



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ESPACIOS DE TESELACIONES Y EL TORO IRRACIONAL

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
DARÍO ALATORRE GUZMÁN

DIRECTORA:  
ANA RECHTMAN BULAJICH  
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

COMITÉ TUTORAL:  
ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

ADOLFO SÁNCHEZ-VALENZUELA  
CENTRO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

Índice general	III
Prólogo	v
<b>1. Antecedentes</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares lingüísticos . . . . .	1
1.2. Teselaciones periódicas . . . . .	2
1.3. Teselaciones aperiódicas . . . . .	5
1.3.1. El método de sustitución . . . . .	10
1.3.2. El método de proyección . . . . .	12
1.3.3. Conjuntos modelo . . . . .	16
1.3.4. Una clase especial de teselaciones . . . . .	19
<b>2. La geometría de espacios de teselaciones</b>	<b>25</b>
2.1. Espacios de Teselaciones . . . . .	26
2.1.1. Equivalencia de espacios de teselaciones . . . . .	29
2.2. La estructura local de $\Omega$ . . . . .	31
2.3. Los espacios de teselaciones son límites inversos . . . . .	33
2.3.1. Recordatorio: límites inversos. El solenoide. . . . .	33
2.3.2. El complejo de Anderson-Putnam . . . . .	34
2.3.3. El complejo de Gähler . . . . .	35
2.4. $\Omega$ es un $\mathbb{G}$ -solenoide . . . . .	37
2.5. $\Omega$ es un haz fibrado sobre un toro . . . . .	38
2.6. ¿Dónde estamos? . . . . .	41
<b>3. Las herramientas</b>	<b>43</b>
3.1. Difeología . . . . .	43
3.1.1. La categoría difeológica . . . . .	45
3.2. Grupoides . . . . .	47

3.3.	Fibraciones y homotopía en difeología . . . . .	49
3.3.1.	Homotopía de caminos . . . . .	49
3.3.2.	El grupoide de Poincaré y grupos de homotopía . . . . .	50
3.3.3.	Fibraciones difeológicas . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Espacios de teselaciones vía difeología</b>	<b>55</b>
4.1.	Una difeología para $\Omega$ . . . . .	55
4.1.1.	La $D$ -topología . . . . .	58
4.2.	$\Omega$ es un haz fibrado . . . . .	59
4.2.1.	$\hat{p} : \Omega \rightarrow T_\alpha$ es un cubriente. . . . .	62
4.3.	Orbifolds <i>vs</i> laminaciones . . . . .	65
4.4.	Epílogo . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Problemas abiertos</b>	<b>67</b>
5.1.	El problema de la monotesela . . . . .	67
5.1.1.	El problema del completado y el problema del dominó . . . . .	69
5.1.2.	El problema de Heesch . . . . .	70
5.2.	Conjetura de la sustitución de tipo Pisot . . . . .	72
5.3.	Topología de espacios de teselaciones . . . . .	74
5.3.1.	Teselaciones contra espacios de teselaciones . . . . .	74
<b>A.</b>	<b>La restricción cristalográfica y el encaje minimal</b>	<b>79</b>
A.1.	La restricción cristalográfica . . . . .	79
A.2.	Encaje minimal . . . . .	80
	<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Prólogo

Este trabajo trata de teselaciones y de los objetos matemáticos que surgen de considerar todas las teselaciones que se pueden construir de tal o cual manera.

Una teselación es un acomodo de piezas a las que llamaremos teselas que se pegan por sus bordes cubriendo todo el plano sin dejar agujeros. Las teselaciones han estado presentes para la humanidad desde hace más de dos mil años como patrones repetitivos decorativos en obras arquitectónicas. En los castillos de la Alhambra, en Granada, España, construidos en el siglo XII, se pueden encontrar no sólo una gran variedad mosaicos sino indicios de un buen entendimiento del tema, ya que realizaron los 17 posibles tipos de simetría en diferentes mosaicos. En la actualidad las teselaciones son utilizadas ampliamente en la vida cotidiana con fines decorativos o utilitarios, además de ser la herramienta usada para modelar los acomodos de átomos en un sólido.

El primer estudio documentado de teselaciones lo realizó Johannes Kepler en su libro de 1619 *Harmonices Mundi* donde escribió sobre teselaciones regulares (platónicas: construidas con copias de un solo polígono regular) y semi-regulares (arquimideanas: formadas con copias de dos o más polígonos regulares). Kepler decía que las figuras más armónicas y más perfectas eran los polígonos regulares, “cuando estas figuras se juntan en un vértice sin dejar agujeros hay *congruencia*; la congruencia es *perfecta* cuando los ángulos de las figuras que se juntan lo hacen de igual manera en todos los puntos de encuentro, por lo tanto todos los puntos de encuentro son similares y el patrón de estos puntos puede continuarse indefinidamente; y la congruencia es *la más perfecta* si, además, las figuras que se juntan en el plano son todas del mismo tipo”. Kepler clasificó las congruencias más perfectas (en figura 2) y las congruencias perfectas hasta con tres polígonos regulares y semirregulares (polígonos con todos sus lados iguales pero ángulos diferentes), analizando caso por caso.

Además, Kepler podría también ser considerado el fundador de la crista-

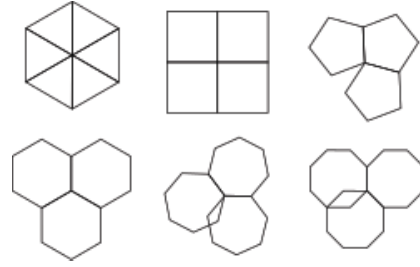
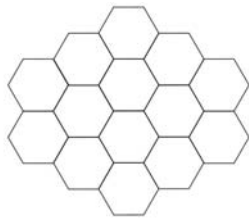
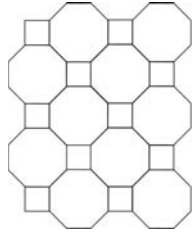


Figura 1: Congruencia perfecta y la congruencia más perfecta, según las definiciones de Kepler.

Figura 2: La congruencia más perfecta sólo ocurre con polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados.

lografía. Ésta es la ciencia que estudia las formas de los cuerpos al cristalizar, es decir, el acomodo de los átomos en un sólido. A Kepler le maravillaron las formas de los copos de nieve y dedicó el tratado *De nive sexangula* (El copo de nieve hexagonal) a su descripción. Ahí sugirió que los átomos de un sólido cristalino formaban *empaques de esferas*. Los químicos adoptaron esta idea y desde entonces el estudio de acomodos de átomos en un cristal ha estado íntimamente relacionados con las teselaciones.

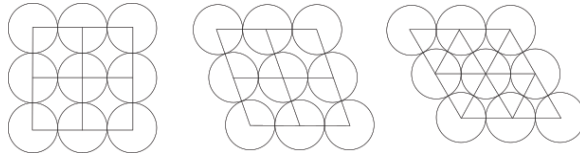


Figura 3: Los centros de las esferas en un empaque forman una teselación.

Para los matemáticos, sin embargo, las ideas de Kepler pasaron aparentemente desapercibidas por casi tres siglos hasta que en 1891 Evgraf Fedorov, matemático, cristalógrafo y mineralista ruso, clasificó [Fed71] las simetrías que pueden presentar los cristales en el espacio, es decir, las simetrías de teselaciones cristalográficas<sup>1</sup> del espacio euclideo. Fedorov hizo un largo trabajo de enumeración de las 230 posibilidades, hoy llamadas *grupos espaciales*. Posteriormente clasificó también el caso más sencillo de las simetrías de cristales planos. Estos son conocidos como los 17 *grupos cristalográficos* o *grupos mosaicos*.

<sup>1</sup>Una teselación es cristalográfica si es el subgrupo de traslaciones es del mismo rango que la dimensión del espacio donde vive la teselación.

A finales del siglo pasado W. Thurston ideó una notación para tratar con las simetrías de superficies que J. Conway utilizó para obtener una clasificación de las simetrías de teselaciones periódicas del plano mucho más elegante que la hecha por Fedorov. Una teselación es periódica si existen traslaciones que la dejan invariante. Si este es el caso, toda la información necesaria la guarda un objeto geométrico llamado *orbifold* obtenido como el cociente de  $\mathbb{R}^2$  por el grupo de simetrías  $G$  de la teselación. Los orbifolds son espacios topológicos compactos, son localmente una variedad en todos sus puntos salvo en los puntos fijos bajo los elementos de  $G$ . En la sección 1.2 platicaremos más detalles de esta clasificación.

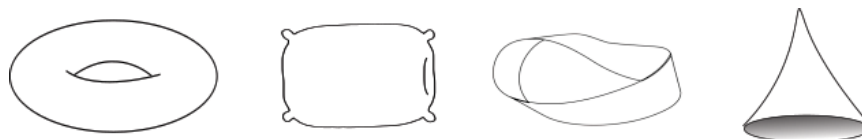


Figura 4: Algunos ejemplos de orbifolds bidimensionales.

El orbifold es el *objeto característico* de una teselación periódica. Éste contiene toda la información acerca de las simetrías de la teselación y partiendo de él se puede reconstruir una teselación con las simetrías provistas.

Este trabajo es una búsqueda de un objeto característico para teselaciones aperiódicas.

Existen diferentes definiciones de teselación aperiódica. Por ahora podemos pensarlas como teselaciones que carecen de simetría traslacional, aunque pueden presentar otras simetrías como centros de rotación o ejes de reflexión. La aperiodicidad fue traída a la luz por el matemático-lógico-filósofo chino-estadounidense Hao Wang en 1961. Wang trataba de resolver la decidibilidad del problema del dominó<sup>2</sup>. Él probó que este problema era decidible si no existían conjuntos de teselas aperiódicos<sup>3</sup>. En 1966 Robert Berger, alumno de Wang, demostró que este problema no era decidible al encontrar un conjunto aperiódico de más de veinte mil piezas. Posteriormente él mismo, a la par con Wang y Robinson, encontraron conjuntos aperiódicos más pequeños. Una década después Penrose y Ammann descubrieron las famosas teselaciones de Penrose, construidas a partir de un conjunto aperiódico de únicamente dos

<sup>2</sup>La decidibilidad de un problema se resuelve encontrando un algoritmo que de una respuesta. El problema de dominó consiste en decidir si un conjunto dado de teselas puede teselar o no el plano.

<sup>3</sup>Un conjunto de piezas aperiódico es aquel con el cual cualquier teselación construida es no periódica.



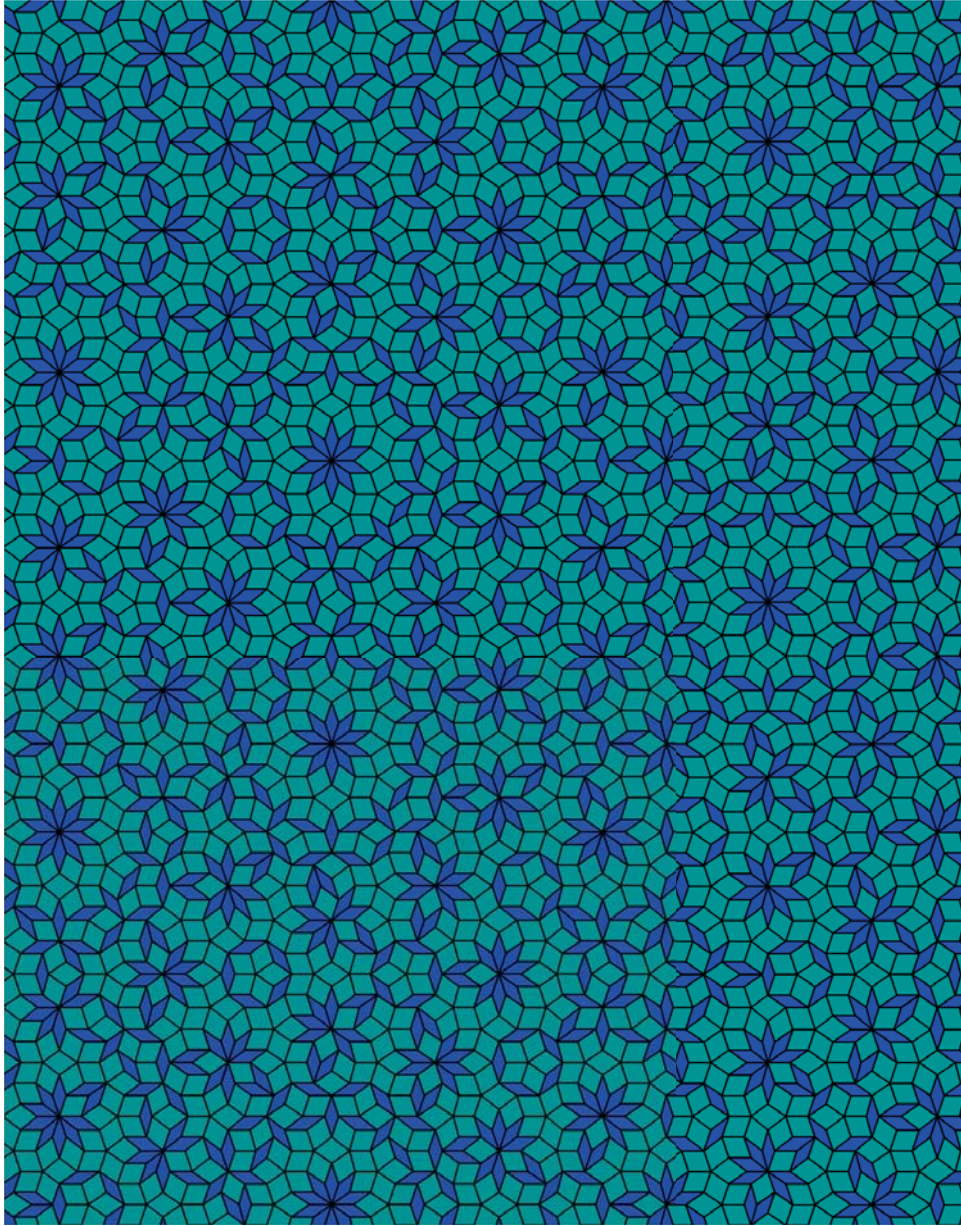


Figura 5: Porción de una teselación aperiódica.

piezas. Desde entonces ha estado presente la pregunta ¿existen conjuntos aperiódicos de una pieza? Este es el problema del *einstein* (del alemán *ein* uno *stein* piedra o pieza).

En el caso periódico sí hay teselaciones de cualquier tipo de simetría y con un único tipo de teselas. Esto se puede ver a través del orbifold asociado a cada teselación. Ya que éste, al ser una región fundamental del grupo de simetrías de la teselación, puede replicarse por simetrías para cubrir todo el plano. Por lo que el propio orbifold tiene toda la información para construir una monotesela periódica.

Al darnos cuenta de que todos los datos necesarios para construir una teselación periódica los guarda un objeto geométrico con unos cuantos datos combinatorios, uno quisiera saber quiénes son los orbifolds asociados a las teselaciones aperiódicas. Infelizmente no obtendremos orbifolds, pero se puede hacer el intento de obtener un objeto geométrico que acarree la información de las simetrías de una teselación aperiódica.

Una posibilidad es el *espacio de teselaciones*  $\Omega_T$ , también llamado la *envolvente* de una teselación  $T$ . Este se define como la completación de la órbita por traslaciones  $\mathcal{O}(T)$  en una métrica en la que dos teselaciones son cercanas si coinciden en una bola euclideana de radio grande centrada en el origen salvo una pequeña traslación.

Los espacios de teselaciones han sido estudiados en la últimas décadas desde la topología y los sistemas dinámicos por R. Williams, L. Sadun, J.M. Gambaudo, F. Gähler, J. Anderson e I. Putnam, entre otros. Son una rica fuente de ejemplos en dinámica hiperbólica, son laminaciones por superficies de Riemann [Ghy99], límites inversos de variedades ramificadas [AP98, Sad03, BBG06] y haces fibrados sobre toros con fibras homeomorfas al conjunto de Cantor [Wil01, SW03]. Todos estos resultados serán revisados en el capítulo 2.

Sin embargo, para hacer la analogía explícita entre los orbifolds asociados a teselaciones periódicas y los espacios de teselaciones aperiódicas es necesario cruzar un pantano, pues las ‘simetrías’ de teselaciones aperiódicas ‘densifican’ el espacio  $\Omega_T$  de manera que el cociente bajo ‘simetrías’ carece de topología. Algo muy similar a lo que sucede con el espacio de hojas de la foliación del toro por rectas de pendiente irracional. A raíz de esto han surgido estudios de espacios de teselaciones desde enfoques geométricos generalizados, como geometría no-conmutativa [Con94, AP98].

A. Connes estudió en [Con94] el espacio de teselaciones de Penrose como espacio no conmutativo y encontró que ‘coincide’ con el toro no conmutativo estudiado por M. Rieffel [Rie81], definido como el álgebra  $C^*$  generada por dos operadores unitarios que conmutan salvo un número complejo unitario. Si los generadores fueran conmutativos se obtendría el toro usual.

La idea que trataremos de explotar en este trabajo es dotar a los espacios de teselaciones con una estructura de *difeología* [IZ13]. La difeología es una generalización de estructura geométrica desarrollada en las últimas dos o tres décadas. Ésta nació en Francia impulsada por Jean-Marie Souriau y sus estudiantes Paul Donato y Patrick Iglesias. Su fundamento es hacer geometría diferencial sin coordenadas<sup>4</sup>. Los espacios difeológicos son una clase de espacios que generalizan la definición de variedad ‘olvidando’ la topología pero manteniendo su estructura suave.

La idea de utilizar esta herramienta para el estudio de espacios de teselaciones nace a raíz de que un análogo del orbifold mencionado, para una teselación unidimensional, podría ser  $\mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ , donde  $\alpha$  es un número irracional. Este espacio carece de topología, pero es un ejemplo clave y no trivial para la difeología, se conoce como el toro irracional  $T_\alpha$ .

En el presente trabajo se define una estructura difeológica para los espacios de teselaciones  $\Omega$  y se introduce, para el caso unidimensional, una variante del haz fibrado definido por Williams en este contexto. Dicho haz se define más naturalmente sobre el toro irracional  $T_\alpha$  y retiene más información que en el caso topológico. Esto se debe a que la construcción de Williams consiste en deformar las teselas para que todos los vértices tengan coordenadas enteras. Esto se puede hacer sin modificar la combinatoria de la teselación pero dará como resultado una equivalencia muy débil entre espacios de teselaciones (homeomorfismo, más débil que conjugación, más débil que derivabilidad local mutua). La posibilidad de definir una estructura geométrica sobre  $T_\alpha$  permite construir una versión de aquel haz pero conservando información importante como los tamaños de las teselas.

En la versión difeológica explorada en esta tesis, el haz fibrado aludido es un espacio cubriente. Esto nos permite calcular directamente, gracias a la clasificación de toros irracionales de P. Iglesias [IZ85], el grupo fundamental de los espacios de teselaciones en cuestión y una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de estos.

---

<sup>4</sup>Yo lo interpreto como algo similar a pasar de espacios métricos a topológicos.

Los haces fibrados en la teoría difeológica se definen a través del *grupoide estructural* asociado a una función suprayectiva suave. Dicho grupoide, en nuestro caso, es un grupoide de foliación en el sentido de I. Moerdijk [Moe02] y en el caso periódico se obtiene un grupoide orbifold, el cual es un caso particular del grupoide anterior. Esto podría sugerir que la búsqueda del objeto característico para teselaciones aperiódicas va por buen camino.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se introduce el lenguaje básico para hablar de teselaciones, tanto periódicas como aperiódicas, dedicando la mayor parte de éste a las segundas; en el capítulo 2 se explican los espacios de teselaciones y se revisan los resultados más relevantes sobre la geometría y topología de estos; en el capítulo 3 se expone la herramienta difeológica necesaria para nuestro estudio. El capítulo 4 concentra los resultados y demostraciones originales de esta tesis y en el último capítulo 5 se exponen algunos problemas abiertos directamente relacionados con los temas aquí tratados.



# Capítulo 1

## Antecedentes

En este primer capítulo se introduce el lenguaje básico para hablar de teselaciones: definiciones básicas, la clasificación de las simetrías de teselaciones periódicas, para posteriormente centrarnos en teselaciones aperiódicas. Platicaremos un poco sobre su historia y los principales métodos para construirlas.

### 1.1. Preliminares lingüísticos

Una *teselación*  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  del plano euclideo  $\mathbb{R}^2$  es un conjunto de subconjuntos  $t_i \subset \mathbb{R}^2$  llamados *teselas* tales que la unión de todos ellos cubre totalmente el plano y los interiores de cada par de ellos son ajenos. Cada tesela es una copia de un elemento de un conjunto finito  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  de *prototeselas*. Un *parche* o *patrón* es una unión finita y conexa de teselas. Por ejemplo los parches con teselas rectangulares de la figura 1.1 cuentan con 4, 5 y 4 teselas, respectivamente, pero todas ellas son copias de una misma prototesela, mientras que el parche restante tiene dos prototeselas. Asumiremos que las prototeselas  $\tau_i$  son homeomorfas al disco cerrado  $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ , pero pueden tener coloraciones que restrinjan su pegado como en la figura 1.5. Si existe una teselación  $T$  construida a partir de un conjunto de prototeselas  $S$  diremos que  $S$  *admite* una teselación. Si  $A \subset \mathbb{R}^2$ , denotaremos por  $T \sqcap A$  al conjunto de teselas de  $T$  que interseca  $A$ .

Dependiendo del contexto y del autor las teselas pueden ser cualquier transformación rígida de las prototeselas o únicamente traslaciones. En este capítulo adoptaremos la primera opción. Asumiremos además que las teselas son poligonales, es decir, que tienen aristas rectas y vértices. Esta condición que podría parecer muy restrictiva no lo es, Richard Kenyon

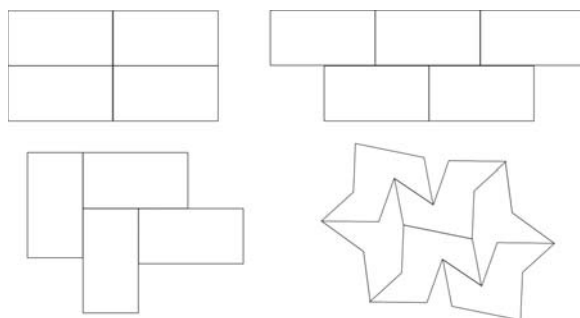


Figura 1.1: Ejemplos de parches.

probó que cualquier teselación se puede deformar en una teselación poligonal conservando la combinatoria [Ken92]. Asumiremos también que las teselas se pegan sólo por aristas completas, es decir que los parches NE y SO de la figura 1.1 no están permitidos.

Esta definición de teselación se puede aplicar en cualquier otra dimensión. Aunque el único caso adicional que utilizaremos es el unidimensional, algunas definiciones y resultados se enunciarán en su forma general.

## 1.2. Teselaciones periódicas

**Definición 1.2.1.** Una teselación del plano  $T$  es *periódica* si existe  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tal que  $T + x = T$ , donde

$$T + x := \{t_i + x : t_i \in T\}$$

es la teselación formada por las teselas de  $T$  trasladadas con el vector  $x$ .

La periodicidad de una teselación plana  $T$  puede ser de dos tipos esencialmente distintos de acuerdo a la dimensión (1 o 2) del espacio vectorial generado por los vectores que dejan fija a la teselación, es decir, si la teselación es invariante en una o dos direcciones linealmente independientes. Las teselaciones invariantes en una dirección son llamadas *frisos* y en dos dimensiones *mosaicos*. Las simetrías de los primeros entran dentro de la clasificación de las simetrías de patrones en la esfera, ya que estos se pueden dibujar sobre el ecuador conservando todas sus simetrías (ver capítulo 5 de [CBGS08]); así que nos concentraremos en los segundos.

Consideremos un mosaico  $T$  y llamemos  $G$  a su grupo de isometrías. Los elementos de  $G$  son traslaciones, reflexiones, rotaciones y deslizamientos<sup>1</sup>. Estos últimos son la composición de una traslación y una reflexión que por sí solas no son simetrías de la teselación. Las rotaciones a su vez las podemos clasificar en simples y caleidoscópicas, siendo las últimas aquellas cuyos centros se encuentran sobre un eje de reflexión.

El subgrupo de  $G$  generado por las traslaciones de  $T$  es libre abeliano generado por dos elementos y por lo tanto isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$ . Más aún  $\mathbb{Z}^2 \triangleleft G$ , de manera que  $G \cong D \rtimes \mathbb{Z}^2$ , con  $D$  un subgrupo de  $G$  generado por rotaciones y reflexiones. Además, por la restricción cristalográfica (ver apéndice A.1), los órdenes de los elementos de  $D$  pueden ser únicamente 1, 2, 3, 4 o 6.

El espacio de órbitas de la acción de  $G$  en  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{T}^2/D =: \mathcal{O}$$

es un espacio topológico compacto que recibe el nombre de *orbifold*, es localmente una variedad en todos sus puntos salvo en los puntos fijos bajo los elementos de  $D$ . Las singularidades y orientaciones de  $\mathcal{O}$  representan los tipos de simetrías de la teselación: fronteras por reflexiones, puntos como por cada centro de rotación (en el interior del orbifold si es simple y en la frontera si es caleidoscópico) y torceduras por deslizamientos.

Además el orbifold  $\mathcal{O}$  mantiene registro de la característica de Euler de la teselación pensada como un mapa<sup>2</sup> del plano. De manera que las singularidades del orbifold tienen unos *costos* de afectación a la característica de Euler.

símbolo	simetría	costo
<b>o</b>	sólo traslaciones	2
<b>n</b>	rotación de orden $n$	$\frac{n-1}{n}$
*	reflexión	1
<b>x</b>	deslizamiento	1
<b>*n</b>	rotación caleidoscópica de orden $n$	$\frac{n-1}{2n}$

<sup>1</sup>También llamados *pasos* por ser la simetría de las huellas que dibuja una persona al caminar sobre la arena.

<sup>2</sup>Por mapa entendamos un dibujo con vértices, aristas y caras sobre una superficie; si a una teselación en el plano le aplicamos (la función inversa de) la proyección estereográfica, obtendremos un mapa en la esfera. Por lo que podemos definir la característica de Euler del plano igual a la de la esfera, que es 2.



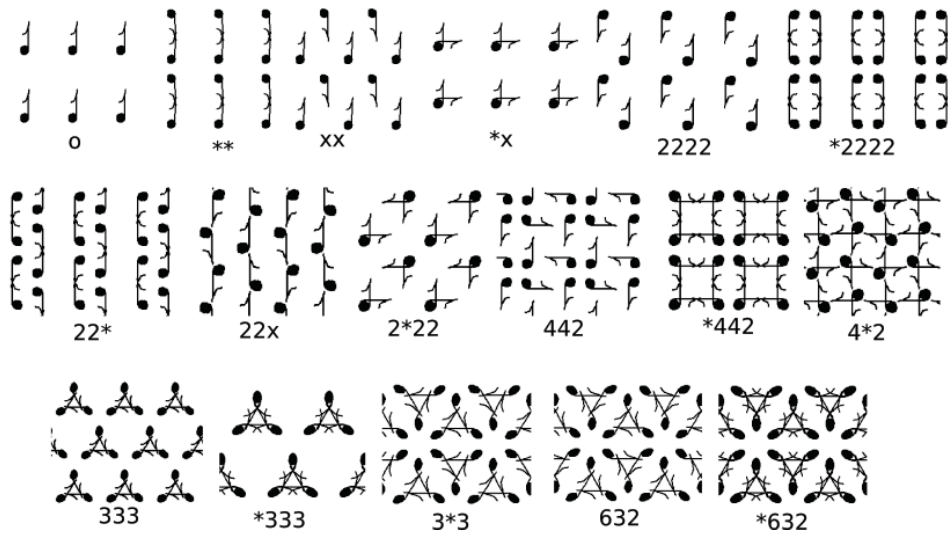


Figura 1.2: Los 17 tipos de simetría cristalográfica en el plano.

**Teorema 1.2.2** (Teorema mágico para patrones del plano.). *La suma de los costos de las simetrías de patrones del plano es exactamente 2.*

Así pues, los 17 tipos de simetrías distintas para teselaciones periódicas del plano aparecen como el resultado del ejercicio de aritmética básica de sumar 2 con los costos disponibles:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{12}$ , 1 y 2. Estos muestran en la figura 1.2. Todos los detalles sobre este teorema se pueden encontrar en [CBGS08].

**Ejemplo 1.2.3.** Consideremos los patrones que se muestran en la figura 1.3.

El ejemplo de arriba se denota por **o**, sus únicas simetrías son traslaciones por los vectores que van por las aristas de cada tesela. Dicha tesela funciona como región fundamental y el orbifold es un toro obtenido al identificar aristas por traslaciones.

El ejemplo de abajo es el grupo 2222. Además de las mismas dos traslaciones del ejemplo anterior, este patrón tiene centros de rotación de orden 2 en cada punto medio de aristas, en cada vértice y en el centro de cada tesela; una región fundamental es la media tesela sombreada, en la que se identifican los dos extremos horizontales, y cada uno de los verticales consigo mismo. Lo que da como resultado una esfera con cuatro puntos como, o una almohada. El costo de cada esquina de la almohada es  $\frac{1}{2}$ .

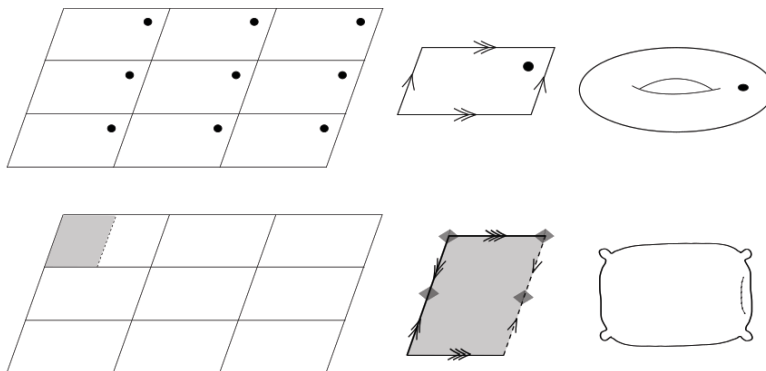


Figura 1.3: Ejemplos de patrones, sus regiones fundamentales y sus orbifolds.

### 1.3. Teselaciones aperiódicas

Una teselación del plano  $T$  es *no periódica* si para cualquier vector no nulo  $x \in \mathbb{R}^2$  se tiene que  $T \neq T + x$ . Esta condición puede satisfacerse con ejemplos muy poco interesantes como una teselación con puros cuadrados blancos y un único cuadrado negro como en la siguiente figura.

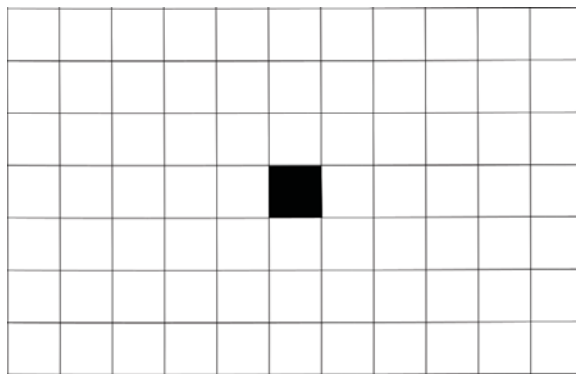


Figura 1.4: Una teselación no periódica y no aperiódica.

Para excluir estos casos se define:

**Definición 1.3.1.** Una teselación es *aperiódica* si es no periódica y no contiene parches periódicos arbitrariamente grandes. Un conjunto de prototeselas se llama *conjunto aperiódico* si cualquier teselación construida con ellas es aperiódica.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Algunos autores definen teselación aperiódica como una teselación construida a partir

El estudio de teselaciones aperiódicas se extiende a lo ancho de varias ramas de la matemática. En sus comienzos, hace medio siglo, el problema de la mera existencia de conjuntos de teselas aperiódicos fue tratado por Hao Wang (1921-1995) y su estudiante Robert Berger con métodos lógicos y computacionales. Wang trabajaba en el problema del dominó. Este problema se pregunta si un conjunto de teselas de Wang (cuadrados con aristas coloreadas que se pueden pegar por sus aristas si los colores coinciden) puede formar una teselación del plano o no. Él probó en [Wan61] que este problema era decidible si no existían conjuntos de teselas aperiódicos. Más tarde Berger exhibió [Ber66] un conjunto aperiódico de teselas de Wang de más de 20 mil piezas, estableciendo así la indecidibilidad del problema del dominó. En la sección 5.1.1 se abunda un poco más acerca de estos problemas.

En 1971 R. Robinson [Rob71] halló un conjunto aperiódico de 6 piezas (ver figura 1.5) basado en teselas de Wang notando la existencia de una estructura jerárquica (definición 1.3.2), observación fundamental para el posterior desarrollo de las teselaciones por el método de sustitución.

Pocos años después Roger Penrose encontró [Pen74, Pen79] tres conjuntos aperiódicos basados en simetría pentagonal. Todas ellas *mutuamente localmente derivables*<sup>4</sup>. El primero que encontró, llamado P1, consta de 6 prototeselas. Los otros dos constan únicamente de dos prototeselas: el P3 con dos rombos y el P2 con las llamadas *flecha y papalote* (figura 1.8).

Independientemente un matemático amateur llamado Robert Ammann encontró el mismo conjunto aperiódico de rombos de Penrose; descubrió también las teselaciones que fueran descritas posteriormente por F.P.M. Beenker [Bee82], hoy conocidas como teselaciones de Ammann-Beenker que se explican en la sección 1.3.2; además de otros tres conjuntos aperiódicos llamados A2, A3 y A4. Imágenes de todos estos conjuntos aperiódicos se muestran en la figura 1.5.

Las demostraciones de que estos conjuntos de teselas en realidad teselan aperiódicamente el plano están todas basadas en la existencia de estructuras jerárquicas.

**Definición 1.3.2.** Una teselación es *jerárquica* si sus teselas se pueden pegar (componer) para formar una teselación con un conjunto de prototeselas

---

de un conjunto aperiódico de prototeselas.

<sup>4</sup>Dos teselaciones con distintos conjuntos de teselas son mutuamente localmente derivables si se puede obtener una teselación a partir de otra a través de reglas locales como agregar o quitar aristas. Una definición precisa se encuentra más adelante en 2.1.8.

<sup>6</sup>Imágenes de dominio público en términos de Wikimedia commons. Trabajo original de T. Yamaguchi.

<sup>8</sup>Imagen obtenida con Wolfram Mathematica ©.

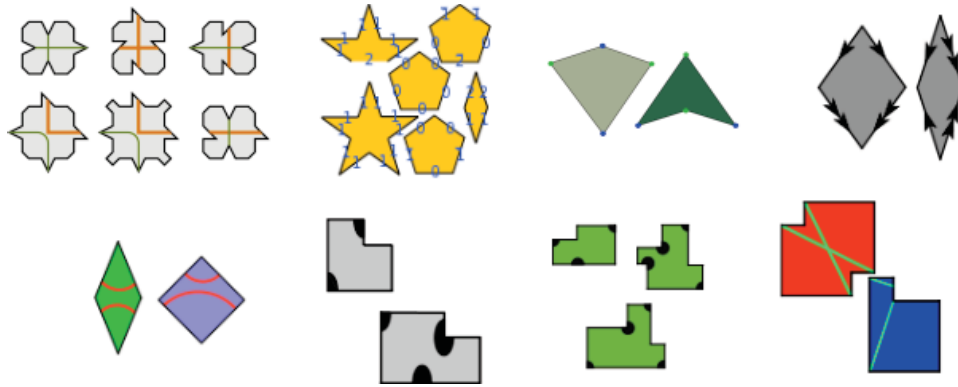


Figura 1.5: Conjuntos aperiódicos. Arriba: de Robinson 1971, P1, P2 (flecha y papalote) y P3 de Penrose, 1974, 1977 y 1978, respectivamente. Abajo: Ammann-Beenker 1982, A2, A3 y A4 de Amman, 1986. <sup>6</sup>

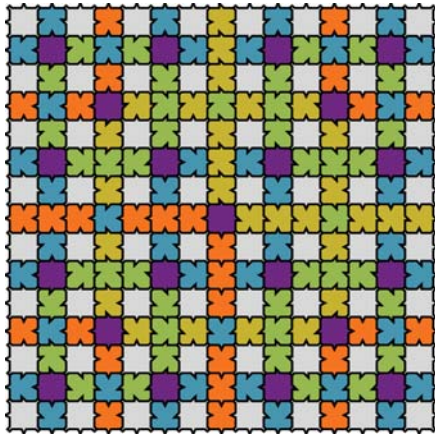


Figura 1.6: Parche de una teselación de Robinson. <sup>8</sup>

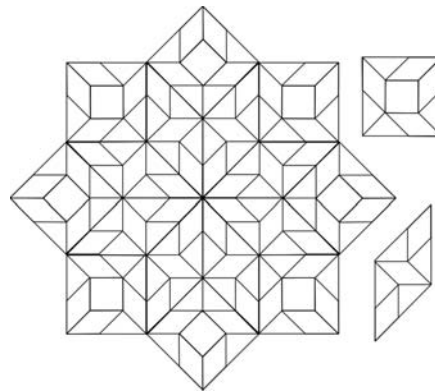


Figura 1.7: Parche de teselación de Ammann-Beenker y su jerarquía.

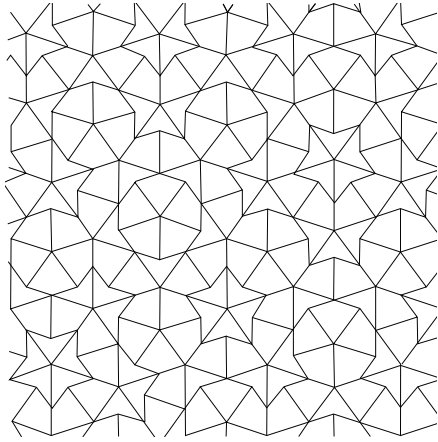


Figura 1.8: Parche de teselación P2, flecha y papalote de Penrose.

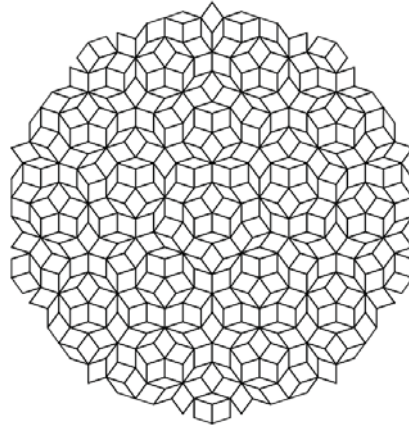


Figura 1.9: Parche de teselación P3, rombos de Penrose.

finito de mayor escala, y éstas a su vez se pueden acomodar formando otra teselación con conjunto finito de prototeselas de escala aún mayor, y así *ad infinitum*. La llamaremos *únicamente jerárquica* si sus teselas de nivel  $n$  se pueden acomodar para formar teselas de nivel  $n + 1$  de una única manera.

El funcionamiento de una jerarquía en una teselación puede ser bastante complicado. Incluso en el ejemplo más explotado y entendido -las teselaciones de Robinson- la demostración de la existencia de una estructura jerárquica única involucra bastante información que acarrearán las teselas y transmiten al pegarse con otras teselas. La explicación de este procedimiento escapa del alcance de esta tesis pero puede ser encontrado de manera clara y concisa en la página 17 de [PLS12], y una imagen se muestra en la figura 1.10.

Sin embargo, la idea detrás de las jerarquías para formar teselaciones es natural: asociar a cada parche otro parche que cubra un área mayor e iterar este proceso. Esto implica que se pueden cubrir radios arbitrariamente grandes, lo que a su vez implica que se puede teselar el plano.

---

<sup>10</sup>Imagen de dominio público en términos de Wikimedia commons. Trabajo original de C. Goodman-Strauss.

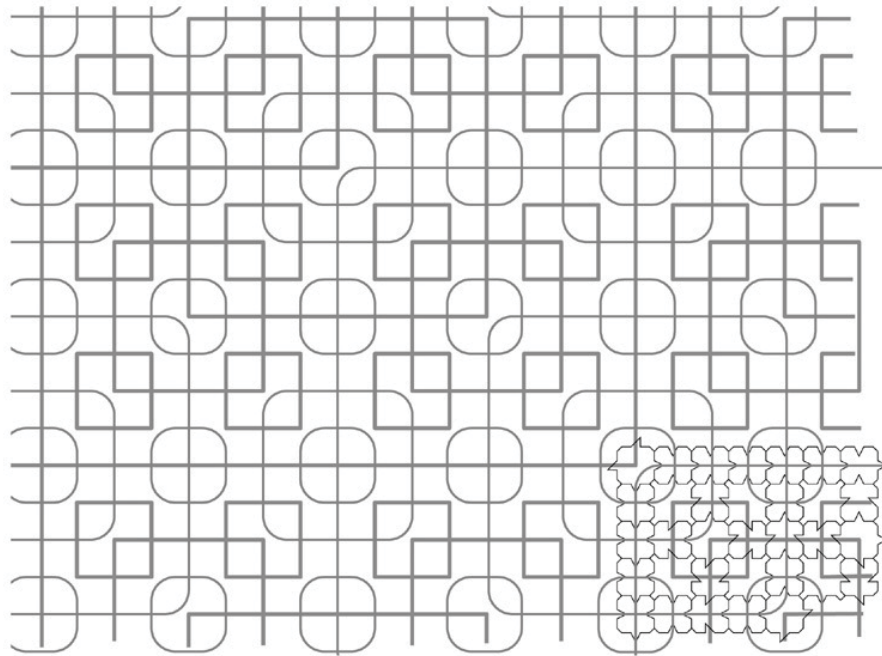


Figura 1.10: Jerarquía de teselaciones de Robinson. Existen dos tipos de superteselas en cada nivel jerárquico: los cuadrados rectos y los redondeados. Pregunta al lector: ¿cuántos niveles jerárquicos aparecen en la figura? compara con figura 1.6. <sup>10</sup>

**Teorema 1.3.3** (Teorema de extensión. Teorema 3.8.1 en [GS86]). *Si con un conjunto finito  $S$  de prototeselas se puede teselar discos de radio arbitrariamente grande, entonces  $S$  admite una teselación del plano.*

Más aún, cuando la jerarquía es única, la teselación obtenida es forzosamente aperiódica, ya que, para cualquier hipotética traslación, existe un nivel jerárquico de diámetro mayor a la magnitud de la traslación que no puede ser invariante bajo ésta debido a la unicidad de la jerarquía.

**Teorema 1.3.4** (Teorema 5.3 en [Sen95]). *Toda teselación únicamente jerárquica es aperiódica.*

Una amplia clase de teselaciones jerárquicas bien entendidas son las teselaciones por sustitución. Objeto de estudio de la siguiente sección.

### 1.3.1. El método de sustitución

Una *sustitución* es una regla para subdividir las prototeselas en piezas semejantes a estas mismas, seguida de una expansión de las nuevas piezas al tamaño de las originales. Esto induce una función  $\omega$  expansiva del conjunto de parches en sí mismo, o sea que el diámetro del parche  $\omega(P)$  es mayor al de  $P$ . La existencia de una sustitución provee un método para la construcción de teselaciones a través de la iteración  $\omega^k$ , la cual puede aplicarse tanto a parches como a teselaciones.

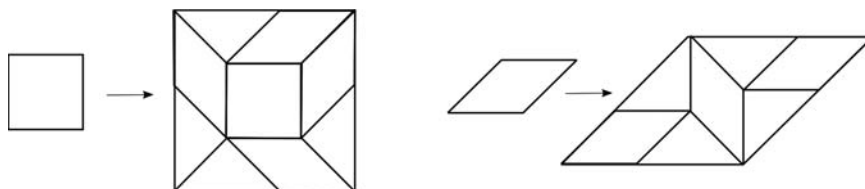


Figura 1.11: Regla de sustitución para teselas de Ammann-Beenker. Los triángulos se completan en cuadrados por la regla de pegado dada por la sustitución, como se puede observar en la figura 1.7.

**Definición 1.3.5.** Una teselación  $T$  con conjunto de prototeselas  $S$  es un *teselación por sustitución* con regla de sustitución  $\omega$  si para todo parche  $P$  que aparece en  $T$  existen  $\tau \in S$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}^2$  tales que

$$P \subset \omega^n(\tau) + x. \quad (1.1)$$

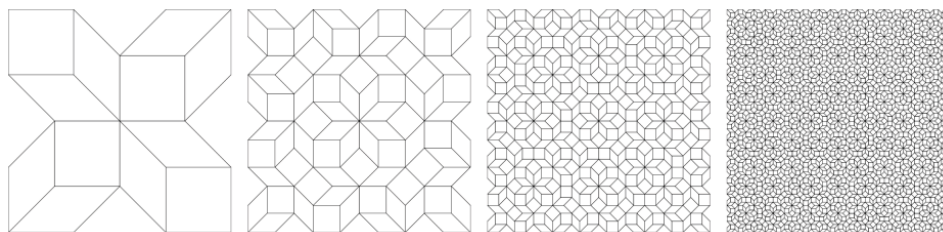


Figura 1.12: Sustituciones sucesivas (sin factor de expansión) a un parche de Ammann-Beenker.

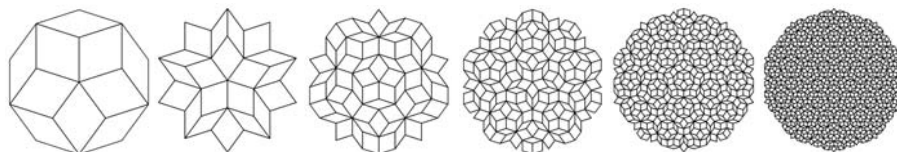


Figura 1.13: Sustituciones sucesivas (sin factor de expansión) a un parche de P3.

**Definición 1.3.6.** Una sustitución es *primitiva* si para toda prototesela  $\tau$  existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\tau$  se encuentra en el parche  $\omega^m(\tau')$  para cualquier otra prototesela  $\tau'$ .

A toda sustitución  $\omega$  se le asocia una matriz  $A_\omega$  cuya entrada  $(i, j)$  es el número de veces que aparece la prototesela  $\tau_j$  en  $\omega(\tau_i)$ . Si la sustitución es primitiva entonces la matriz también lo es<sup>11</sup>. Los valores propios de  $A_\omega$  son las proporciones de aparición de las prototeselas en una teselación.

La acción de  $\omega$  sobre un teselación  $T$  define una dinámica sobre el espacio  $\Omega$  de todas las teselaciones que se pueden obtener con esa regla, ya que  $\omega(T)$  es otra teselación con las mismas teselas y parches que  $T$ . El par  $(\Omega, \omega)$  es un ejemplo de sistema dinámico conocido como *atractor expansivo* [Wil74, Sma67]. En la sección 2.2 abundaremos sobre estos espacios.

Mucho de lo que se conoce acerca de las sustituciones fue estudiado para *sustituciones simbólicas*, por ejemplo [BG13, FB02, LM95]. Las sustituciones simbólicas se definen como una regla que asigna a cada letra de un alfabeto (normalmente finito) una palabra con letras de este alfabeto. Asignando una longitud a cada letra, una palabra infinita es una teselación unidimensional.

<sup>11</sup>Una matriz entera  $A$  es primitiva si existe un natural  $k$  tal que todas las entradas de  $A^k$  son positivas.



Por lo tanto el estudio de sucesiones simbólicas revela algunas propiedades de las teselaciones unidimensionales y cierta intuición hacia casos generales.

**Ejemplo 1.3.7.** La sustitución simbólica más famosa da lugar a las cadenas de Fibonacci, definidas en un alfabeto de dos letras  $\{a, b\}$  bajo la regla

$$\begin{aligned} a &\mapsto ba \\ b &\mapsto a. \end{aligned}$$

Las primeras iteraciones de esta regla en una letra se ven como

$$\begin{aligned} &a \\ &ba \\ &aba \\ &baaba \\ &ababaaba \\ &baabaababaaba \\ &ababaababaabaababaaba. \end{aligned}$$

Esta regla de sustitución es primitiva y su matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene valores propios la razón áurea  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y su recíproca  $-\frac{1}{\varphi}$ . El valor  $\varphi$  es un número de Pisot<sup>12</sup> y representa tanto el factor de expansión de la sustitución como la proporción de aparición de las letras  $a$  y  $b$  (ver capítulo 4 de [BG13]).

Este ejemplo de teselaciones unidimensionales también se pueden construir por el método de proyección, que se explica a continuación.

### 1.3.2. El método de proyección

El método de proyección es otro método general para construir teselaciones aperiódicas. Consiste esencialmente en proyectar teselaciones periódicas de dimensiones superiores sobre planos de pendiente irracional. En la presente sección se explican los orígenes de este procedimiento y la generalización más usada hoy en día.

---

<sup>12</sup>Un número de Pisot, también llamado número de Pisot-Vijayaraghavan o número de PV, es un número real de norma mayor a 1 tal que todos sus conjugados algebraicos tienen norma menor a 1. Existe una famosa conjetura sobre sustituciones, números de Pisot y su posible relación con los cuasicristales que se presenta en la sección 5.2.

El pionero de este método fue N. de Bruijn, quien en 1981 propuso una teoría algebraica para tratar las teselaciones y los espacios que éstas forman [Bru81]. Su análisis está basado en la siguiente observación: considérese una teselación cuyas teselas son paralelogramos. Trazando un segmento por los puntos medios de cada par de aristas paralelas se obtienen curvas poligonales que se prolongan indefinidamente. Los segmentos que forman dichas curvas aparecen en tantas orientaciones como las teselas de la teselación original. Llamamos al conjunto de todas estas curvas poligonales el *esqueleto* de la teselación (ver figura 1.15). Trazando rectas perpendiculares a cada vector del esqueleto se obtiene una *multi-rejilla*, y viceversa, de cada multi-rejilla se puede recuperar una teselación por paralelogramos, método que se explica a continuación.

### Multi-rejillas

Fijemos un número natural  $n$  y consideremos  $n$  parámetros reales  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ . Sea  $\xi_n = e^{\frac{\pi i}{n}}$  si  $n$  es par y  $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  en caso contrario.

**Definición 1.3.8.** Se define una *multi-rejilla* de  $n$  direcciones asociada a los parámetros  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  como la unión de las familias de rectas

$$L_j = \{z \in \mathbb{C} : \Re(\xi_n^{-j} z) + \gamma_j \in \mathbb{Z}\}.$$

con  $n$  fija y  $j$  tomando valores entre 0 y  $n - 1$ .

Una multi-rejilla es *regular* si las intersecciones de toda terna de rectas es vacía, y es *singular* en caso contrario. Nuestro análisis estará centrado en multi-rejillas regulares, que siempre pueden ser obtenidas variando los parámetros  $\gamma_j$ . Llamamos *mallas* a las componentes conexas del complemento de la multi-rejilla.

Para fines ilustrativos continuaremos el análisis fijando  $n = 4$ , es decir, trabajaremos con tetra-rejillas, de las cuales obtendremos las teselaciones de Ammann-Beenker como en [Bee82].

Sean  $\gamma_0, \dots, \gamma_3$  parámetros de una tetra-rejilla regular. Definimos una función  $K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}^4$  como

$$K(z) = \left( \left[ \Re(z \xi_4^{-j}) + \gamma_j \right] \right)_{j=0}^3.$$

donde  $\lceil x \rceil$  denota la función techo de  $x$ , esto es el mínimo entero mayor a  $x$ .

Notamos que  $K$  es constante en cada malla. Además, si  $z_0$  es un punto de intersección de dos rectas de la multi-rejilla y  $z$  un punto en una vecindad de

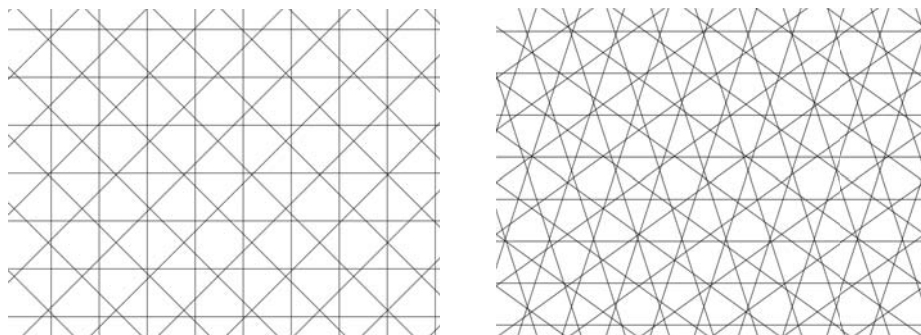


Figura 1.14: Tetra-rejilla y penta-rejilla.

$z_0$ ,  $K(z)$  puede tomar cuatro valores distintos, uno en cada una de las cuatro mallas que contienen a  $z_0$  en su frontera. Dichos valores se obtienen sumando 1 o 0 a las entradas  $j$  y  $l$  de  $K(z_0)$  correspondientes a las familias de rectas  $j, l$  que se intersecan en  $z_0$ . A este cuarteto de vectores lo denotamos  $\bar{K}(z_0)$ . Por ejemplo, si en  $z_0$  se intersecan las familias 1 y 3, y  $K(z_0) = (w_0, w_1, w_2, w_3)$  entonces  $\bar{K}(z_0)$  es el conjunto

$$\{(w_0, w_1, w_2, w_3), (w_0, w_1+1, w_2, w_3), (w_0, w_1, w_2, w_3+1), (w_0, w_1+1, w_2, w_3+1)\}.$$

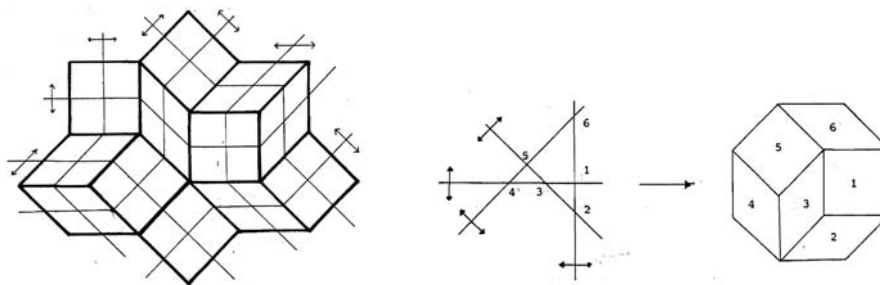


Figura 1.15: (Izquierda) El esqueleto de una teselación y (derecha) correspondencia tetra-rejilla  $\leftrightarrow$  teselación para Ammann-Beenker.<sup>14</sup>

Consideramos ahora una teselación de Ammann-Beenker. Su *esqueleto* tiene cuatro diferentes vectores:  $\xi_4, \xi_4^2, \xi_4^3, \xi_4^4$ . De manera que todo vértice  $v$  de la teselación lo podemos escribir como

$$v = k_0 + k_1\xi_4 + k_2\xi_4^2 + k_3\xi_4^3, \quad (1.2)$$

<sup>14</sup>Imágenes originales de [Bee82].

con  $(k_0, \dots, k_3) \in \mathbb{Z}^4$ .

A partir de la tetra-rejilla regular construimos una teselación de Ammann-Beenker como sigue: por cada malla, al sustituir los vectores  $\vec{K}(z_0)$  en 1.2, se obtienen cuatro puntos del plano complejo que corresponden a los vértices de una tesela. Notamos que hay seis tipos de intersecciones en la tetra-rejilla, dos ortogonales y cuatro con ángulos de  $\frac{\pi}{4}$ . A las intersecciones ortogonales les corresponden teselas cuadradas en sus dos orientaciones, una paralela a los ejes y la otra rotada  $\frac{\pi}{4}$ ; mientras que a las intersecciones con ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  les corresponden las teselas rómbicas en sus cuatro orientaciones (ver figura 1.15 (derecha)). Es decir, una teselación de Ammann-Beenker es el mapa dual de una tetra-rejilla regular.

### Sistemas CPS

La idea de las multi-rejillas se puede replantear en términos que involucran pensar en dimensiones superiores. Imaginemos pues un hipercubo de 4 dimensiones. Éste define cuatro familias de rectas paralelas ortogonales entre sí, una por cada dirección de sus aristas. Si proyectamos ortogonalmente a dos dimensiones algunas familias de rectas se proyectarán en familias de puntos. Sin embargo, si inclinamos un poco el hipercubo podemos conseguir que las cuatro familias de rectas paralelas en  $\mathbb{R}^4$  se proyecten en familias de rectas paralelas en un plano, es decir en una tetra-rejilla. Más aún si la inclinación es adecuada, podemos obtener una tetra-rejilla regular.

Esta idea se formaliza y generaliza a través de los llamados *sistemas de corte y proyección*. La explicación de este método es típicamente ejemplificada en dimensión 2 a 1 por las cadenas de Fibonacci: consideremos la retícula entera  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , una recta  $E$  de pendiente irracional con respecto al plano de la retícula (con lo que aseguramos que  $E$  no corta a la retícula mas que en el origen), su complemento ortogonal  $E^\perp$  y un intervalo unitario alrededor del origen  $W \subset E^\perp$  que llamamos *ventana* o *dominio de aceptación*. El conjunto de puntos de la retícula contenidos en  $E \times W$  se proyecta ortogonalmente en un conjunto de puntos de  $E$  que definen una teselación unidimensional por intervalos de dos longitudes  $L$  y  $C$ . Las dos longitudes  $L$  y  $C$  son resultado de proyectar en  $E$  la diagonal y la arista, respectivamente, de la celda unitaria de la retícula  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Dicha teselación  $T$  de  $\mathbb{R}$  es aperiódica debido al ángulo irracional de  $E$ .

**Definición 1.3.9.** Un *sistema de corte y proyección* (CPS, por sus siglas en inglés) es una terna  $(E, H, \mathcal{L})$  donde  $E \cong \mathbb{R}^d$  es el *espacio físico* donde vive la teselación,  $H$  un grupo abeliano localmente compacto llamado *espacio*

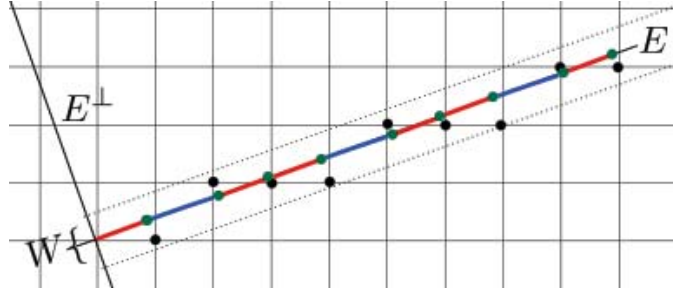


Figura 1.16: Método de proyección de dimensión 2 a 1.

interno, una retícula  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d \times H$  y proyecciones canónicas  $\pi : \mathbb{R}^d \times H \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\pi' : \mathbb{R}^d \times H \rightarrow H$  tales que  $\pi|_{\mathcal{L}}$  es inyectiva y  $\pi'(\mathcal{L})$  es denso en  $H$ .

En este trabajo daremos por hecho que  $H = \mathbb{R}^n$ , por lo que hablaremos del CPS  $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n, \mathcal{L})$  como el método de proyección de dimensión  $n + d$  a  $d$ .

Dada una ventana  $W \subset H$ , el CPS arroja un conjunto de puntos: la proyección en  $E$  del conjunto de puntos de la retícula  $\mathcal{L}$  cuya proyección en  $H$  cae dentro de la ventana  $W$ . Esto es

$$\Lambda(W) = \pi(\{y \in \mathcal{L} : \pi'(y) \in W\}).$$

A partir de este conjunto de puntos se obtienen teselaciones como se indica en la sección 1.3.3. La inyectividad de  $\pi|_{\mathcal{L}}$  implica la no periodicidad de la configuración. Cuando la ventana  $W$  es el hipercubo fundamental de la retícula, cuyos vértices han sido trasladados por parámetros  $\gamma_0, \dots, \gamma_{d-1}$  se obtiene el mismo resultado que con la multi-rejilla correspondiente. A esta clase particular de CPS se les llama de *proyección canónica*, ejemplos de éstas se encuentran en figura 1.17.

**Definición 1.3.10.** Una teselación es de *proyección canónica* si es un CPS  $(E, H, \mathcal{L})$  tal que  $\mathcal{L}$  es la retícula de cubos unitarios  $\mathbb{Z}^n$  y la ventana  $W$  es la proyección ortogonal de la celda unitaria de  $\mathcal{L}$  en  $H$ .

### 1.3.3. Conjuntos modelo

Mucho de lo que se conoce sobre teselaciones aperiódicas se desarrolló originalmente para conjuntos de puntos como los obtenidos en la sección anterior. Esos conjuntos de puntos son comúnmente llamados *conjuntos modelo* debido a que se han utilizado para modelar cuasi-cristales. El tipo de conjuntos modelo que adoptaremos son los conocidos como conjuntos de Delone.

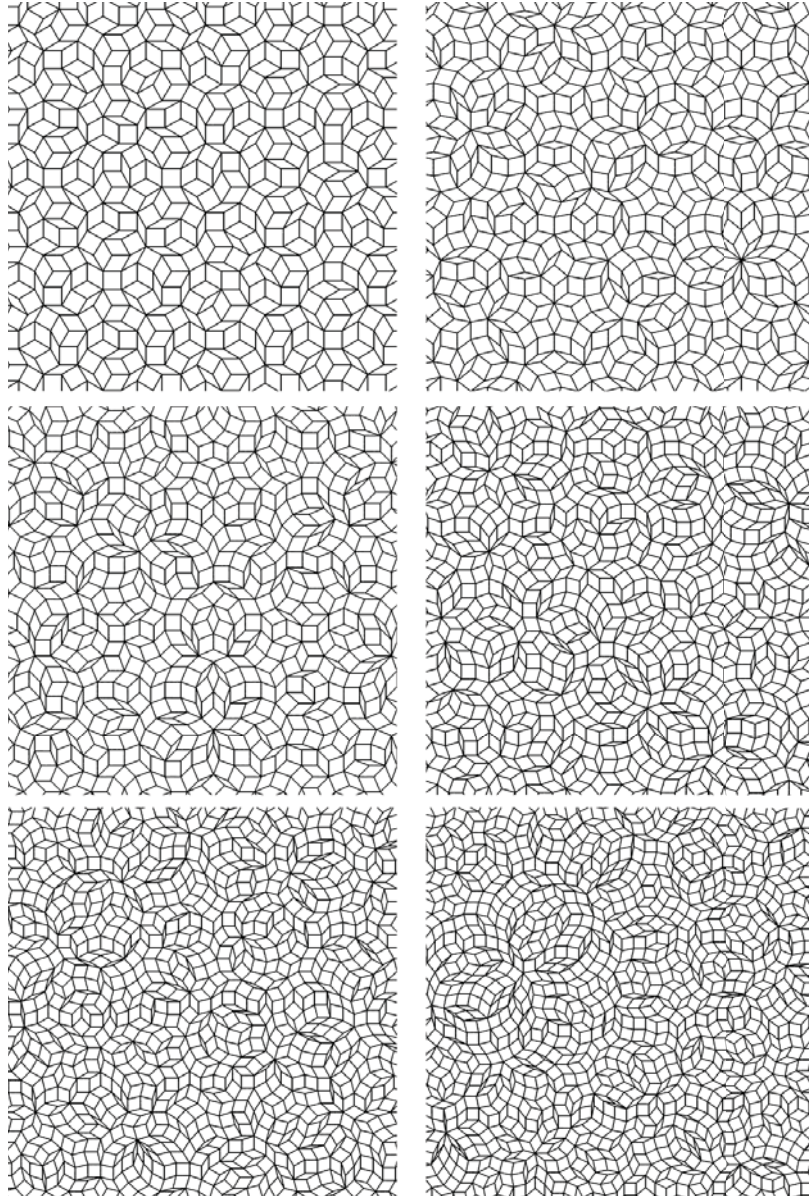


Figura 1.17: Teselaciones por proyección canónica de dimensiones 6, 7, 8, 10, 12 y 14 a 2. Estas teselaciones se construyen usando la retícula  $\mathbb{Z}^n$  y dominio de aceptación  $W$  definido como la proyección del hipercubo unitario de la retícula en el espacio interno. Equivalentemente, estas teselaciones se pueden construir por el método de multi-rejillas para  $n = 6, 7, 8, 10, 12$  y  $14$ .

**Definición 1.3.11.** Sean  $r$  y  $R$  dos reales positivos, un  $(r, R)$ -conjunto de Delone es un subconjunto discreto  $X$  de  $\mathbb{R}^d$  que satisface las siguientes propiedades: (i) *uniformemente discreto*: cada bola abierta de radio  $r$  en  $\mathbb{R}^d$  contiene a lo más un punto de  $X$  y (ii) *relativamente denso*: Cada bola abierta de radio  $R$  contiene al menos un punto de  $X$ .

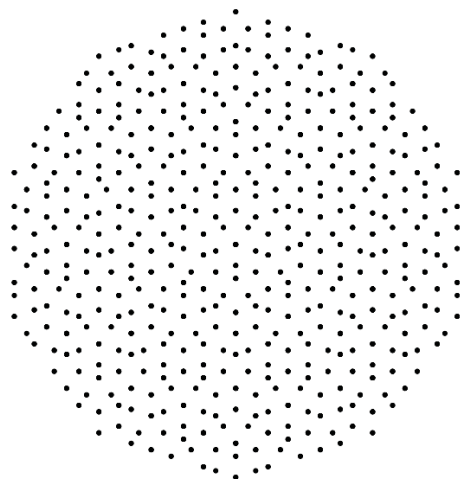


Figura 1.18: Un parche del conjunto de Delone de vértices de una teselación de Penrose.

Los conjuntos de Delone están íntimamente relacionados con las teselaciones. Los vértices o baricentros de las teselaciones que hemos tratado forman un conjunto de Delone. Recíprocamente a cualquier conjunto de Delone  $X$  se le pueden asociar varias teselaciones, por ejemplo la de Voronoï: al punto  $x \in X$  se le asocia la tesela formada por el conjunto de puntos  $V(x)$  del plano que están más cerca de  $x$  que de cualquier otro punto de  $X$ . Esta construcción resulta siempre en una teselación con teselas poligonales convexas. La teselación dual (como mapa) a la de Voronoï se conoce como teselación de Delone asociada a  $X$ .

Todas las definiciones y construcciones que hemos dado se pueden extender/adaptar a conjuntos de Delone. Por ejemplo, un conjunto de Delone tiene complejidad finita local (bajo traslaciones) si para cada  $R > 0$  existen un número finito de patrones de radio  $R$  (salvo traslación). En particular, las teselaciones de Voronoï y de Delone asociadas a un conjunto de Delone con CFL tienen un número finito de teselas. En la práctica no es necesario marcar una diferencia entre teselaciones y conjuntos de Delone.

### 1.3.4. Una clase especial de teselaciones

En esta sección ampliaremos la revisión de dos teselaciones particulares: las de Ammann-Beenker (figura 1.7) y las de Penrose (figura 1.8). Cuando hablamos de teselaciones de Penrose, podemos pensar en cualquiera de sus versiones, principalmente en las de tipo P2 y P3, ya que estas son mutuamente localmente derivables. Procedimiento que se explicará más adelante en 1.3.4.

Estos dos tipos de teselaciones nos interesan principalmente por pertenecer a ambas clases de sustitución, como se muestra en las figuras 1.11 y 1.13, y proyección, que ejemplificamos en la sección 1.3.2 para las teselaciones de Ammann-Beenker a través del método de tetra-rejillas (figuras 1.14 y 1.15). De manera que, como teselaciones por el método de proyección, las de Ammann-Beenker se obtienen por proyección canónica (definición 1.3.10) desde dimensión 4. A su vez, las de Penrose se obtienen por proyección canónica desde dimensión 5, pues están asociadas a penta-rejillas, como lo mostró originalmente De Bruijn en [Bru81]. Sin embargo, las teselaciones de Penrose también se pueden obtener por proyección no canónica desde dimensión 4, proyectando la retícula  $\mathbb{Z}^5$  en la retícula de rango 4 generada por la base

$$\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4, e_1 - e_5\},$$

donde los  $e_i$  son los generadores canónicos de la retícula  $\mathbb{Z}^5$ .

Por tanto estamos reduciendo nuestro foco de interés a la clase de teselaciones de sustitución que también se pueden obtener por proyección desde dimensión 4. Más aún el teorema del encaje minimal (ver apéndice A.2) asegura que las simetrías presentes en esta clase de teselaciones, de órdenes 5, 10, 8 y 12, son todas las permitidas para dimensión 4, pues estos son los únicos números cuya función  $\phi$  de Euler vale 4.

A pesar de que dicha clase contiene a las teselaciones más famosas y mejor estudiadas, poco se ha trabajado en camino hacia su descripción y caracterización (cf. [Sen08]). Lo mejor que se tiene al respecto es el trabajo de E. Harriss y J. Lamb [Har04, HL04] y Z. Masáková, J. Patera y E. Pelantová [MPP98, MPP00] quienes probaron que las teselaciones de proyección canónica de dimensión 4 a 2 que tienen una regla de sustitución son precisamente las obtenidas via una *matriz de  $4 \times 4$  cuadrática expansiva*.

**Definición 1.3.12.** Una *matriz cuadrática expansiva* (de  $4 \times 4$ ) es una matriz con dos espacios propios  $V$  y  $W$  de dimensión 2 asociados a valores propios  $\lambda$  y  $\lambda^{-1}$ , respectivamente, con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\lambda > 1$ . El espacio  $V$  se llama *expansivo* pues en él la dinámica expande la métrica, mientras que  $W$  es el espacio *contráctil* o *ventana*.



A partir de una matriz cuadrática expansiva  $m$  se puede construir un CPS (definición 1.3.9)  $(E, H, \mathcal{L})$  tomando como espacio físico  $E$  y espacio interno  $H$  los espacios expansivo  $V$  y ventana  $W$  de  $m$ , respectivamente, y retícula  $\mathcal{L}$  la generada por los vectores columna de  $m$ .

Los mismos Harriss y Lamb obtuvieron la caracterización completa para teselaciones unidimensionales:

**Teorema 1.3.13** (Teorema 2.1 en [HL06]). *Sean  $E$  y  $H$  los espacios físico e interno, respectivamente, de una teselación  $T$  unidimensional por proyección cuyo dominio de aceptación  $W \subset H$  es un intervalo. Entonces  $T$  admite una regla de sustitución si y sólo si  $E$  y  $H$  son los espacios propios expansivo y contráctil de una matriz primitiva<sup>15</sup>  $M$  de  $GL(2, \mathbb{Z})$  y la longitud de  $W$  es un elemento de  $\mathbb{Q}[\lambda]$ , donde  $\lambda$  es el valor propio expansivo de  $M$ .*

**Ejemplo 1.3.14.** Las teselaciones de Ammann-Beenker están asociadas a la matriz cuadrática expansiva

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con valores propios  $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ , conocido como la razón plateada, y su recíproco  $\lambda^{-1} = \sqrt{2} - 1$ . Sean  $V$  y  $W$  los espacios propios asociados. Equipamos  $\mathbb{R}^4$  con el producto interno

$$\langle a, b \rangle = a_V \cdot b_V + a_W \cdot b_W,$$

donde  $a = a_V + a_W$ ,  $b = b_V + b_W$  y  $\cdot$  es el producto punto euclideo usual. Denotamos por  $\Pi_A$  a la proyección ortogonal en el subespacio  $A$  con el producto punto recién definido. El conjunto de puntos

$$\Pi_V(\mathcal{L} \cap (V + C_x))$$

obtenido por proyección canónica, fijando el dominio de aceptación  $W_0 = C$  la proyección del cubo unitario de la retícula  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^4$ , donde  $C_x$  denota  $C + x$  la traslación de  $C$  por el vector  $x$ , son los vértices de una teselación de Ammann-Beenker [HL06].

<sup>15</sup>Ver definición 1.3.6 y comentario siguiente a ésta.

## Codificación de teselaciones en sucesiones binarias

Primero notemos que las teselaciones de Penrose con conjuntos de teselas P2, P3 y un (o dos) conjunto más son mutuamente localmente derivables. Partiendo las piezas del P2 y P3 por la mitad obtenemos, en cada caso, dos triángulos que denotamos por  $S_A, L_A$  y  $S_B, L_B$ , respectivamente, como se muestra en la figura 1.19. Estos triángulos, llamados triángulos de Robinson (de tipo  $A$  y  $B$ , respectivamente), forman nuevos conjuntos de teselas y heredan tanto la coloración de los vértices como una orientación de las aristas de las que fueron obtenidos, la cual se puede deducir de la propia coloración. Dos triángulos en una teselación pueden ser adyacentes sólo si coinciden tanto los colores de sus vértices como la orientación de la arista que comparten.

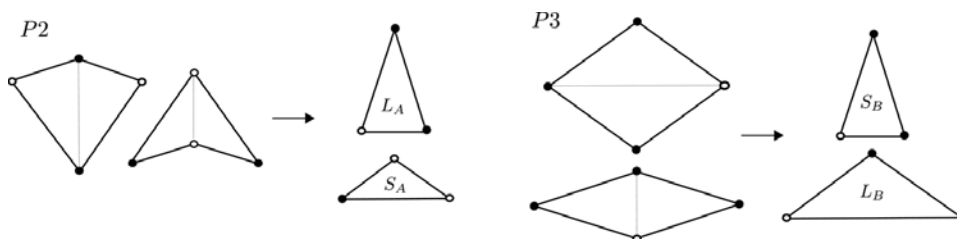
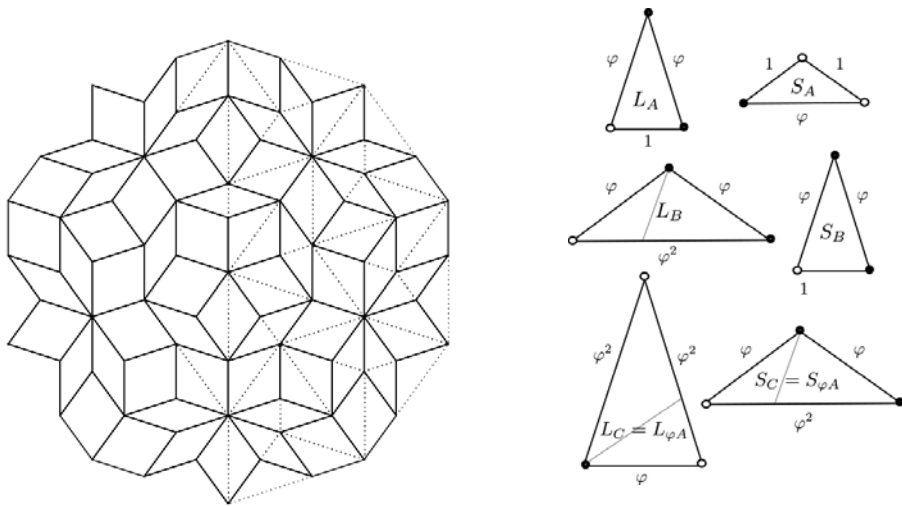


Figura 1.19: Los triángulos de Robinson a partir de P2 y P3.

Ahora definamos una regla para convertir teselas de tipo  $A$  en teselas tipo  $B$ , y viceversa. Al pegar los triángulos  $S_A, L_A$  por la arista corta se obtiene un triángulo  $L_B$  que es semejante a  $S_A$  escalado en un factor de la razón áurea  $\varphi$ , mientras que  $S_B = L_A$ . De igual manera pegando un  $S_B$  con un  $L_B$  se obtiene un  $L_{\varphi A}$  y  $S_{\varphi A} = L_B$ , los cuales son similares a  $L_A$  y  $S_A$  escalados por un factor de  $\varphi$ . Notamos que en cada paso el triángulo de mayor área alterna entre el agudo y el obtuso.

Esta regla nos permite convertir teselaciones con triángulos tipo  $A$  en teselaciones con triángulos tipo  $B$  y viceversa, y como también conocemos reglas para convertir teselaciones  $A$  y  $B$  en P2 y P3, respectivamente, podemos establecer que las teselaciones con estos cuatro conjuntos de teselas son todas mutuamente localmente derivables. Notemos también que la doble iteración de la regla local recién definida es una regla de sustitución para cada uno de los conjuntos de teselas  $A$  y  $B$  que se extiende a P2 y P3.

Ahora, tomemos una teselación  $T$  por triángulos de Robinson y un punto cualquiera  $x$  en el plano que no sea un vértice ni parte de una arista. Formamos una sucesión  $\alpha_n$  de 0s y 1s escribiendo  $\alpha_0 = 0$  si  $x$  se encuentra en una pieza de tipo  $L_A$  y  $\alpha_0 = 1$  si  $x$  está en un  $S_A$ ; siguiendo  $\alpha_1 = 0$  (resp.



$\alpha_1 = 1$ ) si  $x$  está en una pieza de tipo  $L_B$  (resp.  $S_B$ ),  $\alpha_2 = 0$  (resp.  $\alpha_2 = 1$ ) si  $x$  está en una pieza de tipo  $L_{\varphi A}$  (resp.  $S_{\varphi A}$ ), y así sucesivamente. Notamos que si  $\alpha_n = 1$  necesariamente  $\alpha_{n+1} = 0$ , pues una pieza de tipo  $S$  siempre pasa a formar parte de una pieza de tipo  $L$  del siguiente nivel jerárquico, a diferencia de las piezas de tipo  $L$  que al siguiente nivel pueden ser una pieza de tipo  $S$  o formar parte de una pieza de tipo  $L$ . De esta manera se le asocia a  $(T, x)$  una sucesión infinita  $\alpha(x)$  de 0s y 1s en la que nunca aparecen dos 1s consecutivos.

---

<sup>17</sup>Imagen tomada de [Con94].

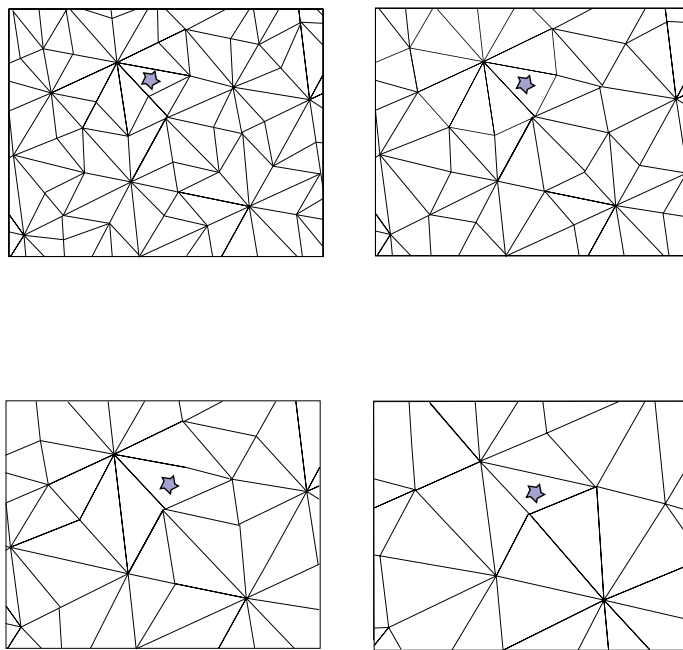


Figura 1.20: Una porción de una teselación por triángulos de Robinson codificada por 00010...<sup>17</sup>



## Capítulo 2

# La geometría de espacios de teselaciones

El objeto central de este capítulo son los espacios de teselaciones. Aquí daremos un repaso de los resultados más relevantes acerca de la geometría/topología de estos espacios. Nuestro principal interés en ellos está motivado por la búsqueda de un análogo aperiódico de los orbifolds expuestos en la sección 1.2. Como ahí se platicó, toda la información de la simetrías de una teselación periódica la guarda este objeto geométrico con unos cuantos datos combinatorios. Uno quisiera entonces saber quiénes son los orbifolds asociados a las teselaciones aperiódicas. Los espacios de teselaciones, aunque no son orbifolds propiamente, son objetos geométricos que guardan cierta información de las simetrías de una teselación aperiódica.

Los espacios de teselaciones han sido estudiados en las últimas décadas desde la topología y los sistemas dinámicos por R. Williams, L. Sadun, J.M. Gambaudo, F. Gähler, J. Anderson e I. Putnam, entre otros. Son una rica fuente de ejemplos en dinámica hiperbólica, son laminaciones por superficies de Riemann [Ghy99], límites inversos de variedades ramificadas [AP98, Sad03, BBG06] y haces fibrados sobre toros con fibras homeomorfas al conjunto de Cantor [Wil01, SW03]. En este capítulo explicaremos las ideas detrás de todos estos resultados.

En la primera sección se definen los espacios de teselaciones y se mencionan algunas propiedades y resultados básicos. En la segunda sección se explica la estructura local de dichos espacios. Posteriormente se exponen sus presentaciones como límites inversos,  $\mathbb{G}$ -solenoides y haces fibrados sobre toros.

## 2.1. Espacios de Teselaciones

Las teselaciones  $d$ -dimensionales son comúnmente estudiadas como sistemas dinámicos ya que acarrear una acción natural de  $\mathbb{R}^d$  por traslación. Consideremos una teselación  $T$  de  $\mathbb{R}^d$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ , la traslación de  $T$  por el vector  $x$  es la teselación

$$T + x = \{t + x : t \in T\}, \quad (2.1)$$

la órbita de  $T$  bajo esta acción es

$$\mathcal{O}(T) = \{T + x : x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Equipamos a  $\mathcal{O}(T)$  con una métrica  $d$  en la que dos teselaciones  $T, T'$  son  $\varepsilon$ -cercanas si existe  $x$  en  $\mathbb{R}^d$  de norma menor a  $\varepsilon$  tal que

$$B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0) \cap (T + x) = B_{\frac{1}{\varepsilon}}(0) \cap T'.$$

Es decir, dos teselaciones son cercanas si coinciden en una bola (euclídeana) centrada en el origen de radio grande salvo una pequeña traslación.

**Definición 2.1.1.** Se define la *envolvente*  $\Omega_T$  de la teselación  $T$  como la cerradura de  $\mathcal{O}(T)$  en la métrica  $d$ .

La envolvente  $\Omega_T$  es quien consideraremos como el *espacio de teselaciones* (ver observación 2.1.1). Por definición ésta contiene a todas aquellas teselaciones que son localmente iguales a  $T$ , es decir que tienen los mismos parches. Recordamos que un parche es una unión finita y conexa de teselas en una teselación.

**Definición 2.1.2.** Dos teselaciones  $T$  y  $T'$  son *localmente indistinguibles* ( $LI$ ) si todo parche de  $T$  aparece en  $T'$  y viceversa.

La indistinguibilidad local es obviamente una relación de equivalencia cuyas clases  $LI$  están contenidas en la envolvente  $\Omega_T$ . Sin embargo, bajo hipótesis adicionales satisfechas por todos los casos que trabajaremos, la clase  $LI(T)$  coincide con la envolvente  $\Omega_T$ .

**Lema 2.1.3.** Si  $T$  es una teselación, su clase  $LI(T)$  está contenida en  $\Omega_T$  y  $\Omega_T = \overline{LI(T)}$ . En particular, si  $T'$  es  $LI$  de  $T$  entonces  $\Omega_T = \Omega_{T'}$ .

*Demostración.* Sea  $T' \in LI(T)$ . Para cualquier parche  $P$  en  $T'$  existe un vector  $x$  tal que  $T + x$  tiene el parche  $P$  en el origen. Sea  $P_n$  el parche de  $T'$  que aparece en  $B_n(0)$  y  $x_{P_n}$  el vector correspondiente a la aseveración

anterior. La sucesión  $\{T + x_{P_n}\}$  converge a  $T'$ , luego  $T' \in \Omega_T$ . Entonces  $LI(T) \subset \Omega_T$ .

Ahora, como  $\mathcal{O}(T) \subset LI(T)$ , tenemos que

$$\Omega_T = \overline{\mathcal{O}(T)} \subset \overline{LI(T)} \subset \overline{\Omega_T} = \Omega_T.$$

Finalmente si  $T$  y  $T'$  son  $LI$  entonces  $LI(T) = LI(T')$  y tomando cerraduras tenemos el resultado.  $\square$

**Definición 2.1.4.** Una teselación  $T$  tiene *complejidad finita local (CFL)* -con respecto a traslaciones- si para toda  $R > 0$  existen un número finito -salvo traslación- de parches de diámetro  $R$ .

**Definición 2.1.5.** Una teselación  $T$  es *repetitiva* si para todo parche  $P$  existe una  $R > 0$  tal que para cualquier  $x \in \mathbb{R}^d$  la bola  $B_R(x)$  de radio  $R$  centrada en  $x$  contiene un trasladado de  $P$ .

Todas las teselaciones que hemos puesto como ejemplo tienen CFL y repetitividad, y a esta clase restringiremos nuestro estudio. Ejemplos de teselaciones sin CFL (con respecto a traslaciones<sup>1</sup>) incluyen la teselación del molinillo de la figura 2.1 (*pinwheel*). Esta la obtuvo C. Radin [Rad94] a partir de una regla de sustitución de una sola tesela que aparece en una infinidad de orientaciones.

**Proposición 2.1.6.** Sea  $T$  una teselación con CFL. Con la topología definida previamente  $\Omega_T$  es compacto y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $T$  es repetitiva,
2.  $\Omega_T$  es minimal (todas las órbitas de sus elementos son densas),
3.  $LI(T)$  es cerrado,
4.  $LI(T) = \Omega_T$ .

*Demostración.* Primero probemos que  $\Omega_T$  es compacto. La CFL implica que, para cada  $r > 0$ , existe un número finito de parches de radio  $r$ . Por lo tanto en cualquier sucesión de elementos de  $\Omega_T$  existe una subsucesión que converge en  $B_r(0)$ . Lo que sigue es un argumento diagonal: consideramos una subsucesión  $s_1$  de teselaciones que converge en  $B_1(0)$ , de la cual obtenemos una subsucesión  $s_2$  que converge en  $B_2(0)$ , de la cual tomamos otra subsucesión  $s_3$  que converge en  $B_3(0)$ , y así sucesivamente. La sucesión formada por

---

<sup>1</sup>La CFL se puede definir con respecto a rotaciones o transformaciones rígidas cambiando lo obvio en la definición.



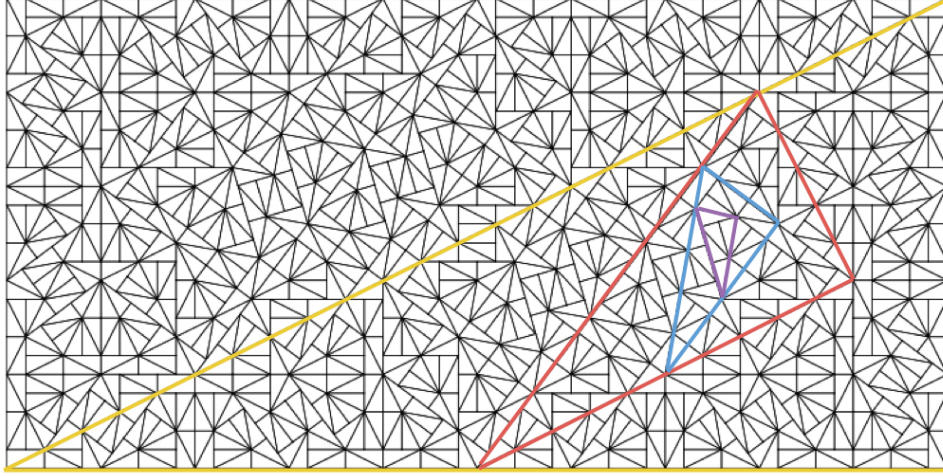


Figura 2.1: La teselación del molinillo y su jerarquía dada por la regla de sustitución.

el  $j$ -ésimo elemento de la subsucesión  $s_j$  es una sucesión de Cauchy, pues dos términos consecutivos coinciden en una bola euclídeana centrada en el origen y de radio cada vez mayor. Como  $\Omega_T$  es completo, dicha sucesión es convergente y por lo tanto  $\Omega_T$  es compacto.

La equivalencia (3)  $\Leftrightarrow$  (4) es consecuencia del lema 2.1.3. Supongamos que  $\Omega_T$  no es minimal. Entonces existe  $T' \in \Omega_T$  tal que  $\Omega_T - \Omega_{T'} \neq \emptyset$ . En particular  $T \notin \Omega_{T'}$  y  $LI(T) \cap \Omega_{T'} = \emptyset$ . Pero  $\overline{LI(T)} = \Omega_T \supset \Omega_{T'} \sqcup LI(T)$  (unión ajena). Entonces  $LI(T)$  no es cerrada. Con lo que tenemos (3)  $\Rightarrow$  (2).

Para (1)  $\Rightarrow$  (3) supongamos  $LI(T)$  no es cerrada. Entonces existe una teselación  $T' \in \Omega_T - LI(T)$  y ésta, por construcción de  $\Omega_T$ , no puede tener ningún parche que no aparezca en  $T$ , entonces debe suceder que un parche  $P$  de  $T$  no aparece en  $T'$ . Pero  $T' \in \Omega_T$  quiere decir que existe una sucesión  $\{T + x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $T'$ , por lo que existen radios arbitrariamente grandes en trasladados de  $T$  que no tienen copias del parche  $P$ , por lo que  $T$  no es repetitiva.

Finalmente veamos (2)  $\Rightarrow$  (1). Supongamos que  $\Omega_T$  es minimal. Sea  $P$  un parche de  $T$  y  $x$  un vector tal que  $T' = T + x$  tiene al parche  $P$  en el origen. Sea  $U$  el conjunto de teselaciones que tienen al parche  $P$  en el origen, ésta es una vecindad abierta de  $T'$ . Como  $\Omega_T$  es minimal, todas las órbitas de sus elementos intersecan a  $U$ , entonces

$$\Omega_T \subset \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} U - x.$$

Como  $\Omega_T$  es compacto, existe una cantidad finita  $x_1, \dots, x_m$  de vectores de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\{U - x_i\}_{i=1}^m$  cubre a  $\Omega_T$ . Si  $R$  es el máximo de las longitudes de los  $x_i$  entonces toda bola de radio  $R$  tiene una copia de  $P$ . Con lo que  $T$  es repetitiva.  $\square$

**Observación 2.1.1.** En presencia de una regla de sustitución primitiva (1.3.6), todas las teselaciones que se obtengan por esta regla resultarán repetitivas y constituyen una clase *LI* (teorema 5.4 y corolario 5.3 de [Sen95]). En consecuencia, por la proposición 2.1.6, la envolvente  $\Omega_T$  no depende de la elección de  $T$ , es decir, para cualquier otra teselación  $T' \in \Omega_T$  se tiene que  $\Omega_T = \Omega_{T'}$  [Sad08]. De manera que  $\Omega = \Omega_T$  es, en este caso, EL espacio de teselaciones y éste contiene a todas las teselaciones que se pueden construir con la misma regla.

### 2.1.1. Equivalencia de espacios de teselaciones

Existen varias nociones de equivalencia entre espacios de teselaciones. La más natural, quizás, es la de homeomorfismo. Este preserva la topología pero no mucho más (cf. sección 1.3 de [Sad08]). Por ejemplo, si a una teselación  $T$  le aplicamos un homeomorfismo del plano obtendremos otra teselación  $T'$  cuyo espacio de teselaciones  $\Omega_{T'}$  es homeomorfo a  $\Omega_T$ , mientras  $T$  y  $T'$  pueden ser muy diferentes, de entrada con conjuntos de prototeselas distintos.

Pero los espacios de teselaciones son sistemas dinámicos con la acción por traslación definida en (2.1). De manera que una equivalencia topológica que preserve la dinámica es más fina que la anterior.

**Definición 2.1.7.** Dos sistemas dinámicos  $(\Omega_1, \sigma_1)$  y  $(\Omega_2, \sigma_2)$  son *topológicamente conjugados* -o simplemente *conjugados* cuando no cause confusión- si existe un homeomorfismo  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  que conmuta con la dinámica, *i.e.*,  $f \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ f$ .

Entre sistemas dinámicos de teselaciones con acción por traslación  $(\Omega_T, \mathbb{R}^d)$ , las conjugaciones preservan propiedades dinámicas como la minimalidad y por lo tanto la repetitividad (2.1.6). L. Sadun y A. Clark estudiaron en [CS06, CS03] qué tanto es posible deformar una teselación  $T$  en otra  $T'$  manteniendo conjugados sus espacios asociados  $\Omega_T$  y  $\Omega_{T'}$ .

La noción de equivalencia más fuerte que se he trabajado es la llamada *derivabilidad local mutua* (MLD por sus siglas en inglés), la cual implica a su vez una equivalencia más fuerte entre espacios de teselaciones que llamaremos con el mismo nombre.

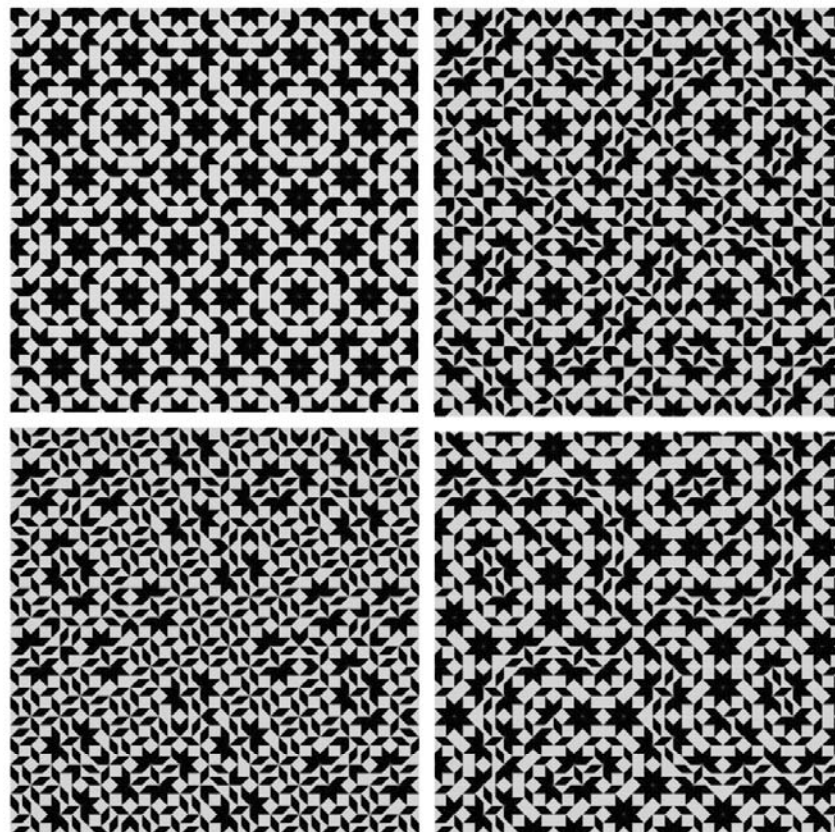


Figura 2.2: Parches de algunas teselaciones de la misma clase MLD de Ammann-Beenker. Éstas se construyeron cambiando las orientaciones de los triángulos (rombos y cuadrados bisectados) en la regla de sustitución de Ammann-Beenker (ver figura 1.11).

**Definición 2.1.8.** Una teselación  $T$  es localmente derivable de otra  $T'$  si, para algún  $R > 0$ , las configuraciones de  $T$  alrededor de todo punto  $x$  están determinadas por las configuraciones de  $T'$  en la bola  $B_R(x)$ . Esto es, si  $x, y \in \mathbb{R}^d$  y existe un radio  $R > 0$  tal que, si los parches  $T' \cap B_R(x)$  y  $T' \cap B_R(y)$  coinciden, entonces los parches  $T \cap \{x\}$  y  $T \cap \{y\}$  también coinciden. Si  $T'$  es localmente derivable de  $T$  y viceversa, entonces  $T$  y  $T'$  son *mutuamente localmente derivables* (MLD).

Entre espacios de teselaciones la propiedad MLD se expresa a través de conjugaciones topológicas definidas localmente.

**Definición 2.1.9.** Dos espacios de teselaciones  $\Omega_T$  y  $\Omega_{T'}$  son MLD si existe una conjugación  $f : \Omega_T \rightarrow \Omega_{T'}$  y un  $R > 0$  tal que, si  $T_1, T_2 \in \Omega_T$  coinciden en una bola de radio  $R$ , entonces  $f(T_1)$  y  $f(T_2)$  coinciden en una bola de radio 1.

Esencialmente, la derivabilidad local mutua radica en la posibilidad de obtener una teselación  $T$  desde otra  $T'$  a partir de reglas locales como agregar o quitar aristas. Este fue el caso de los conjuntos aperiódicos P2 y P3 que se expuso en 1.3.4.

**Proposición 2.1.10** (1.3 en [Sad08]). *Dos teselaciones  $T$  y  $T'$  son MLD si y sólo si los espacios asociados  $\Omega_T$  y  $\Omega_{T'}$  son MLD.*

Una manera de obtener teselaciones que producen espacios conjugados pero no son MLD es aplicar deformaciones de forma y tamaño a las teselas. Por ejemplo, reacomodar los vértices de una teselación  $T$  colocándolos en coordenadas enteras o racionales (ver sección 3.6 de [Sad08]).

En resumen, las diferentes equivalencias entre espacios de teselaciones se ordenan:

$$MLD \Rightarrow \text{conjugación topológica} \Rightarrow \text{homeomorfismo.}$$

## 2.2. La estructura local de $\Omega$

De aquí en adelante omitiremos el subíndice  $T$  de  $\Omega$ , esto no causará ambigüedad debido a la observación 2.1.1. Sea  $T_0 \in \Omega$  y  $\mathcal{B}_r(T_0)$  la bola centrada en  $T_0$  de radio  $r$  en la métrica de las teselaciones. Dicha bola contiene, por un lado, a todas las traslaciones de  $T_0$  por un vector de norma menor a  $r$  y, por otro lado, a todas aquellas teselaciones que coinciden con  $T_0$  en una bola euclideana de radio  $\frac{1}{r}$  centrada en el origen. Esto es,

$$D := \{T' \in \Omega : T' = T_0 + x, x \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^d\} \subset \mathcal{B}_r(T_0),$$

$$K := \{T' \in \Omega : T_0 \cap B_{1/r}(0) = T' \cap B_{\frac{1}{r}}(0)\} \subset \mathcal{B}_r(T_0).$$

El conjunto  $D$  es homeomorfo a un disco euclideo mientras que  $K$  es un conjunto totalmente desconexo.

**Proposición 2.2.1.** *Los espacios de teselaciones  $\Omega_T$  son localmente homeomorfos al producto cartesiano de un disco euclideo  $D$  por un espacio totalmente desconexo  $K$ .*

*Demostración.* Sean  $T_0 \in \Omega_T$  y  $T' \in \mathcal{B}_r(T_0)$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^d$  de norma menor a  $r$  tal que

$$T' \cap B_{\frac{1}{r}}(0) = (T_0 + x) \cap B_{\frac{1}{r}}(0).$$

Tal vector  $x$  es único si  $T$  es aperiódica. Definimos la función

$$f : \mathcal{B}_r(T_0) \rightarrow D \times K \quad \text{dada por} \quad f(T') = (T_0 + x, T' - x).$$

Esta función es una acción por traslación en cada una de sus entradas y por lo tanto es continua. La función inversa de  $f$  la definimos como

$$g : D \times K \rightarrow \mathcal{B}_r(T_0) \quad \text{dada por} \quad g(T_0 + x, T') = T' + x.$$

Claramente  $g$  es continua y es, en efecto, la función inversa de  $f$ . Entonces  $f$  es un homeomorfismo. Finalmente notamos que  $K$  es totalmente desconexo pues cualquier traslación no trivial aplicada a cualquiera de sus elementos se sale del conjunto.  $\square$

En presencia de una regla de sustitución  $\omega : \Omega \rightarrow \Omega$  (1.3.5) tenemos otro sistema dinámico  $(\Omega, \omega)$ , el cual es un atractor expansivo [Wil74]. Los atractores expansivos se caracterizan por tener una dirección estable y una inestable. Esto quiere decir que en cada punto del espacio existe un subconjunto ( $K$ , en nuestro caso) en el que la dinámica contrae la distancia, y otro subconjunto ( $D$ ) en el que la dinámica actúa expansivamente. A saber, sean  $T \in \Omega$  y  $T_K, T_D \in \mathcal{B}_\varepsilon(T)$  con  $T_K \in K$  y  $T_D \in D$ . Sea  $\lambda > 1$  el factor expansivo de la sustitución  $\omega$ . Entonces

$$d(T_K, T) := \delta > \frac{\delta}{\lambda} = d(\omega(T_K), \omega(T)),$$

ya que si  $T$  y  $T_K$  coinciden en una bola euclidea de radio  $\frac{1}{\delta}$  centrada en el origen entonces  $\omega(T_K)$  y  $\omega(T)$  coinciden en una bola de radio  $\frac{\lambda}{\delta}$ . Además

$$d(T_D, T) := \eta < \lambda\eta = d(\omega(T_D), \omega(T)),$$

pues si  $T_D = T + x$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\omega(T_D) = \omega(T) + \lambda \cdot x$ .

## 2.3. Los espacios de teselaciones son límites inversos

Los espacios  $\Omega$  asociados a teselaciones repetitivas (2.1.5) y con CFL (2.1.4) se pueden obtener como el límite inverso de espacios más tratables. El primer resultado en esta dirección es de Anderson y Putnam en 1998 [AP98], quienes presentaron los espacios de teselaciones por sustitución como límites inversos de variedades ramificadas, construcción que se reproduce en la siguiente sección. Les siguió F. Gähler [Gäh02] quien amplió la clase de teselaciones que se podían presentar de esta manera. A la par L. Sadun [Sad03, Sad06] e independientemente J. Bellissard, R. Benedetti y J.M. Gambaudo [BBG06, GB03] enriquecieron estas estructuras. Gracias a estas ideas ha sido posible el cálculo de varios grupos de cohomología [BDHS10].

### 2.3.1. Recordatorio: límites inversos. El solenoide.

**Definición 2.3.1.** Dada una familia dirigida  $(X_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  con  $X_i$  espacios topológicos y  $f_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ , se define el límite inverso de esta familia como

$$X = \lim_{\leftarrow i} (X_i, f_i) = \{(x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i : f_i(x_i) = x_{i-1}\}.$$

El límite inverso de una familia dirigida está naturalmente equipado con funciones  $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ , para  $i \geq j$ , tales que  $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$  y  $f_{ij} = f_{kl} \circ f_{ik}$ , para todas  $i \geq k \geq j$ , y proyecciones  $p_i : X \rightarrow X_i$  a cada uno de los factores que conmutan con las  $f_{ij}$ ; y está caracterizado por la siguiente propiedad universal: siempre que exista un espacio  $Y$  y proyecciones  $q_i : Y \rightarrow X_i$  tales que  $q_i = f_{ij} \circ q_j$  para toda  $i \geq j$ , entonces existe un único morfismo  $\varphi : Y \rightarrow X$  que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 & \downarrow \varphi & \\
 q_i & X & q_j \\
 & \swarrow p_i \quad \searrow p_j & \\
 X_i & \xrightarrow{f_{ij}} & X_j
 \end{array}$$

conmutativo.

Quizás el espacio más famoso construido como límite inverso es el solenoide, traído a la luz por Vietoris en 1927 ( $n_i = 2$ ) y por van Dantzig en 1930 en el caso general.

Consideremos la familia  $(S_i, f_i)$ , donde cada  $S_i$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  y  $f_i$  es el homeomorfismo que consiste en enrollar  $n_i$  veces  $S_i$  alrededor de  $S_{i-1}$ . El solenoide  $\mathcal{S}$  es el límite inverso de dicha familia. Es un espacio métrico compacto y conexo (un continuo) pero no localmente conexo. Los grupos de cohomología de  $\mathcal{S}$  son calculables como el límite directo de las cohomologías de cada  $S_i$ , en contraste con las homologías cuyos cálculos suelen ser complicados (cf. capítulo 2 y 3 de [Sad08]).

Los solenoides son ejemplos importantes para la teoría de sistemas dinámicos hiperbólicos [Wil74]. Una construcción alternativa para  $\mathcal{S}$  se obtiene tomando toros sólidos  $T_i = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$  con  $T_{i+1}$  estirado, adelgazado y enrollado  $n_i$  veces en  $T_i$ . El solenoide  $\mathcal{S}$  es homeomorfo a la intersección

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T_n.$$

En la década de los sesentas Stephen Smale estudió un objeto muy parecido. Consideramos nuevamente  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ . La función  $f : T \rightarrow T$

$$f(z, w) = (2z, \frac{1}{4}w + \frac{1}{2}e^{iz}).$$

es un encaje suave de  $T$  en sí mismo, que consiste en estirar el toro mientras se adelgazan sus meridianos, y enrollarlo dos veces dentro del  $T$  original. La intersección  $\Gamma$  de la familia de toros previa es un *conjunto hiperbólico*<sup>2</sup> para la dinámica  $f$ , donde  $T_i$  es la  $i$ -ésima iteración de la función  $f$  sobre  $T$ .  $\Gamma$  es un atractor que se conoce como el atractor de Smale-Williams. Los discos meridionales  $\{z\} \times \mathbb{D}^2$  son variedades estables e intersecan a  $\Gamma$  en un conjunto de Cantor (figura 2.3).

Los espacios de teselaciones pertenecen a una clase de espacios conocidos como *solenoides generalizados* [Wil70] pues, como veremos en las siguientes secciones, comparten varias propiedades con los solenoides.

### 2.3.2. El complejo de Anderson-Putnam

Los primeros en presentar a los espacios de teselaciones (de sustitución) como límites inversos fueron Anderson y Putnam en [AP98]. Su idea fue, para una teselación  $T$  con sustitución  $\omega$  y envolvente  $\Omega$ , tomar  $\Gamma = \Omega \times \mathbb{R}^d / \sim$

<sup>2</sup>Un conjunto hiperbólico para una función suave  $f$  es un conjunto  $\Gamma$ ,  $f$ -invariante donde el haz tangente se puede descomponer en dos subhaces, uno expansivo y otro contráctil.

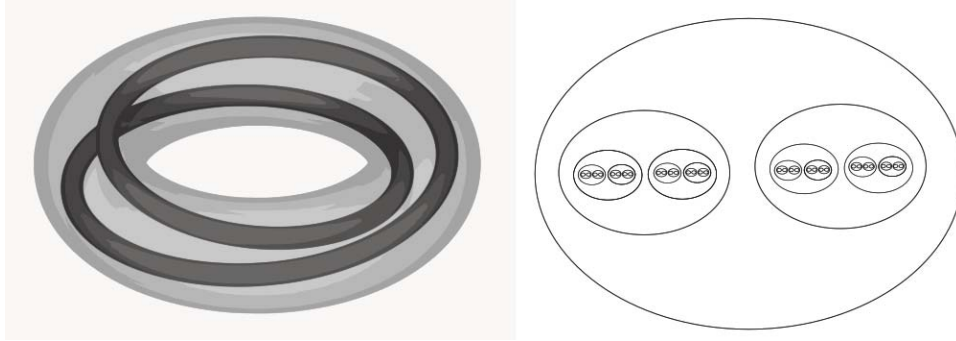


Figura 2.3: Primeras dos iteraciones de  $f$  (izquierda); transversal del solenoide (derecha).

donde  $\sim$  es la mínima relación de equivalencia que relaciona a los pares  $(T, x), (T', x')$  cuando las teselas de  $T$  en el punto  $x$  coinciden con las de  $T'$  en  $x'$ . El espacio  $\Gamma$  se puede equipar con una topología de complejo  $CW$  cuyas celdas de máxima dimensión son las teselas. Además la sustitución  $\omega$  induce una función  $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$  dada por

$$\gamma([T, x]) = [\omega(T), \lambda x],$$

donde  $\lambda$  es el factor de expansión de la sustitución  $\omega$ . La función  $\gamma$  permite construir el límite inverso

$$\Omega_0 = \lim_{\leftarrow i} \{x_i\}_{i=0}^{\infty} : \gamma(x_i) = x_{i+1}.$$

El sistema dinámico  $(\Omega_0, \omega_0)$ , donde  $\omega_0(x)_i = \gamma(x_i)$ , es<sup>3</sup> topológicamente conjugado a  $(\Omega, \omega)$ .

Una de las ventajas de contar con esta presentación como límites inversos es la posibilidad de calcular fácilmente invariantes algebraicos como la cohomología de Čech o  $K$ -teoría, como límite de los grupos asociados a  $\Gamma$ .

### 2.3.3. El complejo de Gähler

Con ideas similares a las de Anderson y Putnam, Franz Gähler amplió la clase de teselaciones -CFL y repetitivas, pero no necesariamente por

<sup>3</sup>Esto es cierto bajo la hipótesis adicional de que la sustitución *fuera la frontera* que significa, esencialmente, que no empezaste a construir la teselación por sustituciones desde una esquina de forma que sólo se cubrió una porción del espacio. Cuando esto sucede entonces se debe de reemplazar el complejo  $\Gamma$  por uno mayor formado por las 2-coronas de las teselas  $t$ , es decir, parches formados por las adyacencias de las teselas adyacentes a  $t$ . Ver sección 4 de [AP98].



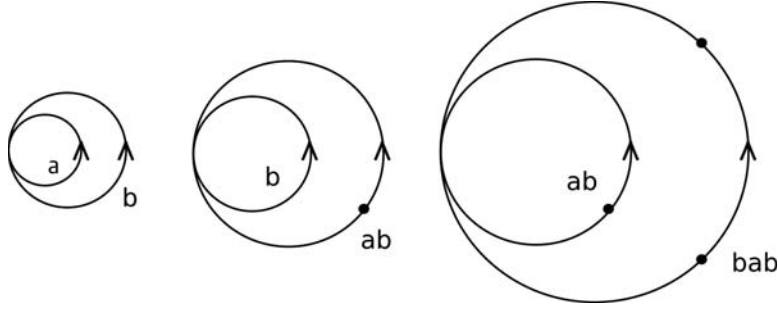


Figura 2.4: Primeros tres aproximantes del complejo de Anderson-Putnam asociado a las cadenas de Fibonacci (1.3.7).

sustitución- que pueden ser presentadas como límites inversos. A continuación explicamos su idea.

Consideramos una teselación  $T$  de  $\mathbb{R}^d$ , con conjunto de prototeselas  $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  y envolvente  $\Omega$ . Gähler define una sucesión  $\{\Omega_n\}$  de complejos celulares que aproximan a  $\Omega$  empleando la técnica que él mismo introdujo: considerar teselas con *collar*. Dada una tesela  $t$  de  $T$ , su tesela con collar  $t^c$  es la tesela  $t$  con la información adicional de todas las teselas que la intersecan en  $T$ . Dicha información la podemos pensar como una coloración de las aristas de  $t$ . Al hacer esto con cada tesela de  $T$  se produce otra teselación  $T_1$  cuyo conjunto de prototeselas  $\tau_1$  consiste de todos los diferentes collares de cada prototesela de  $T$ . La CFL implica que hay un número finito de éstas. Recursivamente se define la teselación  $T_n$  con conjunto de prototeselas  $\tau_n$  como el resultado de aplicar el procedimiento anterior a  $T_{n-1}$ .

Se define el espacio  $\Omega_n$  como

$$\bigsqcup_{t^{(n)} \in \tau_n} t^{(n)} / \sim_n$$

la unión ajena del conjunto de prototeselas  $\tau_n$  módulo la relación  $\sim_n$  que identifica las fronteras de  $t_i^{(n)}, t_j^{(n)}$  cuando éstas aparezcan adyacentes en alguna posición de la teselación  $T_n$ .

Definimos funciones  $f_n : \Omega_n \rightarrow \Omega_{n-1}$  cuya acción es olvidar el collar de cada tesela. Con esto se obtiene la familia dirigida  $\{\Omega_n, f_n\}$  con la que construimos el límite inverso.

**Teorema 2.3.2.** *Existe un homeomorfismo entre  $\Omega$  y  $\lim_{\leftarrow n} \{\Omega_n, f_n\}$ . Los aproximantes  $\Omega_n$  son variedades ramificadas de dimensión  $d$ .*

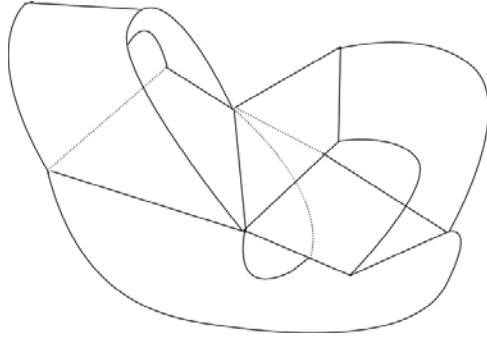


Figura 2.5: Ejemplo de variedad ramificada o aproximante de una teselación plana.

Pruebas de este teorema se encuentran en [Sad03, BBG06].

## 2.4. $\Omega$ es un $\mathbb{G}$ -solenoido

La información geométrica platicada en las dos secciones anteriores fue codificada y unificada en los  $\mathbb{G}$ -solenoides. Estos fueron definidos y estudiados por J.M. Gambaudo y R. Benedetti en [GB03] a raíz de la observación de É. Ghys de que los espacios de teselaciones son laminaciones por superficies de Riemann [Ghy99].

Los  $\mathbb{G}$ -solenoides son espacios laminados cuyas hojas tienen estructura de grupo de Lie  $\mathbb{G}$  y se pueden obtener como el límite de una familia ordenada de espacios cubrientes sobre una superficie de Riemann sobre la que  $\mathbb{G}$  actúa.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\mathbb{G}$  un grupo de Lie conexo y  $d_{\mathbb{G}}$  una métrica derecha invariante en  $\mathbb{G}$ . Sea  $M$  un espacio métrico compacto y supongamos que existe una cubierta de  $M$  por conjuntos abiertos  $U_i$  llamadas cajas y homeomorfismos llamados cartas  $h_i : U_i \rightarrow V_i \times T_i$  donde los  $T_i$  son espacios métricos totalmente desconexos y los  $V_i$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{G}$ . Estos abiertos y homeomorfismos definen un atlas de una estructura de  $\mathbb{G}$ -solenoido sobre  $M$  si las funciones de transición  $h_{i,j} = h_j \circ h_i^{-1}$  en su dominio de definición son de la forma  $h_{i,j}(v, t) = (v \cdot g_{i,j}, \tau_{i,j}(t))$  donde  $\tau_{i,j}$  es una función continua y  $g_{i,j}$  es un elemento de  $\mathbb{G}$ . Dos atlas son equivalentes si su unión es un atlas.

Los  $\mathbb{G}$ -solenoides nacieron estudiando la geometría de espacios de teselaciones. Las envolventes  $\Omega$  de teselaciones aperiódicas repetitivas poseen

estructura de  $\mathbb{R}^n$ -solenoides (teorema 2.4 en [GB03]), y viceversa, dado cualquier  $\mathbb{R}^n$ -solenoides es posible reconstruir una teselación (teorema 2.5 en [GB03]).

Esto quiere decir que la estructura local de  $\Omega$  y su presentación como límite inverso son compatibles con una estructura adicional. Localmente en cada punto  $T$  existe un germen en forma de conjunto de Cantor, transversal al grupo  $\mathbb{G}$  que actúa sobre  $\Omega$  e independiente de la vecindad escogida del punto  $T$ . De manera que  $\Omega$  es localmente homeomorfo al producto cartesiano del conjunto de Cantor por un subconjunto (*rebanada*) de  $\mathbb{G}$ . La componente conexa de las rebanadas que se intersecan se llama *hoja* y tiene estructura de variedad diferenciable. Globalmente  $\Omega$  es la unión ajena de una cantidad no numerable de hojas, cada una de ellas es una órbita de  $\mathbb{G}$  (cf. [OOP10]).

Si consideramos la acción del grupo de simetrías del plano euclideo  $\mathbb{G} = E(2)$ , o alguno de sus subgrupos que contenga rotaciones, sobre  $\Omega$  este ya no resulta fuertemente aperiódico y la construcción del  $\mathbb{G}$ -solenoides debe ser modificada para permitir que las hojas tengan estructura ya no de superficie de Riemann sino de orbifolds. Sin embargo conservan la presentación como límites inversos (ver notas 1.1 y 2.2 en [GB03]).

## 2.5. $\Omega$ es un haz fibrado sobre un toro

Otra propiedad geométrica de los espacios de teselaciones es la de ser haces fibrados sobre toros con fibras homeomorfas al conjunto de Cantor. Esto lo probó en primer lugar Robert Williams en [Wil01] para los espacios de teselaciones de Penrose (figura 1.8), Ammann-Beenker (figura 1.7) y de proyección canónica (1.3.10) de dimensión 3 a 2 (figura 2.7). Posteriormente él mismo junto con Lorenzo Sadun [SW03] generalizaron el resultado para todas las teselaciones con CFL.

A continuación se explica la construcción de Williams a través del ejemplo más sencillo, pero antes cabe mencionar que la idea de la generalización (lema 3 en [SW03]) está basada en la posibilidad de deformar teselaciones para que todos sus vértices tengan coordenadas racionales, incluso enteras. Esta deformación da como resultado espacios de teselaciones homeomorfos. Pero, como se mencionó en la sección 2.1.1, existen equivalencias más finas entre espacios de teselaciones que esta construcción suele no respetar. Es decir, generalmente dicho homeomorfismo no conmuta con traslaciones, mucho menos con rotaciones (cf. comentario siguiente al teorema 2 de [SW03]).

Consideramos una teselación  $T$  construida como proyección canónica de dimensión<sup>4</sup> 3 a 2 (figura 2.7). Notamos que las aristas de las teselas en dicha teselación aparecen en tres direcciones (ver figuras 2.6 y 2.7), digamos  $v_1, v_2, v_3$ , las cuales son la imagen de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  bajo la proyección ortogonal  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$  en un plano  $\Pi$ . Las prototeselas de nuestra teselación son paralelogramos generados por combinaciones lineales enteras de estos tres vectores, similarmente a como se expuso para las teselaciones de Ammann-Beenker en la sección 1.3.2, ahora con una dimensión menos que en aquel caso. Hay tres tipos de paralelogramos que nombramos  $P_1, P_2, P_3$ .

Con estos tres paralelogramos construimos una superficie ramificada  $S$  que corresponde al primer aproximante del teorema 2.3.2 ( $\Omega_0$  de la construcción de Gähler 2.3.3 y  $\Gamma$  en la de Anderson-Putnam 2.3.2). Ésta se obtiene como la unión ajena de dichos paralelogramos módulo indentificar cada par de aristas paralelas. De manera que  $S$  es la unión de tres toros que se intersecan dos a dos en un círculo. Esto es, salvo homotopía<sup>5</sup>, el 2-esqueleto<sup>5</sup> de un 3-toro.

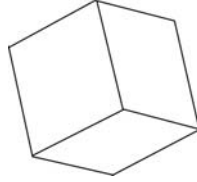


Figura 2.6: Las prototeselas de la teselación  $T$  son los paralelogramos  $P_1, P_2, P_3$ . Sus aristas aparecen en tres direcciones distintas.

Construimos una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  que mande a  $v_1, v_2, v_3$  en 3 vectores de  $\mathbb{Z}^2$  que dos a dos generen paralelogramos de área 1. Las células  $P_1, P_2, P_3$  deben mapearse continua y orientadamente en estos paralelogramos. La composición  $\pi \circ f : S \rightarrow \mathbb{T}^2$  de la función  $f$  con la proyección al cociente  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  es un encaje local en todos sus puntos salvo en las intersecciones de las células de  $S$ .

Construimos ahora el espacio total de la fibración. Éste corresponde a la *extensión universal* de una función continua  $g : S \rightarrow S$ , definida a continuación. Sea  $\hat{S}$  el conjunto de todas las sucesiones  $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  tales que  $g(s_i) = s_{i-1}$ . Definimos  $\hat{g} : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$  como la función *shift* dada por

<sup>4</sup>Este tipo de teselaciones también son conocidas como *planos discretos* o *escalonados* por ser la aproximación racional de un subespacio totalmente irracional de  $\mathbb{R}^3$ . Ver por ejemplo [BV00, ABI02, FB02].

<sup>5</sup>Las células de dimensión 2 como complejo  $CW$ .

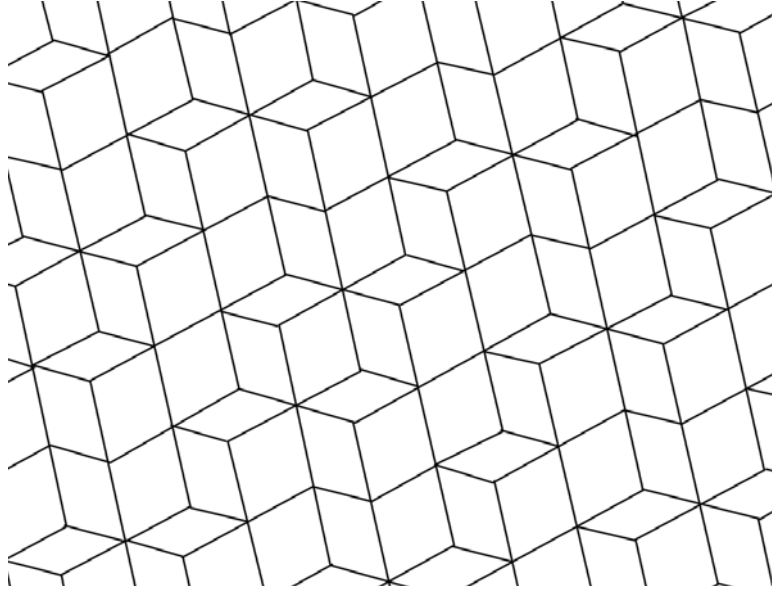


Figura 2.7: Teselación por proyección canónica de dimensión 3 a 2 o plano discreto.

$\hat{g}(s)_i = s_{i+1}$  que sólo borra la primera coordenada. Esta función  $\hat{g}$  es un homeomorfismo de  $\hat{S}$  en sí mismo.

La función  $g$  usada en esta construcción (o familia  $\{f_i\}$  como en la construcción de Gähler 2.3.3) consiste en olvidar la información del  $n$ -ésimo nivel. En cualquiera de estos casos un elemento  $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  de  $\hat{S}$  tiene la información del punto  $s_0$  en una tesela  $t$  donde colocar el origen de una teselación en la superficie  $S$ ,  $s_1$  corresponde al punto donde se acomoda  $s_0$  y la tesela  $t$  en el parche  $\omega(t)$  (o tesela con collar  $t^c$ , según sea el caso), y así sucesivamente en un parche cada vez mayor. Esto es toda la información necesaria para construir una teselación  $T$ . De manera que  $\hat{S}$  es precisamente el límite inverso del teorema 2.3.2 y por lo tanto es homeomorfo al espacio de teselaciones  $\Omega$ .

Como corolario de las últimas tres secciones obtenemos que la composición

$$p : \hat{S} \cong \Omega \xrightarrow{p_0} S \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2,$$

donde  $p_0 : \hat{S} \rightarrow S$  es la proyección en el primer factor del límite, es un haz fibrado sobre el toro. La fibra sobre un punto corresponde al conjunto  $K$  de la sección 2.2.

## 2.6. ¿Dónde estamos?

Detengámonos un momento a reflexionar sobre la construcción presentada en la sección anterior, recordando que nuestra motivación para estudiar la geometría de los espacios de teselaciones es la búsqueda de un objeto geométrico análogo a los orbifolds que caracterizan las simetrías de las teselaciones del plano (sección 1.2). El espacio  $\Omega$  puede funcionar como dicho análogo en el sentido que platicaremos a continuación.

En primer lugar notamos que la construcción del haz fibrado se puede realizar para cualquier espacio  $\Omega_T$  obtenido desde una teselación  $T$  con CFL, sin importar siquiera si ésta es aperiódica o no. La diferencia entre el caso periódico y el aperiódico radica en la fibra, la cual, en el primero de estos casos, consiste de un conjunto finito de puntos y en el segundo es un conjunto de Cantor

Pero todo resultado súper general tiene su contraparte. Los propios autores sugieren que “estas construcciones son muy generales y abstractas para ser de utilidad directa en la clasificación (de espacios de teselaciones salvo homeomorfismo)”. Pues, dados un haz fibrado  $q : X \rightarrow \mathbb{T}^2$  y un cubriente del toro sobre sí mismo  $p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , la composición  $q \circ p$  es otro haz fibrado sobre el toro  $\mathbb{T}^2$ . Una pregunta natural es ¿cuál es el ‘mínimo’ de estos haces? La superficie ramificada que utilizó originalmente Williams [Wil01] para las teselaciones de Penrose cubre 10 veces el toro, mientras que la construcción más general que obtuvo él junto con Sadun lo hace muchas veces más (cf. sección 1 en [SW03]).

Si  $T$  es una teselación periódica (cristalográfica<sup>6</sup>) plana entonces

$$\Omega_T \cong \mathbb{T}^2,$$

pues, por definición,  $\Omega_T$  sólo se fija en las traslaciones de  $T$  y éstas se identifican por dos vectores formando un toro (ver lema 5.1 en [BG13], el cual también implica que si  $T$  es cristalográfica entonces toda teselación en su clase  $LI$ , y por tanto en  $\Omega_T$ , es cristalográfica). El orbifold asociado a una teselación cristalográfica es entonces el cociente de  $\Omega_T$  por el grupo discreto  $D$  de simetrías de  $T$  generado por rotaciones y reflexiones (ver sección 1.2).

---

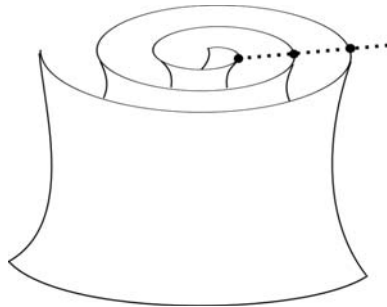
<sup>6</sup>Una teselación es cristalográfica si su retícula de traslaciones es de rango completo, es decir, si existen traslaciones en tantas direcciones linealmente independientes como la dimensión de (el espacio donde vive) la teselación.

Para elegir el análogo de dicho cociente en el caso aperiódico existen varias dificultades. En primer lugar no existen traslaciones y en segundo lugar las isometrías globales aportan muy poca información sobre las simetrías de la teselación. Por ejemplo, una teselación de Penrose puede tener un único centro de rotación global de orden 5 o 10, pero todo parche se encuentra dentro de algún otro parche con simetría (parcial) de orden 5 (ver capítulo 10 de [GS86]). Esta riqueza de simetrías parciales no se puede capturar de la misma manera que en el caso periódico.

En esta tesis se propone un camino alternativo para lidiar con las dificultades mencionadas. La idea es que, en ausencia de una retícula de rango completo como subgrupo de isometrías pero habiendo asumido la existencia de un CPS,  $\Omega$  debería ser el cociente ya no de la retícula  $\mathcal{L}$ , sino de su proyección en el espacio  $E$  donde vive la teselación. Esto lo exploraremos para teselaciones unidimensionales. El precio a pagar es que habrá que lidiar con un cociente bajo un grupo denso (la proyección mencionada es densa en el espacio  $E$ ). Para esto utilizaremos herramientas que permitan dotar de estructura a dichos cocientes, las cuales introducimos en el siguiente capítulo.

teselación	envolvente	localmente	objeto característico
periódica	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{D} \times \{x_1, \dots, x_n\}$	orbifold
aperiódica	laminación	$\mathbb{D} \times K$	¿?

La moraleja es que “un orbifold que no se cierra exactamente se convierte en una laminación cuyas transversales son homeomorfas al conjunto de Cantor.”



## Capítulo 3

# Las herramientas

En el presente capítulo se introduce la herramienta que usaremos para investigar los espacios de teselaciones. En la primera sección se presentan las definiciones básicas de la *difeología* y un ejemplo central. En la segunda sección se definen los grupoides ejemplificados con nuestros objetos de interés. En la tercera y última sección se utilizan las dos anteriores para definir las fibriciones en difeología y su relación con la homotopía.

### 3.1. Difeología

La difeología es una generalización de la geometría diferencial desarrollada en las últimas dos o tres décadas. Ésta nació en Francia impulsada por Jean-Marie Souriau y sus estudiantes Paul Donato y Patrick Iglesias. Este último es el autor de la mejor referencia disponible al momento [IZ13], que fue apenas publicada en 2013, aunque desde hace varios años ya circulaba por la red un borrador bastante completo. De esta fuente sale prácticamente todo el material de este capítulo.

La idea detrás de la difeología es hacer geometría diferencial sin coordenadas<sup>1</sup>. Los espacios difeológicos son una clase de espacios que generalizan la definición de variedad “olvidando” la topología pero manteniendo su estructura suave.

Una difeología para cualquier conjunto  $X$  se define declarando un conjunto de parametrizaciones  $P : U \rightarrow X$ , llamadas *plots*, donde  $U$  es un subconjunto abierto de algún espacio euclideo, que satisfacen ciertos axiomas de cubrimiento, localidad y compatibilidad con funciones suaves. En el caso en que  $X$  es una variedad diferenciable las parametrizaciones que

---

<sup>1</sup>Yo lo interpreto como algo similar a pasar de espacios métricos a topológicos.



satisfacen los axiomas de difeología son precisamente las cartas de la variedad  $X$ . Los espacios difeológicos junto con las funciones suaves en sentido difeológico -aquellas que al componer con plots del dominio resultan plots del codominio- forman una categoría, de la cual las variedades diferenciables son una subcategoría fiel y plena.

Nuestro principal interés en la difeología es el ejemplo del toro irracional  $T_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ . Este ejemplo es uno de los pilares de la teoría difeológica por adquirir una estructura que la topología no alcanza a distinguir. Nosotros exploraremos la relación de este espacio con las cadenas Fibonacci.

**Definición 3.1.1.** Dado cualquier conjunto  $X$ , una difeología sobre éste es una familia  $\mathcal{D}$  de parametrizaciones  $P : U \rightarrow X$ , donde  $U$  es un abierto de algún espacio euclideano, que satisfacen:

- D1. Todas las parametrizaciones constantes pertenecen a  $\mathcal{D}$ .
- D2. Dada una parametrización  $P : U \rightarrow X$  tal que todo punto  $u \in U$  tiene una vecindad  $V \subset U$  tal que  $P|_V \in \mathcal{D}$  entonces  $P \in \mathcal{D}$ .
- D3. Si  $P : U \rightarrow X$  pertenece a  $\mathcal{D}$  y  $f : V \rightarrow U$  es una función  $C^\infty$  entre abiertos euclidianos entonces  $P \circ f \in \mathcal{D}$ .

Los elementos de  $\mathcal{D}$  los llamaremos *plots*. Un espacio difeológico es un par  $(X, \mathcal{D})$  donde  $\mathcal{D}$  es una difeología para el conjunto  $X$ .

Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios difeológicos es *suave* si para cualquier plot  $P : U \rightarrow X$  del dominio, la composición  $f \circ P$  es un plot del codominio  $Y$ .

Todas las variedades diferenciables son espacios difeológicos. Su estructura se define naturalmente como la mínima difeología (definida en el siguiente párrafo) que contiene a todas las cartas coordenadas de la variedad. Una función entre variedades diferenciables, particularmente entre dominios euclidianos, es suave en sentido difeológico si y sólo si es suave en el sentido usual (de clase  $C^\infty$ ).

Las estructuras difeológicas sobre un espacio se pueden comparar de manera similar a las topologías. La difeología más *fina* posible o *mínima* sobre un espacio  $X$  es la que todos sus plots son localmente constantes; esta difeología se llama *difeología discreta* y diremos que  $X$  es un espacio difeológico discreto. Mientras que la más *gruesa* o *máxima* contiene a todas las funciones de dominios euclidianos en  $X$ . Una difeología  $\mathcal{D}$  es más fina que otra  $\mathcal{D}'$  si  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ , es decir si todo plot de  $\mathcal{D}$  es un plot de  $\mathcal{D}'$ . Más detalles se pueden consultar en la cuarta sección del capítulo 1 de [IZ13].

### 3.1.1. La categoría difeológica

Los espacios difeológicos con funciones suaves forman una categoría que denotamos por **Diff**. Esta categoría es muy bien comportada pues es cerrada bajo subespacios, cocientes, sumas y productos. Estas estructuras se definen a través de las construcciones elementales *jalar* (del inglés *pull-back*) y *empujar* (del inglés *push-forward*) difeologías desde un espacio difeológico  $(X, \mathcal{D})$  y funciones  $f : Y \rightarrow X$  y  $g : X \rightarrow Z$ , respectivamente. La difeología jalada  $f^*(\mathcal{D})$  (resp. empujada  $g_*(\mathcal{D})$ ) se define como la difeología más gruesa que hace a  $f$  (resp. la más fina que hace a  $g$ ) suave. Los plots de estas dos difeologías son localmente composiciones de los plots de  $X$  con las respectivas funciones  $f$  y  $g$  como lo indican los siguientes cuadrados conmutativos, donde  $P$  es un plot de  $X$ ,  $Q$  un plot de  $Y$  y  $R$  un plot de  $Z$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 V & & U & \hookrightarrow & W \\
 \downarrow Q & \searrow & \downarrow P & \searrow & \downarrow R \\
 Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

Con estas construcciones se definen los monomorfismos de la categoría difeológica llamados *inducciones*: funciones inyectivas  $i$  donde la difeología del dominio coincide con la difeología jalada del codominio a través de  $i$ ; y epimorfismos, llamados *subducciones*: aquellas funciones suprayectivas  $p$  en las que coinciden la difeología del codominio con la difeología empujada del dominio por  $p$ . A los isomorfismos de ésta categoría los llamaremos *difeomorfismos*, estos son funciones suaves invertibles cuya inversa también es suave.

Se definen difeologías para subespacios como la difeología jalada a través de la inclusión; difeología cociente como la difeología empujada por la proyección canónica; y difeologías para productos y coproductos (= suma difeológica) como la más fina (resp. la más gruesa) que hace a todas las proyecciones (resp. inclusiones) suaves.

Otra de las construcciones categóricas que posee una estructura natural es el espacio de funciones entre espacios difeológicos. Sean  $X$  y  $X'$  dos espacios difeológicos y  $\text{hom}(X, X')$  el conjunto de todas las funciones suaves de  $X$  en  $X'$ . Se define una *difeología funcional* para  $\text{hom}(X, X')$  como cualquier difeología en la que la función evaluación

$$ev : \text{hom}(X, X') \times X \rightarrow X' \quad \text{dada por} \quad ev(f, x) = f(x)$$

es suave. Cuando hablemos de *la* difeología funcional para un espacio de

funciones se entenderá que ésta es la más gruesa (ver nota al pie en la página anterior) de todas las difeologías funcionales sobre dicho espacio.

**Ejemplo 3.1.2** (El toro irracional). Consideramos el toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  y un flujo  $l_\alpha$  de pendiente irracional  $\alpha$  en él. Se define el toro irracional de pendiente  $\alpha$  como  $T_\alpha = \mathbb{T}^2/l_\alpha \cong \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ . La topología de  $T_\alpha$  es trivial (indiscreta) pues cada  $l_\alpha$  es densa en  $\mathbb{T}^2$ , o sea que cada elemento del cociente es denso en  $\mathbb{T}^2$ .

Equipamos a  $T_\alpha$  con una difeología cuyos plots son las parametrizaciones  $P : U \rightarrow T_\alpha$  que se factorizan a través de la proyección canónica  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow T_\alpha$ , es decir que para todo  $x \in U$  existe una subvecindad  $V \subset U$  y una función suave  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $P|_V = \pi \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{P} & T_\alpha \end{array}$$

Con esta difeología se muestra  $T_\alpha$  como un objeto no trivial. Una de sus peculiaridades es que no es discreto pero al quitarle cualquier elemento  $\tau \in T_\alpha$  se vuelve discreto. A saber,  $T_\alpha$  no es discreto pues la proyección canónica  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow T_\alpha$  es un plot que no es localmente constante, ya que en toda vecindad de cualquier punto  $x \in \mathbb{R}$  existen elementos de distintas clases de equivalencia.

Veamos ahora que, si  $\tau \in T_\alpha$ , la difeología de  $T_\alpha - \{\tau\}$  como subespacio de  $T_\alpha$  es discreta. Sea  $P : U \rightarrow T_\alpha - \{\tau\}$  un plot. Por definición de difeología de subespacio,  $P$  es un plot de  $T_\alpha$  que no contiene a  $\tau$  en su imagen. Por definición de la difeología de  $T_\alpha$ , para cada punto  $u$  de  $U$  existe una subvecindad  $V$  de  $U$  que contiene a  $u$  y una función suave  $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $P|_V = \pi \circ Q$ . Sea  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(x) = \tau$ . Como  $\tau$  no está en la imagen de  $P$  y toda la órbita  $(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})(x)$  de  $x$  bajo  $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  se proyecta en  $\tau$  bajo  $\pi$ , tenemos que la imagen de  $Q$  está contenida en el complemento de  $(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})(x)$ . Pero  $Q$  es suave, por lo tanto  $C^\infty$  y entonces debe ser continua. Por lo que, tomando un punto  $v$  cercano a  $u$ , el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  con extremos en las imágenes de  $u$  y  $v$  bajo  $Q$  debe quedarse completamente contenido dentro de la imagen de  $Q$ . Pero esta última está contenida en el complemento de un subconjunto denso, entonces  $a = b$ . Lo que implica que  $Q$  es localmente constante y  $P$  también lo es. Con lo que concluimos que  $T_\alpha - \{\tau\}$  es discreto.

También es posible calcular el grupo fundamental y el cubriente universal<sup>2</sup> de  $T_\alpha$  [IZ85]. Denotemos por  $L_\alpha$  a la recta del plano que pasa por el origen

<sup>2</sup>Estos conceptos se introducen en contexto difeológico más adelante en sección 3.3.2,

con pendiente  $\alpha$ . Sean  $\tilde{p} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  la aplicación cubriente universal,

$$H := \tilde{p}^{-1}(l_\alpha) = L_\alpha + (\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})(0, 1)$$

y  $H_0 = L_\alpha$  la componente conexa de  $H$  que contiene al origen. El flujo  $l_\alpha$  es un subgrupo uniparamétrico de  $\mathbb{T}^2$  y tenemos el siguiente diagrama conmutativo de grupos difeológicos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_\alpha & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2/L_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{p}|_{H_0} & & \downarrow \tilde{p} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & l_\alpha & \hookrightarrow & \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & T_\alpha & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de donde se concluye que el cubriente universal de  $T_\alpha$  es  $\mathbb{R}^2/L_\alpha \cong \mathbb{R}$  y su grupo fundamental es

$$\pi_1(T_\alpha) = H/H_0 = (L_\alpha + \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})/L_\alpha = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2.$$

## 3.2. Grupoides

Los grupoides son una generalización de los grupos en la que la operación binaria entre dos elementos puede no estar definida. Una manera útil de pensar a los grupoides es como cúmulos de grupos con posibles flechas entre ellos. Su simple definición quizás no dice mucho: un grupoide es una categoría (pequeña) en la que todos los morfismos son invertibles. La utilidad que habremos de obtener de ellos es la capacidad de capturar la información tanto geométrica como algebraica de las simetrías de un espacio.

**Definición 3.2.1.** Un grupoide  $G = (G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{r} \end{array} G_0)$  consta de:

1. Conjuntos  $G_0$  de objetos y  $G_1$  de flechas (morfismos) entre objetos.
2. Funciones *dominio*  $d : G_1 \rightarrow G_0$  y *rango*  $r : G_1 \rightarrow G_0$ .
3. Un producto asociativo  $\circ : G_1 \times G_1 \rightarrow G_1$  dado por la composición de flechas definido parcialmente para elementos  $g, h \in G_1$  tales que  $r(g) = d(h)$ , con las siguientes propiedades:
  - Todo objeto  $x \in G_0$  tiene una flecha identidad  $1_x \in G_1$  tal que  $1_x \circ g = g$  y  $h \circ 1_x = h$  para todas  $g, h \in G_1$  con  $r(g) = x = d(h)$ .

---

pero los métodos que explicamos aquí son construcciones categóricas esencialmente iguales a las propiedades topológicas algebraicas usuales.

- Todo elemento  $g \in G_1$  tiene un inverso  $g^{-1}$  tal que  $gg^{-1} = 1_{r(g)}$  y  $g^{-1}g = 1_{d(g)}$ .

Cualquier grupo es un grupoide. De hecho un grupoide es un grupo si y sólo si  $d(f) = \star = r(f)$  para toda  $f \in G_1$ , es decir que  $G_0$  contiene un único elemento  $\star$  y todas las flechas se pueden componer unas con otras. De aquí la razón por la que pensamos a un grupoide como un cúmulo de grupos con posibles saltos entre ellos.

En la práctica, los grupoides suelen equiparse con estructuras adicionales como topológica, diferenciable o difeológica. Para esto se requiere dotar de tal estructura a  $G_0$  y  $G_1$  y pedir que las funciones  $d, r, \circ$ , además de la *unidad* e *inverso*, definidas como

$$\begin{aligned} u : G_0 &\rightarrow G_1 & \text{dada por} & \quad x \mapsto 1_x, \\ i : G_1 &\rightarrow G_1 & \text{dada por} & \quad g \mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

respeten la estructura en cuestión, es decir sean continuas, diferenciables o suaves, según sea el caso.

Los grupoides son útiles en topología, particularmente en teoría de homotopía, para trabajar grupo(ide)s fundamentales de espacios topológicos sin fijar un punto base. La operación binaria entre clases de homotopía de trayectorias es la misma que en grupos de homotopía, pero únicamente está definida entre pares de trayectorias que el final de una de ellas coincide con el comienzo de la otra. Más adelante en la sección 3.3.2 abundaremos sobre grupoides fundamentales de espacios difeológicos.

**Definición 3.2.2.** Un grupoide (topológico, diferenciable o difeológico)

$G = (G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{r} \end{array} G_0)$  es llamado *grupoide de foliación* si cada *subgrupo de isotropía*  $G_x := \{f \in G_1 : d(f) = r(f) = x\}$  es discreto. Si además la función  $d \times r : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$  es propia<sup>3</sup> entonces se llama *grupoide orbifold*.

**Ejemplo 3.2.3** (grupoides orbifold cristalográficos). Sea  $T$  una teselación periódica de  $\mathbb{R}^2$  y  $H$  su grupo de simetrías. Como vimos en sección 1.2,  $H \cong D \rtimes \mathbb{Z}^2$ , donde  $D$  es un grupo discreto de rotaciones y reflexiones.

Definimos el grupoide de traslación  $G = (G_0, G_1)$  para la acción de  $H$  en  $\mathbb{R}^2$  como

$$G_0 = \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad G_1 = H \times \mathbb{R}^2,$$

y las funciones dominio y rango

$$\begin{aligned} d : H \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{como la proyección} & \quad (h, x) \mapsto x, \\ r : H \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{como la acción} & \quad (h, x) \mapsto h \cdot x. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Una función es propia si la preimagen de conjuntos compactos es compacta.

Para cada  $x \in G_0$  los grupos de isotropía del grupoide  $G$

$$G_x = \{f \in G_1 : d(f) = r(f) = x\} = \{(h, x) \in H \times \mathbb{R}^2 : h \cdot x = x\}$$

son discretos ya que son subgrupos de  $D$ , que es discreto. Por lo tanto  $G$  es un grupoide de foliación.

Para establecer que la función  $d \times r : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$  es propia, en este caso, basta probar que, dadas cualquier sucesión  $\{h_n\}$  de elementos de  $H$  y una sucesión convergente  $\{x_n\}$  en  $\mathbb{R}^2$ , si la sucesión  $\{h_n \cdot x_n\}$  es convergente entonces  $\{h_n\}$  tiene una subsucesión convergente. Esto sucede gracias a que  $H$  es discreto y actúa por isometrías en  $\mathbb{R}^2$ . Pues, si  $\{h_n \cdot x_n\}$  converge, la única manera en la que  $h_k \cdot x_k$  y  $h_l \cdot x_l$  sean cercanos para valores grandes de  $k, l$ , siendo que  $x_k$  y  $x_l$  son cercanos, es que  $h_k = h_l$ . Es decir  $\{h_n\}$  es eventualmente constante y, por tanto, convergente.

La *órbita* de  $x$  bajo el grupoide  $G$  es

$$G(x) = rd^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : h \cdot x = y \text{ para algún } h \in H\}.$$

El espacio de órbitas  $O = \mathbb{R}^2/H$  es un orbifold: un espacio Hausdorff compacto que es localmente una variedad diferenciable en todos sus puntos salvo por algunas singularidades provenientes de los puntos fijos bajo la acción de  $H$ .

La construcción del ejemplo anterior existe en general para cualquier acción de un grupo  $G$ , o incluso grupoide, en algún espacio  $X$  y se conoce como el *grupoide de translación*.

Una introducción menos superficial al estudio de grupoides y sus utilidades puede ser consultada en [\[Moe02\]](#).

### 3.3. Fibraciones y homotopía en difeología

En la presente sección nos adentraremos en la teoría homotópica para espacios difeológicos. Ésta tiene un enfoque ligeramente distinto a la teoría homotópica usual, pero restringida a variedades coincide con la teoría de homotopía para éstas.

#### 3.3.1. Homotopía de caminos

Un *camino* en un espacio difeológico  $X$  es una parametrización suave  $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ . Los puntos  $c(0)$  y  $c(1)$  se llaman inicio y final del camino  $c$ , respectivamente. Denotamos por  $Cam(X)$  al conjunto de todos los caminos

del espacio  $X$  y por  $Cam_{x,y}(X)$  al subconjunto de  $Cam(X)$  formado por todos los caminos con inicio  $x$  y final  $y$ . Estos dos conjuntos pueden equiparse con una difeología funcional (ver discusión previa al ejemplo 3.1.2), lo que permite definir una *homotopía* entre dos caminos  $c, c'$  en  $X$  como un camino  $\mathfrak{c}$  en el espacio de caminos  $Cam_{c,c'}(Cam(X))$  con extremos  $c$  y  $c'$ . Parte del formalismo homotópico en difeología se basa en la posibilidad de encontrar, para cada camino  $c$ , un camino  $\hat{c}$  homotópico a  $c$  que se desvanece suavemente fuera del intervalo  $[0, 1]$ . A partir de esta idea se pueden definir en contexto difeológico los conceptos típicos de homotopía como contractibilidad, la categoría homotópica, retracciones, retracciones por deformación, etc. (ver capítulo 5 de [IZ13]).

La *conexidad* de espacios difeológicos se mide en función de caminos, lo que en topología se conoce como conexidad por trayectorias. Se dice que un espacio difeológico  $X$  es conexo si para cualesquiera dos puntos de  $X$  existe un camino que empiece en uno de ellos y acaba en el otro. El conjunto de componentes conexas de  $X$ , que denotamos por  $\pi_0(X)$ , es el espacio cociente de  $X$  bajo la relación de equivalencia entre sus elementos ‘existe un camino que los une’.

### 3.3.2. El grupoide de Poincaré y grupos de homotopía

Sea  $X$  un espacio difeológico y  $Cam(X)$  su espacio de caminos. Definimos una relación de equivalencia  $\sim$  en este último como

$$c \sim c' \Leftrightarrow \{\exists x, x' \in X, \mathfrak{c} \in Cam(Cam_{x,x'}(X)) : \mathfrak{c}(0) = c, \mathfrak{c}(1) = c'\}.$$

Es decir,  $c$  y  $c'$  están relacionados si tienen los mismos extremos y son homotópicos.

Denotemos por  $\Pi(X)$  el cociente difeológico de  $Cam(X)$  y por  $[c]$  la clase de  $c$  bajo esta relación. Se define el *grupoide de Poincaré*  $\mathbf{P}(X) = (P_0, P_1)$  de  $X$  como

$$P_0 = X \quad \text{y} \quad P_1 = \Pi(X).$$

Para  $x, x' \in X$ , el conjunto de flechas entre ellos está dado por el conjunto de clases de homotopía de caminos con inicio en  $x$  y final en  $x'$

$$\text{hom}_{\mathbf{P}(X)}(x, x') := Cam_{x,x'}(X)/\sim =: \pi_0(Cam_{x,x'}(X)).$$

Las funciones dominio y rango del grupoide corresponden al inicio y final, respectivamente, de la clase de homotopía. Esto es

$$d([c]) = c(0) \quad \text{y} \quad r([c]) = c(1).$$

El producto en el grupoide  $\mathbf{P}(X)$  se define como la proyección al cociente de la concatenación de caminos en  $X$ . Es decir, si  $[c] \in \text{hom}_{\mathbf{P}(X)}(x, x')$  y  $[c'] \in \text{hom}_{\mathbf{P}(X)}(x', x'')$  entonces

$$[c] \cdot [c'] = [c \vee c'] \in \text{hom}_{\mathbf{P}(X)}(x, x'').$$

El *primer grupo de homotopía* o *grupo fundamental* de  $X$  basado en el punto  $x$  se define como el grupo de isotropía (ver definición 3.2.2) del grupoide  $\mathbf{P}(X)$  en el objeto  $x$ :

$$\mathbf{P}_x := \text{hom}_{\mathbf{P}(X)}(x, x) = \pi_0(\text{Cam}_{x,x}(X)) =: \pi_1(X, x).$$

Si  $X$  es conexo se puede omitir el punto base ya que todos los grupos fundamentales basados en puntos de  $X$  son isomorfos vía conjugación. Un espacio difeológico  $X$  es *simplemente conexo* si es conexo y  $\pi_1(X)$  es trivial.

Recursivamente se definen los grupos de homotopía de órdenes superiores. Para un espacio difeológico  $X$  y  $x \in X$ .

$$\pi_k(X, x) = \pi_{k-1}(\text{Cam}_{x,x}(X), \mathbf{x}),$$

donde  $\mathbf{x}$  denota el camino constante  $x$ .

El material presentado en esta sección se encuentra bien desarrollado en el capítulo 5 de [IZ13].

### 3.3.3. Fibraciones difeológicas

En difeología los haces fibrados se definen a través de los grupoides en términos similares a los del grupoide de Poincaré. Para explicar estos términos situémonos en la categoría cuyos objetos son suprayecciones suaves entre espacios difeológicos y un morfismo entre dos suprayecciones  $\pi : X \rightarrow B$  y  $\pi' : X' \rightarrow B'$  es un par de funciones suaves  $(\Phi, \phi)$  que hacen conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\phi} & B' \end{array}$$

Si  $\Phi$  y  $\phi$  son difeomorfismos entonces  $\pi : X \rightarrow B$  y  $\pi' : X' \rightarrow B'$  son *equivalentes*.

A cada suprayección suave  $\pi : X \rightarrow B$  se le puede construir un grupoide de la siguiente manera. Sean

$$G_0 = B \quad \text{y} \quad G_1 = \bigcup_{z, z' \in G_0} \text{hom}(X_z, X'_z),$$



donde  $\text{hom}(\_, \_)$  en este caso se refiere a todas las funciones suaves con dominio y rango especificados y  $X_z$  denota la fibra  $\pi^{-1}(z)$ .

Las funciones *dominio*  $d : G_1 \rightarrow G_0$  y *rango*  $r : G_1 \rightarrow G_0$  del grupoide están dadas por  $d(\varphi) = \pi(\text{dom}(\varphi))$  y  $r(\varphi) = \pi(\text{ran}(\varphi))$ . Como  $\pi$  es constante en  $\text{dom}(\varphi)$  y  $\text{ran}(\varphi)$  estas funciones están bien definidas.

Una difeología para el grupoide  $(G_1, G_0)$  se define como la difeología más gruesa tal que la función evaluación

$$ev : X^d \rightarrow X \quad \text{dada por} \quad ev(\varphi, x) = \varphi(x),$$

del pull-back a través de  $d$ , definido como

$$X^d := \{(\varphi, x) \in G_1 \times X : x \in \text{dom}(\varphi)\},$$

es suave y hace a  $(G_1, G_0)$  un grupoide difeológico.

Este grupoide se llama el *grupoide estructural* de la suprayección  $\pi$ .

**Definición 3.3.1.** El grupoide estructural de una suprayección suave  $\pi$  se llama *fibrante* si la función característica

$$\chi : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0 \quad \text{dada por} \quad \chi(\varphi) = (d(\varphi), r(\varphi))$$

es una subducción cuando  $G_0 \times G_0$  está equipado con la difeología producto.

**Definición 3.3.2.** Una suprayección suave es una *fibración* si su grupoide estructural es fibrante.

Las fibraciones difeológicas están caracterizadas como las suprayecciones suaves localmente triviales a lo largo de los plots. Esto es, suprayecciones suaves  $\pi : X \rightarrow B$  tales que existe un espacio difeológico  $F$  y una cubierta de  $B$  por  $D$ -abiertos  $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$  tales que el pull-back  $\pi^* : X^P \rightarrow B$  de  $\pi$  por cualquier plot  $P : U \rightarrow B$ , restringido a su imagen  $A_i$ , es equivalente (en la categoría de suprayecciones suaves) a la proyección en el primer factor  $\pi_1 : A_i \times F \rightarrow A_i$ . Como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \cong & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 X^P & \xrightarrow{\pi_2} & X & & A_i \times F \\
 \pi_1 \downarrow & \searrow \pi^* & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\
 U & \xrightarrow{P} & A_i \subset B & \xrightarrow{1_{A_i}} & A_i
 \end{array}$$

donde  $\pi_i$  es la proyección en el  $i$ -ésimo factor y consideramos todas las funciones que apuntan a  $B$  localmente (restringidas a  $A_i$  en su imagen).

Un *espacio cubriente* en difeología es un haz fibrado difeológico cuya fibra es discreta. Los espacios cubrientes difeológicos mantienen la mayoría de las propiedades útiles de la teoría de espacios cubrientes clásica: son localmente triviales a lo largo de los plots, el grupo fundamental de la base actúa en la fibra, vale el teorema de la monodromía o de levantamiento único de caminos, todo espacio difeológico tiene un espacio cubriente universal, etc.

Una de las propiedades cruciales de las fibraciones difeológicas que explo-  
taremos en el siguiente capítulo es la *sucesión exacta de homotopía*.

**Proposición 3.3.3.** *Sean  $p : X \rightarrow B$  un haz fibrado difeológico,  $x \in X$ ,  $b = p(x)$  y  $F = p^{-1}(b)$ . Existe una sucesión exacta larga de grupos de homotopía*

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \pi_{k+1}(B, b) \longrightarrow \pi_k(F, x) \longrightarrow \pi_k(X, x) \longrightarrow \pi_k(B, b) \longrightarrow \dots \\ &\dots \longrightarrow \pi_1(B, b) \longrightarrow \pi_0(F, x) \longrightarrow \pi_0(X, x) \longrightarrow \pi_0(B, b). \end{aligned}$$

La demostración escapa del alcance de esta tesis, aunque se construye con ideas muy similares a la sucesión exacta de homotopía usual. Todos sus detalles se pueden encontrar en el capítulo 8 de [IZ13] junto a las demás construcciones presentadas en las últimas dos secciones.



## Capítulo 4

# Espacios de teselaciones vía difeología

En el presente capítulo se concentra el trabajo original de esta tesis. La idea es definir una estructura de difeología sobre los espacios de teselaciones y explorar algunas de sus propiedades generales y particulares en el caso de teselaciones unidimensionales.

La idea de utilizar la difeología para nuestro estudio nace del ejemplo del toro irracional  $T_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$  platicado en el ejemplo 3.1.2. Este ejemplo es uno de los pilares de la teoría difeológica por adquirir una estructura no trivial que la topología no alcanza a distinguir. La intención de este capítulo es justificar a  $T_\alpha$  como candidato a objeto característico asociado a una teselación aperiódica unidimensional.

El resultado principal es que los espacios de teselaciones unidimensionales bajo consideración son espacios cubrientes sobre toros irracionales. Este cubriente se obtiene al introducir una versión difeológica del haz fibrado sobre el toro definido por Williams y platicado en la sección 2.5. La posibilidad de definir una estructura geométrica sobre  $T_\alpha$  permite construir una variante de dicho haz que conserva información importante como los tamaños de las teselas.

### 4.1. Una difeología para $\Omega$

Sea  $T$  una teselación repetitiva de  $\mathbb{R}^d$ , con CFL y  $\Omega$  su envolvente. Definimos una difeología  $\mathcal{D}$  para  $\Omega$  como la mínima difeología que contiene a todas las traslaciones de todas las teselaciones  $T \in \Omega$ ,

$$\mathcal{F} = \{F_T : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega : F_T(x) = T + x, T \in \Omega\}.$$

La difeología  $\mathcal{D}$  es la más gruesa que contiene a todos los elementos de  $\mathcal{F}$  y sus plots están especificados de la siguiente manera: una parametrización  $P : U \rightarrow \Omega$  es un plot de  $\mathcal{D}$  si y sólo si para todo elemento  $u \in U$  existe una subvecindad  $V \subset U$  que contiene a  $u$ , una función suave  $f : V \rightarrow W$  entre dominios euclidianos y un elemento  $F_T : W \rightarrow \Omega$  de la familia  $\mathcal{F}$  tal que  $P|_V = F_T \circ f$ . Esto quiere decir que  $P$  es *localmente una traslación salvo pre-componer con una función suave* y que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{P} & \Omega \\ \uparrow & & \uparrow F_T \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Notamos en primer lugar que la dimensión de esta familia generadora, definida como el supremo de las dimensiones de los dominios de sus parametrizaciones, es  $d$ . Como ninguna familia de dimensión menor puede generar a  $\mathcal{D}$ , se deduce que la dimensión difeológica de  $\Omega$  es  $d$ .

El siguiente par de resultados verifica que las acciones naturales por traslación y sustitución sobre en  $\Omega$  son suaves.

**Lema 4.1.1.** *Sea  $\Omega$  un espacio de teselaciones de  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathbf{Diff}(\Omega)$  el grupo de difeomorfismos de  $\Omega$  equipado con la difeología funcional. La acción por traslación  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbf{Diff}(\Omega)$  de  $\mathbb{R}^d$  sobre  $\Omega$  es suave.*

*Demostración.* Debemos probar que la función evaluación

$$ev_\rho : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega \quad \text{dada por} \quad ev_\rho(T, x) = \rho(x)(T) = T + x \quad (4.1)$$

es suave. Es decir que, para todo plot  $P$  de  $\Omega \times \mathbb{R}^d$ ,  $ev_\rho \circ P$  es un plot de  $\Omega$ . Esto se cumple siempre y cuando todo punto  $u \in U$  posee una subvecindad  $V \subset U$  y existen una función suave  $f : V \rightarrow W$  entre dominios euclidianos y un elemento  $F_T : W \rightarrow \Omega$  de la familia generadora  $\mathcal{F}$  tales que

$$(ev_\rho \circ P)|_V = F_T \circ f,$$

es decir que  $ev_\rho \circ P$  es localmente una traslación salvo pre-componer con una función suave.

Sea  $P : U \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}^d$  un plot en la difeología producto, *i.e.*  $\pi_1 \circ P : U \rightarrow \Omega$  es un plot de  $\Omega$  y  $\pi_2 \circ P =: h$  es una función  $C^\infty$  de  $U$  en  $\mathbb{R}^d$ , donde  $\pi_i$  denota la proyección en el  $i$ -ésimo factor. Como  $\pi_1 \circ P$  es un plot de  $\Omega$ , localmente en una vecindad  $V$  es una traslación salvo pre-componer con una función suave, digamos  $g$ .

Entonces para todo punto  $u \in V \subset U$  sucede que

$$P(u) = (\pi_1 \circ P(u), \pi_2 \circ P(u)) = (F_T \circ g(u), h(u)) = (T + g(u), h(u))$$

y sustituyendo  $P(u)$  en la ecuación 4.1 tenemos que

$$ev_\rho \circ P(u) = \rho(h(u))(T + g(u)) = T + g(u) + h(u) = F_T \circ (g + h)(u),$$

donde  $g + h$  es una función suave ya que ambos sumandos lo son. Es decir que  $ev_\rho \circ P$  es un plot de  $\Omega$ . Por lo tanto  $ev_\rho$  es una función suave y entonces  $\rho$  actúa suavemente. □

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $\Omega$  un espacio de teselaciones de  $\mathbb{R}^d$  que admite una regla de sustitución primitiva  $\omega$ . Entonces la función  $\omega : \Omega \rightarrow \Omega$  es suave.*

*Demostración.* Sea  $P : U \rightarrow \Omega$  un plot de  $\Omega$ . Debemos probar que  $\omega \circ P$  también lo es. Por definición, para todo punto  $u \in U$  existe una subvecindad  $V \subset U$ , un elemento  $F_T : W \rightarrow \Omega$  de la familia generadora  $\mathcal{F}$  y una función suave  $f : V \rightarrow W$  tal que  $P|_V = F_T \circ f$  (asumiendo que  $P$  no es constante, en cuyo caso se tendría el resultado).

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{P} & \Omega & \xrightarrow{\omega} & \Omega \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ V & \xrightarrow{f} & W & & \end{array}$$

Entonces para todo  $v \in V$  y alguna  $T \in \Omega$  tenemos que

$$\begin{aligned} \omega \circ P(v) &= \omega \circ F_T \circ f(v) = \omega \circ F_T(f(v)) \\ &= \omega(T + f(v)) = \omega(T) + \lambda \cdot f(v) = F_{\omega(T)} \circ (\lambda \cdot f)(v), \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es el factor de expansión de  $\omega$  y  $F_{\omega(T)}$  un elemento de  $\mathcal{F}$ , ya que  $\omega(T) \in \Omega$  (ver observación 2.1.1). Por lo que todo punto  $u$  de  $U$  posee una vecindad  $V$  tal que  $\omega \circ P|_V = F_{\omega(T)} \circ \lambda \cdot f$  y esta última es una función suave. Entonces  $\omega \circ P$  es un plot para  $\Omega$ . □

Recordamos que  $\Omega$  es localmente homeomorfo al producto cartesiano de un disco  $D$  por un conjunto de Cantor  $K$  (sección 2.2). Notemos que el lema 4.1.1 nos dice que podemos movernos suavemente en el factor  $D$  mientras que la proposición anterior nos asegura que también es posible hacerlo en el factor  $K$ .

En cuanto a la equivalencia de espacios de teselaciones  $\Omega$  como espacios difeológicos, definida en sección 3.1.1, observamos que ésta es equivalente a la conjugación topológica (definición 2.1.7).

**Proposición 4.1.3.** *Dos espacios de teselaciones  $d$ -dimensionales  $(\Omega, \rho)$  y  $(\Omega', \rho')$  con acción de  $\mathbb{R}^d$  por traslación son conjugados si y sólo si son difeomorfos.*

*Demostración.* Sean  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  una conjugación entre espacios de teselaciones y  $P : U \rightarrow \Omega$  un plot. Nuevamente el mismo argumento: salvo pre-componer con una función suave  $f$ ,  $P$  es localmente una traslación. Es decir que para todo  $u \in U$  existe una subvecindad  $V \subset U$  que contiene a  $u$ , una teselación  $T \in \Omega$  y una función suave  $f : V \rightarrow W$  tal que  $P|_V = F_T \circ f$ . Entonces

$$\varphi \circ P(u) = \varphi \circ F_T \circ f(u) = \varphi(T + f(u)) = \varphi(T) + y = F'_{\varphi(T)}(y),$$

para alguna  $y \in \mathbb{R}^d$ . La penúltima igualdad se tiene por hipótesis y  $F'_{\varphi(T)}$  es un elemento de la familia generadora de la difeología de  $\Omega'$ . Por lo tanto  $\varphi \circ P$  es un plot de  $\Omega'$  y entonces  $\varphi$  es suave. El mismo argumento funciona para probar la suavidad de  $\varphi^{-1}$ , con lo que tenemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo.

Recíprocamente, sea  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  un difeomorfismo. Sea  $T \in \Omega$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ . Consideramos el camino  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  dado por  $\gamma(s) = (1-s)T + s(T+x)$ . Este camino une a  $T$  con  $T+x$ . Entonces, como  $\varphi$  es suave,  $\varphi \circ \gamma$  es un camino en  $\Omega'$  tal que  $\varphi \circ \gamma(0) = \varphi(T)$  y  $\varphi \circ \gamma(1) = \varphi(T+x)$ . Esto implica que  $\varphi(T)$  y  $\varphi(T+x)$  se encuentran en la misma componente por trayectorias, por lo tanto  $\varphi(T+x)$  debe ser un trasladado de  $\varphi(T)$ . Entonces  $\varphi$  es una conjugación. □

#### 4.1.1. La $D$ -topología

La estructura de difeología en  $\Omega$  induce una topología llamada la  $D$ -topología, cuyos abiertos  $A \subset \Omega$  son aquellos subconjuntos para los que la imagen inversa  $P^{-1}(A)$  bajo todos los plots es un subconjunto abierto de algún  $\mathbb{R}^n$ . La  $D$ -topología es la topología más gruesa sobre  $\Omega$  que hace que todos los plots sean funciones continuas. Esto implica que toda función suave sobre  $\Omega$  es continua en la  $D$ -topología. Para evitar confusiones, llamaremos abiertos a los elementos de la topología de  $\Omega$  inducida por la métrica y  $D$ -abiertos a los elementos de la  $D$ -topología.

**Proposición 4.1.4.** *La  $D$ -topología sobre  $\Omega$  es más fina que la topología inducida por la métrica.*

*Demostración.* Sea  $A \subset \Omega$  un abierto. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $A = \mathcal{B}_\varepsilon(T)$  para alguna  $T \in \Omega$ . Sea  $B = \{T + x : \|x\| < \varepsilon\} \subset A$ . Afirmamos que  $B$  es  $D$ -abierto. Sea  $P : U \rightarrow \Omega$  un plot, entonces

$$P^{-1}(B) = \bigcup_{u \in U} (P|_{V_u})^{-1}(B) = \bigcup_{u \in U} (F_T \circ f_u)^{-1}(B) = \bigcup_{u \in U} (f_u^{-1}(F_T^{-1}(B))),$$

donde  $f_u$  y  $V_u$  son la función suave  $f$  y la subvecindad  $V$  existentes para cada  $u \in U$  en la definición de familia generadora. Pero  $F_T^{-1}(B)$  coincide con la bola euclidiana abierta  $B_\varepsilon(0)$  y  $f_u$  es una función suave entre dominios euclidianos y por lo tanto es continua, lo que implica que  $P^{-1}(B)$  es abierto en algún  $\mathbb{R}^n$  y entonces  $B$  es  $D$ -abierto.

Por lo tanto, para todo elemento  $T$  y toda vecindad abierta  $A$  que contiene a  $T$ , existe una vecindad  $D$ -abierto  $B$  que contiene a  $T$  que está contenida dentro de  $A$ . De lo que concluimos que la  $D$ -topología en  $\Omega$  es más fina que la topología inducida por la métrica. □

Gracias a la existencia de la  $D$ -topología es posible hablar de propiedades difeológicas locales, definidas en vecindades.

**Definición 4.1.5.** Sea  $f : X \rightarrow X'$  una función entre espacios difeológicos. Decimos que  $f$  es *suave localmente* en el punto  $x \in X$  si existe un  $D$ -abierto  $A$  que contiene a  $x$  tal que la función  $f|_A$  es suave. Esto es, si para todo plot  $P$  de  $X$  la parametrización  $f \circ P$  definida en  $P^{-1}(A)$  es un plot para  $X'$ .

**Proposición 4.1.6** (Apartado 2.3 en [IZ13]). *Una función  $f : X \rightarrow X'$  entre espacios difeológicos es suave si y sólo si es suave localmente en todos los puntos de  $X$ .*

## 4.2. $\Omega$ es un haz fibrado

En esta sección construimos una versión difeológica unidimensional del haz fibrado de Williams (sección 2.5). Para esto analizamos la construcción original de Williams en el caso de las cadenas de Fibonacci y la adaptamos para obtener un haz fibrado sobre el toro irracional  $T_\alpha$ .

**Ejemplo 4.2.1** (El haz  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$  difeológico). Consideremos el caso de las cadenas de Fibonacci. Sabemos que éstas se obtienen por el método de



proyección de dimensión 2-1 en una recta de pendiente el inverso de la razón áurea  $\varphi^{-1}$  y por la regla de sustitución  $\omega$  en el alfabeto  $\{0, 1\}$  dada por

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 01 \\ 1 &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Consideremos la presentación de  $\Omega$  como el límite del complejo de curvas ramificadas  $\Omega_n$  (sección 2.3.2)

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\Omega_n, f_n\}.$$

El primer aproximante  $\Omega_0$  es la cuña de dos círculos, uno por cada letra del alfabeto, con longitudes 1 y  $\varphi$ . Los siguientes aproximantes  $\Omega_n$  son la misma cuña pero con los círculos escalados por la razón áurea  $\varphi$  en cada nivel y subdivididos por la regla de sustitución (ver figura 2.4). Las funciones de transición  $f_n$  olvidan la información del  $n$ -ésimo nivel para quedar en el nivel  $n - 1$ .

La envolvente  $\Omega$  es un haz fibrado (topológico) sobre el círculo  $\mathbb{S}^1$  con fibras homeomorfas al conjunto de Cantor  $K$ . Consideramos dicha fibración

$$K \hookrightarrow \Omega \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1.$$

Recordamos que la función  $p$  de la sección 2.5 es la composición de funciones

$$\Omega \xrightarrow{\pi_0} \Omega_0 \xrightarrow{q} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1,$$

donde  $\pi_0 : \Omega \rightarrow \Omega_0$  es la proyección en el primer factor de  $\Omega$  como límite inverso,  $q$  es la función que mapea los círculos que forman  $\Omega_0$  en los intervalos  $[-1, 0]$  y  $[0, 1]$ , respectivamente, y  $\pi$  la proyección canónica en el cociente  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Entonces la función  $p$  manda a la teselación  $T$  al punto que ocupa el origen dentro de la tesela, módulo la longitud de ésta, proyectada en  $\mathbb{S}^1$ .

**Lema 4.2.2.** *Con la difeología  $\mathcal{D}$  para  $\Omega$ , la difeología empujada<sup>1</sup>  $\pi_{0*}(\mathcal{D})$  sobre  $\Omega_0$  y la difeología de cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  para  $\mathbb{S}^1$ , la función  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$  es suave.*

*Demostración.* Las funciones  $\pi_0$  y  $\pi$  son suaves por definición. Notamos que  $q \circ \pi_0$  es localmente suave en todas las teselaciones  $T$  que el origen no está posicionado en la frontera de alguna tesela, pues siempre existe un  $D$ -abierto que contiene a  $T$  donde los plots parametrizan las traslaciones dentro del

---

<sup>1</sup>Ver sección 3.1.1.

$D$ -abierto, es decir que, para un plot  $P$  de  $\Omega$ ,  $q \circ \pi_0 \circ P$  es una traslación en  $\mathbb{R}$ , la cual es suave y por lo tanto un plot de este último.

Además  $p = \pi \circ q \circ \pi_0$  es localmente suave también en las teselaciones  $T$  cuyo origen se encuentra en la frontera de las teselas, pues, nuevamente, existe un  $D$ -abierto  $A \subset \Omega$  que contiene a  $T$  que se proyecta bajo  $p$  en un intervalo alrededor del punto  $p(T)$ . Entonces para cualquier plot  $P$  de  $\Omega$ ,  $P|_{P^{-1}(A)}$  parametriza traslaciones dentro de  $A$  y  $p \circ P$  parametriza traslaciones alrededor de  $p(T)$  en  $\mathbb{S}^1$ , las cuales son suaves. Entonces  $p$  es localmente suave en todos los puntos de  $\Omega$  y por lo tanto es suave. (Ver ejercicios 27 y 28 de [IZ13] y proposición 4.1.6).  $\square$

En el contexto difeológico, es quizás más natural considerar el mismo haz sobre el toro irracional  $T_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ , en este caso tomando  $\alpha = \varphi$  el número áureo. Este se construye con la misma idea que el anterior pero respetando la longitud de las teselas: sea  $T$  una teselación construida por el método de proyección y que admita una regla de sustitución en un alfabeto de dos letras  $\{0, 1\}$ . Asignamos longitudes 1 y  $\alpha$  a las teselas 0 y 1, respectivamente. Definimos una nueva función  $\hat{p} : \Omega \rightarrow T_\alpha$  como la composición

$$\Omega \xrightarrow{\pi_0} \Omega_0 \xrightarrow{\hat{q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_\alpha} T_\alpha,$$

en este caso  $\pi_0 : \Omega \rightarrow \Omega_0$  es la misma proyección en el primer factor de  $\Omega$ ,  $\hat{q}$  es la función que mapea los círculos que forman  $\Omega_0$  en los intervalos  $[-1, 0]$  y  $[0, \alpha]$ , respectivamente, y  $\pi_\alpha$  es la proyección canónica en el cociente  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ . De manera que  $\hat{p}$  es la función que mapea la teselación  $T$  en el punto de  $[-1, 0] \cup [0, \alpha] \subset \mathbb{R}$  que ocupa el origen de  $T$  seguida de la proyección al cociente  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ .

**Proposición 4.2.3.** *La función  $\hat{p} : \Omega \rightarrow T_\alpha$  es suprayectiva y suave.*

*Demostración.* La función  $\hat{p}$  es claramente suprayectiva pues para cualquier  $z \in T_\alpha$ , representado por  $t + m + n\alpha$ , existe una teselación  $T \in \Omega$  con el origen en la posición  $t \pmod{1}$  en la tesela tipo 1.

La demostración del lema 4.2.2 funciona exactamente igual para probar la suavidad de  $\hat{p}$ , sólo cambiando la última proyección al cociente.  $\square$

Este haz tiene la ventaja sobre el anterior que respeta la proporción de las longitudes de las teselas, lo cual, en este caso unidimensional, acarrea bastante información.

## La $D$ -topología de las fibras

Sea  $X$  un espacio difeológico y  $S \subset X$  cualquier subconjunto. Existen dos  $D$ -topologías que se pueden definir canónicamente en  $S$ . La topología relativa a la  $D$ -topología de  $\Omega$  y la  $D$ -topología del subespacio difeológico  $S$ . Cuando ambas topologías coinciden se dice que el subconjunto está *encajado*.

**Proposición 4.2.4.** *Las fibras  $\Omega_z := \hat{p}^{-1}(z)$  de  $\hat{p} : \Omega \rightarrow T_\alpha$  son subconjuntos encajados en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Notamos que para cada  $z \in T_\alpha$  representado por  $t + m + n\alpha$ , la fibra  $\Omega_z$  contiene, por un lado, al conjunto de teselaciones en  $\Omega$  cuyo origen se encuentra en la coordenada  $t \pmod 1$  de la tesela 1, y, por otro lado, todas las teselaciones de  $\Omega$  cuyo origen se encuentra en  $t \pmod \alpha$  en la tesela 0.

Sean  $T \in \Omega_z$  y  $A = \{T + x : \|x\| \leq \epsilon\}$  una vecindad  $D$ -abierto de  $T$ . Ésta es un conjunto de trasladados de  $T$ . Si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño entonces la intersección de  $A$  y  $\Omega_z$  es el singurete  $\{T\}$ . Por lo tanto la  $D$ -topología relativa a  $\Omega_z \subset \Omega$  es discreta.

Tomemos ahora la difeología de subespacio sobre  $\Omega_z \subset \Omega$ . Ésta consiste de todos los plots  $P$  de  $\Omega$  que toman valores en  $\Omega_z$ . Pero, dada  $T \in \Omega_z$ ,  $P$  parametriza las traslaciones de  $T$  dentro de algún radio, y sólo para la traslación trivial los valores de  $P$  permanecerán dentro de  $\Omega_z$ , por lo que  $P$  debe ser localmente constante. Entonces la difeología de subespacio en  $\Omega_z$  es discreta y su  $D$ -topología también es discreta (ver apartado 2.11 de [IZ13]).  $\square$

### 4.2.1. $\hat{p} : \Omega \rightarrow T_\alpha$ es un cubriente.

La siguiente tarea es analizar el grupoide estructural asociado a  $\hat{p}$  y los difeomorfismos existentes entre las fibras  $\Omega_z$ . Como éstas son discretas, cualquier biyección entre fibras es un difeomorfismo.

Consideremos dicho grupoide:

$$G_0 = T_\alpha \quad \text{y} \quad G_1 = \bigcup_{z,w \in T_\alpha} \mathbf{Diff}(\Omega_z, \Omega_w).$$

Las funciones dominio y rango están definidas por  $d(\varphi) = \hat{p}(\text{dom}(\varphi)) = \hat{p}(\Omega_z) = z$  y  $r(\varphi) = \hat{p}(\text{ran}(\varphi)) = \hat{p}(\Omega_w) = w$ , con  $\varphi \in \mathbf{Diff}(\Omega_z, \Omega_w)$ .

Para dotar a  $(G_1, G_0)$  con una estructura de grupoide difeológico se definen, para cada parametrización  $P : U \rightarrow G_1$ , los pull-backs de  $\hat{p}$  a través de  $d \circ P$  y  $t \circ P$ , como

$$\Omega^{d \circ P} = \{(u, T) \in U \times \Omega : T \in \text{dom}(P(u))\},$$

$$\Omega^{r \circ P} = \{(u, T) \in U \times \Omega : T \in \text{ran}(P(u))\}.$$

De manera que los plots de  $G_1$  están especificados como aquellas parametrizaciones  $P$  tales que las funciones  $\chi \circ P$  y

$$P^d : \Omega^{d \circ P} \rightarrow \Omega \quad \text{dada por} \quad P^d(u, T) = P(u)(T),$$

$$P^r : \Omega^{r \circ P} \rightarrow \Omega \quad \text{dada por} \quad P^r(u, T) = P(u)^{-1}(T),$$

son suaves (ver apartado 8.7 de [IZ13]).

**Proposición 4.2.5.** *La función  $\hat{p} : \Omega \rightarrow T_\alpha$  es una fibración difeológica.*

*Demostración.* Debemos probar que el grupoide estructural  $(G_1, G_0)$  asociado a  $\hat{p}$  es fibrante, *i.e.* la función característica  $\chi : G_1 \rightarrow T_\alpha \times T_\alpha$  es una subducción. Para eso habrá que probar que, para cada plot  $Q : U \rightarrow T_\alpha \times T_\alpha$  y cada punto  $u \in U$ , existe una vecindad  $V$  de  $u$  tal que  $Q|_V$  es constante o existe un plot  $P : V \rightarrow G_1$  que levanta a  $Q$  localmente, es decir que  $Q|_V = \chi \circ P$ .

Sea  $Q : U \rightarrow T_\alpha \times T_\alpha$  un plot para la difeología producto en  $T_\alpha \times T_\alpha$ . Éste es de la forma  $Q(u) = (Q_1(u), Q_2(u))$ , donde  $Q_i$  es un plot de  $T_\alpha$ , y cada  $Q_i$  se levanta localmente a un plot  $\bar{Q}_i$  de  $\mathbb{R}$ , pues la difeología de  $T_\alpha$  coincide con la del cociente  $\mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ .

Tomemos  $u \in U$  y sean  $z_d := Q_1(u)$  y  $z_r := Q_2(u)$ . Definimos un difeomorfismo  $\varphi_u : \Omega_{z_d} \rightarrow \Omega_{z_r}$  dado por la traslación de toda la fibra  $\Omega_{z_d}$  a  $\Omega_{z_r}$ , es decir

$$\varphi_u(T) = T - \bar{Q}_1(u) + \bar{Q}_2(u).$$

Sea  $V = \text{dom}(\bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2)$ . Definimos una función  $P : V \rightarrow G_1$  como la parametrización de los difeomorfismos  $\varphi_v$  correspondientes a la traslación de la fibra  $\Omega_{Q_1(v)}$  a  $\Omega_{Q_2(v)}$ , es decir  $P(v) = \varphi_v$ .

Veamos que  $P$  cumple con las condiciones requeridas:

$$\chi \circ P(v) = \chi(\varphi_v) = (Q_1(v), Q_2(v))$$

es el producto de dos funciones suaves y por lo tanto es suave;

$$P^d(v, T) = P(v)(T) = \varphi_v(T) = T - \bar{Q}_1(u) + \bar{Q}_2(u)$$

es una traslación de  $T$  y por lo tanto es suave, al igual que

$$P^r(v, T) = P(v)^{-1}(T) = \varphi_v^{-1}(T) = T - \bar{Q}_2(u) + \bar{Q}_1(u).$$

Entonces  $P$  es un plot de  $G_1$  y, por construcción,  $Q|_V = \chi \circ P$ . Por lo tanto  $\chi$  es una subducción y el grupoide  $G_1$  es fibrante. □

Esta proposición, junto con el hecho de que las fibras son discretas, establecido en la demostración de la proposición 4.2.4, implica que  $\hat{p}$  es una función cubriente.

**Teorema 4.2.6.** *Los espacios de teselaciones por sustitución en dos letras con estructura de CPS son espacios cubrientes de toros irracionales.*

Una consecuencia inmediata es que podemos definir un grupo fundamental para los espacios  $\Omega$  bajo consideración.

**Corolario 4.2.7.** *Sea  $\Omega$  un espacio de teselaciones unidimensionales con estructura de CPS y regla de sustitución  $\omega$  con factor de expansión  $\alpha$ . Entonces*

$$\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Usando la sucesión exacta de homotopía (proposición 3.3.3) y el hecho de que las fibras son discretas y por lo tanto su grupo fundamental es trivial tenemos que

$$0 \longrightarrow \pi_1(\Omega) \longrightarrow \pi_1(T_\alpha) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto  $\pi_1(\Omega) \cong \pi_1(T_\alpha) = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  (ver ejemplo 3.1.2 o [IZ85] para más detalles). □

Otra de las implicaciones de este resultado es una condición necesaria y suficiente para que dos espacios de teselaciones  $\Omega$  y  $\Omega'$  sean conjugados. Ésta se deduce de la proposición 4.1.3 junto con la clasificación de toros irracionales obtenida por P. Iglesias [IZ85], la cual asegura que dos toros irracionales  $T_\alpha$  y  $T_\beta$  son difeomorfos si y sólo si  $\alpha$  y  $\beta$  son conjugados bajo el grupo modular, es decir si

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

con  $a, b, c, d$  enteros tales que  $ad - cb = 1$ .

**Corolario 4.2.8.** *Dos espacios de teselaciones  $\Omega$  y  $\Omega'$  con factores de expansión  $\alpha$  y  $\beta$  son topológicamente conjugados si y sólo si  $\alpha$  y  $\beta$  son conjugados bajo el grupo modular.*

### 4.3. Orbifolds *vs* laminaciones

Parte de la investigación para esta tesis radicó en la búsqueda de un marco conceptual que englobe el estudio de espacios de teselaciones periódicas y aperiódicas, donde las primeras aparezcan como un caso *muy* particular de las segundas.

De acuerdo con la definición de Moerdijk [Moe02], los orbifolds son un caso particular de las foliaciones cuando se piensan como grupoides. Él define un grupoide de foliación como un grupoide cuyos grupos de isotropía

$$G_z = \{\varphi \in G_1 : d(\varphi) = r(\varphi) = z\}$$

son discretos y un grupoide orbifold como un grupoide de foliación cuya función característica

$$\chi : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0 \quad \text{dada por} \quad \chi(\varphi) = (d(\varphi), r(\varphi))$$

es una función propia. La primera de estas propiedades la podemos checar en el caso difeológico.

**Proposición 4.3.1.** *El grupoide  $(G_1, G_0)$  definido en 4.2.1 es un grupoide de foliación.*

*Demostración.* Debemos probar que los grupos de isotropía

$$G_z = \{\varphi \in G_1 : d(\varphi) = r(\varphi) = z\} = \mathbf{Diff}(\Omega_z, \Omega_z)$$

del grupoide  $(G_1, G_0)$  son discretos.

Notamos que  $\mathbf{Diff}(\Omega_z, \Omega_z) = \mathbf{Aut}(\Omega_z)$ , pues toda función con dominio discreto es suave. Sea  $P : U \rightarrow \mathbf{Aut}(\Omega_z)$  un plot de la difeología funcional<sup>2</sup> en  $\mathbf{Aut}(\Omega_z)$ . Entonces la función

$$\Phi : U \times \Omega_z \rightarrow \Omega_z \quad \text{dada por} \quad \Phi(u, T) = P(u)(T)$$

es suave (ver apartado 1.57 en [IZ13]). Esto quiere decir que, para cada plot  $Q : V \rightarrow \Omega_z$ , la parametrización

$$P \cdot Q : U \times V \rightarrow \Omega_z \quad \text{dada por} \quad P \cdot Q(u, v) = P(u)(Q(v))$$

es un plot de  $\Omega_z$ . Pero  $\Omega_z$  es discreto y eso implica que  $P \cdot Q$  y  $Q$  son localmente constantes, es decir que existen  $T, T' \in \Omega_z$  tales que  $P \cdot Q(u, v) = P(u)(T) = T'$  para todo  $(u, v)$  en una vecindad suficientemente pequeña en la que  $P \cdot Q$  es constante. Entonces  $P$  es localmente constante en alguna vecindad de  $u$ . Por lo tanto  $\mathbf{Aut}(\Omega_z)$  es discreto. □

---

<sup>2</sup>Ver párrafo anterior al ejemplo 3.1.2.

## 4.4. Epílogo

Este trabajo no termina nunca. Pero se debe ir en contra de esta naturaleza y poner un punto final. La pregunta que más me intrigaba cuando platicaba con colegas acerca de realizar un doctorado sin dirección era ¿cómo vas a saber cuando ya acabaste? Ese momento llegó cuando demostré mis hipótesis: que los espacios de teselaciones estaban de alguna manera relacionados con el toro irracional, que éste se obtiene de manera muy similar a los orbifolds asociados a teselaciones aperiódicas y que esto se puede ver a través de los grupoides asociados.

Nuevamente: este trabajo nació como la búsqueda de un objeto geométrico asociado a teselaciones aperiódicas que contenga toda la información necesaria para reconstruir las teselaciones que representa. Dicho objeto es un orbifold en el caso periódico. Pero eso, ¿por qué es interesante? Porque el orbifold no sólo clasifica el tipo de simetría de la teselación, sino además asegura la posibilidad de construir una teselación con tal simetría y una única prototesela. Es por esta razón que un autor idealista cree que está caminando hacia una resolución del problema de la monotesela aperiódica (ver sección 5.1).

Más que una conclusión, el final de este trabajo es un comienzo. Es la llegada a un terreno vacío e inexplorado que ofrece gran diversidad de posibles caminos a seguir. Por ejemplo:

- Determinar la clase de teselaciones que validan este resultado.
- Extender el resultado a dimensiones superiores. Los toros irracionales de más dimensiones los estudiaron Iglesias y Lachaud en [IL90].
- ¿Qué se puede clasificar a partir de este resultado?
- ¿Qué más nos puede decir la difeología sobre estos espacios?

Idealmente, varias o todas estas preguntas deberían de haber sido abordadas en esta tesis. Sin embargo, hay demasiados aspectos que no pueden ser esclarecidos por el autor para plantear bien estas preguntas y abordarlas. Y esto requeriría la asesoría y colaboración de expertos en temas de espacios de teselaciones y orden aperiódico, y, aún más idealmente, bajo observación de algún experto en difeología.

Este trabajo no será el resultado más celebrado en ningún lugar, pero ya es la traída a México de una rama de las matemáticas fascinante, multidisciplinaria, en rápido desarrollo y con una cantidad impresionante de aplicaciones.

## Capítulo 5

# Problemas abiertos

El orden aperiódico se ha consolidado en los últimos años como un campo multidisciplinario de las matemáticas en el que participan activamente ramas como la geometría discreta, geometría-topología, los sistemas dinámicos (continuos y discretos), geometría no-conmutativa, álgebra homológica, teoría de números, ciencias de la computación, física del estado sólido, cristalografía, entre otros. En este capítulo se presentan una variedad de problemas abiertos del mundo aperiódico.

### 5.1. El problema de la monotesela

El problema de la monotesela, también famoso como el problema del *einstein* (del alemán *ein* uno, *stein* piedra o pieza), se pregunta si existe una tesela con la que se pueda teselar el plano pero cualquier teselación construida con puras copias de dicha tesela sea aperiódica, es decir, ¿existen conjuntos aperiódicos de una única proto-tesela?

Como hemos mencionado, el primer conjunto aperiódico traído a la luz constaba de más de 20 mil piezas y los más pequeños que se conocen hoy en día constan de dos (ver figura 1.5). Dependiendo lo que entienda uno por monotesela aperiódica, el problema podría considerarse resuelto. En 1997 Penrose publicó un conjunto aperiódico de cuatro piezas conocido como el  $(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)$ , una de ellas de forma hexagonal con cuñas y muescas y las otras tres, que funcionan como vértices y aristas, pueden tomarse arbitrariamente pequeñas y delgadas. Basados en la idea de Penrose, Taylor y Socolar [ST11] construyeron una pieza hexagonal que con coloraciones y reglas de pegado sobre los vecinos de los vecinos se obtienen sólo teselaciones aperiódicas. En un sentido estricto, cada una de las piezas coloreadas es una prototesela



diferente. Esto se explica de manera clara y amena en [BGG12].

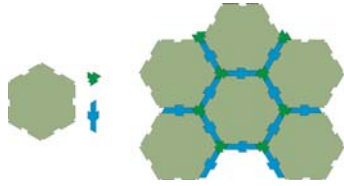


Figura 5.1: Teselas  $1+\epsilon+\epsilon^2$  de Penrose.

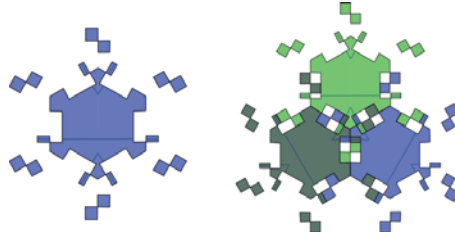


Figura 5.2: Tesela de Taylor-Socolar.

El problema de la monotesela tiene muchísimas caras. Con métodos combinatorios Egon Schulte probó que si la monotesela existiere no podría ser convexa. Su prueba consiste en definir una propiedad más fuerte que la aperiocidad que llama *aperiodicidad combinatoria* que evalúa en el plano hiperbólico e implica el resultado en el caso euclidiano [Sch03, Sch10].

También Goodman-Strauss ha estudiado el problema en el plano hiperbólico e incluso en contextos aún más generales. Él parte por estratificar la aperiocidad: un conjunto de prototeselas  $P$  es *débilmente aperiódico* si admite teselaciones pero ninguna de ellas tiene simetría co-compacta, esto es que el cociente del espacio por el grupo de simetrías de la teselación es compacto; dicho conjunto  $P$  se llama *fuertemente aperiódico* si admite teselaciones pero ninguna de ellas tiene como simetría un grupo cíclico infinito. La aperiocidad fuerte implica a la débil, aunque en el plano euclidiano son equivalentes [GS05, GS10b, GS10a].

**Palabras de aliento** Este trabajo está en buena parte motivado por establecer la analogía entre orbifolds y espacios de teselaciones. En el caso periódico es posible construir monoteselas que admitan teselaciones con cualquier tipo de simetría. Esto gracias al orbifold asociado a cada tipo de simetría, el cual puede desdoblarse en una región fundamental del grupo de simetrías de la teselación, que a su vez se puede replicar para llenar una región fundamental de la retícula de traslaciones, que debe de ser uno de los polígonos de la figura 5.3. Cualquiera de las dos regiones fundamentales mencionadas puede funcionar como monotesela periódica.

¿Quién es ese objeto geométrico que tiene toda la información de la teselación  $T$  en el caso aperiódico? Yo sugiero que es la envolvente  $\Omega_T$ . ¿Y qué con eso? Pues que si se asegura que la envolvente carece de una estructura geométrica suficientemente decente como para poder convertirla

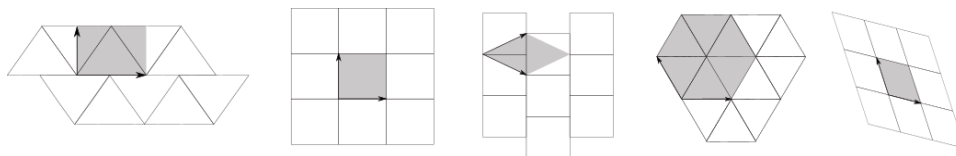


Figura 5.3: Las cinco retículas de  $\mathbb{R}^2$ .

en una monotesela, y se establece la analogía mencionada, quizás se puede demostrar que la monotesela aperiódica no existe.

### 5.1.1. El problema del completado y el problema del dominó

Desde la aparición explícita de la aperiodicidad en los años sesentas, los problemas relacionados con la existencia de conjuntos aperiódicos (definición 1.3.1) han sido tratados como problemas de *computabilidad* o *decidibilidad*. Un problema es decidable si existe un algoritmo que lo resuelva. Es decir, un número finito de instrucciones que puedan verificarse y que produzcan una respuesta al problema en un tiempo finito.

**Pregunta 5.1.1.** ¿Existe un algoritmo que decida, dado un conjunto  $P$  de prototeselas y parche  $C$  con elementos de  $P$ , si  $C$  se puede extender a una teselación? Dicho de otro modo ¿el problema de completado es decidable?

**Pregunta 5.1.2.** ¿Existe un algoritmo que decida, dado un conjunto  $P$  de prototeselas, si  $P$  admite o no una teselación? Dicho de otra manera ¿el problema del dominó es decidable?

La respuesta para ambas preguntas, en el caso más general en el que  $P$  es cualquier conjunto finito de prototeselas, es negativa. Fueron contestadas por Hao Wang en 1961 [Wan61] y Robert Berger [Ber66]. La idea en ambos casos consiste en reducir el problema a una situación que tenga que evaluar cualquier máquina de Turing. Es decir, para cada una de las preguntas, ellos construyeron una situación en la que el problema era equivalente al problema de la parada (*halting problem*) para máquinas de Turing, el cual ya había sido probado indecidible por el propio Alan Turing [Tur36].

Sin embargo, para conjuntos de prototeselas que consistan de una sola pieza, o sea para monoteselas, ambas preguntas continúan abiertas.

**Problema 5.1.3.** Resolver la decidibilidad de los problemas del completado y del dominó para monoteselas poligonales del plano euclidiano.

Desafortunadamente no existe una buena fuente bibliográfica que recopile los diversos aspectos y avances acerca de la computabilidad de problemas relacionados con teselaciones y conjuntos aperiódicos. Algunas posibilidades son [Rob71, KO08, Oli08, GS00, GS10a] y las referencias dentro de estos.

Estos problemas de decisión están directamente relacionados con el problema de la monotesela aperiódica. El teorema de Wang implica que si no existiere esta última entonces la conjetura anterior sería verdadera. Pues, por el teorema de extensión (teorema 1.3.3), si una monotesela no admite teselaciones del plano entonces existe un disco de radio  $R$  que no se puede cubrir con copias de ésta. Si supiéramos que la monotesela aperiódica no existe, el algoritmo de decisión consistiría en enumerar los parches que se pueden formar con la monotesela. El algoritmo termina antes de llegar a parches de radio  $R$  y da como respuesta *no* si halla impedimentos geométricos para la construcción de parches y *sí* si no los hay, en tal caso se puede encontrar un parche con cuyas traslaciones se tesela el plano de manera periódica (ver [GS10a]).

### 5.1.2. El problema de Heesch

La última conjetura, a su vez, se relaciona directamente con el problema de Heesch. El número de Heesch  $H(t)$  de una tesela  $t$  (o conjunto de prototeselas  $P$ ) es el máximo número de capas (coronas) que se pueden formar con copias de  $t$  (o elementos de  $P$ ). Por ejemplo, el número de Heesch de cualquier cuadrado, triángulo o rectángulo es infinito pues con estos se pueden formar teselaciones, mientras que para un círculo es 0 ya que colocando círculos alrededor de un círculo siempre quedarán huecos. El problema de Heesch es un problema clásico trabajado desde los años treinta del siglo pasado.

**Problema 5.1.4** (El problema de Heesch). Dado un número natural  $n$ , ¿existe una tesela que se pueda rodear con copias de sí misma  $n$  veces pero no  $n + 1$  veces? Esto es ¿qué números pueden ser número de Heesch de una tesela?

El número de Heesch mayor (finito) conocido para una sola tesela es 5, la cual fue construida por Casey Mann [Man04].

---

<sup>1</sup>Imágenes tomadas de <http://math.utt Tyler.edu/cm Mann/math/heesch/heesch.htm>

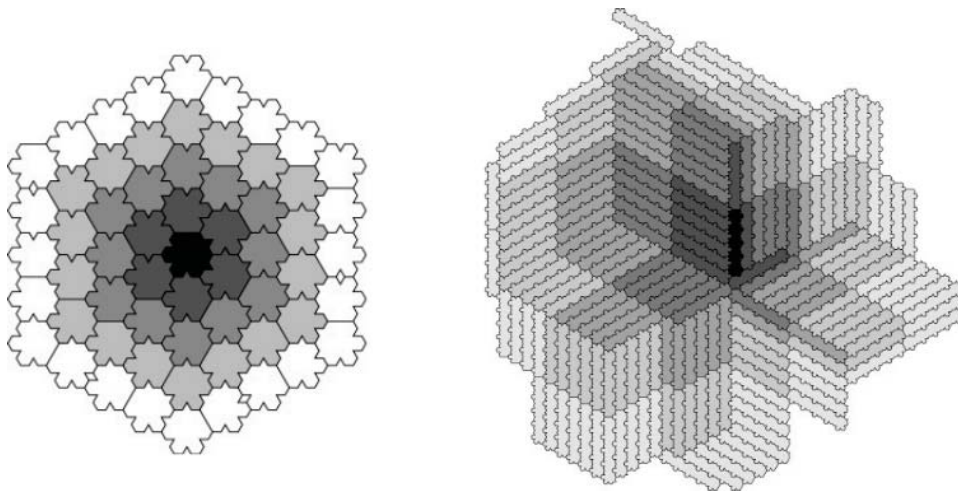


Figura 5.4: Teselas con número de Heesch 4 (izquierda) y 5 (derecha).<sup>1</sup>

La relación del número de Heesch  $H(P)$  con los problemas y conjeturas previamente mencionados la explicamos a continuación. Consideramos conjuntos de prototeselas  $P$  que no admiten teselaciones. Sea  $f : \{P\} \rightarrow \mathbb{N}$  cualquier función. Definimos

$$\bar{H}(n) := \max_{f^{-1}(n)} H(P).$$

Por ejemplo,  $\bar{H}(k)$  podría ser el máximo número de Heesch posible entre conjuntos de  $k$  prototeselas.

**Lema 5.1.1** ([GS10a]). *Si el problema del dominó es indecidible entonces no existen funciones computables que acoten  $\bar{H}(n)$ .*

Este hecho es bastante sorprendente, ya que las funciones computables son, esencialmente, aquellas que se pueden calcular recursivamente y pueden crecer impresionantemente rápido, como  $n^n$  o  $n!!!!$ .

En resumen, el problema del dominó, de la monotesela y de Heesch se relacionan de la siguiente manera:

Existe una monotesela aperiódica  
 $\uparrow$   
 El problema del dominó es indecidible  
 $\downarrow$   
 No existe cota computable para el número de Heesch.

## 5.2. Conjetura de la sustitución de tipo Pisot

Una de las conjeturas más famosas y trabajadas en el mundo del orden aperiódico es la conjetura de la sustitución de tipo Pisot, la cual está motivada por la pregunta ¿qué tipo de teselaciones por sustitución difractan como cuasi-cristales?

Los cuasi-cristales son un ejemplo de conocimiento que a los matemáticos nos encanta resaltar por el hecho de que la teoría nació antes de saber que tendría alguna aplicación en el mundo físico. Estos son esencialmente lo mismo que cristales salvo que presentan simetrías que se pensaban prohibidas: pentagonal, octagonal, decagonal, dodecagonal. Fueron descubiertos por Dan Shechtman a principios de los años ochenta en aleaciones de aluminio y manganeso [SSBC85, LS84].

Los cuasi-cristales se caracterizan como estructuras cuyo patrón de difracción por rayos X consiste de puntos bien marcados (no difusos). Esta condición requiere que los vectores distancia entre los átomos del cuasi-cristal posean *orden de largo alcance* (cf. [Lag99]). Matemáticamente, la difracción se describe como una transformada de Fourier de la función de auto-correlación de una medida de Dirac definida sobre el conjunto de puntos (conjunto de Delone, usualmente) que modela el cuasi-cristal (ver capítulo 3 de [Sen95] para una introducción y capítulos 8 y 9 de [BG13] para un estudio más completo y actualizado).

Un poco más concretamente. Consideremos un sistema dinámico medible e invertible  $(\Omega, \rho, \mu)$ . A este se le asocia un operador  $U$  que actúa en el espacio de Hilbert  $L^2(\Omega, \mu)$  y está definido como

$$U : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mu) \quad \text{dado por} \quad f \mapsto f \circ \rho.$$

Este operador se llama el *operador de Koopman*. Es unitario porque  $\rho$  preserva  $\mu$  y suprayectivo porque  $\rho$  es invertible.

Se definen los *valores propios* del sistema  $(\Omega, \rho, \mu)$  como los valores propios del operador  $U$ , el *espectro* es el conjunto de estos valores propios y

las *funciones propias* son los vectores propios de  $U$ . La propiedad ‘difractar como cuasi-cristales’ ha sido interpretada como ‘tener espectro discreto’. Diremos que el espectro del sistema es *discreto* si el conjunto de funciones propias forman una base para  $L^2(\Omega, \mu)$ . Esta condición se satisface si el sistema tiene como factor una traslación en un grupo abeliano compacto y esta función es inyectiva en  $\mu$ -casi todos lados. Si el único valor propio del sistema es 1 y tiene multiplicidad 1, entonces  $(\Omega, \rho, \mu)$  tiene la propiedad de *mezcla débil* o tiene *espectro continuo* (cf. [Ber15]).

El sistema que nos interesa es  $(\Omega_\sigma, S, \mu)$ , donde  $\Omega_\sigma$  es la envolvente asociada a la regla de sustitución simbólica (unidimensional)  $\sigma$ ,  $S$  es la acción del *shift* y  $\mu$  una medida de probabilidad.

Recordamos que un número real  $\lambda$  es un número de Pisot si  $|\lambda| > 1$  y todos sus conjugados algebraicos tienen norma menor que 1.

**Definición 5.2.1.** Diremos que el sistema  $(\Omega_\sigma, S, \mu)$  es *de tipo Pisot* si el factor de expansión de la sustitución  $\sigma$  es un número de Pisot.

**Conjetura 5.2.1** (Conjetura de la sustitución de tipo Pisot). Una sustitución simbólica  $\sigma$  de tipo Pisot con factor de expansión  $\lambda$  tiene espectro discreto si su matriz de sustitución  $M$  tiene polinomio característico irreducible, es decir, si el grado algebraico de  $\lambda$  coincide con la dimensión de  $M$ .

Esta conjetura se probó verdadera para sustituciones en dos letras, es decir, cuando  $\lambda$  es un irracional cuadrático [HS03]. El caso general es atacado por varios grupos de investigación alrededor del mundo, una amplia búsqueda asistida por computadora no produjo contraejemplos [AGL14] e investigadores como F. Gähler, que han dedicado varios esfuerzos a este problema, sugieren la necesidad de ideas frescas.

Uno de los problemas con esta conjetura es que la irreducibilidad del polinomio característico de  $M$  no es invariante bajo conjugaciones, mientras que el tipo de espectro sí lo es. A raíz de esto han surgido conjeturas como:

**Conjetura 5.2.2.** Una sustitución de tipo Pisot cuya matriz asociada es unimodular tiene espectro discreto si el grado del primer grupo de cohomología racional de Čech coincide con el grado algebraico de  $\lambda$ .

Otra manera de atacar este problema es a través de sistemas dinámicos relacionados con  $(\Omega_\sigma, S, \mu)$ .

**Teorema 5.2.2** (Prop. 4 en [Ber15]). *Si  $\sigma$  es una sustitución de tipo Pisot entonces  $(\Omega_\sigma, S)$  tiene como factor a una traslación en el toro: sea  $\alpha$  el valor propio dominante de la matriz asociada a  $\sigma$ , entonces el espectro de  $(\Omega_\sigma, S, \mu)$  contiene al conjunto  $\exp(2\pi i\mathbb{Z}[\alpha])$ . En particular, el sistema  $(\Omega_\sigma, S, \mu)$  nunca tiene la propiedad de mezcla débil. Además cualquier sistema dinámico irreducible dado por una sustitución de tipo Pisot en  $d$  letras tiene como factor a una traslación minimal en el toro  $\mathbb{T}^{d-1}$ .*

Si se demuestra que dicho factor es de hecho un isomorfismo en casi todas partes se establecería la conjetura.

**Conjetura 5.2.3.** Si  $\sigma$  es una sustitución de tipo Pisot cuya matriz asociada es unimodular entonces el sistema dinámico  $(\Omega_\sigma, S)$  es equivalente como sistema dinámico medible a una traslación en el toro.

Todos los detalles de los hechos mencionados en esta sección se pueden consultar en [Ber15] de manera introductoria y más profundamente en [ABB<sup>+</sup>15].

Si algún lector estuviere interesado en atacar alguno de estos problemas, quizás yo le recomendaría comenzar con el siguiente, presentado por S. Petite en [Pet15].

**Definición 5.2.3.** Sean  $\Lambda$  un conjunto de Delone y  $P$  un parche de  $\Lambda$ . Sea  $\Lambda_P$  el conjunto de ocurrencias de  $P$  en  $\Lambda$ . Se dice que  $\Lambda$  tiene *frecuencias de parche uniformes* si el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\Lambda_P \cap D_N}{\text{vol}(D_N)}$$

existe y la convergencia es uniforme.

**Problema 5.2.4.** Dado un número irracional  $\alpha$ , construir un conjunto de Delone con frecuencias de parches uniformes  $f_P$  tales que, para cualquier  $P$ ,  $f_P$  sea un elemento de  $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ .

## 5.3. Topología de espacios de teselaciones

### 5.3.1. Teselaciones contra espacios de teselaciones

La topología de espacios de teselaciones ha sido ampliamente estudiada por Lorenzo Sadun, autor de una de las mejores fuentes bibliográficas al

respecto [Sad08]. Él trata de impulsar un programa de investigación que relacione más directamente el estudio de teselaciones con el de los espacios de teselaciones:

El estudio de teselaciones se puede separar en dos maneras complementarias. Por un lado se estudian propiedades principalmente combinatorias de los patrones de una teselación: ¿qué tan parecido a una retícula es? ¿cuál es su complejidad? ¿tiene patrón de difracción discreto? Por otro lado el estudio a través de espacios de teselaciones se encarga de determinar (co)homologías, espectros dinámicos, factores máximos equicontínuos. Desde el punto de vista dinámico, teselaciones MLD o conjugadas o incluso homeomorfas son esencialmente iguales. Sin embargo no se conoce mucho acerca de las relaciones ni implicaciones de un enfoque a otro.

**Problema 5.3.1.** Obtener y entender propiedades geométricas de teselaciones invariantes bajo MLD, conjugación topológica, homeomorfismo.

Este problema (o programa) lo propuso el propio Lorenzo Sadun en la sección de problemas abiertos del *Arbeitsgemeinschaft: Mathematical Quasicrystals* en Oberwolfach. Varios de los problemas aquí presentados fueron expuestos en dicha sesión, cuyo recuento completo puede encontrarse en [Adi16].

Con un fin similar a la propuesta de Sadun pero un poco más concretamente, Alex Clark propone en [Cla11] una buena cantidad de problemas acerca de la topología de espacios de teselaciones. En lo que resta de esta sección se presenta una selección de estos.

**Definición 5.3.1.** Una teselación  $T$  es *autosimilar* si existe una regla de sustitución  $\omega$  que la deja invariante, es decir si  $\omega(T) = T$ .

**Definición 5.3.2.** Dos acciones de  $\mathbb{R}^d$  sobre espacios  $X$  y  $Y$  se llaman *linealmente equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  y una función lineal  $L$  de  $\mathbb{R}^d$  tal que  $h(u \cdot x) = L(u) \cdot h(x)$ .

**Pregunta 5.3.2.** Si  $T$  y  $T'$  son teselaciones autosimilares con espacios de teselaciones  $\Omega_T$  y  $\Omega_{T'}$  homeomorfos, ¿son  $\Omega_T$  y  $\Omega_{T'}$  linealmente equivalentes?



Tomando en cuenta que los espacios de teselaciones son límites inversos de superficies ramificadas, surgen preguntas acerca de la *forma* de estos espacios. La teoría de la forma es una rama de la topología que lidia con la ‘encajabilidad’ en (hiper)cubos de los aproximantes de un espacio métrico compacto. Esta teoría refina la homotopía en el sentido de que provee un invariante más preciso para espacios con comportamientos locales complicados. Estudios sobre espacios de teselaciones y teoría de la forma pueden encontrarse en [CH12, CHL14].

**Pregunta 5.3.3.** ¿El espacio de teselaciones de Penrose tiene la forma de un poliedro<sup>2</sup>?

En caso de que esta pregunta resulte cierta surgiría naturalmente el siguiente:

**Problema 5.3.4.** Determinar la clase de espacios de teselaciones que tienen forma de poliedros.

Hemos visto también que los espacios de teselaciones son haces fibrados sobre toros con fibras homeomorfas al conjunto de Cantor [Wil01, SW03]. En el primero de estos artículos Williams conjeturó que, para el espacio de teselaciones de Penrose  $\mathbf{P}$ , dicho haz puede presentarse de 5 maneras distintas, salvo homotopía. Aunque dicha conjetura resultó ser falsa, pues existe una infinidad de presentaciones homotópicamente distintas (una por cada par de elementos del espectro, el cual coincide con  $\mathbb{Z}^4$  [RJ96]), puede replantearse en términos relacionados con la conjetura de la sustitución de tipo Pisot y el teorema 5.2.2, con un enfoque homotópico.

**Pregunta 5.3.5.** ¿Existe una homotopía entre cualquier haz fibrado  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{T}^2$  y una función que factoriza la acción por traslación sobre  $\mathbf{P}$  en la acción de Kronecker<sup>3</sup> de  $\mathbb{T}^2$ ?

Un poco más general:

**Pregunta 5.3.6.** Si  $\Omega_T$  tiene espectro discreto y  $p : \Omega_T \rightarrow \mathbb{T}^d$  es un haz fibrado con fibra totalmente disconexa, ¿ $p$  es homotópico a una función que factoriza la acción sobre  $\Omega_T$  a la acción de Kronecker de  $\mathbb{T}^d$ ?

---

<sup>2</sup>Un poliedro para la teoría de la forma es del tipo de homotopía de un complejo celular finito.

<sup>3</sup>La acción de Kronecker sobre  $\mathbb{T}^d$  es la proyección canónica de la acción por traslación en  $\mathbb{R}^d$ .

Dicha relación con la conjetura de la sustitución de tipo Pisot la hicieron explícita M. Barge y B. Diamond en [BD01] para el caso unidimensional. Ahí mismo plantearon la siguiente pregunta.

**Definición 5.3.3.** Las órbitas de dos teselaciones  $T$  y  $T'$  de  $\mathbb{R}^d$  son *proximales* si existe una sucesión  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $|x_n| \rightarrow \infty$  y  $d(T+x_n, T'+x_n) \rightarrow 0$ .

**Pregunta 5.3.7.** Si  $f : \Omega_T \rightarrow \Omega_{T'}$  es un homeomorfismo entre espacios de teselaciones unidimensionales, ¿ $f$  preserva la proximalidad de las órbitas?

La selección de problemas abiertos presentada en este capítulo está lejos de ser una lista exhaustiva. Aquí se encuentran únicamente algunos problemas relacionados con los temas tratados en esta tesis. Una lista más completa abarcaría, además de problemas de interés combinatorio, computacional y topológico, varios problemas de carácter métrico como ¿qué tan cercano es un conjunto de puntos a una retícula? (secciones 2.6 y 2.8 de [Adi16]), dinámico como propiedades de mezcla en espacios de teselaciones (preguntas 1009 a 1013 en [Cla11]) o físico como la mecánica cuántica de los cuasi-cristales (sección 2.1 en [Adi16]).



## Apéndice A

# La restricción cristalográfica y el encaje minimal

En este apéndice se presentan dos teoremas fundamentales sobre las simetrías de teselaciones. El primero de ellos manifiesta la restricción de los órdenes de las simetrías de teselaciones cristalográficas planas, mientras el segundo hace lo propio para teselaciones construidas por CPS.

### A.1. La restricción cristalográfica

**Definición A.1.1.** Una *retícula*  $\mathcal{L}$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$  generado por combinaciones lineales enteras de elementos de una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^n n_i v_i : n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En otras palabras  $\mathcal{L}$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente generado. Dicha estructura algebraica (grupos abelianos cíclicos infinitos) es la misma para todas las retículas de la misma dimensión pero su estructura geométrica puede ser diferente (ver figura 5.3).

**Lema A.1.2** (Lema 3.2 p. 49 [BG13]). *Si  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  es una retícula y  $R \in O(n)$  una matriz ortogonal tal que  $R\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ , entonces  $R\mathcal{L} = \mathcal{L}$  y el polinomio característico  $p(\lambda) = \det(R - \lambda I)$  tiene coeficientes enteros, es decir  $p(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ .*

*Demostración.* Para cualquier subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se define  $A_r := A \cup \overline{B_r(0)}$ . Como  $R$  es una isometría lineal y  $R\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$  se tiene que  $(R\mathcal{L})_r \subset \mathcal{L}_r$  para toda  $r > 0$ , pero estos dos últimos conjuntos son finitos y tienen la misma cardinalidad, por tanto  $(R\mathcal{L})_r = \mathcal{L}_r$  para toda  $r > 0$ , lo que implica que  $R\mathcal{L} = \mathcal{L}$ .

Considérese ahora  $\{b_1, \dots, b_n\}$  una base para  $\mathcal{L}$ , entonces  $\mathcal{L} = b_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus b_n\mathbb{Z}$ . Como  $R\mathcal{L} = \mathcal{L}$  entonces  $R(b_i) \in \mathcal{L}$  para cualquier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , es decir  $R(b_i) =$

$\sum_j b_j \alpha_{ij}$  con  $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Definimos  $B$  como la matriz formada por los vectores  $b_i$  de la base como columnas y  $A = [\alpha_{ij}]$  la matriz de cambio de la base  $\{b_i\}_{i=1}^n$  a la base  $\{R(b_i)\}_{i=1}^n$ . Se tiene que  $RB = BA$ , las entradas de  $A$  son enteras y  $B$  invertible, de manera que  $R = BAB^{-1}$ , que a su vez implica que  $A$  y  $R$  tienen el mismo polinomio característico y este, al ser  $A$  entera, debe tener coeficientes enteros.  $\square$

**Corolario A.1.3** (La restricción cristalográfica). *Una retícula plana  $\mathcal{L}$  puede tener simetría rotacional de orden  $n$  únicamente para  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .*

*Demostración.* Consideramos la matriz de rotación por un ángulo  $\theta$

$$\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es  $P(\lambda) = \det(\rho_\theta - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(\rho_\theta) + \det(\rho_\theta) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1$ . Por el lema previo  $\cos(\theta) \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$  lo que implica que  $\theta \in \{\pi, \frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, 2\pi\}$  de lo que se sigue el resultado.  $\square$

## A.2. Encaje minimal

Las teselaciones aperiódicas planas exhiben vestigios de simetrías provenientes de las simetrías en dimensiones superiores desde las que son proyectadas y, por tanto, están condicionadas. Esta restricción se llama *teorema del encaje minimal* que se revisa a continuación.

**Definición A.2.1.** Se define la función  $\phi$  de Euler como aquella que asigna a cada número natural  $n$  el número de primos relativos con  $n$  menores que éste.

Nótese que  $\phi(2) = 1$ ,  $\phi(3) = \phi(4) = \phi(6) = 2$  y  $\phi(5) = \phi(8) = \phi(10) = \phi(12) = 4$ , y que si  $p$  es primo entonces  $\phi(p) = p - 1$ .

**Lema A.2.2.** *Sea  $\mathcal{L}$  una retícula cuyo grupo de simetrías contiene un elemento de orden  $p^k$ , con  $p$  un número primo y  $k \geq 1$ . Entonces la dimensión minimal de  $\mathcal{L}$  es  $d = \phi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p - 1)$ .*

*Demostración.* Sea  $R$  una isometría lineal de orden  $p^k$  tal que  $R\mathcal{L} = \mathcal{L}$ . Por la restricción cristalográfica (lema A.1.2) el polinomio característico de  $R$ ,  $P(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ . Además, si  $Rv = \lambda_0 v$  entonces  $v = R^{p^k} v = \lambda_0^{p^k} v$  y como  $p^k$  es el orden de  $R$  ningún entero menor que este satisface esta ecuación, por lo que  $\lambda_0$  es una raíz  $p^k$ -ésima primitiva de la unidad. Esto quiere decir que el polinomio ciclotómico<sup>1</sup>  $Q_{p^k}(\lambda)$  divide a  $P(\lambda)$ , pues comparten una raíz,  $Q_{p^k}(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$  y  $Q_{p^k}(\lambda)$  es irreducible sobre  $\mathbb{Q}$ . Por lo tanto la dimensión de  $\mathcal{L}$  debe ser al menos  $d := \text{grado}(Q_{p^k}) = \phi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p - 1)$ .  $\square$

<sup>1</sup>El polinomio ciclotómico de grado  $n$  se define como el único polinomio irreducible con coeficientes enteros que divide a  $x^n - 1$  pero no a  $x^k - 1$  para  $k < n$ . Para definiciones y propiedades básicas de estos polinomios consultar Sección 2.5 de [BG13].

El caso general, cuando el orden es cualquier entero positivo  $n$  se sigue fácilmente del lema anterior una vez que se introduce la versión aditiva  $\phi_a$  de la función de Euler. Ésta se define como

$$\phi_a(n) = \begin{cases} \phi(n) & \text{si } n = p^k, \\ \phi_a(m) & \text{si } n = 2m \text{ y } m \text{ es impar,} \\ \phi_a(m_1) + \phi_a(m_2) & \text{si } n = m_1 m_2 \text{ y } m_i \neq 2. \end{cases}$$

Si  $n = p^k$  es el caso del lema anterior; si  $R$  es de orden impar  $m$  entonces  $-R$  es de orden  $2m$  con lo que  $d = \phi_a(m)$ . En otro caso el resultado se sigue al notar que el polinomio característico se obtiene de multiplicar polinomios ciclotómicos cuyos grados se suman.

**Teorema A.2.3.** *Dado un conjunto de puntos en el plano con simetría de orden  $n$  construido por una proyección (parcial) que preserva simetrías de una retícula en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces  $d \geq \phi(n)$  y la cota inferior es realizable.*

*Demostración.* Si  $R$  es una simetría de orden  $n$  de un conjunto de puntos en el plano y  $P(x)$  es su polinomio característico, entonces el polinomio ciclotómico  $Q_n(x)$  divide a  $P(x)$  pues este último, por el mismo argumento del lema anterior, debe tener una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad. Como  $\text{grado}(Q_n(x)) = \phi(n)$  se tiene la primera afirmación.

Para obtener una retícula de dimensión minimal para una simetría plana de orden  $n$ , consideramos el anillo  $\mathbb{Z}[\xi_n]$ , con  $\xi_n$  una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad. La retícula aparece como la transformación lineal inducida por la multiplicación  $x \mapsto \xi_n x$  en  $\mathbb{Z}[\xi_n]$ .

□



# Bibliografía

- [ABB<sup>+</sup>15] Shigeki Akiyama, Marcy Barge, Valérie Berthé, J-Y Lee, and Anne Siegel, *On the pisot substitution conjecture*, Mathematics of Aperiodic Order, Springer, 2015, pp. 33–72.
- [ABI02] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, and Shunji Ito, *Discrete planes,  $\mathbb{Z}^2$ -actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions*, Annales de l’institut Fourier, vol. 52, 2002, pp. 305–349.
- [Adi16] Faustin Adiceam, *Open problems and conjectures related to the theory of mathematical quasicrystals*, arXiv preprint arXiv:1604.06280 (2016).
- [AGL14] Shigeki Akiyama, Franz Gähler, and Jeong-Yup Lee, *Determining pure discrete spectrum for some self-affine tilings*, arXiv preprint arXiv:1403.0362 (2014).
- [AP98] Jared E. Anderson and Ian F. Putnam, *Topological invariants for substitution tilings and their associated  $C^*$ -algebras*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **18** (1998), no. 03, 509–537.
- [BBG06] Jean Bellissard, Riccardo Benedetti, and Jean-Marc Gambaudo, *Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling*, Communications in Mathematical Physics **261** (2006), no. 1, 1–41.
- [BD01] Marcy Barge and Beverly Diamond, *A complete invariant for the topology of one-dimensional substitution tiling spaces*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **21** (2001), no. 05, 1333–1358.
- [BDHS10] Marcy Barge, Beverly Diamond, John Hunton, and Lorenzo Sadun, *Cohomology of substitution tiling spaces*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **30** (2010), no. 06, 1607–1627.



- [Bee82] FPM Beenker, *Algebraic theory of non-periodic tilings of the plane by two simple building blocks: a square and a rhombus*, Ph.D. thesis, 1982.
- [Ber66] Robert Berger, *The undecidability of the domino problem*, no. 66, American Mathematical Soc., 1966.
- [Ber15] Valerie Berthé, *Pisot type substitutions*, CIMPA research school CantorSalta: Dynamics on Cantor sets (2015).
- [BG13] Michael Baake and Uwe Grimm, *Aperiodic order*, vol. 1, Cambridge University Press, 2013.
- [BGG12] Michael Baake, Franz Gähler, and Uwe Grimm, *Hexagonal inflation tilings and planar monotiles*, *Symmetry* **4** (2012), no. 4, 581–602.
- [Bru81] N.G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose’s non-periodic tilings of the plane. I, II: dedicated to G. Pólya*, *Indagationes mathematicae Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A* **43** (1981), no. 1, 39–66.
- [BV00] Valérie Berthé and Laurent Vuillon, *Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of sturmian sequences*, *Discrete Mathematics* **223** (2000), no. 1, 27–53.
- [CBGS08] John H Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss, *The symmetries of things*, vol. 10, 2008.
- [CH12] Alex Clark and John Hunton, *Tiling spaces, codimension one attractors and shape*, *New York J. Math* **18** (2012), 765–796.
- [CHL14] Alex Clark, Steven Hurder, and Olga Lukina, *Shape of matchbox manifolds*, *Indagationes Mathematicae* **25** (2014), no. 4, 669–712.
- [Cla11] Alex Clark, *The dynamics of tiling spaces*, *Open Problems in Topology II* (2011), 461.
- [Con94] Alain Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
- [CS03] Alex Clark and Lorenzo Sadun, *When size matters: subshifts and their related tiling spaces*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **23** (2003), no. 04, 1043–1057.

- [CS06] ———, *When shape matters: deformations of tiling spaces*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **26** (2006), no. 01, 69–86.
- [FB02] N Pytheas Fogg and Valérie Berthé, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, vol. 1794, Springer Science & Business Media, 2002.
- [Fed71] Evgraf Stepanovich Fedorov, *Symmetry of crystals*, no. 7, American Crystallographic Association, 1971.
- [Gäh02] Franz Gähler, *Cohomology of quasiperiodic tilings*, Aperiodic Order, Dynamical Systems, Operator Algebras and Topology, University of Victoria **15** (2002), 5410–5414.
- [GB03] Jean-Marc Gambaudo and Riccardo Benedetti, *On the dynamics of  $\mathbb{G}$ -solenoids. applications to Delone sets.*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2003), no. 23, 673–691.
- [Ghy99] Etienne Ghys, *Laminations by Riemann surfaces*, Dynamique et géométrie complexes, Panoramas & Synthèses (1999), no. 8, 49–95.
- [GS86] Branko Grünbaum and Geoffrey Colin Shephard, *Tilings and patterns*, WH Freeman & Co., 1986.
- [GS00] Chaim Goodman-Strauss, *Open questions in tiling*, Preprint (January 2000) (2000).
- [GS05] ———, *A strongly aperiodic set of tiles in the hyperbolic plane*, Inventiones mathematicae **159** (2005), no. 1, 119–132.
- [GS10a] ———, *Can't decide? undecide!*, Notices of the AMS **57** (2010), no. 3.
- [GS10b] ———, *A hierarchical strongly aperiodic set of tiles in the hyperbolic plane*, Theoretical Computer Science **411** (2010), no. 7, 1085–1093.
- [Har04] Edmund O Harriss, *On canonical substitution tilings*, Ph.D. thesis, University of London, 2004.
- [HL04] Edmund O Harriss and Jeroen SW Lamb, *Canonical substitutions tilings of Ammann–Beenker type*, Theoretical computer science **319** (2004), no. 1, 241–279.

- [HL06] ———, *One-dimensional substitution tilings with an interval projection structure*, arXiv preprint math/0601187 (2006).
- [HS03] Michael Hollander and Boris Solomyak, *Two-symbol pisot substitutions have pure discrete spectrum*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003), no. 02, 533–540.
- [IL90] Patrick Iglesias and Gilles Lachaud, *Espaces différentiables singuliers et corps de nombres algébriques*, Annales de l’institut Fourier, vol. 40, 1990, pp. 723–737.
- [IZ85] Patrick Iglesias-Zemmour, *Fibrations difféologiques et homotopie*, Ph.D. thesis, 1985.
- [IZ13] ———, *Diffeology*, vol. 185, American Mathematical Soc., 2013.
- [Ken92] Richard Kenyon, *Rigidity of planar tilings*, Inventiones mathematicae **107** (1992), no. 1, 637–651.
- [KO08] Jarkko Kari and Nicolas Ollinger, *Periodicity and immortality in reversible computing*, International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, Springer, 2008, pp. 419–430.
- [Lag99] Jeffrey C Lagarias, *Geometric models for quasicrystals i. delone sets of finite type*, Discrete & Computational Geometry **21** (1999), no. 2, 161–191.
- [LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, 1995.
- [LS84] Dov Levine and Paul Joseph Steinhardt, *Quasicrystals: a new class of ordered structures*, Physical review letters **53** (1984), no. 26, 2477.
- [Man04] Casey Mann, *Heesch’s tiling problem*, American Mathematical Monthly (2004), 509–517.
- [Moe02] Ieke Moerdijk, *Orbifolds as groupoids: an introduction*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001) (2002), 205–222.
- [MPP98] Zuzana Masáková, Jirí Patera, and Edita Pelantová, *Inflation centres of the cut and project quasicrystals*, Journal of Physics A: Mathematical and General **31** (1998), no. 5, 1443.

- [MPP00] ———, *Substitution rules for aperiodic sequences of the cut and project type*, Journal of Physics A: Mathematical and General **33** (2000), no. 48, 8867.
- [Oll08] Nicolas Ollinger, *Two-by-two substitution systems and the undecidability of the domino problem*, Conference on Computability in Europe, Springer, 2008, pp. 476–485.
- [OOP10] Herve Oyono-Oyono and Samuel Petite,  *$C^*$ -algebras of Penrose hyperbolic tilings*, arXiv preprint [arXiv:0905.1932v2](https://arxiv.org/abs/0905.1932v2) (2010).
- [Pen74] Roger Penrose, *The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research*, The Institute of Mathematics and its Applications Bulletin **10** (1974), no. 7/8, 266–271.
- [Pen79] ———, *Pentaplexity a class of non-periodic tilings of the plane*, The mathematical intelligencer **2** (1979), no. 1, 32–37.
- [Pet15] Samuel Petite, *Linearly repetitive tilings*, CIMPA research school CantorSalta: Dynamics on Cantor sets (2015).
- [PLS12] Jennifer E Padilla, Wenyan Liu, and Nadrian C Seeman, *Hierarchical self assembly of patterns from the Robinson tilings: DNA tile design in an enhanced tile assembly model*, Natural Computing **11** (2012), no. 2, 323–338.
- [Rad94] Charles Radin, *The pinwheel tilings of the plane*, 1994.
- [Rie81] Marc A. Rieffel,  *$C^*$ -algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math **93** (1981), no. 2, 415–429.
- [RJ96] E. Robinson Jr, *The dynamical properties of Penrose tilings*, Transactions of the American Mathematical Society **348** (1996), no. 11, 4447–4464.
- [Rob71] R. M. Robinson, *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane.*, Inventiones Mathematicae **12** (1971), 177.
- [Sad03] Lorenzo Sadun, *Tiling spaces are inverse limits*, Journal of Mathematical Physics **44** (2003), no. 11, 5410–5414.
- [Sad06] ———, *Tilings, tiling spaces and topology*, Philosophical Magazine **86** (2006), no. 6-8, 875–881.

- [Sad08] ———, *Topology of tiling spaces*, vol. 46, American Mathematical Society, 2008.
- [Sch03] Egon Schulte, *Combinatorial aperiodicity of polyhedral prototiles*, Pure and applied mathematics-Marcel Dekker Incorporated. **253** (2003), 397–406.
- [Sch10] ———, *Combinatorial space tiling*, arXiv preprint arXiv:1005.3836 (2010).
- [Sen95] Marjorie Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.
- [Sen08] ———, *Mapping the aperiodic landscape, 1982–2007*, Philosophical Magazine **88** (2008), no. 13-15, 2003–2016.
- [Sma67] Stephen Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bulletin of the American mathematical Society **73** (1967), no. 6, 747–817.
- [SSBC85] LJ Swartzendruber, D Shechtman, L Bendersky, and JW Cahn, *Nuclear  $\gamma$ -ray resonance observations in an aluminum-based icosahedral quasicrystal*, Physical Review B **32** (1985), no. 2, 1383.
- [ST11] Joshua ES Socolar and Joan M Taylor, *An aperiodic hexagonal tile*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **118** (2011), no. 8, 2207–2231.
- [SW03] Lorenzo Sadun and R.F. Williams, *Tiling spaces are Cantor set fiber bundles*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003), no. 1, 307–316.
- [Tur36] Alan Mathison Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, J. of Math **58** (1936), no. 345-363, 5.
- [Wan61] Hao Wang, *Proving theorems by pattern recognition—ii*, Bell system technical journal **40** (1961), no. 1, 1–41.
- [Wil70] Robert F Williams, *Classification of one dimensional attractors*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), 1970, pp. 341–361.
- [Wil74] ———, *Expanding attractors*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **43** (1974), 169–203.

- [Wil01] Robert F. Williams, *The Penrose, Ammann and DA tiling spaces are Cantor set fiber bundles*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **21** (2001), no. 06, 1883–1901.