UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

Campo de conocimiento: Historia de la Ciencia

EL DEBATE DE LA CUERDA VIBRANTE Y EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL SIGLO XVIII

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

Julio Martín Arriaga Romero

Tutora: Dra. Carmen Martínez Adame Isais

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

Ciudad de México Febrero de 2017

Dedico este trabajo a:

La UNAM, por todo lo que me ha dado.

Alberto Mercado y Chiquita

Sus partidas de esta vida me dejaron grandes enseñanzas.

Mis amigos perrunos y gatunos:

Chiquita, Pulguitas (Pipas), Max, Luna, Brochita

y el vecino gatuno del 4.

Por su sencillez y tenacidad ante la vida

Mis padres, Isabel y Martín,

por su presencia constante

igual que el suelo que me sostiene.

Mis hermanas Alejandra y Fabiola

por su paciencia y atención.

LZD y JMAR

con sus casualidades y causalidades.

Leticia Zendejas Domínguez

Mi amada gitana de Luna llena. Por todo tu apoyo y paciencia.

Julio Martín Arriaga Romero

Por mantener la esperanza y perseverar en la vida

Prefacio.

El problema de la cuerda vibrante resulta un caso interesante para el estudio de la historia del concepto de función matemática. Por un lado, el problema en sí mismo tiene su origen en el ámbito de la musicología y no se trataba de un problema tradicional o de especial interés en el ámbito de las matemáticas; a diferencia de otros problemas célebres en las matemáticas, como el problema de los isoperimétricos por ejemplo, no hubo un concurso para que los estudiosos del tema expusieran sus soluciones y se determinara cual podría ser la mejor de estas. Por otro lado, la solución al problema de la cuerda vibrante desde finales del s. XVII se trató con un enfoque aritmético y geométrico sin causar mayor controversia; pero al ser tratado con los métodos del cálculo diferencial y plantear el problema como sistema de ecuaciones diferenciales, de inmediato surgió una controversia sobre la solución de este problema; en particular sobre lo que debía entenderse por función y en especial en lo que habría de ser una función continua, ya que si al inicio de la vibración de la cuerda esta tenía forma de una línea quebrada la expresión matemática que describe las velocidades de cada punto no sería la misma en el punto de quiebre y a los lados próximos inmediatos a dicho punto. Lo cual puso en debate el principio de continuidad y los conceptos de infinito e infinitamente pequeño.

En la solución del problema de la cuerda vibrante los conceptos mencionados en el párrafo anterior tuvieron un papel crucial en el desarrollo del concepto de función y en el surgimiento del análisis como se conoce hoy día. Bajo este panorama no resulta extraño que dicho debate durara un poco más de dos décadas y sobre todo que no se tratara de un mal entendido, como suele aparecer en algunos textos de historia de las matemáticas. Siendo uno de los propósitos de este trabajo el mostrar, más allá de los enfoques tradicionales de hacer historia de la ciencia (internalismos o externalismos, rupturismos o continuismos), que el estudio histórico del problema de la cuerda vibrante muestra como confluyen conceptos y métodos del análisis matemático que cuestionaron lo que habría de considerarse como una función.

Otro de los propósitos de este trabajo es revisar de manera exhaustiva las obras donde se da el debate entre d'Alembert y Euler, quienes son dos de los más importantes matemáticos del siglo XVIII, sobre la cuerda vibrante de manera que el en el estudio de cómo se discutió el concepto de función matemática, se pueda mostrar la importancia que este debate tuvo en el desarrollo del análisis matemático y el concepto de función matemática.

Respecto al proceso que hubo que seguir para redactar esta tesis, encontré formas muy gratas de trabajar. Para hacer historia de cualquier tema es necesaria la consulta de fuentes primarias alojadas en diversos archivos. Desde hace una década más o menos, ha surgido una nueva manera de hacer historia; en la cual es posible consultar archivos en línea con fuentes primarias digitalizadas y en su gran mayoría para consulta pública. Es así que el propósito planteado en este trabajo de revisar exhaustivamente fuentes primarias sobre el debate de la cuerda vibrante, soluciones a ecuaciones diferenciales y trabajos de física del siglo XVIII se vio cumplido gracias a

esta la posibilidad de consultar archivos en línea, que de no ser así me habría implicado gran el sacrificio de hacer una temporada larga visitando archivos de Alemania, Francia y Reino Unido con sus consiguientes periodos de espera de la autorización para entrar a dichos archivos. ;)

Es necesario agradecer a esos grupos de trabajadores y voluntarios que de manera casi anónima digitalizan materiales para consulta pública, especial mención merecen las colecciones de *Gallica* de la Biblioteca Nacional de Francia, *The Euler Archive*, el archivo de la biblioteca de la *Academia de Ciencias de Berlín*, *The Internet Archive* y la biblioteca de la *Royal Society*. Por otro lado, están los esfuerzos de particulares como Ian Bruce quien tradujo del latín al inglés múltiples obras matemáticas del s. XVIII. A las personas que digitalizan y mantienen en línea esas colecciones, mi agradecimiento por hacer posible mucho de lo expresado en este trabajo, además del placer que para mí representa el poder consultar colecciones enteras de documentos sin necesidad de hacer cita y poder consultarlos cuantas veces las necesité.

Pero no todo fue trabajo en línea para esta tesis. También hubo el placer de encuentros personales de manera un tanto fortuita que contribuyeron a afinar mi punto de vista sobre el tema de la cuerda vibrante. Así también agradezco al Dr. Joao Abdounour, al Dr. José Ferreirós, al Dr. Eduardo Mancera y especialmente al Mtro. Elías Fuentes quien contribuyó de manera invaluable a la revisión de todo este texto; corrigiendo las traducciones que hice de mis fuentes primarias con gran conocimiento de del francés y del alemán, y sobre todo, con gran conocimiento de las obras matemáticas de los siglos XVIII y IXI. Además de esta colaboración con Elías fuentes, también me precio de contar con su amistad, resultado de esos encuentros presenciales y en línea.

También agradezco a mi tutora la Dra. Carmen Martínez Adame-Isais por su guía durante estos años que duró la investigación y redacción de este trabajo. También agradezco a mis sinodales: M. en C. José Rafael Martínez Enríquez, Dr. Francisco Hernández Quiroz, Dr. Elías Okón Gurvich y al Mtro. Elías Fuentes Guillén con sus correcciones y observaciones pulieron este trabajo. Igualmente agradezco el apoyo que me brindaron mis Jefes y compañeros de la DGIFA en el proceso de titulación.

Finalmente me queda agradecer a una persona que de manera entusiasta e incondicional estuvo al pendiente de la última etapa de este proceso y me aportó valiosos comentarios sobre la mejor manera de organizar las ideas y sobre la redacción de este trabajo, gracias Dra. Leticia Zendejas Domínguez.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A partir de la segunda mitad del siglo XVII, con el surgimiento del análisis infinitesimal con Newton y Leibniz como principales exponentes, se comienza a gestar el concepto de función matemática, el concepto de diferencial, así como las operaciones con estos elementos. A partir de estos conceptos surgieron ecuaciones que fueron llamadas diferenciales y sobre las cuales se desarrolló toda una teoría para su solución. Encontrar la solución de estas ecuaciones implica encontrar una función que relaciona[1] dos, o más, cantidades variables,[2] donde una de esas cantidades queda determinada en función de las restantes. Las ecuaciones diferenciales frecuentemente están vinculadas con la solución de problemas físicos y su solución representa el comportamiento de una cantidad en función de cantidades que, si bien no se pueden controlar, sí se pueden conocer, por ejemplo el tiempo. Sin embargo, los problemas que surgieron de encontrar o construir una función como solución de una ecuación diferencial se trataron en ámbitos puramente matemáticos, por ejemplo, el problema sobre la generalidad de una solución para una ecuación diferencial; fue así que el concepto de función matemática se convirtió en el objeto de estudio de la disciplina que hoy conocemos como Análisis Matemático. Tal es el tema del presente trabajo y como objeto de estudio particular se toma al problema de la cuerda vibrante y el debate (principalmente entre d'Alembert y Euler) que surge en torno de su solución como punto central.

Uno de los primeros métodos utilizados en la solución de ecuaciones dife-

[1] Que puede ser algebraica (suma, resta o multiplicación por ejemplo), trigonométrica (seno, coseno, etc.) o trascendente (funciones logarítmicas o exponenciales).

[2] A lo largo de este trabajo se verá que la noción de cantidad variable se vera modificada conforme se dicute el concepto de función como solución de una ecuación diferencial.

renciales fue el encontrar un desarrollo en serie de la solución buscada. En el siglo XVII ya se utilizaría este método en casos particulares elementales; en particular lo harían sistemáticamente Newton, Leibniz y Taylor. La aplicación de este procedimiento va a permitir a los científicos del siglo XVIII trabajar con representaciones en forma de series infinitas de potencias de ciertas funciones no polinomiales, algunas que hoy clasificamos como algebraicas, otras que consideramos trascendentes como el $\ln x$, otras más, como las que representamos bajo su forma polar, como es el caso de la espiral de Arquímedes, pero que ellos trataban a partir de su representación geométrica.

Por otro lado, cuando se desea hacer la modelación matemática de un proceso natural, frecuentemente éste se representa como un flujo, siendo el tiempo la variable respecto a la cual se determina dicho flujo. Una de las formas de racionalizar matemáticamente el flujo de las cosas es mediante una función o a través de su imagen geométrica, es decir, de una curva. Por ejemplo, considérese un cuerpo que resbala por un plano inclinado; el cambio de la posición de ese cuerpo conforme transcurre el tiempo se racionaliza como la sucesión de valores asociados con la posición según un marco de referencia dado, y que aumentan según el cuadrado del tiempo transcurrido; geométricamente se representa como el recorrido que va haciendo un punto sobre la curva asociada con la función $y = \frac{1}{2}gt^2$, donde dicho punto recorrerá esta curva de manera uniforme en un sentido determinado. Esta interpretación física del comportamiento de las variables de una función es propia del método de fluxiones desarrollado principalmente por Isaac Newton. También, el intento de entender cuantitativamente las periodicidades que pudieran presentar las funciones o sus curvas condujo a matemáticos del siglo XVIII a la descomposición de una función en sumas de funciones periódicas más simples de los llamados armónicos fundamentales.

En los primeros años del s. XVIII los problemas físicos de vibraciones o de tipo oscilatorio que conducían a funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas, se resolvían frecuentemente en términos geométricos. El análisis armónico, tal como lo entendemos hoy, consiste en una metodología matemática que permite explorar los fenómenos complejos a través de su descomposición en elementos más sencillos. Uno de los primeros en asumir esta metodología fue Daniel Bernoulli en sus estudios sobre la cuerda vibrante. Pero ni él, ni sus contemporáneos ilustrados consiguieron hacer asequibles sus ideas, más físicas, al tratamiento matemático más general. En particular Daniel Bernoulli había llegado a la conclusión de que la superposición de soluciones sinusoidales daba la solución más general del problema, lo que implicaba la posibilidad de expresar una función arbitraria como suma de senos. Sin embargo, se careció de una demostración de que, en efecto una suma de senos fuera la solución más general. Aparentemente ni Johann Bernoulli ni Brook Taylor se preocuparon por demostrar que ésta era la solución más general, y tampoco mostraron que no lo era.

Para lograr nuestro objetivo en esta tesis, incluiremos en la primera parte un recorrido por las nociones de *cantidad variable* y de *variable* para prefigurar y poner en contexto la relación que hay entre la representación de cantidades físicas y las variables en matemáticas. Esto como parte del análisis de funciones que manejarán d'Alembert y Euler al presentar la solución al problema de la cuerda vibrante. Para ello comenzaremos con una breve disquisición sobre el uso de la palabra función.

Rüdiger Thiele, en la introducción de su artículo titulado *What is a function?* nos propone el siguiente ejercicio:

> ¿te imaginas ser invitado a un simposio griego en la Antigüedad y escuchar a Platón o a Arquímedes hablando acerca de las funciones? Por otra parte, ¿crees que Isaac Newton, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, William Rowan Hamilton o Bernhard Riemann entenderían este concepto de función?: Para un subconjunto G del producto cartesiano $X \times Y$, la terna $\Gamma = (G, X, Y)$ se llama una correspondencia de X a Y. Si para cualquier x perteneciente al dominio X de Γ, le corresponde una y sólo una y que pertenece a Y, entonces Γ se llama una correspondencia univalente. (Patrick Suppes, *Teoría de conjuntos axiomática*, 1960) Espero que mi presentación tenga éxito en convencerte de que el concepto de función es histórico, no es una idea eterna, la misma siempre, sino un crecimiento, un desarrollo. (Thiele, p. 63)

¿Cómo nos convencemos de que el concepto de función es histórico? Thiele nos hace reflexionar si bastaría con buscar la génesis del concepto de función para describir el desarrollo histórico de dicho concepto. Sin duda la presentación que hace Thiele del concepto de función nos puede convencer de que este es histórico, pero también sin duda el concepto de función ha estado imbricado con otros aspectos tanto de las matemáticas como de otras ciencias, como es el caso del cálculo diferencial, del análisis matemático y de la mecánica, por ejemplo. Así, al hablarse del desarrollo del concepto de función no se puede hablar de una serie de definiciones cada una de ellas más robusta o explicativa que las anteriores, o por el contrario, hablar de una definición del concepto de función que no tiene nada que ver con las definiciones anteriores y que sirve para resolver los problemas que no podían resolver las anteriores definiciones, además de dar cuenta de los problemas que sí resolvían las antiguas definiciones de función. ¿Entonces, qué ha de entenderse por desarrollo del concepto de función desde la perspectiva de la Historia de la Ciencia, y en este caso particular, de la Historia de las Matemáticas?

M. Spivak (Spivak, pp. 49-61) comenta que la definición anterior de P. Suppes (citada por Thiele) es completa, pero se vuelve abstracta y pierde su carácter intuitivo, es decir, concebir una función como regla que relaciona de manera biunívoca dos variables que forman parte de dos conjuntos y luego representarlas en forma de terna, no refleja de manera intuitiva lo que es una función.[3] Es una definición completa en el sentido de que lo importante es tener información acerca de la terna Γ. Esto tampoco significa que el desarrollo del concepto de función, históricamente hablando, se entienda solamente en el sentido de convertirse en una definición cada vez más abstracta como fin en sí mismo. Esta abstracción del concepto alcanza una rigurosidad en las demostraciones matemáticas; esto se da sobre todo en la segunda mitad del siglo XIX. Como ejemplo de esta búsqueda de rigor en las demostraciones matemáticas y en los conceptos en los que estaban basadas estas demostraciones, reproduzco un párrafo del ensayo titulado *Continuidad y números irracionales* de Richard Dedekind publicado en 1872:

> Por mi parte, este sentimiento de insatisfacción me abrumaba entonces hasta tal punto que tomé la firme decisión de reflexionar el tiempo que hiciera falta hasta que hubiera encontrado una fundamentación puramente aritmética y perfectamente rigurosa de los principios del análisis infinitesimal. Se dice muy frecuentemente que el cálculo diferencial se ocupa de magnitudes continuas, y sin embargo no se proporciona nunca una explicación de esta continuidad, e incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no fundamentan sus demostraciones sobre la continuidad, sino que o

[3]Esto dicho en términos puramente didácticos, sin considerar aspectos históricos. Hablando de aspectos históricos, se puede notar ya la diferencia en la manera de tratar a los conceptos de función y otros relacionados como el concepto de variable. Es dedcir, mientras que en el siglo XVII el tratamiento del concepto de función está asociado a curvas (elementos geométricos) y a problemas físicos (elementos tangibles), en la definición de Suppees los conceptos asociados a la definición de función son abstractos y funcionan de manera meramente sintáctica. (Guillén, 2016. Com. Per)

> bien apelan, más o menos conscientemente, a representaciones geométricas, o a representaciones sugeridas por la geometría, o bien se apoyan en teoremas que, por su parte, nunca son demostrados de manera puramente aritmética.[4] (Dedekind, p. 2)

En este trabajo R. Dedekind declara haber conseguido (en noviembre de 1858) el rigor pretendido en las demostraciones del cálculo infinitesimal a través del concepto de continiudad de los números reales; sin embargo no se atrevía a publicar su idea debido a que la consideraba de díficil exposición y poco fecunda. Su ánimo de publicar sus ideas sobre la continuidad de los reales se despertó cuando el 14 marzo de 1872 llegó a sus manos el trabajo *Los elementos de la teoría de las funciones*, de E. Heine,[5] el cual trataba como asunto central la idea de continuidad. Este ánimo se avivó aún más en Dedekind cuando seis días después (el 20 de marzo, mientras redactaba el prólogo del ensayo citado), lee el trabajo de G. Cantor sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas, el cual no sólo trataba la continuidad de los reales como un asunto central sino que además concuerda en algunas demostraciones con lo que Dedekind considera la esencia de la continuidad.

Si el problema que abrumaba a Dedekind era la falta de rigor en las demostraciones del análisis diferencial entonces ¿por qué contar la historia del concepto de función y no la historia del análisis o cálculo diferencial? En realidad separar el concepto de función del análisis matemático es un tanto artificial; hay una imbricación entre los conceptos de función y del análisis. Segun D. Aleksandrov esta imbricación se da en la relación entre métodos y objetos de estudio de cada rama, en particular sobre el análisis infinitesimal, aunque el nombre de "análisis infinitesimal" no dice nada sobre el objeto de estudio, sino que enfatiza el método. Se trata del método matemático especial de los infinitésimos o, en su forma moderna, de los límites. (Aleksandrov 1, p. 92) Por otro lado, el mismo Aleksandrov habla sobre el objeto de estudio del análisis: El problema del análisis es el estudio de las funciones, esto es, de la dependencia de una variable respecto de otra. (Aleksandrov, p. 103)

Ya se mencionó en esta sección que la resolución de ecuaciones diferenciales pasaba por la representación geométrica de cantidades variables. Contrario a lo

[4] La traducción al español de este parráfo está basada en la traducción de J. Climent de la Universidad de Valencia.

[5] Su definición de función es: Una función monovalente de una variable x significa una expresión individual definida de manera unívoca para cada valor racional o irracional de x. [*Einwerthige funktion einer Veränderlichen x heisst ein Ausdruck, der für jeder einzelnem rationalen oder irrationalen werth von x eindeutig definirt ist.*] (Heine 1, p. 180)

anterior, L. Euler, en sus trabajos sobre análisis matemático plantea la idea de algebraizar (o desgeometrizar) el análisis. Con ello pretendía que el análisis de figuras no formara oarte del análisis matemático ganándose con ello mayor rigurosidad en las demostraciones. Hasta este punto el tema principal en la historia del análisis es, como se mencionó anteriormente, el estudio de los métodos del análisis. Sin embargo, al abordarse el problema de la cuerda vibrante por parte de D'Alembert y Euler surge una nueva discusión sobre la continuidad de la solución encontrada. Esta discusión, aunque efectivamente estuvo relacionada con los métodos que debe seguir el análisis matemático, puso de manifiesto un nuevo tema acerca de lo que debería entenderse como "función matemática".

Este es el contexto en el cual este trabajo se propone tratar la historia del concepto de función matemática mediante el estudio del debate de la cuerda vibrante que tuvo como principales protagonistas a D'Alembert y a Euler, debate que duró más de dos decadas, que es intenso por lo profundo y profuso de los textos en los que se llevó a cabo, y que es común encontrar en los textos de historia de las matemáticas como un mal entendido. De este modo, para llevar a cabo el estudio del debate de la cuerda vibrante y el concepto de función matemática en el S. XVIII se dedicará un capítulo para exponer los antecedentes tanto del problema de la cuerda vibrante -el cual surge desde el ámbito de la teoría musical- como del concepto de función, donde confluyen temas como la geometría y las formulaciones de Newton y Leibniz para el cálculo; también resulta de importancia revisar los trabajos de la época sobre la solución de ecuaciones diferenciales. El tercer cápitulo tendrá como eje las dos primeras memorias, escritas por d'Alembert y Euler, que iniciaron el debate de la cuerda vibrante. En ellas se encuentran los elementos principales que dieron lugar a la discusión del concepto de función. Finalmete se presentan las conclusiones de manera desagregada para cada uno de los temas principales que abonan al estudio del debate de la cuerda vibrante y su repercusión para finalmente abordar el trabajo de A. L. Cauchy, quien sentaría las bases del análisis como se conoce hoy día.[6]

[6]En general, dichas bases del análisis apuntan hacia la consecución de rigurosidad en las demostraciones matemáticas. El recorrido en las formulaciones del análisis no estuvo exento de debates y por supuesto no fue obra de pocos autores, algunos de ellos poco reconocidos en su época. Como ejemplo de esto se encuentra Bernard Bolzano, quién en el s. XIX defendió la objetividad de las ideas y proposiciones en sí mismas. Una proposición en sí no es más que algo susceptible de ser verdadero o falso independientemente de si ha sido en algún momento formulado o pensado por alguien. (Bolzano, § 19) De ello no debe deducirse que se postule la existencia de un mundo platónico de ideas y proposiciones independiente del mundo material. Bolzano afirma que hay tanto proposiciones objetivamente verdaderas como otras que son falsas, pero insiste en que, a pesar de que la verdad y la falsedad no dependen de que alguien

las aprehenda, las proposiciones en sí no existen. Así lo afirma Bolzano:

> [...] las proposiciones de ninguna manera pertenecen a la clase de objetos que llamamos existentes o reales. [...] La existencia pertenece sólo a las proposiciones pensadas, y también a las que se considera verdaderas, es decir, los juicios, pero no a las proposiciones en sí, que son el material aprehendido por un ser pensante en sus deliberaciones y juicios. (Bolzano, § 122)

A estas definiciones respondía por carta Exner a Bolzano con las siguientes palabras en junio de 1833:

> No puedo asentir cuando, a pesar de negar la existencia de las verdades e ideas objetivas, les das aun así, podría decirse, una especie de existencia fantasmal. ¿Se supone que las ideas objetivas se aprehenden desde lo subjetivo? ¿Cómo puede lo no existente ser aprehendido por lo existente? ¿Qué se supone que significa aprehender en este contexto? (Russ, p. 89)

El concepto de verdad en sí, independiente de su materialización en alguna conciencia resultaba difícil de concebir para alguien convencido de que "cada verdad existe sólo en la conciencia de un individuo". (Ibid. p. 85)

Capítulo 2

Antecedentes del debate de la cuerda vibrante y el concepto de función matemática en el siglo XVIII

2.1. Geometría, cálculo y el concepto de función matemática en los siglos XVII y XVIII

La construcción de ecuaciones de Descartes

En su libro titulado *La Geometría*, publicado en 1637 (Descartes 1), Descartes aborda dos aspectos de la geometría y el álgebra. Por un lado estudia ecuaciones a través de su relación con curvas geométricas y por otro estudiando curvas definidas por ecuaciones. Una característica importante de su trabajo en geometría fue su tratamiento de ecuaciones indeterminadas que involucraban variables continuas. La noción de variable, o magnitud variable, fue indispensable para el desarrollo del cálculo y del análisis matemático. Por un lado, en su método Descartes establece el tratamiento que ha de darse a las variables (con un carácter abstracto) y por otro aborda el estudio de ecuaciones asociadas a curvas cuyos valores ordenados en pares definen un punto de la curva revelando una noción de función.

El Libro Primero de *La Geometría* (1637; ver Descartes 1) trata de los problemas que pueden resolverse sin emplear más que círculos y líneas rectas. En este libro su autor escribe:

> *Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las Operaciones de geometría.*
>
> Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que puede tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan que prepararlas a ser conocidas, agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede ser tomada a discreción, y teniendo luego otras dos, encontrar una cuarta que sea a una de esas dos, como la otra es a la unidad, que es lo mismo que la multiplicación; o bien encontrar una cuarta que sea a una de esas dos como la unidad es a la otra, lo que es lo mismo que la división; o, en fin, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea, lo que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, o cúbica, etc. Y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible. (Descartes 1, p. 369)

Mucho se ha escrito acerca del método descrito en este primer párrafo de la *Geometría* de Descartes, en particular destaca la última palabra; la inteligibilidad, que Descartes pretende en dicho método, el cual se asocia con una postura filosófica denominada *Mathesis Universalis* y que es mencionada en la regla IV de las meditaciones filosóficas como "una cierta ciencia general que explique todo lo que puede buscarse acerca del orden y la medida no adscrito a una materia especial" (Descartes 2, p. 35). Las Matemáticas en el libro de *las Reglas* son sólo, según el mismo Descartes, los ejemplos más fáciles y simples de este método, pero no constituyen el método mismo. Es decir, el que las matemáticas, en particular la Arítmética y la Geometría, cuyos objetos de estudio son números y figuras respectivamente, puedan aplicarse a otras ciencias como la Astronomía, la Música y la Mecánica, las cuales estudian objetos como estrellas, sonidos o cuerpos en general respectivamente, es porque tienen en común el tratar asuntos de orden y medida. Siendo que los fundamentos de estas ciencias se basan en esta *Mathesis Universalis* que tratan, en palabras de H. Bos, "con todos los temas que puedan surgir concernientes al orden y la medida sin importar la materia de que se trate". (Bos 2, p. 262) En el fondo de esto, subyace la idea de que la aplicación de las matemáticas a otras ciencias puede hacerse porque el método de las Matemáticas no es otra cosa que el fruto de la intuición que, dados los objetos simples de las Matemáticas, surge espontáneamente en la persona que las lleva a cabo. Esta apreciación ha llevado a pensar que la denominada percepción sensible es parte de este método cartesiano (Gonçal, 2005) donde la razón (perfecta) y la percepción sensorial (imperfecta) pueden estar juntas de manera no contradictoria en su discurso, siendo esta noción de los objetos matemáticos continuos el puente que las une. Así, en esta fuerte interacción entre Filosofía y Matemáticas se considera el conocimiento de las ciencias como asuntos de orden y medida. Descartes en su geometría eliminará la necesidad de reglas de homogeneidad para la operación entre magnitudes, lo cual tendrá su repercusión en el problema de la cuerda vibrante. Pero esto se verá más adelante en el tercer capítulo de este trabajo.

La interpretación del propio Descartes de la *Mathesis Universalis* es la siguiente: el arte de la *Mathesis Universalis* no es otra cosa que lo que se llama Álgebra (Descartes 2, p. 37); ello para rendir los mejores resultados en cuanto a la investigación de la verdad. Como consecuencia de proponer objetos matemáticos continuos como puente entre la razón y la sensación se generan conflictos en la física, que tiene que explicar la extensión de los cuerpos y sus propiedades mecánicas en términos de este continuo matemático, con lo cual el movimiento resulta imposible. (Benítez, p. 23)

Así, epistemológicamente hablando, la *Mathesis* puede equipararse al álgebra y a la geometría como la manera de representar las ideas para que estas puedan ser percibidas sensorialmente al ser plasmadas en un papel. La interpretación de Jacob Klein es la siguiente:

> En general el método de Descartes nace del deseo de justificar el lugar que él mismo le asigna al álgebra. El punto de vista de un conocimiento metódico es entonces secundario en relación con la identificación original del objeto matemático general con la extensión. Pero puesto que todo depende de la justificación de esta identificación, el método obtiene gradualmente mayor significado en la medida en que sus reglas son tomadas de la Mathesis Universalis; por lo tanto, el camino de la "inventio" que en la *Mathesis Universalis* se entiende como álgebra general, se descubre como la manera

> de conocer más apropiada para el entendimiento humano. En este sentido, las Reglas para la dirección del espíritu son idénticas a las reglas de la Mathesis Universalis y a las reglas del método como tal. (Klein, p. 294)

Ahora hace falta ver cómo es que opera el método tanto para resolver ecuaciones por medio de rectas y círculos así como para encontrar las ecuaciones de curvas a partir de estas últimas.

Después de mostrar un ejemplo sobre cómo multiplicar y dividir con líneas rectas, en el apartado titulado *"Cómo se puede hacer uso de las cifras en geometría"* (Comment on peut user de chiffres en gèométrie), Descartes concluye dando algunas indicaciones acerca de la notación que usará en el libro. Esto con el fin de no perder de vista los nombres y las asignaciones de éstos con las líneas. Pasa luego a abordar el

> *Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas.*
>
> Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues los términos de cada una de esas dos maneras son iguales entre sí. Y tenemos que encontrar tantas ecuaciones como el número de líneas que se asumió no eran conocidas. O bien, si haciendo esto no hay tantas [ecuaciones], sin omitir nada de lo que se desea conocer en la materia [problema], se tiene que éste no está completamente definido. (Descartes 1, p. 372)

En el método cartesiano se usa el álgebra para reducir un problema a una ecuación apropiada. Después, examinando el problema, siguiendo un orden basado en la intuición y estableciendo las relaciones que existen entre los diversos segmentos, los conocidos y los desconocidos, se ha de conseguir expresar un mismo segmento por medio de dos expresiones algebraicas diferentes, es decir, encontrar la construcción geométrica apropiada para resolver un problema y basándose luego en una ecuación (Bos 2, p. 287). Entonces las ecuaciones no son soluciones; el álgebra sólo hace la mitad del trabajo, la otra mitad se hace mediante la construcción geométrica.

Para Jan Van Maanen el método cartesiano puede resumirse como sigue:

1. Hacer un diagrama en el cual se indique la situación dada y la solución, la cual se asume va a ser encontrada.

2. Dar nombres a los segmentos de línea involucrados usando caracteres del alfabeto.

3. Traducir el problema geométrico en una o más ecuaciones en las cuales estos caracteres aparecen.

4. Resolver las ecuaciones.

5. Finalmente traducir la expresión algebraica del resultado en una serie de operaciones geométricas que producen el segmento de línea buscado. (Van Maanen, p. 42)

Descartes aplica el algoritmo anterior para resolver el problema de Pappus extendiendo el problema a un número arbitrario de líneas. De esta extensión que hace Descartes al problema de Pappus resultan novedosas dos ideas: primero que un par de segmentos de línea respecto a dos líneas principales (ejes coordenados) determinan un punto y que infinitos pares de segmentos de línea producen una curva:

> Si tomamos sucesivamente un número infinito de diferentes valores para la línea y, obtenemos un número infinito de valores para la línea x, entonces un infinito número de diferentes puntos, tales como C, por medio de los cuales la curva descrita puede ser dibujada.[7] (Descartes 1, p.384)

Existe aquí una correspondencia entre las propiedades geométricas de la curva y las propiedades algebraicas de la ecuación asociada que anuncia la esencia de la

[7]Fermat también establece la relación entre las curvas, los lugares, y las ecuaciones en la introducción de su obra *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* de la siguiente manera: "Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva" ["Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, sit locus loco et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam.]. Pero tampoco se está refiriendo a funciones. (Fermat citado en Bos 2, p. 207).

Geometría Analítica como puente entre el Álgebra y la Geometría, que resultaría un poderoso instrumento de solución de problemas geométricos mediante la intervención del Álgebra, una vez que se ha definido un sistema de rectas de referencia, mediante el que se obtiene la ecuación de la curva como relación algebraica que liga las coordenadas de los puntos de la curva.

Así pues, el conocimiento de la ecuación permite conocer los puntos de la curva; no obstante, todavía no hay una identificación de la curva con la ecuación, Descartes sólo ha introducido el concepto de curva definida por puntos. Será en el Libro II de La Geometría donde estudiará ampliamente este problema y establecerá cuáles son las razones geométricas que permiten considerar una expresión como una representación de una curva.

Fluxiones y cálculo

Las soluciones encontradas hasta el siglo XVI de los problemas de cuadraturas y tangentes gestaron la idea de infinitesimal asociada, por un lado, con la relación funcional[8] entre variables geométricas en función del tiempo y por el otro con la relación entre cantidades geométricas asociadas a una curva según las concepciones de Newton y Leibniz respectivamente.

Como un precursor de Newton se puede contar a Isaac Barrow, quien fuera su maestro. A Barrow se le debe un método para determinar la tangente a una curva mediante las razones últimas representadas por el triángulo característico infinitesimal, en el cual subyace el concepto de lo que hoy conocemos como derivada (ver figura 2.1). El método de las razones últimas es descrito por Florian Cajori de la siguiente manera:

> Él consideraba el triángulo rectángulo infinitesimal *ABB'* que tiene por los lados diferencia entre dos ordenadas sucesivas [*BB'*], la distancia entre ellos, y la porción de la curva interceptada por ellos. Este triángulo es similar al triángulo BPT, formado por la ordenada, la tangente y la sub-tangente. Por lo tanto, si se conoce la razón de *B'A* a BA, entonces sabemos que la relación entre la ordenada, la sub-tangente y la tangente se puede construir al mismo tiempo. (Cajori 1, pp. 230-231)

Con este antecedente Newton desarrolla el método de las fluxiones, basado en la idea mecanica de movimiento continuo; teniendo como conceptos princi-

[8]Pero no analítica, dado que aún hablaban de cantidades y no de funciones.

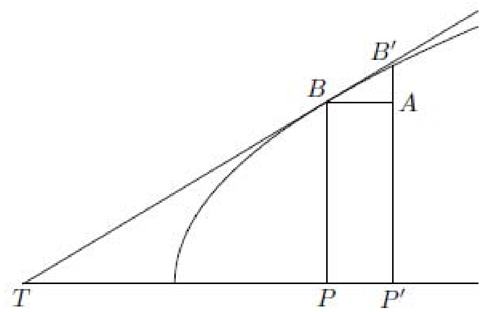


Figura 2.1: Representación de Barrow de las razones últimas. Figura tomada de Cajori 1, p. 230.

pales a los fluentes y a las fluxiones. Los fluentes son variables que tienen un argumento común, el tiempo, y por tanto son variables dependientes de éste. Pero no un tiempo de carácter físico, más precisamente, se trata de la abstracción matemática análoga al tiempo, una magnitud independiente abstracta que fluye uniformemente y con la cual se relacionan todos los fluentes. Esto no dificulta la correlación de las variables en los problemas.

Después se introducen las velocidades de cambio de los fluentes, esto es, las variaciones con relación al tiempo. Éstas se denominan fluxiones. Ya que la fluxión constituye una variable, entonces también se pueden encontrar las fluxiones de las fluxiones, es decir, la primera, segunda, etc, fluxiones. Si el fluente se designa por y, las fluxiones se designan por $\dot{y}$, $\ddot{y}$, etc. Para el cálculo de las fluxiones se consideraban variaciones infinitesimales de los fluentes, denominadas por Newton momentos. El símbolo del momento de tiempo es "**o**"; el momento del fluente y se escribe, por consiguiente: $\mathbf{o}\dot{y}$, esto es, el producto del momento de tiempo por la variación del fluente. En esencia, el momento del fluente es lo que hoy se denomina diferencial.

Dos son los problemas principales que se resuelven con la teoría de las fluxiones. eswtos se formulan tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos. newton los presenta así:

> Ahora se deben presentar algunos problemas, especialmente los que se refieren a la naturaleza de las curvas, para ilustrar este arte analítico. Primero se observará que todas las dificultades de este tipo se pueden reducir tan sólo a los siguientes dos problemas, los cuales

> se proponen en un espacio que es atravesado por algún movimiento local, ya sea acelerado o retardado:
>
> 1. Dada de manera continua la longitud del espacio recorrido, esto es, en todo instante de tiempo, encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto.
>
> 2. Dada de manera continua la velocidad del movimiento, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto. (Newton 1, p. 81)

Dicho en términos de las fluxiones, el primer problema trata de la determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes; y el segundo se ocupa de determinar la relación entre los fluentes dada la relación entre las fluxiones. El primer problema, llamado problema directo de la teoría de fluxiones, representa el problema de la diferenciación implícita de funciones y la obtención de una ecuación diferencial. El segundo, un problema inverso de la teoría de fluxiones, es el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general. En particular, en este problema se trata de la búsqueda de funciones primitivas.

Un ejemplo de cómo se resuelve un problema del primer tipo con el método de las fluxiones es el siguiente:

> DADA LA RELACIÓN DE LAS CANTIDADES FLUYENTES ENTRE SÍ, DETERMINAR LA RELACIÓN DE LAS FLUXIONES.
>
> Ejemplo 1. Si la relación de cantidades x y y es $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ se multiplican los términos dispuestos primero conforme a x y después conforme a y en esta forma: Multiplico $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ por $\frac{3\dot{x}}{x}$, $\frac{2\dot{x}}{x}$, $\frac{\dot{x}}{x}$, 0 y llego a: $3\dot{x}x^2 - 2\dot{x}ax + \dot{x}ay$. Multiplico $-y^3 + axy - ax^2 + x^3$ por $\frac{3\dot{y}}{y}$, $\frac{\dot{y}}{y}$, 0 y llego a: $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$. La suma de los productos es $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, que es la ecuación que da la relación entre las fluxiones $\dot{x}$ y $\dot{y}$: ya que si se asume para x un valor arbitrario, la ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dará el valor de y, y una vez determinado esto se tendrá $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$.[9](Newton 1a, p. 83.)

Para casos más complejos, Newton usaba la representación de las funciones en series de potencias y las operaciones con estas series. Las c1ases de funciones

[9]Esto es, $\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$; en esta fórmula va implícita la homogeneidad y continuidad de las cantidades involucradas, lo cual requiere de una curva suave.

de las que disponía Newton eran aún limitadas si se compara con las clases de funciones que existen hoy día; en dicha clase no surgían grandes dudas sobre esta representación de las funciones. No obstante, las ideas sobre la convergencia de la serie y sobre la legitimidad de la representación de una u otra función mediante una serie, fueron estudiadas, constantemente, por Newton. (Boyer, pp. 190-193)

El problema inverso de la teoría de las fluxiones es la búsqueda de la relación entre los fluentes si se da por conocida la relación entre las fluxiones. El problema es presentado por Newton de manera general, y se plantea como equivalente al problema general sobre la integración de cualesquiera ecuaciones diferenciales. Los enfoques de Newton para la solución de un problema tan general y los procedimientos de su resolución se construyeron gradualmente.

El análisis infinitesimal surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes e independientes. La primera creación, en orden cronológico, fue la teoría newtoniana de las fluxiones. Sin embargo, las primeras publicaciones sobre análisis de infinitesimales aparecieron asociadas a otro tipo de cálculos, los cuales aparecen en el cálculo de las diferenciales de Leibniz.

Hacia 1673, en los trabajos de Leibniz, se encuentra cada vez más frecuentemente la aplicación del triángulo característico de Pascal para la resolución de problemas sobre el trazado de una tangente a la curva. Con esto gradualmente se va llegando a la idea sobre la posibilidad de sumar las diferencias (dx y dy) que generan los lados del triángulo característico mencionado anteriormente. A las sumas de estas pequeñas diferencias conducen también los problemas sobre cuadraturas. Leibniz, percibiendo esta situación, enunció la proposición de que la resolución de los problemas inversos de tangentes en su mayor parte se pueden reducir a cuadraturas. De esta manera, sin conocer los trabajos de Barrow y Newton, pero como ellos, partiendo de los problemas inversos de las tangentes, Leibniz encontró la relación mutuamente inversa entre los métodos de trazado de tangentes (operación de diferenciación) y las cuadraturas (operación de integración). Entonces Leibniz expresó la idea de que el cúmulo de resultados de diferenciación por medio de una transformación simple podía ser útil en la integración de funciones (Newton utilizó ideas equivalentes a estas). (Guiccardini, pp. 89-91)

En el año 1684, en "Acta Eruditorum", Leibniz publicó la primera memoria sobre el análisis infinitesimal: *Nuevo método de los máximos, mínimos y también de las tangentes, para el cual no son obstáculo las magnitudes fraccionarias ni irracionales y un nuevo tipo, especial para esto, de cálculo*".

En esta memoria, de menos de 10 páginas, no hay demostraciones pero, por vez primera en las páginas de una revista científica, aparece el cálculo diferencial como objeto de investigación matemática en forma muy parecida a su estructura actual. El diferencial dx se toma como una magnitud completamente arbitraria de un segmento de recta. El diferencial de la función dy está definido por la igualdad $dy = \frac{ydx}{S_t}$, donde S_t es la sub-tangente a la curva en el punto (x, y). Además de introducirse los símbolos dx y dy, también se formulan las reglas de diferenciación de una magnitud constante, de la suma de funciones, la diferencia, producto, cociente, potencia y raíz. Los diferenciales se interpretan inicialmente como magnitudes proporcionales al incremento instantáneo de la magnitud de la sub-tangente S_t.[10] Más tarde los diferenciales de nuevo se definen como diferencias infinitesimales.

La memoria del año 1684 fue un tratado sobre cálculo diferencial. Después de dos años, en 1686, sale a la luz otra obra de Leibniz: *Sobre la geometría profunda*, en la cual se exponen las reglas de integración de muchas funciones elementales. Para la designación de la operación de integración se introduce el símbolo $\int$, tratado como la suma de diferenciales, y además se subraya su inversibilidad mutua con la operación de diferenciación.

La activa propaganda del nuevo cálculo por parte de Leibniz y sus alumnos y sucesores, entre los cuales se destacaron los hermanos Bernoulli, Jacob y Johann, posibilitó además su pronta difusión.

En el año 1693 Leibniz extendió el nuevo cálculo a las funciones trascendentes[11] por la vía del desarrollo en series y con ayuda del método de coeficientes indeterminados.[12] Este grupo de resultados Leibniz los expuso en un artículo con un largo título: *Complemento a la geometría práctica el cual se extiende a los problemas trascendentes con ayuda del nuevo método general de series infinitas.*

El valor práctico del cálculo de Leibniz, su sencillez operativa y notación un poco más sencilla, atrajeron la atención de los matemáticos en la parte continental de Europa. Pero en este cálculo había un hueco: quedaba sin aclarar qué explicación se puede dar a los conceptos fundamentales que se apoyaban en la proximidad infinita, pequeñez infinita, o proceso infinitamente ilimitado. En los

[10] La igualdad $dy = \frac{ydx}{S_t}$ describe una situación similar al problema de la figura 2.1 en el triángulo *BAA'*, donde el enfoque es el de proprcionalidad entre magnitudes de ese triángulo. Es decir, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{S_t}$.

[11] En la época de Leibniz se entendía por función trascendente aquella que no puede ser reducida a series polinomiales por métodos algebraicos. Tales como la función logaritmo y la función exponencial.

[12] Entendidos como herramientas, no como objetos matemáticos relacionados propiamente con las funciones trascendentes.

manuscritos y artículos, Leibniz constantemente retorna al problema no resuelto de la fundamentación del análisis infinitesimal. Él realizó muchos esfuerzos desde diferentes posiciones y enfoques. En sus obras puede encontrarse el tratamiento de los infinitesimales como magnitudes no arquimedianas, utilización de la apreciación intuitiva de un infinitesimal potencial, referencias al método antiguo de exhaución, la postulación de la posibilidad de la sustitución de las relaciones entre infinitesimales por relaciones entre magnitudes finitas, ideas no desarrolladas sobre límites e introducción en los razonamientos, en calidad de apoyo, de la continuidad, como si fuera intrínseca a la naturaleza de todas las cosas. Sin embargo, el problema de la fundamentación del análisis infinitesimal no pudo ser resuelto por Leibniz ni tampoco por Newton.

2.2. Análisis y el concepto de función a finales del siglo XVII y primera mitad del siglo XVIII

El concepto de función matemática, como concepto y como objeto de estudio en sí mismo es bastante reciente, y su aparición data de finales del siglo XVII. Leibniz utilizó el término "función" desde 1673 en un manuscrito titulado *De las funciones del Método de las tangentes inversas*[13]. Aquí Leibniz escribió acerca de las funciones: *[...] otros tipos de líneas que, dada una figura, llevan a cabo alguna función.* Algunos años más tarde, en un manuscrito de 1679 introdujo la distinción entre las curvas algebráicas y las trascendentes; cinco años después de hacer estas distinciones, en 1684 y 1686, él llamó "curvas algebraicas" a aquellas representadas por una ecuación de un grado determinado y finito, y "curva trascendente" a las curvas representadas por ecuaciones de un grado infinito. (Youschkevitch, p. 59). En esta concepción de función se designaba, en términos muy generales, la dependencia de magnitudes geométricas, tales como sub-tangentes y sub-normales, respecto de la forma de una curva. También introdujo los términos *constante*, *variable*, y *parámetro*, los cuales fueron usados en la correspondencia intercambiada por Leibniz y Johann Bernoulli entre 1694

[13] *Methodus tangentium inversa seu de functionibus.* (Bottazzini 1, p. 38) Por otro lado, Carmen Martínez comenta que la palabra función apareció publicada por vez primera en los trabajos de Leibniz titulados *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu* en 1692 y *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione* en 1694 (Martínez, p. 74.)

y 1698.[14] La palabra función era usada, si bien con significado matemático, no bajo la forma de definición y sí como herramienta para operar cantidades variables.

Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz escrita el 2 de septiembre de 1694, hablando sobre la expansión en serie de potencias de la integral $\int ndz$, escribe: *[...] por n entiendo una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes.* Aquí Johann Bernoulli habla de la ecuación $\int ndz = nz - \frac{1}{1\cdot 2}zz\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4\frac{dddn}{dz^4} + \ldots$, obtenida con el método de las tangentes inversas de Leibniz, que para el caso de la ecuación diferencial $s = \frac{yx^y lxdx}{ax^x + x^x lx + acx^{c-1} - ayx^{y-1}}$ (la cual proviene de la ecuación $y = x^x$ y donde l denota el logaritmo, con a y c parámetros constantes), su integral, al ser reducida a la forma $\int ndz$, tendrá términos puramente algebraicos dado que dn se anulará con dz, ddn se anulará con dz^2 y así sucesivamente; dado esto, los términos de la serie estarán conformados sólo por la cantidad n, los factores $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\ldots$, y las potencias de z. Esto para Johann Bernoulli es un gran logro[15] en el uso de las tangentes, las sub-tangentes y su representación como diferenciales. De sus comentarios se puede ver que él entiende a la cantidad n como una cantidad relacionada con las tangentes y sub-tangentes en el sentido que Leibniz concibe que estas líneas cumplen una función respecto de una figura o curva dada (Leibniz, vol 3, pp.144-150), siendo el problema principal el de la construcción

[14] Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz con fecha del 2 de septiembre de 1694, usa el término "parámetros variables" para referirse a los ejes y vértices de una parábola, donde al variar uno u otro de estos parámetros se puede obtener una elipse y una curva logarítmica común, respectivamente. (Leibniz, vol 3, p.152)

[15] Pues el método de Leibniz mostraba que una curva podía ser representada como una serie de potencias enteras, lo cual estaba acorde con un consenso que tenían los matemáticos de finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII; H. Bos comenta a este respecto:

> Alrededor del año 1700, los matemáticos habían llegado al siguiente consenso acerca de los grados de la "mejor posible" construcción de curvas por medio de una ecuación: Si el grado [de la ecuación] H es n, entonces la construcción de las curvas $F(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$ se puede encontrar con grados enteros de aproximaciones de $\sqrt{n}$. El consenso se basó en la experiencia. Newton y l'Hôpital dieron pruebas sobre esto, pero éstas no eran correctas. (Bos 1, p. 1635)

Igualmente Bos comenta que una parte del debate sobre la "mejor construcción posible" de una curva era encontrar la construcción más simple de una curva por medio de ecuaciones. Lo cual planteaba la cuestión, sobre qué debía ser más simple, si la ecuación, la curva misma o el movimiento con el que esta es trazada. El criterio de Descartes era que la construcción es más simple si el grado de la serie de potencias es el más bajo. (ibídem) Por su parte J. Bernoulli considera a la generalidad en esta "mejor construcción posible" como el aspecto que supera al método de las tangentes inversas de Leibniz pues no obstante ser "bastante ingenioso" para cualquier aplicación un cálculo individual tenía que ser llevado a cabo cada vez por lo cual sólo una serie particular se produce. Así J. Bernoulli declara que su serie fue "una serie universal que expresa de forma general todas las cuadraturas, las rectificaciones, y las integrales de otras diferenciales". (Bernoulli 1, p. 437) de una curva y todos los elementos que hay que conocer sobre esa curva. Igualmente, en una carta del 23 de agosto de 1696 J. Bernoulli escribe a Leibniz: "por las mayúsculas X^1, X^2, X^3, *etc*; entiendo cantidades diversas compuestas por la [cantidad] indeterminada x y constantes".[16] El carácter de estas cantidades diversas está asociado a la ecuación diferencial $ady = ypdx + by^n \cdot qdx$, donde si $dy = mdz + zdm$ entonces la ecuación original puede reducirse a la ecuación $\frac{adz}{z} = pdx$ con lo cual $z = X^1$y $y = zm = X^1X^2$, con X^2determinado de la ecuación diferencial original sustituyendo y, z y dz en términos de m y X^1. Entonces X^1, X^2, etc, podrán ser cantidades algebraicas o trascendentes. (ibídem, pp. 323-324) En estas dos cartas no aparece la palabra función, pero este concepto de cantidades compuestas de cantidades variables y cantidades constantes recaerá en lo que J. Bernoulli llamará funciones, al resolver el problema de la braquistócrona.

En una memoria de 1698, publicada en 1706[17] en las actas de la Real Academia de Ciencias de París, sobre el problema de los isoperimétricos propuesto por Jacob Bernoulli, (Bernoulli 2, pp. 235-245), Johann Bernoulli, en 10 páginas, presenta dos soluciones al problema de la braquistócrona; estas soluciones involucran el uso de funciones.

Otro problema relevante para el estudio de la historia del comcepto de fun-

[16]Será hasta el siglo XIX que el comcepto de cantidad indeterminada tendrá un carácter puramente sintáctico dentro del desarrollo del análisis.

[17]En la reseña de las memorias se da la siguiente explicación acerca del retraso en la publicación:

> Aquí está el problema que causó entre estos dos ilustres hermanos esta especie de juicio, que se menciona en la Historia [de la Academia] de 1705. El Señor [Johann] Bernoulli, actualmente profesor de matemáticas en Basilea, envió a la Acadèmia en enero de 1701 un paquete sellado, titulado: Métodos para la solución de problemas isoperimétricos, y recomienda al mismo tiempo que sea abierto sólo después de que su hermano el Señor [Jacob] Bernoulli diera a conocer su análisis de este mismo problema. Ya no habiendo dificultades acerca de esta publicación, pues el anciano Señor [Jacob] Bernoulli murió [en agosto de 1705], el paquete fue abierto por [Delisle] le Cadet, en la Academia el 17 de abril de 1706, y hemos encontrado la solución que se imprime en este momento. Se hace notar que esta solución se había comunicado ya al Señor Leibniz en junio de 1698. (Academia de Ciencias 1, pp. 68-69)

En 1718, en su memoria titulada *Sobre lo que hasta ahora ha dado la solución de problemas isoperimétricos, con un nuevo método corto y fácil de resolver sin calcular, que se extiende también a otros problemas relacionados*, publicada en las memorias de la Acadèmia de Ciencias. Johann Bernoulli rechaza una querella con su hermano como motivo (además de rechazar la presunción de un supuesto error cometido en la solución de 1706) del retraso en la publicación de su solución de 1698:

> Las razones de la demora son informadas en la historia de 1706 de la Real Academia de Ciencias [por Fontenelle], y muestran una sospecha infundada que es ofensiva para mi franqueza.(Bernoulli 3, pp. 100-101)

ción es el de las curvas isoperimétricas, mismo que es enunciado por Johann Bernoulli de la siguiente manera:

> De todas las curvas isoperimétricas descritas en el mismo eje determinado BN encontrar la curva BFN de modo que sus ordenadas FP elevadas a una potencia constante, o generalmente, *las funciones cualquiera de las aplicadas, expresadas por medio de otras aplicadas* PZ,[18] forman o llenan un espacio BZN que es el más grande de todos aquellos que pueden ser formados de la misma manera. O bien a través de una curva BH que pasa por el eje dado BG, perpendicular a BN, determinar la curva BNF cuyas aplicadas FP prolongadas hasta Z de modo que PZ sea igual a la recta GH, para formar una curva BZN que es la mayor de todas las curvas que pueden ser formadas de la misma manera por otras curvas descritas en el eje BN y la misma longitud que BFN. (ver figura 2.2) [Bernoulli 2, p. 235.]

Johann Bernoulli en esta memoria, redactada en 1698, no da una definición explícita de lo que es una función,[19] lo cual se explica tomando en cuenta que este problema es inicialmente propuesto por Jakob Bernoulli y las soluciones circularon por escrito en círculos muy estrechos de lectores, en particular en comunicaciones entre Leibniz y los Bernoulli, quienes tenían una concepción común acerca de lo que es una función. (Youschkevitch, p. 59)

Al ser publicada esta memoria en 1706 en las memorias de la Real Academia de Ciencias, el uso de funciones se presenta como novedoso. La impresión que tiene Fontenelle, quien redacta las reseñas de las memorias, sobre el concepto de función, destaca dos aspectos. El primero de ellos trata sobre lo que es propiamente una función:

> Él [Johann Bernoulli] cambió las potencias de las aplicadas[20] en lo que él llama funciones. Las funciones de una aplicada comprenden, además de todas las potencias, sean perfectas o imperfectas, a las que se puede elevar todas las multiplicaciones o divisiones que podemos hacer entre las magnitudes constantes que se obtienen de las abscisas elevadas también a aquella potencia deseada; de suerte que, por ejemplo, el producto de una ordenada elevada al cubo y

[18] El enfásis es mío.

[19] Y que sin embargo, difícilmente podría haberse referido a algo más que expresiones analíticas ya conocidas en ese momento. (Youschkevitch, p. 58)

[20] Segmentos de recta usados de manera auxiliar en en el analisis del s. XVII y que equivalen a lo que hoy dìa se conoce como el valor de la función.

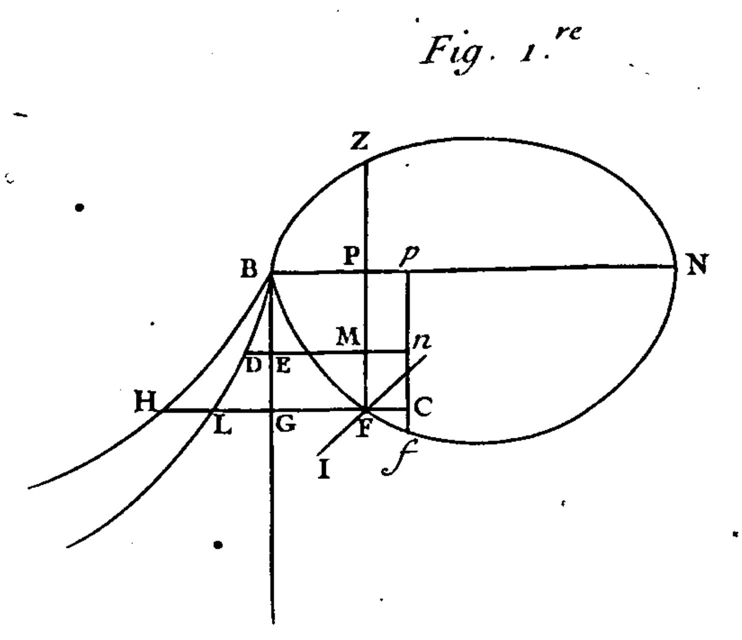


Figura 2.2: Primera solución de Johann Bernoulli de problemas isoperimétricos. El segmento FZ es una función para encontrar la curva BZN y BFN, de manera similar los segmentos GH y PZ son una función para encontrar la curva BFN. (Figura tomada de la memoria original)

> de una magnitud constante dividida por el cuadrado de la abscisa, es una función de la aplicada. Las potencias son la única especie de funciones que se generan. (Academia de Ciencias 1, p. 70)

El segundo aspecto que destaca Fontenelle es sobre la generalidad de las soluciones; un tema que permeará en todo el quehacer matemático del siglo XVIII, en particular en el debate de la cuerda vibrante:

> Supone, *para una mayor generalidad*,[21] que además de las funciones de las aplicadas se trata de encontrar las funciones de los arcos de una curva, cuyos bordes sean las líneas rectas que representan una función determinada por estos arcos que cubrirán el espacio de otras líneas rectas que representan la misma función de los arcos de otra curva isoperimétrica. (Academia de Ciencias 1, p. 71)

Esto es, para que la solución sea general, una función debe representar las propiedades (aplicadas y arcos) tanto de la curva a determinar como de una curva conocida. En la figura 2.2 la relación se da por medio de las aplicadas y en la figura 2.3 la relación se da por medio de los arcos.

Johann Bernoulli explica que de funciones cualquiera de las aplicadas FP de la figura 2.3, elevadas a una potencia constante, son expresadas por medio de otras aplicadas PZ, las que forman o llenan un espacio BZR que es el más grande de todos aquellos que pueden ser formados de la misma manera, o bien por medio de una curva BH que pasa por el eje BG perpendicular a BR. Y es por medio de las funciones de los arcos que se puede encontrar la curva buscada. Si bien en las cartas de Bernoulli a Leibniz citadas anteriormente las funciones están relacionadas con ecuaciones, en esta memoria se revela el carácter geométrico de las funciones las cuales están ligadas a magnitudes de segmentos de recta que representan elementos relacionados con la curva buscada, tales como las tangentes, los arcos, las ordenadas y las aplicadas.

El procedimiento para determinar la curva es el siguiente: en la figura 2.4 sea BF la curva buscada, $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$ y donde Fm es la tangente en el punto F, entonces lFm es como el ángulo con la curva cuyo seno es lm. Así, en el triángulo rectángulo mnl, los lados mn y nl son paralelos a los lados lC y CF del triángulo FCl, respectivamente, de donde se obtiene que $mn = ddx$, $nl = ddy$ y porque el triángulo CFl es semejante al triángulo nml se tiene $cl(dx) :: nl(ddy)ml = \frac{dt\,ddy}{dx}$. Por la naturaleza de la

[21] El énfasis es mío.

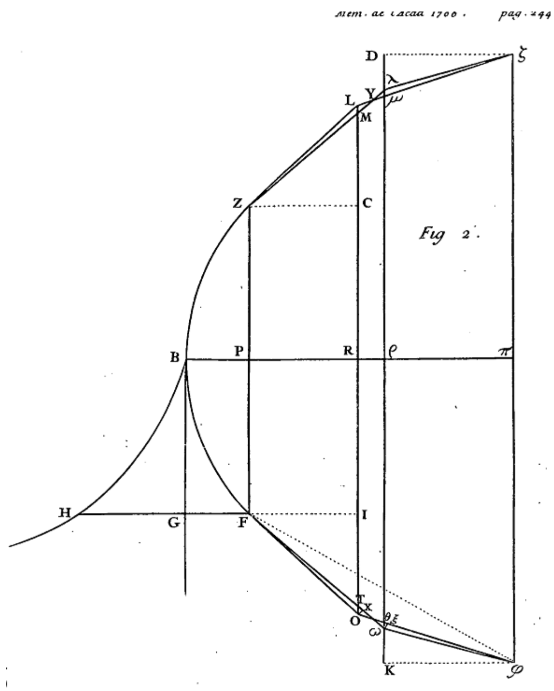


Figura 2.3: Relación de las funciones de los arcos de la curva BF con los arcos de la curva BZ.

curva, $\frac{ml}{PF} = a$, con a constante, implica que $\frac{dt\, ddy \triangle x}{dx}$ :: adt dará la ecuación $addy = \triangle x\, dx$, mas como $\triangle x\, dx$ es la función diferenciada, si se integra se obtiene la función misma $GH = X$; esto implica que $ady = X \pm C$, C es una constante. Al multiplicar las partes homogéneas por dt se tiene que $ady = Xdt \pm Cdt$ y elevando al cuadrado estas dos últimas ecuaciones se tiene $aa\, dy^2 = dt^2(X \pm C)^2 = (dx^2 + dy^2)(X \pm C)^2 \Rightarrow dy = \frac{dx\,(X \pm C)}{\sqrt{aa-(X \pm C)}}$. Integrando esta última ecuación queda $y = \int \frac{dx\,(X \pm C)}{\sqrt{aa-(X \pm C)}}$. Es esta integral la ecuación general con la que se construirá la curva buscada, siendo X una función de otra curva conocida, adicional a la curva buscada, compuesta de constantes y una variable cuya potencia describe a la curva deseada (Bernoulli 1, pp. 238-239). Más adelante Johann Bernoulli presenta un ejemplo ya estudiado por su hermano Jacob donde si a una curva elástica se le asocia una parábola común (haciendo el papel de la curva BH) el resultado que se obtiene es $y = \int \frac{xx\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Esta geometría, llamada geometría fina o geometría sutil,[22] presenta en su metodología rasgos que se pueden identificar con la manera de construir ecuaciones de Descartes descrita en la primera parte de este capítulo.

Así, la generalidad de la solución dada por Johann Bernoulli, plantea, según R. Thiele, una cuestión metodólogica interesante:

> [...] en concreto, él [Johann Bernoulli] consideraría la dependencia de la ordenada PZ con la ordenada PF como arbitraria. ¿Qué quiso decir [Johann Bernoulli] con dependencia arbitraria? En ese momento no contaba aún con representaciones trascendentes. En cambio Johann [Bernoulli] encontró una manera de volver a las representaciones geométricas, es decir, a una curva dibujada libremente a mano. (Thiele, p. 71)

Puede ser que por la interpretación que Fontenelle hizo del concepto función o por la cuestión metodológica relacionada con la manera de operar con diferenciales que menciona Thiele, es que Johann Bernoulli introduce una definición de función en una memoria de 1718 titulada *En lo que hasta ahora ha dado en la solución de problemas isoperimétricos, con un nuevo método corto y fácil de resolver sin contar que se extiende también a otros problemas que los tratados y que tienen relación*, la cual aparece en los preeliminares sobre el problema de los isoperimétricos:

[22]Esta geometría consiste en un tipo de análisis geométrico en el cual el álgebra diferencial, o de las diferenciales, es empleada. Leibniz es el precursor de esta geometría que devendría en el actual Cálculo de Variaciones. (Fraser, p. 355)

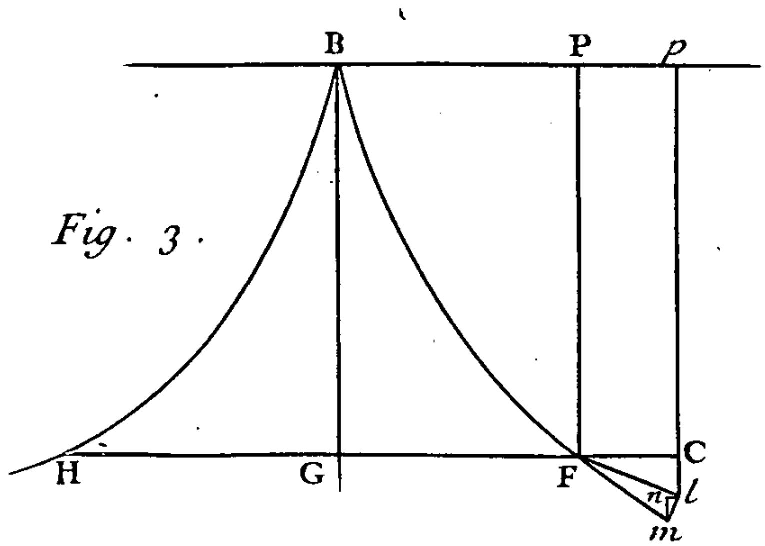


Figura 2.4: Forma de encontrar las funciones descrita por Johann Bernoulli.

> **Corolario II**
>
> Si queremos determinar la relación entre gn y oi, uno sólo tiene que hacerlo como en la solución anterior, y nos encontramos con la misma ecuación específica[23] $\left(\frac{af}{fb} + \frac{bk}{kc}\right) \times gn = \left(\frac{bk}{kc} + \frac{cl}{le}\right) \times oi$ [ver figura 2.2.5], que es consistente con las ecuaciones de los lemas 1 y 2.
>
> Definición. Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier forma de esta magnitud variable y constantes. (Bernoulli 3, p. 106)

Hay transformaciones sutiles en el método para obtener las funciones en esta memoria de 1718; es notable el hecho de que en las figuras ya no aparece la curva GH referida al eje perpéndicular Se al momento de determinar las funciones de la curva Ba (Ver figura 2.5); sin embargo las palabras con que Johann Bernoulli se refiere, y define, a una función son las mismas que en 1698. Así, en la obra de Johann Bernoulli, una función es una herramienta en el proceso de determinar una curva y está ligada a su cuadratura y los segmentos de recta que representan

[23] La cual determinará la ecuación diferencial con la que se encontrarán las especies de la curva deseada. (Bernoulli 3, p. 108)

las aplicadas y los arcos. Euler recogerá esta definición de función en su obra como un elemento central.

En la actividad matemática de Euler se destaca una orientación algorítmica. A la construcción de la teoría general llegaba partiendo de problemas concretos. La atención de Euler se centró en los símbolos y cálculos algebraicos en sí mismos. Por ejemplo, en una memoria de 1733 titulada *Sobre las sucesiones trascendentales, es decir, aquellas cuyo término general no puede ser dado algebraicamente*, donde la sucesión infinita $\frac{1 \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n} \cdot 5^n}{4+n} \cdot \ldots$ evaluada para un valor de $n = \frac{1}{2}$ está relacionada con el área de un círculo de diámetro 1. Dado que las cuadraturas de los círculos no pueden ser representadas por fórmulas[24] algebraicas ni trascendentes, pero las áreas de los círculos están relacionadas con sus cuadraturas y se obtienen por medio de ecuaciones[25] que contienen diferenciales, las cuales, si pueden ser integradas, pueden dar cantidades algebraicas. Entonces se podría representar esta sucesión por medio de una ecuación diferencial; Euler describe este método así:

> Por tanto, me pregunté de qué manera las fórmulas diferenciales serían más adecuadas para expresar las condiciones generales de las sucesiones. Ahora, un término general [de la sucesión] es una fórmula que involucra no sólo cantidades constantes, sino también algunas otras no constantes, en este caso digamos n, que da el índice de los términos, por lo que si desea obtener el tercer término, hay que poner 3 en lugar de n. Sin embargo, una fórmula diferencial debe contener alguna cantidad variable. No tendría sentido, por supuesto, tomar n como esta cantidad; n no es la variable de integración [...] Por lo tanto, una fórmula diferencial tiene que contener alguna cantidad variable x, que sin embargo después de la integración debe ser igual a otra cantidad relacionada con la progresión, y así es como se puede obtener el término particular de índice n. (Euler 2, pp. 38-39)

Para aclarar el método Euler explica que considerará a $\int pdx$ como el término general de una sucesión, el cual se obtendrá de la siguiente manera: p representa cualquier función de x y de constantes, de los que n misma debe estar compuesta.

[24]Euler se refiere a la construcción geométrica de una ecuación entre cantidades variables.

[25]Euler en esta memoria utiliza el término *formulas differentiales* en lugar de *aequationes differentiales* aunque este último término ya aparece en memorias de 1733. Que Euler no use el término ecuación diferencial en esta memoria se explica con el hecho de que éste es uno de sus primeros trabajos escrito y presentado en 1728 pero publicado hasta 1738. Ver la nota a la obra indexada con el número E19 en el sitio web de The Euler Archive: http://www.math.dartmouth.edu/∼euler/

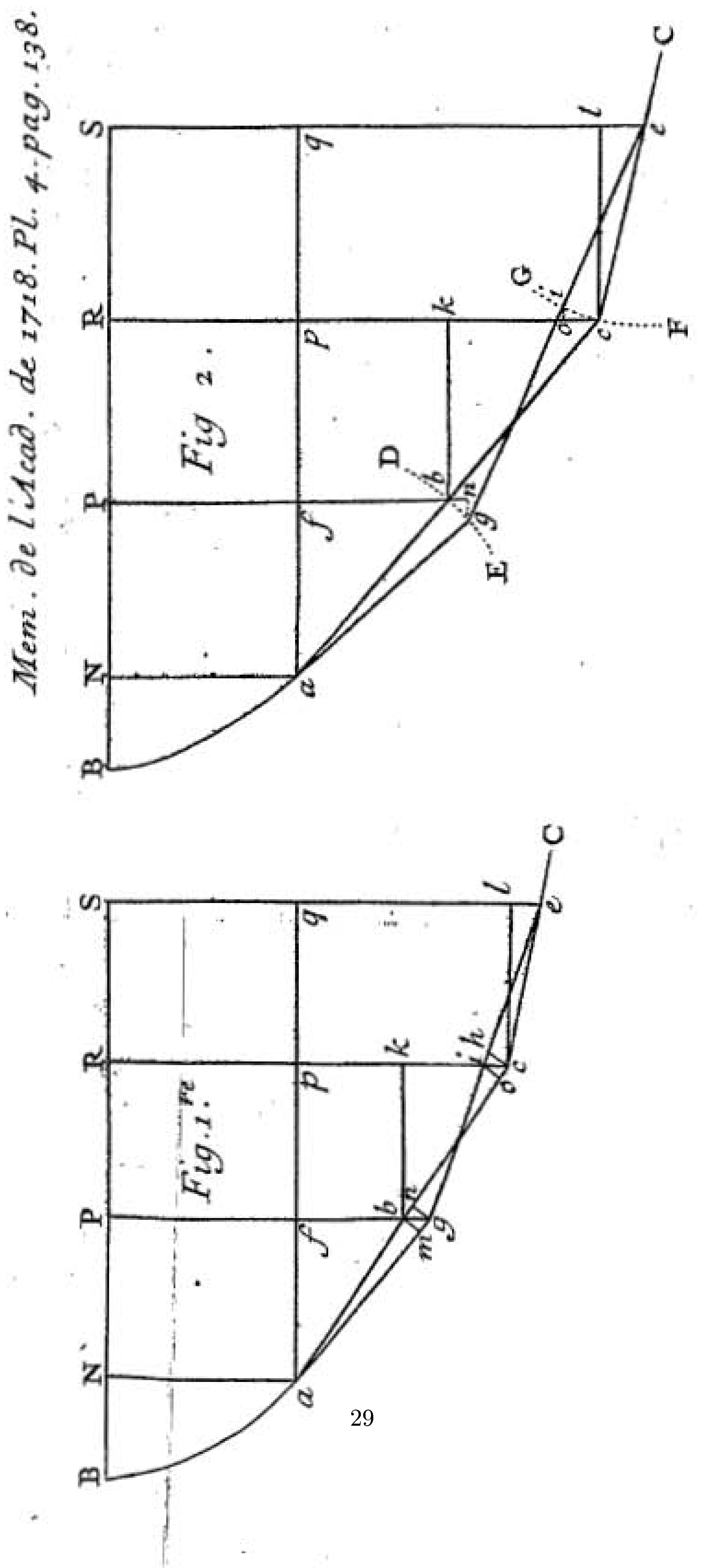


Figura 2.5: Solución al problema de la braquistócrona en la memoria de Johann Bernoulli en 1718.

Suponiendo integrada pdx, se toma la constante de integración necesaria para que cuando $x = 0$, la integral se anule; entonces x debe tomarse igual a una cierta cantidad conocida. Y solamente las cantidades que originalmente pertenecen a la sucesión se mantendrán en la fórmula de la integral resultante, la cual expresará el término de índice igual a n. Así, la integral determinada de esta manera será el término general. Si la integral puede realizarse, entonces no es necesario que la sucesión sea expresada implícitamente por la ecuación diferencial; así, ésta tendrá un término algebraico general. En otros casos puede ocurrir que la integración no se pueda hacer a menos que un número en particular sea sustituido por n.

Con este ejemplo, a través del concepto de "término general", se puede ver un anticipo en la definición que Euler hará del concepto de función (Martínez, p. 77); también se pueden observar otros elementos que serán recurrentes en la obra de Euler: la búsqueda de la solución más general y el orden en la exposición, primero explicando el problema por resolver y después delimitando su estrategia para construir la solución.

La trilogía analítica de Euler está compuesta por la *Introductio in analysin infinitorum*, un tratado preeliminar de análisis, en dos volúmenes, escrito antes de 1745 y publicado en 1748; las *Institutiones calculi differentialis*, publicadas en 1755, y finalmente el *Institutionum calculi Integralis*, escrito alrededor de 1763 y publicada desde 1768 hasta 1770; éstas son las obras principales donde Euler trata y desarrolla el concepto de función.

En el primer volumen de la *Introductio in analysin infinitorum* (Euler 3, vol. 1), que trata sobre la "*Explicación de las funciones de cantidades variables, de su solución en factores y por desarrollo en series infinitas*", Euler definió una función como sigue:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.[26] (Euler 3, vol. 1, p. 18)

La definición de función en la *Introductio* viene en cuarto lugar, antecedida por las definiciones de cantidad constante, cantidad variable, y cantidad variable determinada. Teniendo en cuenta lo mencionado sobre el orden metódico con que Euler presenta su trabajo, se puede pensar que el concepto de variable

[26] La traducción al español de los pasajes citados de la *Introductio* de Euler está basada en la traducción al inglés de esta obra por parte de John D. Blanton (Euler 3a) y en la obra ya citada de Carmen Martínez.

(dado que Euler hace tres distinciones sobre lo que es una variable) juega un papel fundamental en este nuevo análisis. Sobre el papel que juega el concepto de función y de variable en la *Introductio,* Carmen Martínez llama la atención sobre tres aspectos (Martínez, pp. 78-79):

1. La definición de cantidad variable antecede a la noción de función siendo que en el análisis moderno esta relación es a la inversa.

2. En la definición euleriana de función nos enfrentamos a la frase "expresión analítica" que Euler ha utilizado para definir a una función en lugar de "cantidad" (usada por Leibniz y Johann Bernoulli), la cual supone evidente y por tanto no define.

3. El concepto de función, en su esencia, deviene independiente de la geometría, que es donde se originó (con Johann Bernoulli).

Sobre el primer punto. ¿En qué sentido es posible considerar que la noción de cantidad constante y cantidad variable sean conceptos básicos y objetos de estudio del análisis siendo que en el análisis moderno el objeto de estudio son las funciones propiamente dichas? La respuesta a esta pregunta primeramente requiere considerar cuál es el objetivo de Euler al escribir la *Introductio*:

> Por lo tanto en el primer libro, como todo el análisis de los infinitos trata con cantidades variables y funciones de tales variables, he dado una exposición completa de las funciones. (Euler 3, vol. 1, p. viii)

De la cita anterior se puede ver que el objetivo de la *Introductio* es poner énfasis en el estudio de las funciones como fundamento del análisis de los infinitos. Ahora bien, hay que mencionar qué papel juegan las variables en este nuevo análisis. Muy elocuente resulta la distinción que Euler hace de cantidades no constantes y variables, propias de las fórmulas diferenciales en el ejemplo citado anteriormente sobre la expresión algebraica de sucesiones, donde el coeficiente n del correspondiente término de la sucesión no es una variable de integración apropiada, para expresar este mismo coeficiente es necesario recurrir a otra cantidad variable. A este respecto hay que considerar que la idea de variabilidad y la noción de variable, en el sentido que actualmente usamos, son dos cosas distintas; a la idea de variabilidad se llega, históricamente hablando, a partir de la noción de incógnita que surge de considerar la representación algebraica de cantidades o magnitudes (Freguglia, pp. 41, 51), lo cual impacta directamente en la expresión de las funciones como fórmulas algebraicas. Así, el distinguir la idea de cantidad variable de la idea de cantidad indeterminada (o incógnita) es lo que parece tener en mente Euler cuando explica su definición de cantidad constante:

> En el análisis común, donde sólo se consideran cantidades determinadas [fijas], las primeras letras del alfabeto representan cantidades conocidas mientras que las letras finales representan cantidades desconocidas, pero esta distinción no es tomada en cuenta en el análisis [o geometría] sublime, sobre todo porque la diferencia entre las cantidades que se consideran aquí se da estableciendo a las unas como constantes y a las otras como variables. (Euler 3, vol. 1, p. 18)

Por otro lado, el que Euler llamara a una función "expresión análitica" (*expressio Analytica*) en lugar de "cantidad" y, sobre todo, que supusiera esto como evidente y no definiera su significado es otro de los puntos que llama la atención. Para esbozar el significado, y la causa de la ausencia de tal definición, revisaremos el prefacio de la *Introductio* donde Euler declara:

> A menudo he considerado el hecho de que la mayor parte de las dificultades que bloquean el progreso de los estudiantes tratando de aprender el análisis derivan de esto: que a pesar de que entienden poco de álgebra ordinaria, aún intentan este arte más sutil. De esto se desprende no sólo que se mantengan en las márgenes, sino que además conciben ideas extrañas sobre el concepto de lo infinito, las cuales ellos tratan de usar. (Euler 3, p. VIII)

En el primer parráfo del prefacio de la *Introductio*, Euler establece que su intención es didáctica al hacer un compendio de problemas "poco espinosos" (Ibídem.) para que el lector (estudiante) se familiarice poco a poco con el concepto de infinito al tiempo que se le revelan las relaciones que hay entre el álgebra ordinaria y las técnicas del análisis. ¿Pero cómo se conecta esta intención didáctica con el término "expresión análitica" de Euler?

Un aspecto que resultó problemático en el análisis de los infinitos de Leibniz fue que estos eran considerados como "ficciones" o "cantidades ficticias" que simplificaban los cálculos pero que, sobre todo expresando estas cantidades como series infinitas, no tenían relación con la cantidad que estaban expresando[27] (Ferraro, pp. 34-36). Pero para Leibniz el que los infinitos fueran "ficciones" no

[27]Número, cuadratura, etc.

reducía al análisis de los infinitos a una "ficción". Así lo expresa en una carta a Varignon el 2 de febrero de 1702:

> Sin preocuparse, uno puede utilizar las líneas infinitamente pequeñas y grandes como conceptos ideales —a pesar de que no existen como objetos reales en el riguroso sentido metafísico— como un medio para reducir el cálculo, así como las raíces imaginarias en el análisis común, como por ejemplo $\sqrt{-2}$. Independientemente de si uno llama a estas "imaginarias", sin embargo son útiles e incluso a veces indispensables a fin de expresar las magnitudes reales[28] analíticamente, de modo que, por ejemplo, es imposible, sin el uso de ellos, dar una expresión analítica para un segmento de línea que divide un ángulo dado en tres partes iguales. Del mismo modo, no se podría elaborar nuestro cálculo de curvas trascendentales sin hablar de las diferencias, que son en el acto de desvanecimiento, e introduciendo de una vez por todas el concepto de magnitudes infinitamente pequeñas... Es siempre de la misma manera que uno sabe las dimensiones por encima de tres, y lo mismo es cierto para las potencias cuyos exponentes no fueron números ordinarios, todo esto crea ideas que son adecuadas para acortar el razonamiento y se basan en la realidad. Sin embargo no hay que imaginar que la ciencia de lo infinito se degrada por esta razón, y se reduce a la ficción, porque siempre queda un infinito sincategoremático[29], por usar el término que se utiliza en la escolástica, y sigue siendo cierto, por ejemplo, que 2 es tanto como $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$, que es una serie infinita, donde todas las fracciones se incluyen al mismo tiempo, a pesar de que uno emplea nada más que números ordinarios y aunque no se tiene en cuenta ninguna fracción infinitamente pequeña, o de fracciones cuyo denominador es un número infinito. También los números imaginarios tienen su fundamento en la realidad (fundamentum in re). Cuando le señalé al difunto Sr. Huygens que $\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}}+\sqrt[2]{1-\sqrt{-3}}$ es igual a $2\sqrt{6}$, estaba tan asombrado y me contestó que, para él, hay algo incomprensible en esto. Pero sólo así, se puede decir, que lo infinito y lo infinitamente pequeño tiene una base tan sólida, como todos los

[28]En este caso Leibniz no se refiere al conjunto de números reales, si no a la forma de representar geometrícamente una cantidad.

[29]Término usado en la lógica escolástica para designar a los elementos linguísticos que no tienen un significado propio y sirven para estructurar lógicamente las oraciones. Por ejemplo las conjunciones, disyunciones y cuantificadores son elementos sincategotemáticos.

> resultados de la geometría, e incluso los procesos de la naturaleza, se comportan como si ambos fueran realidades completas... porque todo obedece a la regla de la razón. (Leibniz 1, vol. 4, pp. 92-93. Citado en Ferraro, p. 35)

La definición de función de Euler presenta una gran similitud con la definición de quien fuera su maestro, Johann Bernoulli. La diferencia entre ambas definiciones se presenta en lo metodológico. Como ya se mencionó anteriormente la definición de Bernoulli encontraba una manera de regresar al análisis de figuras usando el cálculo leibniciano. Sin embargo la lectura de la *Introductio* permite mostrar que lo que Euler tenía en mente es definir los objetos del análisis (cantidades) y las operaciones que se podrían hacer sobre estos objetos. Así, una “expresión analítica” es, en palabras de Carmen Martínez “una expresión compuesta de magnitudes representadas por símbolos y números mediante las operaciones algebraicas (es decir, la adición, la resta, la multiplicación, la división, la exponenciación y la extracción de raíces) o trascendentes (como la exponencial, el logaritmo y “otras que aporta el cálculo integral en abundancia”[30]). (Martínez, p. 78). Significativo de lo anterior resulta la clasificación que Euler hace de las funciones y que se muestra en el siguiente diagrama:

$$\textit{Funciones}\begin{cases} \textit{Algebraicas}\begin{cases} \textit{Racionales}\begin{cases} \textit{Enteras} \\ \textit{Fraccionales} \end{cases} \\ \textit{Irracionales} \end{cases} \\ \textit{Trascendentes}\begin{cases} \textit{Trigonométricas} \\ \textit{Logarítmicas} \end{cases} \end{cases}$$

Euler consideraba que en el caso de las funciones trascendentes, las operaciones algebraicas de sus expresiones analíticas podían aparecer un número infinito de veces, dando como resultado series infinitas, productos infinitos y fracciones continuas infinitas. Más adelante sugiere que una función trascendente debe ser estudiada expandiéndola en una serie de potencias, sin afirmar que todas las funciones trascendentes puedan ser expandidas de este modo, pero sí que se debe probar en cada caso específico. Sin embargo, en el trabajo de Euler había una dificultad que generaría confusión, ya que no logró distinguir entre una función y su representación, es decir, la idea de dependencia o relación entre variables y la

[30] Llamadas series recurrentes [Euler 3, vol. 1, p. X].

idea de expresión analítica (Ferraro, p. 206), pero esto se analizará mas adelante (en el tercer capítulo de este trabajo). No obstante, la *Introductio* cambiaría la manera en que los matemáticos piensan sobre conceptos geométricos. Jahnke escribe:

> Hasta Euler, las cantidades trigonométricas seno, coseno, tangente, etc. se consideraban como líneas relacionadas con el círculo más que como funciones. [...] Fue Euler quien introdujo el enfoque funcional. (Jahnke 2, pp. 115-116)

Donde el tipo de composición de las expresiones análiticas es adaptado a las necesidades de problemas determinados, permitiendo así a las funciones trascendentales llegar a ser integradas e incluso a las expresiones que aparecían implícitamente en la solución de ecuaciones. Es la apertura y generalidad lo que caracteriza el concepto de Euler de función, el cual se puede considerar un punto de inflexión en el proceso iniciado en el siglo XVII sobre la manera en que las cantidades pueden variar en matemáticas. Esto, en palabras de Marco Panza, se enuncia como sigue:

> En la geometría clásica el concepto de variación de un segmento se refiere a la permanencia de la figura ya dibujada y a una actitud cambiante del observador, que toma (o se imagina), por ejemplo, diferentes puntos de esta figura como los extremos de los distintos elementos de una clase de equivalencia de segmentos, esta clase es tomada como un solo segmento, siempre el mismo y siempre cambiante. Un sistema de proporciones puede indicar una relación invariante entre dos segmentos variables. La figura muestra los segmentos variables en su individualidad de segmentos particulares, y el sistema de proporciones expresa la naturaleza de su relación. Al escribir, al igual que Newton, una ecuación algebraica en la forma $y = f(x)$, y al estar referida a un sistema de coordenadas fijo de antemano, la figura ya no tiene ninguna función: la persistencia que nos da derecho a hablar de cambio es la persistencia de la expresión algebraica y no la de la figura. (Panza, p. 150)

Así, el considerar a la expresión algebraica como el elemento que describe una función en su totalidad a la postre sentó las bases del análisis matemático como disciplina autónoma.

Ecuaciones diferenciales parciales a principios del siglo XVIII

La solución que se discute en el debate del problema de la cuerda vibrante a mediados del s. XVIII, proviene de resolver (integrar) un sistema de ecuaciones que se pueden reconocer como equivalentes a una ecuación dierencial parcial. Los desarrollos de las soluciones tanto de d'Alembert como de Euler no son expresadas en los términos de diferenciales parciales; sin embargo, hay en estos desarrollos características que podemos identificar como propias de las ecuaciones diferenciales parciales tal como las concebimos hoy día. Por lo ello es necesario hacer una revisión de los conceptos de diferenciación parcial en la época de d'Alembert y Euler. A este respecto Florian Cajori reconoce que la historia anterior a Euler[31] de los procesos de diferenciación parcial del cálculo. es difícil de rastrear, por la sencilla razón de que en ese momento no se reconoce ni el simbolismo ni la fraseología técnica que distingue los procesos parciales de los ordinarios. (Cajori 2, p. 459) Sin embargo hay algunos aspectos que resaltan tanto Cajori como S. Demidov para el estudio de la historia de las ecuaciones diferenciales parciales.

Por un lado Cajori distingue que ya hay procesos de diferenciación e integración parciales en procesos ordinaros del cálculo, tal como en la derivada de un producto de cantidades, xy, dada por Leibniz; asimismo distingue que si bien una fluxión implica la derivada respecto al tiempo de distintas cantidades de manera simultánea, el método de las fluxiones no implica procesos de derivación e integración parcial.

Por otro lado S. Demidov distingue dos usos de la palabra *teoría* por parte de los matemáticos. Así, en un sentido estricto, "denota una estructura compleja basada en ideas claras y métodos, que cubren un cierto rango de los estudios" (por ejemplo la teoría de Lagrange de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden). Y en un sentido amplio, la palabra teoría designa "una provincia [o campo] de pensamiento" (por ejemplo, la teoría de números o las ecuaciones diferenciales). (Demidov, pp. 325-326) Lo cual, a la vez, le permite distinguir cuatro periodos del desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales,

[31] Cajori la llama *historia pre-euleriana*; sin embargo, esta historia abarca al mismo Euler y por supuesto a d'Alembert. Y el témino historia euleriana se debe a que en 1760 Euler publica una artículo titulado; *Recherches sur l'integration de l'équation* $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z$. Donde la notacion entre paréntesis denota las diferenciales parciales y la ecuación es vista por él como una ecuación de tres variables t, x y z, donde se debe determinar la cantidad z en función (o como función) de t y de x. Igualmente Euler reconoce que por tratarse de una ecuación de tres variables, es una ecuación que no es tratada por el cálculo integral de ese entonces. (Euler 8, p. 60)

siendo de particular interés para este trabajo el primero de ellos y al que Demidov llama "El periodo analítico formal", y que va de la década de 1740 hasta el comienzo de la década de 1770, y estaba casi exclusivamente relacionado con Euler y D'Alembert. Este periodo se caracterizó principalmente por la integración de ecuaciones diferenciales con ayuda de una serie de versiones específicas del método de los multiplicadores, donde eran utilizadas expresiones que representan las diferenciales totales. Los métodos específicos utilizados para la solución de las ecuaciones estaban desprovistos de cualquier interpretación geométrica, siendo ésta la razón por la que Demidov llama a esta etapa el período analítico formal.[32] (Idem, p. 326)

Así, a finales del siglo XVII procesos de diferenciación e integración parcial ocurren incluso en los procesos ordinarios de cálculo sin ecuaciones en derivadas parciales. El ejemplo más simple de diferenciación parcial consiste en la diferenciación del producto xy, donde una variable es por un momento considerada como constante, luego la otra. Más aún, Cajori cita una carta de Leibniz a l'Hôspital de 1692 donde utiliza procesos parciales, pero no emplea explícitamente ecuaciones diferenciales parciales. Leibniz utiliza símbolos especiales como δm para la derivada parcial $\frac{\partial m}{\partial x}$, y ϑm para $\frac{\partial m}{\partial y}$. En esta carta, Leibniz considera la integración de $bdx + cdy$, donde b y c implican a x e y, y construye una ecuación $m = 0$ donde m también implica a x e y. Diferenciando $m = 0$ obtiene $\delta mdx + \vartheta mdy = 0$. Esta última es una ecuación diferencial total. De ello se desprende, dice Leibniz, que $b : c = \delta m : \vartheta m$ o $b\vartheta m = c\delta m$. En el análisis que sigue a esta declaración, Leibniz dice que esta última ecuación estará satisfecha idénticamente. (Cajori 1, p. 459) De este modo para Cajori está claro que, en la obtención de la ecuación diferencial total anterior, Leibniz diferencía parcialmente, tomando primero x como una variable independiente y y como una constante, después a la inversa. Aunque no le queda claro si la identidad anterior fue reconocida por Leibniz como una ecuación diferencial parcial, tal reconocimiento demanda, en el caso de esta identidad, un punto de vista abstracto difícilmente atribuible a los autores en el período de preludio de la historia de

[32] Los restantes períodos son: segundo período desde el inicio de la década de 1770 a la década de 1830, donde se da el desarrollo de la teoría de Lagrange y Monge desarrolla el aspecto geométrico de la teoría (Pfaff, Cauchy y Jacobi completan la investigación inherente a la teoría). El tercer período se prolongó hasta el final de la década de 1860 donde Hamilton fue el primero en establecer vínculos estrechos entre la mecánica y las ecuaciones diferenciales parciales; Jacobi siguió sus pasos. El cuarto período inicia a principios de la década de 1870, cuando Lie construyó su "teoría General", cuyas premisas tomaron forma durante los períodos anteriores, mientras que las ideas geométricas generales, enmarcadas al mismo tiempo, sirvieron como la base.

las ecuaciones diferenciales parciales. Pero esto duraría poco tiempo: ecuaciones diferenciales parciales ya se destacan claramente en seis ejemplos de trayectorias publicado en 1719 por Nicolás Bernoulli. Él toma la curva $y^m = a^{m-1}x$, "cujus est differentialis Completa es $my^{m-1}dy = (m-1)a^{m-2}xda + a^{m-1}dx$; hic $p = my^{m-1} : a^{m-1} = mx : y$, y $q = (1-m)x : a$,..." Aquí tenemos la diferencial "completa", seguida por las dos ecuaciones diferenciales parciales, en la que $p = \frac{\partial x}{\partial y}$ y $q = \frac{\partial x}{\partial a}$. (Cajori 1, p. 460-461)

Respecto a la ausencia de procesos parciales en las fluxiones, Cajori concluye que aun en el caso de una ecuación en tres variables de Newton que ha llevado a varios autores a pensar que existe en ella el concepto de diferencial parcial, no es más que una ecuación diferencial total. Newton considera la ecuación $2x - z + yx = 0$, precisamente como lo hace con las ecuaciones con dos variables, como la que se presentó en la sección 2 de este capítulo, salvo que él asume ahora que existe una segunda relación $x = yy$, de modo que puede eliminar x y $\dot{x}$, y luego procede como en el caso de dos variables. Newton no se refiere a un nuevo principio que participa en su ecuación de tres variables. Además, la solución de Newton a dicha ecuación es correcta en el supuesto de que la ecuación diferencial es total, pero incorrecta en el supuesto de que es parcial. La conclusión de Cajori firmemente establece que ni Newton ni Leibniz en sus escritos publicados escribieron una ecuación diferencial parcial para luego resolverla. (Ibidém, p. 462).

Por su parte, S. Demidov dice que la memoria de Euler titulada *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis*, (Euler 3a) publicada en 1740, constituye la prehistoria de la nueva rama del análisis que son las ecuaciones diferenciales parciales. (Demidov, p. 327) En esta parte de su trabajo Euler desarrolla un método para integrar ecuaciones de la forma $dz = Pdx + Qda$, siendo Q una función de x y a que se debe determinar. Sin embargo, al no hablar Euler de diferenciales parciales en este trabajo, se debe considerar también la obra *De infinitis curvis eiusdem generis sev methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis*[33] , como la prehistoria de las ecuaciones diferenciales parciales. De hecho d'Alembert en sus trabajos sobre mecánica, los

[33]Esta obra, que fue publicada junto con el *Additamentum*, en español se titula *Un método para encontrar las ecuaciones para un número infinito de curvas de la misma naturaleza.* El estudio y comentarios sobre esta memoria están basados en la traducción al inglés del trabajo de Euler indexado como E044 en el Euler Archive, por parte de Ian Bruce. Disponible en: http://www.17centurymaths.com/.

En dicha traducción se usa el término parámetro en sustitución del término módulo originalmente usado por Euler por razones dudácticas. Pero en este trabajo se conserva la terminología de la memoria original.

cuales se mencionarán más adelante en esta sección, cita al *De infinitis curvis...* en lugar del *Additamentum...* Esto porque las bases del método desarrollado en el *Additamentum...* se encuentran en la memoria precedente.

En *De infinitis* Euler se ocupa de determinar las ecuaciones de una familia de curvas del mismo tipo que $y^2 = ax$ donde a es un módulo (parámetro) constante, es decir, no es la variable de la ecuación, pero sin embargo determina una familia infinita de curvas, en este caso parábolas, teniendo en cuenta distintos valores del módulo a. Así Euler considera que si a se convierte en una variable en la ecuación algebraica entonces la familia de curvas está determinada. Pero si no hay una ecuación algebraica dada entre las variables, por ejemplo z y x, detrminar la familia de curvas requiere del cálculo, en particular de una ecuación diferencial[34] para encontrar el parámetro a. El método de Euler consiste en encontrar este parámetro a partir de la ecuación $dz = Pdx$ suponiendo que P es una función de z, x y $a = cte$. Así, $z = \int Pdx$, pero si ahora el parámetro a pasa a ser una variable más entonces la diferencial dz tendrá la forma: $dz = Pdx + Qda$ (Euler 3, pp. 174-176); para hallar el valor de Q se utiliza el siguiente teorema:

> La magnitud A compuesta de alguna manera con las dos variables t y u, si es diferenciada primero respecto a la variable u y $t = cte$, y posteriormente esta diferencial es diferenciada nuevamente ahora con t variable y $u = cte$; lo mismo resulta si A primero es diferenciada primero respecto a t variable y $u = cte$, y luego respecto a u variable y $t = cte$.[35] (Euler 3, p. 177)

Este teorema es usado para integrar dz de la manera siguiente: Si $P = (a, x)$ y $Q = (a, x)$ entonces $dP = Adx + Bda$ y $dQ = Cdx + Dda$, como $z = \int Pdx$ entonces z también es función de x y a, con lo cual $dz = pdx + Qda$. Por otro lado, $dz_{x=cte} = Qda$, entonces $d(dz)_{a=cte} = (Q(a + da, x + dx)dx)da = Cdxda$ y $dz_{a=cte} = Pdx$. Entonces $d(dz)_{x=cte} = (P(a + da, x + dx))dadx = Bdadx$. Por el teorema anterior $C = B$, más aún, B está dada por la diferencial de P con $x = cte$, dividida por da, y como $dQ = Bdx + Dda$ entonces $Q = \int Bdx$ si $a = cte$; de esto se obtiene $dz = Pdx + da \int Bdx$. Si Bdx admite integración la familia de curvas está determinada; si no la admite se puede suponer que $\int Bdx = \alpha \int Pdx + k = \alpha z + k$, donde k es función sólo de a. Es así que este método utiliza procesos parciales de diferenciación e integración en la búsqueda

[34]Una ecuación diferencial con el parámetro a como variable, ya sea de primer orden o de orden superior.

[35]La demostración, que se puede consultar en la memoria original, se basa en la convergencia de valores de $A = A(t + dt, u)$ y $A = A(t, u + du)$ con $A = (t + dt, u + du)$.

de diferenciales totales de una familia de ecuaciones que a su vez determinarán una familia de curvas. Este método expuesto por Euler en *De infinitis,* junto con su método de factores, será ampliamente utilizado por d'Alembert para resolver problemas de mecánica y de fluidos, así como el de la cuerda vibrante.[36]

En el problema V de su *Tratado de dinámica*, d'Alembert estudia las pequeñas oscilaciones de un alambre sin masa que cuelga y es cargado con muchos pesos iguales igualmente espaciados entre sí (ver figura 2.6), siendo el objetivo de este problema determinar la fuerza de la aceleración de cada cuerpo. A partir de consideraciones puramente geométricas, es decir, sin usar el cálculo, encuentra un resultado que coincide con el obtenido por D. Bernoulli en 1727.[37] (d'Alembert 1, pp. 95-97)

Pero si ahora se considera un alambre cargado de pesos infinitamente pequeños e iguales, colocados a distancias infinitamente pequeñas entre sí, y todos infinitamente poco alejados de la vertical; siendo x las abscisas a lo largo del alambre, y las ordenadas infinitamente pequeñas de la curva, s los arcos que difieren infinitamente poco de la x correspondiente, y finalmente, l la longitud del alambre, entonces la fuerza de aceleración de cada pequeño peso es como la suma de los senos de ángulos de contingencia desde la parte superior, menos el ángulo de contingencia multiplicado por la relación de los pesos inferiores con estos pesos, por lo que esta fuerza es para cada punto $\int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s)ddy}{ds^2}$, mismo que también fue dada por D. Bernoulli. Una característica de la solución dada por Bernoulli es que al ser derivada de la ecuación que debe tener la curva, todas los pesos arriban al mismo tiempo a la vertical. (d'Alembert 1, p. 116)

El aporte que hace d'Alembert a este problema consistió en observar que si la curva no tiene esta ecuación dada, entonces cambiará de ecuación de un momento a otro, y el valor general de una y dada sólo se puede expresar como una función de los arcos s o la correspondiente coordenada x, y un tiempo t

[36]El enfoque usado por d'Alembert en su obra titulada *Tratado de mecánica* de 1743, el cual está dirigido a *desterrar principios obscuros de la mecánica y la generación de conocimiento mediante suposiciones y la observación de experimentos* (verdad de la experiencia en palabras del propio d'Alembert y que se refiere a hacer comprobaciones experimentales de los desarrollos teoricos o bien a hacer dichos desarrollos teóricos en base a fenómenos observados), que eran parte de las formas de conocer en la física del siglo XVII. Estableciendo a las matemáticas, en partícular a la geometría, como la ciencia más simple de entender ya que esta se basa en principos evidentes por sí mismos. (d'Alembert 1, pp. i-iii)

Sin embargo el resolver problemas de movimientos de cuerpos y de fluidos realimenta el tratamiento teórico de las bases sobre las que se establecieron como una ciencia dichas soluciones. Así, en palabras de Michel Paty, la invención y desarrollo de teorías en matemáticas "está directamente relacionada con la consideración de los fenómenos físicos"; se puede hablar al respecto "de una doble y recíproca constitución entre el análisis y la teoría en derivadas parciales de la hidrodinámica". (Paty, p. 17)

[37]Esta solución se verá en el apartado siguiente de este capítulo.

transcurrido desde el comienzo del movimiento; esta función, cuando $t = 0$, se convierte en el valor de y en s dada por la ecuación de la primera curva. Por lo tanto, en general, $y = \varphi(t, s)$ expresa una función de t y s, $dy = pdt + qds$, ddy es la diferencia de dy, considerando s como constante, pero también ddy representa su diferencia tomando t constante, $ddy = [\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{ddy}{ds^2}]dt$[38] y $\frac{dp}{dy} = q - (l-s)\frac{dq}{ds}$. d'Alembert observa que dp debe obtenerse variando t solamente y dq variando sólo s. Entonces $dp = \alpha dt + \nu ds$ y $dq = bdt + mds$, esto porque $pdt + qds$, es una diferencial completa, siendo necesario que $\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt}$, es decir, $b = \nu$. Por otra parte, la ecuación $\frac{dp}{dt} = q - \frac{(l-s)dq}{ds}$ da $\alpha = q - (l-s)m$, y entonces $mds = \frac{(qds - \alpha ds)}{l-s}$; mediante la adición de bdt o νdt de un lado y de otro respectivamente, se tiene $mds + bdt$ ó $dq = \frac{(qds-\alpha ds)}{l-s} + \nu dt$. Por lo tanto $dq(l–s) - qds = \nu dt(l–s)–\alpha ds$. Esta ecuación será válida en caso de que todas las curvas de las variables en cuestión puedan estar contenidas en la ecuación general $y = \varphi(t.s)$ (d'Alembert 1, p. 117). Sin embargo, lo anterior implica la integración de una ecuación lineal de segundo orden, lo cual no resulta posible para D'Alembert, y no da lugar a expresiones analíticas explícitas para las soluciones de estas ecuaciones.

2.3. Acústica y el problema de la cuerda vibrante en los siglos XVII y XVIII

Los trabajos que trataban el problema de la cuerda vibrante durante los siglos XVII y la primera mitad del siglo XVIII ponían, como menciona Oliver Darrigol (Darrigol), énfasis primero en el carácter armónico del sonido que se producía y posteriormente en el movimiento armónico que una cuerda en vibración realizaba. Adicionalmente el tema de la armonía está asociado con el desarrollo y aritmetización de las teorías de las proporciones en la Baja Edad Media y el Renacimiento, en las cuales se hizo hincapié en la utilización de las proporciones en contextos musicales, a través del problema de la división del tono.[39] Este proceso aritmetizador polarizó a veces el uso de las proporciones entre la tradición geométrica y la nueva tradición aritmética, en un proceso que se extendió prácticamente hasta el siglo XVI, cuando los conflictos entre estas dos tendencias "dieron lugar a la consolidación de la teoría aritmética de las

[38] Esto es la variación de la solución anterior respecto al tiempo.

[39] Más concretamente, en contextos de la teoría de composición musical o música teórica, que en ese momento estaba separada de la música práctica. (Abdounur 3)

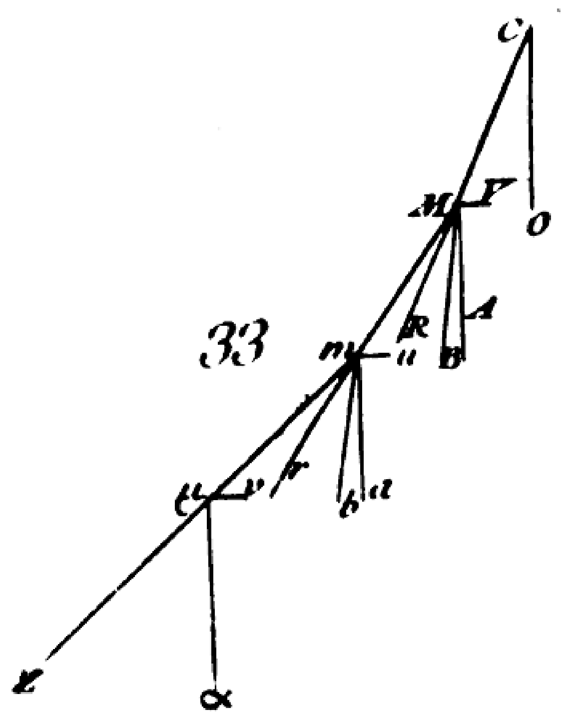


Figura 2.6: Representación de d'Alembert para el problema de un alambre sin masa cargado de pequeños pesos μ,m, M que se apartan de la vertical CO. (Figura tomada de d'Alembert 1)

proporciones". (Abdounur 1, p. 8) De modo que en el siglo XVII, la teoría de la aritmética de las proporciones se convirtió en la teoría dominante.

Una de las mayores preguntas que surgieron en la acústica, como ciencia de la música, se refirió al "misterio de los armónicos del sonido".[40] Marin Mersenne, en su obra *Harmonie universelle* (Mersenne) trató de explicar este fenómeno mediante el establecimiento de la siguiente paradoja: ¿Cómo podría una cuerda -una cuerda de cierta longitud - producir más de una altura,[41] al mismo tiempo? Esta pregunta no puede responderse basándose únicamente en el pitagorismo.[42] (Abdounur 1, p. 32)

En su discusión de los instrumentos de cuerda, Mersenne describe uno de los hechos básicos de su teoría: que bajo condiciones de tranquilidad y con la experiencia adecuada, él y muchos músicos (aunque también menciona que Aristóteles tenía conocimiento del fenómeno) pueden oír por lo menos cuatro tonos a la vez, de una de las cuerdas de tonos bajos de la viola: el tono natural, la octava alta, el duodécimo y decimoséptimo tono de La:

> Sin embargo, cabe señalar que [Aristóteles] no explicó que al pulsar la cuerda y dejarla sonar libremente, hace al menos cinco sonidos al mismo tiempo, el primero de ellos es el sonido natural de la cuerda y sirve como base para el resto .... Estos tonos siguen la relación de los números 1, 2, 3, 4, 5 [....] (Mersenne, Libro IV; proposición XI; p. 208)

Este fenómeno desconcertaba a Mersenne, porque no podía ver ninguna correspondencia con el movimiento observado de cuerdas:

---

[40]Este problema se refiere a la ondulación que una cuerda vibrante induce en una cuerda cercana, o, en un segmento de la misma cuerda donde se ha colocado un obstáculo para dividirla.

[41]En música el término altura se refiere a la frecuencia o tono de una nota, así, es que se habla de notas altas o notas bajas. La formulación de Mersenne no considera el movimiento que hace la cuerda como directamente relacionado con los sonidos producidos, sin embargo sirve para distinguir entre lo que Mersenne llama las malas cuerdas, las cuales producen ondulaciones "con ondulaciones en ellas" cuando son pulsadas, y las buenas cuerdas que producen una ondulación "limpia" al pulsarlas. (ver figura 4.1, Anexo 1).

[42]Esto es, explicar la existencia de intervalos musicales armónicos. La expresión de estos intervalos mediante razones de números enteros pequeños "es una noción Pitagórica, que probablemente se basa en la longitud correspondiente de la cuerda que vibra en un monocorde". (Darrigol, p. 346)

La pregunta que plantea Mersenne abarca un problema conocido como "la división del tono", la imposibilidad de resolverlo en terminos pitagóricos es que los armónicos de un tono no siempre están en proporción racional y había que hacer una aproximación llamada "media proporcional" y que requería de la geometría para encontrar estas proporciones. En la figura 5.2 del Anexo 1, GH y HI son segmentos dados, HK es la media proporcional de modo que $\frac{GH}{KH} = \frac{KH}{HI}$.

> [Puesto que la cuerda] produce cinco o seis tonos al mismo tiempo [...], parece que es del todo necesario que agite el aire cinco, cuatro, tres, y dos veces al mismo tiempo, esto es imposible imaginar, a menos que se asuma que la mitad de la cuerda agite al aire dos veces, que la tercera, cuarta y quinta partes se agiten tres, cuatro y cinco veces respectivamente, mientras que la cuerda entera se agita una sola vez. Esto va en contra de la experiencia, que demuestra claramente que todas las partes de la cuerda hacen el mismo número de movimientos en el mismo tiempo, ya que la cadena continua tiene un solo movimiento, a pesar de que las partes de la cuerda cerca del puente [de la viola] se mueven más lentamente. (Mersenne, Libro IV; p. 210)

Ante este desconcierto Mersenne llegó a especular que algún tipo de reacción peculiar del aire ante los golpes de la cuerda podrían explicar los tonos más altos. En particular una reflexión del aire contra la cuerda iniciando un nuevo movimiento. Esto lo explica de dos maneras:

> [...] se puede decir que el aire tiene una tensión mayor, es decir, está dispuesto de manera que cuando es golpeado va y regresa a mayor velocidad con mayor frecuencia que la cuerda u otros cuerpos por los que es agitado, al igual que la cuerda que se extiende en un instrumento es mucho más que rápida que el dedo, el lápiz o el arco con la que es tocada. O bien se puede decir que el aire que es golpeado y enviado, por ejemplo, al lado derecho de la cuerda después de que ella se remonta a la izquierda, por lo que ella lo reencuentra en el camino, lo rechaza por segunda vez y lo impulsa en un nuevo movimiento, por lo que ahora se enfrentan la octava alta con el movimiento o el sonido natural de la cuerda, que lleva un mismo tiempo para un mismo número de retornos, mientras que el aire de retorno está en proporción de dos contra uno, pero cuando la cuerda retorna la tercera vez le imprime otro movimiento al aire, por lo que ahora la proporción es tres contra uno lo que resulta en el doceavo armónico, a continuación, el quinceavo, y el diecisieteavo. (Ibídem.)

Esta explicación que apela a las propiedades elásticas tanto de la cuerda como del aire no debe confundirse con un principio de superposición como al que apelará Daniel Bernoulli un siglo más tarde. La explicación de Mersenne se basa en la acumulación de porciones de aire en torno a la cuerda vibrante. El postular que el aire tiene una mayor tensión y que debido a eso aumenta su velocidad para regresar al encuentro de la cuerda puede estar basado en algunos hechos pneumáticos apelando, posiblemente, a algún tipo de plenismo,[43] sin embargo, las conclusiones que Mersenne obtiene de este estudio no son de índole puramente física:

> Si el sonido de cada cuerda es el más armonioso y agradable, con un mayor número de sonidos diferentes emitidos al mismo tiempo, y si se me permite comparar las acciones morales a las naturales y para equiparar la física con las acciones humanas, diré que cada acción es la más armoniosa y agradable a Dios, ya que se acompaña de un mayor número de motivaciones, siempre y cuando éstas sean todas muy buenas [...] (Ídem, p. 211)

Observaciones sobre los armónicos superiores y la resonancia[44] entre dos cuerdas se encuentran ya en trabajos de Galileo, Huyghens y Leibniz, por mencionar a los más reconocidos. Cada observación sobre los sonidos y sus frecuencias son matizadas atribuyéndolas a vibraciones simpatéticas[45] entre la cuerda y el aire o entre cuerdas vecinas. Pero es John Wallis, en 1677, uno de los primeros en informar de observaciones sobre el sonido y el movimiento que hace una cuerda cuando vibra armónicamente, identificando y caracterizando lo que ahora se conoce como los nodos de vibración, aunque sin emitir ninguna opinión sobre las causas de este fenómeno. (Truesdell, p. 119, Wallis, p. 480)

Utilizando una cuerda para excitar un modo de vibración superior (o armónico superior) en una segunda cuerda, a la que se le colocan encima pequeños

[43]Steven Shapin y Simon Schaffer comentan que para febrero de 1648 la cuestión del vacío aún no estaba aclaradada para Mersenne:

> [Hobbes]... en febrero de 1648 invitó a Mersenne y a sus colegas de París a intentar experimentos sobre la transmisión de la luz y el sonido a través del espacio de Torricelli. Experimentadores en París y Londres anunciaron que "no queremos declarar que existe un verdadero vacío en el vidrio sobre el mercurio". Cuando Mersenne discutió estos ensayos con Hobbes, sin embargo, declaró sus dudas acerca de la conclusividad de esos experimentos. (Shapin y Schaffer, p. 86)

[44]Es decir, que al pulsar una cuerda produciendo una cierta nota en un instrumento musical, otra cuerda vecina comienza a vibrar también, observándose una proporción bien definida entre las longitudes de ambas cuerdas.

[45]La resonancia simpatética es un tipo especial de resonancia en la cual las ondas sonoras de un vibrador hacen vibrar a otro cuerpo por medio del aire. El segundo vibrador debe tener la misma frecuencia natural del primero, o tener una frecuencia que sea múltiplo entero de la frecuencia natural del primer vibrador. (Christensen, p. 248)

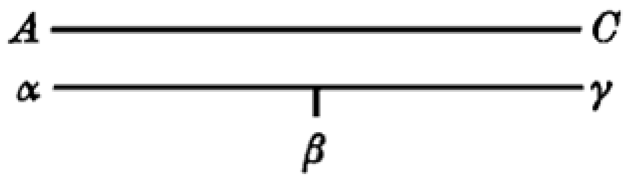


Figura 2.7: Representación de Wallis de un nodo, en β, para el segundo armónico de la cuerda $\alpha\gamma$. Wallis detectó estos nodos colocando pequeños trozos de papel a lo largo de toda la cuerda $\alpha\gamma$ antes de hacerla vibrar detectando que había puntos intermedios de la cuerda donde los papeles no eran empujados por esta, determinando así que en ese punto de la cuerda no hay movimiento. Estos armónicos observados por Wallis debieron ser de muy poca amplitud ya que sólo presenta la posición de los nodos y no la forma en que la cuerda se curva al vibrar. (Figura tomada de Wallis)

trozos de papel, Wallis señala que cuando la primera cuerda es afinada a una octava superior respecto de la segunda y pulsada para ponerla a vibrar, es de llamar la atención que "las dos mitades de esta otra [cuerda] vibran mas no así el punto medio" :

> mientras que desde hace mucho tiempo se observó que si una cuerda de viola o de laúd se tocaba con el arco o la mano, otra cuerda en el mismo u otro instrumento no lejos de él, (que es consonante con ésta, o es una octava alta, o similares) vibra al mismo tiempo con su propio tono. Las causas de esto (por haber sido anteriormente discutidas por los investigadores) no las investigaré por ahora, pero agregaré esto a las observaciones anteriores: que no vibra la totalidad de esa cuerda, sino que lo hacen separadamente sus distintas partes, y que son consonantes con el todo o las partes de la cadena que es plañida. Por ejemplo, suponiendo AC a una octava superior a $\alpha\gamma$, y por lo tanto consonante con cada mitad de ella, [al vibrar] permaneció detenida en β (Wallis, pp. 839-840; ver figura 2.7):

Posteriormente Wallis procede a encontrar los nodos de lo que llamamos los modos tercero y cuarto en la primera cuerda, pero ahora afinada a un duodécimo tono alto, a una doble octava alta, y así sucesivamente, por encima de la segunda; a partir de esto señala que los nodos dividen a la segunda cuerda en tres y cuatro partes alícuotas (iguales), respectivamente. En esta carta de Wallis no hay deducciones matemáticas pues como ya se mencionó en el párrafo anterior, no es el objetivo del autor. Sin embargo, hay dos puntos a resaltar en ella:

Wallis, por un lado, identifica puntos bien definidos en la cuerda que no se mueven mientras ésta vibra, no obstante la continuidad de la cuerda; por otro lado, la identificación de estos puntos, los cuales aumentan en número mientras más alto es el armónico, pone de manifiesto la existencia de distintos modos de vibrar de la cuerda, correspondiendo un modo de vibración a cada armónico.

En 1692, Francis Roberts fue el primero en publicar las observaciones sobre la manera en que presionando suavemente sobre lo que hoy se conoce como un nodo,[46] mientras la cuerda se frota en otros lugares, los modos de vibración más altos podrían ser provocados en una única cuerda, mediante la obstrucción de esta, dividiéndola así en dos partes. Este es el caso de la trompeta marina (una variante del antiguo monocordio), donde una única cuerda se divide en dos partes obstruyéndola con el pulgar, presionando suavemente entre la caja de resonancia (parte inferior de la cuerda que mide 1.3 metros) y el brazo del instrumento (parte superior de la cuerda que mide 0.5 metros aproximadamente y donde se tañe la cuerda con un arco). El objetivo de Roberts es explicar, primero, cuáles son los lugares de la cuerda donde se producen las notas armónicas, y después, porque los armónicos séptimo, onceavo, treceavo y catorceavo están fuera de tono mientras que el resto sí están en tono. Roberts escribe:

> "[...] en la trompeta marina no se ocluye [la cuerda] tan cerca ni tan fuerte como en otros instrumentos, pero al tocar la cuerda suavemente con el pulgar, en el lugar que hay coincidencia mutua de la parte superior e inferior de la cuerda se producirá el sonido". (Roberts, p. 561)

Y señala "Que la trompeta Marina no producirá ningún sonido musical sino cuando la obstrucción [con el pulgar] hace de la parte superior de la cuerda una parte alícuota del resto, y por lo tanto del todo." (Ibídem) Esta observación de Roberts tiene importancia ya que la armonía se presenta sobre una sola cuerda, lo cual elimina la acción del aire como causa de los armónicos superiores entre cuerdas (no así del sonido escuchado), y porque exhibe un diagrama donde representa los lugares donde han de hacerse las obstrucciones sobre la parte superior de la cuerda relacionando directamente la proporción entre tonos con la proporción entre las longitudes de ambos segmentos de la cuerda. Además de que por primera vez se representan los armónicos de una cuerda con la figura, hoy canónica, de los husillos resultantes de la superposición de dos curvas onduladas.

[46] Roberts llama a los nodos "puntos inmóviles". El término "nodo" es acuñado por J. Sauveur en 1697.

(Ver figura 2.8)

En 1701 Joseph Sauveur expone ante la Academia de Ciencias de París el tratado titulado "*Système général des intervalles des sons, et son application à tous les systêmes et à tous les instrumens de musique*". (Sauveur 1, pp. 299-366) En este tratado Sauveur se propone estudiar las propiedades del sonido en una nueva ciencia que va más allá de la música a la cual llamó "acústica" y cuyos métodos estarán basados en los métodos de otras ciencias, en particular los de la óptica, con la cual la acústica está muy relacionada. (Ibídem, p. 299) Este tratado que tiene por objeto el estudio del sonido en general fue comenzado en 1696 y expuesto por primera vez el 1697 en un seminario de música especulativa en el College Royal. Sin embargo no fue impreso de inmediato debido a cuatro causas que le impidieron a Sauveur hacerlo, las cuales él mismo consigna. Siendo la primera de estas causas el hecho de la poca aceptación de su nuevo sistema por parte de los músicos, dado que los nombres y la notación por él usada era totalmente nueva. La segunda es la ausencia de un sonido "fijo" que sirviera de referencia y con el cual se pudieran comparar todos los demás sonidos; a decir de C. Truesdell, Sauveur trata de establecer "una medida común" para todos los intervalos de los sonidos, capaz de medir las diferencias entre lo menos perceptible posible entre ellos, de tal manera que se podría elegir entre ellos los necesarios para la música común. Por tanto, Sauveur trata de dominar un rango continuo de frecuencias, no sólo las escalas discretas utilizadas en la música. (Truesdell, pp.118-119). La tercera razón es la falta de una explicación del todo satisfactoria a la paradoja planteada por M. Mersenne. Finalmente Sauveur llegó a concluir lo siguiente acerca de esta paradoja:

> Mientras meditaba sobre el fenómeno del sonido, se me hizo observar que especialmente en la noche uno puede oír, de cuerdas largas, no sólo el sonido principal, sino también otros pequeños sonidos, una duodécima y diecisieteavo alto .... Llegué a la conclusión de que la cuerda, además de las ondulaciones que hace en toda su longitud para formar el sonido fundamental, puede dividirse en dos, tres, cuatro, ondulaciones, etc, que forman la octava, el duodécimo, el quinceavo [armónico] de este sonido. Entonces encuentro la necesidad de nodos y vientres de estas ondulaciones, así como la forma de percibirlas al tacto y a la vista,[47] como explico en los tonos armóni-

[47]Sauveur debió buscar aumentar la amplitud de las vibraciones para poder percibirlas con otros sentidos diferentes al sentido del oído ya que era sordomudo. (Abdounour 1, p. 35)

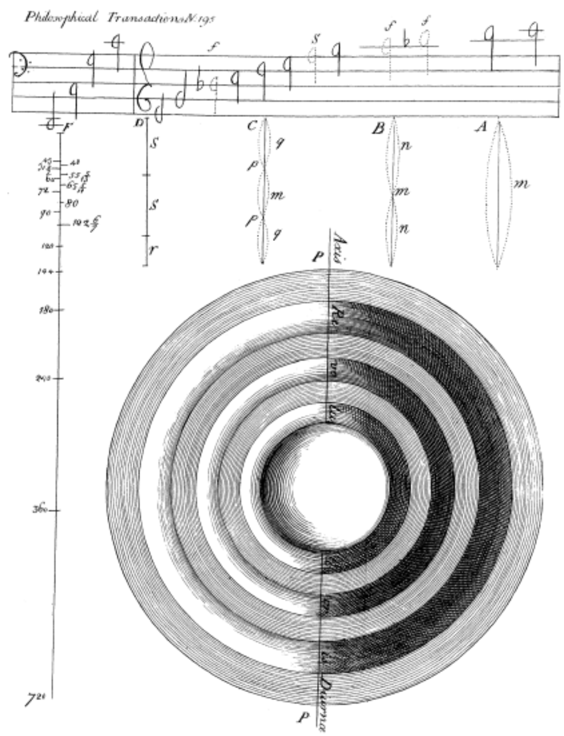


Figura 2.8: Representación de los armónicos de una cuerda de trompeta marina que hace Roberts. En la parte superior, en el pentagrama se representa la nota asociada a cada armónico y su correspondiente curva (en líneas punteadas), donde m es el punto medio de la cuerda, n y q son los puntos de máximo desplazamiento, p los nodos. A, B y C son los tres primeros armónicos en tono; D es el onceavo armónico el cual ya está fuera de tono. Para el armónico D no hay una representación con husillos para la vibración de la cuerda, sólo se indican las partes alícuotas en las que la cuerda se divide al vibrar; una explicación es que la amplitud de la vibración para ese armónico ya no es muy perceptible. A la izquierda se encuentra el diagrama que marca las longitudes las proporciones, donde al ocluir la cuerda y tañerla, se producirán los sucesivos armónicos. La figura circular plantea una analogía entre las formas de vibración de una trompeta con la cuerda de la trompeta marina, pues ambos sonidos son muy semejantes.

cos (Sauveur, pp. 300-301)

Es decir, en una cuerda existe una superposición de ondulaciones, aunque no es todavía un principio como el que se conoce hoy día, ya que Sauveur considera que estas ondulaciones se distribuyen a lo largo de segmentos bien definidos de la cuerda en vibración. Más adelante se verá qué significa una ondulación y cómo es que estas se superponen en el sistema de Sauveur.

El cuarto motivo por el cual no se imprimió el tratado del sonido de Sauveur fue debido a que buscaba desarrollar y actualizar al nivel de los asuntos de la óptica a los conocimientos sobre vibraciones simpáticas de los instrumentos de viento y los instrumentos acústicos para así contar con "un perfecto campo de la acústica", esto es, concretar su intención de hacer de la acústica la ciencia general del sonido.

Sauveur obtuvo los armónicos superiores de la vibración de la cuerda mediante el punteo de un monocordio después de colocar un obstáculo delgado en una fracción simple de la longitud de la cuerda. Encontrando que la cuerda no se movió considerablemente para una secuencia de puntos equidistantes que calificó de "nodos", en alusión a la teoría de la órbita lunar.[48]

Aunque ya anteriormente Wallis había obtenido los armónicos superiores de una cuerda en resonancia con otra cuerda afinada con el tono de uno de los armónicos de la primera, el tipo de resonancia descubierta por Wallis tenía una amplitud mucho menor que la resonancia causada por un submúltiplo de la frecuencia natural de resonancia de la cuerda (Darrigol, pp. 348-349), fenómeno que se logra observar mejor en cuerdas largas como lo hicieron Roberts y Sauveur. Esto explica porqué los digramas de los armónicos de Wallis no incluyen los husillos, sólo se marcan los puntos donde la cuerda no se mueve. Estos husillos son una parte fundamental en el tratado de Sauveur, así en su definición

[48]Fontenelle reseña en la Historia de las Memorias de la Academia el origen de los términos usados por Sauveur:

> El Sr. Sauveur llamó a estas vibraciones parciales y separadas Ondulaciones, siendo los puntos fijos los nodos, y el punto medio de cada vibración, en el que el movimiento es más grande, vientre de la ondulación. Estas nuevas expresiones, así como la novedad de la materia, hacen necesario que sean extraídas de la astronomía, sobre todo del movimiento de la luna, que aparece como apropiado para dar una imagen razonable. (Academia de Ciencias 3, p. 121)

Sauveur, en su tratado sobre la armonía, no da cuenta acerca del origen de los términos por él usados, pero considerando lo dicho por Fontenelle en el parrafo anterior se puede interpretar que Sauveur consideraba las vibraciones como algo que se propaga a lo largo de la cuerda y que su movimiento expresará una curva que cruza de un lado a otro de la línea recta que forma la cuerda estando en reposo, de manera análoga al movimiento que describe la Luna cuando cruza de un lado a otro del plano de la eclíptica terrestre.

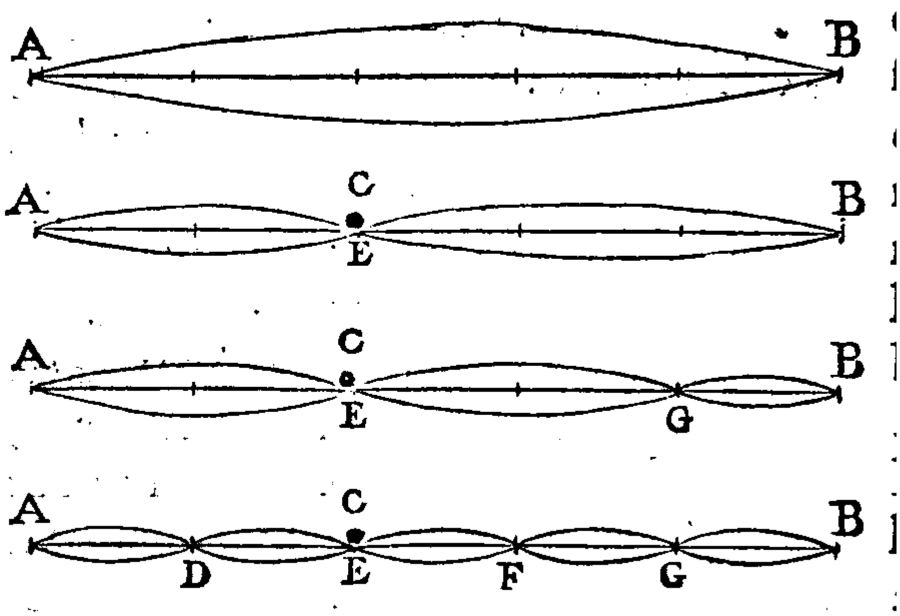


Figura 2.9: Diagrama de Sauveur para la obtención de los primeros armónicos de un monocordio.

de armónico se puede leer:

> Llamo tono armónico de un tono fundamental, a aquel que realiza varias vibraciones en tanto que el tono fundamental sólo realiza una; así, el doceavo tono del tono fundamental es armónico, porque hace tres vibraciones en tanto que el tono fundamental no hace mas que una. (Sauveur, p. 349)

Para ejemplificar esta definición Sauveur propone imaginar que se divide la cuerda de un monocordio en cinco partes iguales. Punteando esta cuerda libremente se obtendrá el sonido llamado fundamental de esta cuerda. Luego, en la división D, se puede poner un obstáculo delgado C (ver figura 2.9), como la punta de una pluma, si la cuerda es buena.[49] El movimiento de esta cuerda se comunica a cada lado del obstáculo. A continuación, se reconoce el sonido del quinto armónico, es decir, un diecisieteavo.

La explicación de Sauveur a este fenómeno es la siguiente:

[49]Buena en el sentido usado por Mersenne.

> Para comprender la razón de este efecto, nótese que mientras se puntea la cuerda AB, libre de obstáculos en ella, hace sus ondulaciones (ondula) en toda su longitud; mas si se coloca un obstáculo C sobre la primera división D de la cuerda, que se supone divida en 5 partes iguales, la ondulación total AB se divide de entrada sobre los dos segmentos AD, DB, y como AD es $\frac{1}{5}$ de AB ó $\frac{1}{4}$ de DB, este segmento ondula 5 veces más rápido que el total AB ó 4 veces más rápido que la otra parte DB; de suerte que la parte AD arrastra a la parte vecina DE y la obliga a realizar su movimiento, quedando por consecuencia iguales; porque una parte más grande irá más lentamente, y una más pequeña irá más rápido; y posteriormente la parte DE obliga a la siguiente EF a seguir el mismo movimiento; así consecutivamente hasta la última parte; de manera que todas las partes ondularán de manera cruzada en las divisiones D, E, F, G; y en consecuencia la cuerda hará el 5º tono armónico o una XVIIª. (Savueur, p. 352)

En una nota al margen de esta explicación Sauveur aclara que una ondulación de una cuerda es la figura en forma de husillo que hace una vibración de esta cuerda. C. Truesdell considera que esta explicación del fenómeno de los armónicos está llena de imaginación y hace un uso libre de la palabra ondulación (Truesdell, p. 119). Sin embargo será una referencia importante en los subsiguientes estudios de la cuerda vibrante. Sauveur considera que las ondulaciones tienen forma de husillo y son distintas de una vibración, que estas ondulaciones se alinean (más que superponerse) consecutivamente a lo largo de la cuerda dividiéndola en fracciones enteras y que la velocidad de una ondulación varía en proporción inversa a la longitud del segmento donde se ejecuta. Detrás de estas consideraciones se está apelando a un estado de homogeneidad en la cuerda para que pueda ser transmitida una ondulación de un segmento a otro de cierta manera que la ondulación a cada lado del obstáculo sea equivalente en algún sentido. Elementos que de una u otra forma serán refejados en las ecuaciones diferenciales de Taylor, los Bernoulli, d'Alembert y Euler.

Para Thomas Christensen el problema de la cuerda vibrante fue un problema que existía en una "nebulosa tierra de nadie", entre la física y las matemáticas, por lo que podía ser abordado de muchas maneras. (Christensen, p. 33) De esta multiplicidad de enfoques hay dos que resultan determinantes en el estudio del problema en cuestion: el enfoque de Mersenne y el de Rameau que abarcarán más allá de lo puramente musical (tonos armónicos), y sus teorías se ocuparán de estudiar el modo en que se mueve la cuerda, donde si bien no integran sus concepciones musicales y mecánicas en un cuerpo teórico sólido, sí dan pie a discusiones, tanto en lo teórico como en lo metodológico, que paulatinamente desembocarían en lo que hoy se conoce como el debate de la cuerda vibrante.

Pero un asunto era describir la armonía de los sonidos y otro el describir el movimiento de la cuerda vibrante; entre las principales complicaciones estaban, por un lado, conciliar las observaciones de los experimentos con cuerdas vibrantes con la física considerada, y por otro el describir matemáticamente la forma y recorridos de la cuerda. Ya se mencionó anteriormente en esta sección, el problema de la cuerda vibrante puede ser abordado con una gran variedad de enfoques, pero para el siglo XVIII las mayores preocupaciones e inovaciones se darán en el ámbito de las matemáticas, disciplina con la que se procura atacar los problemas dada la característica un tanto metafísica de los enfoques físicos.[50] Para introducir los problemas que se encontraban los autores del siglo XVII y XVIII, retomaremos el tratado de Mersenne sobre la armonía.

La demostración del movimiento de una cuerda que vibra se encuentra en el tercer libro del *Tratado de la naturaleza del sonido, y los movimientos de todo tipo de cuerpos* (*Traité de la nature des sons, et des mouvements de toutes sortes de corps*, incluido en el primer volumen de la *Armonía Universal* de Mersenne)[51]:

> Sean, la cuerda anterior AB que se une a los dos caballetes del monocordio en los dos puntos A y B, y la cuerda AF conectando los puntos A & F, yo digo que la cuerda AB que está trazada hasta el

[50]Como ya se vió anteriormente Mersenne en sus conclusiones equipara las acciones humanas con la física. Esta forma de razonar es lo que d'Alembert, en su obra Eléments de Musique, llamó "razonamientos de analogía y conveniencia":

> No debemos buscar aquí esta evidencia contundente, que es característica sólo de los libros de geometría y que se produce muy raramente en aquellos donde se mezcla la física. Siempre habrá en la teoría de los fenómenos musicales una especie de metafísica, que implícitamente asumen estos fenómenos, y que viste su naturaleza oscura, no se debe esperar en este asunto las llamadas demostraciones, es mucho que se hayan reducido los hechos principales a un sistema bien ligado y bien conectado, que ellos deducen de un solo experimento, [...]
>
> en las materias de Física [...] No está permitido más que el uso de razonamientos de analogía y conveniencia [...]. (d'Alembert 7, pp. xiii-xiv)

Para Patrice Bailhache esto implica que no es posible llegar a demostrar en física, pero aún así pueden ser practicadas las deducciones. d'Alembert reserva el término demostración para las matemáticas (geometría) donde la demostración es puramente lógica y con ello adquiere mayor cetidumbre. (Bailhache , pp. 362-363)

[51]Esta demostración está directamente inspirada en la que Isaac Beeckman dio en 1615 para determinar la frecuencia de vibración. A este respecto ver Bailhache.

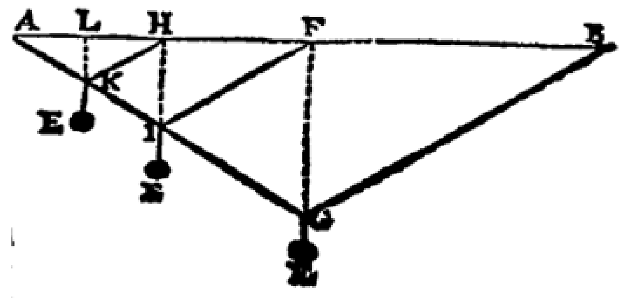


Figura 2.10: Diagrama de Mersenne para determinar el movimiento de una cuerda vibrante. La recta AB es la posición de reposo de la cuerda y la línea AFB es la forma inicial de la cuerda. Esta figura es similar a la de Beeckman de 1615, sólo que en ésta el punto G aparece en la parte superior de la recta AB. (Figura tomada de Mersenne, Libro III)

> punto G regresará sólo una vez al punto F, mientras que la cuerda AF trazada hasta el punto I, regresará dos veces al punto H, como lo demuestra la experiencia, por lo que AF siempre volverá dos veces, mientras que AB no volverá más de una vez: en consecuencia el número de retornos de AF es el doble de AB, y como la cuerda AB es el doble de la cuerda AF, de donde se sigue que el número de movimientos o retornos de una cuerda aumentada en la misma razón que su longitud sea menor, y por lo tanto, que la razón de estos retornos es inversa de la longitud de la cuerda.
>
> La razón de esta desigualdad de retornos se toma de la misma tensión, porque el punto G de la cuerda AB también va hasta F, el punto I de la cuerda AF va a H; esto evidencia que la cuerda AB también es tensa, y también violentada en el punto G, lo mismo que la cuerda AF lo está en el punto I: pero debido a que el punto G tiene el doble de modos de ir hasta F, que el punto I hasta H, se sigue que el punto I irá hasta H & volverá de H hasta el punto I, mientras que G va a F, y batirá dos veces el aire a lo largo de la línea AF, mientras que G batirá una vez el aire a lo largo de la línea AB. (Ver figura 2.10) [Mersenne, Libro III, p. 157]

En esta parte Mersenne describe la mitad de la trayectoria de la cuerda como un pequeño retorno $HI - IH$ ó $GF - FG$. Y las cuerdas no van más allá de la posición lineal de equilibrio. Para Patrice Bailhache esto es una hipótesis de trabajo simplista que Mersenne abandonó después (Bailhache 1, p. 86); sin embargo al estar solamente determinando la proporcionalidad entre la frecuencia de vibración y la longitud de la cuerda también es posible que Mersenne apelara a la simetría del movimiento para hacer ver dicha proporcionalidad. Es cierto que esta hipótesis no permite ir mucho más allá en el análisis del movimiento, pero tampoco parece ser la hipótesis principal como para pensar que tuvo que ser abandonada. De hecho las hipótesis principales se encuentran ya en el corolario I de la página siguiente: "Uno puede comparar la velocidad del punto G o I con la velocidad de los proyectiles y otras piedras que se lanzan violentamente,[52] porque serán todavía más abundantes en el principio de su movimiento que en cualquier otro lugar;[...]" (Mersenne, p. 159). Así, Mersenne compara el movimiento de las cuerdas con el de los cuerpos pesados lanzados verticalmente hacia arriba, y por lo tanto, que consta de dos partes una ascendente y otra descendente y cambia la figura, de modo que el punto medio de la cuerda, G o I, desde la parte superior ahora excede la posición de equilibrio, y sobre esto escribió:

> En segundo lugar yo digo que siempre ralentiza su movimiento desde C hasta D, donde está con tanto retraso que muchos creen que reposa un tiempo antes de que retorne a F, por lo que está tantas veces como se da, o devuelve, por ejemplo si es de 2000 [...]. En tercer lugar, lo cierto es que el cambio de la cuerda de C hasta D es natural ya que desde C hasta E, que a medida que regresa a su centro, o a la línea de dirección AEB, y el resto de E a D pueden ser llamados violentos, porque se aleja de su centro$E$, [...]. (Ver figura 2.11). [Mersenne, Libro III pp. 160-161]

Con este planteamiento Mersenne encuentra que hay tres problemas muy importantes por resolver: primero, saber si la cuerda no siempre es más rápida desde F y hasta E en la segunda oscilación, pues por experiencia es sabido que los cuerpos pesados son tanto más rápidos si se aproximan más a su centro, y considerando que E es el centro de la cuerda, el punto E es a la cuerda lo que el centro de la Tierra es para una piedra que cae. El segundo problema consiste en saber porqué la cuerda no se detiene en E durante la primera oscilación, tomando en cuenta que no tiene otro propósito más que el regreso a su centro; sin embargo, lo deja dos mil veces antes de quedar en reposo. Y el tercer problema es la causa de los retornos, o reflexiones de la cuerda, porque es muy difícil saber

[52]En el contexto de las categorias de los movimientos naturales y violentos de Galileo.

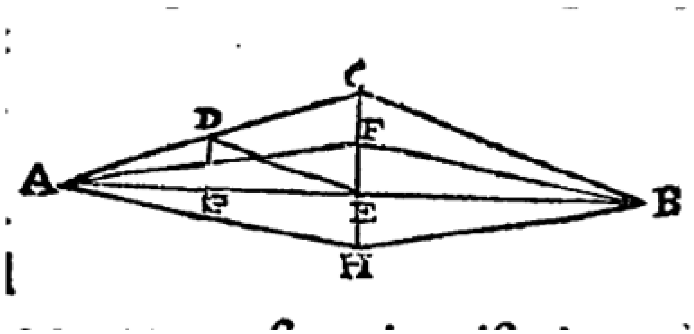


Figura 2.11: Movimiento de una cuerda vibrante según Mersenne. Nótese que el movimiento no es simétrico pues en cada oscilación va decayendo su rapidez, así la trayectoria se "ralentiza" del punto C al punto H para después llegar al punto F, iniciando una nueva oscilación decreciendo su amplitud hasta finalmente quedar quieta en el punto E, el cual es su lugar "natural". Figura Tomada de Mersenne, Libro III.

lo que la está forzando a regresar de C a E; [...]" (Ibídem.) La solución a estos problemas se encuentra mediante un experimento:

> [...] debemos usar las mismas experiencias que he usado para encontrar el número de retornos de cada cuerda de instrumentos, y en lugar de los que han usado sólo una cuerda de flexible, un intestino el cual debe tener un millar de pies de largo, y curvarse de manera que la tracción de E en C es de diez pies, y ella emplea diez segundos de minuto en cada ida y vuelta, es decir la décima parte de un minuto, teniendo que dividir la línea de fondo CD en diez partes iguales, uno tiene tiempo para notar el tiempo que esta emplea para hacer cada décima parte, [...] la galería de las Tulleries es muy conveniente a esta experiencia. (Idém, p. 162).

Si bien esta determinación experimental de una ley que relaciona las frecuencias como inversamente proporcionales a la longitud de la cuerda es un logro importante, la gran dificultad con la que él tropieza se da respecto a si hay realmente reposo o no en las posiciones extremas como H; Mersenne compara varios movimientos entre sí,[53] sin ver que los movimientos en cuestión son en realidad muy diferentes: el lanzamiento de un cuerpo pesado hacia arriba y llegando a su altura máxima (en este caso hay reposo), una pelota que rebota contra una

[53] Razonamientos de analogía y conveniencia.

pared (en este caso, prácticamente, no hay reposo), etc. Pero sin evitar la paradoja sobre si la cuerda está en reposo, o no puede dejar de moverse. Así el tema es abandonado:

> Pero como ya no veo ninguna razón lo suficientemente fuerte para demostrar si hay reposo en las reflexiones, llego a la segunda parte de la Proposición [...]. (Idém, p. 164)

El enfoque de Mersenne si bien es fructífero para el estudio de la construcción de las armonías, resulta inadecuado para el estudio del movimiento de la cuerda vibrante. El enfoque que más aportó a este propósito fue el de comparar el movimiento de la cuerda con el de un péndulo, como hicieran Galileo y Huygens (Truesdell, pp. 162-165), lo cual resulta más pertinente pues se comparan dos movimientos periódicos en lugar de comparar un movimiento periódico con movimientos aperiódicos como hace Mersenne en su demostración. (Bailhache 1, pp. 88-89)

Las soluciones son encontradas con base a lemas y proposiciones previamente demostradas. Un ejemplo, que influyó mucho en los trabajos posteriores sobre este tema es la solución del problema dada por Brook Taylor en 1713, en una memoria publicada en las *Philosophical Transactions,* y posteriormente en su obra más conocida: *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londres, 1715).[54] En la memoria de 1713 titulada *De Motu Nervi Tensi,* en unas ocho páginas Taylor divide el problema de la cuerda vibrante en dos: en el primer problema demuestra que el movimiento de una cuerda sigue una forma sinusoidal y en el

[54]Esta solución de Taylor al problema de la cuerda vibrante es presentada de manera independiente de la generación del sonido y los armónicos en las *Transactions,* y como un ejemplo de aplicación del método de los incrementos en el *Methodus.* Sin embargo se puede presumir que Taylor estaba trabajando el tema de los armónicos (e incluso que la música era su tema favorito) al tiempo que trabajaba sobre una solución al problema de la cuerda vibrante. Esto está basado en dos comentarios que aparecen en un par de publicaciones; la primera es la Gentleman's Magazine del año de 1739, donde aparece el anuncio de la publicación de manera póstuma de una obra de Taylor (*Contemplatio Philosophica*) acompañada de una reseña biográfica contada por Sir William Young, nieto de Taylor en la que se lee:

> En este año presentó a la Royal Society tres documentos diferentes: uno, que era el primero que comunicó a esta sociedad, sobre el ascenso de agua entre dos hojas de vidrio, y un segundo, sobre el centro de oscilación, y un tercero, sobre el movimiento de una cuerda estirada. Al parecer, a partir de dicha correspondencia con Keil, en 1713 él presentó un documento sobre su tema favorito, la música, pero este no se conserva en las [Philosophical] *Transactions.* (Urbanus, p. 437)

La segunda publicación es una historia acerca de Cambridge en la época de la Ilustración de John Gascoigne: "Al igual que [Robert] Smith, [Taylor] también estaba interesado en la ciencia de la armonía: entre sus manuscritos en St. John's está un documento "*On Musick*", que estaba destinado a ser parte de un trabajo conjunto entre Taylor, Newton y el compositor Pepusch" (Gascoigne, p. 154). Sin embargo no se especifican los motivos por los que no fue publicado este trabajo sobre las armonías de Taylor.

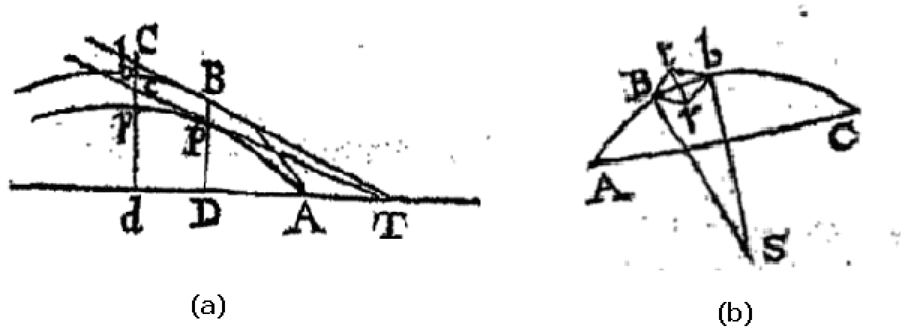


Figura 2.12: (a) Taylor determina la igualdad de la relación de las curvaturas AB y AP con la relación de las aplicadas DP y DB conforme la ordenada AD disminuye hacia el punto A. (b) Taylor determina que la fuerza de aceleración del punto B es proporcional a la curvatura en ese punto. El autor considera el elemento Bb y el paralelogramo BTbr (formado por las tangentes BT y br) para demostrar que la fuerza aceleratriz es $\frac{1}{BS}$. En términos modernos, Taylor considera que la fuerza desbalanceada es $T\delta\theta$ (donde de T es la tensión de la cuerda y $\delta\theta$ el ángulo en S, y la aceleración es como $\frac{T\delta\vartheta}{Bb}$ (Bb, elemento de masa) el cual varía según el inverso del radio de curvatura.

segundo obtiene el periodo de vibración de la cuerda. En el *Methodus* el problema de la cuerda vibrante aparece en la sección de problemas de aplicación del método de los incrementos, igualmente dividido en dos problemas *PROP. XXII; PROB. XVII, Para determinar el movimiento de una cuerda tensa*, y *PROP. XXII; PROB. XVIII, Con la longitud de la cuerda, y también el peso y la fuerza de estiramiento dadas, encontrar el tiempo periódico de las vibraciones.*[55] Estos problemas son resueltos por Taylor despúes de demostrar que si dos curvas que convergen con formas similares en un punto común "A", la relación de las curvaturas será como la relación de las ordenadas cuando éstas son infinitamente pequeñas (Figura 2.12 (a)), y que para una densidad dada de una cuerda tensa, la fuerza de aceleración en cualquier punto es como la curvatura en ese punto (lemmas poposiciones entre 1713 y 1715) (Figura 2.12 (b)). [Taylor, pp. 88-89]

Así el problema XVII mencionado en el párrafo anterior consiste en demostar que todos los puntos de la curva $BFDA$ de la figura 2.13 llegan al mismo tiempo hasta el eje AB, asimismo que las ondulaciones que se llevan a cabo en el mismo periodo de tiempo que un péndulo que oscila en una cicloide (sic.). Para ello

[55]La traducción al español de los pasajes citados de la obra *Methodus incrementorum directa et inversa*, está basada en la traducción al inglés que hace Ian Bruce de esta obra. La traducción de ésta y otras obras matemáticas están disponibles en el sitio: http://17centurymath.com

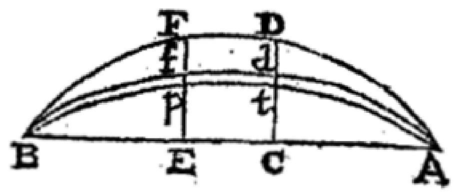


Figura 2.13: Esquema de Taylor para determinar el movimiento de una cuerda vibrante. La figura inicial que él asume es una curva sinusoidal, la cual se conserva en todo momento de la vibración.

Taylor considera que "la cuerda se construye a partir del material más delgado, de grosor uniforme y la máxima elongación de ésta desde el eje del movimiento AB ha de ser infinitamente pequeña, esto a fin de que la tensión no cambie por el aumento de la longitud de la cuerda desde el eje AB, y por lo tanto la inclinación del radio de curvatura al eje es siempre insignificante. Además de que la curva $ADFB$ tiene por característica inherente que para cualesquiera ordenadas CD y EF dibujadas como se desee perpendiculares al eje, la curvatura en D a la curvatura en F será como DC a FE" (Taylor 1, p. 89). Lo que equivale a decir en términos modernos que la curva es sinusoidal.

En este momento hay que notar que Taylor no aclara cuál es el movimiento "completo" de la cuerda, es decir, y como ya se vió en el análisis del problema por parte de Mersenne, si la cuerda llega solamente al eje BA o lo sobrepasa y luego regresa a la curva $ADFB$. Aunque en su demostración del problema parece considerar que la cuerda sólo llega al eje BA y regresa, ya que estando la cuerda a la distancia máxima del eje AB en la posición $ADFB$, con todos los puntos en reposo. Entonces ya que la curvatura en D es a la curvatura en F como la distancia CD a la distancia EF (a partir de la hipótesis), por lo tanto, la aceleración en D a la aceleración en F está en la misma proporción de las distancias (demostrado por Taylor previamente en el lema IX del *Methodus* que trata sobre la curvatura y la aceleración), y por lo tanto en el movimiento inicial, las distancias recorridas Dd y Ff se encuentran en la misma proporción, y los intervalos Cd y Ef están en la misma proporción, y por lo tanto también las aceleraciones nuevas para los puntos d y f están en la misma relación (por los Lemas anteriormente mencionados), las aceleraciones iniciales en D y F son las distancias dC y fE a las distancias DC y FE (del mismo Lema.) Por lo tanto, la aceleración de un punto D, ya sea en la misma curva $ADFB$ o en las diferentes curvas $ADFB$ y $AdfB$, es siempre como la misma distancia al eje del movimiento AB. Por lo cual (por la Proposición 51. Libro 1. Phil. Nat. Principia Mathematica) todos los puntos de la cuerda alcanzan el eje AB al mismo tiempo, regresan al mismo tiempo y las vibraciones individuales son realizadas en el período de tiempo determinado como un cuerpo que oscila en una cicloide. (Taylor, p. 90)

Taylor obtiene en el lenguaje propio de las fluxiones que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es como el de un péndulo simple. Asimismo estableció que la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal y determinó el período de oscilación de la cuerda. Sin embargo, no consideró el problema de la ecuación diferencial del movimiento.

Daniel Bernoulli, a partir de las ideas de Taylor, infirió que cualquier movimiento general se puede obtener como combinación de todas las oscilaciones fundamentales. Daniel Bernoulli había llegado a la conclusión de que la superposición de soluciones sinusoidales daba la solución más general del problema, lo que implicaba la posibilidad de expresar una función arbitraria como suma de senos. Aparentemente ni Johann Bernoulli ni Taylor se preocuparon por demostrar que ésta era la solución más general, pero tampoco mostraron que no lo era. En cambio Daniel Bernoulli en su artículo de 1738 *Teoremas sobre oscilaciones de cuerpos conectados por un hilo flexible y de una cadena verticalmente suspendida* (Bernoulli 4), va mucho más lejos que su propio padre y que Taylor al identificar los armónicos superiores de una cuerda musical.

El tema de la cuerda vibrante va a adquirir una nueva y polémica connotación con la incorporación de un joven geómetra Jean le Rond d'Alembert, quien pronto fue considerado entre los más prestigiosos geómetras de Francia en el siglo de las luces.

Capítulo 3

El problema de la cuerda vibrante estudiado por d'Alembert y Euler

3.1. Introducción al debate de la cuerda vibrante

Las soluciones al problema de la cuerda vibrante, y de otros movimientos oscilatorios, desde mediados del siglo XVI y hasta antes de 1747, consideraban una fuerza aceleratriz restitutiva sobre puntos discretos de una cuerda continua; así, estas soluciones bajo los métodos de los infinitesimales y las fluxiones, contemplaban ecuaciones de una sola variable, el tiempo. El llamado debate de la cuerda vibrante representa históricamente un punto de inflexión en la ciencia del siglo XVIII, y resulta por demás interesante ya que siendo, en principio, un problema físico, generó una discusión sobre temas puramente matemáticos, donde la principal cuestión de este debate resultó ser la revisión del concepto de función matemática. Igualmente interesante resulta que dos soluciones que son muy parecidas, las cuales involucran una ecuación diferencial en dos variables, como lo son las de Euler y d'Alembert (aunque fue este último el primero en plantear una ecuación diferencial en dos variables), generen un debate en torno a ellas. De manera coloquial se puede decir que ninguno de estos dos autores enmienda la plana al otro. En cambio, ambos reconocen que sus soluciones son muy parecidas. Bajo esta premisa, un debate en torno a este problema de la cuerda vibrante se debió centrar en detalles muy puntuales y acaso sutiles de los métodos usados. Es así que el objetivo al presentar la primera memoria de d'Alembert sobre el estudio de la cuerda vibrante es presentar los detalles sobre la manera en que su autor encuentra la solución a dicho problema y que dieron pie a un debate sobre el concepto de función matemática. Para esto es necesario incluir algunos desarrollos algebraicos y cálculos que d'Alembert menciona como evidentes en su memoria, ya que pueden mostrar el tratamiento dado a las variables, en cuanto a cantidades físicas, a las funciones como herramientas para resolver problemas físicos, y los métodos usados para resolver el problema. Para esto, también me apoyaré en los trabajos de A. P. Youschkevitch, Ivor Grattan-Guinness, Niels Jahnke (Jahnke 1) y Carmen Martínez (Martínez) que abarcan aspectos sobre el tratamiento dado a las variables del problema tratado y, sobre todo, el concepto de función asociado al autor de esta memoria. Así pues, a continuación se presenta la primera memoria de d'Alembert sobre la cuerda vibrante, que consta de dos partes, y la memoria de Euler sobre este problema; con ellas se inició el debate de la cuerda vibrante y que se desarrolló en cartas personales entre d'Alembert y Euler, además de varías memorias y trabajos sobre ecuaciones diferenciales y en particular el problema de la cuerda vibrante.

3.2. El debate de la cuerda vibrante: Memorias de d'Alembert (1747) y Euler (1750)

Memorias de d'Alembert: Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda tensa puesta en vibración y su Suite (1747)

En esta Memoria d'Alembert se propone mostrar que hay una infinidad de curvas del tipo de la cicloide alargada,[56] que satisfacen el problema de una cuerda vibrante, colocada de manera vertical y tensada por su propio peso. Para hacer esto d'Alembert aclara que a lo largo de la memoria va a suponer lo siguiente:

1. Los desplazamientos o vibraciones de la cuerda son muy pequeños, de tal manera que las longitudes AM de la curva formada por ello son comparables a las abscisas, esto es, $AM = AP$. (ver figura 3.1)

[56] Éste es el nombre que Roberval daba a la "función" seno. (Struik, p. 352)

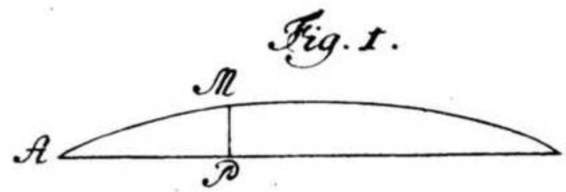


Figura 3.1: Representación del problema. Todas las figuras de esta sección pertenecen a la memoria original de d'Alembert. (d'Alembert 2)

2. La cuerda es igualmente gruesa (o densa) a todo lo largo de ella.

3. La razón entre la fuerza F de tensión y el peso de la cuerda es constante e igual a la razón de m a 1. Así, $F = pml$, donde p es la gravedad, m el peso de la cuerda, que aunque en la figura 3.1 se representa horizontalmente, el problema es el de una cuerda vertical, y l la longitud de la cuerda.

4. Si se llama s a AP o AM, que por la primera suposición resultan ser iguales, y y a PM; y haciendo ds constante, la fuerza aceleratriz del punto M sobre MP, es $F_{acel} = -F\frac{ddy}{ds^2}[= pml(\frac{ddy}{ds^2})]$, si la curva es cóncava sobre AC (esto es, sobre toda la cuerda), o $F\frac{ddy}{ds^2}$ si dicha curva es convexa. Éste es un resultado obtenido anteriormente por Taylor; d'Alembert remite al lector al texto *Methodus Incrementorum.* Ya se mencionó que en la proposición XXII, Problema XVII de esta obra, Taylor encuentra que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es como el de un péndulo simple y determina su tiempo de vibración (periodo), obteniendo, en el lenguaje propio de las fluxiones, la ecuación diferencial de la cuerda vibrante, y a partir de ella halla una solución: la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es periódica y sinusoidal. Así, la curva o gráfica de $F\frac{ddy}{ds^2}$ respecto a s debe ser convexa; y al estar formulada en lel lenguaje de las fluxiones está implícita (como se mencionó en la primera parte de este trabajo) la continuidad de dicha curva. (ver d'Alembert 2, p. 214)

Supuesto lo anterior, d'Alembert lleva a cabo el análisis del movimiento de la cuerda respecto a la variable s, manteniendo el tiempo constante. Comienza

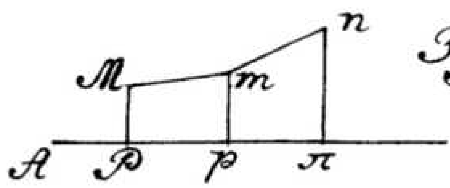


Figura 3.2: División del segmento AC de la figura 1. $AP = Pp = p\pi = ds$.

diciendo que los segmentos Mm, mn, son dos lados consecutivos de la curva en un instante cualquiera y que los segmentos Pp, $p\pi$, de la figura 3.2, son iguales; así, $Pp = p\pi (= ds = constante)$. Ahora bien, si t es el tiempo transcurrido después de que la cuerda comenzó a vibrar;,es cierto que la ordenada PM puede ser expresada por una función del tiempo t y de la abscisa o de la correspondiente s o AP. Por tanto $PM = \Phi(t, s)[= y]$, donde Φ es una función desconocida de t y de s tal que $d[\Phi(t, s)] = pdt + qds$, donde $p = p(t,\ s)$ y $q = (t,\ s)$ siendo p y q funciones desconocidas de t y de s. En este punto d'Alembert menciona que por el teorema de Euler, respecto a la diferenciación de funciones compuestas de dos variables,[57] es evidente que el coeficiente de ds en la diferencial de p, debe ser igual al coeficiente de dt en la diferencial de q; por lo tanto $dp = \alpha dt + \nu ds$, $dq = \nu dt + bds$; siendo α, b y ν funciones desconocidas de t y s.

De ello se deduce que, como los lados Mm, mn, pertenecen a la misma curva (ver figura 3.2), se puede igualar $pm - PM$ a la diferencial de $\Phi(t, s)$ si sólo s es variable, es decir, permaneciendo el tiempo constante en el instante t, así $pm - PM = qds = ds \centerdot q\ [= dy = d\Phi]$ (con $dt = 0$); y que la cantidad llamada cy -o ddy-, es la diferencia segunda de PM variando solamente s. Así: $ddy = ds \centerdot bds\ (= bds^2)$, por lo tanto $ddy = F\frac{ddy}{ds^2} = F\mathcal{C}$. Con esto finaliza el análisis con s como variable y el tiempo constante.

Posteriormente d'Alembert hace el análisis del movimiento de la cuerda con s constante y el tiempo variable, imaginando que los puntos M, m y n se mueven en línea recta hacia *M'*, *m'* y *n'*, respectivamente, como en la figura 3.3; es cierto que el exceso de *PM'* sobre PM será igual a la diferencial de $\Phi(t, s)$ variando solamente t, esto es: $PM' - PM = pdt = dt \centerdot p = d\Phi(t, s)\ = dy$ (con $ds = 0$); y que la diferencia segunda de PM variando solamente a t, es la diferencia *MM'*, o lo que es lo mismo, el espacio recorrido por el punto M, en virtud de la fuerza

[57]Teorema demostrado en el trabajo titulado *En cuanto a un número infinito de curvas de la misma naturaleza. O un método para encontrar las ecuaciones para un número infinito de curvas de la misma naturaleza. [De infinitis curvis eiusdem generis sev methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis.]* (Euler 3, p. 177)

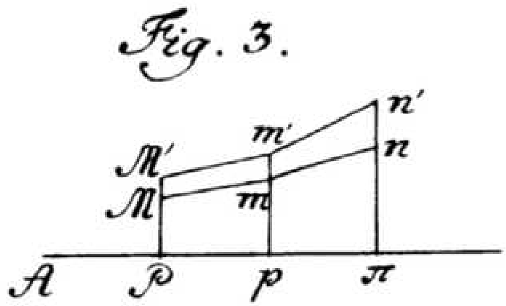


Figura 3.3: Desplazamiento de la cuerda para instantes consecutivos y s constante.

aceleratriz que lo mueve, así $ddy = \alpha dt^2$. [58]

Lo siguiente es encontrar los coeficientes α, β, y ν. Para ello d'Alembert supone que a es el espacio que un cuerpo pesado, movido por la gravedad, recorre en un tiempo dado y constante θ; y asevera como evidente que $\alpha dt^2 : 2a = F\beta dt^2 : p\theta^2$. Esto por el Lema XI, sec. I, Liv. I de los *Principia Mathematica* de Newton, aunque en los *Principia* el lema citado por d'Alembert se refiere a cuerdas de arco evanescentes de una curva dada. El lema X sec. I, Liv. I (Newton 1, p. 28.) es el que se refiere a los espacios recorridos por un cuerpo bajo la acción de una fuerza (tanto si ésta es constante o varía constantemente) en proporcionalidad al cuadrado de los tiempos al inicio de dicho movimiento. T. Hankins (Hankins, p. 22) sugiere que en algún momento posterior a 1739, d'Alembert leyó la edición de Thomas LeSueur y François Jacquier de los *Principia* de Newton, pero en esta edición igualmente es el lema X sec.I, Liv. I (Newton 2, p. 71.) el que se refiere al movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza constante. Este detalle adquiere relevancia si se considera que en la memoria de Euler sobre la cuerda vibrante, su autor, al deducir la ecuación diferencial, considera el equilibrio entre las fuerzas aceleratrices y la fuerza de tensión para cada punto de la cuerda (más adelante, cuando se exponga la memoria de Euler se analizará si esta diferencia abona al debate que se generó sobre la cuerda vibrante). Así, d'Alembert encuentra que $\alpha = \frac{2aF\beta}{p\theta^2} = \frac{2apml\beta}{p\theta^2} = \mathcal{C} \cdot \frac{2aml}{\theta^2}$.[59] (d'Alembert 2, p.

[58] En este punto, en la memoria original, la diferencia segunda de y respecto al tiempo, aparece como αdt. Se trata de un error de impresión, pues se sigue por analogía a lo visto en el análisis con el tiempo constante que la diferencia segunda de y debe ser: $ddy = \alpha dt^2$. Más adelante, en la memoria original de d'Alembert, esta diferencia segunda ya aparece correctamente impresa.

[59] Del análisis con el tiempo constante se había obtenido $\mathcal{C} = \frac{ddy}{ds^2}$ y $ddy = ds \cdot ds\beta (= \beta ds^2)$ con lo que al sustituir ddy en $\mathcal{C}$, resulta que $\mathcal{C} = \beta$.

216)

Aquí, d'Alembert observa que se puede representar la constante de tiempo θ de la ecuación anterior por una línea constante de la magnitud que se desee, pero hay que tener cuidado de distinguir las líneas que expresan las partes variables de tiempo indeterminado, es decir, la variable t, de las líneas para tiempo constante y dado θ, en la que un cuerpo pesado viaja por el espacio a, según el lema X de los *Principia* que citó anteriormente. Y agrega que se podrá suponer θ tal que θ^2 es $2aml$, con lo cual $\alpha = b$. Luego entonces $dp = \alpha dt + \nu ds$ y $dq = \nu dt + \beta ds = \nu dt + \alpha ds$. En este punto es que se pueden hacer tres observaciones respecto al método con que d'Alembert resuelve el problema de la cuerda vibrante: Por un lado, al decir «indeterminado» d'Alembert no se refiere a una incógnita, se refiere a una variable; y más adelante se verá que el carácter de las variables en dicha solución es esencialmente geométrico. Por otro lado, el tiempo θ que elige no posee significado físico especial; apela solamente a los posibles valores que de manera matemática puede tomar la variable t. Esto se hace patente si se comparan las unidades de θ^2 (que son de tiempo al cuadrado) y de $2aml$ (que son de masa y longitud).[60] Y la última de las observaciones se refiere a la representación matemática de un problema físico; John Stillwell demuestra matemáticamente que un cambio de variable de t a ct ($c = cte.$), simplifica la ecuación diferencial, pasando de la ecuación $\frac{\partial^{2y}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ a la ecuación $\frac{\partial^{2y}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial (ct)^2}$ (Stillwell, p. 242). Efectivamente, el parámetro θ introducido por d'Alembert simplifica la ecuación diferencial. Si se recuerda que $ddy = \alpha dt^2$, $ddy = bds^2$ y $\alpha = \frac{2aml}{\theta^2}\beta$ entonces $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{2aml}{\theta^2}\frac{ddy}{ds^2}$; haciendo $\theta^2 = 2aml$ la ecuación diferencial queda simplemente como $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{ds^2}$, sin embargo la variable tiempo permanece igual en la ecuación de d'Alembert; otros autores, como Gulmaro Corona y Salvador Arellano, comentan que d'Alembert resuelve la ecuación diferencial para el caso particular $c = 1$ (Anzaldo, p. 95), aunque cabría aclarar que este caso particular no resulta de consideraciones sobre la mecánica del problema, es decir, no posee un significado físico especial. Es en la segunda memoria de d'Alembert donde él propone una ecuación distinta, sin suponer $\theta^2 = 2aml$. Más adelante se analizará cómo en su segunda memoria propone una nueva variable para el tiempo, que sigue apelando a la linealidad en las relaciones entre variables.

[60] En la memoria de Euler, este menciona que su ecuación diferencial efectivamente contiene cantidades homogéneas, en lo que parece ser una alusión a éste punto del trabajo de d'Alembert.

Ahora son las condiciones de las cantidades[61] α y ν lo que se se debe determinar. d'Alembert hace notar que como $dp = \alpha dt + \nu ds$, y $dq = \nu dt + \alpha ds$, si se suma y resta (con una factorización posterior) ambas ecuaciones, se tiene, respectivamente que $dp + dq = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds)$ y $dp - dq = (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds)$. De aquí se sigue que:

1. Qué $\alpha + \nu$ es igual a una función de $t + s$ y que $\alpha - \nu$ es igual a una función de $t - s$. Esto resulta así si se tiene en cuenta que $dp + dq = d(p + q)$ y $dt + ds = d(t + s)$, con lo cual $d(p + q) = (\alpha + \nu) \cdot d(t + s)$, con lo cual $p + q$ es una nueva función y $t + s$ la variable de esa nueva función. Análogamente para $p - q$.

2. Sumando $dp + dq$ y $dp - dq$ se tiene $2dp = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds) + (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds) = (\alpha + \nu) \cdot d(t + s) + (\alpha - \nu) \cdot d(t - s)$; integrando lo anterior: $2 \int dp = \int (\alpha + \beta) \cdot d(t + s) + \int (\alpha - \beta) \cdot d(t - s)$; entonces $2p = \Phi(t + s) + \Delta(t - s)$. Se sigue un procedimiento análogo para obtener q, eliminando dp del sistema de ecuaciones $dp + dq$, $dp - dq$.[62] En consecuencia $p = \frac{\Phi(t+s)+\Delta(t-s)}{2}$ o simplemente $p = \Phi(t + s) + \Delta(t - s)$; y $q = (\Phi(t + s) - \Delta(t - s)$ de las que se obtiene PM o $\int (pdt + qds) = \Psi(t + s) + \Gamma(t - s)$. El la memoria original de d'Alembert aparece una s al principio de la ecuación anterior, la cual debe ser el símbolo de la integral, pues

$$
\begin{aligned}
PM &= \Phi(t, s) = \int d\Phi = \int (pdt + qds) \\
&= \int \{[\Phi(t + s) + \Delta(t - s)]dt + [\Phi(t + s) - \Delta(t - s)]ds\} \\
&= \int \{[\Phi(t + s) \cdot d(t + s)] + [\Delta(t - s) \cdot d(t - s)] \\
&= \int \Phi(t + s) \cdot d(t + s) + \int \Delta(t - s) \cdot d(t - s) \\
&= \Psi(t + s) + \Gamma(t - s).
\end{aligned}
$$

[61] En este momento d'Alembert se refiere a α y a ν como cantidades, siendo estas funciones. En todo caso, al sumar y restar dp y dq, lo que hará sí es darles un tratamiento de cantidades desconocidas o incógnitas.

[62] En la memoria original de d'Alembert estas operaciones son mencionadas como evidentes y, por supuesto, no menciona el concepto de sistema de ecuaciones. El objetivo de presentar estos desarrollos de esta manera, y no en el lenguaje de las derivadas parciales usadas hoy en día, es tratar de reflejar lo que d'Alembert pudo haber entendido por "análisis", y si esto fue también parte del debate alrededor de la cuerda vibrante. Para Jean D'hombres el "método funcional" presentó una tensión entre los matemáticos del siglo XVIII y a su parecer fue Euler quien, con su propuesta sobre lo que es una función, redujo dicha tensión, pero esto se verá en la memoria correspondiente.

Si se desea ver un desarrollo detallado de la ecuación diferencial que resuelve el problema de la cuerda vibrante en el lenguaje de las derivadas parciales se puede consultar el trabajo de Clifford Truesdell sobre la mecánica racional de los cuerpos flexibles o elásticos. (ver Truesdell, pp. 237)

$\Psi(t+s)$ y $\Gamma(t-s)$ son las expresiones de las funciones, todavía desconocidas, de $t+s$ y $t-s$. Así, la ecuación general de la curva está dada por $y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$. En esta parte, para denotar las subfunciones que componen a p y a q, d'Alembert usa el símbolo Φ, que él había usado para definir PM al inicio del análisis, pero es claro que no se está refiriendo a la misma función en ambos casos.

Teniendo $y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$, d'Alembert menciona que es fácil ver que esta ecuación contiene un número infinito de curvas.[63] Para ver cómo, hay que tomar un caso especial, a saber, $y = 0$ cuando $t = 0$, esto es, suponer que la cuerda, cuando comienza a vibrar, está a lo largo de una línea recta (y obligada a salir de su estado de reposo por la acción de alguna fuerza); con esto está claro que $\Psi(s)+\Gamma(-s) = 0$,[64] así que $\Gamma(-s) = -\Psi(s)$. Por otra parte, como la cuerda pasa siempre a través de los puntos fijos A y B (los extremos de la cuerda), en $s = 0$ y $s = l$, estos tienen un desplazamiento nulo ($y = 0$), independientemente de t (d'Alembert 2, p. 217), así que:

1. $\Psi(t) + \Gamma(t) = 0$ y $\Gamma(t) = -\Psi(t)$, así $\Gamma(t-s) = -\Psi(t-s)$, con lo cual $y = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$; de modo que es necesario que $-\Psi(-s) = \Gamma(s) = -\Psi(s)$, por lo que $\Psi(s)$ debe ser una función de s donde no entran potencias pares cuando esta se ha reducido a una serie de potencias.[65] Al parecer d'Alembert, en este primer punto, está siguiendo un razonamiento del siguiente estilo: si $\Gamma(t) = -\Psi(t)$ con $s = 0$ y $s = l\ \forall t$, en particular para $t = t-s$. Una vez más, sin que $t = t-s$ tenga un significado físico especial, es decir, solamente apela a los valores posibles que de manera matemática puede tomar t. Por otro lado, tal vez sea a este tipo de relaciones entre las variables a las que se refería d'Alembert cuando anteriormente prevenía a

[63] *Or il est aisé de voir que cette equation renferme une infinité de courbes.* d'Alembert 2, p. 217.

[64] Aquí d'Alembert al sustituir los valores del caso especial en las funciones Ψ y Γ escribe $\Psi s + \Gamma - s = 0$, para agilizar la lectura, he cambiado esta notación por la actual $\Psi(s)$ y no Ψs.

[65] Sea cual sea la función Ψ, d'Alembert concibe que ésta tiene representación en serie de potencias. Esto da una idea de las funciones que él conocía o manejaba. Un primer atisbo a la concepción de función de d'Alembert lo haremos a través de la entrada correspondiente en la *Enciclopedia*:

FUNCIÓN s. f. (Álgebra.) La geometría antigua, o más bien los analistas antiguos, han llamado funciones de una cantidad x cualquiera a las diferentes potencias de esta cantidad, pero hoy en día se conoce como función de x, o en general de una cantidad cualquiera, una cantidad compuesta de tantos términos algebraicos como nos plazca, y donde x está compuesta de cualquier manera, mezclada o no, con las constantes, así, $x^2 + x^3$, $\sqrt{aa+xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^4}{bb+x^3}}$, $\int dx\sqrt{a^2+x^2}$ son funciones de x. Igualmente x^2y+ay^3 es una función de x y de y. (d'Alembert 4; entrada correspondiente a Función.)

tener cuidado de no confundir las líneas rectas de tiempo indeterminado y las líneas rectas constantes de un tiempo dado θ, pues, $t' = t - s$ y $t = \theta$ son dos relaciones lineales.

2. Además de la condición de $y = 0$ cuando $s = l$, se tiene que $\Psi(t + l) - \Psi(t - l) = 0$. Así, hay que encontrar una cantidad $\Psi(t + s)$ de tal manera que $\Psi(s) - \Psi(-s) = 0$ y $\Psi(t + l) - \Psi(t - l) = 0$.

Para lograr esto, d'Alembert supone la curva toT (ver figura 3.4), cuyas coordenadas $TR = u$, $QR = z$, son tales que $u = \Psi(z)$; ya establecido que $\Psi(s) - \Psi(-s)$ debe ser igual a cero, es evidente que teniendo $Qr = QR$ entonces $rt = RT$; y por lo tanto la curva toT tendrá de cada lado del punto o, dos partes similares, to y oT. Además, como $\Psi(t + l)$ debe ser igual a $\Psi(t - l)$ y que la diferencia de $t + l$ y $t - l$ es $2l$, es evidente que la curva toT debe ser tal que, en tanto se suponga completamente descrita, dos coordenadas cualquiera distantes una de la otra una cantidad $2l$, serán iguales entre sí. Así que, si se asume que $QR = l$, se verá que la parte TK debe ser igual y semejante a tO; que la parte KX debe ser igual y semejante a oT, etc. Y como las partes tO y oT, son ya semejantes e iguales, se deduce que la curva buscada se extiende al infinito a ambos lados del punto o, y está compuesta de partes todas iguales y semejantes a la parte oTK, donde la abscisa $QV = 2l$, que está dividida en su punto medio T, en dos partes semejantes e iguales.

En este punto se puede destacar lo siguiente:

- Lo que d'Alembert se propuso describir como una infinidad de curvas no se refiere a una familia de curvas; en este punto sólo se describe una curva infinita periódica (de periodo $2l$).

- La solución encontrada, si bien está referida al problema físico inicial, no está estrictamente constreñida a las condiciones del problema. Así, la curva infinita periódica no se encuentra de manera literal, ni virtual, sobre la cuerda de longitud l; además la nueva variable que d'Alembert considera $(t{+}l)$, no posee contenido físico, es sólo una variable abstracta. Así la curva de la figura 3.4 es la gráfica de la función Ψ buscada y no un dibujo de la cuerda vibrante.

La curva encontrada es una cicloide y d'Alembert describe cómo puede ser generada por medio de otra curva *TV'SRV'* (ver figura 3.5) la cual gira sobre sí misma y donde la parte *TRS* es semejante a *TV'S*, porque si para un punto

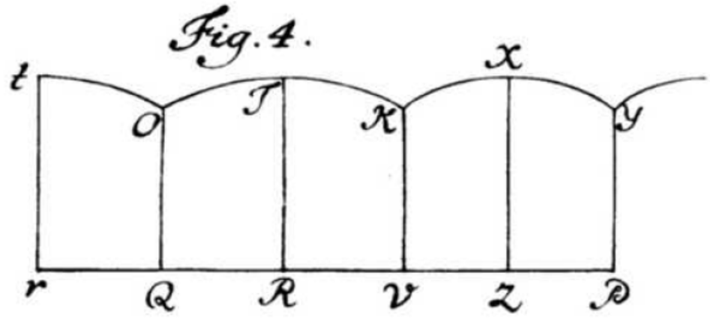


Figura 3.4: Gráfica de la curva buscada por d'Alembert. El conjunto de líneas verticales y horizontales resultan un sistema de referencia coordenado.

L del eje TS hay una recta LH, la cual es igual a un múltiplo del arco TR más una función cualquiera de la abscisa TL y de la ordenada LR; o bien, si se hace la línea LH igual a una función cualquiera de la abscisa TL y la ordenada LR, más el espacio TLR dividido por una constante cualquiera; es cierto que habrá por este medio una curva oTK, donde las dos partes son iguales y se extienden al infinito sobre las partes semejantes a oTK, como la cicloide ordinaria.

Una vez descrita una curva como oTK, será fácil determinar para un tiempo t cualquiera la curva que se forma entonces en la cuerda tensa: esta curva se construirá siempre considerando la ordenada que responde a una abscisa cualquiera s, la diferencia de dos ordenadas de la curva oTK, referida a un eje cualquiera ZV (en la figura 3.4) y del cual la primera, $\Psi(t+s)$, dista del punto Z la cantidad $t+s$, y la otra $\Psi(t-s)$ dista del mismo punto la cantidad $t-s$.

Aquí d'Alembert recuerda, sin dar una explicación amplia, que $\Psi(s)$ es una función par de s, así que $\Psi(t+s)$ es también una función par de $t+s$; pero que se puede ver si se considera que la relación entre variables es (un cambio de escala) líneal. Así, la diferencia $\Psi(t+s) - \Psi(t-s)$, variando a t solamente, es decir $dt \cdot [\Delta(t+s) - \Delta(t-s)]$, debe ser tal que $\Delta(t+s)$ y $\Delta(t-s)$ sean funciones impares de $t+s$ y $t-s$ respectivamente, lo cual resulta de considerar que Ψ tiene representación en serie de potencias; entonces, si la función es representada por potencias pares, al derivarla el resultado será una función de potencias impares. Ahora, es fácil ver que $\Delta(t+s) - \Delta(t-s)$ o $\frac{PM'-PM}{dt}$ expresa en general la velocidad del punto M, y que $\Delta(s) - \Delta(-s)$, expresa la velocidad inicial de ese mismo punto; así que la velocidad inicial impresa a cada punto de la cuerda,

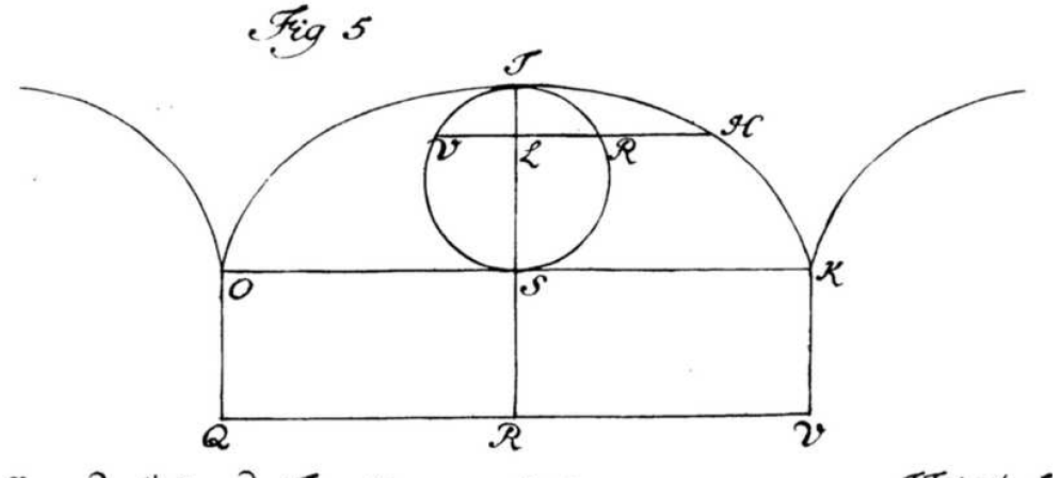


Figura 3.5: Manera en que representa d'Alembert la cicloide. En esta figura llama ordenada al segmento LR y abscisa al segmento TL, esto tiene sentido si se recuerda que el problema de la cuerda vibrante es el de una cuerda vertical, pero que en ésta y en su segunda memoria aparece representado de manera horizontal.

los cuales se encuentran el línea recta, y se comienzan a mover, debe ser tal que al reducirse en una serie, sólo contiene potencias impares de s; si la función de s, que expresa esta velocidad inicial, no fuera una función impar de s, el problema sería imposible, i. e, no se podría asignar una función de t y de s, que representen en general el valor de las ordenadas de la curva por una abscisa s para los tiempos t cualquiera. Finalmente, d'Alembert concluye que hay muchas otras consecuencias que deben extraerse de la solución general que se acaba de dar. Ellas serán objeto de una segunda memoria. (ver d'Alembert 3)

Al inicio de esta segunda memoria d'Alembert explica què significa $t+s$ y $t-s$, con lo cual se aclara la distinción que hace entre las líneas rectas de tiempo cualquiera indeterminado (t) y las líneas de tiempo constante y dado (θ) [ver d'Alembert 3, p. 220]:

> ...como el tiempo dado θ se ha supuesto igual a $\sqrt{2aml}$ un tiempo cualquiera t, deberá ser expresado por una línea [recta] que sea a $\sqrt{2aml}$ como t es a θ. Por lo tanto, QN es esa línea que expresa t, con $NP = QN = t$. Entonces, haciendo $Qg = QG = s$ y, principalmente, GA, gF paralelas a QN, y AB, FI paralelas a QP, se tendrá $QB = t+s$ y $QI = t-s$; entonces $BD-IE = CD-dE = \psi(t+s)-\psi(t-s)$.

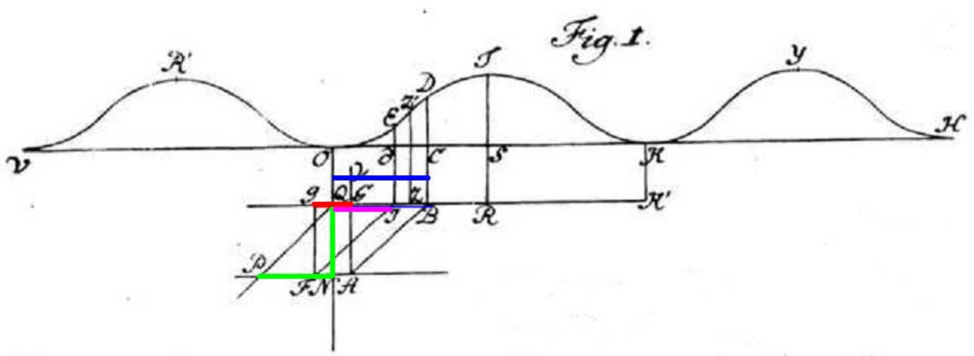


Figura 3.6: Construcción de la s variables $t + s$ y $t - s$ por parte de d'Alembert. En verde se marcan las líneas correspondientes a tiempo, en rojo las correspondientes a s, en azul $t + s$ y en magenta $t - s$. Las relaciones se obtienen por la semejanza de los triángulos PNA, AGB y FgI. Nótese que si $t = 0$ entonces $O = \psi(s) - \psi(-s) = 0$.

(Ver figura 3.6.)

Con la cita anterior se puede ver que d'Alembert asocia sus variables a magnitudes de segmentos de rectas, más que a valores con contenido físico. Incluso se puede uno preguntar sobre los valores que de manera matemática, como anteriormente se mencionó, pueden tomar estas variables, como en el caso de que $t < s$. No obstante, se puede decir que la construcción de las variables es congruente, pues al ser representadas las cantidades t y s por medio de rectas, es correcto, desde el punto de vista geométrico, sumar la recta de magnitud t a la recta de magnitud s de la figura 3.6. Aunque en realidad no se trata de una suma directa como si fueran rectas colineales desde un principio; de hecho, la variable s es perpendicular a la variable t en esta representación de d'Alembert. Para sumar s y t hay que encontrar segmentos de rectas que sean proporcionales a t y colineales a s. Es por eso que el hecho de que las rectas GA y gF sean paralelas a la recta QN resulta tan importante en esta construcción de las variables $t + s$ y $t - s$. En efecto, por construcción, el triángulo gFI es igual al triángulo NPQ (ver figura 3.6), con lo cual el segmento $gI = t$ pero $gI = gQ + QG + GI = 2s + GI$. Con lo cual $GI = t - 2s$, entonces $QI = t - s$. De manera análoga se obtiene que $QB = t + s$, pues en el triángulo GBA, $GB = t$ con lo cual el segmento $QB = t + s$. [66]

[66] Con esta observación se evita aplicar de manera un tanto anacrónica el principio de cerradura y decir que no se puede sumar *tiempo* a *espacio*.

Estas variables $t+s$ y $t-s$ resultan en un principio de la homogeneidad requerida a las funciones p y q que componen la solución de la ecuación diferencial de la cuerda vibrante. Ahora, en este punto d'Alembert muestra que a partir de una curva periódica dada se puede recuperar la ecuación de la solución general, es decir $y=\psi(t+s)-\psi(t-s)$. Es así que se comienza a revelar la lógica del método seguido por d'Alembert. La opinión de Jerome Ravetz sobre esta manera de representar cantidades físicas es la siguiente:

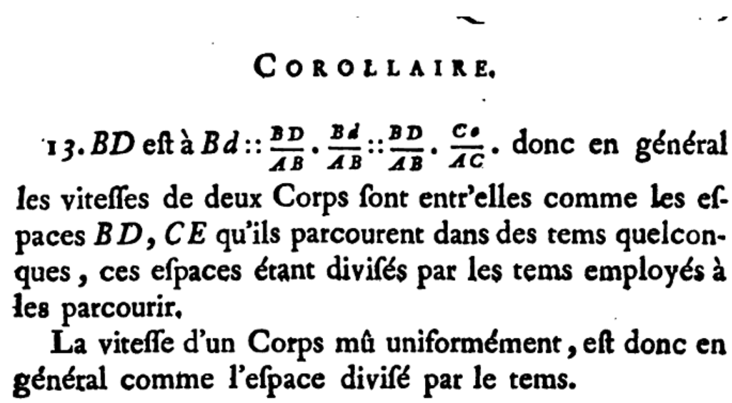
> La diferencia fundamental entre la geometría y el cálculo se deriva del hecho de que la primera se ocupa de las líneas y sus relaciones, y el segundo de números puros. La equivalencia lógica entre una relación de cantidades homogéneas y un número puro no eliminan las diferencias en la concepción, sobre todo en el caso de que las cantidades matemáticas representan cantidades físicas. Así, d'Alembert tuvo que hacer explícito que él no define la velocidad uniforme como la distancia dividida por el tiempo; cantidades heterogéneas no tienen relación, por lo que no pueden dividirse. Lo correcto es que las velocidades uniformes sean directamente proporcionales a las distancias e inversamente proporcional a los tiempos. Me parece ahora que en el siglo XVIII se hizo el intento de unir las técnicas analíticas a las concepciones geométricas. (Ravetz, p. 3)

Si bien es cierto que la distinción de Ravetz entre geometría y cálculo resulta demasiado tajante, en ausencia de un contexto histórico que permita afirmarlo, resulta pertinente la apreciación que tiene sobre la manera con que los matemáticos del siglo XVIII resolvían problemas y representaban cantidades, incluidas las cantidades físicas. Dado que d'Alembert en el caso de la cuerda vibrante resuelve una ecuación diferencial cuya solución contiene variables que pueden ser construidas geométricamente, y que junto con la solución de Euler ejemplifica cómo puede concebirse y después implementarse este intento de unir las técnicas analíticas a las concepciones geométricas para poder precisar, más allá de confirmar la apreciación de Ravetz, cómo es que el problema de la cuerda vibrante tuvo impacto sobre el concepto de función matemática.

El primer punto es ver cómo d'Alembert hace explícito qué cantidades heterogéneas no tienen relación. En el *Tratado de Dinámica* de d'Alembert, publicado en 1743, su autor menciona que la geometría es el método más sencillo para resolver las cuestiones de la mecánica, apelando a un principio de continuidad de los fenómenos (principio de continuidad de Leibniz), en donde la velocidad de un cuerpo que se mueve uniformemente es definida simplemente como el espacio dividido por el tiempo; aquí no hay una mención explícita a las cantidades heterogéneas; ver figura 3.7 (d'Alembert 1, p. 13). Es en la entrada correspondiente a "Velocidad" en la *Enciclopedia* donde sí aparece una mención explícita a las cantidades heterogéneas:

> VELOCIDAD s.f. (Mécánica) Característica del movimiento en el cual un cuerpo es capaz de cubrir un espacio determinado en un momento determinado [...]
>
> Para medir cualquier velocidad constante [de un cuerpo] y para comparar velocidades entre sí, se toma el cociente del espacio dividido por el tiempo, suponiéndose que este espacio está cubierto en una tasa constante [respecto al tiempo]. Si un cuerpo, debido a su velocidad, puede viajar 80 pies en 40 segundos de tiempo, tendríamos que 80/40, o dos, es la cantidad que expresa su velocidad. Ahora para comparar esta velocidad a la de otro cuerpo que recorre 90 pies en 30 segundos, tendríamos en la misma forma 90 / 30 ó 3 sería esta nueva velocidad; así, la relación entre estas velocidades es de 2 a 3. Si s es el espacio y t el tiempo, $c = \frac{s}{t}$ es la velocidad, siempre que el movimiento sea uniforme. Se puede hacer una objeción basada en la justa medida de la velocidad: se dice que el espacio y el tiempo son dos cantidades heterogéneas que no se pueden comparar, y por tanto, no se puede tener una idea clara del cociente $\frac{s}{t}$, debo responder que esta expresión de la velocidad no significa nada, excepto que las velocidades de dos cuerpos siempre son entre ellas como los cocientes de los espacios divididos por el tiempo, mientras que se represente el tiempo y el espacio por números abstractos que tienen la misma relación entre ellos que los espacios y que los tiempos a los que hacen referencia. Vea para este fin el artículo ecuación. (d'Alembert 4)

Entonces, por lo mostrado en las citas anteriores, se puede decir que entre la publicación del *Tratado de Dinámica* y la *Enciclopedia* hubo alguna tensión que impulsó a d'Alembert a poner la nota aclaratoria sobre el significado de dividir cantidades heterogéneas. Es probable que la tensión se haya generado directamente con Euler, pues en su primera memoria sobre la cuerda vibrante, Euler alega que él sí compone sus variables con cantidades homogéneas. Esto se verá más adelante; en tanto, para completar el comentario de Ravetz sobre las cantidades homogéneas, se puede decir que para d'Alembert dos cantidades



COROLLAIRE.

13. BD eſt à Bd :: $\frac{BD}{AB} \cdot \frac{Bd}{AB}$ :: $\frac{BD}{AB} \cdot \frac{Ce}{AC}$. donc en général les viteſſes de deux Corps ſont entr'elles comme les eſpaces BD, CE qu'ils parcourent dans des tems quelconques, ces eſpaces étant diviſés par les tems employés à les parcourir.

La viteſſe d'un Corps mû uniformément, eſt donc en général comme l'eſpace diviſé par le tems.

Figura 3.7: Definición de velocidad que aparece en la primera edición del *Tratado de Dinámica* de d'Alembert.

heterogenéas no se pueden dividir si representan cantidades físicas, igualmente para el caso de sumar o restar dos cantidades para obtener una tercera, esto es, $t + s$ y $t - s$ resultan ser cantidades homogéneas aritmética y geométricamente hablando. El asunto de las cantidades homogéneas en estas memorias de d'Alembert quedaría cubierto de no ser porque la solución encontrada depende de un par de restricciones, siendo una de ellas la forma de la velocidad inicial de la cuerda, lo cual, como se verá mas adelante, es una de las objeciones que Euler tiene respecto a la solución de d'Alembert y que, por lo visto hasta ahora, no se espera que sea en lo tocante a la representación de cantidades físicas.

Ahora, para comenzar a analizar los intentos de d'Alembert por unir las técnicas analíticas a las concepciones geométricas, nuevamente se pueden revisar las entradas de la *Enciclopedia* pero ahora las correspondientes a *análisis,* y así ver qué es lo que podría entender d'Alembert por *técnicas analíticas*:

> *ANÁLISIS*: es propiamente el método de resolución de problemas matemáticos reducidos a ecuaciones. El análisis, para resolver los problemas, emplea la ayuda del álgebra o cálculo de las cantidades en general; estas dos palabras, Análisis y Álgebra, se consideran a menudo como sinónimos.
>
> El análisis está dividido según su objeto de estudio, el análisis de cantidades finitas y el análisis de cantidades infinitas. El análisis de cantidades finitas es lo que llamamos aritmética especiosa[67] o álgebra. El análisis de las cantidades infinitas, también llamado el nuevo

[67] *Spécieuse*: usada en el sentido de Viéte.

análisis, es el que estudia la relación de las cantidades que se toman como infinitas, o infinitamente pequeñas. Una de sus ramas principales es el método de cálculo de fluxiones o diferencial. (d'Alembert 4)

d'Alembert, a diferencia de Euler, no hace una mención explícita sobre lo que considera el problema de la cuerda vibrante. Éste es un problema que ha sido reducido a ecuaciones de cantidades infinitamente pequeñas. Si el problema se encuadra dentro de la definición de análisis que d'Alembert plantea, esto hace que el problema de la cuerda vibrante sea un problema principalmente matemático, esto es, no representa un problema físico "puro". Y las ecuaciones a las que es reducido serán acordes con la geometría fluente de Newton, dada la referencia al lema X de los *Principia*. Con esto, la solución encontrada deberá reflejar, antes que concordancia o correspondencia con lo observado en una cuerda material, coherencia dentro de un corpus lógico de ese análisis que al apoyarse en el álgebra, paulatinamente terminó separándose de la geometría; hasta que finalmente en el siglo XIX se desarrolló el análisis moderno.

Así, d'Alembert reconoce dos maneras de cómo análisis y álgebra pueden considerarse sinónimos, y es el tipo de cantidades tratadas lo que determina el método con que han de ser resueltas las ecuaciones involucradas en un problema matemático. Una de esas maneras es la de las cantidades infinitamente pequeñas cuyo método describe Jakko Hintikka:

> Newton, al igual que cualquier matemático experimentado, está pensando en el análisis geométrico como un análisis de figuras, es decir, como un estudio sistemático de las interdependencias de los objetos geométricos en una configuración determinada, que incluye tanto los factores "conocidos" (controlables) como los "desconocidos" (incontrolables). A partir de esta idea no hay más que un pequeño paso a la concepción del procedimiento de análisis como método general de estudiar estas interdependencias "dinámicas", sin hacer diferencia entre los elementos conocidos y desconocidos. Fue en este sentido que el concepto de análisis se extendió a otras partes de las matemáticas. Por ejemplo, el álgebra es considerada analítica, porque en ella se estudia la interdependencia entre una serie de cantidades, algunas de ellas desconocidas, por medio de ecuaciones. (Hintikka, p. 106.)

Por su parte Michael Beaney nos dice respecto al método de las cantidades finitas:

> [...]la geometría de Descartes, efectivamente, implica la ruptura de problemas complejos en otros más sencillos. Más significativo, sin embargo, fue el uso del álgebra en el desarrollo de la llamada geometría analítica, lo que permitió que problemas geométricos se transformaran en problemas aritméticos más sencillos de resolver. Es en la representación de lo "desconocido" que se ha de encontrar, por medio de la "x", que podemos ver el papel central que desempeña en el análisis la idea de tomar algo como dado y trabajar a partir de eso, lo que hace parecer apropiado considerar al álgebra como un "arte del análisis", en alusión a la concepción regresiva de los antiguos. Ilustrado en la geometría analítica, en su forma desarrollada, podemos ver las tres concepciones de análisis descritos [anteriormente], a pesar del propio énfasis de Descartes en la concepción decomposicional.[68] (Beaney, sección 4.)

De la antigua concepción de Pappus del análisis donde se supone como hecho lo que se quiere conocer y a partir de ahí se deconstruye lo hecho hasta principios primeros para ver cómo es que está organizada o estructurada la cosa que se quiere conocer, hasta los métodos newtoniano y cartesiano de hacer análisis, hay en ellos una línea que relaciona directamente sus conceptos al trabajo de d'Alembert sobre la cuerda vibrante. Este problema es más cercano a un porisma, dado que confluyen en su formulación y solución los conceptos de variable, incógnita y función, y más aún, donde la incógnita es una función de dos variables que describe una curva mecánica; todos esos conceptos conectados por una ecuación diferencial. Problema más cercano a un porisma porque incluso la retórica interviene, a falta de un método desarrollado para la búsqueda de una

[68] Las tres concepciones de análisis son las siguientes:

1. Decomposicional: el concepto básico es el de descomponer algo. Así análisis se define como el proceso de ruptura de un concepto en partes más simples, por lo que su estructura lógica emerge.
2. Regresiva: en el pensamiento griego antiguo, análisis se refiere principalmente al proceso de trabajo posterior a los primeros principios, por medio de los cuales algo podría ser demostrado.
3. Interpretativa: en la obra de Frege y Russell, antes de que el proceso de decomposición pueda tener lugar, los elementos que deben analizarse primero tienen que ser traducidos en su correcta forma lógica. Esto sugiere que el análisis también incluye una dimensión transformadora o interpretativa. (Beaney, sección 1.1)

solución. Ya se ha expuesto cómo es que d'Alembert encuentra la función general que resuelve el problema por medio de ecuaciones, pero la construcción de la cicloide es por medio del análisis de figuras. Esto es, la solución se encuentra resolviendo una ecuación y la explicación concreta se hace mediante el análisis de figuras. En el caso particular de d'Alembert se observa una coexistencia de metodologías geométricas y algebráicas para resolver un problema de manera analítica, sin que en este intento se exprese una contradicción explícita por parte del autor. En otros autores puede que sí haya la necesidad de hacer del álgebra un "arte del analisis", pero esto aún no sucede en el trabajo de d'Alembert. Como observa Hans Jahnke: "En un largo proceso la mecánica teórica en su conjunto se separó del lenguaje geométrico de Newton y fue reformulada en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales".[69] Siendo el álgebra el puente entre las maneras de formular problemas, y que paulatinamente separó no sólo de la mecánica teórica y de la geometría, sino también del análisis de ambas.

En este punto es que ya se puede formular la pregunta sobre qué parte del método que sigue d'Alembert para resolver el problema de la cuerda vibrante (el cual no es formulado de manera explícita a modo de definición, como más adelante se verá que sí lo hace Euler) es la que generó la controversia acerca de algo más general como lo es el concepto de función matemática. Sobre el método seguido Jean Dhombres comenta:

> Este enfoque funcional consiste en resumir analíticamente un problema determinado mediante la introducción de una o varias funciones desconocidas (1ª fase); a continuación, conectar las funciones y los datos del problema por una o más ecuaciones que los relacionan (2ª fase) para resolver estas ecuaciones, también independientemente del problema (3ª fase) para finalmente explicar el resultado en la formulación inicial del problema (4ª fase). Las ecuaciones que vinculan las funciones introducidas durante la primera fase son ecuaciones funcionales; este término incluye ecuaciones diferenciales, ecuaciones de diferencias finitas o ecuaciones diferenciales parciales. La anomalía de este método es una contradicción entre la necesidad de generalidad en las funciones desconocidas para la ecuación de la primera etapa y la restricción necesaria en estas funciones para obtener soluciones eficaces en la tercera etapa.
>
> Debido a que el método generalmente requiere la consideración

[69] Hans Niels Jahnke. Algebraic Analysis in the 18th Century. (Jahnke 1, p. 105.)

de todas las soluciones de la ecuación funcional introducida, sin restricciones, incluso para eliminar en el último paso las soluciones que no son reelevantes para el problema propuesto. (Dhombres, p. 25)

Según el punto de vista anterior, es el metódo en sí el que genera alguna tensión entre la generalidad de la solución y la descripción eficaz del problema. Ahora bien, aunque esta tensión se fue gestando a lo largo de aproximadamente dos décadas, d'Alembert mismo ya la manifestaba de alguna manera en esta memoria. Acerca de la solución más general que puede ser encontrada el autor comenta: "Es así que la aplicación de la mecánica y la geometría ayudan a descubrir verdades puramente geométricas que son difíciles de encontrar si se emplean métodos directos." (d'Alembert 3, p. 230.) Esta declaración deja ver que d'Alembert considera al conocimiento geométrico y mecánico como herramientas que pueden ser aplicadas a resolver el problema de la cuerda vibrante.[70]

La verdad puramente geométrica a la que se refiere es la curva cicloide que tiene por ecuación la solución de la ecuación diferencial, a saber: $\psi(t+s) - \psi(t-s) = \Delta(t)\Gamma(s)$, donde considerar las velocidades iniciales de cada punto de la cuerda es el método referido como indirecto. Y es justo el considerar este método indirecto, con las reestricciones que ello conlleva, lo que impulsó a Euler a publicar su primera memoria sobre el problema de la cuerda vibrante. Pero esto se revisará más adelante. Por ahora es necesario revisar cuáles son las reestricciones introducidas por el método indirecto que usó d'Alembert.

Respecto a las conclusiones que d'Alembert hace en sus memorias sobre la cuerda vibrante, Carmen Martínez comenta:

> Finalmente, d'Alembert concluye que "la solución general del problema de la cuerda vibrante se reduce a dos cosas: determinar de la manera más general la curva generatriz y encontrar en cada caso particular cuál debe ser esta curva a partir de los valores de *f(x)* y *g(x)*, además de que "f y g no pueden ser tomadas a voluntad, deben tener ciertas condiciones." d'Alembert hace una lista de estas condiciones cuya característica principal es que restringen la forma y velocidad inicial de la cuerda a curvas cuyas ecuaciones son funciones impares con periodo *2l*. Agrega también que la función *f(x)*

[70] A diferencia de Euler que, como se verá más adelante en este capítulo, formula el problema de la cuerda vibrante de manera que primeramente se resuelve como problema de mecánica y y deriva en un problema puramente de análisis. Segun T. Hankins, esta diferencia se da por que d'Alembert considera a la mecánica como una rama de la matemáticas, y las leyes del movimiento son demostrables por medio de teoremas de geometría. (Hankins, p. 173)

> debe estar sujeta a la ley de continuidad, refiriéndose así a la propiedad que Euler había definido en [su trabajo titulado *Introductio in analysis infinitorum*], es decir, que *f(x)* debe estar dada a través de una única expresión analítica. (Martínez, p. 82)

En este momento hay que hacer algunas aclaraciones sobre las funciones continuas: Primero, que la ley de continuidad de Leibniz que d'Alembert cita en su tratado de dinámica se refiere a fenómenos de la naturaleza, no a problemas de matemáticas. En segundo lugar, la búsqueda de funciones continuas que den solución al problema de la cuerda vibrante que sean acordes con un principio de continuidad, y que sean la solución más general posible. Esto es un problema central en el debate pero que se gestó muy lentamente[71] en las primeras dos memorias de d'Alembert sobre la cuerda vibrante, las solución encontrada es una función impar de variables separables y periodo $2l$, de la cual no menciona directamente que deba ser descita por una sola ecuación, sino que debe estar acorde con un resultado que obtiene Newton sobre la imposibilidad de tener una corrección indefinida, expresada como serie, de una curva oval. Estab es una diferencia clara respecto de la solución de Euler y Bernoulli, como se verá en la siguiente sección. (d'Alembert 3, pp. 242-249)

De manera general se puede decir que la parte central del debate será la generalidad de la solución y lo que ha de considerarse una función contínua. A. P. Youschkevitch nos dice al respecto:

> En cada caso particular, las funciones que aparecen en la solución general son determinadas por la forma inicial de la cuerda (y las velocidades iniciales de sus puntos). Por supuesto, estas condiciones iniciales pueden ser diversas, pero d'Alembert rígidamente restringió la clase de formas iniciales admitidas para la cuerda, al considerar

[71] En particular, la condición de continuidad definida por Euler aún no formaba parte del debate en este momento pues d'Alembert conoció la *Introductio* hasta agosto o septiembre de 1748, y en esa época sólo había tenido tiempo de hojearla. Así lo declara d'Alembert en una carta a Euler:

> Paris, 7 de septiembre de 1748
>
> He recibido con mucha gratitud el hermoso regalo que usted me ha dado de sus opuscúlos y su Introducción al Análisis de lo Infinito. [...]
>
> No he tenido tiempo más que de hojear su introducción al análisis de lo infinito, que he recibido sólo unos días antes. Sin embargo, he leído con atención lo que usted dice acerca de los factores binomiales, de los puntos cúspide de segunda especie y los logaritmos de las cantidades negativas [...] (Euler 11 p. 289)

por lo cual no debió estar muy familiarizado con esta concepción de continuidad.

> que sin estas restricciones no hay solución posible del problema mediante el análisis matemático. Entre las restricciones impuestas por d'Alembert es particularmente interesante el supuesto de que la forma inicial de la cuerda debe estar representada en toda su extensión por una y la misma ecuación, es decir, que en el sentido de Euler la cadena es continua. (Youschkevitch, p. 65)

En efecto, si se revisa la primera conclusión en la segunda memoria de d'Alembert se tiene que si $\sigma dt = b$ es el espacio que recorre un punto de la cuerda en el primer instante del movimiento, entonces $\sigma = \frac{b}{dt} = \frac{dy}{dt}$ y como en $t = 0$, $y = \psi(s) + \psi(-s)$, [en el art. XI de la primera memoria se tiene $\Delta(s) - \Delta(-s)$ como la velocidad inicial] entonces $\frac{d\psi(s)}{ds} + \frac{d\psi(-s)}{ds} = \sigma$, con lo cual σ es una función de s; pero recordando que $\psi(s) + \psi(-s) = 0$, entonces $\psi(s) = \frac{\int \sigma ds}{2}$ es una función par de s y por consecuencia σ es una función impar de s. Por otro lado $\psi(s) + \psi(-s) = \Sigma$ y si $\sigma = 0$ entonces $\Sigma = 2\psi(s) = -2\psi(-s)$ tal que Σ (la posición inicial de la cuerda) es una función impar de s. Y sin estas dos condiciones el problema no tendría solución (d'Alembert 3, pp. 231.), es decir no se podrá encontrar una función tal que se pueda representar en general el valor de la ordenada de la curva para cualquier abcisa s y cualquier tiempo t.

d'Alembert desde un inicio concibe que es una cicloide alargada la solución del problema, esta suposición condiciona desde un inicio la función que ha de ser admitida como solución. Pero también condicionará el método con el que habrá de resolverse el problema. Esto se ve en las entradas de la enciclopedia correspondientes a ecuación diferencial y diferencial:

> *[Las] ecuaciones diferenciales* en dos variables están relacionadas a las curvas mecánicas, diferentes a las curvas geométricas. Su construcción está ligada a la curva de la que se trate. *Pero esta construcción supone que las incógnitas están separadas, y que son integrables* (el énfasis es mío).
>
> *DIFERENCIAL*, adj. Se llama, en geometría superior, cantidad diferencial o simplemente diferencial, a una cantidad infinitamente pequeña, o menor que cualquier cantidad asignable.
>
> Se llama cantidad diferencial o diferencial, ya que se considera generalmente como una diferencia infinitamente pequeña de dos cantidades finitas, esto es, una supera a la otra en una cantidad infinitamente pequeña. Newton y los ingleses la llaman fluxión, porque la ven como un aumento momentáneo en la cantidad. Leibniz y otros

la llaman cantidad infinitamente pequeña. (d'Alembert 4)

Y la razón para suponer que la solución es una cicloide alargada está ligada al resultado de Taylor de la cuerda vibrante, pero no expresada en el lenguaje de las fluxiones sino en el de las diferenciales. Así, el problema de d'Alembert es, a partir de una ecuación diferencial, encontrar una construcción del problema para obtener una función senoidal que muestre el comportamiento de la cuerda en vibración como si fuera el de un péndulo. [72] Aquí, para d'Alembert, suponer que todos los puntos de la cuerda pasarán a un mismo tiempo por la situación de reposo, es decir por la línea recta AP de la figura 3.1, implicará que haya una infinidad de curvas como solución al problema. A continuación se muestra cómo llega d'Alembert al resultado buscado.

d'Alembert, después de mostrar geométricamente que las curvas de las figuras 3.5 y 3.6 son soluciones de la ecuación diferencial que describe el problema de la cuerda vibrante, se propone encontrar la ecuación que describe dichas curvas. Así, retoma un resultado obtenido por Taylor en su obra *Methodus Incrementorum*: $-\frac{ddy}{ds^2} : \frac{1}{R} = y : A$, donde R es el radio de curvatura de la ordenada más grande (mayor) A. Considerando los casos donde $y = A$ con $\theta = 2aml$, se obtiene la ecuación $\frac{dy'}{\sqrt{A^2 - y'^2}} = \frac{\pi dt}{\theta} \frac{\sqrt{2am}}{\sqrt{l}}$ cuya solución es. $\psi(t+s) = A \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{l}(t+s)} + e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{l}(t+s)}}{-4}$. Análogamente para $\psi(t-s) = A \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{l}(t-s)} + e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{l}(t-s)}}{-4}$. [73] Lo que d'Alembert llama verdades puramente geométricas consiste en mostrar que estas ecuaciones son senoidales de variables separables. Así, la ecuación $\psi(t+s) - \psi(t-s) = \Delta(t)\,\Gamma(s)$ se obtiene facilmente (según d'Alembert), en donde $\Delta(t) = A \sin t$ y $\Gamma(s) = A \sin s$ o $A \cos s$. Efectivamente, es facíl obtener estos resultados si se está familiarizado con la siguiente fórmula deducida por Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Según Struik d'Alembert lo estaba (Struik, p. 357).

Aquí concluye la exposición de los detalles de las dos primeras memorias de d'Alembert sobre la cuerda vibrante. En ellas se comenzaba a gestar lo que a finales del siglo XVIII se convirtió en un debate no sólo entre Euler y d'Alembert sino entre la comunidad de matemáticos europeos. Estos detalles presentados

[72] Esto se puede ver en la entrada de la Enciclopedia que corresponde a *Cuerdas (vibraciones de las)* [Cordes, (Vibrations des)]. En esta entrada dAlembert hace referencia a Euler y su solución al problema de la cuerda vibrante diciendo "El Sr. Euler lo resolvió después de mí, utilizando casi exactamente el mismo método, con la única diferencia de que su método parece un poco más largo". (d'Alembert 4)

[73] En la memoria original de d'Alembert el símbolo π aparece como n y el símbolo e aparece como c.

podrán ser mejor ponderados, en el contexto del debate, al contrastarse con los detalles del trabajo de Euler sobre la cuerda vibrante, que dada la semejanza de las soluciones, plantea la interrogante sobre cómo es que la búsqueda de una solución lo más general posible, con métodos muy parecidos, llevó a la cuestión sobre que habría de entenderse como función, y que eso que finalmente ya no es del ámbito de la mecánica.

Memoria de Euler: Sobre la vibración de las cuerdas (1750)

A continuación, en este trabajo se presenta el planteamiento y el método con el que Euler resuelve el problema tratado contrastándolo con los resultados de las memorias de d'Alembert de 1747 que se presentaron anteriormente, donde su autor se refiere a su método como más elegante (d'Alembert 3, p. 249), o menos largo, en referencia directa a Euler y D. Bernoulli. La primera memoria de Euler sobre este tema fue escrita y presentada en 1748 y publicada hasta septiembre de 1749 en latín con el título *De vibratione chordarum exercitatio* (Euler 6, 1749); un año después apareció la versión en francés de dicho trabajo y es la que aquí se expone.[74] En esta presentación las explicaciones y comentarios dados complementan tanto las memorias de d'Alembert como ésta de Euler mismo.

En esta memoria Euler menciona los trabajos de Taylor, Daniel Bernoulli y, principalmente, la memoria de d'Alembert, los cuales parecerían haber agotado el tema, sin embargo, Euler asevera que todos estos trabajos presentan dos limitaciones que restringen las soluciones a sólo algunos casos. La primera de estas limitaciónes consiste en que los autores mencionados por Euler consideran que las vibraciones de la cuerda son casi infinitamente pequeñas, para poder suponer que la longitud de la cuerda es la misma estando tanto en reposo como en vibración.[75] La segunda limitación consiste en que los otros autores afirman que las vibraciones son regulares, argumentando que la cuerda entera vibra simultáneamente. Así, la forma de las vibraciones resulta ser una cicloide que se extiende al infinito.[76]

Para Euler es cierto que la primera limitación no altera en casi nada los

[74]En ambas versiones de las memorias de Euler están las referencias a d'Alembert, por lo que se pueden considerar una respuesta a la solución de este último. Por su parte d'Alembert debió conocer con bastante detalle el trabajo de Euler, seguramente por medio de Daniel Bernoulli y antes de que cada uno publicara sus memorias. (Hankins, pp. 45-62)

[75]Posteriormente se verá que Euler supondrá también que la longitud de la cuerda no varía para el estado de reposo como para el estado de vibración.

[76]Esto es una falla en el argumento de Taylor, donde esta condición se sigue a fortiori de sus premisas.

resultados, porque de hecho estas vibraciones sí son pequeñas (aunque para él las vibraciones conservan una relación finita a lo largo de la cuerda) y se pueden considerar como infinitamente pequeñas sin que se produzca un error significativo. Además de que ni la mecánica ni el análisis tienen el suficiente alcance para determinar la evolución de las vibraciones en lo finito.[77] De aquí se ve que para Euler las diferencias finitas operan del mismo modo que las diferenciales o diferencias infinitamente pequeñas, al menos en este caso, donde las funciones involucradas son consideradas uniformes. Respecto a la segunda limitación, Euler refiere que un punto de defensa por parte de los otros autores para suponer las vibraciones como regulares, es afirmando que si bien las vibraciones no son regulares al inicio del movimiento, éstas se ajustarán a la ley de la uniformidad después de un lapso de tiempo muy corto, es decir, como si toda la cuerda vibrara de manera simultánea desde el inicio del movimiento, de manera que cada vibración en la cuerda se extiende toda a la vez en línea recta,[78] sin que esta situación afecte la figura de la cicloide extendida que da solución al problema. Clifford Truesdell refiere que la ley de uniformidad citada en esta memoria de Euler (refieriéndose a Taylor y d'Alembert) es la ley de continuidad de Leibniz. (Truesdell, p. 244) Esta ley de continuidad es difícil de ubicar en los textos de Leibniz,[79] aunque los autores que se han ocupado del tema mencionan haber encontrado varias formulaciones de esta ley a lo largo de los escritos y epístolas de su autor.

Hardy Grant nos presenta tres de estas formulaciones:

> Fue Leibniz, sin embargo, quien hizo del Principio de Continuidad - él la llamó *lex continui* - una ley que todo lo abarca (debiendo algunas de sus ideas a Descartes). Esta ley aparece en toda su obra -

[77]La cita exacta es: D'ailleurs on n'a pas encore pousse assez loin, ni la Mechanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvements dans les vibrations finies. (Euler 5, p. 70)

[78]En este punto es díficil interpretar esta referencia como una velocidad de propagación de la vibración sobre la cuerda. En todo caso habrá que poner atención al análisis que hace cada uno de los autores a este respecto. En el caso de d'Alembert la atención es puesta en el el movimiento vertical de un número finito de puntos de la cuerda, cargados con un peso determinado. Esto hace que la fuerza aceleratriz de cada punto de la cuerda dependa de este peso y de la curvatura de la cuerda, y como consecuencia la posición de reposo (rectilínea) no pueda ser obtenida como una posición de la cuerda durante su vibración.

[79]Truesdell refiere que sus intentos por ubicar dicha ley han tenido mediano éxito (Truesdell 1, p. 244), Grant la ubica en un texto titulado *New Essays Concerning Human Understanding* (Grant, pp. 291-294) el cual data de 1765 según la cita que de este txto hace Jean-Michel Salankis (Salanskis, p. 196); Bell la refiere en una carta a Bayle de 1687 (Bell) y Rosenfeld cita un ensayo titulado *A Certain General Principle of Use not only in Physics but also in Mathematics* (Rosenfeld, p. 745).

matemáticas, filosofía y física. Aquí hay varias maneras en las que la expresó:

(i) La naturaleza no da saltos. Pasamos de lo pequeño a lo grande, y viceversa, a través del medio.

(ii) Cuando las determinaciones esenciales de un ser se aproximan a los de otro, todas las propiedades de lo anterior también poco a poco se aproximan a las de lo último.

(iii) Dado que podemos pasar de polígonos a un círculo por un cambio continuo y sin hacer un salto, también es necesario no dar un salto al pasar de las propiedades de los polígonos a las de un círculo, de lo contrario la ley de continuidad sería violada. (Grant, p. 49)

En el primer capítulo de este trabajo se vio que con la Mathesis Universalis Descartes se propuso plantear, mediante una interacción muy cercana entre Filosofía y Matemáticas, los asuntos de las ciencias como asuntos de orden y medida, que si bien aportaba homogeneidad en el tratamiento de las distintas cantidades que fueran tratadas en cualquier ciencia, hacía imposible el movimiento de los cuerpos, es decir, todo ocurría en un universo estático. Si, como asevera Hardy Grant, el principio de continuidad debe algunas ideas a Descartes, entonces, ¿se puede encontrar en estas tres formulaciones del principio de continuidad leibniziano un camino para expresar y medir de manera homogénea las propiedades de un fenómeno cualquiera sin renunciar a un universo dinámico? Ciertamente cada una de las formulaciones anteriores habla de un orden, y que si bien en lo pequeño y lo grande de la primera formulación, en lo pausado que se aproximan las propiedades de un ser a las de otro como dice en la formulación ii) se puede interpretar como una cuestión de medida, queda por verse qué es lo que se puede medir y de qué manera. En la formulación ii), se puede notar la separación entre dos conceptos: uno es el de las determinaciones esenciales de un ser y el otro las propiedades de ese ser. ¿Pero cómo esta distinción puede ser un método para plantear y resolver problemas? Según B. A. Rosenfeld, las tres formulaciones de este principio se pueden reformular en un solo principio de la siguente manera:

> [...] en los fenómenos dados o adoptados (*casus datos*) la diferencia entre los dos fenómenos pueden llegar a ser menor que cualquier magnitud dada, entonces, al mismo tiempo, la diferencia entre los fenómenos que son consecuencia de los fenómenos dados, también necesariamente se hacen más pequeñas que cualquier magnitud dada.

> Para ponerlo más accesible: si los fenómenos (o datos) se aproximan entre sí continuamente, por lo que al final uno se acerca a los otros, entonces lo mismo debe suceder con las correspondientes consecuencias (o resultados buscados), esto es: si los datos están ordenados, entonces también lo son los resultados buscados. (Rosenfeld, p. 745.)

La formulación de Rosenfeld se basa en la distinción de dos conceptos: los datos y los resultados, ordenados en parejas de manera que los resultados son consecuencia de los datos. Donde además, si los datos están vinculados, los resultados también lo estarán. Con esta distinción entre lo que se conoce y lo que se desea conocer se aclara un poco la perspectiva de cómo la continuidad puede operar como un método para resolver problemas, pero aún falta el elemento que permite expresar cuantitativamente estas diferencias; y dado que se está hablando de cantidades variables, el elemento faltante debe estar relacionado con matemáticas. John Bell proporciona una explicación sobre la relación entre el principio de continuidad y las matemáticas de la siguiente manera:

> En una carta a Bayle de 1687, Leibniz dio la siguiente formulación del principio: de una transición supuesta, que termina en cualquier extremo, se permite establecer un razonamiento general en el que el término final puede ser incluido. Esto parece indicar que Leibniz considera transiciones de algún tipo continuo. Ciertamente èste es el caso que ocupó a la geometría y los procesos naturales, donde aparece como el principio de *Natura non facit saltus*. De acuerdo con Leibniz, la ley de continuidad permite a la geometría y a los métodos del cálculo infinitesimal ser aplicados en la física. (Bell, 2010.)

Es así que el principio de continiudad puede tomarse como un método para resolver problemas. Partiendo de la transición de un fenómeno, conocida en sus estadíos intermedios, por continuidad se puede inferir que el final de esa transición será consecuencia lógica y necesaria de la trayectoria seguida. Pero aún así hace falta una metodología precisa de cómo operar con dicho principio. d'Alembert no hace una mención explícita a la ley de uniformidad en el trabajo de la cuerda vibrante, pero está implícita en la asunción de los resultados de Taylor sobre la magnitud de la fuerza aceleratriz y la curvatura de la cuerda, lo que hace que sea solución al problema una ciclode alargada[80]. Es en la

[80]Recordando lo dicho anteriormente en este trabajo sobre la primera memoria de

Enciclopedia donde hay una mención a esta ley de continuidad; el texto en este caso, es atribuido a Formey y a d'Alembert:

> *CONTINUIDAD* (ley de) es un principio que debemos al Sr. Leibniz, y que nos enseña que nada en la naturaleza se hace por saltos. Si un punto clave pasa de estar en un cierto estado a estar en otro estado, pasará por todos los estados diferentes que se pueden desarrollar entre ellos. Esta ley se deduce, según M. Leibniz, del axioma de la razón suficiente. [...]
>
> Esta ley se observa en la geometría con una precisión extrema. Todos los cambios que se dan en las líneas que son una, es decir, en una línea que es la misma [continua en un solo trazo], o en las que varias se unen en una sola en el mismo conjunto, todos sus cambios, - digo yo- se dan después de que la cifra ha pasado por todos los cambios posibles que conducen al estado que finalmente adquiere. Por ejemplo, las cúspides que se encuentran en muchas curvas parecen violar esta ley de la continuidad, porque la línea parece terminar en este punto, y de repente, al mismo tiempo, comenzar de nuevo en una dirección opuesta; sin embargo, el punto de cambio no viola el principio: podemos ver que en estas "cúspides" se forman nodos en los que vemos claramente que la ley de continuidad se sigue, debido a que estos nodos son infinitamente pequeños, de forma que la cúspide está formada de un solo punto. Así, en la figura. 104 de la geometría, si el nodo de AD se desvanece, se convertirá en una cúspide. (ver d'Alembert 4)

En la *Geometría* de Descartes no aparece una figura 104, pero se puede interpretar que d'Alembert está pensando en un caso como el de la figura 3.8 a) y no como el caso de b) de esa figura; en todo caso, se puede mencionar un ejemplo que analiza Euler sobre las ramas de una parábola. En este ejemplo Euler ve a la curva como compuesta de dos líneas y el punto donde se unen como una cúspide, tras lo cual hace la distinción entre funciones continuas y discontinuas y

d'Alembert: En la *Enciclopedia* se encontró que una ecuación diferencial en dos variables esta ligada a las curvas mecánicas y su construcción está ligada a la curva correspondiente; d'Alembert, al proponerse mostrar que la solución es una curva de la familia de la cicloide (una curva senoidal), la cual es una curva mecánica, por tanto, debe poner el problema en términos de ecuaciones diferenciales. Así, sólo en la invocación del principio de continuidad es que se justifica el uso de diferenciales en un problema físico y la verdad, puramente geométrica, de considerar la representación $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dy}{dt}$ y $F_{acel} = -F\frac{ddy}{ds^2}$ como cantidades infinitamente pequeñas. (ver Truesdell, pp. 242-244.)

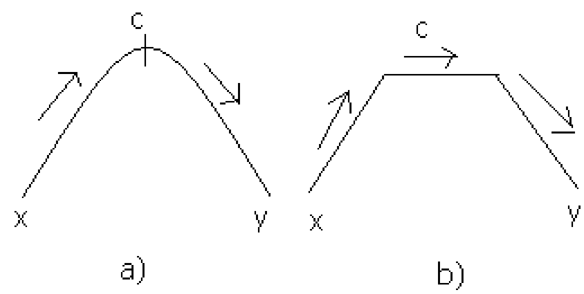


Figure 3.8: Esquema sobre la descripción que d'Alembert hace del principio de continuidad de Leibniz en la *Enciclopedia.* El caso a) corresponde a una curva continua, que no obstante tener un cambio brusco de dirección en su desarrollo lo hace en un sólo punto (punto c) infinitamente pequeño, con lo que la "transición" para ir del punto x al punto y es una sola. En cambio, en el caso b) hay dos cambios bruscos en su desarrollo, y el segmento c no sigue durante varios puntos la relación que siguen los puntos del segmento que asciende desde el punto x y después con el segmento que baja hasta el punto y; entonces, al haber tres comportamientos con lógicas o relaciones distintas, la curva del caso b) no es continua.

que generarán una contradicción sobre lo que se puede considerar como solución de una ecuación diferencial. (ver Dhombres, p. 35.)

Aún cuando esta entrada de la *Enciclopedia* es posterior al trabajo de d'Alembert sobre la cuerda vibrante, se puede ver que el enlace entre fenómenos y ley de la continuidad leibniziana son las curvas que junto con la geometría describen el comportamiento o transiciones que experimentará dicho fenómeno; ahora bien, qué tanto de la dinámica de un problema se rescata con la aplicación del principio de continiudad se verá mas adelante. Por su parte, Euler considera que está suficientemente demostrado que si una sola vibración es conforme a la regla de uniformidad, las siguentes observarán igualmente dicha regla. También se tiene que el estado de las vibraciones siguientes depende de las precedentes y puede ser determinado por ellas y, recíprocamente, el estado de las siguientes se puede deducir del estado de las que las precedieron. Apelando a la regla de homogeneidad o continuidad, resulta que si las vibraciones siguientes son regulares no es posible que las vibraciones precedentes se aparten de esta regulridad, y evidentemente, si la primer vibración es irregular, las siguientes no podrán nunca llegar a la perfecta regularidad. Pero, advierte Euler, la primera vibración dependerá siempre de nuestro gusto,[81] de manera que se puede dar cualquier forma a la cuerda, incluida, en principio, una curva como la de la figura 3.8 b), antes de soltarla y ponerla en vibración. Esto hará que el movimiento de la cuerda varíe infinitamente, dependiendo de que se le de a la cuerda tal o cual forma al comienzo del movimiento.

De las consideraciones anteriores, para Euler la pregunta por responder es la siguiente:

> Si una cuerda de longitud y masa dada, se tensa por una fuerza o un peso determinado, dándosele en lugar de la situación recta, una forma cualquiera pero que difiere muy poco de la situación recta, y a continuación se suelta repentinamente, determinar el movimiento vibratorio total con el que será agitada la cuerda. (Euler 6, p. 70)

y aunque él considera que d'Alembert es el primero en haber logrado una solución exítosa en el examen de este problema; difícil tanto en la mecánica como en el análisis, pero que debe ser sometida a discusión, y aunque la solución que Euler encuentra no difiere en mucho de la de d'Alembert, el primero no duda en exponerla, dado que considera sus observaciones son lo suficientemente interesantes en la aplicación de formas (o fórmulas) generales. El asunto de la generalidad es lo que parece motivar de entrada a Euler a escribir esta memoria. Si se comparan ambas memorias el objetivo de d'Alembert es mostrar que hay una infinidad de curvas de la familia de la cicloide que son solución del problema; mientras que esta memoria de Euler, al establecer que la vibración dependerá de la forma que se le dé al inicio a la cuerda, la cual dependerá enteramente del gusto propio, siempre y cuando se conozca su forma (analítica), entonces hay tantas formas de vibrar como figuras iniciales se le guste dar a la cuerda.

Así comienza Euler el planteamiento de su análisis, el cual se propone seguir de una manera ordenada y asistiéndose tanto de la mecánica como del análisis para llegar a la solución. Entonces propone considerar lo siguiente: sea la cuerda AB, fija en sus extremos A y B y tensa sobre la dirección AF (ver Fig. 3.9) por una fuerza cualquiera, como aquella que se ejerce comúnmente en los instrumentos de música. La cuerda AB tiene el mismo espesor en todas sus

[81]Esto marca una diferencia respecto a la memoria de d'Alembert ya que al hablar de las causa que ponen en vibración a la cuerda, sólo las menciona como "cualquiera que estas sean", pero este comentario va a hacer más referencia a las restricciones que d'Alembert puso a las funciones que han de aceptarse como solución que a las causas o maneras de iniciar la vibración de la cuerda. En este punto Euler también dice que es conocida la figura que tiene la cuerda cuando es puesta a vibrar.

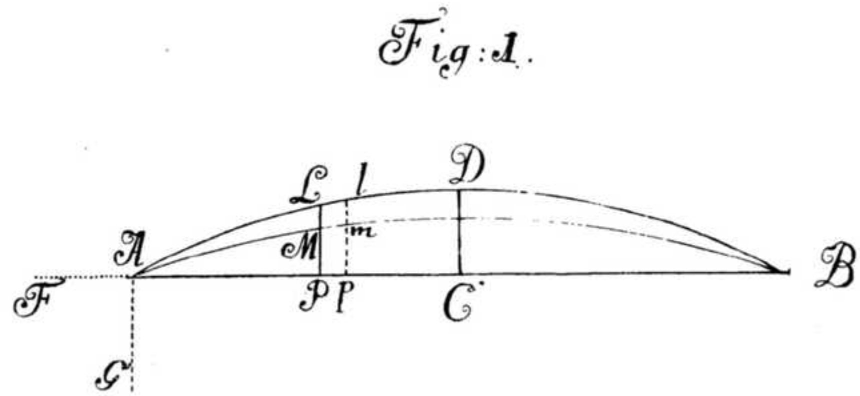


Figure 3.9: Representación de Euler del problema de la cuerda vibrante. Obsérvese la semejanza con el diagrama de Taylor de 1715.

partes, su longitud $AB = a$, su masa o su peso es M y la fuerza de tensión $AF = F$. Luego se va a hacer pasar esta cuerda de su estado natural AB a un estado de curvatura cualquiera AL/B, que sin embargo, no diferirá más que infinitamente poco del estado natural rectilíneo AB, de modo que la longitud AL/B no sobrepase significativamente la longitud AB; esta forma AL/B dada a la cuerda, es conocida. Así, si la cuerda es soltada súbitamente del estado AL/B Euler se pregunta qué movimiento adquirirá ella y cuáles serán las vibraciones que tendrá.

Tan pronto la cuerda sea soltada del estado AL/B, la fuerza de tensión la jalará de entrada hacia la situación natural AB, y todos los puntos de la cuerda la alcanzarán, o bien simultáneamente, o bien en diversos momentos y así cada uno de ellos participará en un movimiento vibratorio, hasta que la resistencia calme toda agitación. Aquí, Euler hace notar que, sabiendo perfectamente en qué consiste este movimiento, basta con haber asignado para cada tiempo el estado de la cuerda, es decir, su forma; así que mientras se define por un lado la sucesión instántanea de la posición de cada punto de la cuerda, se definirá al mismo tiempo la velocidad de cada punto de esta, y así se alcanza la total comprensión de todo el movimiento. Por tanto, para Euler, no será necesario poner atención a la velocidad de ningún punto de la cuerda, lo cual disminuye considerablemente la dificultad de su solución.[82] Esto es, la cuerda conservará la figura inicial en su recorrido, de ahí la semejanza que hay entre el diagrama

[82]Hay que recordar que la solución buscada depende de dos variables (s, t).

de Taylor de 1715, pero sin asumir directamente que la fuerza aceleratriz y el radio de curvatura en cada punto siguen una proporción constante.

Igualmente Euler señala que desde que se aceptó el hecho de que la longitud de la cuerda no sufre ningún cambio mientras recorre distintas figuras desde el estado AL/B hasta el estado AB (pudiéndose asegurar que $AL/B = AB$), se sigue que sólo a través de las aplicadas cualquiera PL, pl, normales al eje AB, los arcos AL, Al serán iguales a las abcisas AP y Ap respectivamente; por consecuencia las aplicadas PL, pl, serán infinitamente pequeñas comparadas con las abcisas. Por tanto, si se llama a la abcisa $AP = x$, la aplicada PL será infinitamente pequeña en comparación con x, y el arco AL será igual a x; de donde se sigue que $Pp = Ll = dx$. Se comprende que, mientras la cuerda adopta diversas figuras sucesivas el punto L se mueve perpetuamente según la dirección de la aplicada LP, con lo cual cada aplicada LP representa la vía por la cual el punto L se encamina al estado natural AB, pero luego a causa del moviento recibido, siguiendo la misma dirección normal a AB, tenderá hacia el lado opuesto.[83]

Después de haber hecho estas observaciones, ahora Euler apunta que después de un tiempo t en el que la cuerda ha arribado a la situación $AmMB$, abandonando su situación primitiva AL/B, de manera que el punto L llegará hasta el punto M. Después, suponiendo que cualquier abcisa $AP = x$ que expresa al mismo tiempo la longitud del arco AM o la aplicada en la curva AMB que responde a $PM = y$, con lo cual la curva AMB depende del tiempo transcurrido t, así la curva será una función de dos variables x y t, de manera que, suponiendo $t = 0$, y es el valor dado a la aplicada de la curva primitiva AL/B. En este momento para Euler es claro que si se conoce la naturaleza de esta funcion de x y t, que expresa la cantidad de la aplicada y, se podrá por medio de ésta asignar la figura de la cuerda para un tiempo cualquiera t; concluyéndose adicionalmente la variabilidad del movimiento de toda la cuerda.

Así, y es una función de x y de t, y su diferencial tiene una forma tal que $dy = pdx + qdt$. Esta fórmula comprende no sólo la variabilidad de y por la curva AMB de la figura 3.9, teniendo en cuenta el tiempo transcurrido. Para Euler esto se hace evidente si se toma el tiempo constante, es decir, $dt = 0$, entonces la ecuación $dy = pdx$ expresa la naturaleza de la curva AMB, teniendo en cuenta el tiempo transcurrido, aclara Euler. Esto es, la forma de la cuerda en un tiempo $t = constante$ y determinado. Pero si la abcisa x se supone

[83]Euler no menciona a la inercia, sólo al movimiento recibido. Pero con este señalamiento Euler establece que el movimiento de la cuerda va más allá del estado natural AB.

constante ($dx = 0$), la ecuación $dy = qdt$ define el movimiento del punto L para todo el tiempo que dure el movimiento de la cuerda hasta que el punto M alcance el punto L. Ahora bien p y q serán de nuevo funciones de x y t, cuyas diferenciales, pidiendo que x y t sean variables de una y otra, satisfacen: $dp = rdx + sdt$ y $dq = sdx + udt$. Para Euler no se discute que, por la naturaleza de las funciones, el elemento dt en dp y el elemento dx en dq, deben tener un coeficiente común, esto es:$dp = rdx + sdt$ y $dq = sdx + udt$ por el teorema de Euler, citado anteriormente por d'Alembert.[84] (Euler 3, p. 186)

El problema que Euler plantea trata preferentemente el determinar el movimiento de la cuerda por las fuerzas solicitantes o actuantes, en este caso la fuerza aceleratriz, por la cual el punto M de la cuerda es acelerado sobre el eje $AB = P$; es claro que todas las fuerzas por las cuales cualquier punto de la cuerda empujado hacia el eje AB, consideradas conjuntamente, deben ser equivalentes a la fuerza por la cual la cuerda es tensada ($AF = F$), esto es, si se arreglan las fuerzas contrarias e iguales a P, aplicadas sobre ML en cada punto M de la cuerda, ellas deberán estar en equilibrio con la fuerza que tensa la cuerda $AF = F$, y esta propiedad podrá determinar la verdadera fuerza aceleratriz P, por la cual cada elemento Mm de la cuerda participa justo en ese momento. La noción de equilibrio marca otra diferencia respecto al planteamiento que D'Alembert hace del problema. Hay que recordar que para D'Alembert la fuerza aceleratriz es directamente proporcional al peso de la cuerda, lo cual resulta ser la tensión de la cuerda.[85]

Si la masa o el peso de toda la cuerda es M_c,[86] y se distribuye uniformemente

[84]Euler en el trabajo titulado *De infinitis curvis eiusdem generis sev methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis* (Euler 3), hace la distinción entre dos tipos de casos que puede haber para encontrar una familia de curvas. El primero y más sencillo es cuando se cuenta con una ecuación algebraica del tipo $y^2 = ax$, donde y y x son las variables y a es un parámetro que determina una curva en particular, si a se vuelve una variable (en su caracter de parámetro) una familia de curvas está determinada a través de esta ecuación algebraica denomida paramétrica. Si por el contrario no se cuenta con la ecuación algebraica se tiene que buscar una función P que dependa de a, y y x, donde además $x = x(a)$ y $dy = Pdx$. Así, el parámetro a es buscado por medio de una ecuación diferencial como parámetro de a o de una ecuación diferencial de orden superior. En el caso de la cuerda vibrante es una ecuacion de orden dos; de este modo, y como se vio en la memoria de d'Alembert, al ser iguales los coeficientes del elemento dt en dp y del elemento dx en dq, se puede reescribir $dy = pdx + qdt$ como $dy = P(t + x)d(t + x)$, con lo cual se procede mediante una integración o cuadratura a obtener la ecuación de la familia de curvas que serán solución.

[85]Euler al hablar aquí de equilibrio de fuerzas no lo está diciendo en el sentido de suma de componentes o vectorial. Si se revisa la figura 3.9, las fuerzas aceleratrices son perpendiculares en todo momento a la fuerza de tensión F. Esto contrasta con lo que hace Taylor, quien calcula la fuerza aceleratriz como la fuerza en desquilibrio entre la tensión y el peso de la cuerda en el paralelogramo $BTbt$ de la figura 2.12 b).

[86]En la memoria original de Euler esta masa está denotada por la letra M; he agregado el subíndice c para distinguir la masa de la cuerda del punto M de la cuerda que Euler menciona

por toda la longitud AB de la cuerda, el peso de la porción AP, o AM, será: $\frac{M_c x}{a}$; en consecuencia el pequeño peso del elemento $Mm = dx$ es: $\frac{M_c dx}{a}$; este peso actúa sobre la línea ML por la fuerza aceleratriz P.[87] La fuerza motriz del elemento dx es $\frac{M_c dxP}{a}$ y la suma de todas las fuerzas motrices para el arco AM será entonces: $\frac{M_c}{a}\int Pdx$. Dado que el punto A se supone fijo, es posible para Euler concebir una fuerza $AG = G$, que actúa en la dirección AG normal a AB (ver figura 3.9), lo suficientemente grande para que el punto A permanezca en reposo. El autor refiere que estas cosas están dadas por la teoría del equilibrio de fuerzas aplicadas a un alambre perfectamente flexible y se expresan en la siguiente ecuación: $Fy - Gx + \frac{M_c}{a}\int dx \int Pdx = 0$,[88] donde Fy y Gx son los momentos[89] de las fuerzas F[90] y G respecto al punto M, y $\frac{M_c}{a}\int dx \int Pdx$ es la suma de todos los momentos de fuerzas elementales respecto al mismo punto M.

Ahora, menciona Euler, que si se considera la curva AMB que la cuerda forma en un momento dado, y cuya naturaleza es expresada por las ecuaciones dadas anteriormente, y si el tiempo t se toma constante ($dt = 0$), entonces se tendrá $dy = pdx$ y $dp = rdx$. Diferenciando la ecuación que se encontró para el estado de equilibrio y sustituyendo pdx, en lugar de dy y dividiendo por dx, se tiene: $Fp - G + \frac{M_c}{a}\int Pdx = 0$. Diferenciando de nuevo esta ecuación y sustituyendo rdx por dp y dividiendo por dx se tiene $Fr + \frac{M_c}{a}P = 0$ de donde se obtiene la fuerza aceleratriz P del punto M sobre la dirección MP, de manera que $P = -\frac{Far}{M_c}$. De aquí resulta que si la curva AMB es conocida, se puede determinar por su naturaleza la fuerza aceleratriz de cada uno de los elementos.

Euler considera ahora el movimiento de un solo punto M, el cual se aproxima al punto P, bajo la acción de la fuerza aceleratriz P, considerando a la abscisa

anteriormente.

[87]La fuerza motriz, la fuerza aceleratriz (aceleración) y el movimiento de cada porción de la cuerda son colineales y perpendiculares a la cuerda. A diferencia de d'Alembert, Euler no considera la aceleración debida a la gravedad planteándose el encontrar la verdadera fuerza aceleratiz. Esta consideración marca una diferencia al construir las variables de las funciones que darán solución al problema.

[88]Ver Euler 1, p. 77. También parece ser el trabajo de Euler, ***De oscillationibus fili flexilis quotcunque pondusculis onusti.*** (Euler 4 p. 41) Al igual que al citar su teorema sobre la diferenciación de funciones homogéneas, Euler no se menciona a sí mismo en las referencias a sus trabajos.

[89]Componentes de una fuerza en una dirección determinada.

[90]En la figura 3.9, F aplicada en el punto A es colineal a la cuerda, y que resulta ser la tensión de la cuerda. Pero no especifica si es cualquier tensión o si es proporcional al peso de la cuerda. Aún así, con este planteamiento, el problema no necesariamente debe ser el de una cuerda vertical tensada por su propio peso. Este planteamiento admite que la cuerda esté en forma horizontal. En este sentido la solución de Euler es también un poco más general que la de d'Alembert.

$AP = x$ invariable. Con esto, el incremento momentáneo de la aplicada PM es $dy = qdt$ y $dq = udt$. En el pequeño intervalo de tiempo dt el punto M se aproxima a P por el pequeño espacio igual a $-qdt$, cuya diferencial, considerando constante el elemento dt es: $ddy = -dqdt = -udt^2$. Pero la aceleración que se genera de la fuerza P por los principios mecánicos se deduce de la ecuación $P = -\frac{2ddy}{dt^2} = -2u$,[91] si se establece, según se acostumbra (según la definición) el elemento de tiempo dt por el elemento del espacio aplicado (dividiendo) a la velocidad, y que la velocidad a su vez es representada por la raíz cuadrada de la altura debida a esta velocidad (movimiento uniformemmente acelerado). Así habiéndose encontrado $P = -\frac{Far}{M_c}$ y $P = -2u$, resulta que $2u = \frac{Far}{M_c}$ ó $u = \frac{Far}{2M_c}$.

Después de haber hecho los cálculos, Euler resume las características que hasta ahora ha encontrado para la solución del problema planteado. Así, para un punto M cualquiera de la cuerda, la abscisa $AP = x$ y la aplicada $PM = y$, se expresarán por una función de x y de t tal que $dy = pdx + qdt$; el caracter de las funciones p y q se bosqueja a partir de las ecuaciones $dp = rdx + sdt$ y $dq = sdx + \frac{Fa}{2M_c}rdt$. La cuestión mecánica hasta aquí expuesta se reduce ahora a un problema de análisis, el cual busca determinar las funciones r y s cuyas variables son x y t, tales que sus formas diferenciales son integrables. Así, si las funciones r y s son integrables, se pueden encontrar las funciones p y q con las ecuaciones $p = \int(rdx + sdt)$ y $q = \int(sdx + \frac{Fa}{2M_c}rdt)$. De aquí se inferirá la aplicada misma $y = \int(pdx + qdt)$.

Este problema de análisis está altamente indeterminado en sí mismo. Así Euler comienza a hacer algunas observaciones para cubrir algunos casos que podrían surgir. Primeramente observa que al momento de integrar se debe establecer que en $x = 0$ y $x = a$, para todo tiempo t, se tiene que $y = 0$. Estas mismas condiciones se aplican para las funciones r y s; donde los valores de la aplicada para toda x en $t = 0$, corresponden a la figura cualquiera dada a la cuerda al inicio del movimiento; siendo que en cada momento la cuerda pasará por figuras sucesivas constantes e indeterminadas. Con estas consideraciones, que se apegan a la ley de continuidad de Leibniz, se podrá representar el movimiento verdadero de la cuerda de manera absoluta.

Al final, por tanto, el que la figura inicial pueda ser arreglada arbitrariamente puede proporcionar una gran comprensión a la solución, según Euler; esto porque, antes que nada, se deben descubrir todos los valores posibles para r y s que hacen integrables a las ecuaciones $dp = rdx + sdt$ y $dq = sdx + \frac{Fa}{sM_c}rdt$. Para este

[91] Que es la definición de aceleración actual.

fin, Euler multiplica las ecuaciones anteriores como sigue: $mdp = m(rdx + sdt)$ y $ndq = n(sdx + \frac{Fa}{sM_c}rdt)$. Sumando y factorizando estas dos últimas ecuaciones se obtiene $mdp + ndq = dx(mr + ns) + dt(ms + \frac{Fa}{sM_c}nr)$, la cual es todavía una ecuación integrable para cualquier valor atribuido a las constantes m y n. Si se hace $\frac{m}{n} = \frac{Fa}{2M_c}\frac{n}{m}$ ó $mm = \frac{Fa}{2M_c}nn$, de donde se obtiene $m = 1$ y $n = \pm\sqrt{\frac{2M_c}{Fa}}$, con lo cual $dp \pm dq\sqrt{\frac{2M_c}{Fa}} = (dx \pm dt\sqrt{\frac{2M_c}{Fa}})(r \pm s\sqrt{\frac{2M_c}{Fa}})$. Este procedimiento le parece poco elegante, mas no erróneo, a d'Alembert (ver d'Alembert 3, p. 249); en efecto, estos valores para m y n son un tanto arbitrarios ya que $m^2 = Fa$ y $n^2 = 2M_c$ también satisfacen la ecuación $mm = \frac{Fa}{sM_c}nn$. Son elegidos por Euler pensando en la homogeneidad de la ecuación diferencial, la homogeneidad (o separabilidad) de las variables y la posterior integración que se debe hacer. Pero dicho procedimiento no es un problema de álgebra en sí mismo; es, como menciona Euler, un problema de análisis en el cual lo que se trata es de encontrar valores que hagan integrable a la ecuación diferencial. En ese sentido pueden ser arbitrarios. Entonces, por medio de la figura inicial dada a la cuerda y haciendo uso de este factor integrante es que Euler encontrará la ecuación de la función que describa el movimiento de la cuerda vibrante.

Para abreviar, Euler hace $b = \frac{Fa}{2M_c}$; con esto, $dp \pm dq\sqrt{\frac{1}{b}} = \left(dx \pm dt\sqrt{b}\right)\left(r \pm s\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$; multiplicando esta ecuación por $\sqrt{b}$[92] se tiene que $dp\sqrt{b} \pm dq = \left(dx \pm dt\sqrt{b}\right)\left(r\sqrt{b} \pm s\right)$. También, $dq \pm dp\sqrt{b} = \left(dx \pm dt\sqrt{b}\right)\left(s \pm r\sqrt{b}\right)$. Como $\left(dx \pm dt\sqrt{b}\right)\left(s \pm r\sqrt{b}\right)$ es integrable, es necesario que $\left(s \pm r\sqrt{b}\right)$ sea una función de $x \pm t\sqrt{b}$.[93] Para cada signo Euler implementa dos funciones auxiliares

$$\begin{cases} x + t\sqrt{b} = v \\ x - t\sqrt{b} = u \end{cases}$$

con las cuales obtiene

$$\begin{cases} x = \frac{v+u}{2}; & dx = \frac{dv+du}{2} \\ t\sqrt{b} = \frac{v-u}{2}; & dt = \frac{dv-du}{2\sqrt{b}} \end{cases}$$

[92]Las unidades de $b = \frac{Fa}{2M_c}$ son $\frac{m^2}{s^2}$; así, $\sqrt{b}$ tiene unidades de velocidad $\left(\frac{m}{s}\right)$.

[93]Si $dw = \left(dx \pm dt\sqrt{b}\right)$ integrando queda $w = x \pm t\sqrt{b}$ entonces $s \pm r\sqrt{b}$ debe ser una función $Z(w)$ tal que $Z(w)dw$ sea integrable. Por otro lado, $t\sqrt{b}$ tiene unidades de longitud al igual que x. Para Euler su solución involucra cantidades (variables) homogéneas.

así, se tendrán las ecuaciones

$$\begin{cases} dq + dp\sqrt{b} = dv\left(s + r\sqrt{b}\right) \\ dq - dp\sqrt{b} = du\left(s - r\sqrt{b}\right) \end{cases}$$

Donde $s + r\sqrt{b}$ debe ser una función de v, y $s - r\sqrt{b}$ debe ser una función de u, para que ambas sean integrables.

Con lo anterior se tiene que $\int\left(dq + dp\sqrt{b}\right) = q + p\sqrt{b}$ es una función V de v y $\int\left(dq - dp\sqrt{b}\right) = q - p\sqrt{b}$ es una función U de u. Ambas satisfacen las condiciones mencionadas anteriormente. Entonces, si

$$\begin{cases} q + p\sqrt{b} = V \\ q - p\sqrt{b} = U \end{cases}$$

sucede que

$$\begin{cases} q = \frac{V+U}{2} \\ p = \frac{V-U}{2\sqrt{b}} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de p, q, dx y dt en $dy = pdx + qdt$ se obtiene $dy = \frac{(dv+du)(V-U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv-du)(V+U)}{4\sqrt{b}} = \frac{Vdv-Udu}{2\sqrt{b}}$ y $y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\int Vdv - \int Udu\right)$. Como se puede ver, los métodos usados y resultados obtenidos por d'Alembert y Euler son muy parecidos.

A continuación Euler renombra las integrales encontradas del siguiente modo: $f = \int Vdv$ (que es función v) y $\varphi = \int Udu$ (que es función de u), con lo cual $y = f : (v) + \varphi : (u)$ y así $dy = pdx + qdt = (f' : (v) + \varphi' : (u))\,dx + \sqrt{b}\,(f' : (v) - \varphi' : (u))\,dt$. Recordando que es de las ecuaciones $dp = rdx + sdt$ y $dq = sdx + brdt$ de donde Euler, en su planteamiento del problema, deducirá la función y; así, él debe poner los parámetros s y r en términos de las nuevas funciones indeterminadas f y φ quedando de la manera siguiente:

$$\begin{cases} r = f'' : (v) + \varphi'' : (u) \\ s = \sqrt{b}\,(f'' : (v) - \varphi'' : (u)) \end{cases}$$

Siendo integrables y teniéndose que para cualquier función de este tipo: $g' : (z) = \int g''(z)dz$ y $g(z) = \int g'(z)dz$.

El siguiente paso de Euler en la determinacion de la función y consiste en considerar las condiciones (iniciales) del problema de la cuerda.

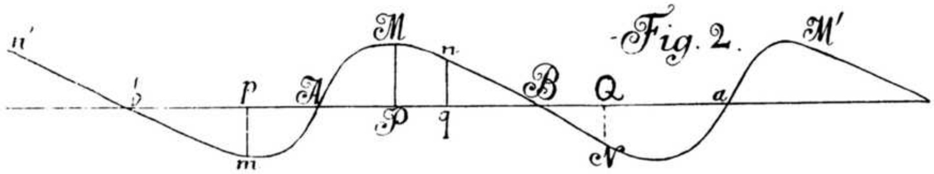


Figura 3.10: Determinación de las funciones f y φ.

Entonces si se toma $x = 0$ se tiene siempre $y = 0$, esto hace que $f : \left(t\sqrt{b}\right) + \varphi : \left(-t\sqrt{b}\right) = 0$, si se toma $x = a$ igualmente se tendrá que siempre $y = 0$, con lo cual $f : \left(a + t\sqrt{b}\right) + \varphi : \left(a - t\sqrt{b}\right) = 0$. En consecuencia:

$$\begin{cases} \varphi : \left(-t\sqrt{b}\right) = -f : \left(t\sqrt{b}\right) \\ \varphi : \left(a - t\sqrt{b}\right) = -f : \left(a + t\sqrt{b}\right) \end{cases}$$

Para Euler una función $f : (z)$ puede ser representada por las aplicadas (alturas) de una cierta curva cuya abscisa sea z; así, él considera la curva AMB (ver figura 3.10), cuyas aplicadas PM proporcionan la función, denotada con el caracter f, con las abcisas AP. Así, se tiene $PM = f : \left(t\sqrt{b}\right) = -\varphi : \left(t\sqrt{b}\right)$. Tomando $Ap = AP$, de manera que $Ap = t\sqrt{b}$, y tomando la curva Amb por encima del eje de la curva similar AMB, se tiene que $Pm = -f : \left(t\sqrt{b}\right) = \varphi : \left(-t\sqrt{b}\right)$; así que esta curva expresará la naturaleza de φ. Ahora sea $AB = a$ continua a lo largo del eje, y que la porción BNa sea semejante e igual a la curva BnA; teniendo $BQ = Bq$, se tiene que $AQ = a + t\sqrt{b}$, $QN = f : \left(a + t\sqrt{b}\right)$; al mismo tiempo se tiene que $qn = f : \left(a - t\sqrt{b}\right)$, de donde aparece una curva de la misma forma que AMB, que es continua y forma parte de otra curva infinita de partes semejantes e iguales a Amb y MNa que están situadas alternativamente por encima y por debajo del eje, y que resulta apropiada para representar la naturaleza de la funciones f y φ.

Con el análisis anterior, Euler describe una curva ondulada (de forma serpeante), regular (periódica) contenida en una ecuación irregular o mecánica, donde cualquiera de sus aplicadas PM proporcionan la función necesaria para la solución del problema. Para mostrar esto Euler toma una abscisa cualquiera $AP = z$ cuya aplicada es $PM = f : (z)$ (en la figura 3.8); atribuyendo a z los valores $x + t\sqrt{b}$ y $x - t\sqrt{b}$ se tiene que $y = f : \left(x + t\sqrt{b}\right) + f : \left(x - t\sqrt{b}\right)$. Euler interpreta este resultado considerando que hay una aplicada y adecuada para cada abscisa x en cualquier tiempo t. Ahora bien, tomando $t = 0$, $AP = z$ y haciendo la aplicada $y = \ f : (z) + f(z) \ = 2PM$[94] para obtener la curva inicial de la cuerda, y dado que Euler toma las mitades superiores de la función, se tiene que $y = \frac{1}{2}f : \left(x + t\sqrt{b}\right) + \frac{1}{2}f : \left(x - t\sqrt{b}\right)$; así, la curva AMB representa la figura dada a la cuerda al comienzo del movimiento.

Recíprocamente, si hay una curva o figura conocida que la cuerda tiene al comienzo del movimiento, dicho conocimiento redunda en la determinación de la figura de la cuerda para un tiempo cualquiera transcurrido después de que comenzó el movimiento. Porque al ser descrito anteriormente el eje $AB = a$, que es la longitud de la cuerda, la figura inicial de la cuerda AMB, que se repite en las diferentes partes de manera inversa de modo que $Amb = AMB$ y $BNa = BnA$ y que se repite cada parte de manera continua (u homogénea) sobre ella misma al infinito. Así que si la curva es usada para expresar las funciones encontradas después de un tiempo t transcurrido, la aplicada que corresponde a la abscisa x en la cuerda en vibración será: $y = \frac{1}{2}f : \left(x + t\sqrt{b}\right) + \frac{1}{2}f : \left(x - t\sqrt{b}\right)$, de donde se puede obtener la construcción de la curva que la cuerda forma en un tiempo cualquiera.

De la ecuación anterior Euler hace notar que la fórmula no contiene cantidades heterogéneas, y dado que $t\sqrt{b}$ está representada por una línea recta, resulta que es homogénea a x. Efectivamente, si se recuerda que $b = \frac{Fa}{2M_c}$, entonces las unidades de $\sqrt{b}$ son de longitud entre tiempo; así, las unidades de $t\sqrt{b}$ son sólamente de longitud. Euler utiliza ideas de índole física para mostrar lo anterior, diciendo que si z es la altura de la que cae un cuerpo pesado en un tiempo t, la expresión del tiempo queda como $t = 2\sqrt{z}$; así, $t\sqrt{b} = 2\sqrt{z}\sqrt{b} = 2\sqrt{zb} = 2\sqrt{\frac{Faz}{2M_c}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M_c}}$, lo cual está representado por una línea recta. Ahora, llamando $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M_c}}$ la ecuación que describe la vibración de la cuerda queda como $y = \frac{1}{2}f : (x + v) + \frac{1}{2}f : (x - v)$.[95]

Por tanto, si a la cuerda ha tomado la forma AMB al inicio del movimiento, con $AB = a$, posteriormente, al cabo de un tiempo t, presentará la forma de una curva ondulada (serpeante) $n'bAMBaN$, tiempo durante el cual un cuerpo

[94]En la memoria original de Euler aparece $AP = x$; yo dejo la z dado el resultado que obtiene, aunque este análisis está basado en el tiempo $t = 0$ para obtener la forma inicial de la cuerda.

[95]En este punto no queda claro cómo es que $t = 2\sqrt{z}$ está representado por una línea recta pues Euler, a diferencia de d'Alembert, no utiliza figuras para explicar la construcción de sus variables. Lo que sí es claro es que las cantidades son homogéneas como cantidades físicas, esto es, al apelar Euler a una caída libre para "medir" el tiempo, todas sus variables quedan en términos de longitudes.

pesado cae de una altura z, definido por $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M_c}}$. Tomando cualquier abscisa $AP = x$, se tiene que $PQ = Pq = v$ para el movimiento realizado por los puntos Q y q, cuyas aplicadas son $QN = f : (x + v)$ y $qn = f : (x - v)$; con lo cual la aplicada de la cuerda es: $y = \frac{1}{2}QN + \frac{1}{2}qn$ ó $Pm = \frac{QN+qn}{2}$, teniendo ahora el punto m en lugar del punto M. Empleando esta construcción para todos los puntos del eje AB, los puntos m darán la figura AmB que se presenta en la cuerda. De esta manera la figura que la cuerda toma al entrar en vibración será completamente descrita para un tiempo cualquiera.

Para encontrar la forma de la cuerda después de un tiempo transcurrido tal que $v = z$ ó $z = \frac{M_c a}{2F}$, resulta que $y = \frac{1}{2}f : (a + x) + \frac{1}{2}f : (a - x)$, y como la función es par, entonces $y = -f : (a - x)$, lo cual, para Euler, muestra que la cuerda se curva toda entera debajo del eje de *AM'B,* con figura igual a la figura dada *AMB,* pero en situación inversa. Esto significa que hay un tiempo para el cual todos los valores de *y*, para los posibles valores de *x*, son negativos. De manera que, tomando la abscisa *BP'* = *AP*, la aplicada será *P'M'* = *PM* (ver figura 3.2 ó 3.3). Recíprocamente, si transcurre nuevamente un tiempo tal que $v = a$, toda la cuerda regresará a la situación AMB que se le dio al inicio del movimiento. Se deduce entonces que transcurrido un tiempo después del comienzo del movimiento tal que $v = 2a$, resulta que $y = \frac{1}{2}f : (x + 2a) + \frac{1}{2}f : (x - 2a)$, pero teniendo $PQ' = Pq' = 2a$, y que por ser f función par $Q'N' = PM = q'n'$, en consecuencia $y = PM$, como al inicio del movimiento.

Cualquiera que sea la forma dada de entrada a la cuerda, ella la tomará en cada vibración, condicionada a la disminución causada por la resistencia; esto muestra para Euler que es cierta la opinión que comunicó al inicio de esta memoria; a saber, que las vibraciones de la cuerda, aunque irregulares, poco tiempo después de iniciado el movimiento tienden a la regularidad, de manera que la figura deviene en una cicloide alargada. Para Euler es igualmente claro que la figura que la cuerda adoptará a lo largo del tiempo no deja de ser bastante regular; esto porque si se toma $v = 2a$, la cuerda regresa a su primer estado, y es de suponer que en este tiempo la cuerda realizó dos vibraciones. En consecuencia el valor $v = a$ define el tiempo de una vibración, que será igual al tiempo durante el cual un cuerpo pesado cae de la altura $\frac{M_c a}{2F}$; o si se expresa la longitud de la cuerda ($AB = a$) en milésimas de pie de Rhin, el tiempo de una vibración expresada en segundos será: $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{M_c a}{2F}}$, donde la cuerda vibrará a cada segundo $125\sqrt{\frac{2F}{M_c a}}$ veces, como si la cuerda completara sus vibraciones según la ley de la uniformidad descrita por Taylor.[96]

Como la figura AMB dada al inicio a la cuerda le proporciona a ésta la primera y más larga trayectoria, misma que completará en una vibración, pasando por la siguiente trayectoria más grande, $AM'B$, que Euler ha demostrado que es inversa a la primera completando la mitad del ciclo de vibración. Así se ve que en la mitad del tiempo en que se realizan estas dos vibraciones, la cuerda se encuentra de una manera perfectamente recta, la cual representa su situación natural o de reposo. Tomando la mitad del tiempo de una vibración, $v = \frac{1}{2}a$,[97] se tiene que la fórmula general queda como: $y = \frac{1}{2}f : (x + \frac{1}{2}a) + \frac{1}{2}f : (x - \frac{1}{2}a)$, cuyo valor se anulará si $f : (\frac{1}{2}a - x) = f : (\frac{1}{2}a + x)$, es decir, si la figura ADB dada al comienzo del movimiento (ver figura 3.9), es tal que las abscisas $\frac{1}{2}a + x$ y $\frac{1}{2}a - x$ generan aplicadas iguales; esto sucede si la aplicada CD se encuentra en el punto medio de la longitud AB, siendo un diámetro de la curva ADB y que la parte DB sea semejante e igual a la parte DA. Así que, dada una curva con esta característica, de tanto en tanto se extenderá a lo largo de una línea recta a la mitad de cada vibración. Y como esto puede suceder en infinidad de maneras, se pone de manifiesto que esta condición no necesita más que la cuerda tome perpetuamente en sus vibraciones la figura de una cicloide alargada.

Euler hace notar que los tiempos de vibración no dependen de la figura que toma la cuerda vibrante, sino que se determinan solamente por las cantidades conocidas a, M_c y F; sin embargo, hay casos particulares en los cuales los tiempos de vibración pueden ser reducidos a la mitad, un tercio o una parte alícuota cualquiera de toda la longitud.[98] Así, si la longitud de la cuerda es $Am = a$, la cual se curva al inicio de manera que adopta dos figuras AMB y Ba, que son perfectamente semejantes e iguales e iguales entre ellas, entonces sus vibraciones serán como si la cuerda tuviera sólo la mitad de la longitud AB, y en consecuencia sus vibraciones serán dos veces más rápidas. Igualmente, si la figura de la cuerda tuviera tres partes semejantes e iguales $bABa$, como se representa en la figura 3.11, entonces sus vibraciones serán como si la longitud de la cuerda fuera tres veces menor, y en consecuencia cada vibración será tres veces más rápida; analogamente se entiende esto para cuando las vibraciones puedan llegar a ser cuatro, cinco, etc, veces más cortas.

Así, las curvas que ha encontrado Euler como solución al problema de la

[96] Aquí, el término uniformidad está asociado con la periodicidad y no con la continuidad.

[97] En este punto a no representa la longitud de la cuerda como tal, sino a un tiempo con un valor igual a la longitud de la cuerda.

[98] Euler se está refiriendo a los armónicos menores de la cuerda.

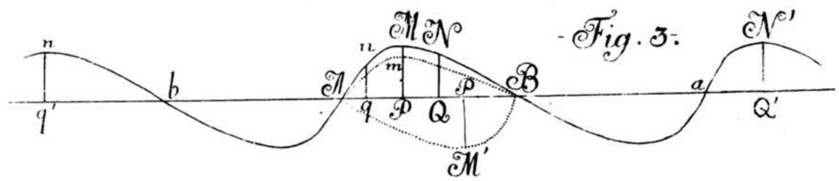


Figura 3.11: Curva que se establece en la cuerda, después de un tiempo v.

cuerda vibrante tienen por características el ser curvas onduladas (serpeantes) continuas, cuyas partes están vinculadas según la ley de continuidad, y además son pares; de esta manera la solución puede ser expresada por una sola ecuación, y para él es claro que estas curvas cortadas por el eje de las abscisas en una infinidad de puntos serán tracendentes. Así, si se toma la longitud total de la cuerda $AB = a$ y una abscisa cualquiera $AP = u$, con la razón $1 : \pi$ como el diámetro del círculo a la circunferencia, entonces la ecuación que describe la curva de la cuerda es una suma de senos, de manera que la ecuación queda como:

$$y = PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \beta \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \ldots$$

Si en lugar de u se toma $x = a$, $2a$, $3a$, $4a$, etc, la aplicada PM se anula; si se toma u negativa, la aplicada es la misma pero con signo negativo. Si la figura inicial fuera la curva AMB, entonces, al final del tiempo t, durante el cual un cuerpo pesado desciende de una altura z, esto es, $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M_c}}$, en la abscisa x, la aplicada resultante es

$$y = PM = \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{\pi}{a}(x+v) + \frac{1}{2}\beta \sin \frac{2\pi}{a}(x+v) + \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x+v) + \ldots + \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{\pi}{a}(x-v) + \frac{1}{2}\beta \sin \frac{2\pi}{a}(x-v) + \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta que $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$,[99] entonces la ecuación que describe el movimiento de la cuerda se transforma en:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi v}{a} + \ldots$$

La figura de la cuerda al inicio del movimiento ($t = 0$, $v = 0$) está dada por $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \ldots$, y será la misma cada vez que v

[99] Aquí Euler considera solamente propiedades del seno y coseno de una suma de dos cantidades cualquiera, a diferencia de d'Alembert que considera la figura y velocidad inicial de la cuerda como separables para obtener sólo el primer sumando de la serie infinita.

sea un múltiplo par de a. Si v es un múltiplo impar de a, entonces la ecuación queda como $y = -\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} - \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \ldots$ Después Euler enfatiza que si $\alpha \neq 0$ y $\beta, \gamma \ldots = 0$ se tiene un caso, que comunmente se piensa único, en el cual la curvatura de la cuerda es perpetuamente una curva sinusoidal, una cicloide alargada cuya ecuación es $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a}$, pero si cualquier otro coeficiente además de α es distinto de cero[100] se tiene el caso donde los tiempos de vibración son menores en razones dobles, triples o cuádruples, es decir, los siguientes armónicos de la cuerda.

Como ya se ha mencionado a lo largo de la exposición de estas memorias de d'Alembert y Euler, los métodos y resultados que obtienen ambos son muy parecidos. La motivación principal en estas dos soluciones es la búsqueda de generalidad. Son puntos sutiles de ambas soluciones lo que generó un debate en torno a la cuerda vibrante, pero hay un punto que es bastante importante y que no es mencionado en las memorias y radica en lo siguiente: la construccíon de d'Alembert se basa en un análisis más clásico, donde lo que se desea encontrar se supone como hecho y se procede a analizar los elementos que componen esa solución; en cambio la solución de Euler parte de considerar principios generales de mecánica e información sobre las condiciones iniciales de la cuerda para deducir de ahí la solución. Este uso del análisis y de la continuidad hará que la principal discusión de este debate gire en torno a lo que habría de considerarse una función.

[100] Con el método que Euler resuelve el problema no se obtienen los valores de las constantes α, β, γ, etc, sólo se toman como casos. Con el método de d'Alembert hay un coeficiente A, dado o determinado, que es la amplitud mayor inicial de la cuerda fuera de su estado de equilibrio.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Sobre cómo se presentan las conclusiones en este trabajo

Debido a la múltiple confluencia de temas en torno al concepto de función matemática en el s. XVIII y el debate de la cuerda vibrante, las conclusiones se presentarán por separado para cada uno de los temas tratados. Inicio por el final del debate de la cuerda vibrante, en el cual persisitió a lo largo de poco más de veinte años la falta de acuerdo sobre la pertinencia de las funciones discontinuas como solución. Después se presentan las conclusiones sobre la forma en que se expresan las funciones, es decir, como relaciones y como expresiones analíticas. En tercer lugar se presentan las conclusiones para el tema de la continuidad y la reformulación del análisis matemático que comenzaría Euler a mediados del s. XVIII a la par que se desarrollaba el debate del problema de la cuerda vibrante. Por último, se presenta un atisbo sobre la repercusión que tuvo la discusión de los conceptos de función, continuidad y la reformulación del análisis matemático iniciada por Euler en trabajos posteriores, en partícular en el trabajo de Cauchy.

4.2. Sobre el final del debate de la cuerda vibrante

A mediados del siglo XVIII existen tres tipos de soluciones al problema de la cuerda vibrante: por un lado está la solución de Taylor a la que se adhiere Daniel

Bernoulli, el cual considera a la cuerda como una sucesión de n pesos colgados a una cuerda sin masa; por otro, está la solución de d'Alembert en la cual se considera a la cuerda como un solo cuerpo de masa M cuya ecuación diferencial y su solución son encontradas a partir de la forma inicial de la cuerda; finalmente se encuentra la solución de Euler que igualmente considera a la cuerda como un solo cuerpo de masa M, cuya ecuación diferencial se encuentra a partir de la forma inicial de la cuerda pero cuya solución se encuentra considerando las relaciones entre cantidades infinitesimales y las fuerzas aceleratrices.

De estas tres soluciones las de d'Alembert y Euler, a pesar de ser muy parecidas, generan un debate acerca de la solución que admite el problema de la cuerda vibrante. El punto que detona este debate gira en torno de si una función discontinua habrá de ser aceptada como una solución al problema de la cuerda vibrante. Para d'Alembert la soluciòn consta de una serie de puntos unidos entre sí, cuyo movimiento se supone que es objeto de la misma ecuación analítica y por consiguiente, si lo anterior no se cumple, se consideraría esta solución como no pertinente para el análisis. Para d'Alembert, los defectos en la curvatura de la cuerda no deben ser considerados para generar una solución válida, ya que se dan sólo en partes infinitamente pequeñas. Con este razonamiento, d'Alembert concluye que la curva de la cuerda no puede tener defectos en su curvatura, debido a que estos defectos se presentan en algunas partes infinitamente pequeñas no se puede esperar que deban desaparecer en la solución. d'Alembert lo enuncia de la siguiente manera: "No creo, sin embargo, que ningún geómetra desee admitir tal afirmación. La razón es simple; ya que si hubo un salto en ddy no podría ser $\frac{ddy}{dx^2}$ una cantidad finita; eso sería absurdo."[101] (d'Alembert 5, pp. 24) Con ello se rompe la ley de continuidad y no se puede representar exactamente la ecuación diferencial.

Más aún, en 1767 d'Alembert agrega:

> Este cálculo supone implícitamente que toda la magnitud de dx es la misma que la fuerza motriz $\frac{ddy}{dx}$ y se distribuye por igual en todos los puntos dx de la masa, es decir, la fuerza de aceleración es la misma. Sin embargo, esta suposición no puede sobrevivir cuando está en el punto dx que no se debe asumir que tiene la misma fuerza de aceleración que otros, es decir, un punto en el que los cambios en la curvatura se den bruscamente.

[101] Para 1761 el debate ya debió acumular tensión entre los autores, pues es la primera vez en la discusión de la solución de la cuerda vibrante que se emplea la palabra absurdo.

> Esta reflexión se utiliza para dar un nuevo grado de fuerza a todas las objeciones que hice en mi primer escrito en contra del uso de la ecuación $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ cuando la curva no es una curvatura continua... (d'Alembert 6, pp. 139-140.)

Euler haría una objeción a d'Alembert en una carta del 26 de julio de 1763 (publicada en 1767 por d'Alembert):

> No sé porqué hay que excluir un compuesto de líneas rectas para la figura inicial de una cuerda, si los ángulos entre ellas no perturban la construcción proporcionada por nuestra solución. Pero teniendo cuidado de que, en virtud de la misma solución, la curva inicial debe difierir en un ángulo infinitamente pequeño de la línea recta; esto es, la inclinación de todos los elementos debe ser infinitamente pequeña. No veo cómo un conjunto de líneas rectas puede perturbar la construcción. (d'Alembert 6, p. 146)

Llegado a este punto, no hubo nuevas ideas acerca de la solución del problema de la cuerda vibrante.

No obstante lo anterior Euler había iniciado un nuevo programa de investigación sobre las cantidades infinitamente pequeñas. En el prefacio de la *Institutiones calculi differentialis*, Euler hizo dos observaciones notables sobre la naturaleza del cálculo diferencial. En primer lugar, rechazó explícitamente la demostración geométrica como un medio de probar la validez del cálculo, es decir, se negó a aceptar las demostraciones del cálculo basadas únicamente en el hecho de que el cálculo llegó a las mismas conclusiones que la geometría elemental: "El cálculo no puede tener su propia fundación en una referencia geométrica· [Euler1755, 6]. El autor también aclara:

> Yo no menciono nada sobre el uso de este cálculo en la geometría de las líneas curvas: que será por lo menos como se siente, ya que esta parte se ha investigado con tanta amplitud que incluso los primeros principios del cálculo diferencial son, por así decirlo, derivados de la geometría y, tan pronto como se habían desarrollado lo suficiente, se han aplicado con extremo cuidado a esta ciencia. Aquí, en cambio, todo está contenido dentro de los límites del análisis puro de modo que ninguna figura es necesaria para explicar las reglas de este cálculo. [Euler 9, p. 9][102]

[102]La traducción al español de estos pasajes se basa en la versión en inglés que realizó John Blanton [Euler 9a]

La insistencia en las figuras puede ser fácil de entender si se piensa en el papel que jugaron las figuras en la geometría. En efecto, cuando Euler estableció que las figuras estaban ausentes en sus tratados, él reclamaba la ausencia de la inferencia obtenida por la simple inspección de una figura y por tanto la independencia del análisis de la geometría, entendida como un estudio de figuras de las curvas. Esto da lugar a una pregunta crucial: ¿Qué principios básicos e instrumentos fueron utilizados por los analistas del siglo XVIII para hacer al análisis verdaderamente independiente de la geometría?

Para responder a esta pregunta se puede observar que d'Alembert considera que los principios del análisis se basan en nociones meramente intelectuales, en las ideas que se generan en forma de abstracción, mediante la simplificación y la generalización de las primeras ideas.[103] En otros términos, el análisis se consideró como un sistema de ideas meramente intelectual, donde el término *intelectual* se refiere a una forma de conocimiento que no se basa en la conciencia material, pero era conceptual y mediado; que funciona de una manera discursiva a lo largo de las nociones abstractas. Mientras que la geometría fue confiada, en cierta medida, a la inmediatez intuitiva de una inspección de la figura y la percepción de las relaciones mostradas en el diagrama, el análisis se entiende como un sistema conceptual donde la deducción era en gran parte lingüística y mediada, esto es, procediendo de una proposición a otra de manera discursiva.

La naturaleza de las derivaciones analíticas o algebraicas es necesariamente sintáctica y, como tal, maneja los signos asociados con ciertas reglas, independientemente del significado de los objetos de cálculo; sin embargo, las reglas sintácticas que rigen los signos del análisis deben tener sentido para el matemático y deben producir resultados que tienen sentido o tienen algún interés.

El análisis del siglo XVIII fue simbólico en el sentido de que se trataba de cantidades que se expresan en signos concretos y se manipulan de acuerdo con ciertas transformaciones fijas. Sin embargo, la forma en que se construyó la estructura sintáctica difería profundamente a partir de la forma en que se concibe hoy en día. En nuestros días las reglas utilizadas en una teoría son los axiomas explícitos, que en principio son libremente elegidos o, para usar un término ampliamente utilizado, arbitrarios.[104] Dentro de los límites del sistema

[103] Ver d'Alembert 4. Por el contrario, la geometría y la mecánica eran ciencia *material y sensible*. En particular, la geometría era la ciencia de las propiedades de extensión ya que se considera simplemente como extendida y figurada. (op. cit.)

[104] Aquí libertad y arbitrariedad no significa que se opta por el sistema de axiomas y se ofrecen definiciones sin razón; significa que los axiomas y las definiciones son fijados por un acto de voluntad determinada por los objetivos que se quiere lograr, sin otra limitación para el logro de tales objetivos. Axiomas y definiciones no tienen ninguna necesidad intrínseca, ni

dado de axiomas, los objetos matemáticos pueden ser libremente creados por definiciones arbitrarias. De esta manera el desarrollo de una teoría es totalmente sintáctico.

Éste no es el caso de la matemática del siglo XVIII. La idea de la libre creación de los objetos matemáticos estaba ausente. Los objetos matemáticos no existen en virtud de las definiciones implícitas o explícitas. Fueron siempre conectadas con la realidad, directa o indirectamente. Las reglas de manipulación no son arbitrarias: Se derivan de la noción de cantidad y expresaron las propiedades de las cantidades (o los números). Por ejemplo, $a+b=b+a$, no era un axioma arbitrario asociado con la operación $+$ (que se puede o no elegir, de acuerdo con los objetivos de nuestra teoría), sino que fue una mera consecuencia del concepto de la unión de dos cantidades.

4.3. Sobre funciones, relaciones y expresiones analíticas

La transformación del análisis en un sistema basado en la deducción lingüística fue posible gracias a la noción de función. A la función, Leibniz inicialmente la denotó como una línea que lleva a cabo una tarea especial en una figura dada (Youschkevitch, p. 56). Más tarde Leibniz usó este término para referirse a una parte de una línea recta que es cortada por las líneas rectas trazadas únicamente por medio de un punto fijo y los puntos de una curva dada. Por tanto, las funciones no eran más que variables geométricas.

El cálculo, sin embargo, expresaba cantidades geométricas analíticamente (mediante indeterminadas y constantes) y, ya en las primeras décadas del cálculo, los matemáticos sentían la necesidad de dar un nombre a tales expresiones analíticas de las cantidades geométricas. Así, mientras investigaba el problema isoperimétrico que consiste en reducir al mínimo el área delimitada por una curva, Johann Bernoulli al usar funciones lo hizo de acuerdo con Leibniz. Sin embargo, fue sólo como resultado del trabajo de Euler que la noción de función asume un papel crucial en las matemáticas. Según Euler, una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera de una cantidad variable y números o cantidades constantes [Euler 5, p. 18]. A primera vista, esta definición parece reducir una función a una expresión analítica.

tampoco consisten en una descripción de la realidad física o geométrica. Sin embargo, deben tener la capacidad de representar ciertos conceptos de manera adecuada.

En realidad, el problema es bastante más complejo. Con el fin de aclarar este punto, vamos a examinar la definición de Euler para las funciones de más de una variable:

> 77. A pesar de lo que hemos examinado hasta ahora, varias cantidades variables que están relacionadas de manera que cada una de ellas es función de una sola variable y una vez que el valor de una variable se determinó, las demás pueden determinarse simultáneamente. Consideremos ahora algunas cantidades variables que no dependen unas de otras, si un valor determinado se le da a una de estas variables, los otros permanecen indeterminados y variables. Sería conveniente denotar estas variables con x, y, z, ya que comprenden todos los valores determinados. Si se comparan entre sí, son totalmente ajenas, ya que es válido sustituir a cada una de una de ellas cualquier valor, por ejemplo a z y las otras, x e y, siguen siendo independientes como en un inicio. Esta es la diferencia entre cantidades variables dependientes y cantidades variables independientes. En el primer caso, si se determina una, todas las demás se determinan. En el segundo caso, la determinación de una variable de ninguna manera limita el valor de las otras.
>
> 78. Por lo tanto, una función de dos o más cantidades variables x, y, z es una expresión compuesta de estas cantidades de cualquier manera. (Euler 5, p. 91])

Euler, en primer lugar, en la Sección 77, habló de la dependencia entre las variables, y en la Sección 78 define una función de más de una variable como una expresión analítica. Esta forma de definir de dos maneras aparentemente distintas a menudo se puede encontrar en textos del siglo XVIII. Así, en su *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange declaró en primer lugar: El término función de una o más cantidades tendrá en cuenta todas las expresiones de cálculo a la que pertenecen estas cantidades, con o sin otras cantidades que se consideran como dadas e invariables, de modo que las cantidades de la función puede tener todos los valores posibles (Lagrange, p. 15). Sin embargo, él después va a afirmar: En general, por los caracteres f o F colocados delante de una variable, nosotros deberemos referirnos a cualquier función de esta variable, es decir, cualquier cantidad dependiente de esta variable y que varía de acuerdo a que sigue una ley determinada (Lagrange, p. 21).

El concepto de función del siglo XVIII efectivamente contenía la idea de dependencia o relación entre variables y la idea de expresión analítica. Una función se concibió como la expresión analítica de una relación entre cantidades generales: fue un par formado por una relación entre las cantidades y la fórmula que expresa esta relación analítica. No sólo eran las nociones de expresiones analíticas y las relaciones entre las cantidades no contrastadas con las demás, sino que se entrelazan estrechamente. Una expresión analítica era una función, ya que materializa una relación entre cantidades; por el contrario, una relación entre cantidades podría ser el objeto de estudio en el análisis sólo en la medida en que se expresa mediante una expresión analítica o fórmula.

4.4. Sobre la continuidad de las curvas y funciones

En el siglo XVIII, al referirse a las funciones o curvas, el término *continuidad* se puede entender de dos diferentes (aunque relacionadas) maneras. En primer lugar, la continuidad se puede entender como la ausencia de saltos o la asunción de cualquier estado intermedio entre dos estados dados o el cambio gradual. Este sentido de continuidad se puede entender como continuidad local. En el siglo XVIII, las funciones se pensaba que eran intrínsecamente continuas en este sentido. Este concepto dependía del hecho de que una función $y = f(x)$ era una relación entre lo general y las cantidades y y las x, o en otras palabras, la cantidad general y se consideró como función de la cantidad x. Dado que una cantidad general era continua, una función $y = f(x)$ se consideró como tal. Sin embargo, esta propiedad no fue la definición de la continuidad de una función, sino simplemente una consecuencia de la noción de cantidad continua.

En segundo lugar, la continuidad se puede considerar como coincidente con la singularidad. La idea básica detrás de este concepto es que un objeto es continuo si se trata de un objeto sin interrupción, es decir, si no se rompe en dos objetos y es por lo tanto un objeto. A pesar de que los matemáticos del siglo XVIII siempre consideraron las funciones y curvas a nivel local como continuas, la definición generalmente aceptada de la continuidad de una función o curva se basa en la propiedad de unicidad. G. Ferraro llama a esta forma de entender la continuidad como la continuidad global o la continuidad de Euler. [105] (Ferraro, pp.150-154)

[105] Por supuesto la continuidad local no significa la continuidad de punto a punto. La continuidad no se puede reducir a puntos y una función —en el sentido de una relación entre cantidades generales— no se definió punto a punto.

Si la continuidad es lo mismo que la singularidad, una línea curva era continua sólo porque era una. Por tanto, la noción de una curva continua puede parecer superflua e inútil. Sin embargo, en la geometría analítica, la curva está representada por una expresión analítica y una expresión analítica que no se corresponde necesariamente con una curva ininterrumpida. Por ejemplo, la función $y = k/x$ es continua en el sentido de Ferraro, ya que es una pero su contraparte geométrica, la hipérbola de la ecuación $y = \frac{k}{x}$, se divide en dos partes. Entonces es muy natural preguntarse si la hipérbola es continua, es decir, si sus dos piezas forman una curva única. En términos más generales, ¿cómo reconocer que un objeto es uno? La respuesta más obvia es que un objeto es uno cuando conserva sus propiedades. Ahora bien, en una curva analítica, sus propiedades se incluyen dentro de su expresión analítica. Si se acepta este punto de vista, es natural que el criterio de singularidad se debe aplicar a la expresión analítica, como lo hizo Euler en la clasificación de las curvas de su *Introductio*. De hecho, él afirmó que a pesar de que algunas curvas se podrían describir mecánicamente, él tuvo como objetivo estudiar las curvas en la medida en que se originaron por las funciones ya que este método era el más general y más adecuado para el cálculo. Según Euler, a partir de una idea acerca de las líneas curvas se sigue inmediatamente que deben ser divididas en continuas y discontinuas o mixtas. Una curva es continua cuando su naturaleza fue determinada por una única función, y la discontinua o mixta si fue descrita por tramos por más de una función y, en consecuencia, no se formó de acuerdo a una ley única. La unicidad no se aplica a lo largo de una curva, lo cual fue visto como una manifestación externa, sino a la propia función como un objeto primario. El número de las ramas de una curva, por lo tanto no tiene importancia.

Euler también subdivide las curvas en complejas y no complejas utilizando un criterio similar. Señaló que la ecuación de ciertas curvas algebraicas puede dividirse en factores racionales:

> Tales ecuaciones incluyen no una sino muchas curvas continuas, cada una de las cuales se puede expresar mediante una ecuación en particular. Están conectadas entre sí sólo porque sus ecuaciones se multiplican entre sí. Ya que su vinculación depende de nuestra elección, tales las líneas curvas no pueden ser clasificadas como si constituyeran una sola línea continua. Tales ecuaciones (mencionadas anteriormente como complejas) no dan lugar a curvas continuas, a pesar de que se componen de líneas continuas. Por esta razón,

> vamos a llamar complejas a estas curvas. (Euler 5a, 2: Sección 61)

Las curvas complejas (como las mixtas) fueron discontinuas debido a que su ecuación se caracterizó mediante la arbitrariedad, es decir, que no están determinadas por una ley exactamente analítica. Su diferencia es que las curvas complejas estaban compuestas de más de una curva entera, mientras que las curvas mixtas se componen de piezas de más de una curva.

En su *Introductio*, Euler sólo consideró curvas discontinuas en lugar de funciones discontinuas. Esto es totalmente coherente con el principio del siglo XVIII que está siendo desarrollado por Euler. De hecho, la aplicación de la continuidad a funciones requiere de una propiedad esencial de éstas, considerando el principio de la generalidad del álgebra que ha permitido considerar una función como un objeto unitario; así, las propiedades válidas en un intervalo se consideraron válidas en cualquier lugar. En este contexto, parecía imposible atribuir un significado al término discontinuas cuando se refiere a las funciones. Sin embargo, cuando la controversia sobre la cuerda vibrante surgió, la existencia de funciones no continuas fue admitida y la relación entre las cantidades y expresiones analíticas parecían ser un problema.

Euler reconoció que las funciones discontinuas formaban parte fundamental del análisis matemático, de modo que algunos de sus trabajos posteriores estarían encaminados a mostrar una nueva estructura para el análisis matemático. Así, en 1767 Euler publicó el texto titulado *De usu functionum discontinuarum in analysi* , donde el autor muestra su intención de ampliar el punto de vista que se tiene sobre la relación entre cantidades y funciones. De este modo lo enuncia en su primer párrafo:

> Lo que se enseña habitualmente en el análisis sobre las funciones, o cantidades determinadas de alguna manera a partir de una variable, se reduce a aquellas funciones que llamamos continuas y cuya formación depende de una cierta ley. [Euler 10, p 3] [106]

Para que una función se considerara continua, la ley que la conformaba tenía que ser independiente del punto o valor de la variable, lo cual era un problema en el caso de la cuerda vibrante pues la ley con que se conforma la solución de la ecuación diferencial depende directamnete de ciertos valores de la variable, por ejemplo el valor que toma la función en los extremos de la cuerda. Para dejar clara su intención Euler afirma a este respecto:

[106] La traducción al español es tomada de Martínez.

> Es bien sabido que en Geometría sublime no se tiene la costumbre de considerar líneas curvas que no sean aquéllas cuya naturaleza está definida por una relación precisa entre las coordenadas, definida por una expresión; de manera que todos sus puntos estén determinados por una misma ley en una misma ecuación. Y como se piensa que esta ley contiene en ella misma el principio de continuidad [...] estas curvas se llaman curvas continuas. [Euler 10, p 4]

Euler menciona esto para hacer notar que en el análisis como estaba formulado hasta ese momento, la continuidad estaba bien definida pero la discontinuidad se relacionaba con curvas que no tenían una ley que las conformara como lo son las curvas trazadas a mano alzada, las curvas con más de una ley que las conforma tales como los polígonos, que se conforman de varias líneas rectas combinadas y las singularidades, que son funciones cuya ley depende de la coordenada que toma la variable. Ante esto, para Euler se hacía necesario definir un concepto para las funciones discontinuas.

El punto de partida de su argumentación es precisamente el problema de la cuerda vibrante donde establece que el tipo de solución dada a la ecuación que describe el movimiento de la cuerda, si ha de aceptarse como discontinua, entonces no tiene cabida en el análisis como estaba formulado. Estos sectores de la discontinuidad de las funciones son los aspectos del análisis que Euler se propone estudiar:

> Ahora bien, estos sectores del Análisis [los que implican a las funciones discontinuas de manera natural] han sido poco trabajados hasta ahora, aun cuando se han encontrado ejemplos notables aquí y allá y su verdadera naturaleza tampoco parece suficientemente profundizada. Es por esto, a fin de exponer bien esta naturaleza, que es necesario que yo describa con exactitud estos sectores [...] y que los distinga los unos de los otros. [Euler 10, p. 8]

Sin embargo, Euler no construye el concepto de discontinuidad basado en el concepto de continuidad. Por el contrario, el concepto de continuidad es dejado de lado y una nueva clasificación de las funciones es propuesta por el autor:

> Toda la fuerza del Análisis de los infinitos se explica de manera conveniente a partir de la noción y de la naturaleza de las funciones, que se pueden distinguir muy cómodamente en clases de acuerdo

> con el número de cantidades variables que las determinan de manera precisa.

Esta nueva categoría para las funciones no dice por sí misma cuál es su fuerza: para demostrar que en efecto esta clasificación dota de rigor matemàtico al análisis de los infinitos hace un estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales de una, dos, hasta n variables, y la conclusión es que cuando se trata de una ecuación diferencial de orden m y n variables, en su solución necesariamente intervienen m funciones arbitrarias de $n-1$ variables; es decir, para la solución de ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1 necesariamente la solución es una función discontinua, con lo cual la inclusión de su nueva manera de clasificar las funciones se da de manera natural.

Este programa para reformular el análisis tuvo sus repercusiones de manera inmediata y el concepto de función pasó a ser fundamental. Uno de los trabajos que se puede considerar como de importancia mayor es el de A. L. Cauchy, quien en su curso de cálculo intentara generalizar los conceptos del análisis y poner énfasis en las demostraciones matemáticas.

Cauchy, en 1821, dio una definición que hace de la dependencia entre variables el centro del concepto de función. Escribió en su trabajo titulado *Cours d'analyse*:

> Si cantidades variables son relacionadas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable. (Cauchy, p. 19)

Nótese que a pesar de la generalidad de la definición de Cauchy, aún piensa en una función en términos de una fórmula. De hecho, hace la distinción entre funciones compuestas (implícitas) y simples (explícitas) justo después de dar esta definición. También introduce conceptos que indican que todavía piensa en términos de expresiones analíticas.

4.5. Sobre la continuidad de las funciones según Cauchy

Un trabajo relevante sobre continuidad de las funciones fue dado por A. L. Cauchy en su *Cours d'analyse* de l'École Polytechnique (1821). El objetivo de este matemático era establecer una separación de la idea de límite con relación a su origen geométrico, físico o intuitivo. En esa dirección se concentró en tres nociones: variable, función y límite. Por ejemplo, en su trabajo trató de dar cuenta de la naturaleza de los números irracionales, ofreciendo la idea de que un número irracional era simplemente el límite de varias fracciones racionales que se le acercaban. Se dio cuenta, sin embargo, tiempo después, que la definición debía ser más precisa desde un punto de vista lógico puesto que, en esa definición, asumía la existencia de los irracionales previamente a su construcción por medio de límites.

Dentro de los objetos relacionados con el estudio de las cantidades infinitamente pequeñas incluyó ideas acerca de la continuidad y la discontinuidad de funciones.

> En vista de esto, consideremos primero las funciones de una sola variable. Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que para cada valor de x entre dos límites dados, la función siempre tiene un valor único y finito. Si, a partir de un valor de x contenido dentro de estos límites, se añade a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la propia función se incrementa en la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$, que depende tanto de la nueva variable α y del valor de x. Teniendo en cuenta esto, la función $f(x)$ es una función continua de esa variable entre los límites asignados a la variable x si, para cada valor de x entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ disminuye indefinidamente con el valor numérico de α. En otras palabras, la función $f(x)$ es continua con respecto a x entre los límites dados si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño en la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño en la propia función. (Cauchy, p. 34)

Bajo este enfoque la discontinuidad se da como negación o cesación de la continuidad.

Al hablar de la continuidad de las funciones, Cauchy no podía prescindir de un tratamiento de las principales propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas, propiedades que sirven como la base del cálculo infinitesimal.

> En cuanto a los métodos, he tratado de darles todo el rigor cual se exige a la geometría, de modo que uno nunca tiene que depender de argumentos extraídos de la generalidad del álgebra. Argumentos de este tipo, aunque comúnmente aceptados, especialmente en la transformación de series convergentes a divergentes y de cantidades reales a expresiones imaginarias, pueden ser considerados, me parece, sólo como ejemplos que sirven para introducir la verdad algunas de las veces pero que no están en armonía con la exactitud tan cacareada en las ciencias matemáticas. (Cauchy, pp. ii-iii)

Ya que en la generalidad del álgebra, considera Cauchy, se tiende a asignar validez general a fórmulas que sólo tienen una validez partícular bajo ciertas condiciones de las cantidades involucradas.

Con Cauchy se precisan los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos aparecen ahora como fundamentos del análisis, hasta entonces apoyado en la geometría. Y serán estos mismos fundamentos los que permitirán más tarde mostrar la existencia de funciones continuas sin derivadas, es decir, de curvas sin tangentes en ningún punto.

Capítulo 5

Anexo 1

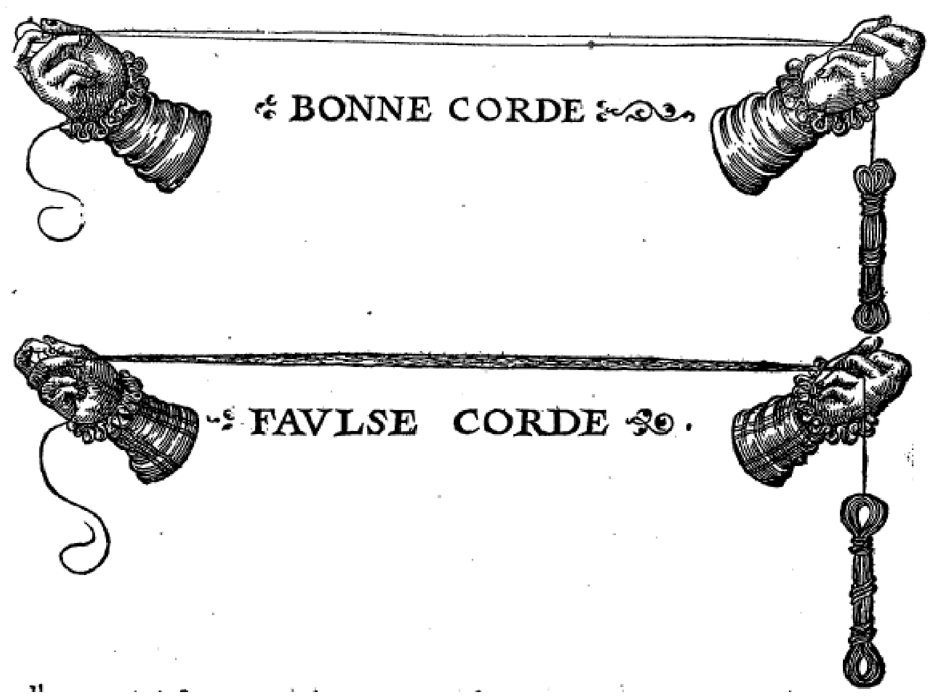


Figura 5.1: Representación que hace Mersenne de una buena cuerda para el estudio de sus vibraciones. Figura tomada de Mersenne, Libro III; p. 189.

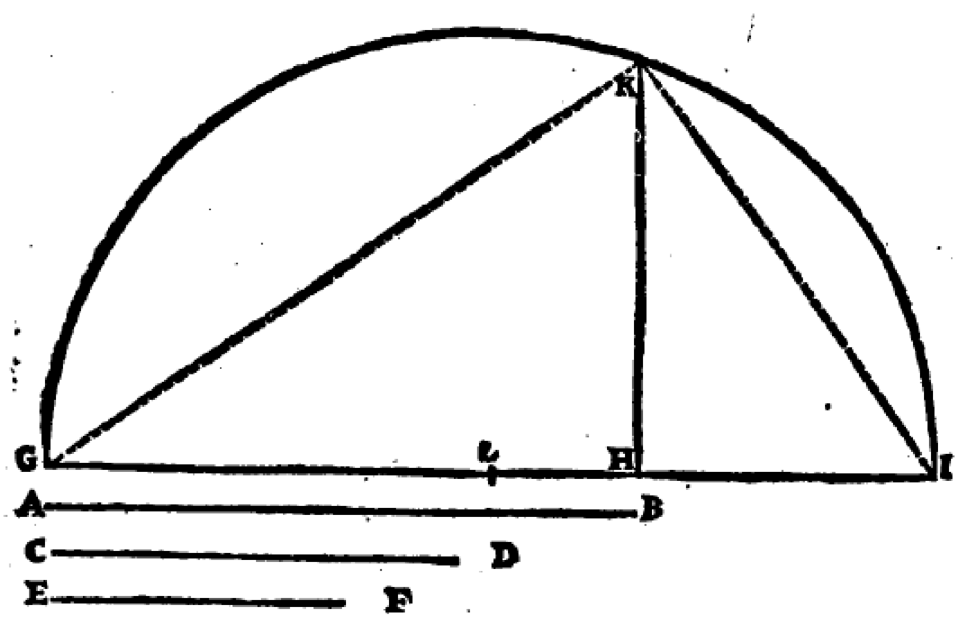


Figura 5.2: División del tono propuesta por Mersenne. Figura tomada de Mersenne, Libro II; p. 66

Bibliografía

[Abdounur 1] Abdounur, O. 2003. Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados. 3ª edición. Ed. Escrituras. São Paulo; Brasil.

[Abdounur 2] Abdounur, O. 2009. A preliminary survey on the emergence of an arithmetical theory of ratios. *Circumscribere*. Num. 7, pp. 1-8

[Abdounur 3] Abdounur, O. 2011. Com. Per.

[Académia de Ciencias 1] Académia de Ciencias. 1731. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les mémoires de mathématiques et de physique pour la même année tirés des registres de cette académie, Année MDCCVI.*

[Académia de Ciencias 2] Académia de Ciencias. 1741. *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie.*

[Académia de Ciencias 3] Académia de Ciencias. 1743. *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématiques et de physique pour la même année tirés des registres de cette académie, Année MDCCI.* Segunda edición corregida y aumentada. París.

[Aleksandrov] Aleksandrov, D. 1973. *La matemática: Su contenido, métodos y significado.* Versión española de Manuel López Rodríguez. Ed. Alianza. Madrid.

[Álvarez] Álvarez, C 2004. *Variar para encontrar*. Serie: Seminario de historia de la ciencia. Primera edición .UNAM; U. Catholica Lovaniensis; Université de Gèneve. México.

[Anzaldo] Anzaldo, A. Delgado, J. Monroy, F. editores; 2007. El legado matemático de Leonhard Euler a trescientos años de su nacimiento. Innovación Editorial Lagares de México; UAM. México.

[Bailhache 1] Bailhache, P. 1993. Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée. *Sciences et techniques en perspective*; no 23, Université de Nantes, pp. 73-91.

[Bailhache 2] Bailhache, P. 1995. *d'Alembert theoricien de la musique: Empirisme et Nature.* En Michel 1, pp. 359-377.

[Beaney] Beaney, M. 2009. Analysis. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* (Summer 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/analysis/

[Bell] Bell, J. 2010 "Continuity and Infinitesimals", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.). http://plato.stanford.edu/archives/fall2010/entries/continuity/

[Benítez] Benítez, L. 1998. Percepción sensible y conocimiento del mundo natural en René Descartes. *Dianoia*; Vol. XLIV, Núm. 44, pp. 19-32.

[Bernoulli 1] Bernoulli, J. 1694. Additamentum effectionis omnium Quadraturarum et Rectificationum Curvarum per seriem quandam generalissimam. *Acta Eruditorum*, pp. 437–441.

[Bernoulli 2] Bernoulli, J. 1706. Sur les Isoperimetres. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'Année MDCCVI.* Recopilación hecha en: Academia de Ciencias 1.

[Bernoulli 3] Bernoulli, J. 1718. Remarques sur ce qu'on a donnée jusqu'ici de solutions des problemes sur les isoperimetres, avec une nouvelle methode courte & facile de les resoudre sans calcul laquelles s'étend aussi à de autres problemes qui ont rapport à ceux-la. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'Année MDCCXVII*. Recopilación hecha en: Academia de Ciencias 2.

[Bernoulli 4] Bernoulli, D. 1733. Theoremata de osciliationibus corporum filo fiexili connexorurn- et catenae verticaliter suspensae. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. Vol. 6. pp. 108-122. St. Petersburg Academy.

[Bolzano] Bolzano, B. 1973. *Theory of Science* (ed. J. Berg), Reidel Publishing Company.

[Bos 1] Bos, H. 1986. The Concept of Construction and the Representation of Curves in Seventeenth-Century Mathematics. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Berkeley, California, USA.

[Bos 2] Bos, H. 2001. *Redefining geometrical exactness*: *Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. Springer-Verlag; New York.

[Bottazzini] Bottazzini, U. 1986. *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Traducido al inglés por Warren Van Egmond. New York: Springer Verlag.

[Boyer] Boyer, C. B. 1969. *The history of the calculus and its conceptual development (The concepts of the calculus)*. Dover; New York.

[Bradley] Bradley, R; Lawrence A. and Sandifer, C. Editores. 2007. *Euler at 300: An Appreciation.* Mathematical Association of America.Bos, H. 2001. *Redefining geometrical exactness*: Descartes' transformation of the early modern concept of construction. Springer-Verlag; New York.

[Cajori 1] Cajori, F. 1909. *A History of Mathematics*. Londres: MacMillan & Co., Ltd. Edición digital producida por Andrew D. Hwang, Peter Vachuska y Carl Hudkins disponible desde enero de 2010 en: www.gutenberg.org

[Cajori 2] Cajori, F. 1928. The Early History of Partial Differential Equations and of Partial Differentiation and Integration. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 35, No. 9 (Nov., 1928), pp. 459-467

[Cauchy] Cauchy, A. **Cauchy's Cours d'analyse**; An Annotated Translation. Springer 2009. Bradley, C. R. Sandifer traductores.

[Christensen] Christensen, T. 2002. *The Cambridge history of Western music theory.* Cambridge University Press.

[Cannon] Cannon, J; Dostrovsky, S. 1981. *The evolution of dynamics : Vibration theory from 1687 to 1742.* Springer Verlag; New York.

[d'Alembert 1] d'Alembert, J. 1743. Traité de dynamique; David L'Aîné editor; París. Disponible en Google Books.

[d'Alembert 2] d'Alembert, J. 1747. Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin.* Disponible en: http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1747&seite:int=243

[d'Alembert 3] d'Alembert J. 1747. Suite des Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin. Berlin*, pp. 220-249, Berlin.

[d'Alembert 4] d'Alembert, J. 1753. Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, ed. Denis Diderot and Jean le Rond D'Alembert.

University of Chicago: *ARTFL Encyclopédie Projet* (Spring 2010 Edition), Robert Morrissey (ed), http://encyclopedie.uchicago.edu/

[d'Alembert 5] d'Alembert, J. 1761. Opuscules mathémathiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, d'optique, d'astronomie, tome premier. París, Francia.

[d'Alembert 6] d'Alembert, J. 1768. Opuscules mathémathiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, d'optique, d'astronomie; tome quatriéme. París, Francia.

[d'Alembert 7] d'Alembert, J. 1779. Élémens de Musique Théorique et Practique, suivant les Principes de M. Rameau. 2ª edición, revisada corregida y aumentada. Lyon, Francia.

[Darrigol] Darrigol. O. 2007. The acoustic origins of harmonic analysis. *Archive for the history of exact sciences* Num. 61, pp. 343–424

[Dedekind] Dedekind, R. 1872. *Essays on the Theory of Numbers.* Traducción al inglés por: Wooster Woodruff Beman. The Open Court Publishing Company; Chicago. 1901. Digitalizado por The Internet Archive; disponible en:http://www.archive.org/details/essaysintheoryofOOdedeuoft

[Demidov] Demidov, S. S.. 1982. The Study OJ Partial Differential Equations of the First Order in the 18th and 19th Centuries. *Archive for the history of exact sciences.* Num. 14, pp. 325-333.

[Descartes 1] Descartes, R. 1637. La géométrie. En: Vie et Oeuvres de Descartes. Publicada y comentada por C. Adam y P. Tannery. 13 volúmenes. Léopold Cerf, imprimeur París, 1897-1913.

[Descartes 2] Descartes, R. 1984. *Reglas para la direccion del espiritu*. Introd. trad. y notas de Juan Manuel Navarro. Alianza Editorial, Madrid.

[Dhombres] Dhombres, J. 1988. Un texte d'Euler sur les fonctions continúes et les fonctions discontinúes, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siécle. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*. tome 9 (1988). pp. 23-68. Disponible en: http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988_ 9_ 23_0

[Euler 1] Euler, L. 1728. The solution is found for problems concerning plane curves formed by lines with various kinds of elasticity. Comm: Ac.Scient.Petr.Tom.III p.70; Feb. 1728. E008.

[Euler 2] Euler, L. 1733. De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. Vol. 5. pp. 36-57. St. Petersburg Academy.

[Euler 3] Euler, L. 1740. De infinitis curvis eiusdem generis sev methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. v. 7; pp. 174 - 189.

[Euler 3a] Euler, L. 1740. Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* Num. 7; 1740; pp. 184-200 [194-200].

[Euler 4] Euler, L. 1741. De oscillationibus fili flexilis quotcunque pondusculis onusti. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, pp. 30-47. E49.

[Euler 5] Euler, L. 1748. *Introductio in analysin infinitorum*. Tomus primus. Publicado en: Opera mathematica. Series prima; Volumen VIII. Adolf Krazer y Ferdinand Rudio, editores. 1921. [E101]

[Euler 5a] Euler, L. 1988. *Introduction to analysis of the infinite; 2 volúmenes.* Traducido al inglés por John D. Blanton. Springer Verlag; New York.

[Euler 6] Euler, L. 1749. De vibratione chordarum exercitatio. *Nova acta eruditorum*, septiembre, pp. 512-527.

[Euler 7] Euler, L. Sur la vibration des cordes (Traducción del latín al francés). *Memoires de l'academie des sciences de Berlin* 4, 1750, pp. 69-85. E144.

[Euler 8] Euler, L. 1766. Recherches sur l'integration de l'equation $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z$. *Melanges de philosophie et de la mathematique de la societe royale de Turin* 3, 1766, pp. 60-91.

[Euler 9] Euler, L. 1755. Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum; V. 1.

[Euler 9a] Euler, L. 2000 Foundations of Differential Calculus. Springer Science & Business Media. John Blanton traductor.

[Euler 10] Euler, L. 1767. De usu functionum discontinuarum in analysi; *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11, 1767, pp. 67-102.

[Euler 11] Euler, L. 1980. Correspondance de Leonhard Euler avec a. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. Publicado por Adolf P. Juskevic y René Taton en colaboración con Charles Blanc. Serie Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series 4a: commercium epistolicum; v. 5. Basel: Dirkhauser.

[Ferraro] Ferraro, G. 2008. *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s.* Springer. N. Y.

[Fraser] Fraser, C. 2003. *The Calculus of Variations: A Historical survey.* pp. 355-383. Publicado en Jahnke 1.

[Freguglia] Freguglia, P. 2004. *L'idée de variabilité des grandeurs entre le XVIE et le XVIIE siècle*. pp. 41-51. Publicado en Álvarez 1.

[Gascoigne] Gascoigne, J. 2002. *Cambridge in the Age of the Enlightenment: Science, Religion and Politics from the Restoration to the French Revolution.* Cambridge University Press; primera edición en rústica. 1ª ed. 1989.

[Guiccardini] Guiccardini, N. 2003. *Newton's method and Leibniz's calculus.* pp. 73-103. Publicado en Jahnke 1.

[Gonçal] Gonçal, M. 2005. Modernidad y Racionalidad: Razón geométrica versus razón dialéctica. *Convivium* Vol. 18, pp. 47-72.

[Grant] Grant, H. 1994. Leibniz and the Spell of the Continuous. *The College Mathematics Journal*, September 1994, Volume 25, Number 4, pp. 291-294.

[Grattan-Guinnes] Grattan-Guinness, I. 1970. The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. Cambridge: Mit.

[Hankins] Hankins, T. L. 1990. Jean d'Alembert : science and the Enlightenment. Gordon and Breach Science Publishers S,A. Reimpresión del original publicado por: Oxford Univesity Press en 1970.

[Heine] Heine. E. 1872. Die Elemente der Functionenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* vol. 74, pp. 172-188. Berlín.

[Hintikka] Hintikka, J; Remes, U. 1974. The method of analysis: Its geometrical origin and its general significance. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland.

[Jahnke 1] Jahnke, H. (Editor) 2003. *A History of analysis.* American Mathematical Society; USA.

[Jahnke 2] Jahnke, H. 2003. *Algebraic analysis in the 18th Century*. pp. 105-136. Publicado en Jahnke 1.

[Klein] Klein, J. 1968. *Greek mathematical thought and the origin of algebra.* Traducción: Eva Brann. New York: Dover.

[Leibniz] Leibniz, W. 1849-63. *Mathematische Schriften*, 7 volúmenes. C. I. Gerhardt, editor. Berlin/Halle.

[Martínez] Martínez, C. 2008. El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. *Miscelánea Matemática* Núm. 46; pp. 73–91.

[Mersenne] Mersenne, M. 1637. *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique, par F. Marin Mersenne*. París 1637.

[Michel] Michel, A. & Paty. M. 2002. *Analyse et dynamique: études sur l'oeuvre de d'Alembert.* Universidad Laval; Québec, Canáda.

[Newton 1] Newton, I. 1687. Philosopiae Naturalis Principia mathematica; Libros 1-3. 1ª edición; Societatis Regiæ. S. Pepys editor. Londres. Versión digitalizada de Jonathan Ingram y Keith Edkins; 1 de marzo de 2009. Disponible en *The Project Gutenberg*: http://www.gutenberg.org

[Newton 1a] Newton, I. 2001. *Tratado de métodos de series y fluxiones.* Introducción, Marco Panza; traducción, Iztaccihuatl Vargas. Colección Mathema. México: UNAM, Facultad de Ciencias, Coordinación de Servicios Editoriales. Traducción de: Tractatus de methodis serierum et fluxionum, edición de 1671.

[Newton 2] Newton, I. 1739. *Philosophiae naturalis principia mathematica*; Libros 1-3. 3ª edición, comentada e ilustrada por TH. LE SUEUR y FR. JACQUIER. Genev. Disponible en: http://books.google.com

[Panza] Panza, M. 2004. "Une première méthode de quadrature établie par Newton ou l'étude des modalites de variation d'une grandeur. pp. 143-175. En Álvarez 1.

[Paty] Paty, M. 2002. *Les recherches actuelles sur d'Alembert A propos de l'édition de ses Oeuvres complètes.* En Michel 1.

[Ravetz] Ravetz, J. 1961. The Representation of Physical Quantities in Eighteenth-Century Mathematical Physics. Isis, Vol. 52, No. 1 (Mar., 1961), pp. 7-20. Disponible en: http://www.jstor.org/stable/228339

[Roberts] Roberts, F. 1692. A Discourse concerning the Musical Notes of the Trumpet, and Trumpet-Marine, and of the Defects of the Same, by the Honourable Francis Roberts, Esq; R. S. S. *Philosophical Transactions*, Vol. 16 (1686 - 1692), pp. 559-563.

[Rosenfeld] Rosenfeld, B. A. 2005. The Analytic Principle of Continuity. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 112, No. 8 (Oct., 2005), pp. 743-748. Published by: Mathematical Association of America.

[Russ] Russ, S. 2004. The mathematical works of Bernard Bolzano. Oxford University Press.

[Sauveur] Sauveur, J. 1701. "Systême général des intervalles des sons, et son application à tous les systêmes et à tous les instrumens de musique" *Memoires de Mathématique et de Physique Tire's des registres de l'Academie Royale des Sciences de l'Année MDCCXVII.* pp. 299-366. Compilación hecha en Academia de Ciencias 3.

[Salanskis] Salanskis, J. 2002. La hermenéutica del continuo. Publicado en: La Continuidad en las Ciencias. Carlos Álvarez y Ana Barahona (Comps.), 2002. UNAM-FCE. México.

[Shapin y Schaffer] Shapin, S; Schaffer, S. 1985. *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle and the experimental life.* Princeton University Press; Princeton, New Jersey.

[Spivak] Spivak, M. 1996. *Cálculo infinitesimal*; 2ª ed. 3ª reimpresión. Versión española por Bartolomé Frontera Marqués. Ed. Reverté. México.

[Stillwell] Stillwell, J. 2002. Mathematics and its history. 2ª edición. Serie: Undergraduate texts in mathematics. Springer; New York.

[Struik] Struik, D. J. 1969. A source book in mathematics, 1200-1800. D. J. Struik Editor; Harvard University. Cambridge, Mass.

[Taylor] Brook Taylor, B. 1715. *Methodus incrementorum directa et inversa.* Londres. Disponible en Google Books.

[Thiele] Thiele, R. 2007. *What is a function?* En Bradley 1.

[Truesdell] Truesdell, C. 1960. The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638 - 1788: Introduction to Vol. X and XI: The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies . Euler, Opera Omnia / Opera mechanica et astronomica. Birkhauser.

[Urbanus] Urbanus, S. 1739. Contemplatio Philosophica: A Posthumous Work of the late Brook Taylor, LL. D. F. R. S. Some Time Secretary of the Royal Society. *The Gentleman's Magazine.* Vol. 63, Pte 1. pp. 436-439. Londres.

[Van Maanen] Van Maanen, J. 2003. Precursors of differentiation and integration. pp. 41-72. En Jahnke 1.

[Wallis] Wallis, J. 1676/7. Dr. Wallis's Letter to the Publisher, Concerning a New Musical Discovery. *Philosophical Transactions*; Vol. 12 (1677 - 1678); pp. 839-842.

[Youschkevitch] Youschkevitch, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*. Volume 16, Number 1, p. 37-85.