | 0.50 |
| 2 | 1.00 |
| 3 | 1.50 |
| 4 | 2.00 |
| 5 | 2.50 |
| 6 | 3.00 |
| 7 | 3.50 |
| 8 | 4.00 |
| 9 | 4.50 |
| 10 | 5.00 |
| 11 | 5.50 |
| 12 | 6.00 |

$$0.50 \times X = Y$$

(Puede seguir)

3. Observa la gráfica y contesta:



2. Observa detenidamente la tabla que llenaste y contesta:

- a) ¿Qué información nos da la tabla?
El costo de los dulces y el número de dulces
- b) ¿Cómo se cuánto dinero tengo que pagar?
Multiplicando el número de dulces que quiero por 0.50
- c) ¿De qué depende el dinero que pago?
El número de dulces que quiero
- d) Conforme aumenta la cantidad de dulces que se venden, ¿qué pasa con el costo?
Va aumentando igual.
- e) Supongamos que se desea ampliar la tabla de costos de los dulces,
- ¿cuántos valores se pueden poner en la fila del número de dulces?
10
 - ¿y cuáles valores se deben poner en la fila del costo?
el costo del número de dulces en el lugar que le correspondiera

f) ¿Qué operación realizas para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 6 dulces?

Multiplico el número de dulces (6) por el costo de los dulces (0.50).

g) ¿Qué representa 0.50? Y ¿qué representa el 5?

0.50 representa el costo de los dulces. 5 representa el número de dulces.

h) Ahora, ¿qué se tiene que hacer para saber cuánto dinero corresponde a la venta de 12 dulces?

Multiplicar 12 por 0.50

i) ¿Cuál es el valor que permanece constante en las operaciones que realizaste?

0.50

j) ¿Cuál es el valor que va cambiando?

el de los dulces

k) ¿Por qué el valor que mencionaste en el inciso anterior puede tomar diferentes valores?

porque es el número de dulces que quiero

l) ¿Cómo se puede representar?

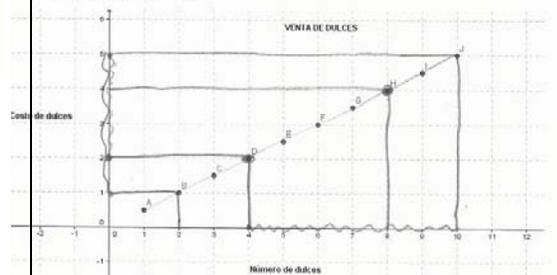
Dulces 1, 2, 3, 4, 5...

m) Con ayuda de las operaciones que realizaste y las observaciones antes mencionadas, escribe una fórmula que sirva para calcular el costo total de una cantidad cualquiera de dulces?

$$C = 0.50 \times D$$

Costo es igual a 0.50 x dulces

3. Observa la gráfica y contesta:



a) ¿Qué tengo que hacer para saber cuánto cuestan 4 dulces? Márcale en la gráfica
 Busque en la tabla la cantidad de dulces y luego el costo lo busque hacia arriba

b) ¿Qué tengo que hacer para saber cuántos dulces puedo comprar con 4.00 pesos? Márcale en la gráfica
 la cantidad en la tabla hacia arriba en el costo y después la cantidad de dulces

c) ¿Cuánto pago por 8 dulces? Márcale en la gráfica
 4.00 pesos

d) Si quiero gastarme entre 2.00 pesos y 5.00 pesos, ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar?
 4 a 10 (5, 6, 7, 8, 9) dulces

e) Si quiero gastarme más de 5.00 pesos, ¿cuántos dulces puedo comprar?
 más de 10 dulces

f) Si quiero gastarme menos de 5.00 pesos pero más de 1.00 peso ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar?
 de 2 a 10 (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) dulces

a) ¿Qué tengo que hacer para saber cuánto cuestan 4 dulces? Márcale en la gráfica
 Busca en la gráfica en extremo de los dulces y traza un gesto hasta la línea de la gráfica.

b) ¿Qué tengo que hacer para saber cuántos dulces puedo comprar con 4.00 pesos? Márcale en la gráfica
 Busca en la gráfica en el extremo del costo y traza un gesto cuando llegue a la línea para abajo

c) ¿Cuánto pago por 8 dulces? Márcale en la gráfica
 4 pesos

d) Si quiero gastarme entre 2.00 pesos y 5.00 pesos, ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar?
 de 4 a 10 dulces

e) Si quiero gastarme más de 5.00 pesos, ¿cuántos dulces puedo comprar?
 10 dulces

f) Si quiero gastarme menos de 5.00 pesos pero más de 1.00 peso ¿cuál es el intervalo de dulces que puedo comprar?
 entre 2 a 10 dulces

Evaluación 2

Alumno 1

Se sabe que el corazón humano bombea aproximadamente 5 litros de sangre cada minuto, lo que representa la totalidad del volumen de sangre que tenemos en nuestro cuerpo.

1. Con base en la información proporcionada completa la siguiente tabla.

| | | | | | | | | | | |
|--------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Minuto | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Litros | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |

Operaciones

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 10 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 7 \\ \hline 35 \end{array}$$

2. Observa la tabla y contesta:

a) ¿Qué información te proporciona la tabla?
 los minutos y los litros de sangre que bombea el corazón humano

b) ¿Cómo obtienes la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón en el minuto 1, 2, ..., n?
 multiplicando el número de minutos por 5

c) Expresa simbólicamente la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón en un minuto cualquiera. (Fórmula)
 $S(x) = L$

d) Con base en la fórmula propuesta contesta:

✓ ¿Cuánta sangre bombea el corazón en 75 minutos?
 $5 \cdot 75 = 375$

✓ Si se sabe que el corazón bombea 325 litros de sangre, ¿cuántos minutos transcurrieron?
 $S(x) = 325 \quad x = 65$
 $325 = x$

e) Explica cómo cambia la cantidad de litros que bombea el corazón cuando se le van haciendo variaciones al número de minutos.
 Cuando se van cambiando los minutos también cambia la cantidad de litros y los dos van en aumento

Alumno 2

Se sabe que el corazón humano bombea aproximadamente 5 litros de sangre cada minuto, lo que representa la totalidad del volumen de sangre que tenemos en nuestro cuerpo.

1. Con base en la información proporcionada completa la siguiente tabla.

| | | | | | | | | | | |
|--------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Minuto | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Litros | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |

Operaciones

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 5 \\ \hline 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 10 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 15 \\ \hline 75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 20 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 25 \\ \hline 125 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 30 \\ \hline 150 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 35 \\ \hline 175 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 40 \\ \hline 200 \end{array}$$

2. Observa la tabla y contesta:

a) ¿Qué información te proporciona la tabla?
 los minutos y la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón

b) ¿Cómo obtienes la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón en el minuto 1, 2, ..., n?
 se multiplica el 1 por 5 e igualan cualquier otro número.

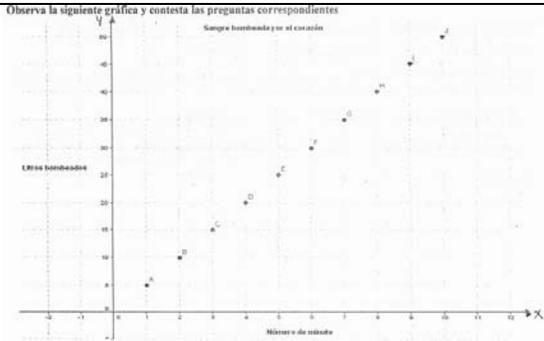
c) Expresa simbólicamente la cantidad de litros de sangre que bombea el corazón en un minuto cualquiera. (Fórmula)
 $L = 5 \times m$
 $L = \text{litros}$
 $m = \text{minutos}$

d) Con base en la fórmula propuesta contesta:

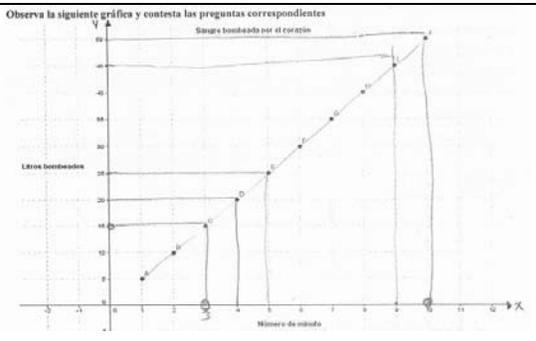
✓ ¿Cuánta sangre bombea el corazón en 75 minutos?
 $L = 5 \times 75 = 375$ $L = 375$

✓ Si se sabe que el corazón bombea 325 litros de sangre, ¿cuántos minutos transcurrieron?
 $325 = 5 \times m$ 65 minutos $L = 5 \times m$ $L = 5 \times 65 = 325$

e) Explica cómo cambia la cantidad de litros que bombea el corazón cuando se le van haciendo variaciones al número de minutos.
 Cuando se va cambiando el número de minutos la cantidad de sangre es 5 veces el valor de los minutos



3. ¿Cuáles son las variables involucradas en la gráfica?
L (litros bombeados) U (Número de minutos)
4. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
L porque depende de el número de minutos
5. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
U porque no depende de nada.
6. Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea menor que 25 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
de 0 a 5
7. Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea mayor que 45 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
de 9 en adelante
8. Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea mayor o igual que 15 litros pero menor o igual que 50 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
de 3 a 10 minutos
9. Entre los 4 y 9 minutos, ¿cuál es el intervalo de litros de sangre que bombea el corazón?
de 20 a 45



3. ¿Cuáles son las variables involucradas en la gráfica?
La varque que bombea, el corazón y los minutos y
4. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?
Los litros porque si no tenemos los minutos no podemos saber la cantidad de litros
5. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?
Los minutos porque pueden tomar el valor que quieran
6. Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea menor que 25 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
Entre 5 y 9 minutos
7. Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea mayor que 45 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
De 9 al infinito minutos
8. Si buscamos que el número de litros de sangre bombeados sea mayor o igual que 15 litros pero menor o igual que 50 litros, ¿cuál es el intervalo de valores que toman los minutos?
mayor o igual a 3 mins pero menor o igual que 10
9. Entre los 4 y 9 minutos, ¿cuál es el intervalo de litros de sangre que bombea el corazón?
entre 20 a 45 minutos