UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

El tratamiento de la ecuación lineal para un aprendizaje significativo

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN EL CAMPO DE CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ADRIANA ALARCÓN DE LA ROSA

TUTOR PRINCIPAL
DR. SERGIO CRUZ CONTRERAS
Facultad de Estudios Superiores Acatlán

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dra. Laura Edith Bonilla León FES Acatlán
Dra. María del Carmen González Videgaray FES Acatlán

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México, 2017

Agradecimientos

Deseo y debo expresar mi más sincero y profundo agradecimiento, en primer lugar, a la Universidad Nacional Autónoma de México, por la formación que me ha brindado, por ser un espacio de crecimiento profesional y personal, donde las oportunidades de seguir preparándose son interminables.

También quiero agradecer al Dr. Sergio Cruz Contreras, por su gran compromiso y dedicación, por el valioso tiempo dedicado a la dirección de este trabajo, por su verdadera preocupación en la formación de profesionales en la docencia y por la paciencia que tuvo muchas veces. Gracias por su gran preparación y conocimientos que son de admirar.

A la Dra. Asela Carlón Monroy le agradezco por todo lo que me ayudo a comprender y reflexionar, por todo su apoyo, porque su trabajo y experiencia son invaluables.

Y a mis compañeros y amigos del Colegio de Ciencias y Humanidades les quiero hacer una mención especial, pues han compartido conmigo su insustituible experiencia y conocimientos, han mostrado solidaridad en todo momento y muchos también han dedicado su tiempo para contribuir a mi superación.

Finalmente todos mis seres queridos les dedico este trabajo porque son parte importante de la motivación que me lleva a seguir adelante.

Para Adrián, Carolina y Mariana: Están incluidos en los dos renglones anteriores y además espero ver logros iguales, y seguramente mayores, de ustedes en un futuro no muy lejano.

Resumen

El presente trabajo trata del diseño e implementación de un ambiente de aprendizaje que considere al alumno como constructor y actor de sus conocimientos, con la finalidad de que se favorezca un Aprendizaje Significativo. El contenido a tratar es el tema ecuaciones lineales en el nivel medio superior, por ser un concepto ampliamente necesario en distintas asignaturas como son la Geometría y el Cálculo. El trabajo se enfoca en la adquisición de los conceptos pertinentes para este tema y en la resolución de ecuaciones con diferente grado de dificultad, basada en propiedades necesarias del álgebra y no sólo en la transposición de términos. Durante el proceso de enseñanza aprendizaje se busca además que el alumno comunique sus ideas tanto de forma oral como escrita, valore sus intervenciones y las de sus compañeros, así como también el trabajo individual, en equipo y grupal. Para lo anterior se tomó en cuenta la teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel, las directrices contenidas en Planes y Programas de estudio CCH, Principios y Estándares Curriculares del NCTM, Diseño de Ambientes de Aprendizaje, algunos resultados de estudios de Educación Matemática, entre otros.

Abstract

The present work deals with the design and implementation of a learning environment that considers the student as constructor and actor of his knowledge, in order to favor a Significant Learning. The content to be treated is the subject of linear equations in the upper middle level, as it is a widely needed concept in different subjects such as Geometry and Calculus. The work focuses on the acquisition of concepts relevant to this subject and on solving equations with different degrees of difficulty, based on necessary properties of algebra and not only on the transposition of terms. During the teaching-learning process, students are also expected to communicate their ideas both orally and in writing, assess their interventions and with their peers, as well as individual, team and group work. For the above, we took into account Ausubel's Significant Learning theory, the guidelines contained in CCH Study Plans and Programs, NCTM Curriculum Principles and Standards, Learning Environments Design, some results of Mathematics Education studies, among others.

Índice

Introducción

Evaluaciones aplicadas periódicamente reflejan que el problema del bajo rendimiento en aprendizajes de Matemáticas no es exclusivo de un país. Datos proporcionados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) muestran que países como Chile, Suecia, Estados Unidos y México se encuentran por debajo de los 494 puntos que marca la media de la OCDE. En relación con las evaluaciones a nivel nacional, el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) con la prueba EXCALE, y la Secretaría de Educación Pública (SEP) mediante la Evaluación Nacional de Logro Académico (Enlace) reportan bajo rendimiento en Matemáticas. La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), desde diferentes dependencias, como la Dirección General de Evaluación Educativa (DGEE), cuenta con evaluaciones que reflejan, en cierta medida, la problemática en Matemáticas. En el caso de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) se aplica el Examen de Diagnóstico Académico (EDA), que evalúa aprendizajes, entre ellos los relacionados con el Álgebra.

El problema de aprendizaje que surge durante la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, concretamente en la resolución de ecuaciones lineales, persiste para una cantidad considerable de alumnos, en su paso por el Bachillerato y, en muchos casos, en la Licenciatura. El tema de la resolución de ecuaciones lineales cobra importancia al ser requerido, ya sea como objeto de estudio o herramienta dentro y fuera de la disciplina durante los seis semestres o tres años, dependiendo del subsistema de bachillerato perteneciente a la UNAM. Este problema de aprendizaje puede estar vinculado con dificultades de distinta naturaleza: *a)* las propias de la complejidad del objeto de estudio, que en este caso es la *ecuación*; *b)* las relacionadas con el proceso de enseñanza, la naturaleza del currículo y las concepciones de los docentes; *c)* las asociadas a los procesos de pensamiento matemático y al desarrollo cognitivo, y *d)* las que tienen origen en las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

Debido al aprendizaje deficiente en la resolución de ecuaciones lineales, la intención de este trabajo es lograr un aprendizaje significativo para los alumnos del CCH en el tema de ecuaciones lineales, además de fomentar el desarrollo de habilidades, destrezas, actitudes y valores, indicadas en el Modelo Educativo del CCH. Este aprendizaje se basa en la Teoría de Ausubel, por considerar que se puede adaptar y ser acorde con el Plan de estudios del CCH.

El presente trabajo contiene cuatro capítulos, un apartado de referencias bibliográficas, hemerográficas y electrónicas (o ciberográficas), y finalmente los anexos.

En el capítulo 1 se presenta el problema y sus antecedentes, documentados en diferentes informes de evaluaciones internacionales y nacionales, resultados de investigaciones en Educación Matemática sobre las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la ecuación lineal, de los conceptos relacionados y de los diferentes tratamientos para su resolución, así como los objetivos de este trabajo y las preguntas de investigación orientadas a indagar el nivel de logro del objetivo.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, que pretende justificar mediante documentos oficiales del CCH, literatura de teóricos e investigadores de la Educación Matemática: la concepción de la *Matemática*, del *Álgebra* y de las propias *Ecuaciones*; la teoría del *aprendizaje significativo* propuesto por Ausubel, y elementos sobre el diseño de ambientes de aprendizaje de Bransford, Brown y Cocking.

El capítulo 3 trata de lo referente a la metodología de trabajo, y se describen, en primer lugar, las características de la población que participó en el proceso de enseñanza-aprendizaje, compuesta por un grupo del CCH Vallejo, del bachillerato de la UNAM. Luego se aborda lo concerniente a la información recabada durante la puesta en práctica; es decir, la forma en que obtuvo, su sistematización para que resultara manejable y los criterios de análisis. En tercer lugar se describen, por un lado, las tareas y pruebas considerando su propósito y contenido y, por otro, su secuencia, además de que se especifica el tipo de materiales que se utilizaron en las diferentes tareas.

Para cerrar, en el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos, su análisis, discusión, respuesta a las preguntas de investigación y las conclusiones.

Capítulo 1. Problema de estudio

Introducción

Los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en todos los niveles y modalidades, se han identificado como el objeto de estudio propio de la Educación Matemática, así llamada en la cultura anglosajona, o denominada Didáctica de las Matemáticas en la cultura europea. A lo largo de sus más de ochenta años de existencia, la Educación Matemática se ha establecido como una disciplina científica con identidad propia: se ha delimitado su objeto de estudio y construido la metodología propia de sus indagaciones. Ha sido ampliamente reconocida en la mayoría de las principales universidades del mundo por su origen y naturaleza pedagógica, pero no así en la UNAM.

Por lo anterior, en este capítulo se aborda el problema a tratar en este trabajo, desde su justificación, sus antecedentes y su importancia, así como el objetivo de esta tesis, la hipótesis y las preguntas de investigación que lo guiaron.

Antecedentes

Las matemáticas forman parte importante del currículo de todos los niveles de estudio, desde preescolar hasta la educación media superior, principalmente, y en todas las instituciones educativas.

En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP) incluye, en su Plan y sus Programas de estudio (2011), la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico, que comprende los niveles Preescolar, Primaria y Secundaria. Asimismo, en el Documento Base de la Dirección General de Bachillerato (DGB), de la propia SEP, también del 2011, se contempla la enseñanza de esta disciplina.

En relación con la UNAM, en los Planes y Programas de estudio de Bachillerato se incluye la impartición de Matemáticas en los seis semestres del subsistema del CCH, equivalentes a los tres años de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP).

En documentos editados por académicos del CCH, se reconoce el papel que ha desempeñado la matemática en la cultura humana, en los siguientes términos: "en el desarrollo histórico del conocimiento, la matemática ha jugado un papel preponderante, como un *objeto de estudio* en sí mismo, y también de manera trascendente como un *instrumento de conocimiento*" (CCH, 1996:15).

El álgebra elemental, parte fundamental de las matemáticas y centro de este trabajo, se estudia o requiere en diferentes semestres dedicados a la propia matemática, además de que se demanda en otros campos del conocimiento, como la Física.

En el álgebra elemental, uno de los contenidos fundamentales es el de las Ecuaciones lineales, por el papel que juega el concepto de ecuación en toda la cultura matemática y fuera de ella, y por ser la primera vez que se muestra a los alumnos. Se puede decir que en las matemáticas el concepto de ecuación aparece en todos los niveles educativos. Así, por la importancia que el tema de Ecuaciones lineales tiene en la cultura matemática escolar, se eligió como el objeto de estudio del presente trabajo.

Sobre el tema de las Ecuaciones lineales, en el Programa de estudios del CCH (2003:23) se resaltan los siguientes aspectos:

- Comprender que las ecuaciones lineales en una incógnita son un caso especial de igualdad entre expresiones algebraicas.
- Manejar con soltura la prioridad de las operaciones y el significado del uso de paréntesis para modificar dicha prioridad.
- Resolver ecuaciones lineales en una incógnita a través de los siguientes procedimientos:

  – Operaciones con ambos miembros de la igualdad.

  – Transposición de términos.

Aunado a lo anterior, en el Plan de estudios, los Programas y otros documentos académicos del CCH (1996:46), se aclara el tipo de aprendizaje que se desea alcanzar, formulado en los siguientes términos:

> Se busca que los egresados de Bachillerato sepan pensar por sí mismos, expresarse y hacer cálculos, y posean los principios de una cultura científica y humanística. Deben además saber para qué sirve todo ello y relacionarlo con las diversas situaciones que se les presentan en su vida; es decir, que su aprendizaje será significativo para ellos mismos.

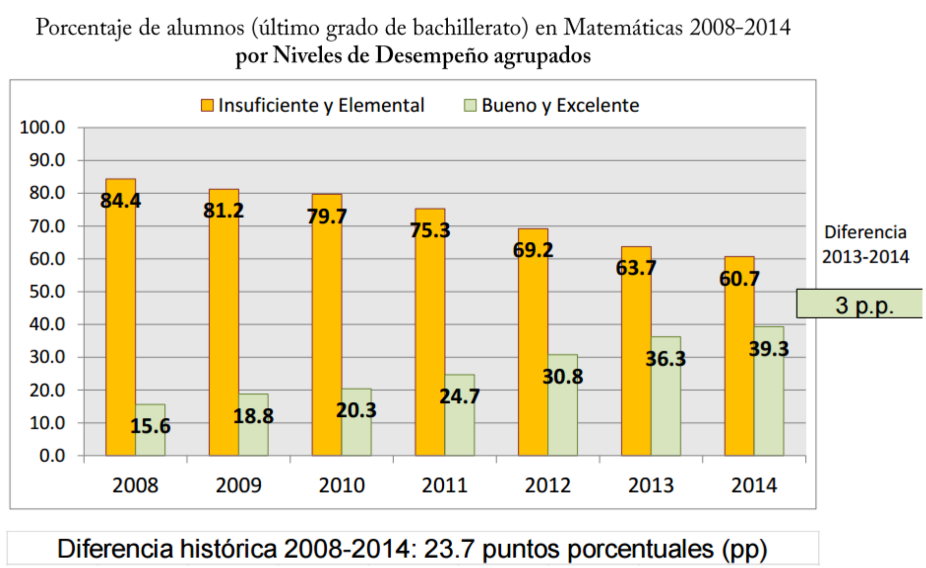
Por otro lado, como es ampliamente conocido, el aprendizaje de las matemáticas en general, y del álgebra en particular, enfrenta numerosas dificultades.

A continuación se presentan algunos resultados que se obtuvieron en diferentes evaluaciones educativas, tanto dentro como fuera de nuestro país, en relación con las matemáticas en general, el álgebra y las ecuaciones lineales.

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) en el año 2012 (aunque la prueba se aplica a poco más de 50 países, nos centramos en algunos resultados para México), obtuvo lo siguiente:

- 55% de los alumnos mexicanos no alcanzan el nivel de competencias básico (nivel 2) en matemáticas (promedio OCDE: 23%).
- Menos del 1% de los alumnos mexicanos de 15 años logra alcanzar los niveles de competencia más altos (niveles 5 y 6) en matemáticas (promedio OCDE: 13%).
- El alumno promedio en México obtiene 413 puntos en matemáticas. El puntaje promedio en la OCDE es de 494, una diferencia con México que equivale a casi dos años de escolaridad.
- Este puntaje promedio sitúa a México por debajo del desempeño promedio de Portugal (487 puntos), España (484), Chile (423); a un nivel similar al de Uruguay y Costa Rica, y por encima del rendimiento de Brasil (391), Argentina (388), Colombia (376) y Perú (368).
- Los alumnos mexicanos de más alto rendimiento obtienen el mismo puntaje que un alumno promedio en Japón (539 puntos) (OCDE, 2013:2).

En México se aplica la prueba ENLACE; algunos resultados se muestran en la siguiente gráfica:



Tomada de la página: http://enlace.sep.gob.mx/ms/

En lo que respecta a la UNAM, las materias de Matemáticas tienen un alto índice de reprobación. En el CCH tenemos que las estadísticas de los índices de acreditación de la asignatura de Matemáticas I, de las generaciones 2008 a 2012, presentan un rango de aprobación de entre 73% y 74% (CCH, 2012), lo que indica que aproximadamente una cuarta parte de la población que ingresa no acredita la asignatura.

En cuanto a los aprendizajes referentes a la resolución de la Ecuación lineal, de la aplicación del EDA (Examen de Diagnóstico Académico, del CCH), se tiene como dato:

a) 43% de aciertos para operaciones con ambos miembros de la igualdad.
b) 68% de aciertos para transposición de términos, del total de alumnos de CCH que presentaron la prueba.
c) En aprendizajes subsecuentes, que se refieren a Sistemas de Ecuaciones Lineales y Ecuación cuadrática, los promedios de aciertos van de 20% a 59% (CCH, 2012:28).

En la UNAM, en el *Informe sobre la Gestión Directiva 2011-2013*, del CCH, se tienen resultados de los exámenes que aplica la Dirección General de Evaluación Educativa (DGEE) a los estudiantes que ingresaron a carreras del área de Ciencias Físico-Matemáticas y de las Ingenierías en 2011, donde egresados del Colegio obtuvieron un promedio de 37.7% de aciertos en el rubro de matemáticas (CCH, 2012:25). Este punto es importante, porque tiene que ver directamente con el aprendizaje adquirido por el alumno en esta área de conocimiento, pero aún más, ya que los alumnos que eligen las carreras mencionadas, en teoría, son los que tienen mayor facilidad o más interés en este campo, aunque se debe destacar que la elección de carrera no necesariamente se basa en este aspecto.

En un estudio realizado por S. J. García en el año 2010, en la Universidad de Granada, titulado *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*, se aplicó una prueba departamental a alumnos de primer curso a nivel Licenciatura. El análisis cuantitativo muestra, de manera global, "una media de 43 para los aciertos, en alumnos de primer semestre. Siendo dos carreras de Ingeniería, una con un promedio de 25.37 y otra con un promedio de 30.22, las que están por debajo de la media respecto a otras carreras que no son de corte Científico-Tecnológico" (García, 2010:73). Como se expresa, hay errores básicos que no corresponderían al nivel de estudio donde se realizó la investigación, pero aparentemente éstos se ocasionaron por deficiencias de los alumnos en su formación matemática en niveles de secundaria y bachillerato, que son los anteriores a su ingreso al nivel de Licenciatura (García, 2010:75).

Por lo anterior, las dificultades que los alumnos enfrentan en el aprendizaje de las matemáticas durante el bachillerato, se hacen presentes al ingresar a los estudios superiores.

En relación con los resultados de las evaluaciones, hay que tomar en cuenta las fuentes de dificultad que enfrentan los alumnos de secundaria y bachillerato en el aprendizaje del tema de las ecuaciones lineales, y que han generado la investigación en Educación Matemática; algunas son: las propias de la complejidad del objeto de estudio y las relacionadas con el proceso de enseñanza. Entre las primeras podemos citar, sólo como ejemplos, los distintos significados y usos que le dan al signo igual los estudiantes (Kieran y Filloy, 1989; Palarea, 1999; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999), así como los distintos significados y usos de las letras, que son propias del álgebra (Kieran y Filloy, 1989). En cuanto a las dificultades relacionadas con el proceso de enseñanza, nada más mencionamos las que se refieren al tipo de enseñanza que siguen los docentes debido, quizá, a sus concepciones (García, Azcárate y Moreno, 2006).

Hay otras fuentes de dificultad que sólo mencionamos: las asociadas a los procesos de pensamiento matemático y desarrollo cognitivo (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Socas, Camacho y Palarea, 1989), y las que se originan en las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Socas, Camacho y Palarea, 1989).

Todo lo anterior ha motivado el problema de estudio

Problema de estudio en este trabajo

En este trabajo se aborda el problema del aprendizaje de las ecuaciones lineales y su resolución, en el bachillerato, intentando que éste sea significativo para los alumnos.

De acuerdo con Joseph D. Novak (1978:16), “el aprendizaje significativo ocurre cuando la nueva información se enlaza con los conceptos pertinentes que ya existen en la estructura cognoscitiva del que aprende”.

A partir de estas razones, para el trabajo que se presenta se planteó el siguiente esquema:

Objetivo

Lograr un aprendizaje significativo por alumnos de bachillerato, en el tema de ecuaciones lineales, así como fomentar el desarrollo de habilidades, destrezas, actitudes y valores, adecuadas para un futuro ciudadano.

Hipótesis

En términos del problema y del objetivo que se plantean en el presente trabajo, se parte de la hipótesis de que un proceso de instrucción, basado en el diseño de un ambiente de aprendizaje que se centre en el alumno, los conocimientos, la comunidad y la evaluación propuestos por Bransford, Brown y Cocking (citados en SEP, 2007), propicia el logro de un aprendizaje significativo en el tema de ecuaciones lineales.

Preguntas de investigación

De acuerdo con lo que se quiere alcanzar a partir de la temática y respecto al aprendizaje significativo, y que orientan al presente trabajo, las preguntas de investigación son:

- ¿En qué medida el alumno:

  identifica ecuaciones discriminando otras expresiones algebraicas que no lo son?

  logra expresar de forma escrita el concepto de ecuación?

  reconoce las partes que conforman una ecuación?

  resuelve ecuaciones lineales justificando sus respuestas con propiedades pertinentes?

  expresa el concepto de solución de la ecuación?

  puede probar sus resultados?

  corrige sus errores?

  comunica sus procedimientos?

  describe características de ecuaciones dadas?

  construye ecuaciones equivalentes dada una ecuación en su forma más simple?

  despeja la incógnita que se le indica dada una ecuación con literales?

  identifica las propiedades utilizadas en una ecuación ya resuelta?

  simboliza expresiones dadas en forma verbal a expresiones en su representación algebraica?

Capítulo 2. Marco teórico

Introducción

Uno de los principios que orientan este trabajo es la creencia, fundada racionalmente, de que el proceso de enseñanza-aprendizaje, que tiene lugar en un salón de clases de matemáticas, es un proceso de tipo social que puede conducirse con base en principios establecidos por la investigación científica que produce la Didáctica de las Matemáticas o, también llamada, Educación Matemática.

La Educación Matemática es una disciplina del saber con un objeto de estudio bien determinado: en general, los problemas de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Es una disciplina del saber que actualmente abarca niveles de enseñanza que van de licenciatura a maestría y doctorado en las principales universidades del mundo. Además, cuenta con medios de difusión en publicaciones especializadas, a nivel mundial, que se contabilizan en millares. De todas las disciplinas del saber escolarizado, es la que tiene la didáctica más estudiada y profundizada.

En la actualidad se reconoce que las matemáticas escolares tienen aspectos pedagógicos, sociales, lingüísticos, simbólicos, filosóficos, antropológicos, psicológicos, comunicacionales y, obviamente, matemáticos. En consecuencia, los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares se pueden considerar como complejos dadas las diversas variables que entran en juego en su determinación. Asimismo, el estudio y la reflexión teórica de tales problemas ha recurrido, como disciplina en sí misma, en los más de 80 años de vida que tiene la Educación Matemática, a diversas áreas del saber: Pedagogía, Psicología, Sociología, Lingüística, Filosofía, Comunicación, Semiótica y, naturalmente, Matemáticas.

Hace mucho tiempo que la conceptualización primaria de que una didáctica específica es la suma de principios pedagógicos generales a contenidos disciplinarios particulares, ha sido abandonada por la Educación Matemática: los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas comparten características comunes con los de otras disciplinas, pero, sobre todo, tiene rasgos propios de la disciplina matemática.

Un ejemplo es: en general se reconoce ampliamente el aporte de la psicología soviética que hace referencia al contenido social del aprendizaje. En matemáticas se identifica este aporte; sin embargo, en la Educación Matemática, entre otras cosas, se explicitan las características que debe tener un saber matemático para que sea socialmente aceptado. Dicho de otra manera, contesta la pregunta: ¿qué características debe tener el saber matemático para que sea aceptado por la comunidad del salón de clases? Una es: que no sea impuesto por la autoridad del profesor, ya que se toma como algo "natural" en una clase "tradicional" de Matemáticas.

Resumiendo, la Educación Matemática ha tomado en préstamo diferentes enfoques teóricos, provenientes de las disciplinas antes mencionadas y ha intentado construir un entramado conceptual y metodológico propio, multidisciplinario primero e interdisciplinario después. A partir de estos entramados ha intentado darle sentido y comprender lo que ocurre en un salón de clases de Matemáticas. Como todo proceso social de construcción del conocimiento, la Educación Matemática ha producido una gran diversidad de enfoques teóricos que, aventuradamente se podría decir, se complementan.

Como consecuencia de todo esto, el presente trabajo busca comprender y dar sentido a lo que ocurre en el salón de clases de Matemáticas, con base en algunos elementos teóricos, denominado simplemente Marco teórico, y tomados de la Educación Matemática.

En resumen, podemos decir que el referente teórico fundamental que guía el trabajo de tesis es (Hill, Ball y Schilling, 2008): lo que ocurre en el salón de clases se puede conceptualizar a partir de la conjunción de dos componentes, *a)* la pedagógica del contenido, y *b)* el saber matemático propio de la docencia; donde el componente pedagógico del contenido está integrada por los aspectos curriculares de aprendizaje y de enseñanza que se proponen, y el saber matemático propio de la docencia es aquel que tiene las características adecuadas para la docencia y no para otra cosa.

En este caso, como el contenido matemático que se intenta potenciar en el estudiante son las Ecuaciones lineales, el Marco teórico debe, necesariamente, contener los siguientes aspectos: las Ecuaciones lineales en el currículo del CCH, aspectos de aprendizaje y enseñanza de las Ecuaciones lineales y las características que se deben resaltar en las Ecuaciones de primer grado, cuando este contenido se va a enseñar y aprender, todo ello como se ha estudiado en la Educación Matemática.

Por lo anterior, en este capítulo se mencionan, de manera breve, las directrices que orientan algunos elementos del Modelo educativo del CCH, en lo referente, sobre todo, al perfil del alumno; algunas ideas en relación con la conceptualización de las Matemáticas en general, y al Álgebra en particular y, de manera más específica, a las Ecuaciones Lineales; todo ello desde la perspectiva del currículo del CCH, así como algunos elementos de las conceptualizaciones del aprendizaje y de la enseñanza que le dan sentido a la institución. Además, se hace una breve revisión de las dificultades que la investigación en Educación Matemática ha reportado en el aprendizaje del concepto de ecuación, y otros estrechamente relacionados con él.

Debido a la importancia que tienen los libros de texto en la enseñanza de contenidos matemáticos, se revisa la presentación del tema de Ecuaciones que hacen algunos libros de Álgebra. Por otro lado, se muestra un resumen de los contenidos conceptuales que, respecto a las ecuaciones, se pretende desarrollar en la experiencia, objeto de este trabajo. Finalmente, se aborda la cuestión del diseño del Ambiente de Aprendizaje que se considera adecuado para alcanzar los fines que se plantea el Modelo educativo del CCH en cuanto a propiciar el fortalecimiento del perfil del alumno en la clase de Álgebra.

Las orientaciones mencionadas en el párrafo anterior se basan en algunos documentos propios del CCH, como son: Planes de estudio (1996), Programas de estudio (2003) y *Sentido y Orientación de las Áreas* (2006). Asimismo, se consideran algunos elementos de la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel (Novak, 1978) y del Social constructivismo de Vygotsky (Gómez y Mejía, 1992), la propuesta de Bransford, Brown y Cocking en *La creación de ambientes de aprendizaje en la escuela* (SEP, 2007); los Estándares curriculares del NCTM (2000), y algunos estudios realizados en el campo de la Educación Matemática. Todo referente al tema de Ecuaciones lineales.

Perfil del alumno: algunos elementos del Modelo Educativo del CCH

El Modelo Educativo del CCH, plasmado en distintos documentos, brinda las orientaciones pedagógicas y disciplinarias necesarias para el logro del perfil de egreso de esta institución, para con los estudiantes y la sociedad; es decir, en ellos se dice lo que se espera lograr y cómo, en este subsistema de bachillerato de la UNAM.

El CCH es un bachillerato de cultura básica que busca desarrollar en el alumno "las habilidades de trabajo intelectual, generales y propias de los distintos campos del saber [...] aptitudes de reflexión sistemática, metódica y rigurosa, conocimientos y habilidades metodológicas y actitudes congruentes" (CCH, 1996:36).

Para el alumno, como sujeto de la cultura, en el CCH se privilegia que comprenda y analice los conocimientos que se le proporcionen, para poder juzgarlos y asociarlos con su realidad y experiencia, asimilarlos, adaptarlos o, en su caso, reelaborarlos o sustituirlos en forma crítica, para lograr trasladarlos a la solución de problemas (CCH, 1996).

A continuación se anotan cinco declaraciones que resumen el perfil deseado del alumno que egresa del CCH y que se espera sea promovido en todas las asignaturas que cursa.

- **Aprender a aprender** significa la apropiación de una autonomía en la adquisición de nuevos conocimientos, congruente con la edad de los alumnos y, por ende, relativa.
- **Aprender a hacer** se refiere, en primera instancia, a la adquisición de habilidades, supone conocimientos y elementos de métodos diversos y, en consecuencia, determina enfoques pedagógicos y procedimientos de trabajo en clase (aprender haciendo).
- **Aprender a ser** enuncia el propósito de atender a la formación del alumno no sólo en la esfera del conocimiento sino en los valores humanos, en particular los éticos, cívicos y los de la sensibilidad estética.
- **Alumno crítico** apunta a la capacidad de juzgar la validez de los conocimientos que se presentan en su examen, sin lo cual no puede concebirse la constitución de un sujeto de la cultura ni la posesión personal del conocimiento científico o de los valores legítimamente adoptados.
- **Interdisciplinariedad** sirve, en este contexto, para significar la atención a las relaciones entre los distintos campos del saber, así como el propósito de considerar problemas y temas combinando disciplinas y enfoques metodológicos, de manera que se reconstruya, en el conocimiento, la unidad de los aspectos de la realidad que la división disciplinaria de nuestro tiempo obliga a examinar por separado (CCH, 1996:39).

El siguiente apartado se dedica a lo que se pretende para el Área de Matemáticas.

Algunas ideas sobre las Matemáticas, el Álgebra y las Ecuaciones lineales, desde la perspectiva del CCH y del NCTM

En el Plan de estudios del CCH (1996) se pone de manifiesto que las matemáticas son elementos indispensables y esenciales de la herencia cultural. Además, señala que "en el desarrollo histórico del conocimiento, la matemática ha jugado un papel preponderante, como un "objeto de estudio" en sí mismo, y también, y de manera trascendente, como un "instrumento de conocimiento" (CCH, 2006:15). Lo anterior coincide con el NCTM que, en los *Principios y Estándares Curriculares* (2000), considera a las Matemáticas para la vida, el trabajo y la comunidad científica y técnica.

En cuanto a la concepción del álgebra, el CCH (2006:21) la plantea de la siguiente manera:

- Comprender y manejar conceptos, expresiones y procedimientos algebraicos diversos.
- Comprender e identificar algoritmos, así como las relaciones entre ellos.
- Describir e interpretar la información que proporciona la representación algebraica de un objeto matemático, y vincular dicha información con otras representaciones matemáticas del mismo objeto.
- Utilizar representaciones algebraicas en la resolución de problemas.
- Apreciar las representaciones algebraicas como una manera eficaz de expresar características y propiedades generales, establecer o depurar conocimientos, así como favorecer la deducción de resultados.
- Valorar al Álgebra como instrumento para el estudio de comportamientos, la construcción de modelos, el análisis de relaciones y la posibilidad de hacer predicciones.

Lo anterior está en consonancia con el NCTM (2000:39), para quien el álgebra "es mucho más que la manipulación los símbolos", porque destaca que los procedimientos para trabajar con dichos símbolos han sido un gran logro en la historia de las matemáticas, pero que "la mejor manera de aprender el álgebra es entendiéndola como un conjunto de conceptos y técnicas ligadas con la representación de relaciones cuantitativas y también como un estilo de pensamiento matemático para la formalización de patrones, funciones y generalizaciones”.

En el Programa de estudios de Matemáticas I del CCH, la unidad 3 está dedicada al tema de Ecuaciones lineales, y establece como propósito: “incrementar la capacidad del alumno para plantear problemas que conducen a ecuaciones lineales y su resolución por métodos algebraicos. Estudiar la noción de ecuación desde diversas perspectivas. Manejar su relación con las funciones lineales. Avanzar en el manejo del lenguaje algebraico” (CCH, 1996:23). Para lograrlo se incluyen aprendizajes dirigidos a la resolución de Ecuaciones lineales, entre los cuales se encuentran:

- Comprende que las ecuaciones lineales en una incógnita, son un caso especial de igualdad entre expresiones algebraicas.
- Maneja con soltura la prioridad de las operaciones y el significado del uso de paréntesis para modificar dicha prioridad.
- Resuelve ecuaciones lineales en una incógnita a través de los procedimientos siguientes:

  −Operaciones con ambos miembros de la igualdad.

  −Transposición de términos.
- Reduce por medio de operaciones y propiedades válidas, una ecuación lineal a otra más simple de resolver.
- Observa que cualquier forma que adopte una ecuación lineal, desde la más simple hasta las que involucran expresiones racionales, siempre puede reducirse, al simplificar términos semejantes o realizar las operaciones indicadas, a una ecuación de la forma ax + b = 0 y con ello, resolverse fácilmente (CCH, 2003:23).

Por otro lado el NCTM (2000:301) destaca que los alumnos:

> Deberían desarrollar la comprensión de las propiedades algebraicas que rigen la manipulación de los símbolos en las expresiones, ecuaciones. Deberían alcanzar fluidez al efectuar tales manipulaciones con los medios apropiados –mentalmente, a mano o con máquinas– para resolver ecuaciones […] hallar formas equivalentes de expresiones […] o probar resultados generales.

Además, añade:

> Que los alumnos deberían ser capaces de operar con soltura expresiones algebraicas, de combinarlas y de cambiar su forma. Estas destrezas constituyen la base de la habilidad para hallar las soluciones de una ecuación, un objetivo central en el currículo de Álgebra. Incluso resolver ecuaciones como: $(x+1)^2+(x-2)+7=3(x-3)^2+4(x+5)+1$.

Se puede observar que el CCH, desde sus diversos documentos, y el NCTM en sus Estándares Curriculares, consideran y le dan su debida importancia a las propiedades que justifican las manipulaciones sobre las expresiones algebraicas que, en este trabajo, son las Ecuaciones lineales.

Por la importancia que tiene para el pensamiento matemático, a continuación se abunda un poco más en algunos procesos que, de acuerdo con los Estándares Curriculares y de Evaluación del NCTM (2000), son fundamentales en éste.

Resolución de problemas. No sólo es un objetivo del aprendizaje de las matemáticas sino también una de las principales maneras de hacer Matemática. Ésta es una parte integral de las Matemáticas, no una pieza aislada del programa de matemáticas. Los estudiantes necesitan tener oportunidades frecuentes para formular, enfrentar y resolver problemas complejos que requieren mucho esfuerzo. A su vez, deberían ser estimulados para reflexionar sobre sus razonamientos durante el proceso de resolución de problemas, de manera que sean capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. Al resolver problemas matemáticos, los alumnos adquieren formas de pensar, hábitos de persistencia y curiosidad, y confianza al enfrentar situaciones nuevas que les servirán fuera de la clase.

Comunicación matemática. Es un camino para compartir y clarificar ideas matemáticas. Mediante la comunicación, las ideas se transforman en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Cuando se motiva a los estudiantes a comunicarse con otros sus resultados y razonamientos, sea en forma oral o escrita, aprenden a ser más claros, convincentes y precisos en el uso del lenguaje matemático. Las explicaciones dadas por los alumnos deben incluir argumentos matemáticos y racionales, no sólo descripciones de procedimientos y resúmenes. A su vez, al escuchar las explicaciones de otros, los estudiantes podrán desarrollar sus propias comprensiones. Conversaciones en que las ideas matemáticas se exploran desde múltiples perspectivas ayudan a los participantes a precisar sus razonamientos y hacer conexiones.

Conexiones matemáticas. Las matemáticas no son un conjunto separado de ejes temáticos o estándares, aun cuando a menudo se presenten de esta manera y, por el contrario, son un campo de estudio integrado. Cuando los estudiantes relacionan las ideas matemáticas, su comprensión y entendimiento acerca de ellas se hacen profundos y son más permanentes, además de que pueden percibirlas como un todo coherente, y pueden visualizar las conexiones matemáticas en gran interacción con otros tópicos, los contextos que relacionan las matemáticas con otros temas, y sus propios intereses y experiencias. En una enseñanza que resalta la interrelación de las ideas matemáticas, los estudiantes no sólo aprenden matemáticas sino también acerca de su utilidad.

Representaciones matemáticas. Las ideas matemáticas pueden ser representadas en formas variadas: imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números y letras, hojas de cálculo, y muchas otras. Las formas en que se representan las ideas matemáticas son fundamentales para determinar cómo las personas comprenden y utilizan esas ideas. Muchas de las representaciones que ahora damos por ciertas, han sido resultado de la elaboración cultural que se desarrolló a lo largo de muchos años. Cuando los estudiantes tienen acceso a las representaciones matemáticas y a las ideas que éstas expresan, y cuando, además, pueden crear representaciones para capturar conceptos matemáticos o relaciones, adquieren un conjunto de herramientas que amplían significativamente su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

En la clase de matemáticas, los estudiantes deberán practicar, entre otros aspectos, distintas conversiones entre diferentes registros de representación, como las siguientes:

- Habitual-algebraico.
- Algebraico-habitual.
- Tabular-gráfico.
- Gráfico-numérico.
- Habitual-gráfico.
- Numérico-algebraico.

Demostración y prueba. El razonamiento matemático y la demostración ofrecen poderosos caminos para desarrollar y expresar comprensiones en un amplio rango de fenómenos. Las personas que piensan y razonan analíticamente tienden a ver patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones matemáticas como en el mundo real. Ellas se preguntan acerca de si los patrones son accidentales u ocurren por alguna razón; además, establecen e investigan conjeturas matemáticas, y desarrollan y evalúan argumentos y demostraciones matemáticas, que son las maneras formales de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación. Así, explorando fenómenos, justificando resultados y utilizando conjeturas matemáticas en todas las áreas de contenido –y con diferente complejidad– en todos los niveles y grados, los estudiantes deben ver y sentir que las matemáticas sí tienen sentido.

Algunas ideas sobre el aprendizaje

Ya se ha mencionado que en documentos del CCH se encuentran plasmadas las orientaciones que deben tenerse en cuenta durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Una de ellas, y la principal para este trabajo, es el tipo de aprendizaje que se desea promover, que en el Plan de estudios (CCH, 1996:46) se enuncia así:

> Se busca que los egresados de bachillerato sepan pensar por sí mismos, expresarse y hacer cálculos, y posean los principios de una cultura científica y humanística. Deben, además, saber para qué sirve todo ello y relacionarlo con las diversas situaciones que se les presentan en su vida; es decir, que su aprendizaje sea significativo.

Para este trabajo, se considera que la teoría del Aprendizaje Significativo, de Ausubel, es una de las que mejor se adaptan al Modelo Educativo del CCH y, por tal razón, en seguida se presenta un resumen de algunas de las ideas que lo guían.

Dado que la teoría de Ausubel se centra en la relación de conceptos existentes en la estructura cognoscitiva del individuo con nueva información (conceptos nuevos), también se considera necesario incluir puntos importantes sobre la formación de conceptos.

Formación de conceptos

Según Skemp (1993:26) “el término *concepto* no es fácil de definir” y añade que para formar un concepto “se requiere un cierto número de experiencias que tengan algo en común”.

Es así que durante las experiencias que el individuo acumula, puede ir percatándose de las similitudes entre ellas, esto le permite clasificar lo que significa estar realizando una actividad de abstraer, y esto último produce una abstracción.

Entonces resulta fundamental establecer la diferencia entre abstraer y abstracción. Para Skemp (1993:26), abstraer es una acción, y “abstracción es un tipo de cambio mental duradero […] es la propiedad definitoria de una clase […] es un producto final”, así que denomina la abstracción como *concepto.*

Skemp también expone que el lenguaje está ligado a los conceptos y a su formación, por un lado y, por otro, el nombrar (denominar) a un concepto, a veces, es esencial o por lo menos auxiliar para formarlo; aunado a ello, los nombres asociados a distintas clases sirven para clasificar ejemplos posteriores de mejor manera. Por esto es importante hacer la distinción entre un concepto y su nombre, "un concepto es una idea, el nombre de un concepto es un sonido, o una marca sobre papel, asociada con él" (Skemp, 1993:27).

Asimismo, Skemp distingue dos tipos de conceptos: *primarios* y *secundarios*. Los conceptos secundarios se caracterizan por ser de un orden más específico o particular, son cercanos a experiencias del mundo externo y ejemplos de los conceptos primarios, que son más abstractos, es decir, de un orden más elevado y de carácter más general, y por esta razón los *conceptos primarios* no se pueden comunicar a través de una definición.

Skemp establece algunos resultados que parecen ser útiles en el proceso de aprendizaje:

1) Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse una colección adecuada de ejemplos (Skemp, 1993:36).
2) Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende (Skemp, 1993:36).
3) En general, los conceptos de un orden superior a aquellos que una persona ya posee no pueden comunicarse mediante una definición, sino, únicamente, reuniendo ejemplos adecuados para que experimente (Skemp, 1993:30).
4) La construcción efectiva de un sistema conceptual es algo que cada individuo ha de hacer por sí mismo. Pero el proceso puede acelerarse enormemente si, por así decir, los materiales están a la mano (Skemp, 1993:33).
5) Los buenos profesores ayudan intuitivamente a sacar una definición con ejemplos. Elegir una colección adecuada es, sin embargo, más difícil de lo que parece. Los ejemplos han de tener en común las propiedades que forman el concepto, pero no otras (Skemp, 1993:37).

Aprendizaje significativo en la teoría de Ausubel y el Social Constructivismo de Vigotsky

El Aprendizaje Significativo es el concepto más importante en la teoría de Ausubel: "este aprendizaje ocurre cuando la nueva información se enlaza con los *conceptos pertinentes* que existen ya en la estructura cognoscitiva del que aprende […] Es debido a los *conceptos* *pertinentes* que posee cada estudiante que el grado de significatividad de la experiencia de aprendizaje varía de un estudiante a otro (Novak, 1978:16).

Entonces se hace referencia a dos tipos de conceptos: los ya existentes y los nuevos a integrar. Para Ausubel el aprendizaje de los conceptos es un aspecto central y sostiene "que los conceptos representan un papel central en la conducta humana racional y que el aprendizaje del concepto debe ser el foco de atención de la enseñanza" (Novak, 1978:11).

Por otro lado, en el documento *Sentido y Orientación de las Áreas*, del CCH, también se destaca la importancia del concepto cuando se dice: "introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no conlleven de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar" (CCH, 2006:20).

De lo anterior se puede destacar que los conocimientos previos son relevantes para el que aprende; y que depende de cómo esté conformada u organizada su estructura cognoscitiva, para que pueda relacionarla con los nuevos conceptos que se pretenda lograr.

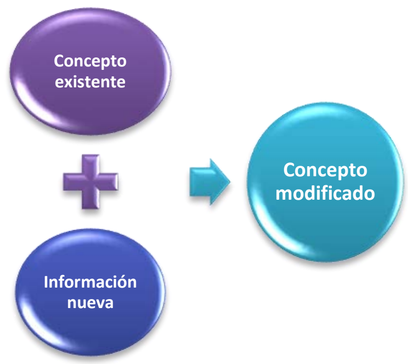
En cuanto a los conocimientos previos, el CCH (1996:17) los maneja en dos sentidos, primero "que muchos conceptos matemáticos se construyen a partir de conocimientos previos", y segundo "se requiere incluir en las asignaturas del Plan de estudios conceptos y procedimientos que son sustento indispensable de otros más especializados, tanto de la propia matemática como de otros campos del saber, de modo que el egresado del Colegio cuente con la preparación suficiente para tener éxito en sus estudios posteriores, cualesquiera que éstos sean". En esta última cita es posible observar que los nuevos conceptos servirán al estudiante en el futuro; es decir, que debe tenerse presente que la nueva información será, posteriormente, conocimiento previo.

En este sentido, en los estándares curriculares del NCTM (2000:22) se resalta que "un modo de adquirir nuevos conocimientos es a partir de experiencias y aprendizajes previos"; además, se señala que todos los alumnos de todas las edades poseen estas bases y que pueden provenir tanto de ideas desarrolladas en el aula, como de experiencias fuera de ella.

En el desarrollo del aprendizaje significativo, la nueva información se enlaza con la estructura cognoscitiva del sujeto; así, este enlace es un proceso dinámico, porque al llevarse a cabo tanto la información nueva como la existente se modifican de algún modo (Novak, 1978:17).

Ahora bien, el hablar de la estructura cognoscitiva no es referirse a conocimientos como un simple prerrequisito, sino que los conocimientos pertinentes existentes tienen una organización y jerarquía, además de que son pertinentes; es decir, son apropiados para que se pueda realizar una interacción con el nuevo o los nuevos conceptos que se desean construir.

El siguiente esquema muestra el proceso de integración en la estructura cognoscitiva; es decir, la relación de la nueva información con un concepto integrador pertinente.



Al concepto ya existente en la estructura cognoscitiva del aprendiz, Ausubel le llama Concepto Integrador.

En el caso del aprendizaje de tipo académico que se presenta en el aula, se puede decir que en este medio se propician las interacciones con expertos, otros menos expertos, así como con materiales y los propios conceptos, por lo que es pertinente introducir algunos conceptos del social-constructivismo de Vygotsky. Refrendando que, en este trabajo se utilizan aportes de Ausubel y de Vygotsky.

De acuerdo con Vygotsky, el contenido social en el aprendizaje es fundamental: "el desarrollo intelectual del individuo no puede entenderse como independiente del medio social en que está inmersa la persona" (citado en Gómez y Mejía, 1992:4).

Además, "la adquisición de significados y la interacción social son inseparables en la perspectiva de Vygotsky, teniendo en cuenta que los significados de los signos se construyen socialmente" (Moreira, 1996:8). Al ser construidos socialmente, los conceptos que se amplíen o modifiquen en la estructura del individuo de forma adecuada, son aceptados en la comunidad, por lo que en el futuro pudieran servir como conceptos integradores para temas nuevos.

Una consecuencia que tienen los expertos cuando trabajan con individuos menos expertos, es que aparece una diferencia de nivel en el aspecto cognoscitivo. Esta diferencia entre el nivel de lo que puede hacer un niño solo y lo que puede hacer con ayuda, *es la zona del desarrollo próximo*, que Vygotsky definía como:

> La distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz (Gómez y Mejía, 1992:7).

El NCTM (2000:22), en el principio de aprendizaje, también reconoce la importancia de las interacciones sociales y menciona que "interactuar con otros ofrece oportunidad para intercambiar ideas y reflexionar sobre ellas; por lo tanto, la comunicación es un elemento fundamental del aprendizaje de las matemáticas".

De acuerdo con Ausubel, alcanzar un aprendizaje significativo puede requerir de un tiempo considerable, coincidiendo con Vygotsky cuando señala que:

> Mediante el proceso de internalización el individuo se apropia de las herramientas culturales. La internalización consiste en la reconstrucción interna de una operación externa, proceso que se lleva a cabo mediante la siguiente serie de transformaciones:
>
> Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente.
>
> Un proceso interpersonal que queda transformado en otro intrapersonal.
>
> La transformación de un proceso interpersonal en uno intrapersonal es el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos. El proceso, aun siendo transformado, continúa existiendo y cambia como una forma de actividad durante cierto tiempo antes de internalizarse definitivamente (Gómez *et al.*, 1992:5-6).

Los mapas conceptuales

Con anterioridad nos referimos a los conceptos y a su construcción desde el punto de vista lógico y psicológico. Ahora bien, un tipo de conocimiento particularmente importante es el que se establece cuando se relacionan dos o más conceptos; a este tipo de conocimiento se le llama proposicional y a su formulación se le conoce como proposición. Por el momento, nos interesa el concepto de proposición que plantea la lógica formal.

En lógica, una proposición es todo aquello de lo cual podamos decir que es verdadero o falso (Cohen y Nagel, 1973). Hay muchas formas gramaticales para expresar una proposición, pero aquí sólo trataremos de las que se obtienen cuando se establece algún tipo de relación entre dos conceptos, formando una unidad semántica.

Los mapas conceptuales son representaciones gráficas formadas por dos o más puntos unidos entre sí mediante segmentos de líneas, y su objetivo es representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Los puntos o nodos representan conceptos y sobre la línea se anota el término gramatical que relaciona a los dos conceptos. La situación o posición de los puntos debe reflejar la jerarquía lógica en que se encuentran los conceptos; si se pudieran situar los puntos o nodos sobre diferentes líneas paralelas horizontales, los que se encuentren en niveles superiores son los que tienen una jerarquía lógica mayor. Es posible representar relaciones entre conceptos sin retener o mostrar su jerarquía lógica, pero entonces se tendría una representación que se denomina red conceptual: que solamente hace visible a los conceptos y sus relaciones, aunque no su jerarquía lógica. Sin embargo, como es posible tener todo un conjunto de proposiciones, relativas a un mismo tema y con numerosos conceptos relacionados entre sí, se puede representar gráficamente a toda la estructura proposicional que se da entre las diferentes proposiciones entre sí.

Por lo tanto, los mapas conceptuales:

- Ayudan a centrar la atención, tanto del profesor como del alumno, sobre las ideas principales en que deben concentrarse durante las tareas de aprendizaje.
- Muestran caminos que se pueden seguir para conectar los significados de los conceptos de manera que resulten proposiciones.
- Proporcionan un resumen esquemático de lo que se ha aprendido.

Puesto que se produce más fácilmente un aprendizaje significativo cuando los nuevos conceptos o significados conceptuales se engloban bajo otros más amplios e inclusivos, los mapas conceptuales deben ser jerárquicos; es decir, los conceptos generales e inclusivos se deben colocar en la parte superior del mapa y, de forma progresiva, en la parte inferior los conceptos más específicos y menos inclusivos. Además, las relaciones subordinadas o superordinadas pueden cambiar en diferentes segmentos de aprendizaje, así como el mismo conjunto de conceptos puede representarse mediante dos o más jerarquías válidas.

Algunas dificultades que enfrentan los alumnos de secundaria y bachillerato en el aprendizaje del tema de las ecuaciones lineales

El desarrollo de la Matemática y del Álgebra no ha sido rápido. Para llegar a su estado actual, desde las ideas que el hombre primitivo utilizaba para resolver situaciones que se le presentaban en su entorno hasta la utilización de un lenguaje para representar ecuaciones y el descubrimiento de algoritmos para su resolución, transcurrieron casi 1500 años. Los periodos en que este proceso se divide, según Nesselmans (citado por Malissani, 1990:4), son:

1. **FASE RETÓRICA**: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d. C.), en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo ni abreviatura.
2. **FASE SINCOPADA**: desde Diofanto hasta finales del Siglo XVI, en la que se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural.
3. **FASE SIMBÓLICA**: introducida por Viète (1540-1603), en la cual se usan letras para todas las cantidades y todos los signos para representar las operaciones, se usa el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino para demostrar reglas generales.

Hubo muchas contribuciones para alcanzar la simbología que utilizamos hoy en día, pero es conveniente destacar que "el matemático inglés Robert Recorde inventó el símbolo = para la igualdad, en uso desde entonces. Decía que él no podía pensar en dos cosas que fueran más iguales que dos líneas paralelas de la misma longitud" (Stewart, 2012:73). En consecuencia, pareciera que al ser humano, de manera particular, le lleva un tiempo considerable pasar del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

A continuación se aborda la cuestión de dos fuentes de dificultad que enfrentan los alumnos de bachillerato y de secundaria en el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales, y que son resultado de la investigación en Educación Matemática. Tales fuentes son: las propias de la complejidad del objeto de estudio y las relacionadas con el proceso de enseñanza.

Complejidad del objeto de estudio

En este apartado nos referimos a los distintos significados y usos que le dan los estudiantes al signo igual, este problema lo han abordado autores como Kieran (1981:317), quien dice:

> Gattegno (1974) [...] la igualdad tiene que ver con una relación más amplia [...] el símbolo que se utiliza para mostrar la equivalencia, el signo Igual, que no siempre es interpretado en términos de equivalencia por parte del alumno [...] una Interpretación de equivalencia del signo igual no es aprendida rápidamente por muchos estudiantes.

Por otro lado, Palarea (1999:9) explica:

> En el caso del signo igual (=) [...] En aritmética es usado como para conectar un problema con su resultado numérico; se utiliza casi siempre con carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado. Los alumnos trasladan a veces, este significado del signo "=" al álgebra y lo confunden con el signo (=) de la ecuación.

El concepto del igual en algebra se manifiesta en el de ecuación, por lo tanto, al tener el uso y significado que el alumno le daba en aritmética se convierte en una dificultad en el tratamiento que a éste se le da en la resolución de la ecuación.

Otra interpretación, en relación con la igualdad, la proporcionan Panizza, Sessa y Sadovsky (1999:3):

> Los alumnos piensan que lo que está a cada lado del signo igual en una ecuación es una cuenta indicada cuyo resultado *debe* tener algún significado. El igual es, en muchos casos, un *signo* de escritura para separar dos informaciones o cantidades, como una coma.

El signo igual (=) no es el único concepto que puede tener distintos significados y usos, las letras, que son propias del álgebra también presentan esta característica. Este fenómeno lo han investigado distintos especialistas, como Kieran (1989:231), una de las autoridades en este tema, quien expresa lo siguiente:

> La experiencia de los niños en la escuela elemental con las letras en ecuaciones se reduce a menudo a fórmulas [...] La primera supone reemplazar b y h por valores diferentes para encontrar el área de rectángulos dados; la segunda regla se usa para encontrar […] el número de milímetros a que corresponde 5 centímetros. Este segundo uso de las letras como etiquetas es el que interfiere a menudo con la forma como los estudiantes llegan a entender el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas.

Por otro lado, Kücheman (citado por Palarea, 1999:8) identifica seis categorías en el uso de las mismas letras: *1)* evaluada; *2)* ignorada, no utilizada; *3)* como objeto; *4)* como incógnita específica; *5)* como número generalizado, y *6)* como variable.

La enseñanza de las matemáticas

Al ser la enseñanza un proceso, junto con el aprendizaje, debe darse una coherencia entre lo que se espera que el alumno aprenda o desarrolle, con lo que el docente considera en sus planificaciones de la enseñanza y lo que realiza en el aula.

Entonces, la enseñanza tiene que considerar al sistema que se forma en el aula, compuesto por los siguientes elementos:

- El alumno.
- El Profesor.
- El Contenido (que para este trabajo contempla: temática, actitudes y valores).
- El proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por lo anterior, resulta importante especificar lo que en el CCH se plantea en cuanto al papel del alumno y del profesor en este proceso.

La concepción del alumno para el CCH

El alumno, para el bachillerato en el CCH, es

> Sujeto de la cultura y no su mero receptor ni destinatario, por lo que éste no sólo debe comprender los conocimientos que se le ofrecen en la enseñanza, sino también juzgarlos, relacionarlos con su propia experiencia y realidad, adaptarlos, asimilarlos, crítica y personalmente [...] deberá saber y saber hacer, es decir, unirá conocimientos al dominio inicial de metodologías, procedimientos de trabajo intelectual, prácticas, tecnologías en un nivel general y técnicas (CCH, 1996:38).
>
> Pone el acento en el trabajo intelectual del alumno y excluye concebirlo como repetidor del saber del profesor, con quien comparte, en cierta igualdad radical, la posibilidad de conocer, juzgar, opinar y fundar intelectualmente (CCH, 1996:36).
>
> El alumno, por su parte, deberá ciertamente por su cuenta continuar el ejercicio de los mismos procedimientos y habilidades y afrontar los procesos de indagación sistemática para la adquisición de información [...] Así su trabajo personal en el número de horas que sea necesario, no deja de ser sustancial y fuente de autoformación y autonomía progresivas (CCH, 1996:41).

El profesor en el CCH

En el CCH (1996:6): "El papel del profesor [es el de] facilitador o auxiliar del proceso de aprendizaje y no como repetidor o mero instructor".

El profesor debe cumplir el papel de:

> Guía del aprendizaje, es decir, responsable de proponer a los alumnos las experiencias de aprendizaje que le permitan, a través de la información y la reflexión rigurosa y sistemática, no sólo adquirir nuevos conocimientos, sino tomar conciencia creciente de cómo proceder para continuar por su cuenta esta actividad (CCH, 1996:40-41).

Según el Plan de estudios (CCH, 1996:41), el profesor debe “ofrecer a sus alumnos una más amplia ejercitación, individual y en equipos, en las habilidades y procedimientos propuestos, supervisar su trabajo y revisar sus resultados”.

De esta manera, las concepciones que el CCH plantea sobre el alumno y el profesor pueden orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje, de tal forma que se desarrollen interacciones y formas de trabajo que sean acordes con lo que la institución espera para que ambos lleven a cabo sus papeles adecuadamente y se fomente el aprendizaje significativo.

Orientaciones en cuanto a la enseñanza de las Matemáticas en el CCH

Al igual que en otros aspectos, el CCH brinda orientaciones para la enseñanza de las Matemáticas. Primero establece que el alumno valore las matemáticas –como herramienta y como ciencia– y, segundo, que el contenido se aborde de manera que no esté fragmentado y desintegrado. Para lograrlo, se plantea que la enseñanza considere los siguientes aspectos:

- Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no conlleven de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o en las características y propiedades que se van estudiar.
- Propiciar que el alumno adquiera paulatinamente la habilidad de analizar enunciados y problemas y que, con el tiempo, sea capaz de hacerlo de manera independiente.
- Proporcionar diversas actividades, con la intención de presentar oportunidades para que el alumno avance en su desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y entienda su mecánica a partir de ideas o estrategias unificadoras.
- Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos tratando, en lo posible, de que surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se consoliden con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos.
- Propiciar sistemáticamente el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática como entre éstas y la expresión verbal.
- Resaltar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos o ramas de la Matemática.
- Fomentar el trabajo en equipo para: la exploración de características, relaciones y propiedades de conceptos y de procedimientos; lograr una discusión razonada,

respetuosa y tolerante, así como la comunicación oral y escrita de las observaciones o los resultados encontrados (CCH, 2006:18).

- Propiciar tareas vinculadas a características de la propia Matemática: identificación de similitudes y diferencias; reconocimiento de patrones de comportamiento; resolución de problemas, y construcción de procedimientos y algoritmos, ya que todo esto fomenta el desarrollo de habilidades (CCH, 2006:19).
- En el Plan de estudios de 1996 se sugiere al profesor, de manera particular, considerar la resolución de problemas, porque se considera que "aun en sus interpretaciones más modestas, puede contribuir a reafirmar temáticas, construir nuevos conocimientos, aplicar y combinar otros e ilustrar diferentes formas de proceder matemático, haciendo más asequible y atractivo para los estudiantes el campo de las matemáticas" (CCH, 1996:59).
- Abordar los temas de manera que no parezcan aislados de otros contenidos, que en una forma modesta, al menos el alumno esté consciente de que están relacionados con otras disciplinas y otros contenidos de la misma disciplina.

Aunado a esto, veamos lo que plantea el NCTM (2000:17) en sus Estándares Curriculares y de Evaluación, y así podemos comprobar la actualidad de las propuestas del CCH:

> Los estudiantes aprenden matemáticas a través de las experiencias que les proporcionen sus profesores.

Por lo que el NCTM pondera aspectos como los que se enlistan en seguida, y que los profesores deben procurar:

- Conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñen.
- Tener conocimientos pedagógicos que los ayuden a comprender de qué manera aprenden matemáticas los alumnos.
- Conocer las diferentes representaciones de un concepto, la fuerza y debilidad de cada una y cómo se relacionan entre sí.
- Necesitan conocer, además, qué ideas representan dificultad frecuentemente a los alumnos y las formas en que pueden ayudar a superar sus concepciones erróneas más comunes.

- Deben saber hacer preguntas y planificar lecciones que manifiesten los conocimientos previos y, luego puedan diseñar experiencias y lecciones que respondan a este conocimiento y se basen en él.
- Reconocer que las decisiones que tomen pueden determinar la disposición de los alumnos hacia las matemáticas y crear entornos que enriquezcan el aprendizaje.
- Favorecer y alimentar un ambiente propicio para aprender.
- Sus acciones deberían animar al alumno a pensar, preguntar, resolver problemas y discutir sus ideas, estrategias y soluciones. Son responsables de crear un ambiente intelectual en el que la norma sea un pensamiento matemático serio.
- Más que el escenario físico, el ambiente de clase comunica mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de las matemáticas.
- "Si se quiere que los estudiantes aprendan a formular conjeturas, experimenten diversos enfoques para resolver problemas, construyan argumentos matemáticos y respondan a los argumentos de los compañeros, es esencial crear un entorno que favorezca esta clase de actividades" (NCTM, 2000:19).
- "Una enseñanza eficaz exige observar a los estudiantes, escuchar con detención sus ideas y explicaciones, tener objetivos matemáticos y utilizar la información para tomar decisiones. Emplear tales prácticas motiva a los alumnos a comprometerse a pensar y razonar matemáticamente, y proporciona oportunidades de aprendizaje que los estimula a cualquier nivel de comprensión" (NCTM, 2000:19).
- "Para mejorar su labor, los profesores tienen que ser capaces de analizar lo que ellos y sus alumnos hacen, y cómo afectan estas actuaciones al aprendizaje. Mediante una variedad de estrategias, deberían comprobar la capacidad de inclinación de los alumnos para analizar situaciones, elaborar y resolver problemas, y dar sentido a los conceptos y procedimientos matemáticos" (NCTM, 2000:20).

Aspectos relacionados con el proceso de enseñanza de las ecuaciones lineales

El concepto de ecuación en algunos libros de texto

En muchos libros de texto dedicados al álgebra, cuando se habla de ecuación se presenta la definición, las partes que la conforman y se exponen procedimientos (resolución y comprobación). Aquí se muestran las definiciones de algunos autores, para dar una idea de qué se ofrece a la enseñanza.

Para Baldor (1983:122), la “ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas”.

En Borel (1996:88) “se llama ecuación a una igualdad que contiene una o varias letras llamadas incógnitas o variables; en general esta igualdad se verifica solamente cuando estas letras toman ciertos valores”.

Mientras que para Barnett (1995:80), “una ecuación es una igualdad en la que las letras (desconocidas o incógnitas) solo poseen determinados valores. Una ecuación es una igualdad condicionada”.

En estas definiciones para ecuación se nota una clara similitud en los tres autores, porque tienen en cuenta que:

- La ecuación es una igualdad.
- Contiene cantidades desconocidas (incógnitas) y que éstas son letras.
- Se verifica o es verdadera para ciertos valores de la incógnita.

Pero hay otros autores que proponen definiciones que difieren de las anteriores en la forma de presentarla, aunque quizás no de fondo:

Según Angel (2004:69), “una ecuación es una proposición matemática de igualdad. *Las ecuaciones deben contener un signo de igual y* una expresión matemática a cada lado del mismo”.

En cambio para Fehr (1962) “una ecuación es una afirmación de que dos expresiones numéricas son iguales”.

Estas afirmaciones parecieran tener alcance a otras ecuaciones, es decir, a parte de las algebraicas.

El libro de Rees y Sparks (1998:52) contiene una explicación para la ecuación que textualmente dice:

> **UNA PROPOSICIÓN DEL TIPO**
>
> $5x - 6 = 2x + 1$
>
> Se llama ecuación. La ecuación se caracteriza por contener algunos números de valor conocido y otros de valor desconocido. Unos y otros se relacionan entre sí de acuerdo con los signos de las

> operaciones matemáticas. Dicho de otro modo, una *ecuación* es la proposición de que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones se llaman *miembros* de la ecuación. El miembro que aparece a la izquierda del signo de igualdad se llama *primer miembro* y el que aparece a la derecha del signo de igualdad se llama *segundo miembro.*

Esta expresión dice mucho de una ecuación, además de lo que afirman los autores mencionados, por lo que ahora se agrega que:

- Contiene números conocidos y números desconocidos.
- Dichos números se encuentran relacionados entre sí con los signos de las operaciones matemáticas.

Estos dos últimos puntos sobresalen, porque ayudan a describir de mejor manera qué es una ecuación.

Respecto a las partes que conforman una ecuación, Baldor (1983), Rees y Sparks (1998), Borel (1996), Gelfand y Shen (2011), Barnett (1995), y Wentworth y Smith (1943), especifican de manera general que el primer miembro de la ecuación es la expresión que está al lado izquierdo de la igualdad y el segundo miembro corresponde a la expresión del lado derecho.

En cuanto al concepto de término, dos de los libros consultados dedican un espacio para definirlo justamente en el apartado de ecuación; el primero, de Baldor (1983:123), dice: "términos son cada una de las cantidades que están conectadas por el signo de + o -, o la cantidad que está sola en un miembro de la ecuación"; por su parte, Angel (2004:68) lo expresa como "las partes que se suman o se restan en una expresión son los términos", y también define un término semejante de la siguiente manera "son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes".

Cabe aclarar que sólo se especifican algunos conceptos, como miembros de la ecuación y términos que se mencionan, y que los autores citados los definen precisamente en el tema de ecuación, pero ello no significa que otros no los definan a lo largo de sus libros, que no los mencionen ni utilicen.

Algunos autores especifican algunos tipos de ecuaciones, como las siguientes:

En Baldor (1983), y Wentworth y Smith (1943), la ecuación numérica es aquella que no tiene más letras que la(s) incógnita(s), y Barnett (1995) le llama ecuación de primer grado con una incógnita.

La ecuación literal –según Baldor (1983); Wentworth y Smith (1943); Barnett (1995), y Lovaglia, Elmore y Conway (1972)–, además de la(s) incógnita(s), contiene otras letras que se consideran cantidades conocidas. Zubieta (s/f: 67) les llama "ecuaciones con varias letras". Por su parte, Barnett (1995:88) afirma "que todas las fórmulas son ecuaciones", coincidiendo en este punto con Wentworth y Smith (1943), y Fehr y otros (1962).

Una ecuación es considerada entera por Baldor (1983) cuando ninguno de sus términos tiene denominador, mientras que la ecuación fraccionaria es cuando alguno o todos los términos tienen denominador. Otros autores no hablan de ecuaciones enteras y para las que Baldor llama fraccionarias, se refieren a ecuaciones con fracciones.

Varios autores, entre ellos Baldor (1983), Gelfand (2011), Zubieta (s/f), Sparks y Rees (1998) y Angel (2004), definen así las ecuaciones equivalentes: dos o más ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo, Sparks (1998:54) especifica: "si en una ecuación no hay fracciones en cuyos denominadores aparezca la incógnita y si ésta es de primer grado, la ecuación se llama ecuación de primer grado".

Manejo del concepto de solución de la ecuación

Cuando se tiene una ecuación, la finalidad es hallar su solución, por lo que es importante indagar cómo se define en algunos libros.

En Baldor (1983:124), este concepto se expresa como las "raíces o soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad".

Para Gelfand y Shen (2011:95), "la solución de una ecuación: es un conjunto de valores de la incógnita para los que el lado izquierdo es igual al lado derecho (a veces soluciones se denominan raíces cuando se habla de una ecuación con una sola incógnita)".

Y según Angel (2004), "los números que hacen que una ecuación sea una proposición verdadera, se llaman **soluciones** o raíces de la ecuación. El **conjunto solución** de una ecuación es el conjunto de números reales que hacen que la ecuación sea verdadera".

Los autores antes citados coinciden en sus definiciones para la solución de una ecuación, y los demás autores consultados expresan, con más o menos palabras, el mismo significado. Se pueden encontrar proposiciones similares en Rees y Sparks (1998), Borel (1996), Barnett (1995), Fehr (1962), Wentworth y Smith (1943), y Zubieta (s/f). Cabe señalar que la mayoría de libros consultados dedican parte de sus contenidos a definir este concepto.

Resolución de una ecuación

En este apartado se presenta lo que escriben algunos autores, sobre lo que debe entenderse por resolución de una ecuación, no de métodos de resolución (esto último se trata más adelante).

Zubieta (s/f:64), primero define qué es resolver una ecuación como "encontrar sus raíces, o sea: los valores de la incógnita que la verifican", y luego:

> La resolución de una ecuación es un proceso que consiste en transformarla sucesivamente en otras ecuaciones equivalentes, hasta dejar la incógnita despejada (sola en un miembro de la ecuación; su valor en el otro miembro). En este proceso intervienen las propiedades de la igualdad, también las operaciones del álgebra y sus propiedades.

Por su parte, Wentworth y Smith (1943) determinan: "llámese *resolución* de una ecuación el procedimiento por el cual se halla el valor de la incógnita. *Resolver* una ecuación o *despejar la incógnita,* es aplicar este procedimiento".

Para Baldor (1983:124), resolver una ecuación "es hallar sus raíces, o sea, el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación"; esta misma idea se encuentra en Lovaglia et al. (1972).

En Rees y Sparks (1998), se define que "el procedimiento para obtener las raíces se llama resolución de la ecuación".

Mientras que Gelfand y Shen (2011) dicen que resolver una ecuación es encontrar valores de la(s) variable(s) para el (los) cual(es) el lado izquierdo de la igualdad es igual al lado derecho.

En relación con este concepto se puede observar que no todos los autores lo definen. Algunos mencionan resolver y otros, como Wentworth y Smith, y Zubieta, diferencian entre resolver y resolución. **Resolver** como la acción de encontrar, hallar o despejar el valor de la incógnita, y **resolución** como el proceso o procedimiento que se lleva a cabo para tal objetivo.

Sobre la comprobación o verificación de una ecuación

Respecto a este procedimiento, en algunos libros no se explicita, pero sí se utiliza; así, algunos autores que le dedican un espacio definen la comprobación o verificación de la siguiente manera:

En Baldor (1983:127), este proceso recibe el nombre de verificación y expone que "la verificación es la prueba de que el valor obtenido para la incógnita es correcto. La verificación se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad".

Para Barnett (1995:54), "*comprobar una ecuación* es el proceso seguido sustituyendo un valor particular de la incógnita y determinando si son o no iguales los dos miembros de la misma".

Luego, Fehr y otros (1962:54) explican que "para verificar la solución de una ecuación se sustituye el valor encontrado de la incógnita y se simplifica hasta asegurarnos de que los dos miembros tienen valores idénticos".

Y en Lovaglia et al. (1972:129), "la comprobación es una manera de ver que cada elemento del conjunto solución hace que el lado izquierdo de la ecuación sea el mismo número real que el lado derecho".

Métodos de resolución de ecuaciones lineales expuestos en diferentes libros

Los tipos de resolución que se encuentran en los libros texto consultados van por dos vías:

- Por transposición de términos.
- Utilizando propiedades de la igualdad.

En el libro *Álgebra*, de Baldor (1983:124), se escribe, antes de exponer la transposición de términos: "AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES: Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales".

Y enumera de la siguiente manera las reglas que se derivan del axioma:

1) Si a dos miembros de una ecuación se suma la misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
2) Si a dos miembros de una ecuación se resta la misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
3) Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
4) Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
5) Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o si a los dos se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste (Baldor, 1983:125).

Este mismo autor define la transposición de términos como "cambiar los términos de un miembro a otro", y agrega la siguiente regla "**cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo**" (Baldor, 1983:125).

Zubieta (s/f) menciona que las ecuaciones se pueden resolver usando sólo las cuatro operaciones fundamentales del álgebra y retoma las cuatro primeras reglas que menciona Baldor, pero especificando para las reglas que involucran multiplicación y división, que el número que se utilizará para dividir ambos miembros de la ecuación, deben ser distintos de cero, porque ello a nada conduce y carece de sentido. Posteriormente hace la siguiente precisión:

> Se *infiere que no cambian las raíces de una ecuación si aplicamos la regla siguiente:*
> Si los miembros de una ecuación son sumas, *sus términos pueden pasar de un miembro al otro con signo contrario* (Zubieta, s/f:66).

En Barnett (1995:29) se mencionan las primeras cuatro reglas como en Baldor, pero el autor les llama **Leyes de monotonía**, y resume: "toda igualdad se conserva siempre que se realice la misma operación y con los mismos números en ambos miembros de la misma, exceptuando la división por cero, que carece de sentido", y añade que "para comprender estas leyes de monotonía es necesario pensar en la *igualdad* como *una balanza en equilibrio*".

A su vez, expone la resolución utilizando operaciones inversas (esto para ecuaciones que involucran sólo una operación sobre la incógnita) y precisa que la adición y la sustracción son operaciones inversas, al igual que la multiplicación con la división. El autor también habla de la resolución por transposición y le llama "**propiedad de transposición**" y que "para transponer un término de un miembro a otro de una ecuación cambiar su signo" (Barnett (1995:83), y continúa diciendo que "la regla de transposición se basa en el hecho de que un término puede ser eliminado de un [término] si se suma su opuesto al otro miembro".

Por otro lado, Fehr y otros, en su libro *Álgebra. Curso 1*, al igual que Barnett y Zubieta, exponen las cuatro reglas que aquí referimos como las primeras cuatro de Baldor, sólo que las denominan "Principios de ecuaciones".

A diferencia de estos autores, Wentworth y Smith (1943:26), proporcionan cuatro axiomas:

> 1. *Si a cantidades iguales se agregan o quitan cantidades iguales, los resultados son iguales.*
> 2. *Si cantidades iguales se multiplican o se dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales.*
> 3. *Si los dos miembros de una ecuación son elevados a una misma potencia, o si a ambos se les extrae una misma raíz, los resultados son iguales.*
> 4. *Dos cantidades iguales a una tercera lo son entre sí.*

Como se ha revisado, Baldor presenta cinco reglas que cubren seis operaciones fundamentales: suma; resta, multiplicación, división, potencia y raíz. Pero Wentworth y Smith las agrupan en tres axiomas, cada uno para una operación y su operación inversa, además de que agregan la propiedad de transitividad de los números. Y para ellos la transposición "equivale a pasar un término de un miembro al otro de la ecuación, cambiando su signo".

Lovaglia, Elmore y Conway (1972:29), en su libro *Álgebra*, afirman que:

> Los postulados de la igualdad juegan un papel importante en la solución de ecuaciones. Mediante su uso estamos capacitados para aislar la variable en un lado de la ecuación. Pueden ser necesarios muchos pasos, cada uno de los cuales produce una ecuación diferente de las previas, por el uso de un postulado o un teorema. Si dichos pasos son reversibles, entonces las ecuaciones son equivalentes y, por tanto, sus conjuntos de verdad son los mismos.

Aunque los autores no menciona la transposición de términos.

Rees y Sparks (1998:54) en su explicación para la resolución de ecuaciones, se centran en el concepto de ecuación equivalente, y determinan sus reglas de la siguiente manera:

1. Si se agrega la misma cantidad a cada miembro de una ecuación, la ecuación resultante es equivalente a la primera.
2. Si se multiplica o se divide cada miembro de una ecuación por una misma constante diferente de cero, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.
3. Luego la trasposición de términos para los autores es "transponer de un miembro a otro de una ecuación, con tal de que se cambie el signo de cada término transpuesto.*

Y aclaran que:

> *Es importante recordar que la transposición es, por decirlo así, un atajo en las operaciones algebraicas. Por ello, efectuarla de una manera demasiado mecánica puede conducir a errores serios. Cuando ese sea el caso, el lector deberá resolver nuevamente todo el problema sin omitir ninguno de sus pasos con el fin de localizar la fuente de error.

Por último, nos referimos al libro de *Álgebra intermedia*, de Angel (2004), donde se presentan las propiedades de la igualdad como base principal parara resolver ecuaciones, y se expone que con una combinación de propiedades se pueden generar diferentes ecuaciones equivalentes más simples que la original, hasta aislar la variable o despejarla. Además, proporciona las siguientes propiedades:

Tabla 1. Propiedades de la igualdad según Angel (2004:67).

Para todos los números reales $a, b, y\ c$:	
1. $a = a$	**Propiedad reflexiva**
2. Si $a = b$, entonces $b = a$	**Propiedad simétrica**
3. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$	**Propiedad transitiva**

Propiedad de la suma de la igualdad

Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ para cualesquiera $a, b, y\ c$

Angel (2004:70) explica esta propiedad resaltando que al sumar el mismo número en ambos miembros de la ecuación, no se altera la solución de la ecuación original, y señala que esta propiedad "también nos permite restar el mismo número en ambos lados de la ecuación".

Propiedad de la multiplicación de la igualdad

Si $a = b$ entonces $a \bullet c = b \bullet c$ para cualesquiera $a, b, y\ c$. (Angel, 2004:70).

La explicación para esta propiedad es que se puede multiplicar por un mismo número a ambos lados de la ecuación y la solución no se altera, añadiendo que "la propiedad de multiplicación de la igualdad también nos permite dividir ambos lados de una ecuación entre el mismo número distinto de cero" (Angel, 2004:70).

En el libro de texto de Angel, antes de entrar de lleno a la resolución de ecuaciones se presenta un apartado de reducción de términos semejantes, que incluye la explicación y algunos ejemplos.

A continuación se presenta lo que algunos autores han denominado *Reglas para resolver ecuaciones*.

1) Sea la ecuación $5x = 2a - b$.
Sumando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste **(Regla 1)**, y tendremos:

$$5x + b = 2a - b + b$$

Y como $-b + b = 0$, queda:

$$5x + b = 2a$$

Donde vemos que $-b$, que estaba en el segundo miembro de la ecuación dada, ha pasado al segundo miembro con signo +.

El siguiente ejercicio es al que llama (1) de la primera sección de ejemplos (Zubieta, s/f, p. 127)
(1) Resolver la ecuación $3x - 5 = x + 3$

Pasando x al primer miembro y -5 al segundo, cambiándoles los signos, tenemos: $3x - x = 3 + 5$

Reduciendo términos semejantes:

$$2x = 8$$

Despejando x, para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación por 2, tenemos:
$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$, simplificando $x = 4$ **R**.

Zubieta (s/f) menciona que las ecuaciones se pueden resolver usando sólo las cuatro operaciones fundamentales del álgebra y alude a las cuatro primeras reglas que expresa Baldor, además de que especifica, para la reglas que involucran multiplicación y división, que el número que se utilizará para dividir ambos miembros de la ecuación deben ser distintos de cero, porque ello a nada conduce y carece de sentido. En su libro *Álgebra elemental* (s/f:65), los dos primeros ejemplos se exponen de la siguiente manera:

Ejemplo. Resolver la ecuación $\frac{m}{2} - 5 = 3$
Sumando 5 a los dos miembros, obtenemos:
$\left(\frac{m}{2} - 5\right) + 5 = 3 + 5$; suma $\frac{m}{2} = 8$
Multiplicando ahora por 2 ambos miembros

$$\frac{m}{2} \times 2 = 8 \times 2 \therefore \quad m = 16$$

Si incluye comprobación.

Ejemplo. Resolver $2x + 7 = 15$
Sumando -7 (es decir, restando 7) a los dos miembros se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2x - 7 = 15 \\ -7 = -7 \\ \hline suma \;\; 2x = 8 \end{array}$$

Dividiendo ahora entre 2 (es decir, multiplicando por ½) ambos miembros se obtiene:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$\therefore \quad b = 3 \quad (comprobar)$$

Algunas dificultades que enfrentan los alumnos de bachillerato y de secundaria, en el aprendizaje del tema de las ecuaciones lineales relacionadas con el proceso de enseñanza

Las dificultades se refieren al tipo de enseñanza que siguen los docentes debido, quizás, a sus concepciones. Dicho así es muy general. Para comprender algo sobre las concepciones del profesor de matemáticas, en este trabajo se considera la propuesta de García, Azcárate y Moreno (2006), para quienes “las concepciones consisten en la estructura que cada profesor da a sus conocimientos, para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes”.

Además, estos autores añaden que las características de dichas concepciones forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento.

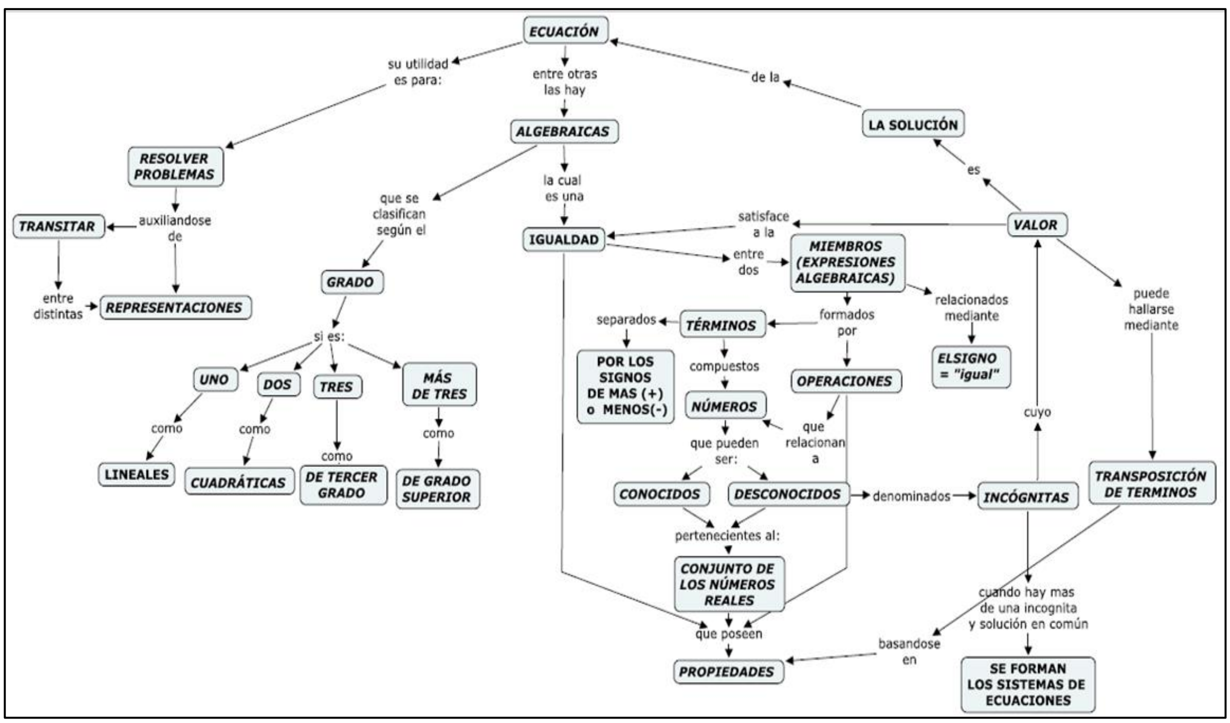
Sin duda, al ser el docente quien diseña y pone en práctica la enseñanza, plasmará sus concepciones en la práctica. Por lo tanto, puede ser fuente de dificultades que repercutan en el aprendizaje; aunque esto no puede tomarse como una generalidad, porque tal vez haya concepciones que se plasmen para beneficio del aprendizaje. Así que, con cautela, es posible decir que, dependiendo del tipo de concepciones del profesor, será su influencia.

Hay otras fuentes de dificultades que sólo mencionamos: las asociadas a los procesos de pensamiento matemático y desarrollo cognitivo (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Socas y Palarea, 1989), así como las que se originan en las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Socas y Palarea, 1989).

El tema de las Ecuaciones lineales en este trabajo

En este apartado se presenta un breve resumen de la ecuación lineal y algunos conceptos relacionados con ésta, así como algunas propiedades referentes a los números, las operaciones y la igualdad, que son las propiedades algebraicas que rigen la manipulación de los símbolos en la ecuación lineal. Básicamente son los conceptos que se espera el alumno llegue a conocer de manera significativa y se tomaron de diferentes libros consultados.

La siguiente figura muestra conceptos relacionados con la Ecuación y sus relaciones, que guiaron el presente trabajo.



Red conceptual (versión corta), creación propia.

Concepto de ecuación

Una *ecuación* es la proposición de que dos expresiones son iguales. Se caracteriza por contener algunos números de valor conocido y otros de valor desconocido. Unos y otros se relacionan entre sí de acuerdo con los signos de las operaciones matemáticas. Las dos expresiones se llaman *miembros* de la ecuación, y el que aparece a la izquierda del signo de igualdad se llama *primer miembro*, y el que aparece a la derecha del signo de igualdad se llama *segundo miembro* (Rees y Sparks, 1998:52).

Incógnita

La incógnita es la cantidad desconocida contenida en una ecuación; además, las incógnitas se representan, en general, con las últimas letras del alfabeto (Baldor, 1983).

Miembros de la ecuación

De manera general, el primer miembro de la ecuación es la expresión al lado izquierdo de la igualdad y el segundo miembro corresponde a la expresión del lado derecho de la igualdad (Baldor, 1983; Rees y Sparks, 1998; Borel, 1996; Gelfand y Shen, 2011; Barnett, 1995; Wentworth y Smith, 1943).

Solución de una ecuación

Las raíces o soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que la verifican o satisfacen, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad (Baldor, 1983:124).

Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación es:

> Encontrar sus raíces, o sea: los valores de la incógnita que la verifican [y] la resolución de una ecuación es un proceso que consiste en transformarla sucesivamente en otras ecuaciones equivalentes, hasta dejar la incógnita despejada (sola en un miembro de la ecuación; su valor en el otro miembro). En este proceso intervienen las propiedades de la igualdad, también las operaciones del álgebra y sus propiedades (Zubieta, s/f:64).

Comprobación o verificación de la solución de una ecuación

La verificación o comprobación es la prueba de que el valor obtenido para la incógnita es correcto. La comprobación se realiza sustituyendo la incógnita por el valor obtenido en los dos miembros de la ecuación dada y, si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad (Baldor, 1983).

Métodos de resolución de una ecuación lineal

I) **Con operaciones en ambos lados de la igualdad (con base en propiedades)**

Por último, nos referimos al libro de *Álgebra intermedia*, de Angel (2004), donde se presentan las propiedades de la igualdad como base principal para resolver ecuaciones. El autor expone que con una combinación de propiedades, mismas que se incluyen en el resumen de conceptos relacionados con la ecuación, se pueden generar diferentes ecuaciones equivalentes más simples que la original, hasta aislar la variable o despejarla.

II) **Transposición de términos**

Para Rees y Sparks (1998:54) la trasposición de términos es "transponer de un miembro a otro de una ecuación, con tal de que se cambie el signo de cada término transpuesto", y aclaran que:

> Es importante recordar que la transposición es, por decirlo así, un atajo en las operaciones algebraicas. Por ello, efectuarla de una manera demasiado mecánica, puede conducir a errores serios. Cuando ese sea el caso, el lector deberá resolver nuevamente todo el problema sin omitir ninguno de sus pasos a fin de localizar la fuente de error.

Propiedades a utilizar para la resolución de ecuaciones lineales

A continuación se enuncian las propiedades de los números reales que se utilizan para resolver ecuaciones de primer grado.

I) PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

a) Existencia del Neutro Aditivo:
El cero es el elemento idéntico de la suma
(para cada número real $x,\ x + 0 = x \ \ y \ \ 0 + x = x$)

b) Existencia del Neutro Multiplicativo
El uno es el elemento idéntico de la multiplicación
(para cada número real $x,\ x \cdot 1 = x \ \ y \ \ 1 \cdot x = x$)

c) Existencia del Inverso Aditivo
Para cada número real x, existe un número real $-x$, llamado inverso aditivo de x, tal que:

$$x + (-x) = 0 \ \ y \ \ (-x) + x = 0$$

d) Existencia del Inverso Multiplicativo
Para cada número real x, excepto 0, existe un número real x', llamado inverso multiplicativo de x o recíproco de x, tal que:

$$x \bullet x' = 1 \ y \ x' \bullet x = 1$$

Nota: $\boldsymbol{x' = \frac{1}{x}}$
Con lo que se prueba que:

$$x \bullet \frac{1}{x} = \frac{x \bullet 1}{1 \bullet x}; \ \frac{x}{x} = 1$$

II) PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

a) Propiedad conmutativa de la suma:
para cada par de números $\boldsymbol{x, y \in R \rightarrow x + y = y + x}$

b) Propiedad conmutativa del producto:
para cada par de números $\boldsymbol{x, y \in R \rightarrow x \bullet y = y \bullet x}$

c) Propiedad asociativa de la suma:
para cada trío de números $\boldsymbol{x, y, z \in R \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)}$

d) Propiedad asociativa del producto:
para cada trío de números $\boldsymbol{x, y, z \in R \rightarrow (x \bullet y)z = x(y \bullet z)}$

e) Propiedad distributiva del producto sobre la suma:
para cada trío de números $\boldsymbol{x, y, z \in R \rightarrow x(y + z) = x \bullet y + x \bullet z}$

Propiedad distributiva por la derecha

$$\boldsymbol{x, y, z \in R \rightarrow (x + y)z = x \bullet z + y \bullet z}$$

III) PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Tabla 1.Propiedades de la igualdad (Angel, 2004:67)

Para todos los números reales $\boldsymbol{a, b, y\ c}$:	
4. $a = a$	**Propiedad reflexiva**
5. Si $a = b$, entonces $b = a$	**Propiedad simétrica**
6. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$	**Propiedad transitiva**

"Propiedad de la suma de la igualdad

Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ para cualesquiera $a, b, y\ c$" (Angel, 2004:70).

El autor explica esta propiedad resaltando que al sumar el mismo número en ambos miembros de la ecuación, no se altera la solución de la ecuación original, y señala que esta propiedad "también nos permite restar el mismo número en ambos lados de la ecuación".

> **"Propiedad de la multiplicación de la igualdad**
>
> Si $a = b$ entonces $a \bullet c = b \bullet c$ para cualesquiera $a, b, y\ c$" (Angel, 2004:70).

La explicación para esta propiedad es que se puede multiplicar por un mismo número a ambos lados de la ecuación y la solución no se altera. El autor añade que "la propiedad de multiplicación de la igualdad también nos permite dividir ambos lados de una ecuación entre el mismo número distinto de cero".

A las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad, otros autores les llaman Aditiva y Multiplicativa, respectivamente, así como Propiedad Uniforme de la igualdad, sólo que esta última contempla a las dos ya mencionadas. No es ocioso mencionar que al contemplar la adición y la multiplicación queda implícito que, en el conjunto de los números reales, quedan contempladas las operaciones de resta y división

Los tipos de ecuaciones lineales que se proponen en el currículo del CCH (Programa de estudios de Matemáticas I, Unidad 3) para que los alumnos de primer semestre lleguen a conocer y operar, son:

a) $\mathbf{ax = b}$

b) $\mathbf{ax + b = c}$

c) $\mathbf{ax + bx + c = d}$

d) $\mathbf{a(x + b) = c(x + d)}$

e) $\mathbf{\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}}$

f) $\mathbf{\frac{ax}{b} + c = \frac{dx}{e}}$

g) $\mathbf{(x + b)^2 = (x + c)(x + d)}$

h) $\mathbf{\frac{(x+a)}{(x+b)} = \frac{(x+c)}{(x+d)}}$

Diseño del Ambiente de aprendizaje

Hasta el momento, se han tocado aspectos relevantes para la realización de este trabajo, como es el Aprendizaje Significativo, las interacciones que se deben dar para contribuir a dicho aprendizaje, algunos aspectos que es necesario que la enseñanza considere, y precisamente es desde la enseñanza que se debe proyectar un ambiente apropiado, que permita llevar a cabo, y de la mejor manera posible, un proceso de enseñanza-aprendizaje, donde los actores de este proceso puedan cumplir con su papel y tratar de alcanzar los propósitos planteados para el aprendizaje que se desea fomentar.

Por lo anterior, se recurre a la propuesta de Bransford, Brown y Cocking (citados en SEP, 2007), quienes indican que en la creación de ambientes de aprendizaje en la escuela hay que tomar en cuenta al que aprende (ambiente centrado en el alumno); lo que se aprende (ambiente centrado en el conocimiento), cómo se evalúa lo que se va aprendiendo (ambiente centrado en la evaluación) y el medio social en que se da el proceso de enseñanza-aprendizaje (ambiente centrado en la comunidad). A continuación desarrollamos un poco más cada uno de estos cuatro aspectos.

Es conveniente aclarar que los autores que se mencionan en los siguientes párrafos están citados en SEP (2007), a partir de Bransford, Brown y Cocking.

Ambientes centrados en quien aprende

Cuando se usa el término "centrado en quien aprende", nos referimos a ambientes que ponen atención cuidadosa a conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que los estudiantes llevan consigo al espacio escolar. Este término incluye prácticas de aprendizaje llamadas "culturalmente sensibles", "culturalmente apropiadas", "culturalmente compatibles" y "culturalmente relevantes" (Ladson-Billings, 1995). El término también se adapta al concepto de "enseñanza diagnóstica" (Bell *et al*., 1980): tiene la finalidad de descubrir qué piensan los estudiantes en relación con los problemas inmediatos que enfrenten, discutir sus errores conceptuales de manera sensible y crear situaciones de aprendizaje que les permitan reajustar sus ideas. Los maestros que están centrados en quien aprende, reconocen la importancia de que los alumnos construyan sus propios significados sobre el conocimiento cultural y conceptual que llevan al salón de clases.

Ambientes centrados en el conocimiento

Los ambientes que están centrados sólo en el que aprende, no necesariamente ayudan a los estudiantes a adquirir los conocimientos y las habilidades necesarias para funcionar con efectividad en la sociedad. Los ambientes centrados en el conocimiento toman en serio la necesidad de ayudar a los estudiantes a convertirse en conocedores según Bruner (SEP, 2007), al aprender de tal manera que comprendan y realicen la subsiguiente transferencia; hacen una intersección con los ambientes centrados en quien aprende, cuando la enseñanza comienza con un interés por las concepciones iniciales de los estudiantes acerca de la materia. Si no se considera cuidadosamente el conocimiento que los estudiantes llevan a la situación de aprendizaje, es difícil predecir qué van a entender acerca de la información nueva que les sea presentada.

Los ambientes centrados en el conocimiento también se enfocan en los tipos de información y de actividades que ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión de las disciplinas. Este enfoque requiere un examen crítico del currículo existente. Estos ambientes deben considerar que lo que se aprenda sea con profundidad y que las actividades pueden estructurarse de tal manera que los estudiantes sean capaces de explorar, explicar, extender y evaluar su progreso.

Un reto para el diseño de ambientes centrados en el aprendizaje es lograr el balance adecuado de actividades, diseñando, entre otras, para promover la comprensión y la automatización de habilidades necesarias para funcionar efectivamente, sin saturar los requerimientos de atención.

Ambientes centrados en la evaluación

Además de estar centrados en quien aprende y en el conocimiento, los ambientes de aprendizaje diseñados eficientemente también deben centrarse en la evaluación, cuyos principios básicos son aquellos que proporcionan oportunidades de retroalimentación y de revisión, y aseguran que lo evaluado sea congruente con las metas de aprendizaje. Es importante distinguir entre dos usos fundamentales de la evaluación.

El primero, la evaluación formativa involucra el uso de la evaluación (con frecuencia administrada en el contexto del salón) como fuente de retroalimentación para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. El segundo, la evaluación aditiva mide lo que los estudiantes han aprendido al final de un grupo de actividades de aprendizaje. Entre los ejemplos de evaluaciones formativas se incluyen los comentarios de los maestros sobre el avance del trabajo, como escritos o preparaciones para las presentaciones. Ejemplos de evaluaciones aditivas incluyen exámenes hechos por los maestros al final de una unidad de estudio y los exámenes estatales y nacionales que los estudiantes deben presentar al final de un año escolar; sin embargo, estos últimos no son muy comunes. Los aspectos de evaluación aditiva para propósitos de administración nacional, estatal o distrital están más allá del alcance de este volumen, por lo que esta discusión se enfoca en la evaluación formativa y aditiva en el salón de clases.

Ambientes centrados en la comunidad

Las nuevas propuestas en la ciencia del aprendizaje sugieren que también es fundamental el grado en que los ambientes de aprendizaje estén centrados en la comunidad. Las normas son especialmente importantes para que las personas aprendan de los otros e intenten mejorar de manera continua. Usamos el término centrado en la comunidad para referirnos a diversos ámbitos –incluyendo al salón de clases, a la escuela y al grado–; en ellos los estudiantes, maestros y administradores se sienten conectados a comunidades más amplias, como los hogares, los negocios, los estados, la nación, e incluso el mundo.

Capítulo 3. Metodología

Introducción

Una vez formulado el problema –y las preguntas de investigación– del que se parte en este trabajo, así como realizada la revisión básica de algunos avances en su estudio y la definición de los referentes teóricos a través de los cuales se conceptualiza, en este capítulo se desarrollan los aspectos experimentales del trabajo: la metodología utilizada, el marco contextual en que se lleva a cabo la intervención didáctica, su documentación, recolección de datos, y la manera en que se analizan.

En virtud de que los problemas de enseñanza-aprendizaje son de naturaleza eminentemente social, y tratados por la pedagogía, la metodología utilizada para el estudio de nuestro problema es de naturaleza cualitativa: se busca aproximarnos a la comprensión, al entendimiento de ciertos hechos y no a la búsqueda de relaciones de tipo causa-efecto. Se intenta encontrar relaciones entre problemas de enseñanza-aprendizaje y aspectos sociales, personales, que nos ayuden a darle sentido a conductas personales y sociales que se observan en el ambiente de un salón de clases.

Generalidades de la metodología utilizada

La investigación cualitativa (Taylor y Bogdan, 1986; Mucchielli, 2001) es de carácter empírico y tiene las siguientes características: busca la comprensión; trata el problema bajo estudio de manera directa y amplia; los datos no numéricos se recopilan en el contexto natural de las personas y con métodos cualitativos –observación libre, recopilación de documentos–; los datos se analizan de forma cualitativa, es decir, las palabras se analizan con otras palabras, termina en un relato o en algo parecido a una teoría. Además, el investigador interacciona con los sujetos que se estudian con el propósito de lograr una comprensión rica y creíble del sentido que dan quienes participan en el fenómeno estudiado. Por otro lado, la situación que se estudia se visualiza como una totalidad e inmersa en un contexto. En este tipo de investigación, el sentido o la comprensión es resultado de la interacción entre el investigador y los sujetos observados, y emerge y se construye a lo largo de todo el proceso.

La investigación cualitativa desea tomar en cuenta la totalidad de la situación estudiada; la separación del fenómeno se reduce con el propósito de llegar a un conocimiento primero y personal de éste; la mediación con los sujetos del estudio es mediante el lenguaje común, sin medios técnicos y, además, es interpretativa, porque es una indagación de los sentidos, las vivencias y los acontecimientos.

La investigación cualitativa es comprensiva, ya que pone en primer lugar la descripción de los procesos más que la explicación de las causas, la profundidad de los análisis más que la multiplicación de los casos, y la riqueza de los datos sobre la precisión de las medidas.

La investigación cualitativa está cerca de la gente, los medios, las experiencias, los problemas y casi siempre es colaborativa.

Por su parte, la metodología es la reflexión sobre el método adecuado que se propone para realizar una investigación. Un método cualitativo de investigación se vale de diversas técnicas de recopilación y de análisis cualitativos de datos con el fin de hacer explícito, comprendiéndolo, un fenómeno humano. En las técnicas de recopilación de datos, el investigador está completamente implicado en el manejo de la técnica que utiliza. La técnica es una extensión de sí y el investigador es parte importante en el instrumento. Por otro lado, las técnicas de análisis de datos se valen de recursos de la inteligencia para captar significados. Las aproximaciones, confrontaciones, relaciones de datos, perspectivas, encuadres, recurrencias, analogías, generalizaciones, y síntesis permiten que se encuentren dichos significados.

Asimismo, lo que se entiende por validez en la investigación cualitativa es variable: exactitud de un resultado; adecuación entre una categoría y el fenómeno que representa; operatividad de una hipótesis; autenticidad de una observación; actualidad de un modelo o de una teoría; conformidad de un análisis, entre otros. Las observaciones y el análisis que se hace en la investigación cualitativa se reconocen como justas, pertinentes y consistentes.

Marco contextual

Población bajo estudio

La población estudiada fue un grupo de segundo semestre del CCH Plantel Vallejo, subsistema de bachillerato de la UNAM, integrado por 25 alumnos: 15 mujeres y 10 hombres, con una edad predominante de 15 años. El grupo se atendió durante el semestre 2016-1, por la autora que realizó la investigación de este trabajo.

La mayoría de los alumnos del grupo viaja más de una hora para llegar a la escuela a las siete de la mañana. El horario de la clase de matemáticas es de siete a nueve de la mañana, los días lunes y miércoles, y los viernes de siete a ocho de la mañana, dando un total de cinco horas de clase semanal.

Cabe señalar que este grupo se eligió a partir de su horario, para que no hubiera, en la medida de lo posible, interrupciones en las sesiones, porque a veces los alumnos requieren se les ceda el tiempo de clase para realizar algunas actividades extracurriculares, situación que es menos frecuente en las primeras horas.

Dado que la mayoría de los alumnos que ingresa al CCH proviene de escuelas secundarias públicas, a continuación se presentan los aprendizajes que la SEP establece en los Programas de estudio, para el tema de las Ecuaciones lineales.

Uno de los aprendizajes en primer año de secundaria (SEP, 2011:33), que claramente se establece es: "Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales y/o decimales". Para este aprendizaje la temática considera explícitamente: "Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios".

Para el segundo año de secundaria, la SEP (2011:43) contempla el aprendizaje: "Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$, donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos". Para este aprendizaje, el tema es: "Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: $ax + b = cx + d$ y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos".

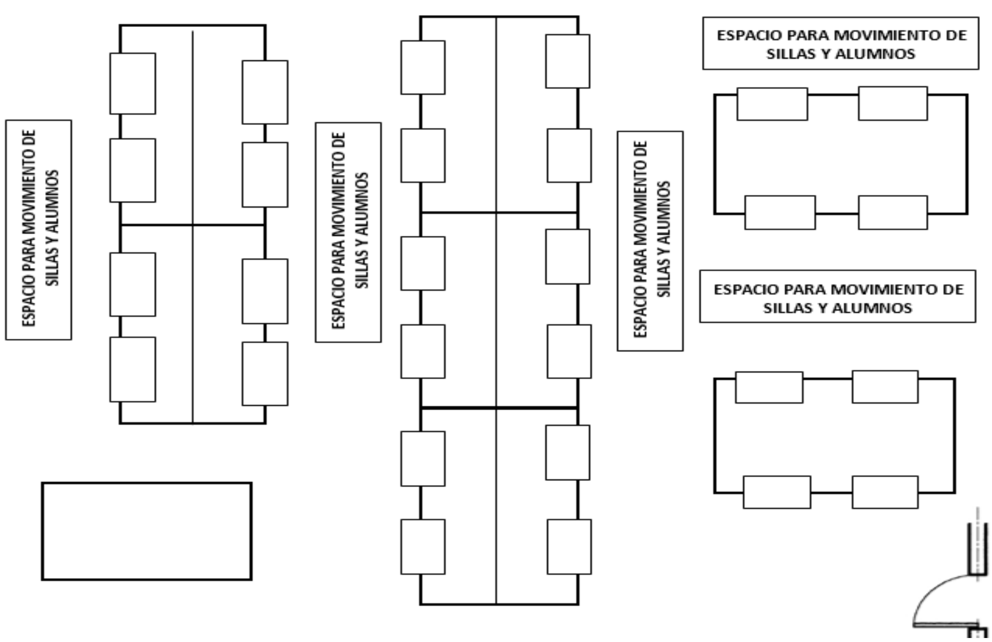
Además, para el segundo año se contempla la resolución y el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2 (dos ecuaciones lineales con dos incógnitas). Mientras que en el tercer grado se plantea la resolución de ecuaciones cuadráticas por operaciones inversas y factorización, concluyendo el grado con resolución de problemas que impliquen ecuaciones lineales, sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas.

Como se puede observar en esta breve revisión, el tema de ecuaciones lineales, en principio, no debería ser desconocido para un alumno de secundaria pública que ingresa al CCH a estudiar el bachillerato. En consecuencia, se puede decir que retomar este contenido tendría como resultado una comprensión más amplia y profunda de él.

Descripción del lugar en que se llevó a cabo la implementación

Todas las sesiones de esta experiencia se llevaron a cabo en una aula que mide 5.8 x 6.20 m; en general con trece mesas de dimensiones de 0.40 x 1.20 m, y entre 25 y 27 sillas, ocupando un área del piso de 0.50 x .55 m. Cada mesa es para dos personas. Se cuenta con dos pizarrones, uno blanco de medidas 2.4 x 1.20 m para marcador borrable y otro verde para gis, de 4.50 x 1.20 m, de ancho y altura, respectivamente. Cabe señalar que el pizarrón más accesible, por su ubicación, es el blanco y es el de menor tamaño. Las ventanas tienen vidrios opacos, por lo que no hay distractores que afecten visualmente desde el exterior; sin embargo, no sucede lo mismo con los distractores auditivos.

El tamaño del salón no permite mucha movilidad, para formar equipos con distintas distribuciones del mobiliario. Para trabajar en grupos pequeños, la manera más práctica que se encontró fue como se muestra en la siguiente figura



Diseño del ambiente para el proceso enseñanza-aprendizaje

Se recordará –capítulo 2 de este trabajo–, de acuerdo con Bransford, Brown y Cocking (SEP, 2007), que el diseño del ambiente donde se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje debe centrarse en el alumno que aprenderá, en los conocimientos que se desea que aprendan, la comunidad en que se realizará el proceso de enseñanza-aprendizaje y la evaluación que se utilizará para monitorear todo el proceso. A continuación describimos cada uno de estos aspectos.

El alumno individual en el ambiente de aprendizaje

De acuerdo con Bransford, Brown y Cocking (SEP, 2007:12), para diseñar un ambiente de aprendizaje centrado en el que aprende, "es necesario considerar y poner atención cuidadosa a conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que los estudiantes traen". Con ello, los autores se refieren a que es importante descubrir lo que ya poseen, lo que concuerda con Ausubel, porque su teoría considera que se deben relacionar los conceptos pertinentes ya existentes con la nueva información, y procurar que el alumno construya sus propios significados sobre el conocimiento que trae consigo.

Por lo anterior, para este trabajo se realizó una revisión de los conceptos fundamentales relacionados con la Ecuación lineal y su resolución, que dio como resultado que los conocimientos previos, necesarios para profundizar en el tema, se agruparan de la siguiente manera:

1. Los correspondientes a las propiedades de los números reales y a las operaciones de suma y producto:
    - Propiedad conmutativa (de la suma y del producto).
    - Propiedad asociativa (de la suma y del producto).
    - Propiedad distributiva del producto sobre la suma.
    - Neutro aditivo.
    - Neutro multiplicativo.
    - Inverso aditivo.
    - Inverso multiplicativo.

2. Los directamente relacionados con el concepto de ecuación:
    - El concepto de ecuación.
    - Incógnita, como número desconocido.
    - Número conocido.
    - Miembros de la igualdad.
    - Solución de una ecuación.
    - Resolución de una ecuación.
    - Comprobación.
3. Algunas propiedades de la igualdad:
    - Propiedad simétrica.
    - Propiedad uniforme.
    - Propiedad transitiva.
    - Propiedad reflexiva.

Se puede observar que, a pesar de estar hablando de un ambiente centrado en el que aprende, es inevitable incluir los contenidos; es decir, hay una intersección entre los dos ambientes de aprendizaje.

Como se anotó en párrafos anteriores, uno espera que los alumnos que ingresan al CCH tengan algunas nociones sobre los contenidos mencionados. Por lo tanto, es pertinente la siguiente pregunta: ¿cuál es el nivel que poseen los alumnos respecto de esos conocimientos?

Para tener una respuesta aproximada a esta pregunta, se elaboró y aplicó una prueba diagnóstica (véase anexo 1), que se utilizó al final del proceso de enseñanza-aprendizaje con la finalidad de valorar los cambios –si los hubo.

La evaluación diagnóstica es importante, porque puede brindar un panorama del nivel que tienen los alumnos en cuanto a los conocimientos previos que poseen sobre un tema al momento de abordarlo. Esto permitirá tomar medidas sobre las tareas que se diseñarán para iniciar un tema y sobre las formas de trabajar de acuerdo con el tipo de aprendizaje que se desea fomentar.

De los 25 alumnos que formaron la población estudiada, 22 presentaron la prueba diagnóstica; los tres faltantes no tuvieron una asistencia regular, incluso no cuentan con las dos pruebas para hacer un comparativo entre la diagnóstica y la final que se aplicó al concluir el proceso de enseñanza-aprendizaje que se experimentó.

La tabla que se presenta en seguida, reúne las respuestas que los 22 alumnos dieron a todas y cada una de las preguntas. La pregunta encabeza la tabla y ésta registra el tipo de respuesta que los alumnos dieron y el número de alumnos que la emitió.

1. **Escribe lo que entiendes por ecuación.**

Las respuestas se han agrupado de acuerdo con lo que respondieron los alumnos	
Tipo de respuesta	**Alumnos que coincidieron**
Es una operación o conjunto de operaciones	13
Es algo que sirve para hallar un valor	2
Una fórmula	1
Igualdad entre dos o más expresiones que contienen una variable	1
Expresión algebraica que tiene una variable que se desconoce su valor	2
Es una solución para ciertos valores, en donde se pueden encontrar incógnitas	1
Igualdad que tiene variables, que se representan con una incógnita, que a la vez representa a un número	1
No contestó	1

2. **¿De qué partes se compone una ecuación?**

Respuesta	**Alumnos que coincidieron**	**Respuesta**	**Alumnos que coincidieron**
Expresión	1	Coeficiente	3
Valor	1	Exponente	3
Incógnita	9	Término	3
Variable	4	Igual (signo)	2
Literal	7	Resultado	4
Signos	2	Operaciones	1
Números	4	Grado	1
Solución	1	Miembros	1
No contestó	4		

*Todos los alumnos que contestaron la pregunta dos, anotaron por lo menos dos respuestas de las contenidas en la tabla.

3. ¿Qué es la solución de una ecuación?

Respuesta	**Alumnos que coincidieron**
Es el valor de la letra o incógnita	7
Encontrar el valor de las variables –algunos mencionan incógnita–	6
Es la manera de resolver la ecuación (procedimiento). El valor de la incógnita	1
Es cuando se da su valor	1
Es parte de las variables	1
Es el resultado de toda la ecuación	1
No contestó	5

4. ¿De qué manera se puede saber si un valor es solución de una ecuación?

Respuesta	**Alumnos que coincidieron**
Mediante la comprobación	6
Sustituyendo las incógnitas por valores	6
Por su procedimiento o conjunto escrito	1
Pregunta un resultado numérico	1
Cuando en esto se aparezca un número indeterminado x^2+5+7	1
Sustituyendo los valores	1
Cuando este valor representa una incógnita	1
No contestó	5

5. Lee cuidadosamente los siguientes enunciados y de cada uno identifica las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas.

A. El perímetro de un triángulo es de 41m. El primer lado tiene 4 m menos que el segundo lado y el tercer lado tiene 3 m menos que el segundo. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

B. Tres alumnos (Alejandro, Ángel y Alberto) deben realizar la captura de dos trabajos; el primer trabajo de 85 páginas y el segundo de 63. Del total de ambos trabajos Ángel capturará 15 páginas más que Alejandro y Alberto 11 páginas menos que Alejandro.

Respuesta	**Alumnos que coincidieron**
Identifica cantidades conocidas y desconocidas	11
Identifica parcialmente ambas	2
No las identifica	7
Identifica sólo conocidas	1
No contestó	1

6. **La pregunta consiste en que el alumno describa cuatro ecuaciones que se le dan.**

Describe	**Alumnos que coincidieron**
Describe correcto e incompleto	6
Descripción incorrecta	5
Enlista las partes	1
Describe operaciones entre cantidades	2
La escribe en lenguaje coloquial	1
No contestó	7

7. **La pregunta consiste en identificar cinco ecuaciones, de un conjunto de doce expresiones algebraicas que se dan.**

Número de ecuaciones que identifica	**Alumnos que coincidieron**
Una	2
Dos	1
Tres	4
Cuatro	7
Cinco y elige una que no lo es	3
Tres correctas y dos que no lo son	2
Elige de 9 a 11 de las 12 opciones	2
Ninguna correcta y elige cinco que no lo son	1

8. **A partir de la siguiente expresión, construye al menos una ecuación utilizando propiedades de la igualdad x=5.**

Descripción de respuestas	**Alumnos que coincidieron**
Plantea una ecuación correcta y parece que utiliza propiedades	5
Plantea expresión incorrecta	4
Plantea expresión correcta, sin evidencia de lo que utiliza	3
No plantea y la iguala a cero	1
No contesta	9

9. **La pregunta consiste en que el alumno plantee el área de un rectángulo, dadas ciertas condiciones.**

Descripción de respuestas	**Alumnos que coincidieron**
Plantea correctamente	4
Plantea con un error (falta paréntesis)	4
Plantea correctamente, pero no iguala a 60	1
Plantea incorrecto	3
No contestó	10

10. **La pregunta consiste en obtener la ecuación que represente las condiciones dadas en una recta numérica.**

Descripción de respuestas	**Alumnos que coincidieron**
Obtiene la ecuación correcta	8
Obtiene una expresión incorrecta	13
No contestó	1

11. **Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe el procedimiento que se realiza para llegar al resultado.**

a) $\boldsymbol{6x = 18}$

Respuesta	**Núm. de alumnos**
Correcta	18
Incorrecta	3
No contesta	1

b) $\boldsymbol{-6x = 18}$

Respuesta	**Núm. de alumnos**
Correcta	18
Incorrecta	3
No contesta	1

c) $4x-2=6$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	16
Incorrecta	3
No contesta	3
Incompleta	1

d) $6x-7x+10=13$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	7
Incorrecta	7
No contesta	4
incompleta	3

e) $\frac{4}{3}x=\frac{48}{6}$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	6
Incorrecta	3
No contesta	13

f) $\frac{2}{4}x+7=\frac{5}{3}x$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	3
Incorrecta	4
No contesta	15

g) $8(x+1)=2(3x+6)$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	5
Incorrecta	4
No contesta	13

h) $(x+5)^2=(x+13)(x+1)$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	0
Incorrecta	7
No contesta	15

i) $\frac{(x+3)}{(x-3)}=\frac{(x-1)}{(x-4)}$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	0
Incorrecta	3
No contesta	19

j) $\frac{4x+3}{2x-5}-\frac{3x+8}{3x-7}=1$

Respuesta	Núm. de alumnos
Correcta	0
Incorrecta	2
No contesta	20

Conclusiones a la prueba diagnóstica

Las conclusiones de la prueba diagnóstica se refieren al concepto de ecuación y los que se relacionan con él, y los que tienen que ver con la resolución de ecuaciones de distinto grado de dificultad y al uso de propiedades del álgebra que son pertinentes en la resolución de ecuaciones lineales.

En relación con los conceptos, los alumnos no pueden proporcionar la definición o una descripción del objeto; por ejemplo, para el concepto de ecuación, las respuestas son muy variadas y parciales; la mayoría considera que la ecuación es: "Un conjunto de operaciones", "Una operación", "Expresión algebraica que tiene una variable que se desconoce su valor", "Es algo que sirve para hallar un valor", "Es una solución para ciertos valores, en donde se pueden encontrar incógnitas". Estas respuestas permiten observar que los alumnos tienen una vaga idea del concepto de ecuación. Lo que sobresale es que de 22 alumnos, sólo 2 mencionan la igualdad en su respuesta, aunque de una manera distorsionada: "Igualdad entre dos o más expresiones que contienen una variable". Con este tipo de respuestas se puede suponer que el alumno no tiene claro el concepto de ecuación.

Para otras preguntas de tipo conceptual se presenta la misma situación de parcialidad y de variedad de respuestas, ninguna de ellas completa. Para "solución de una ecuación", tenemos los siguientes ejemplos: "Es el valor de la incógnita", que para este trabajo se considera como respuesta incompleta; "Encontrar el valor de las variables", la expresaron una cantidad considerable de alumnos, y también contestaron cosas como: "Es el resultado de toda la ecuación" o "Es cuando se da su valor", que cada una la dio un alumno. Además, cinco estudiantes prefirieron no contestarla.

Algo parecido ocurre con el procedimiento de comprobación: las respuestas son parciales o incorrectas, salvo seis de los 22 alumnos.

En cuanto a identificar ecuaciones de otras expresiones que no lo son, parece que los alumnos se inclinan a elegir aquellas que contienen letras sin importar que no esté presente la igualdad, ni uno de los dos miembros de la misma. Aunque hubo una cantidad considerable que eligió cuatro de cinco ecuaciones.

Al resolver ecuaciones, los alumnos no tuvieron dificultades con las del tipo $\mathbf{ax = b}$, $\mathbf{ax + b = c}$ que contienen una o dos operaciones; sin embargo, con más operaciones como $\mathbf{ax + bx + c = d}$ el número de respuestas correctas disminuyó notablemente, al igual que con las del tipo $\mathbf{\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}}$ donde, además, la cantidad de alumnos que no contestó aumenta drásticamente; lo mismo sucede con $\mathbf{\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}}$ y $\mathbf{a(x + b) = c(x + d)}$, hasta llegar a las ecuaciones del tipo $\mathbf{(x + b)^2 = (x + c)(x + d)}$ y $\mathbf{\frac{(x+a)}{(x+b)} = \frac{(x+c)}{(x+d)}}$ que ya ningún alumno contestó. Cuando se les pide que usen propiedades o escriban las propiedades utilizadas, 100% de los alumnos no contestó.

En resumen, se concluye que los estudiantes no han formado el concepto de ecuación, ni con los que se le relacionan, pero que sí tienen elementos a partir de los cuales pueden formar una estructura conceptual, que a su vez les permita desarrollar de manera más adecuada –es lo que se piensa– el aspecto procedimental, donde, de acuerdo con los resultados de la prueba, se afirma que la mayoría de alumnos presenta carencias significativas.

Los contenidos que se desea que la población estudiada aprenda, en el ambiente de aprendizaje

El principal propósito de este trabajo es fomentar un aprendizaje significativo de conceptos y métodos relacionados con las Ecuaciones lineales, por lo que es necesario tener en cuenta las consideraciones de Bransford, Brown y Cocking (SEP, 2007:15):

> Los ambientes centrados en el conocimiento hacen una intersección –como ya se había mencionado– con los ambientes centrados en quien aprende, la enseñanza debe comenzar con un interés por las concepciones iniciales de los estudiantes acerca de la materia.

Por un lado, se tiene que se deben tomar en cuenta, al momento de diseñar el ambiente de aprendizaje, los conocimientos previos y, por otro, los conocimientos nuevos que se desea adquieran los alumnos de acuerdo con el currículo. En este caso, no sólo se consideran los contenidos sino también habilidades y procesos. Los conocimientos previos ya se trataron en el apartado anterior, de este capítulo, y los conocimientos nuevos se desarrollaron, con relativa amplitud, en el capítulo 2 de este trabajo, y son los que a continuación se enumeran:

a) Concepto de Ecuación.
b) Incógnita.
c) Miembros de la ecuación.
d) Solución de una ecuación.
e) Resolución de una ecuación.
f) Comprobación o verificación de la solución de una ecuación.

g) Métodos de resolución de una ecuación lineal (Con operaciones en ambos lados de la igualdad y proporcionando su justificación; Transposición de términos).
h) Propiedades a utilizar para la resolución de ecuaciones lineales (Propiedades de los números; Propiedades de las operaciones; Propiedades de la igualdad).

La comunidad en el Ambiente de Aprendizaje

El salón de clases, visto como una comunidad –de aprendizaje–, es, como toda comunidad, extremadamente compleja de estudiar, analizar, describir y comprender. Tal complejidad se debe, en parte, a las características individuales de dos de sus principales actores: alumnos y estudiantes. Sería una ingenuidad y un total despropósito creer que en estas páginas se tratara tal complejidad con la amplitud que se merece; lo único que en seguida se hace es traer a primer plano el aspecto sobre las normas que en todo salón de clase están presentes, de forma implícita o completamente explícita, como lo deseamos en este trabajo.

Los ambientes centrados en la comunidad consideran las normas que regulan la vida académica en el salón de clases, que pueden tener sus particularidades según la escuela, el grado, etcétera. Según Bransford, Brown y Cocking (SEP, 2007:29), "lo importante de las normas es que sirven para que los alumnos aprendan unos de otros y que intenten mejorar de manera continua".

En el diseño del ambiente de aprendizaje en este trabajo, y de manera general, se toman en cuenta para la implementación de la experiencia, tres formas principales de trabajar, que se describen en el capítulo 4: individual, en grupos pequeños y trabajo grupal.

Formas de trabajo

Algunas sesiones inician con trabajo individual, después se propone con el trabajo en equipo y, por último, se realiza el trabajo grupal. En estas tres formas se utilizará para trabajar, tal vez, un concepto, un procedimiento o discutir dudas o planteamientos del tema de la sesión.

Habrá sesiones en que se inicie con trabajo grupal, con el fin de continuar con alguna tarea de la sesión anterior, retomar conceptos o procedimientos, para verificar hasta dónde los alumnos han comprendido algún contenido.

En otras sesiones se hará el trabajo individual y luego se pasará al grupal sin haber trabajado por equipos.

En este sentido, se puede decir que en el aula tendremos algunas combinaciones de estas formas de trabajo; por ejemplo:

- Individual-equipo-grupal
- Individual-grupal
- Grupal-individual-equipo-grupal

Tal vez se requiera aclarar que el trabajo grupal puede ser cuando uno o más alumnos pasen al frente a resolver o explicar algo, y el resto esté prestando atención o contribuyendo con sus aportaciones.

En el sistema de educación presencial, en que se encuadra este trabajo, en el salón de clase siempre están presentes, mínimamente, los siguientes actores:[1] contenidos curriculares, cada alumno, el grupo como tal y el profesor. Por ello, es importante definir y, sobre todo, cumplir las normas que regirán la convivencia en el aula.

Normas del salón de clases

Para alumnos y profesor:

- Asistir puntualmente a clase.
- Asistir al 100% de las clases.
- Cumplir con sus responsabilidades, cada quien en su rol.
- Conservar y hacer buen uso del mobiliario y de los materiales, sin menoscabo de que se les proporcionen, sean propios o ajenos.
- Promover la honestidad en todo momento.
- Mantener un orden en el salón y respetar los tiempos que sean para trabajo individual, en equipo y grupal; en este último, la participación será de manera ordenada, levantando la mano para pedir su turno.
- Mostrar y tener respeto por todos los compañeros en general, durante el trabajo individual, en equipo y grupal: esto implica prestar atención a los demás, prepararse para participar, no mofarse de la participación de algún compañero, tener disposición para aprender de los errores propios y de los demás.

[1] Se dice actores, porque es útil pensar, como se hace en algunos enfoques sociológicos, que lo que ocurre en el salón de clases es un drama.

- Tener tolerancia[2] ante los diferentes puntos de vista y participaciones del resto del grupo.
- Mantener limpio el salón de clases.
- Se pueden ingerir alimentos saludables dentro del salón de clases, siempre y cuando no se trabaje de manera grupal y esto no interfiera con la actividad del individuo.

Normas sociomatemáticas

De acuerdo con Cobb y Yackel (citados en Stephan, 2014), el aprendizaje es un proceso individual y social, y ninguno es más importante que el otro. En este sentido, las normas sociomatemáticas (Stephan, 2014) son normas sociales en el aula de matemáticas y propias de esta actividad, y parten de "el criterio normativo por el cual los estudiantes crearán y justificarán su trabajo matemático". Los autores indican que las normas sociomatemáticas varían según los objetivos y el tipo de instrucción.

Mientras las normas sociales se centran en reglas válidas para cualquier área académica, las normas sociomatemáticas se concentran en la calidad de las contribuciones matemáticas en clase y, para ello, se consideran los siguientes aspectos:

- Lo que se debe considerar como una explicación matemática aceptable.
- Una solución eficaz.
- Una solución diferente.
- Una solución sofisticada (refinada, más acabada, compleja).

a) Una explicación aceptable

Se parte de la construcción de los conceptos, como el de ecuación, hasta que de manera consensuada se llegue a una definición, que para estudiantes y profesor, se considere aceptable; es decir, que durante las discusiones se valora si el producto –de las discusiones– respecto a un punto, ya es adecuado y cumple con los elementos para manejarse en la clase.

- Que sea clara para todos los involucrados. Esto implicaría que las palabras contenidas en la definición tengan el mismo significado para todos, en la medida de lo posible.

[2] La tolerancia también implica que si alguien por causas de fuerza mayor, y de manera honesta, no pudo cumplir con la puntualidad, la asistencia o alguna tarea, no pierda su derecho a ingresar al salón de clases y de participar en la sesión ni de entregar sus tareas, siempre y cuando no se abuse de la tolerancia y se dé por razones importantes. Esto también aplica para el profesor.

- Que contenga los elementos necesarios para definir el concepto en cuestión.
- Que el alumno pueda expresarla.
- Que pueda proporcionar ejemplos.

Se puede decir que estos son los criterios para decir si una explicación es aceptable. Y los criterios son las normas.

La explicación aceptable también se usa en los procedimientos, de tal manera que los pasos que se realizan para resolver una ecuación se expliquen también de manera aceptable, teniendo para ello las propiedades del álgebra, con las que los individuos pueden justificar –y por consiguiente explicar– de manera convincente la forma en que hallan la solución de la ecuación.

b) Una solución eficaz

Es el uso adecuado de propiedades para la resolución de una ecuación. Se utiliza el término "solución eficaz" como la resolución más adecuada para determinada ecuación; es decir, la norma consiste en tomar como solución eficaz la que muestra las propiedades utilizadas durante el proceso de manera clara y que llega a la solución de la ecuación, además de que se puede comprobar si el valor hallado es la solución o no.[3]

En este caso, los criterios pueden ser:

- Que el procedimiento contenga las propiedades correctas.
- Que las propiedades se utilicen correctamente.
- Que se realice el procedimiento de comprobación con corrección.
- Que pueda hallar un equívoco y sea capaz de corregirlo.

c) Soluciones diferentes (en este caso resoluciones diferentes)

Cuando un mismo alumno usó procedimientos diferentes, o presenta un procedimiento diferente al de otro alumno, la discusión debe orientarse a aceptar el más eficaz, o se muestre claramente que las dos propuestas son adecuadas y no sólo hay un camino para resolver una ecuación con corrección, siempre y cuando estén fundamentados y se sepa por qué se aplican unas u otras propiedades.

[3] Se usa la palabra solución en dos sentidos: uno como objeto, sujeto a normas sociomatemáticas y, dos, como el valor de la incógnita de una ecuación.

d) Solución sofisticada

En este caso, se considera una solución sofisticada aquella que:

- Contenga pasos necesarios y suficientes (que no haya de más o innecesarios).
- Que las propiedades a utilizar no “compliquen“ el ejercicio o problema.
- Que involucre una amplia variedad de propiedades distintas y de otros conocimientos matemáticos, como el binomio al cuadrado.

Las normas sociomatemáticas, o los criterios que se establecen para definir si una explicación es aceptable, si las soluciones son eficientes, diferentes o sofisticadas, dependen mucho del papel del profesor para dirigir esta negociación con los alumnos.

La evaluación en el diseño del Ambiente de Aprendizaje

Se ha mencionado ya la importancia de tener en cuenta al contenido, al que aprende y a la comunidad al momento de pensar en todos los elementos que se requieren para hacer un diseño aceptable que satisfaga las necesidades de la institución y, sobre todo, de los alumnos. Asimismo, también sería necesario considerar la evaluación como una perspectiva más que interactuará con las anteriores, con la finalidad de medir en distintos momentos la efectividad del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por lo tanto, en un ambiente centrado en la evaluación, se requiere y recomienda utilizarla en sus tres modalidades: diagnóstica, formativa y sumativa.

Para Bransford, Brown y Cocking (SEP, 2007:21) “la evaluación formativa involucra el uso de la evaluación (frecuentemente administrada en el contexto del salón) como fuente de retroalimentación para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Y la evaluación aditiva, mide lo que los estudiantes han aprendido al final de un grupo de actividades de aprendizaje”. Además, “el desarrollo de la evaluación formativa y sumativa requiere un punto de arranque, es decir, una evaluación inicial, esencialmente diagnóstica” (Amengual, 1984:51).

Planeación de las sesiones

Tomando en consideración lo propuesto, en el apartado anterior, por Bransford, Brown y Cocking (SEP, 2007), a continuación se presentan, a detalle, las diferentes sesiones de trabajo llevadas a cabo durante la experiencia didáctica. Conviene tener en cuenta que esta planeación es un modelo teórico, y de ninguna manera su puesta en práctica se hizo al pie de la letra, pero es una anticipación a lo que se espera que suceda; en términos llanos, es algo como “el deber ser”, porque de alguna manera hay que prever lo que ocurra en el salón de clases, los posibles problemas de aprendizaje y de enseñanza que surgirán, partir de la experiencia y lo que reporta la investigación en Educación Matemática.

El diseño concreto del ambiente de aprendizaje, o planeación de las sesiones, condensa los aprendizajes a promover, las tareas a realizar, las formas de trabajo a utilizar, el tiempo que se les destina y los materiales que median en la actividad por hacer. Para diseñar el ambiente de enseñanza-aprendizaje que se desea construir, se debe tomar en cuenta, tal cual, el currículo de la institución, los aportes de la Educación Matemática, el resultado del examen diagnóstico, así como los recursos didácticos y materiales de que se disponga.

La experiencia completa abarcó 29 sesiones, la mayoría con una duración de dos horas (20) y algunas (9) de una hora. En seguida se describe, de forma sintetizada, cómo se estructuraron estas 29 sesiones.

Primero, las sesiones 2 a la 12 se destinaron a tareas orientadas, sobre todo, a formar conceptos. Aunque en algunas tareas se formularon ecuaciones y se resolvieron usando ciertas “heurísticas”, la finalidad es que el alumno se vaya apropiando, por lo menos familiarizando, con los conceptos pertinentes y necesarios para después abordar la resolución algebraica de ecuaciones lineales, provisto de más herramientas.

De la sesión 13 a la 25, las tareas se encaminaron de manera gradual a la resolución algebraica de ecuaciones, pero se siguieron construyendo conceptos y formalizando los nombres de éstos; por ejemplo, de las propiedades de la igualdad se retoman propiedades de los números y de las operaciones. En esta etapa el alumno resuelve ecuaciones sin recurrir a la transposición de términos, y se procura que justifique de manera escrita las propiedades que utiliza, paso por paso. Se puede decir que en esta etapa se desarrolla el aspecto procedimental para la resolución, pero se sigue ampliando el conceptual.

Las sesiones 26 a 29 se destinaron a que el alumno tuviera un tiempo para automatizar lo abordado, a partir de una amplia variedad de ejercicios, además de que se trabajaron en equipo bajo la supervisión del profesor.

La siguiente tabla contiene la distribución de las sesiones y tareas realizadas.

<table>
<tr><th></th><th>Núm. tarea</th><th>Forma de trabajo</th><th>Breve descripción de tareas</th><th>Materiales</th></tr>
<tr><td rowspan="3">SESIÓN 1 (2h)</td><td>1</td><td>Indiv.</td><td>Rescatar conocimientos previos.</td><td rowspan="3">Hoja impresa con las siguientes preguntas:
1. ¿Qué es una ecuación?
2. ¿De qué elementos se compone una ecuación?
3. Escribe 10 ejemplos de ecuaciones ordenadas de acuerdo con su dificultad.
(anexo 2.a)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Equipo</td><td>Que discutan las anotaciones de la tarea 1 y por equipo contesten las preguntas.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Grupal</td><td>Consensuar la definición de ecuación, con base en el intercambio de ideas de los distintos equipos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SESIÓN 2 (50 min)</td><td>4</td><td>Indiv.</td><td>Identificación de ecuaciones inmersas en un conjunto de expresiones algebraicas.</td><td rowspan="2">Hoja impresa que contiene expresiones algebraicas, entre las que hay ecuaciones y otras que no lo son.
(anexo 2.b)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Grupal</td><td>Discusión de las respuestas de algunos alumnos.
¿Por qué sí es ecuación?
¿Por qué no es ecuación?</td></tr>
<tr><td rowspan="4">SESIÓN 3 (2 h)</td><td>6</td><td>Indiv.</td><td>Corrección de la tarea 4, de los alumnos que tuvieron varios desaciertos y, por tiempo, no la corrigieron durante la sesión 2.</td><td rowspan="4">Misma hoja que se utilizó en la sesión 2.
(anexo 2.b)</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Grupal</td><td>Verbalización y escritura (dos ejemplos realizados) de algunas ecuaciones, dadas en la tarea anterior.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Indiv.</td><td>Escritura de las ecuaciones restantes en su cuaderno.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Grupal</td><td>Lectura, de algunos alumnos, de lo que escribieron, para verificar si es correcto; de no ser así, se procede a la contribución de otro alumno para corregir.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SESIÓN 4 (50 min)</td><td>10</td><td>Indiv.</td><td>Que el alumno analice las ecuaciones y pueda anotar las partes de cada una, como se solicita en la tabla.</td><td rowspan="2">Hojas impresas que contiene una tabla con 50 ecuaciones, donde deben escribir, en cada recuadro, las partes que se solicitan de la ecuación y calificar cada 5 ecuaciones .
(anexo 2.c)</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Grupal</td><td>Revisar el desglose de las primeras cinco ecuaciones con la finalidad de que cada alumno pueda calificar su tarea y corregirla, así, a la vez que verifica refuerza su conocimiento.</td></tr>
</table>

SESIÓN 5 (2 h)	12	Grupal	Reforzar y retomar: ¿Qué es una ecuación? ¿Cuáles son las partes de la ecuación?	Hojas impresas que contienen una tabla con 50 ecuaciones, donde hay que escribir, en cada recuadro, las partes que se solicitan de la ecuación y calificar cada 5 ecuaciones. (anexo 2.c)
	13	Indiv.	Continuación tarea 10.	
	14	Grupal	Continuación tarea 11.	
SESIÓN 6 (2 h)	15	Grupal	Que el alumno reflexione sobre las operaciones que se realizan para hallar el valor de la incógnita. Y que las describa de forma oral y escrita.	Hojas impresas que contiene una tabla con 50 ecuaciones de fácil resolución, con columna para describir, de manera escrita, las operaciones realizadas. (anexo 2.d)
	16	Grupal	Obtener la definición de “solución de la ecuación” mediante interrogatorio a los alumnos	
	17	Indiv.	Escritura de la definición de “solución de una ecuación”.	
	17.b	Grupal	Consenso de la definición de solución, a partir de la lectura.	
SESIÓN 7 (2 h)	18	Equipo	Que el alumno maneje el concepto de igualdad, para construir ecuaciones algebraicas a partir de material concreto. Que represente la figura “balanza” correspondiente a la expresión algebraica que proporciona.	Balanzas construidas por los alumnos. Canicas de diferente tamaño e imanes esféricos. Hojas blancas.
SESIÓN 8 (2 h)	19	Indiv.	Resolución de ecuaciones por descomposición de cantidades.	Hojas impresas con ecuaciones, que incluye dos ejemplos resueltos por descomposición Incluye tarea extraclase. (anexo 2.e)
	20	Equipo	Fortalecer el significado de la igualdad, mediante descomposición.	
	21	Grupal	Discusión para resaltar las regularidades que se presentan a través de la de cancelación. Los alumnos pasan al pizarrón.	
SESIÓN 9 (2 h)	22	Indiv.	Que el alumno transite de figuras de balanzas en equilibrio a la representación algebraica de la ecuación y las resuelva auxiliándose de descomposición o diferente representación de un número.	Hojas impresas que contienen figuras de balanzas que representan diferentes ecuaciones, también con figuras. (anexo 2.f)
SESIÓN 10 (2 h)	23	Equipo	Reafirmar el concepto de igualdad y representar en forma algebraica, así como resolver conservando la igualdad.	Hojas impresas que contienen figuras de balanzas que representan diferentes ecuaciones, también con figuras. (anexo 2.g)

	24	Grupal	Fomentar la participación en el pizarrón, a la vez que se corrige lo que sea necesario.	
SESIÓN 11 (2 h)	25	Equipo	Representar y resolver ecuaciones con distintas figuras, a partir de la representación algebraica.	Hojas impresas que contienen ecuaciones en su forma algebraica y simbología con su respectivo valor. (anexo 2.h)
SESIÓN 12 (2 h)	26	Indiv.	Resolución de ecuaciones sencillas mediante segmentos.	Hoja impresa con las ecuaciones a resolver. (anexo 2.h)
	27	Equipo	Resolución de ecuaciones mediante segmentos.	
SESIÓN 13 (2 h)	28	Indiv.	Evaluación intermedia.	• Prueba de evaluación formativa. • Anexo 2.h: $\mathbf{ax + b = c}$ $\mathbf{ax + bx + c = d}$ (anexo 3)
	29	Indiv.	Resolver ecuaciones algebraicas retomando las ideas del modelo de la balanza de “agregar” o “quitar” las mismas cantidades de ambos lados.	
SESIÓN 14 (1 h)	30	Indiv.	Escritura de la “definición” propiedad uniforme de la igualdad y operaciones que hasta ahora creen que se pueden utilizar con la misma.	*Cuaderno, plumas, pizarrón, plumones para pizarrón. En adelante se utilizará * cuando en una sesión estos sean los únicos recursos utilizados en el aula.
	32	Grupal	Consenso de la propiedad uniforme de la igualdad y su escritura para todo el grupo en el pizarrón.	
SESIÓN 15 (2 h)	34	Indiv.	Resolución de ecuaciones, anotando el elemento (inversos aditivos) que utilizan, por propiedad uniforme.	Hoja impresa con 72 ecuaciones para trabajar las de la forma: $\mathbf{ax = b}$ $\mathbf{ax + b = c}$ $\mathbf{ax + bx + c = d}$ (anexo 2.i)
	35	Grupal	Revisión de ejercicios en el pizarrón. Establecimiento de lo que se utiliza (respecto a elementos inversos).	

SESIÓN 16 (2 h)	36	Equipo	Resolución de ecuaciones, anotando el elemento (inversos aditivos y multiplicativo) que utilizan, por propiedad uniforme.	Hoja impresa con 72 ecuaciones para trabajar con las primeras. A resolver las que implican inverso aditivo y también multiplicativo. Se incluyen ecuaciones de la forma: $\frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ (anexo 2.i)
	37	Grupal	Revisión de ejercicios en el pizarrón. Establecimiento de lo que utilizan (respecto a elementos inversos), por propiedad uniforme de la igualdad. Los alumnos pasan al pizarrón a resolver ecuaciones y se analizan de forma grupal, respecto a la escritura y claridad de lo que se utiliza.	
SESIÓN 17 (1h)	38	Grupal	Continuación… Revisión de ejercicios en el pizarrón. Concretamente de los alumnos que expresan tener dudas sobre la utilización del inverso multiplicativo.	$\frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ (anexo 2.i)
SESIÓN 18 (2h)	39	Equipo	Que el alumno identifique, recuerde y aplique correctamente propiedades de los números, en este caso la distributiva, a la vez que sigue utilizando propiedades de la igualdad y de los números.	Hoja impresa con ecuaciones de mayor grado de dificultad y que también implican propiedad distributiva: $\mathbf{a(x+b) = c(x+d)}$ $\frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{b}} + \mathbf{c} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{e}}$ (anexo 2.j)
SESIÓN 19 (2h)	40	Indiv.	Balance o recapitulación de las propiedades que se han ido utilizando. Los alumnos escriben en su cuaderno un resumen de las propiedades.	*
	41	Grupal	Consenso y escritura de las propiedades utilizadas hasta el momento. La escritura y ordenamiento de las mismas es en el pizarrón.	

SESIÓN 20 (1h)	42	Indiv.	Definir: "Resolución de una ecuación".	*
	43	Grupal	Escritura en el pizarrón por parte de algunos alumnos, con ayuda de sus compañeros y precisiones del profesor.	
SESIÓN 21 (2 h)	44	Equipo	Resolución de ecuaciones que implican términos fraccionarios en ambos lados de la igualdad.	* Lista con 5 ecuaciones que son variaciones de la forma: $\frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{b}} + \mathbf{c} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{e}}$ (anexo 2.k)
	45	Grupal	Resolución, en el pizarrón por parte de los alumnos, de ecuaciones que implican términos fraccionarios en ambos lados de la igualdad. Se propusieron 3.	
SESIÓN 22 (2 h)	46	Indiv.	Repaso de ejercicios, desde los más simples hasta los que implican términos fraccionarios.	Hoja impresa con ecuaciones de distinto grado de dificultad. Incluye ecuaciones de la forma: $\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{a})}{(\mathbf{x}+\mathbf{b})} = \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{c})}{(\mathbf{x}+\mathbf{d})}$ (anexo 2.l)
	47	Grupal	Resolución en el pizarrón, de aquellos ejercicios que implican dificultad para el alumno.	
SESIÓN 23 (1 h)	48	Grupal	Resolución de ejercicios en el pizarrón, por parejas que no se resolvieron bien de la tarea 44.	(Anexo 2.k)
SESIÓN 24 (2 h)	49	Indiv.	Resolución de ecuaciones que implican términos fraccionarios en ambos lados de la igualdad y otros que impliquen desarrollo del binomio al cuadrado. Se propusieron 5.	$\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{a})}{(\mathbf{x}+\mathbf{b})} = \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{c})}{(\mathbf{x}+\mathbf{d})}$ $(\mathbf{x}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{c})(\mathbf{x}+\mathbf{d})$ (Anexo 2.m)
	50	Equipo	Revisión y corrección de tarea 49	
SESIÓN 25 (2h)	51	Indiv.	Examen conceptual.	Examen. Se anotan en el pizarrón las expresiones de las que deben obtener ecuaciones equivalentes. (anexo 3)
	52	Indiv.	Que el alumno construya ecuaciones equivalentes a partir de ecuaciones de la forma x=a.	

	53	Grupal	Construcción y revisión de algunas ecuaciones equivalentes en el pizarrón, por parte de los alumnos.	
SESIÓN 26 (1 h)	**54**	Indiv.	Resolución de una ecuación que implique eliminación de términos cuadráticos.	Se anota en el pizarrón: $\boldsymbol{\frac{x}{4}-\frac{x^2-8}{4x-5}=\frac{7}{4}}$
SESIONES 27-29	**55**	Equipo	Automatización. En esta etapa los alumnos ya no tienen que escribir las propiedades, pero sí las utilizan. Es para trabajar con dudas.	4 listas con ejercicios que en total suman 170 (anexo 2.n).
	56			
	57			
SESIÓN 30 (2h)	**55**	Indiv.	Examen o prueba final de la implementación.	Examen impreso. (anexo 1)

Descripción de la recopilación y organización de la información para su análisis

Recopilación de datos

Para realizar este trabajo se recurrió a observar el desarrollo de las sesiones durante 49 horas, en el lugar destinado para la clase de matemáticas, a un grupo de primer semestre.

A partir de lo anterior, se puede decir que de una manera intencionada se realizó una investigación tipo etnográfica: "el objeto de la etnografía educativa es aportar valiosos datos descriptivos de los contextos, actividades y creencias de los participantes en los escenarios educativos. Habitualmente, dichos datos corresponden a los procesos educativos tal como éstos ocurren naturalmente" (Goetz y Leompte, 1988:41).

Los resultados de dichos procesos se examinan dentro del fenómeno global, y pocas veces se consideran de forma aislada. La etnografía educativa se ha empleado para la evaluación, la investigación descriptiva y la investigación teórica. Los autores señalan que este tipo de investigación se caracteriza por realizarse en un espacio geográficamente limitado, con un grupo relativamente heterogéneo y por un periodo considerable de tiempo.

Por otro lado señalan la “observación participante” como estrategia de recopilación de datos, que es el caso para este trabajo, donde el observador fue el investigador-profesor del grupo a observar durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La recopilación de datos se realizó de las siguientes formas:

- Instrumentos realizados por el profesor:
  - Prueba diagnóstica.
  - Prueba sumativa.
- Videos de las sesiones.
- Audios de las sesiones.
- Fotografías de algunas producciones de los alumnos.
- Algunos registros del profesor.[4]

Organización de los datos para su análisis

Los resultados de la prueba diagnóstica y de la sumativa se organizaron de la siguiente manera: se vaciaron las respuestas de los alumnos para todas y cada una de las preguntas. Todas las respuestas dadas, y las no dadas también, se registraron en un formato para que estén visibles a un mismo tiempo.

Los videos fueron revisados en diferentes ocasiones por el investigador-profesor hasta que casi podía recordarlos de memoria, de tal manera que esto le ayudó a identificar, en algunos de ellos, pasajes que se consideran relevantes para testificar sobre lo ocurrido en clase, en diferentes momentos.

El investigador-profesor escuchó los audios varias veces hasta que podía asociar lo que escuchaba con momentos cruciales para el desarrollo de la clase. En seguida, los fragmentos considerados importantes, se transcribieron, para darles formato de texto.

Las fotografías recolectadas también se observaron en numerosas ocasiones para identificar las que ayudaran a documentar algo relevante al investigador-profesor, respecto del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El profesor-investigador revisaba sus notas con frecuencia para mantenerse actualizado sobre la dinámica que se desarrollaba durante el proceso de experimentación.

[4] **Nota**: para la prueba diagnóstica y la sumativa se utilizó el mismo instrumento, pero arrojó diferentes resultados.

Definición de criterios para la crítica y el análisis de la información

En lo que se refiere a contenidos, la prueba incluyó preguntas de tipo conceptual y procedimental. Por un lado, se analizará de acuerdo con las características que expresen que un concepto está presente en la estructura cognoscitiva del alumno, principalmente por la manera en que establezca conexiones o relaciones pertinentes entre varios conceptos. Para la parte procedimental, se analizará que el desarrollo se pueda justificar mediante propiedades de los números y de la igualdad. En la prueba escrita se tomará en cuenta en qué medida el alumno logra expresar los elementos que utiliza durante la resolución de la ecuación: principios y pertinencia en su uso para justificar resultados, expresión escrita de los criterios que emplea como justificaciones.

Asimismo, en las pruebas escritas se consideran aspectos como los siguientes:

1. Valoración de la respuesta a cada pregunta, en dos sentidos: en el tipo de respuesta correcta-incorrecta, completa-incompleta.
2. Valoración de cada alumno en toda la prueba. En este caso se analizará la mejoría del alumno (si la hubo), en la prueba en general.
3. Se revisan aspectos donde faltó fortalecer algún tópico (ya sea procedimental o conceptual).
4. Se buscará (comunicación y análisis), y en qué medida es capaz de detectar sus errores y corregir.

Para las preguntas de tipo conceptual, en los resultados se busca lo que Skemp (1993) señala como necesario en la formación de conceptos:

- El concepto debe contener las partes del objeto matemático al que se refiere.
- Se deben proporcionar ejemplos del concepto.
- Describir el objeto.
- Clasificar (identificar).

Para las preguntas de tipo procedimental, el análisis de las respuestas parte de un enfoque centrado en que el alumno justifique los pasos que realiza en la resolución de la ecuación; es decir, que justifique su procedimiento mediante propiedades. En ésta se encuentra la aplicación de propiedades algebraicas. Su uso correcto puede expresar, de cierta manera, la comprensión alcanzada por el alumno sobre las relaciones que tiene el concepto de ecuación con aquellos que le son pertinentes.

En cuanto a otros procesos, la prueba escrita contiene preguntas que implican manejo de distintas representaciones, por lo que en el análisis se buscan evidencias de que el alumno las maneja (si es el caso).

Capítulo 4. Análisis de resultados

Introducción

La intención de este trabajo fue fomentar el aprendizaje significativo para el tema de ecuaciones lineales, centrándonos en dos aspectos: conceptual y procedimental. Esto último a partir de la utilización de algunas propiedades algebraicas pertinentes para el tema de ecuaciones lineales. En un intento por lograr lo propuesto, las 29 sesiones de trabajo en que se llevó a cabo el experimento, se usaron de la siguiente manera.

Las sesiones 2 a la 12, se orientaron, principalmente, a formar conceptos. Aunque, en algunas tareas se formularon y resolvieron ecuaciones manejando ciertas “heurísticas”; la finalidad fue que el alumno se fuera apropiando o, al menos, familiarizando con los conceptos pertinentes y necesarios para después abordar con más herramientas la resolución algebraica de ecuaciones lineales.

De la sesión 13 a la 25, las tareas se encaminaron, de manera gradual, a la resolución algebraica de ecuaciones, pero todavía construyendo conceptos y formalizando sus nombres, por ejemplo, de las propiedades de la igualdad. Se retomaron propiedades de los números y de las operaciones. En esta etapa el alumno resuelve ecuaciones sin recurrir a la transposición de términos, y se procura que justifique paso por paso, de manera escrita, las propiedades que utiliza. Así, puede decirse que en esta etapa se desarrolla el aspecto procedimental para la resolución de ecuaciones lineales, pero se sigue ampliando el aspecto conceptual.

Las sesiones 26 a la 29 se destinaron a que el alumno tuviera un espacio para automatizar lo abordado, desde una amplia variedad de ejercicios, que se trabajaron en equipo con la supervisión del profesor.

Por lo anterior, el contenido del presente capítulo es: primero se describe de manera resumida la dinámica de una sesión típica de trabajo en el salón de clase; en seguida se abordan, de manera separada, las etapas de formación de conceptos, la procedimental y la de automatización de conocimientos; a continuación se analizan los resultados de la prueba sumativa y, por último se contestan las preguntas de investigación y se formulan las conclusiones.

Descripción de una clase típica durante la experiencia didáctica

1. Saludo: el profesor entra y saluda

Asistencia: en seguida del saludo el profesor pregunta:

a) A un alumno que está presente en ese momento, y que no asistió la sesión anterior, la razón de su falta.
b) Si alguno no ha llegado a la sesión presente, la pregunta es si alguien sabe, ¿por qué no ha llegado?
c) En caso de que alguien haya faltado más de una vez seguida, la pregunta es si entra a las demás materias, si viene a la escuela y no entra, si no viene, si tiene problemas.
d) A veces el profesor también comparte algún acontecimiento con los alumnos, ya sea un contratiempo o estado de salud, etc.

Esto se hace de manera rápida, de manera que no consuma mucho tiempo, pero con suficiente interés para que los alumnos sepan, por un lado, que si faltan el profesor siempre se da cuenta, que cuando eso suceda les va a preguntar y, por otro lado, para que le comuniquen a los que faltaron que el profesor se dio cuenta, que preguntó. Esto con la intención de mostrar al alumno que le importa al profesor, que su ausencia se nota y tratar, por un lado, de crear un compromiso y, por otro, generar un ambiente de confianza.

2. Introducción a la sesión

Consiste en la recapitulación de la sesión anterior: conceptos o procedimientos trabajados en sesiones anteriores. Esto mediante interrogatorio y de manera grupal, guiado por el profesor.

También puede consistir en el balance de alguna tarea de una sesión anterior, que no se ha concluido y para establecer lo que prosigue.

Además, se asignan tareas, se dan indicaciones de las formas de trabajar durante la sesión, se reparten materiales e indican el o los productos que son para entregar al profesor.

Muchas veces, las tareas a realizar se entregan impresas y pueden o no contener indicaciones. Si no las contiene, el profesor las proporciona de manera verbal.

En caso de no haber material impreso para la sesión, el profesor anota en el pizarrón el concepto, las expresiones o lo que se va a trabajar, y proporciona indicaciones de manera verbal.

3. Realización de las tareas

En las sesiones, la realización de las tareas puede responder a tres formas de organización de trabajo.

a) Trabajo individual

Cuando los alumnos trabajan de manera individual, no hablan con sus compañeros ni intercambian ideas; es decir, el alumno aborda la tarea con sus propios recursos, porque son momentos de reflexión (Adame, 2010). Así, hace lo que puede sobre conceptos y procedimientos, tratando de recordar y aplicar cosas trabajadas con anterioridad. El alumno sabe que debe realizar la tarea de forma individual, para luego poder trabajar en equipo. Al terminar la tarea, los alumnos deben permanecer en silencio, para dar oportunidad a sus compañeros de seguir trabajando.

Por su parte, el profesor observa el trabajo de los alumnos y si alguno le hace preguntas, no proporciona la respuesta, más bien formula más preguntas para verificar si el alumno puede descubrir, recordar y hacer más por su cuenta. El profesor está a cargo de medir el tiempo que ha estimado para la tarea y, si es necesario, proporcionar más minutos o darla por terminada antes; es decir, las decisiones del tiempo muchas veces dependen de los avances que observa mientras los alumnos realizan la tarea. El tiempo se ajusta porque es difícil calcularlo con exactitud.

b) Trabajo en equipo

De acuerdo a Adame (2010), la finalidad de esta forma de trabajo es que los alumnos profundicen más algo que ya trabajaron de forma individual.

En general, los equipos se conforman de cuatro alumnos cada uno, de acuerdo con como estén sentados o el número de lista, a veces es conforme van llegando. Este tipo de trabajo se realiza para continuar o mejorar una tarea que se hizo de forma individual.

En este tipo de organización del trabajo, primero, los alumnos disponen el mobiliario de forma adecuada, pueden hablar entre sí, ayudarse, compartir e intercambiar ideas, materiales y elaborar productos que suelen ser continuación de la tarea individual. La idea es que comparen lo que ya hizo cada uno, discutan, detecten sus errores y los de los demás, concluyan, argumenten y enriquezcan sus conceptos y procedimientos e, incluso, explicarse las tareas unos a otros.

De esta manera se fomentan actitudes y valores necesarios para desenvolverse en forma adecuada dentro y fuera de la escuela. Como resultado de su trabajo, deben anotar sus conclusiones, argumentos o procedimientos que han consensado como equipo, y saben que se usarán en una discusión grupal, posteriormente.

El papel del profesor es, primero, indicar la forma de reunir a los alumnos en equipos, observar el trabajo en los distintos equipos, fomentar la participación de todos los integrantes, auxiliar y guiar a los equipos con preguntas o ejemplos. También debe cuidar que el ambiente sea de respeto y confianza. Estar al pendiente del tiempo necesario para la tarea y darla por concluida una vez que todos los equipos terminaron o, al menos, tienen material para discutir o presentar al grupo.

c) Trabajo grupal

El trabajo grupal se usa en las sesiones para concretar lo que se ha trabajado, ya sea en equipos o individualmente: requiere la participación colectiva de toda la clase.

Los alumnos participan de acuerdo con el orden que se establezca, los equipos plantean o explican sus resultados y, a partir de ahí, entablan una discusión entre ellos y con el profesor. Se trata de reafirmar las ideas que han ido desarrollando, o reconducir lo realizado, en el caso de ser necesario (Adame, 2010).

La discusión se entabla cuando el profesor hace una pregunta, ya sea de forma verbal, porque esté escrita en los materiales impresos de los alumnos, o bien se anota en el pizarrón. Una vez planteada la pregunta, toca a los alumnos responder de acuerdo con lo que, por equipo o de manera individual, habían trabajado.

Los turnos de participación pueden ser diversos: por participación voluntaria, levantando la mano, el profesor cede la palabra a uno de ellos, o el profesor elige según lo que considere a partir de sus observaciones. A veces puede optar por quienes no han hablado mucho, por quien sabe que tiene algo incompleto o incorrecto y también puede elegir a un alumno que contestará correctamente o casi, para que todos presten atención, y el grupo concluya o establezca qué se manejará en adelante para cierto concepto o procedimiento.

En las discusiones grupales, en general el profesor anota en el pizarrón ideas vertidas por los alumnos, para que al final se escriba, por consenso, la versión final de lo que se trabaja y que, quizá, se necesitará retomar en distintos momentos.

A menudo, las discusiones grupales se extienden, porque se trata de que los alumnos reflexionen y profundicen. Cuando ha sido necesario, la discusión se extiende hasta la siguiente sesión, ya que se procura que los alumnos descubran y construyan, lo más posible, sus conocimientos. Si bien es cierto que el profesor “ayuda en la formalización”, esto lo hace cuando el alumno ya realizó mucho trabajo.

En este tipo de dinámica el tiempo de duración es más complicado de estimar, porque pueden surgir imprevistos y se les debe dar tiempo para defender sus posturas o modificarlas a conciencia.

Al igual que en el trabajo en equipo, se procura que las actitudes y los valores sean apropiados, como el escuchar y respetar a la persona que tiene la palabra, y respetar los turnos de participación. Esto requiere de controlar y dirigir acertadamente la discusión.

d) Tareas extraclase

Se pueden enviar por correo o WhatsApp, entregar de forma impresa, o anotarse en el pizarrón.

> **Nota**: durante el desarrollo de las sesiones, a los alumnos se les dio la indicación de trabajar todos los ejercicios con pluma; lo que escribieran y se hubieran equivocado, no lo tachaban, lo encerraban en recuadros con diagonales, para distinguirlo de lo que fuera correcto. El profesor debía revisar su cumplimiento.

Etapa de formación de conceptos

Una idea rectora en este trabajo, fue reconocer que los alumnos conocen algo del tema de Ecuaciones lineales, tienen cierta experiencia en él, no les es completamente desconocido, y que la palabra “ecuación” les recuerda algo, les evoca ciertas ideas, por sus cursos anteriores de Matemáticas. Tal vez las ideas que tienen son incorrectas, están incompletas, sean inconexas, imprecisas, pero son las ideas que conocen y es de lo que los profesores debemos partir.

Así, en las sesiones destinadas a la construcción o ampliación de conceptos, la dinámica que se siguió, en términos generales, fue a partir de tareas que demandaban la externalización, de manera escrita o hablada, de conceptos o su utilización, sobre todo en tareas de clasificación, que exigen la posesión de conceptos y en las que los alumnos trabajaban de manera individual.

Luego, en grupos pequeños comparten con sus pares lo que trabajaron y, en este caso, la terea consistió en consensuar una respuesta única, si era posible.

En seguida, socializaban en grupo las distintas respuestas, siempre con el objetivo de llegar a obtener la “mejor” versión del concepto buscado. En todo momento de este proceso se buscó que el alumno se involucrara por completo en el trabajo: el profesor plantea la tarea, organiza el trabajo, conduce la discusión, propone preguntas concretas que orienten la atención del alumno hacia cierto aspecto difícil de percibir, pero siempre se abstiene de proporcionar la respuesta buscada. Todo apegándose a la normas sociomatemáticas establecidas.

Se intentó evitar el “juicio de autoridad” para sancionar el conocimiento matemático, aprovechando tantas veces como fuese necesario y en cuanta ocasión se presentaba, recordar a los alumnos que la comunidad de matemáticos ha desarrollado criterios adecuados para sancionar los saberes y que no hay necesidad de recurrir a una “autoridad” para tal fin. Es una tarea difícil, lenta, desesperante, si no se está convencido de ello, con reticencia, en un principio, de algunos alumnos para quienes “el maestro debe explicar todo, lo más claro posible, pues para eso es maestro”, y él es alumno para “escuchar y anotar en su cuaderno lo que el profesor escribe en el pizarrón”, y después, tal vez repasarlo.

Siguiendo este proceso se construyeron los conceptos: ecuación, expresión algebraica, relación de igualdad, incógnita, solución de una ecuación, resolución de una ecuación, propiedades de los números reales, propiedades de las operaciones algebraicas, propiedades de la igualdad, y justificación de la resolución de una ecuación por transposición de términos. A manera de ejemplo del proceso de construcción de un concepto, se presenta el caso del de ecuación; los otros conceptos se construyeron de manera parecida.

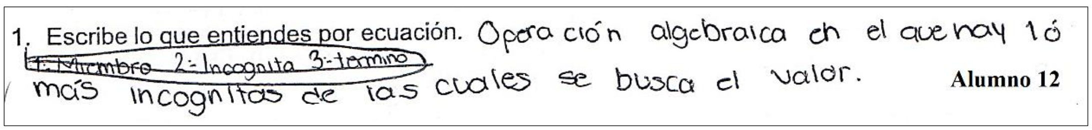
Concepto de ecuación

Las preguntas que orientaron la actividad son:

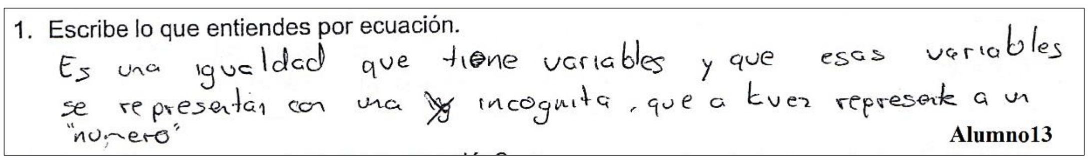
- ¿Qué es una ecuación?
- ¿De qué elementos se compone una ecuación?
- Escribe 10 ejemplos de ecuaciones ordenadas de acuerdo con su dificultad.

La primera pregunta tiene la finalidad de propiciar que el alumno recuerde y exprese las ideas que le evoca la palabra “Ecuación”. Con la segunda se intenta orientar y construir una definición ostensiva de ecuación: es aquella que enumera las características necesarias y suficientes que deben tener los objetos, para que se les aplique con propiedad tal noción, y el tercer punto busca que los alumnos pongan en acción la noción que tengan de “ecuación más o menos difícil” y valorar la consistencia que mantengan en la resolución de las tres preguntas.

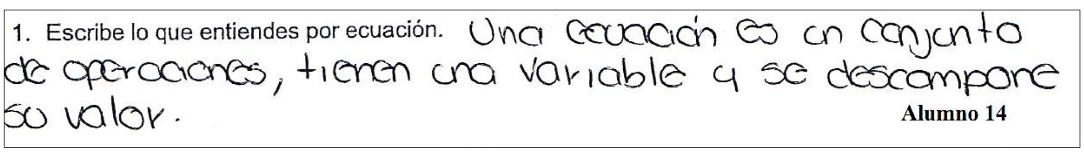
El trabajo individual produjo 22 resultados diversos sobre las tres preguntas, cuatro ejemplos típicos son los siguientes:


1. Escribe lo que entiendes por ecuación. Operación algebraica en el que hay 1 ó ~~1: Miembro 2: Incognita 3: termino~~ más incognitas de las cuales se busca el valor.

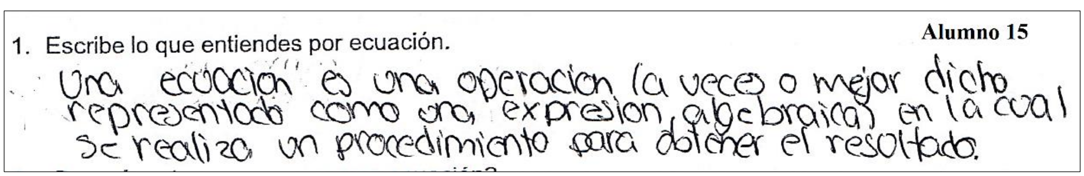
Alumno 12


1. Escribe lo que entiendes por ecuación.
Es una igualdad que tiene variables y que esas variables se representan con una ~~x~~ incognita, que a tvez represent a un "número"

Alumno13


1. Escribe lo que entiendes por ecuación. Una ecuación es un conjunto de operaciones, tienen una variable y se descompone su valor.

Alumno 14


Alumno 15

1. Escribe lo que entiendes por ecuación.
Una ecuación es una operacion (a veces o mejor dicho representado como una expresion algebraica) en la cual se realiza un procedimiento para obtener el resultado.

La característica fundamental de estas distintas producciones es: reconocen algunas características pertinentes al mismo tiempo de otras que no lo son. La deficiencia más notoria es que la mayoría de alumnos no reconoce que una ecuación es una *igualdad.* La relación de igualdad la utilizaron para expresar el resultado final de un conjunto de operaciones aritméticas.

Utilizando lo que cada estudiante produjo en su trabajo individual, comparten sus resultados con otros tres compañeros en un grupo pequeño. A continuación se reproduce una muestra de interacción en un grupo pequeño: son pocos episodios, transcritos de la audiograbación, que forman parte de una interacción mucho más extensa, pero que ilustra lo insustituible de la interacción entre pares.

Alumno 14: Pero el resultado no a fuerzas, a fuerzas vendría siendo el que está después del igual.

Alumno 13: Ése no es el resultado, es que cuando te ponen una ecuación y te dicen: ¿está resuelta? No está resuelta, porque no sabes el valor de x.

Alumno 14: ¿Entonces cómo buscamos el nombre de ésta?

Alumno 15: … Es que es un coeficiente, sigue siendo un coeficiente, éste también es un coeficiente.

Alumno 14: Entonces hay que ponerle signo, coeficiente, literal y exponente, "bueno, yo digo".

Alumno 15: Ay, entonces sí ponemos eso, ¿no?: signo, coeficiente, literal, exponente e igual.

Alumno 13: Sí, porque si no viene éste, no sería ecuación.

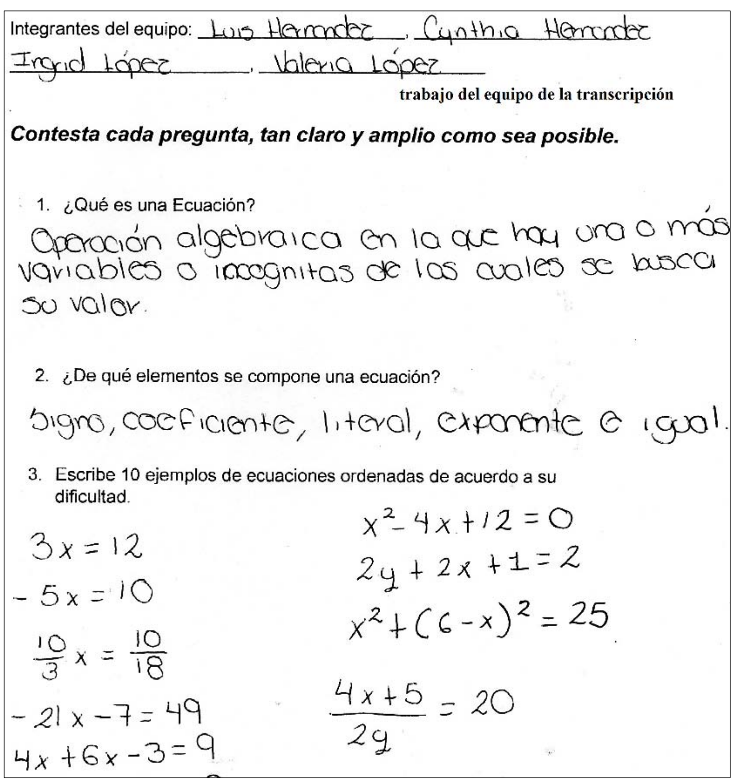
Alumno 14: ¿Pero no vendría en los signos?

Alumno 13: No, el igual no es un signo, el signo es positivo y negativo, el igual es igual.

Alumno 14: ¿Quién lo quiere escribir?

Alumno 15: Tú…

La discusión, el trabajo y la actividad del equipo se resumen en una producción escrita. El siguiente gráfico es un ejemplo de producción de equipo:



Integrantes del equipo: Luis Hernandez, Cynthia Hernandez, Ingrid López, Valeria López

trabajo del equipo de la transcripción

Contesta cada pregunta, tan claro y amplio como sea posible.

1. ¿Qué es una Ecuación?

Operación algebraica en la que hay una o más variables o incognitas de los cuales se busca su valor.

2. ¿De qué elementos se compone una ecuación?

signo, coeficiente, literal, exponente e igual.

3. Escribe 10 ejemplos de ecuaciones ordenadas de acuerdo a su dificultad.

$3x = 12$

$-5x = 10$

$\frac{10}{3}x = \frac{10}{18}$

$-21x - 7 = 49$

$4x + 6x - 3 = 9$

$x^2 - 4x + 12 = 0$

$2y + 2x + 1 = 2$

$x^2 + (6 - x)^2 = 25$

$\frac{4x+5}{2y} = 20$

Analizando resultados, como el anterior, se observa que hubo modificaciones en el concepto que se produjo en el trabajo individual. ¿Hasta qué punto las nuevas ideas producidas fueron compartidas por todos los integrantes del grupo pequeño? Esto no lo sabemos, pero es un aspecto interesante en este tipo de actividad, así como la siguiente interrogante: ¿qué tanto aportó cada integrante del grupo pequeño?

Los resultados obtenidos por los siete grupos pequeños sirvieron de base para la discusión grupal. Posterior al trabajo en equipo, se dio la discusión grupal donde un alumno de cada equipo leyó lo que consensuaron y registraron por escrito.

Una vez que se ponen frente al grupo las producciones de los grupos pequeños, el profesor pregunta: ¿qué les parece?, ¿qué observan? ¿Tienen cosas en común? ¿En qué son diferentes? ¿Cuál consideran que es la mejor respuesta y por qué? Los alumnos participan de manera ordenada emitiendo su opinión. En seguida se muestran algunas participaciones, que son transcripciones de audios de video:

Profesor: ¿Alumno 21 qué opinas?

Alumno 21: Ya ahorita que lo veo, no puede tener más de dos iguales.

Alumno 13: No puede tener más de un igual, por qué ya no será ecuación.

Alumno 21: Quise decir que no puede tener más de dos expresiones algebraicas.

Profesor: Entonces voy a borrar para anotar la definición de ecuación. ¿Cómo quedaría?

Alumno 3: Igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Profesor: Bueno, pero hay que anotarle algo para iniciar con buena redacción. –El profesor anota "Es", y dice– ya les ayudé con el *Es*... ¿Quién me va a dictar?

Alumno 18: Es la igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Alumno 2: Es una, ¿no?

Alumno 12: Es una…

Profesor: ¿Qué más?

Alumno 15: Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Profesor: Bueno, eso es para empezar, para eso vamos a ver qué anotaron en las partes de la ecuación, porque esa definición todavía está incompleta.

[Se inicia con la discusión grupal de los elementos que conforman la ecuación, con la intención de agregar en la definición más elementos que ayuden a formar un mejor concepto.]

El concepto de ecuación es muy importante en matemáticas: se le puede encontrar desde los primeros años de educación primaria hasta los límites propios de lo que sabemos de matemáticas. Por tal razón, todo lo que se haga para su comprensión no sobra.

En este sentido, a continuación se presenta parte del trabajo realizado en el salón de clases con el propósito de ayudar a los alumnos a fortalecer ese concepto: a partir de material concreto, tangible, visible, manipulable, se transitó por el lenguaje hablado y escrito hasta llegar a la simbolización, que es la esencia de las matemáticas.

Utilizando como modelo, para la ecuación lineal, una balanza de dos platillos en equilibrio, y objetos materiales para simular números conocidos y desconocidos, y agregar y quitar como parte del modelo para operaciones aritméticas, se realizaron acciones motrices que luego se verbalizaron y, finalmente, se simbolizaron, con el fin de llegar a la representación simbólica de una ecuación lineal.

Hay que resaltar que el modelo de la balanza sólo se usó en la construcción del concepto básico de ecuación y nunca para intentar simular ecuaciones complejas, cuya modelación, con la balanza, es un problema más complejo que la propia resolución en forma simbólica.

En seguida se presentan fragmentos del trabajo en grupos pequeños y de discusión grupal, donde se intenta transitar del material concreto a la simbolización matemática.

Sesión de la balanza. Fue una sesión de trabajo en equipo con supervisión del profesor (indicaciones en audio).

> **Profesor**: Tienen canicas de tres tamaños distintos; ustedes van a asignar a la canica del tamaño que quieran un valor o "x" o nombrarla con cualquier otra letra, y depende de cuántas de ese tamaño utilicen, y de qué combinaciones hagan a modo de equilibrar su balanza; con base en cómo nombren a una canica o qué valores les asignen, van a formular la ecuación en su forma algebraica y dibujar la balanza equilibrada, para que veamos de dónde están obteniendo la ecuación.

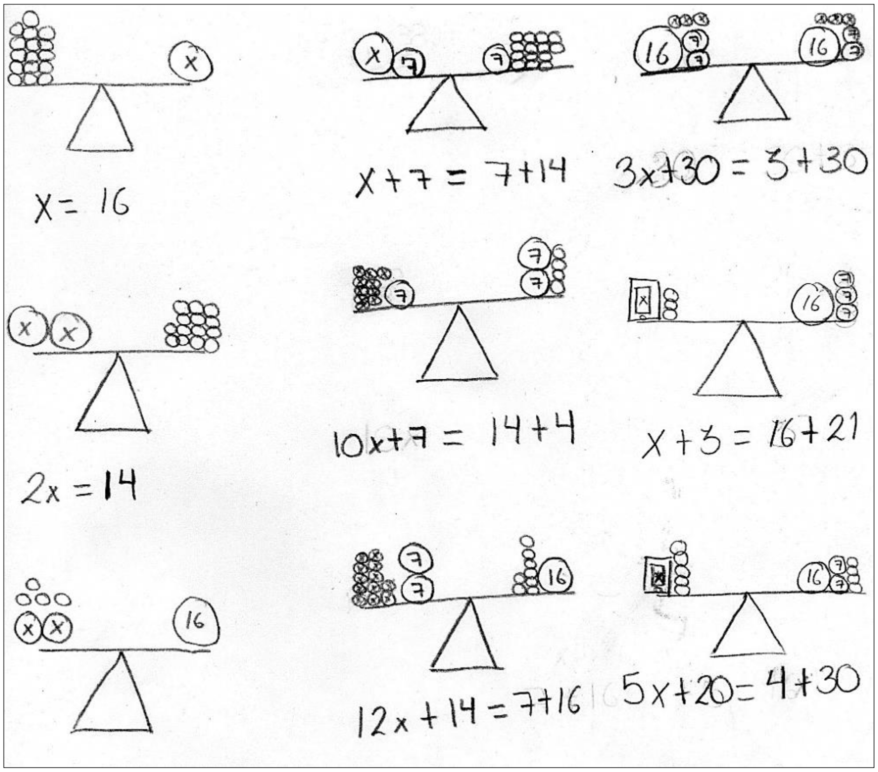
Fragmento de transcripción de la sesión 7, construcción de ecuaciones en su forma algebraica con la balanza real, por equipo:

> **Alumno 3**: Es que no entendí lo que hay que hacer.
>
> **Alumno 15**: O sea, si la balanza ya está equilibrada y ésta es x, le pones x igual a 16.
>
> **Alumno 14**: Así, mira; por ejemplo, yo ahorita puse que x, que es éste, equivale a 16 bolitas.
>
> **Alumno 3**: ¡Yaaa!
>
> **Alumno 15**: ¿Maestra cuántos ejemplos quiere?
>
> **Profesor**: Muchos, acuérdense que también van a dibujar la balanza; así van a tener diferente representación.
>
> **Alumno 15**: Ahora hay que decir que éstas son las x, las chiquitas.
>
> **Alumno 14**: ¡Ajá!

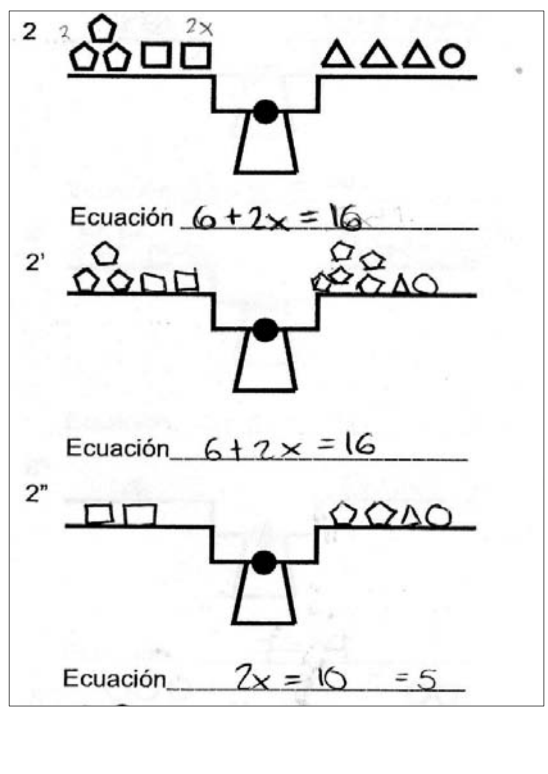
Alumno 15: Cuando lo escribas le pones 10x más siete. ¿Y aquí cuántas son alumno 3?

Alumno 3: Igual a 4x más 14.

Alumno 14: Entonces queda 10 x más siete igual a 4x +14.



Balanzas en papel (sesiones 9-10). Fragmentos de transcripción de equipos y de discusión grupal.



Alumno 9: En el segundo sería 6 más 2x igual a 16.

Alumno 8: Aquí podemos descomponer el 16, podemos poner el 10 + 6.

Alumno 9: Cancelamos los 6 y queda 2x igual a 10.

Alumno 5: Cada cuadrito valdría x, ponemos cinco bolitas y la que estaba.

Alumno 9: No, pues podríamos poner una estrella y después ponemos un triángulo y un círculo.

Alumno 5: ¡Ah, pues sí!

Alumno 9: O para que quede mejor podemos ponerle dos de éstos.

Alumno 8: ¿Para la última ya tenemos que tener el valor de x o nada más otra ecuación?

Alumno 5: Si el valor de x, por decir cancelamos este es el dos, podríamos poner 2x es igual a 10. ¡No, esperen!, ¡x es igual a cinco!

Alumno 9: Sólo serían los dos cuadros y los triángulos.

Alumno 5: Quedando 2x es igual a 10, ¿o tenemos que poner x es igual a cinco? No hay otro espacio.

Alumno 8: Podemos poner a las dos.

Otro equipo:

Profesor: ¡Ay, dios! ¿Qué figura es esa?

Alumno 3: Es que no sé hacer esas estrellas.

Alumno 2: Maestra… es que, bueno, yo lo tengo así, o sea que 2x es igual a 10, pero alumno 3 dice que tiene que salir x igual a cinco.

Profesor: ¿Alguno de los dos está mal?

Alumno 2: Pues en sí, no.

Alumno 16: Eso es lo que yo digo.

Discusión grupal:

Profesor: Bueno con ese ejemplo que se hizo, ¿qué se está utilizando? Ideas, denme ideas.

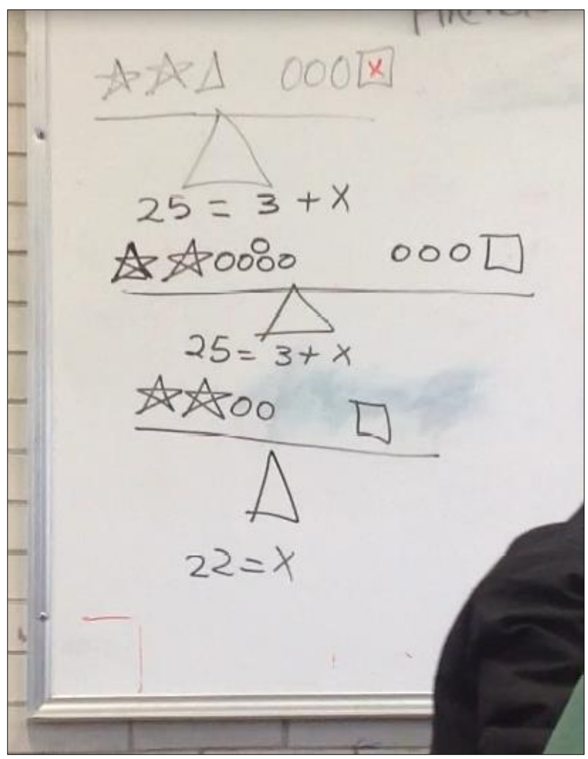
Alumno 19: Pues que, mmm, es como la balanza de verdad, quitamos al mismo tiempo.

Profesor: A ver otro; alumno 4, ¿tú que dices?

Alumno 4: Que tiene razón, pero también se puede utilizar lo de descomponer cuando necesitemos.

Profesor: Descomponer qué.

Alumno 15: Los números, ponerlos con otras figuras para que se vea lo que se quita… mmmm, bueno para que se vea claro lo que es, lo mismo en las dos, en las dos balanzas, ¿no?, lados de la balanza.



Alumno 9: Pero si uno sabe cuánto valen las figuras, se pueden quitar, si equivalen al mismo número.

Profesor: No entiendo.

Alumno 9: Es que si hay dos triángulos que valen 5, y una estrella que vale 10, los podemos quitar, aunque no sea la misma figura.

Alumno 17: Pero si no cuentan bien, es mejor pasarlas a la misma figura, para que veamos bien lo que es igual.

Alumno 5: Es que el del pizarrón está fácil, pero acá hay otros que hay que descomponer para poder eliminar.

Profesor: Alumno 13, ¿qué conviene más?

Alumno 13: Yo digo que como nos convenga… (*risas del grupo*). Bueno a veces se puede descomponer y a veces no es necesario, el chiste es que haya cosas iguales de los dos lados para eliminarlas.

Profesor: Alguien más que quiera opinar, para seguir avanzando.

Alumno 17: Pues puede ser de diferentes formas, y que esté bien.

Etapa procedimental: resolución de ecuaciones lineales

La clasificación entre etapa de formación conceptual y procedimental, es sólo para poner en claro dos procesos fundamentales en la experiencia documentada: de manera rigurosa, no puede haber una sin la otra.

Por etapa procedimental se debe entender todo lo relacionado con los métodos, entre ellos los algoritmos, para llegar a encontrar la solución de una ecuación lineal. Entre los métodos abordados están los siguientes: de forma mental, para ecuaciones lineales “muy simples”, descomponiendo números en ambos miembros de la ecuación y usando propiedades de cancelación de la igualdad; representando ecuaciones sobre rectas numéricas e identificando las soluciones como segmentos de ellas; representando a una ecuación como una balanza de dos platillos y realizando “operaciones” sobre ambos platillos para mantener el equilibrio, y por último, justificando la resolución con base en propiedades de los números, las operaciones y la igualdad, que son los tres objetos matemáticos con los que se construyen las ecuaciones.

Es conveniente hacer notar que los modelos gráficos, geométricos y materiales empleados para simular ecuaciones, sólo se utilizaron para aclarar ideas y nunca se pretendió “abusar” de ellos como recurso: se usaron en casos donde realmente permitían aclarar la situación, pero nunca cuando encontrar la representación no algebraica se erigía en un problema más difícil que la propia resolución de la ecuación por otros métodos, sobre todo el algebraico.

En resumen, los distintos procedimientos para resolver ecuaciones tratados en la experiencia fueron los siguientes:

- Resolución de ecuaciones por descomposición de cantidades.
- Representar y resolver ecuaciones con distintas figuras, a partir de la representación algebraica. Resolución de ecuaciones sencillas, mediante segmentos.
- Resolver ecuaciones algebraicas retomando las ideas del modelo de la balanza de “agregar” o “quitar” las mismas cantidades de ambos lados.

- Resolución de ecuaciones anotando el elemento (inversos aditivos y multiplicativo) que utilizan, por propiedad uniforme.
- Resolución de ecuaciones lineales aplicando propiedades de números y de la igualdad.

A continuación se muestra parte de la discusión grupal, llevada a cabo en la sesión 8, donde se trató la resolución de ecuaciones por descomposición.

Transcripción: descomposición de cantidades (sesión 8):

Alumno 22: Maestra, ¿aquí puedo hacerle de otra forma? ¿Le puedo poner menos más ocho?

Profesor: Pero, o sea, ¿vas a tener ocho igual a t menos 12 más ocho?

Alumno 22: No.

Profesor: Tú debes tener, en el siguiente renglón, la misma cantidad; por ejemplo, fíjate en el ejercicio de acá, aquí abajo sigue habiendo 16, ¿sí o no? –señala ejemplos de la hoja.

Alumno 22: Sí.

Profesor: Y aquí sigue habiendo 66, aquí tengo 22, fíjate bien qué tienes que utilizar.

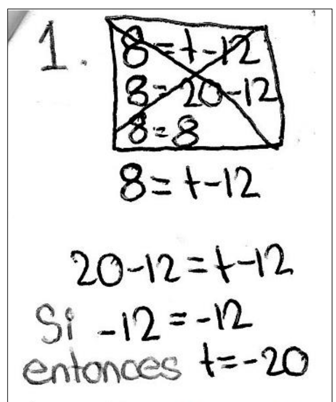
Alumno 22: ¿Ocho igual a t, es más, o menos? Más, ¿verdad?

Alumno 20: ¡Ajá!

Alumno 22: ¡Ay, ya me confundí otra vez! Maestra, ¿aquí es -8 o -12? Yo digo que es -8, ¿no?

Profesor: ¿El ejercicio original cuál es?

Alumno 22: Este –señala el ejercicio 8=t-12.



Alumno 20

Profesor: ¿Pero qué hace eso ahí? Eso ya es otra ecuación.

Alumno 22: Le voy a poner -8, pero se van a cancelar los ochos. ¿Entonces serían 20?

Profesor: Depende de qué lado de la igualdad.

Alumno 22: Entonces aquí es -20 más 8.

Profesor: ¿-20 más 8 cuánto da?

Alumno 22: -12.

Profesor: ¿Cómo queda entonces?

Alumno 22: 8 igual a t-20 más 8.

Profesor: ¿Y eso sí es o no es?

Alumno 22: Sí, ¡aaah, yaaa!

Profesor: Tacha eso como hemos dicho, porque luego tú misma te vas a confundir, ya ese menos ni siquiera se distingue ahí, hazlo en limpio.

Alumno 22: No se vale, bueno de los errores se aprende, también táchala tú, alumno 20.

Alumno 20: ¡Sí, ya sé!

Alumno 20: Ocho igual a t -20 más ocho.

Alumno 22: Queda cero igual, ¿no?, si ocho es igual a ocho, queda cero igual a t-20.

Alumno 20: Entonces es t igual a 20.

Alumno 22: Todavía estoy confundida.

Alumno 20: Vamos hacerlo al revés.

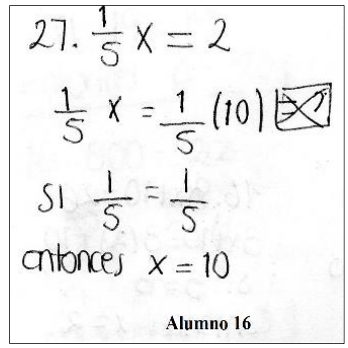
Alumno 22: ¿Cómo?

Alumno 20: Para que quede de este lado, si ponemos 20-12 sigue siendo 8.

Alumno 22: ¡Aaaah!, el signo sigue siendo positivo, si menos 12 es igual a menos 12, queda directo que t igual a ocho.

Trabajo grupal:

Profesor: A ver, del equipo que terminó primero, ¿quién va a pasar?



Alumno 16

Alumno 9: ¡Yo!

[*Alumno 9 escribe en el pizarrón*.]

Profesor: A ver, todos observen la ecuación 1. ¿Ya lo tienen así o lo hicieron de otra forma?

Alumno17: Sí.

Profesor: Alumno 18, ¿tu equipo?

Alumno 18: Lo hicimos igual.

Profesor: ¿Algún equipo lo tiene diferente o tienen dudas? ¿Alumno 13?

Alumno 13: Lo tenemos bien.

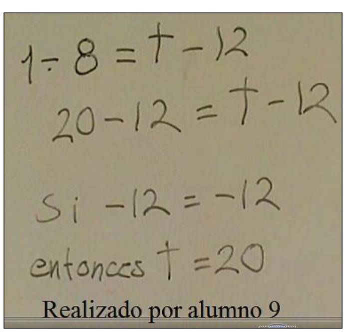
Profesor: ¿Cuántos hay, alumno 23?

Profesor: Levante la mano quien tenga duda y pregúntele a alumno 9.

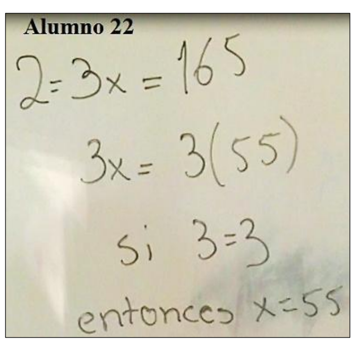
[*Así se resolvieron en el pizarrón los primeros 6 ejercicios, para que le tocara uno a cada equipo*.]

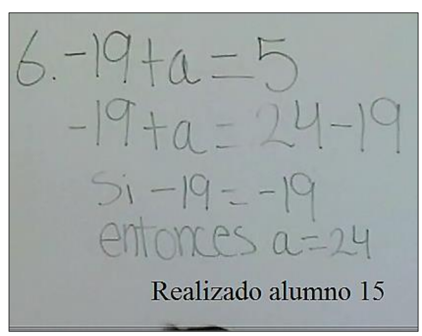
Lo importante de esta tarea fue que los alumnos analizaran para elegir adecuadamente el número que les conviene descomponer o, mejor dicho, representar de otra forma, a su vez que deben conservar la igualdad.

Ejercicios en el pizarrón.

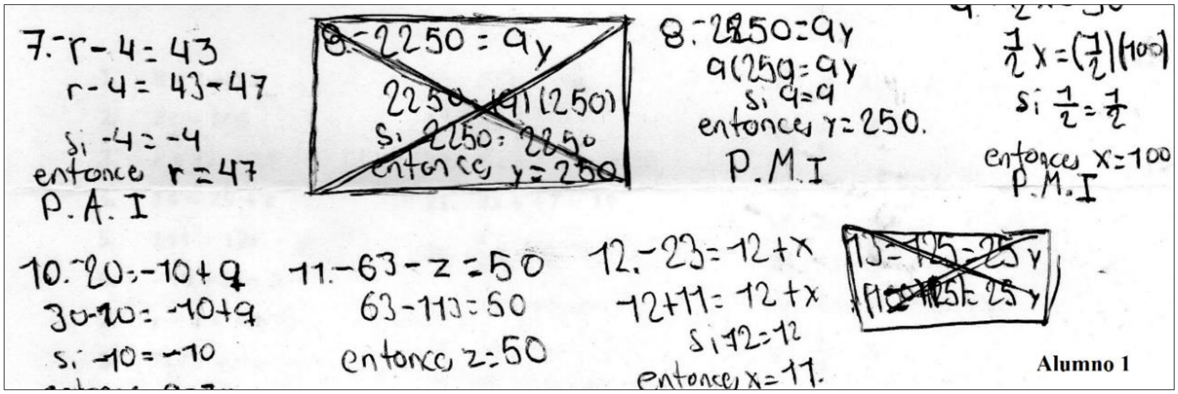


Realizado por alumno 9


Alumno 22



Realizado alumno 15



Alumno 1

Los alumnos trabajaron de manera individual, en equipo y grupal, pero cada quien con sus hojas, por lo cual no hay productos por equipo.

El siguiente ejemplo se refiere a la construcción del método de resolución de ecuaciones utilizando propiedades de los números reales, de la relación de igualdad y de las operaciones de suma y producto.

Después de la sesión 13, en que los alumnos estuvieron resolviendo ecuaciones sencillas sólo con la idea de "agregar o quitar" en ambos lados de la igualdad, prosiguió la sesión 14 donde se redactó, de manera individual, la Propiedad uniforme de la igualdad, y después se discutió de forma grupal.

Parte de la discusión es la siguiente:

Discusión grupal propiedad uniforme de la igualdad

Profesor: ¿Qué anotaste alumno 18?

Alumno 18: Si se agrega lo mismo en ambos lados de la igualdad, entonces la igualdad se conserva.

Profesor: ¿Qué es lo mismo?

Alumno 18: Lo que se le agrega, ¿cómo que qué es lo mismo?

Profesor: Sí, ¿qué es lo mismo? ¿Una mesa, un bulto, a qué cosa te refieres?

Alumno 19: A una cantidad.

Alumno 18: Entonces quedaría: si se agrega la misma cantidad en ambos lados de la igualdad, se mantiene la igualdad.

Profesor: Y cuando se agrega, ¿a qué te refieres, a una cantidad positiva, a una negativa, a una multiplicando?

Alumno 19: A una cantidad en general maestra.

[*Risas.*]

Profesor: A ver tú qué anotaste en, alumno 19.

Alumno 19: Si se agregan las mismas cantidades en ambas expresiones se mantiene la igualdad, si se quitan las mismas cantidades en ambas expresiones se mantiene la igualdad.

Profesor: Alumno 16.

Alumno 16: Si se agrega el mismo valor de un lado, se tiene que agregar del otro, y se mantiene la igualdad.

Profesor: Alumno 6, lee lo que tienes.

Alumno 6: Si a una ecuación se le suma un valor, se agrega ese valor en ambos lados de la igualdad para que se conserve, si a una ecuación se le resta un valor, se agrega ese valor en ambos lados de la igualdad para que la ecuación se conserve.

Profesor: Yo me imagino que cuando dice "se agrega", y va a restar una cantidad, quiere decir que se está agregando el mismo número restando en ambos lados de la igualdad. La que sigue alumno 6.

Alumno 6: Si a una ecuación se le divide un valor, se agrega ese valor en ambos lados de la ecuación, para que la ecuación se conserve.

Profesor: A ver todos, ¿qué le pondrían para que la idea quede más clara, o ya les queda clara la idea?

[*Algunos alumnos quieren leer lo que ellos escribieron y levantan la mano, el profesor va cediendo la palabra 1 por 1.]*

Alumno 1: Yo puse: si a una ecuación se le agrega una cantidad ya sea positiva o negativa, ésta se le debe agregar al otro lado la misma cantidad, ya sea positiva o negativa para poder mantener la ecuación.

Profesor: Alumno 17.

Alumno 17: Yo le puse: la propiedad uniforme es cuando se agrega al mismo tiempo y en ambos lados de la ecuación un valor o más, ya sea positivo o negativo, y para poder tener una igualdad.

Profesor: ¡Ah! yo creí que la igualdad la tenía desde un principio, ¿qué palabra está haciendo ruido?

Profesor: A ver alumno 17, ¿qué palabra queda mejor?

Alumno 1: Mantener.

Alumno 17: Conservar.

Profesor: Alumno 10.

Alumno 10: La propiedad uniforme es que al sumar a la ecuación en cada miembro, la cantidad que sea se mantiene la igualdad.

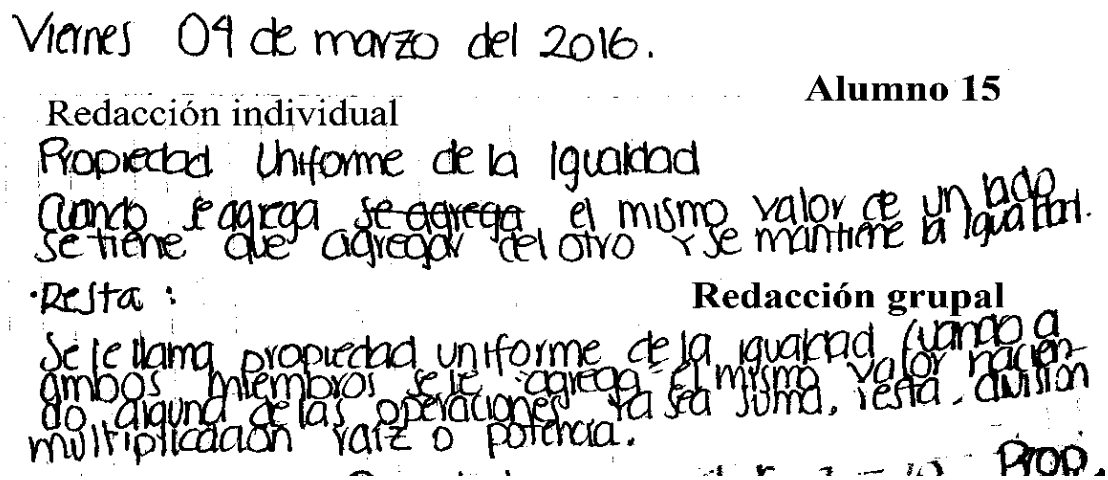
Profesor: La cantidad que sea –se queda pensando–, siento que falta una palabra clave, si puede ser la cantidad que sea, ¿pero cómo debe ser esa cantidad en ambos lados?

Alumno 17: Igual.

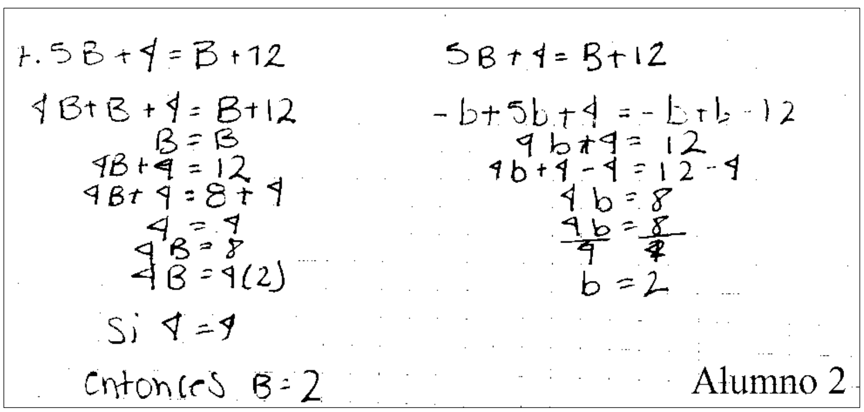
Profesor: Porque si lo dejamos abierto a la cantidad que sea, pues, acá le sumo 100 y en el otro miembro 1000.

[*Risas.*]

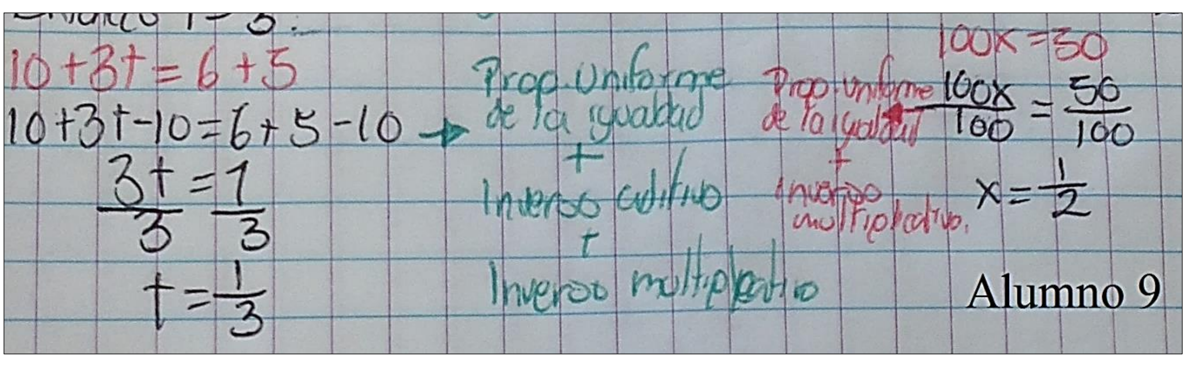
Esta discusión continuó en la sesión 15, hasta anotar lo que se entendería en adelante para el grupo, por **propiedad uniforme de la igualdad**.



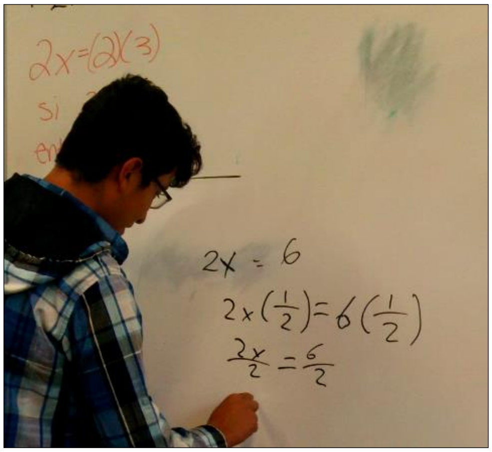
Los ejercicios a resolver en esa sesión se hicieron de dos formas diferentes, como se muestra en seguida: por descomposición y por propiedad uniforme.

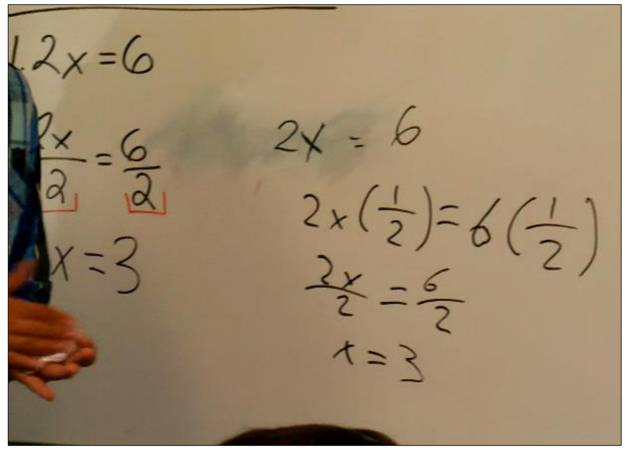


Algunos alumnos empiezan a reconocer que utilizan inverso aditivo y multiplicativo, aunque, en esta etapa son los menos.

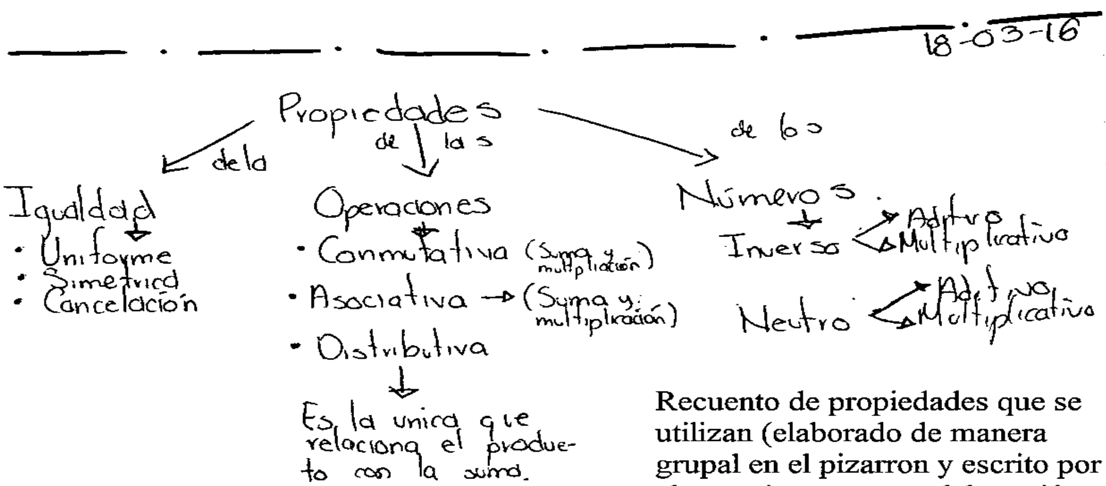


Para la sesión 15 ya están trabajando con inversos, de manera individual y grupal.



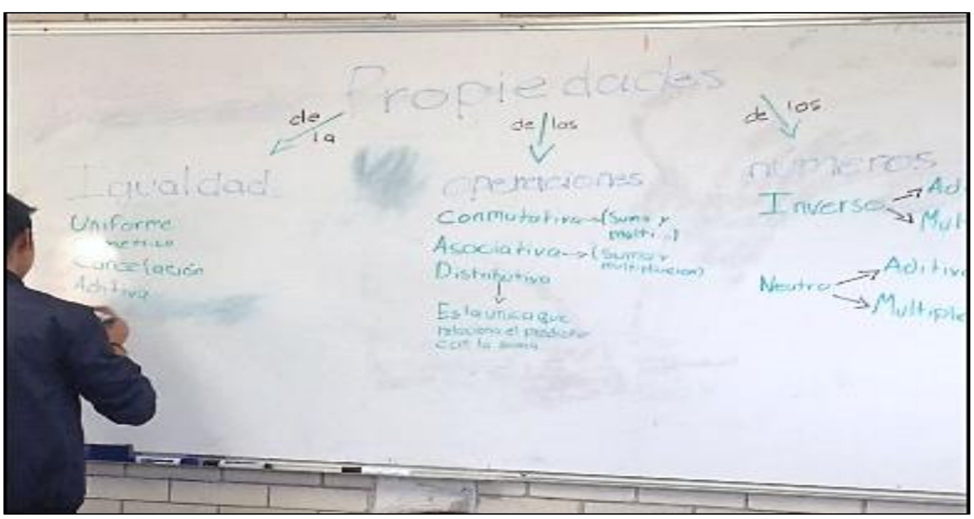


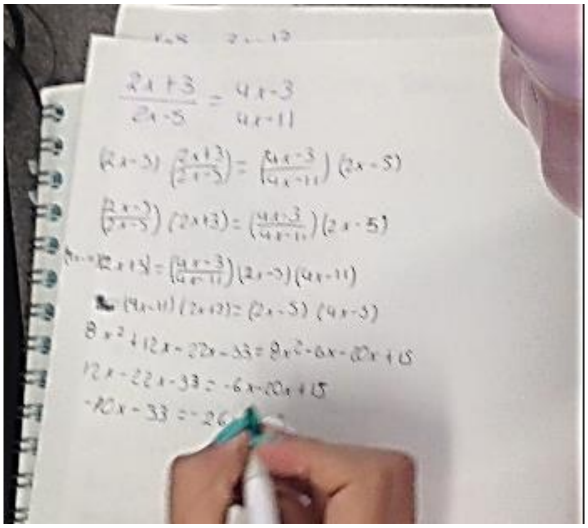
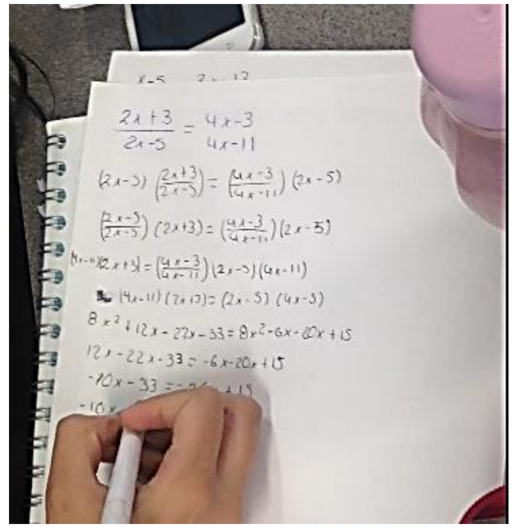
Aunque esta etapa es de comprensión de procedimientos, con el uso de propiedades, se procura que se vayan automatizando para avanzar a ecuaciones de mayor complejidad.



Recuento de propiedades que se utilizan (elaborado de manera grupal en el pizarron y escrito por alumnos) con poca colaboración del profesor

Recuento de propiedades en el pizarrón.



Rangel Gauna Georgina 218B

Resolver

1. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x-5}{2x-7}$

$(x-1)\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = (x-1)\left(\frac{2x-5}{2x-7}\right)$

$\left(\frac{x-1}{x-1}\right)(x+1) = \frac{2x^2-5x-2x+5}{2x-7}$

$(2x-7)(x+1) = (2x-7)\left(\frac{2x^2-7x+5}{2x-7}\right)$

$2x^2+2x-7x-7 = \left(\frac{2x-7}{2x-7}\right)(2x^2-7x+5)$

$2x^2-5x-7 = 2x^2-7x+5$

$-\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}-5x-7 = -\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}-3x-5$

$-5x-7 = -3x-5$

$+\cancel{5x}-\cancel{5x}-7 = 5x-7x-5$

$-7 = -2x-5$

$+\cancel{5}-7 = -2x-\cancel{5}+\cancel{5}$

$-2 = -2x$

$\frac{-2}{-2} = \frac{-2x}{-2}$

$1 = x$

Alumno 19
Sesión 24

04-04-16

1 $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x-5}{2x-7}$

$(x-1)\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = (x-1)\left(\frac{2x-5}{2x-7}\right)$ Inverso multiplicativo

$\left(\frac{x-1}{x-1}\right)(x+1) = \frac{2x^2-5x-2x+5}{2x-7}$ Propiedad de cancelación.

$(2x-7)(x+1) = \frac{2x^2-7x+5}{2x-7}(2x-7)$ Inverso multiplicat

$2x^2+2x-7x-7 = \left(\frac{2x-\cancel{7}}{2x-\cancel{7}}\right)(2x^2-7x+5)$ Propiedad de cancelación

$2x^2-5x-7 = 2x^2-7x+5$

$-\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}-5x-7 = -\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}-7x+5$ Inverso aditivo + ~~Propie~~

$-5x-7 = -7x+5$

$7x-5x-7 = \cancel{7x}-\cancel{7x}+5$ P.U.I + Inverso aditivo

$2x-7 = 5$

$2x-\cancel{7}+\cancel{7} = 5+7$ P.U.I. por inverso aditivo

$2x = 12$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{12}{2}$ P.U.I por inverso multipl.

$\boxed{x = 6}$

Etapa de automatización

Una vez –se supone en este trabajo–, alcanzada la comprensión de un concepto o procedimiento, es decir, que de alguna manera se ha construido una red de significados, todos pertinentes entre sí, se continúa con la etapa de automatización, mediante la cual se buscaría lograr que lo comprendido se aloje en la memoria a largo plazo –o, en otras palabras, que lo comprendido se pueda verbalizar, representar en dos o más registros de representación, utilizar para resolver problemas–; desde hoy (cuando se ha comprendido) y para "siempre": es lamentable observar que lo supuestamente estudiado no es posible reproducirlo después de un cierto tiempo, a veces "muy corto" luego del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En esta etapa lo que privó en el salón de clase fue una gran cantidad de ejercicios, de tipo conceptual y procedimental: explicaciones verbales y escritas, verbalizaciones de conceptos y procedimientos, formulación de problemas, ejemplos y contraejemplos, casos particulares y generales, representaciones distintas.

Los conceptos, y su expresión de manera oral y escrita, se fueron dando a lo largo de toda la implementación, a diferencia de la resolución, que se pretendió automatizar cuando ya estaban la mayoría de conceptos y que, por lo mismo, se centró más en la etapa final.

Los conceptos de: ecuación, solución de la ecuación, comprobación y resolución se estuvieron preguntando de forma oral (aproximadamente 6 veces al inicio de algunas clases) y escrita (4 pruebas intermedias) a todos los alumnos.

Las propiedades necesarias del álgebra, en cuanto se empezaron a identificar y utilizar, se fueron automatizando, sobre todo de forma escrita. Fue necesario realizar un recuento, de aquellas que se usaron, principalmente de:

- La igualdad: propiedad uniformé y simétrica.
- De los números: elementos inversos (aditivo y multiplicativo), y elementos neutros (aditivo y multiplicativo).
- De las operaciones: la más utilizada fue la propiedad distributiva del producto sobre la suma.

La mayoría de alumnos explicaron estas propiedades de manera verbal, pero sobre todo con ejemplos, no con la enunciación formal de cada una.

La etapa de automatización, en lo referente a la resolución, fue más fuerte en las últimas sesiones, porque ya no se vieron nuevos conceptos ni nuevos procedimientos.

Los siguientes ejemplos son de ejercicios que se estuvieron trabajando en esta etapa.

$\frac{4}{3}x = 16$	$\frac{2y+5}{3} = \frac{2y^2}{1+3y}$
$150 = 2y + 42$	$\frac{10x^2 - 5x + 8}{5x^2 + 9x - 19} = 2$
$7w + 69 = 30w - 23$	$\frac{6x-3}{2x-1} = \frac{3x-4}{x+1}$
$x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$	$(x+7)^2 = (x+1)(x+25)$
$\frac{5z-50}{2} = 17 - z$	$w^3 - 8w = w^3 - 10x + 16$
$\frac{5k}{2} + \frac{3k}{4} = \frac{k}{6} + 37$	$\frac{k+10}{k+3} + 8 = \frac{9k-6}{k-1}$
$\frac{1}{r+1} + \frac{2}{r-2} = \frac{4}{r-1}$	$(x+4)^2 = x(x-14) + 5$
$\frac{t-2}{t+2} = \frac{3}{7}$	$x^2 + (x+1)^2 = (2x-1)(x+4)$
$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x-5}{2x-7}$	$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{9x+7}{x+1} - 7$
$3 - x + \frac{x}{2} = 5$	

Se realizaron 170 ejercicios; 20 de ellos se pidieron con la escritura de propiedades que se fueron utilizando.

Así fue como, durante los tres procesos anteriores, se pretendió potenciar los saberes en la presente experimentación. En seguida se presentan y discuten algunos de los resultados que se observaron al analizar lo documentado a lo largo de la experiencia.

Algunos resultados, y su discusión, de la experiencia didáctica

A continuación se presentan algunos resultados obtenidos durante la experiencia que siguen, más o menos, el orden de las preguntas de indagación que orientaron el trabajo y resaltan, sobre todo, aspectos de conocimientos conceptuales y procedimentales relacionados con las ecuaciones lineales. Si bien se prestó atención a aspectos de las actitudes, los valores y las habilidades, por lo difícil que es detectar su logro, porque ello es visible sólo a largo plazo, más allá del periodo de instrucción, en este momento nada más se registra que constantemente se promovió su desarrollo y potenciación, sin aventurarse a formular alcances de manera categórica.

1. **Concepto de ecuación**

En seguida se presentan algunos ejemplos recurrentes de la manera en que los alumnos conceptualizan a una ecuación:

> Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que contienen números conocidos y desconocidos, que se relacionan mediante operaciones.
>
> Es la igualdad entre dos expresiones algebraicas donde el valor de la incógnita debe satisfacer a toda la ecuación.
>
> Es una igualdad entre dos conjuntos numéricos que se relacionan por medio de operaciones.
>
> Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que buscan resolver o encontrar el valor de la incógnita mediante operaciones.
>
> Es una igualdad que busca encontrar el valor de la incógnita
>
> Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde, por regla, sabemos que tenemos lo mismo de los 2 lados de la igualdad.

La primera formulación, que es la correcta, la establece la mayoría de los alumnos. Las cinco respuestas que fueron diferentes, tienen en común que "es una igualdad", y tres de ellas contienen "es una igualdad entre dos expresiones algebraicas". Estas respuestas difieren en que les faltan elementos que describan de mejor manera al concepto de Ecuación que, por ser el de más jerarquía, es más abstracto, y citando a Skemp (1993), se puede definir con otros conceptos de menor orden.

Podemos afirmar que los alumnos consideran a una ecuación como una igualdad y reconocen elementos que la componen –que son conceptos de menor jerarquía– y son más cercanos cognitivamente a las experiencias que han tenido. Lo anterior concuerda con Skemp (1993), en cuanto a la formación de conceptos.

En la ecuación, la mayoría de alumnos distingue los siguientes tres aspectos:

- La igualdad.
- Elementos que la componen.
- y la existencia de relaciones entre tales elementos.

En cuanto a los alumnos que expresaron este concepto de manera incompleta, se puede encontrar que contienen dos aspectos de los anteriores, y algunos agregaron otros conceptos relacionados, como son la solución o la comprobación, pero todos coincidieron en que se trata de una igualdad.

Durante la experiencia se notó que el concepto más difícil de asociar a una ecuación es el de igualdad, algo que ya ha documentado ampliamente la Educación Matemática, porque en el pretest ningún estudiante lo reconoce.

2. Partes de las que se conforma una ecuación

Veamos, en seguida, algunos ejemplos de cómo los alumnos reconocen las partes que conforman una ecuación.

> Primer miembro, segundo miembro, signo igual, operaciones, números conocidos, números desconocidos.
>
> Numero conocido, incógnita, operaciones, exponente de la incógnita, igual, signos.
>
> Incógnita.
>
> Tenemos números reales, incógnitas, fracciones que se resuelven mediante suma, resta, multiplicación o división, también tenemos números positivos y negativos.
>
> Término conocido, término desconocido, signo igual, igualdad, signos de operaciones.

La primera opción, la correcta, es la que la mayoría de alumnos reconoce.

Las respuestas diferentes, a la que se considera correcta, se presentan incompletas o confusas; por ejemplo, se menciona “término” en vez de “número” en una de ellas; otro alumno se centra en tipos de números y desglosa, de manera innecesaria, las operaciones que puede haber; en cambio un alumno sólo menciona la incógnita.

Los alumnos respondieron esta pregunta listando las partes de una ecuación, de manera más específica, con los nombres correspondientes; es decir, miembros de la ecuación, signo de igual, incógnita, números conocidos y operaciones. Claro que a algunos les faltó mencionar alguna(s) parte(s), pero la mayoría citó todas las partes, que en realidad se desprendieron de la definición que se trabajó con anterioridad, lo que se considera puede fortalecer el concepto. Las partes de la ecuación son, en realidad, conceptos de menor jerarquía según Ausubel, o de menor orden para Skemp, y con ello no se indica que sean sencillos.

3. Identificación de ecuaciones de entre otras expresiones que no lo son

A continuación se muestra un ejemplo de la selección que hace un alumno.

7. De las siguientes expresiones algebraicas encierra en un círculo aquellas que representan una ecuación

a) $(-2)^5 =$

b) $3^x = 27$

c) $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} - \frac{bc}{a} > 100$

d) $x + 2x - 5 + 10x$

e) $\frac{3^3 \bullet 3^{-4}}{3^{-2} \bullet 3^{-5}} = 3^6$

f) $\frac{x^2 - a^2}{a+b} - \frac{x^2 + a}{a-b}$

g) $12.56 = \pi \bullet r^2$

h) $2Bh = 50$

i) $x - 45 = -3$

j) $\frac{5x+8}{3x+4} = \frac{5x+2}{3x-4}$

k) $\frac{9x^5}{3x^4} =$

l) $\frac{7y}{3} - 4y$

m) $2(4 - 2x) + 11x$

La respuesta correcta a la pregunta anterior, implica el uso adecuado del concepto de ecuación: la definición de un concepto sirve, en particular, para clasificar objetos. En este caso, se proporcionaron al alumno trece expresiones, de entre las cuales sólo cinco son ecuaciones (b, g, h, i, j), teniendo como resultado que siete alumnos eligieron los cinco incisos correctos. Pero algo que realmente importa es que otros 13 alumnos, además de elegir los cinco incisos correspondientes a ecuaciones, eligieron la siguiente expresión $\mathbf{\frac{3^3 \bullet 3^{-4}}{3^{-2} \bullet 3^{-5}} = 3^6}$, sin razonar que no contiene a la incógnita.

De esto se desprenden algunas suposiciones: *a)* el alumno se dejó llevar por la estructura de la expresión, por el acomodamiento, o por el signo de igual; *b)* también pudiera deberse a que al alumno no se le proporcionaron experiencias para distinguir una ecuación de una identidad numérica.

4. Concepto de solución de una ecuación

En seguida presentamos el concepto de solución de una ecuación que los estudiantes construyeron:

> Es el valor de la incógnita que satisface a la ecuación.
>
> Es el procedimiento para poder saber si el valor del término desconocido puede satisfacer a la ecuación.
>
> Es el valor obtenido de llevar a cabo operaciones.
>
> Es encontrar el valor de la incógnita que es el producto de la ecuación.
>
> Es el valor ya encontrado de la incógnita.

Es el valor de la incógnita.

Es el valor de la incógnita que utilizamos para resolver una ecuación.

La solución de una ecuación es el proceso utilizado para hallar el valor de la incógnita que satisface a la ecuación.

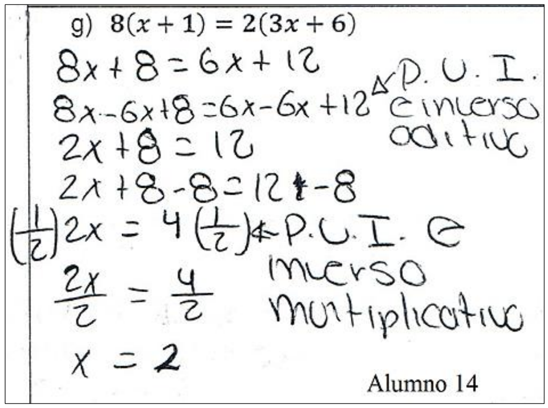
La primera noción, la correcta: "es el valor de la incógnita que satisface a la ecuación", la proporcionaron 12 alumnos.

Como se puede observar hubo variedad de nociones distintas a la correcta; por ejemplo, hay alumnos para los que la solución es el valor de la incógnita, aunque no mencionan que debe satisfacer a la ecuación; otros confunden la solución de la ecuación con un procedimiento, uno con la comprobación y otro con la resolución.

Esto podría deberse a que el alumno no ha interiorizado bien, o por completo, el concepto de *solución de la ecuación*, y por ende no lo puede expresar de manera satisfactoria.

5. Resolución de ecuaciones lineales justificando sus respuestas con propiedades pertinentes

Este aspecto fue central en la experiencia, debido a que a través de las propiedades de los objetos matemáticos que conforman a una ecuación (relación de igualdad, números, conocidos y desconocidos, y operaciones con los números) es como se puede justificar el procedimiento seguido en su resolución: es lo que le da racionalidad al algoritmo utilizado. Uno de los cuestionamientos fuertes que se hace al álgebra “talachera” del bachillerato es su carácter mecánico y algorítmico, pero es un algoritmo que no tiene justificación y se hace así porque sí. Lo que puede remediar este mecanicismo es que el alumno comprenda que la justificación de lo que hace está en las propiedades de los números, de la relación de igualdad y de las operaciones que se hacen entre números; éste fue parte del espíritu de la indagación que se reporta. Podemos decir que, en términos generales, se logró lo anterior, como lo muestran los dos ejemplos que a continuación se reproducen:


g) $8(x+1) = 2(3x+6)$

$8x+8=6x+12$ P. U. I. e inverso aditivo

$8x-6x+8=6x-6x+12$

$2x+8=12$

$2x+8-8=12-8$

$\left(\frac{1}{2}\right)2x=4\left(\frac{1}{2}\right)$ P.U.I. e inverso multiplicativo

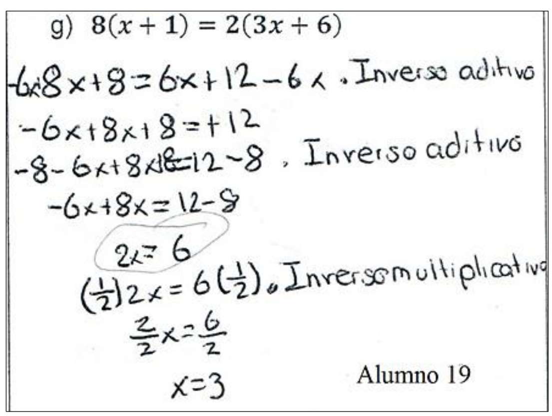
$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}$

$x=2$

Alumno 14

En este ejemplo, el alumno aplica correctamente las reglas que son pertinentes para resolver correctamente la ecuación propuesta; sin embargo, cabe la posibilidad que esto no sea otra cosa que un algoritmo aprendido de memoria y que no se ha comprendido su importancia desde el punto de vista de la formalidad matemática, pero aun eso significa un avance que, en el mejor de los casos, se puede decir “pasa sumando”, “pasa multiplicando”.

En el siguiente ejemplo, el alumno 19 hace mal la resta de 12-8, de la que obtiene 6 y por esa razón no obtiene la solución correcta, pero es posible observar que sí aplicó adecuadamente propiedades e, incluso, nombra con corrección los elementos inversos de los números que utiliza.


g) $8(x+1) = 2(3x+6)$

$-6x\,8x+8=6x+12-6x$. Inverso aditivo

$-6x+8x+8=+12$

$-8-6x+8x+8=12-8$. Inverso aditivo

$-6x+8x=12-8$

$2x=6$

$\left(\frac{1}{2}\right)2x=6\left(\frac{1}{2}\right)$. Inverso multiplicativo

$\frac{2}{2}x=\frac{6}{2}$

$x=3$

Alumno 19

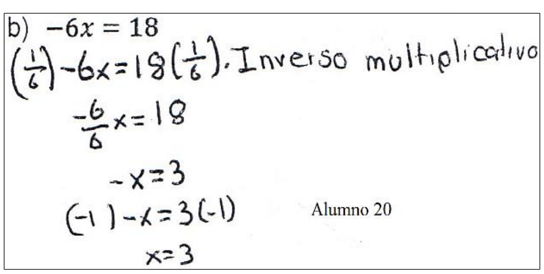
Para resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, se observa que los alumnos sí utilizaron las propiedades de la igualdad, de los números y de las operaciones, aunque no siempre llegaron a la solución correcta; de hecho, en las ecuaciones que implican miembros fraccionarios compuestos de binomios, tanto en el numerador como en el denominador, la resolución se les complicó bastante en muchos casos. Así, a mayor grado de dificultad de la ecuación hubo menos éxito, pero la mayoría realizó su procedimiento mediante propiedades que justifican los pasos ejecutados; es decir, no se usa la transposición de términos. Naturalmente, algunos alumnos cometen errores al resolver las ecuaciones, y a continuación analizamos, con más de detalle, algunos de esos errores reconocidos.

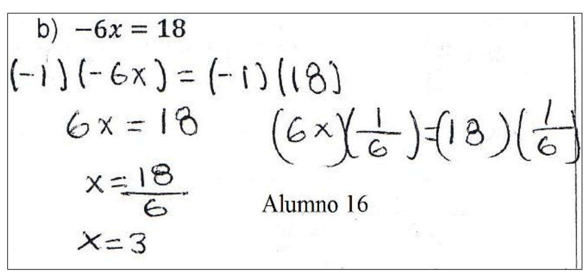
Debido a que existen diferentes clasificaciones de errores y sus orígenes, para este análisis se utilizan los propuestos por Socas y Palarea (1994), que son específicos del álgebra, y dos clasificaciones citadas en Rico (1998), que son la de Radatz, y la de Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar, por ser clasificaciones que aplican para matemáticas en general.

Primero se muestran los errores técnicos cometidos durante la prueba. Para Rico (1998: 91), los errores técnicos: "se incluyen en esta categoría los errores de cálculo […], errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos".

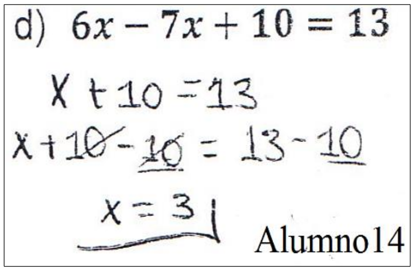
Así, tenemos para la ecuación $\boldsymbol{-6x = 18}$ errores técnicos (Rico, 1998); se pueden comprobar en la resolución de algunos alumnos que para evitar el signo negativo en el término que contiene a la incógnita, indican la multiplicación por (-1) en ambos lados de la igualdad, pero en el siguiente renglón omiten el signo negativo que debería quedar en el miembro izquierdo de la ecuación como resultado de efectuar el producto que indicaron.

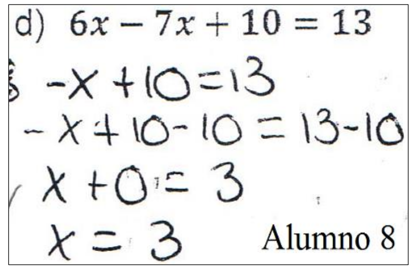
Además, cabe señalar que el alumno 20 usó inadecuadamente el paréntesis para indicar el producto.



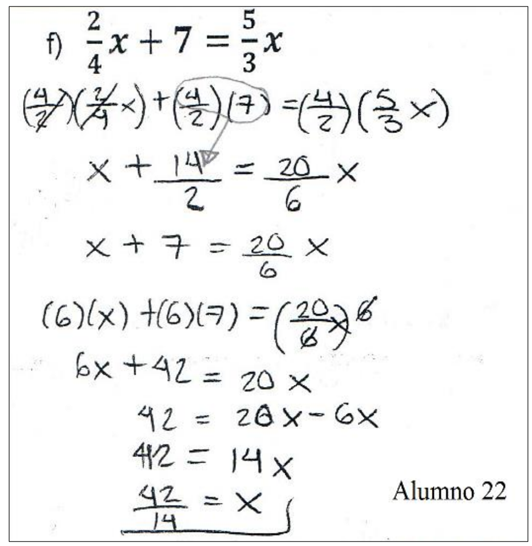


En la ecuación $\boldsymbol{6x - 7x + 10 = 13}$ también se presenta el error técnico, porque la suma en el miembro izquierdo de la igualdad está mal calculada, al parecer el alumno no consideró el signo negativo del término -7x; el alumno 8 transcribió mal y omitió el signo negativo.

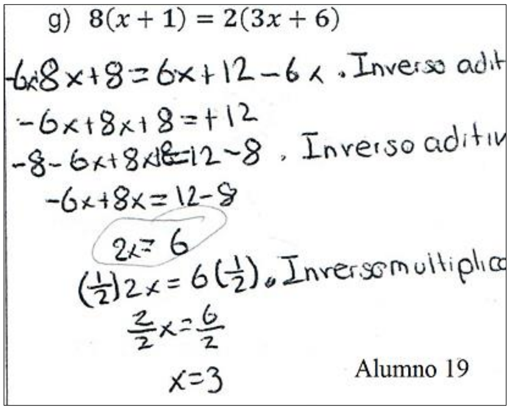


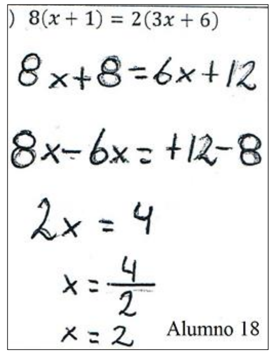


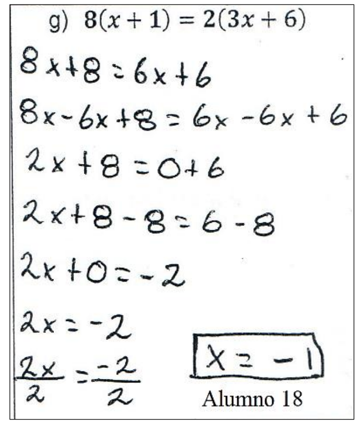
Otro error técnico se encuentra en la ecuación $\frac{2}{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{7} = \frac{5}{3}\boldsymbol{x}$, donde no se realiza correctamente un producto y, por ende, el alumno no llega a la solución. En el primer renglón se ve indicado el producto de $\left(\frac{4}{2}\right)(7)$, y en el siguiente renglón escribe como resultado de ese producto $\frac{14}{2}$, como si hubiese hecho mentalmente la multiplicación y la división, y de todos modos anota el 2 dividiendo nuevamente.



Continuando con los errores técnicos que hay en la prueba final se tiene, para la siguiente ecuación $\mathbf{8}(\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) = \mathbf{2}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{6})$, que el alumno 19 calcula de manera incorrecta la resta de 12-8, de la que obtiene 6, razón por la que no obtiene la solución correcta. El alumno 18 utiliza bien la propiedad distributiva en el miembro izquierdo de la igualdad, pero no así con el miembro derecho; sin embargo, en la prueba diagnóstica había realizado la operación correctamente, por esta razón el equívoco se pone dentro del error técnico y no asociado con problemas en la aplicación de la propiedad distributiva.

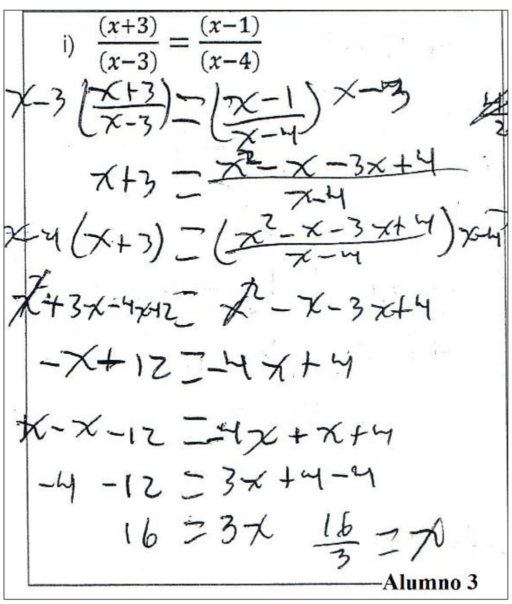


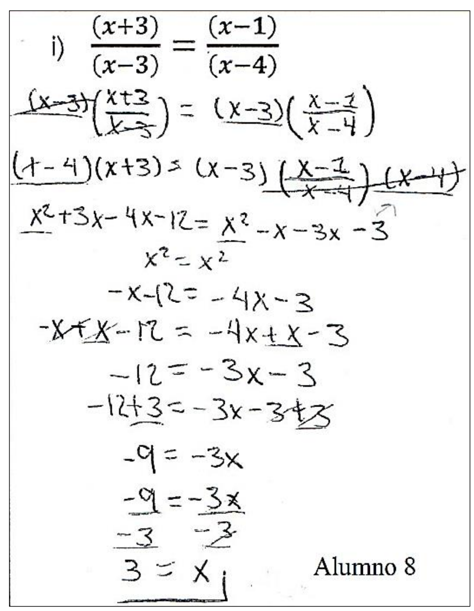




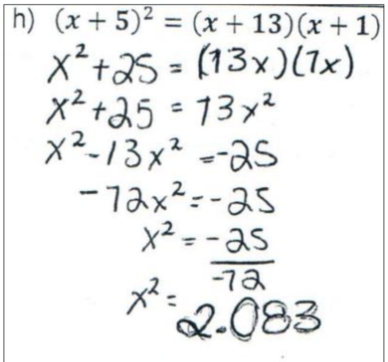
Posición media: prueba diagnóstica del alumno 18. Posición a la izquierda: prueba final del alumno 18.

Otro error técnico se presenta en la ecuación $\frac{(x+3)}{(x-3)} = \frac{(x-1)}{(x-4)}$ cuando los alumnos 3, 1 y 2, al momento de efectuar el producto en el miembro izquierdo de la igualdad, obtienen $x^2 - x - 3x + 4$, en vez de $x^2 - x - 3x + 3$; quizá por el mal uso del paréntesis suma 3+1, en vez de realizar el producto 3×1, parece que opera el signo correctamente. En cambio, el alumno 8 realiza la multiplicación de signos de manera incorrecta, porque de (-1 $\times$ -3) obtiene -3.





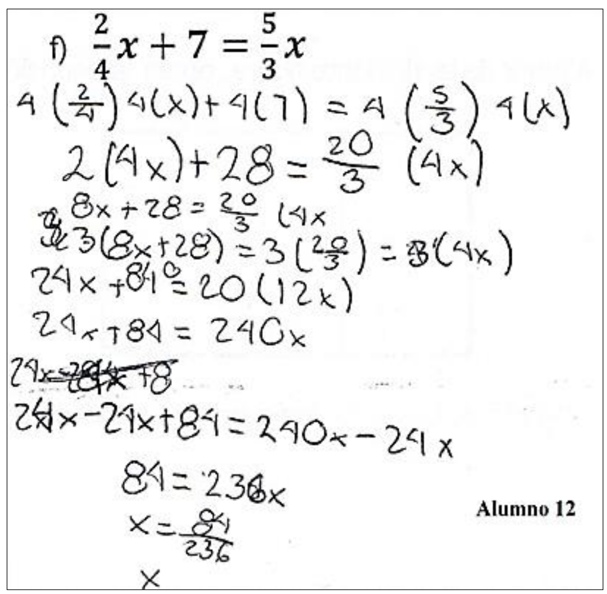
En seguida abordaremos errores de interferencia, definidos por Radatz (citado en Rico, 1998:89) como “en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros”.



Alumno 2

En este ejercicio se aprecia que el desarrollo del binomio al cuadrado fue incorrecto, así como la multiplicación de los binomios en el miembro izquierdo. Socas (1994) refiere este error como una creencia del alumno por extender la aplicación de **$(a*b)^2=a^2 * b^2$** al binomio **$(a + b)^2=a^2 + b^2$**; este error fue frecuente en los alumnos que no pudieron llegar al resultado correcto.

El segundo error que comete el alumno es referente a la multiplicación de los binomios en el miembro derecho de la igualdad. Pero su análisis no es tan sencillo, porque al momento de querer inferir lo que hizo, por un lado parece que (x+13)=13x y (x+1)=1x, entonces (x+13) (x+1)=13x+1x por lo que podríamos decir que no multiplicó, pero por otro lado si tenemos en cuenta que multiplicó incorrectamente, parece que hubiera multiplicado extremos por extremos y medios por medios respecto a la posición de los paréntesis. De cualquier forma se ve más complejo el segundo error, no parece tan simple afirmar que interfiere el hecho de no saber multiplicar correctamente dos binomios, y que esa sea la única causa.

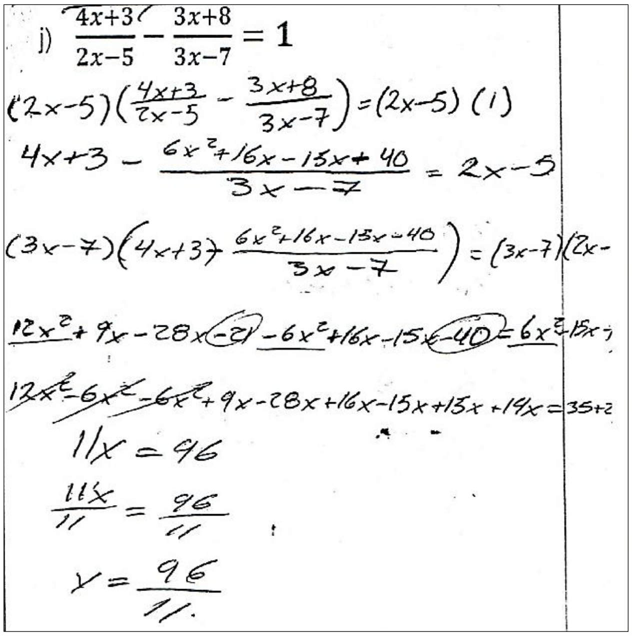


Alumno 12

Otro error de interferencia se relaciona con una extensión a la multiplicación de la propiedad distributiva (Socas y Palarea, 1994).

En el primer renglón, escrito por el alumno, multiplica por 4 toda la ecuación para simplificar el denominador, pero separa los términos donde aparece la incógnita.

La propiedad que es a(b + c)= a • b + a • c, la extiende como a(b • c)=a • b • a • c.



j) $\frac{4x+3}{2x-5} - \frac{3x+8}{3x-7} = 1$

$(2x-5)\left(\frac{4x+3}{2x-5} - \frac{3x+8}{3x-7}\right) = (2x-5)(1)$

$4x+3 - \frac{6x^2+16x-15x+40}{3x-7} = 2x-5$

$(3x-7)\left(4x+3 - \frac{6x^2+16x-15x-40}{3x-7}\right) = (3x-7)(2x-$

$12x^2+9x-28x-21-6x^2+16x-15x-40 = 6x^2-15x-$

$12x^2-6x^2-6x^2+9x-28x+16x-15x+15x+14x = 35+2$

$11x = 96$

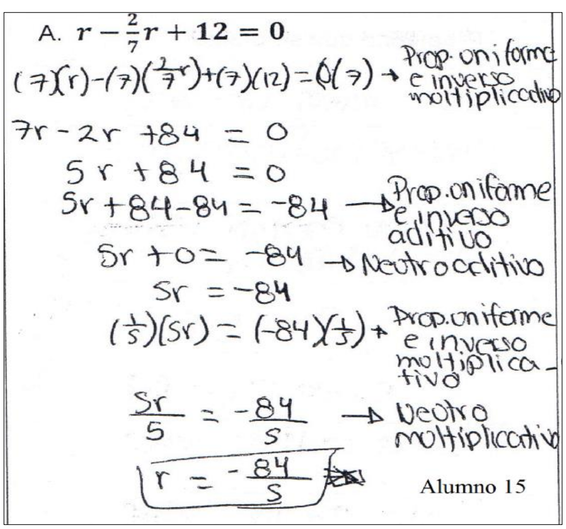
$\frac{11x}{11} = \frac{96}{11}$

$x = \frac{96}{11}$

Otro error relacionado con la propiedad distributiva lo encontramos en la ecuación $\frac{\mathbf{4x+3}}{\mathbf{2x-5}} - \frac{\mathbf{3x+8}}{\mathbf{3x-7}} = \mathbf{1}$ donde los alumnos no pudieron distribuir el signo negativo que separa los términos fraccionarios en el primer miembro de la igualdad. Este error fue la causa principal de que la mayoría de alumnos no obtuvieran la respuesta correcta. Y la causa es que no es tan obvio que el signo afecte al resultado del producto de binomios.

Regresando a la pregunta que condujo a este análisis de resultados respecto de la resolución de ecuaciones, se puede responder que, en efecto, los alumnos utilizaron las propiedades pertinentes en las resoluciones, aun en aquellos ejercicios cuyo resultado no fue el correcto, y no tuvieron problemas con el uso de propiedades. No todos expresan de manera escrita las propiedades que utilizaron, aunque algunos sí escriben una explicación de los pasos que realizaron, sobre todo en las ecuaciones que implican menos pasos.

Los siguientes son ejemplos de alumnos que, de algún modo, expresan de forma escrita su explicación o mencionan propiedades que utilizan.



A. $r - \frac{2}{7}r + 12 = 0$

$(7)(r)-(7)(\frac{2}{7}r)+(7)(12) = 0(7)$ → Prop. uniforme e inverso multiplicativo

$7r - 2r + 84 = 0$

$5r + 84 = 0$

$5r + 84 - 84 = -84$ → Prop. uniforme e inverso aditivo

$5r + 0 = -84$ → Neutro aditivo

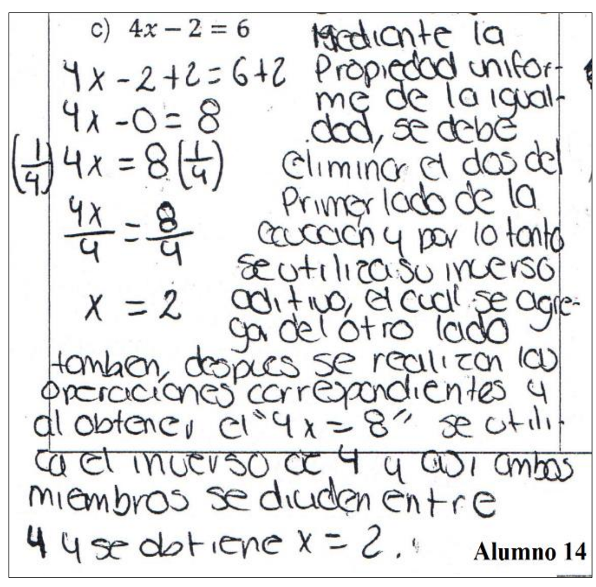
$5r = -84$

$(\frac{1}{5})(5r) = (-84)(\frac{1}{5})$ → Prop. uniforme e inverso multiplicativo

$\frac{5r}{5} = \frac{-84}{5}$ → Neutro multiplicativo

$r = \frac{-84}{5}$

Alumno 15



c) $4x - 2 = 6$

$4x-2+2 = 6+2$

$4x - 0 = 8$

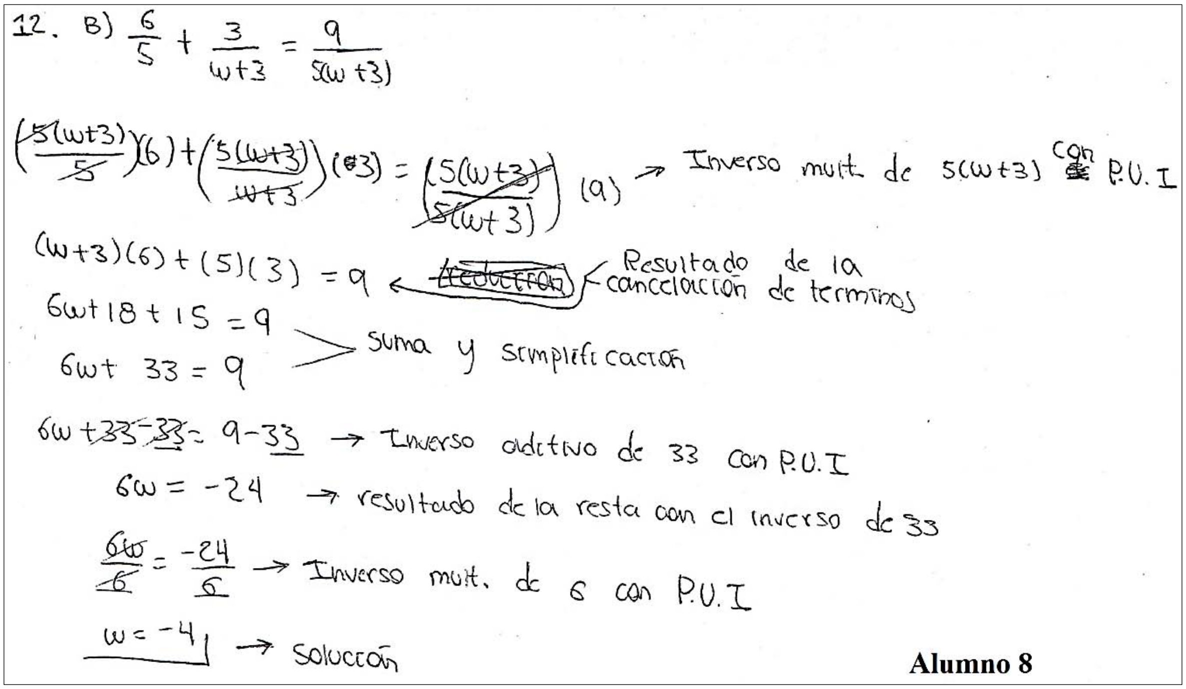
$(\frac{1}{4})4x = 8(\frac{1}{4})$

$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$

$x = 2$

Mediante la Propiedad uniforme de la igualdad, se debe eliminar el dos del Primer lado de la ecuación y por lo tanto se utiliza su inverso aditivo, el cual se agrega del otro lado tambien, despues se realizan las operaciones correspondientes y al obtener el "4x = 8" se utiliza el inverso de 4 y así ambos miembros se dividen entre 4 y se obtiene x = 2.

Alumno 14



12. B) $\frac{6}{5} + \frac{3}{w+3} = \frac{9}{5(w+3)}$

$\left(\frac{5(w+3)}{\cancel{5}}\right)(6) + \left(\frac{5\cancel{(w+3)}}{\cancel{w+3}}\right)(3) = \left(\frac{5\cancel{(w+3)}}{\cancel{5(w+3)}}\right)(9) \rightarrow$ Inverso mult. de $5(w+3)$ con P.U.I

$(w+3)(6) + (5)(3) = 9 \leftarrow$ ~~reducción~~ $\leftarrow$ Resultado de la canceloación de terminos

$6w + 18 + 15 = 9$

$6w + 33 = 9$ $\rangle$ suma y simplificación

$6w + \cancel{33} - \cancel{33} = 9 - \underline{33} \rightarrow$ Inverso aditivo de 33 con P.U.I

$6w = -24 \rightarrow$ resultado de la resta con el inverso de 33

$\frac{\cancel{6}w}{\cancel{6}} = \frac{-24}{6} \rightarrow$ Inverso mult. de 6 con P.U.I

$\underline{w = -4} \rightarrow$ Solución

Alumno 8

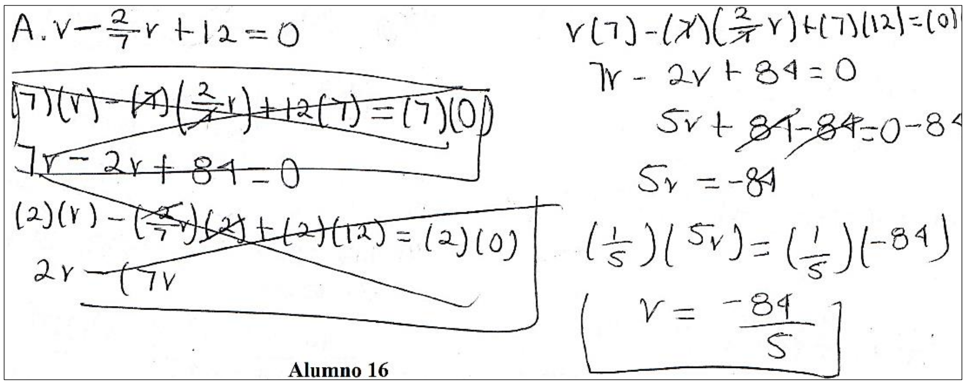
En conclusión, no todos explican o indican las propiedades que utilizan en sus resoluciones, y en cuanto a los que sí escriben lo hacen en diferentes niveles, desde los que anotan sólo los nombres de las propiedades y no todas, hasta los que detallan un poco más los pasos que realizan.

6. **Comprobación, por el alumno, del resultado que obtiene al resolver una ecuación**

Pese a que la mayoría de los alumnos conoce en qué consiste el procedimiento de la comprobación de la solución de una ecuación, en ningún ejercicio de resolución lo hace por iniciativa propia. Parece que era necesario explicitar en las indicaciones que probara sus resultados. Esto indica una carencia en la comprensión de la resolución de una ecuación, ya que los alumnos no son conscientes de que requieren comprobar lo que hicieron. Este es un problema que está pendiente por aclarar.

7. **La corrección de errores por los alumnos**

En primer lugar, los alumnos no reconocen sus errores, no los identifican. Pareciera que no hay, de manera intencional, una actitud metacognitiva que le lleve a preguntarse: ¿hice bien lo que hice? ¿Reviso lo que hago? Aun revisando su trabajo, ¿será capaz de reconocer un error? No hay evidencias claras de que los alumnos corrijan sus errores. Esto se sabe porque escribieron sus respuestas con pluma y la instrucción fue que, al equivocarse, encerraran en un rectángulo sus errores cruzándolos con dos diagonales, cosa que no se refleja en las pruebas, salvo en las de dos alumnos. Por otro lado, hay alumnos que tienen parte del procedimiento encerrado, pero lo que hicieron no les ayudó a corregir el error. Hay evidencias mínimas de que corrigen sus errores, y es un aspecto en el que hay centrar la atención posteriormente. Veamos el siguiente ejemplo, sobre lo que hizo el alumno 16:


A. $v - \frac{2}{7}v + 12 = 0$

$\cancel{(7)(v) - (7)(\frac{2}{7}v) + 12(7) = (7)(0)}$

$\cancel{7v - 2v + 84 = 0}$

$\cancel{(2)(v) - (\frac{2}{7}v)(2) + (2)(12) = (2)(0)}$

$\cancel{2v - (7v}$

$v(7) - (7)(\frac{2}{7}v) + (7)(12) = (0)$

$7v - 2v + 84 = 0$

$5v + \cancel{84} - \cancel{84} = 0 - 84$

$5v = -84$

$(\frac{1}{5})(5v) = (\frac{1}{5})(-84)$

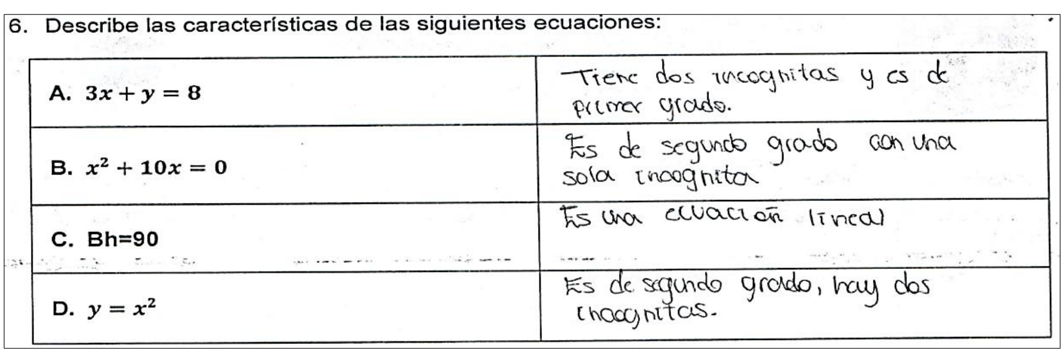
$\boxed{v = \frac{-84}{5}}$

Alumno 16

Reconoce que se equivocó. Después de hacer dos procesos: primero multiplicar la ecuación por 7 y simplificar la expresión, parece ser que no estuvo de acuerdo con esto e intentó multiplicar la ecuación por 2. Pero luego reconoce que el 2 de 2/7 no se puede cancelar con el 2 que multiplica a la fracción, y a la derecha rehace el proceso desde el principio, por lo que obtiene el resultado correcto. Es un ejemplo claro de la corrección de un error.

8. Descripción de las características de ecuaciones, por parte del alumno

A continuación se muestra lo que hacen tres alumnos en relación con identificar las características de una ecuación:


6. Describe las características de las siguientes ecuaciones:

A. $3x + y = 8$	Tiene dos incognitas y es de primer grado.
B. $x^2 + 10x = 0$	Es de segundo grado con una sola incognita
C. Bh=90	Es una ecuación lineal
D. $y = x^2$	Es de segundo grado, hay dos incognitas.

Alumno 8

6. Describe las características de las siguientes ecuaciones:

A. $3x + y = 8$	Tres veces un número más la suma de un número desconocido da como resultado ocho.
B. $x^2 + 10x = 0$	Un número desconocido elevado al cuadrado más diez que multiplica ese mismo número, da como resultado cero.
C. Bh=90	Al multiplicar dos valores distintos da como resultado noventa.
D. $y = x^2$	Un número desconocido da como resultado otro número desconocido elevado al cuadrado.

Alumno 6

6. Describe las características de las siguientes ecuaciones:

A. $3x + y = 8$	Tiene signo de igual, dos incognitas diferentes, números conocidos, operaciones
B. $x^2 + 10x = 0$	Tiene signo de igual, Incognitas exponente de incognita, operacciones
C. Bh=90	Tiene signo de igual, dos incognitas número conocido, dos miembros
D. $y = x^2$	Tiene signo de igual, incognitos diferentes, Exponente de la incognita, dos miembros

Alumno 15

En este aspecto, los alumnos reconocen por características de la ecuación lo siguiente:

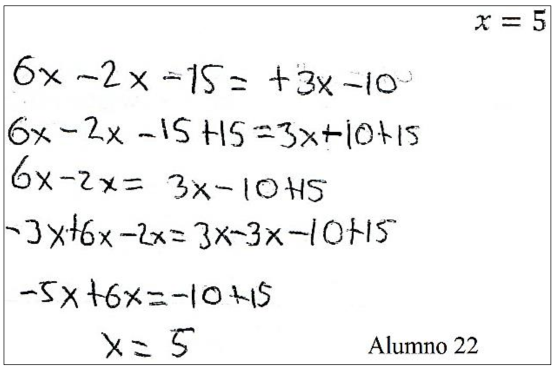
- Identifica por grado y número de incógnitas.
- Las transforma a lenguaje natural.
- Enlista operaciones, no menciona potencias o cuadrados.
- Enlista las partes, sí menciona "elevado al cuadrado" o exponente.

Si consideramos que las características centrales de una ecuación son el grado y el número de incógnitas, podemos concluir que este aspecto fue apenas alcanzado durante la instrucción. Es necesario reconocer que no se abordó explícitamente durante la instrucción.

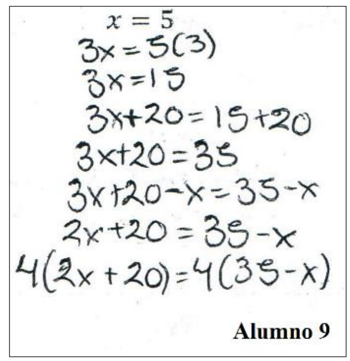
En las sesiones no se trabajó este aspecto; por otro lado, los alumnos al leer la instrucción: "describe las características de las siguientes ecuaciones", por el tipo de respuestas que proporcionaron, parece que la instrucción es muy abierta o ambigua, por lo que algunos proporcionaron las partes de dichas ecuaciones, otros la transformaron a lenguaje natural y pocos mencionaron características referentes al número de incógnitas y de grado de la ecuación.

9. **Construcción de ecuaciones equivalentes, utilizando propiedades, dada una ecuación en su forma más simple**

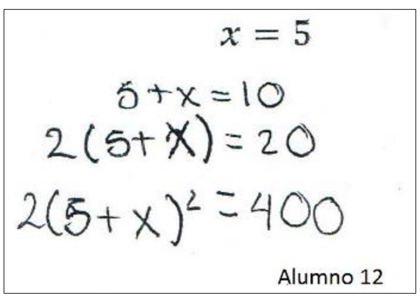
Los alumnos construyen, en una medida bastante aceptable, al menos una ecuación equivalente partiendo de x = c; es decir, a partir de la solución de una ecuación.



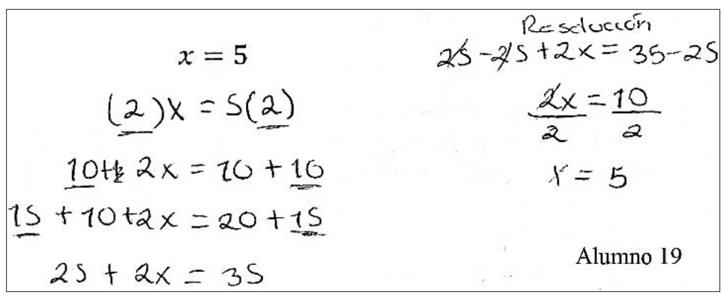
Alumno 22



Alumno 9

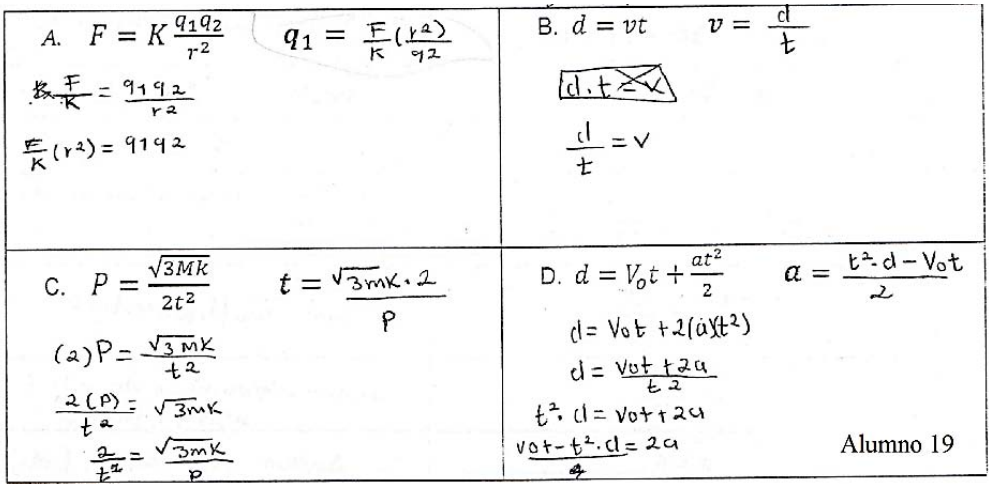


Alumno 12



Alumno 19

Tenemos que los alumnos 9 y 19 obtienen varias ecuaciones equivalentes usando propiedades de la igualdad. El alumno 12 también obtiene ecuaciones equivalentes, excepto en el tercer renglón, donde al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, omite elevar al cuadrado al número 2 que está como factor, lo que indica que se le complica conservar la igualdad en operaciones de más dificultad. El alumno 22 contruye una ecuación que resuelve y que, efectivamente, tiene como solución x = 5, pero sin evidencias de haber utilizado propiedades de la igualdad. Sin embargo, estos dos últimos casos son aislados, porque la mayoría de alumnos lo hizo de forma parecida a los ejemplos de los alumnos 9 y 19.



A. $F = K\frac{q_1q_2}{r^2}$ $q_1 = \frac{F}{K}\left(\frac{r^2}{q_2}\right)$

$\frac{F}{K} = \frac{q_1q_2}{r^2}$

$\frac{F}{K}(r^2) = q_1q_2$

B. $d = vt$ $v = \frac{d}{t}$

$\boxed{\cancel{d \cdot t = v}}$

$\frac{d}{t} = v$

C. $P = \frac{\sqrt{3Mk}}{2t^2}$ $t = \frac{\sqrt{3mK}\cdot 2}{P}$

$(2)P = \frac{\sqrt{3mK}}{t^2}$

$\frac{2(P)}{t^2} = \sqrt{3mK}$

$\frac{2}{t^2} = \frac{\sqrt{3mK}}{P}$

D. $d = V_0t + \frac{at^2}{2}$ $a = \frac{t^2 \cdot d - V_0t}{2}$

$d = V_0t + 2(a)(t^2)$

$d = \frac{V_0t + 2a}{t^2}$

$t^2 \cdot d = V_0t + 2a$

$\frac{V_0t - t^2 \cdot d = 2a}{2}$

Alumno 19

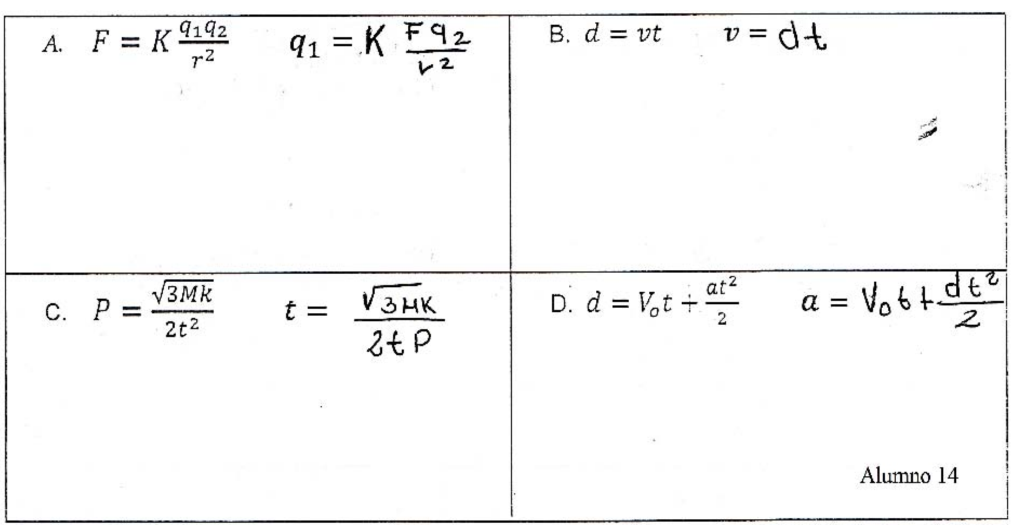
10. Ecuación con literales

Cabe señalar que este tipo de ecuaciones no se trabajaron durante el experimento, y los resultados no fueron satisfactorios. Ecuaciones como las siguientes:

A. $F = K\frac{q_1q_2}{r^2}$ *resolver para* $\mathbf{q_1} =$ B. $d = vt$ *resolver para* $\mathbf{v} =$

C. $\mathbf{P} = \frac{\sqrt{\mathbf{3Mk}}}{\mathbf{2t^2}}$ *resolver para* $\mathbf{t} =$ D. $\mathbf{d} = \mathbf{V_0t} + \frac{\mathbf{at^2}}{\mathbf{2}}$ *resolver para* $\mathbf{a} =$

no pudieron ser resueltas por los alumnos, excepto con la expresión d = vt, que sí hicieron algunos para v, satisfactoriamente.



A. $F = K\frac{q_1q_2}{r^2}$ $q_1 = K\frac{Fq_2}{r^2}$

B. $d = vt$ $v = dt$

C. $P = \frac{\sqrt{3Mk}}{2t^2}$ $t = \frac{\sqrt{3MK}}{2tP}$

D. $d = V_0t + \frac{at^2}{2}$ $a = V_0t + \frac{dt^2}{2}$

Alumno 14

Estos incisos de ecuaciones con literales, tienen la complejidad de contener más cantidades desconocidas que conocidas y, por otro lado, el manejo de operaciones inversas es más sencillo para la suma y resta, seguido de producto y división; en cambio, para la potencia y la raíz es más complejo; las operaciones con radicales no se incluyeron en este experimento. Así, al alumno no se le proporcionaron las experiencias para estos casos; sin embargo, se incluyen para observar qué puede hacer a partir de sus conocimientos adquiridos hasta el momento.

11. Propiedades utilizadas en una ecuación ya resuelta

El siguiente ejemplo, muestra el reconocimiento que un alumno puede realizar en relación con las propiedades utilizadas al resolver una ecuación lineal:

14. Escribe en cada línea de la derecha el nombre de la propiedad que se utilizó en cada paso de la resolución de la siguiente ecuación:

	Propiedad que se utilizó
$\frac{2}{4}x + 7 = \frac{5}{3}x$	ecuación original
$4\left(\frac{2}{4}x + 7\right) = 4\left(\frac{5}{3}x\right)$	P.O.I e inverso multiplicativo
$4\left(\frac{2}{4}x\right) + 4(7) = 4\left(\frac{5}{3}x\right)$	P.O.I e inverso multiplicativo
$\frac{8}{4}x + 28 = \frac{20}{3}x$	División de $\frac{8}{4}x = 2x$
$2x + 28 = \frac{20}{3}x$	~~[illegible]~~ Multiplicar por 3 para ~~[illegible]~~ ~~eliminar~~ representar el denominador
$3(2x + 28) = 3\left(\frac{20}{3}x\right)$	P.O.I e inverso multiplicativo
$3(2x) + 3(28) = 3\left(\frac{20}{3}x\right)$	P.O.I e inverso multiplicativo
$6x + 84 = \frac{3}{3}20x$	Representación de $1 = \frac{3}{3}$
$6x + 84 = (1)20x$	~~[illegible]~~ neutro multiplicativo.
$6x + 84 - 84 = 20x - 84$	inverso aditivo P.O.I
$6x + 0 = 20x - 84$	suma y resta. ~~asociativa~~ conmutativa
$6x - 20x = 20x - 20x - 84$	P.O.I inverso aditivo
$6x - 20x = 0 - 84$	Resta respetando los signos
$-14x = -84$	resolución de la operación de arriba
$\frac{1}{-14}(-14x) = \left(\frac{1}{-14}\right) - 84$	inverso multiplicativo P.O.I
$\frac{-14}{-14}x = \frac{-84}{-14}$	P.O.I inverso multiplicativo.
$x = \frac{-84}{-14}$	División, regla de los signos $- \cdot - = +$
$x = 6$	solución.

Alumno 18

En este aspecto, se obtuvo una amplia gama de situaciones, en cuanto a que hay quienes llenaron toda la columna de la izquierda, hasta quienes sólo cubrieron, aproximadamente, una cuarta parte de las celdas destinadas para la escritura de las propiedades. Las propiedades más mencionadas son: la propiedad uniforme de la igualdad, los elementos inversos –aditivo y multiplicativo–, el neutro aditivo, no así el neutro multiplicativo, y algunos mencionan la propiedad distributiva.

12. Simbolización de expresiones dadas en forma verbal a expresiones en su representación algebraica

Las expresiones dadas en forma verbal se refieren a contextos puramente matemáticos, a números y sus operaciones, a figuras geométricas elementales y sus propiedades, y a contextos concretos que suponemos forman parte de la experiencia de los alumnos: edades, movimiento, compras de la casa.

Para esta tarea no se realizaron otras similares en la experiencia, pero se incluyó ésta por ser una actividad que permitiría indagar las dificultades que enfrentan los alumnos en tareas semejantes.

A continuación se muestra un ejemplo del trabajo de los alumnos en este rubro:

l) La suma de los cuadrados de dos números	$X^2 + y^2$	X= un número conocido y= un número dif.
m) La suma de dos números al cuadrado	$(a+b)^2$	a= un número cualquiera.
n) El dinero de un padre, repartido por partes iguales entre sus hijos	$\frac{k}{d}$	K= dinero d= hijos.
o) El denominador de una fracción, es cinco unidades menor que su numerador	$\cancel{\frac{x+5}{x-5}}$ $\frac{y}{y-5}$	y= un número cualquiera
p) En un terreno de forma rectangular, su ancho mide la mitad de su largo	$\cancel{\frac{a}{2}(a)}$ $\frac{a}{l}$	a= ancho l= largo
q) El numerador de una fracción excede al denominador en tres unidades	$\frac{a+3}{a}$	a= un número cualquiera.
r) La quinta parte del cubo de un número	$\frac{a^3}{5}$	a= un número cualquiera.
s) El cubo de la quinta parte de un número	$\left(\frac{a}{5}\right)^3$	a= un número cualquiera.
t) Un número más su décima parte	$x + (10 \cdot x)$	x= un número cualquiera.

Alumno 2

Con las expresiones sencillas, la mayoría de alumnos no tuvo problemas en representarlas simbólicamente. En cambio, en expresiones que incluyen la igualdad, muchos no la consideraron; por ejemplo, para el área y el perímetro, pese a que formulan la expresión, no la igualan a un símbolo que la represente. Por otro lado, en situaciones relacionadas con el tanto por ciento, sólo representaron 0.15x, que es el IVA, y ya no consideran el costo del artículo.

q) El numerador de una fracción excede al denominador en tres unidades	$\frac{B+3}{B}$	B=Número cualquiera
r) La quinta parte del cubo de un número	$(B)^{\frac{3}{5}}$	B=Número cualquiera
s) El cubo de la quinta parte de un número	$\left(\frac{B}{5}\right)^{3}$	B=Número cualquiera
t) Un número más su décima parte	$B+\frac{B}{10}$	B=Número cualquiera

Alumno 17

A continuación se muestra un ejemplo de error típico que exhibe la mayoría de los alumnos.

r) La quinta parte del cubo de un número	$x^{\frac{1}{5}3}$	x numero
s) El cubo de la quinta parte de un número	$\frac{1}{5}x^{3}$	x= un número.
t) Un número más su décima parte	$x+\frac{1}{10}x$	x = numero

Alumno21

El exponente "3" es el que se encuentra dividido entre "5", y no así el número.

Obsérvese que, en el siguiente caso, el alumno hace la misma representación algebraica para dos expresiones verbales diferentes.

l) La suma de los cuadrados de dos números	x^2+y^2	y = Un número x = Otro número
m) La suma de dos números al cuadrado	x^2+y^2	y = Un número x = Un número

Alumno 22

Un tipo de situación relacionada con la anterior, es cuando se tienen que identificar cantidades conocidas y desconocidas en un problema planteado de manera verbal. Ejemplos de tales situaciones son las dos siguientes:

> El perímetro de un triángulo es de 41 m. El primer lado tiene 4 m menos que el segundo lado y el tercer lado tiene 3 m menos que el segundo. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

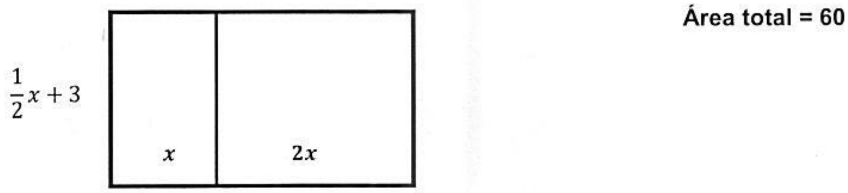
> Tres alumnos (Alejandro, Ángel y Alberto) deben realizar la captura de dos trabajos; el primer trabajo es de 85 páginas y el segundo de 63. Del total de ambos trabajos, Ángel capturará 15 páginas más que Alejandro y Alberto 11 páginas menos que Alejandro.

A partir de los resultados, parece que a la mitad de los alumnos, aproximadamente, se les complicó el análisis para extraer lo que se pide: no identificaron el contenido o sentido matemático de la situación; tienen un reconocimiento parcial de los objetos matemáticos identificables, muestran un reconocimiento parcial de las cualidades matemáticas pertenecientes a los objetos matemáticos identificados en la situación y que son relevantes para el sentido matemático de la situación y, de estas cualidades matemáticas, aquellas que se conocen y las que son desconocidas. Entonces, pudiera ser que hay poca familiaridad, experiencia, tratamiento y uso del idioma español que expresa contenidos matemáticos.

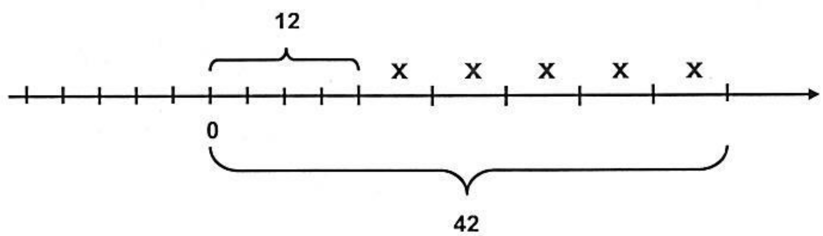
13. Simbolización de situaciones representadas geométricamente a expresiones algebraicas

En seguida se muestran dos situaciones a que se refieren a lo planteado en este apartado.

9. A partir de la siguiente figura, obtén la ecuación que represente las condiciones dadas.



10.. A partir de la siguiente figura, obtén la ecuación que represente las condiciones dadas.



Con el segundo problema casi no se observaron dificultades, porque 20 de 22 estudiantes construyeron la relación algebraica correcta.

Casi la mitad de estudiantes tuvieron dificultades con el primer problema: error de sintaxis en la escritura de la expresión algebraica, porque algunos no usan correctamente el paréntesis para expresar la propiedad distributiva; no establecen la relación existente entre la figura geométrica y el dato numérico que se da, y no reconocen los objetos matemáticos relevantes para la situación planteada. A continuación se muestran ejemplos que ilustran los errores anteriores:

$\frac{1}{2}x+3(\cancel{2}x$ $\frac{1}{2}x+3(x)+\frac{1}{2}x+3(2x)=60$ Alumno 6	$(x+2)(\frac{1}{2}x+3)$ Alumno 18
$\frac{1}{2}x+3+x+2x=60$ Alumno 19	$A=B\cdot h$ $(2x^2)(\frac{1}{2}x+3)$ Alumno 21

14. Comparación de resultados cuantitativos entre el pretest y el postest

Sin pretender que el análisis de resultados del presente trabajo sea de carácter cuantitativo, ya que se prefirió una metodología eminentemente cualitativa, en seguida se presenta la numeralia de los logros alcanzados. Se aclara que se muestran resultados generales, con el fin de brindar un panorama, sólo en términos de porcentuales de respuestas correctas en la prueba aplicada en dos momentos, antes y después de la implementación.

	PRUEBA DIAGNÓSTICA		**PRUEBA SUMATIVA**	
# pregunta	**% Respuestas correctas**		**% Respuestas correctas**	
1	0		77.27	
2	4.5		81.81	
3	0		54.54	
4	27.27		72.72	
5	A. 50		A. 68.18	
	B. 50		B. 63.63	
6	A. 0		A. 50	
	B. 0		B. 40.9	
	C. 0		C. 50	
	D. 0		D. 45.45	
7	0		90.9	
8	18.18		72.72	
9	18.18		54.54	
10	36.36		90.9	
11	a. 90.9	b. 81.81	a. 100	b. 81.81
	c. 63.63	d. 31.81	c. 90.9	d. 86.36
	e. 27.27	f. 13.63	e. 90.9	f. 72.72
	g. 22.72	h. 4.5	g. 86.36	h. 45.45
	i. 0	j. 0	i. 68	j. 13.63
12	a. 0	b. 0	a. 68	b. 22.7
13	A. 0	B. 22.72	A. 9.09	B. 50
	C. 0	D. 0	C. 0	D. 22.7

Como se observa en la tabla, hay una superación notable en los resultados cuantitativos después del proceso de instrucción, excepto en los rubros marcados con rojo.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue, por un lado, lograr un aprendizaje significativo en alumnos de bachillerato, en el tema de ecuaciones lineales y, por otro, fomentar el desarrollo de habilidades, destrezas, actitudes y valores, adecuadas para la formación de un futuro ciudadano.

En relación con el contenido se puede afirmar que la mayoría de alumnos avanzó en gran medida, en comparación a cómo estaban al iniciar el experimento.

En primer lugar, aprendieron a describir o dar una definición de los objetos de estudio que estaban trabajando; por ejemplo, en lo que se refiere al concepto de "ecuación", su idea previa consistía en es "una operación", "una fórmula", "una expresión algebraica" y cambió a "es una igualdad"; 100% de los jóvenes con quienes se trabajó adquirió la idea de que la ecuación es una igualdad, pero la mayoría –77%– llegó más lejos al afirmar que "una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que contiene números conocidos y desconocidos relacionados mediante operaciones"; lograron esto después de pensar en la definición de ecuación en tres momentos: primero pensaron de manera individual, luego discutieron en equipo y en un tercer momento compartieron y debatieron sus ideas de forma grupal.

La definición de ecuación fue producto del trabajo del alumno y parte del consenso grupal, con la guía del profesor; por lo que se concluye que las distintas maneras en que trabajó el alumno son fundamentales para que empiece a formar sus conceptos.

En lo referente a los "elementos o partes" que conforman la ecuación, poco más de 80% de los alumnos logró expresar las partes esenciales: "primer miembro, segundo miembro, signo igual, operaciones, números conocidos, números desconocidos", lo que representa un gran avance, porque inicialmente sólo 4.5% podía identificar esos elementos.

Así, también se trabajó el concepto de "solución de la ecuación", que pasó de la idea de "valor de la incógnita" –que en un inicio proporcionó 31.8% de los alumnos–, a "es el valor de la incógnita que satisface a la ecuación", alcanzada por 54%; sin embargo, el 46% restante sí expresa que "es el valor de la incógnita"; con esto es posible observar que la mayoría del grupo con el que se trabajó avanzó respecto a las ideas previas, pero en diferente medida.

También con la comprobación se obtuvo un avance importante en el grupo, puesto que pasaron de 27% a 72% quienes pudieron reconocer y describir correctamente este procedimiento; otro 23% de los alumnos restantes sí lo identifica y nombra, pero se le dificulta describirlo.

Estos datos se mencionan no sólo porque son importantes por sí mismos para concluir algo, sino porque tienen relevancia por la forma en que el alumno trabajó: partió de sus ideas o conocimientos previos hasta formar un producto que se consensó por el grupo como definiciones o descripciones aceptables de un objeto matemático; es decir, fue resultado desde el trabajo individual hasta el grupal, y de iniciar con ideas vagas o incompletas a formar otras más completas y aceptables. Con lo que se concluye que el ambiente de aprendizaje y las formas de trabajo dieron como resultado los avances de los alumnos.

Se dedicó un tiempo considerable a la formación de los conceptos, porque se tuvo en cuenta que, para este trabajo, el alumno debe reconocer qué objetos matemáticos está trabajando, porque a veces los alumnos saben resolver cosas, pero no saben los nombres de esos objetos y menos aún describirlos de una manera aceptable.

En cuanto a la resolución de ecuaciones, se pensó que fuera fundamentada en propiedades del álgebra, pero antes de entrar a la resolución algebraica, los alumnos reafirmaron su concepto de ecuación utilizando como mediador balanzas construidas por ellos y canicas de diferentes tamaños. Por otro lado, se recurrió a la idea de "agregar" y "quitar" a un mismo tiempo, de ambos lados de la balanza, la misma cantidad de objetos; idea que se retomó para luego establecer, de una manera más formal, las propiedades de la igualdad. Se puede decir que con la balanza se fortaleció el significado de igualdad y sirvió de tránsito para el manejo de ecuaciones en su representación algebraica. De esta etapa se puede concluir que el alumno fue construyendo por sí mismo, así como probando y reafirmando su concepto de ecuación.

Otra etapa en la resolución de ecuaciones fue la introducción y el recordatorio de los elementos inversos –aditivo y multiplicativo– que ya habían visto con anterioridad, pero aún no tenían un sentido para los alumnos, así como poder eliminar las ideas de "se pasa al otro lado con el signo contrario", lo que, se sabe, en muchos casos lleva a cometer errores, por lo que se pretendió insertar la idea de "operaciones inversas". En esta parte del proceso prevaleció el trabajo en equipo y el grupal, porque hubo mucha discusión para el uso de los elementos inversos junto con la propiedad uniforme de la igualdad –que consiste en sumar o multiplicar ambos miembros de la igualdad por la misma cantidad. Así, se concluye, nuevamente, que el trabajo del alumno, las formas de trabajo y dar el tiempo suficiente para la reflexión, son factores trascendentales para fomentar el aprendizaje significativo, porque las dificultades en la resolución de ecuaciones que al final presentaron los alumnos fueron por causas ajenas al procedimiento, ya que aplicaron propiedades de la igualdad, de los números y de las operaciones con una soltura bastante aceptable. Al final del proceso, la mayoría de alumnos demostró que podía resolver ecuaciones con distinto grado de dificultad abarcando casi todas las estructuras que contempla el Programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Donde se presentaron dificultades, se puede decir que no fueron causadas por las propiedades ni por el procedimiento adquirido por el alumno; las dificultades importantes, por la cantidad de alumnos que las presentaron, se dieron en otros procedimientos, como el desarrollo del binomio al cuadrado en ecuaciones del tipo $(x+5)^2=(x+13)(x+1)$; la distribución del signo en ejercicios como $\frac{4x+3}{2x-5}-\frac{3x+8}{3x-7}=1$, donde el signo negativo no se consideró de manera adecuada; así, no se puede dar por hecho que la correcta resolución de ecuaciones del tipo $\frac{(x+3)}{(x-3)}=\frac{(x-1)}{(x-4)}$ conlleve a la correcta resolución del antes mencionado. Por último, se halló otra dificultad en la ecuación $\frac{6}{5}+\frac{3}{w+3}=\frac{9}{5(w+3)}$, que implica más análisis y conocimiento de indeterminaciones en el denominador; sin embargo, pese a que la mayoría de alumnos no llegó a la solución, sí la resolvieron utilizando las propiedades pertinentes, pero en muchos casos lograron una ecuación cuadrática, por lo que algunos la dejaron en ese punto, otros escribieron que no tenía solución y sólo seis llegaron a la solución correcta.

En general, se puede concluir, en primer lugar, que en cuanto a conceptos y procedimientos hubo un avance considerable y aceptable como grupo y en lo individual; la mayoría de alumnos adquirió conceptos, aunque en diferentes medidas, como muestran los resultados; además, los pudieron expresar y utilizar conforme se avanzaba en el tema.

En segundo lugar, la actitud de muchos alumnos cambió, ya sea en la forma de convivir y escuchar a los demás, así como en el sentido de hacer y no esperar a que todo se les proporcione como receta, porque entendieron que debían aportar algo a sus equipos y luego al grupo. Otro aspecto es que, aun en ejercicios complicados no los dejaron sin contestar, se esforzaron para aplicar lo aprendido, como si hubieran desarrollado cierta perseverancia.

En tercer lugar, los avances se pueden atribuir a la forma en que se trabajó, las interacciones ayudaron a que se fueran complementando, corrigiendo y descubriendo o construyendo los conceptos y procedimientos. El tiempo que se dedicó a que el alumno pensara, aportara y, en cierta forma, evaluara sus propias ideas y las de los otros, fue un factor sustancial en el proceso de construir y descubrir.

En cuarto lugar, es preciso reconocer que hubo aspectos que se descuidaron, por no dedicar más tiempo o no profundizar, como fue el caso del trabajo con ecuaciones que contienen un binomio al cuadrado; sin embargo, conviene aclarar que sí se retomó este aspecto en clase, pero no con la suficiente significatividad para los alumnos, porque como ya se expuso fue la única causa que causó dificultad en ese tipo de ecuación. Lo mismo sucedió con la propiedad distributiva, que generó un mínimo de dificultad cuando fuera del paréntesis hay un valor diferente de uno y sin fracciones, que es contrario a cuando lo que se distribuye es un 1 con signo negativo $\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{a})}{(\mathbf{x}+\mathbf{b})} - \frac{(\mathbf{x}+\mathbf{c})}{(\mathbf{x}+\mathbf{d})} = \boldsymbol{e}$. Este caso no se discutió, sólo se mencionó sin profundizar ni dedicarle tiempo suficiente, lo que ocasionó que sólo seis alumnos respondieran correctamente.

La conclusión todavía más general, es que la forma de conducir el proceso de enseñanza y de aprendizaje es lo que repercute en el tipo de aprendizaje de los alumnos.

Referencias

Abrate, R. S., Pochulu, M. y Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en Matemática*. (d. V. Universidad Nacional, Ed.). Argentina: Docuprint.

Adame, T. (2010). Metodología y organización en el aula. *Innovación y Experiencias Educativas* (26).

Amengual, B. R. (1984). *Ciencias de la educación*. Madrid: Escuela Española.

Angel, A. R. (2004). *Álgebra intermedia* (6ª ed.). M. V. Ibarra (trad.). México: Pearson Educación.

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Barnett, R. (1995). *Álgebra elemental* (3ª ed.). D. L. Gutiérrez, y V. Á. Gutiérrez (trad.). México: McGraw-Hill.

Borel, E. (1996). *Álgebra elemental*. México: El Tajín.

Bransford, J. D., Brown, A. L. y Cocking, R. (2007). *La creación de ambientes de aprendizaje en la escuela*. S. Bojalil Parra (trad.). México: Dirección General de Desarrollo Curricular-SEP (Serie Cuadernos de la Reforma). Recuperado el 30 de noviembre de 2016, de: http://formacion.sigeyucatan.gob.mx/formacion/materiales/4/2/d2/p4/3.%20BRADSFORD,%20J.%20La%20creacion_de_ambientesaprendizaje.pdf

Cohen, M. y Nagel, E. (1973). *Introducción a la Lógica y al Método Científico*. Vol. I. Buenos Aires: Amorrortu.

Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades (1996). *Planes y Programas de Estudio*. México. 1996. Recuperado el 12 de mayo de 2016, de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/actualizacion2012/Plan1996.pdf

— (2006). *Sentido y Orientación de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. México: Secretaría de Comunicación Institucional.

— (2003). *Programas de Matemáticas I a IV*. México. Recuperado el 2 de abril de 2014, de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf

—(2011). *Diagnóstico Institucional para la Revisión Curricular*. México.

— (2012). *Planes de Desarrollo e Informes 2012-2014*. México. Recuperado el 29 de agosto de 2013, de: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/informe_2011-2012_r.pdf

— (2012). *Reflexiones sobre los Programas de estudio a partir de la construcción de Examen de Diagnóstico Académico (EDA) y el análisis de sus resultados*. México: Secretaría de Programas Institucionales.

Fehr, H. F., Carnahan, W. H. y Beberman, M. (1962). *Álgebra. Curso 1*. A. Bobonis (trad.) Estados Unidos: D. C. Heath and Company Boston.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). *Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas*. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 85-116.

García, S. J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. España: Universidad de Granada.

Gelfand, I. M. y Shen, A. (2011). *Álgebra*. Estados Unidos: Birkhäuser Boston Inc.

Goetz, J. P. y LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Gómez, F., & Mejía, R. (1992). Vygotsky: La perspectiva vygotskyana. *Renglones*, *4*-8.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal of Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*, *12*(3), 317-326.

Lovaglia, F. M., Elmore, M. A. y Conway, D. (1972). *Álgebra*. A. J. Guevara (trad.). México: Harla.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista Irice* (13). Recuperado el 28 de julio de 2016, de: http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Moreira, M. A. (1997). *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Aprendizaje Significativo: Un concepto subyacente* (pp. 19-44). Burgos.

Mucchielli, A. (2001). *Diccionario de Métodos Cualitativos en Ciencias Humanas y Sociales*. Madrid: Síntesis.

National Concuil of Teachers of Mathematics (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. R. M. Fernández (trad.). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática de Thales.

Novak, J. D. (1978). El proceso y la efectividad de los métodos de enseñanza. *Perfiles Educativos* (1), 10-31.

OCDE; México Nota-País. (2013*). Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA)*. Recuperado el 24 de junio de 2016, de *Resultados PISA*: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico reflexiones de una investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 40, 3-28.

Panizza, M., Sessa, C. y Sadovsky, P. (1999). La ecuación lineal con dos variables. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 453-461.

Rees, P. K., y Sparks, F. W. (1998). *Álgebra*. México: Reverte Ediciones.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades de los estudiantes. En L. Rico, J. Kilpatrick y P. Gómez (edit.). *Educación Matemática* (pp. 69-104). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

SEP. (2011). *Dirección del Bachillerato General*. Recuperado el 15 de junio de 2016, de: Secretaría de Educación Pública: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/documentobase/DOC_BASE_16_05_2016.pdf

— (2011). *Programas de Estudio 2011*. México: Dirección de Desarrollo Curricular. Recuperado el 30 de abril de 2014, de: http://www.reformapreescolar.sep.gob.mx

Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (2ª ed.). Madrid: Morata.

Socas, R. M. y Palarea, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del leguaje algebraico. *Suma* (16), 91-98.

Stephan, M. (2014). Sociomathematical Norms in Mathematics. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 1, 563-566. Estados Unidos: Springer Referenc.

Stewart, I. (2012). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10 000 años*. Barcelona: Crítica.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. *La búsqueda de significados.* Barcelona: Paidós.

Wentwoth, J., y Smith, D. E. (1943). *Elementos de Álgebra*. Estados Unidos: Ginn y Compañía.

Zubieta, R. G. (s/f). *Álgebra elemental*. México: Yolva.

ANEXOS

ANEXO 1. Prueba Diagnóstica y Final

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL VALLEJO
MATEMÁTICAS 2016-2

NOMBRE DEL ALUMNO: ___________________________________
GPO. _____ Fecha_______

INSTRUCCIONES: LEE CON MUCHA ATENCIÓN Y CONTESTA LO QUE SE TE PIDE.

1. Escribe lo que entiendes por ecuación.

2. ¿De qué partes se compone una ecuación?

3. ¿Qué es la solución de una ecuación?

4. ¿De qué manera se puede saber si un valor es solución de una ecuación?

5. Lee cuidadosamente los siguientes enunciados y de cada uno identifica las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas.

A. El perímetro de un triángulo es de 41m. El primer lado tiene 4m menos que el segundo lado y el tercer lado tiene 3m menos que el segundo. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

B. Tres alumnos (Alejandro, Ángel y Alberto) deben realizar la captura de dos trabajos; el primer trabajo de 85 páginas y el segundo de 63. Del total de ambos trabajos Ángel capturará 15 páginas más que Alejandro y Alberto 11 pág. menos que Alejandro.

6. Describe las características de las siguientes ecuaciones:

A. $3\mathrm{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{8}$	
B. $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{10}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$	
C. Bh=90	
D. $\mathrm{y}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$	

7. De las siguientes expresiones algebraicas encierra en un círculo aquellas que representan una ecuación

a) $(-2)^5 =$

b) $3^x = 27$

c) $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}-\frac{bc}{a}>100$

d) $x+2x-5+10x$

e) $\frac{3^3 \bullet 3^{-4}}{3^{-2}\bullet 3^{-5}}=3^6$

f) $\frac{x^2-a^2}{a+b}-\frac{x^2+a}{a-b}$

m) $2(4-2x)+11x$

g) $12.56=\pi \bullet r^2$

h) $2Bh=50$

i) $x-45=-3$

j) $\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$

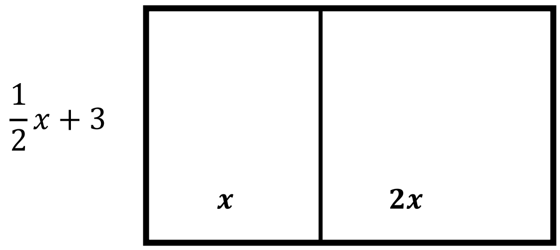
k) $\frac{9x^5}{3x^4}=$

l) $\frac{7y}{3}-4y$

8. A partir de la siguiente expresión, construye al menos una ecuación utilizando propiedades de la igualdad.

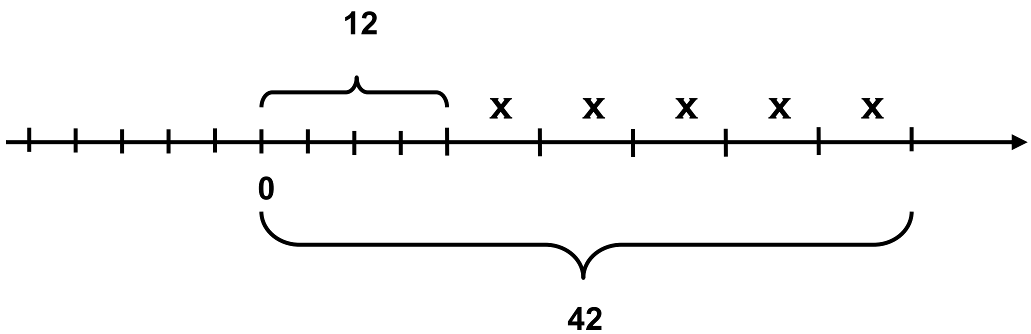
x=5

9. A partir de la siguiente figura, obtén la ecuación que represente las condiciones dadas.



Área total = 60

10. A partir de la siguiente figura, obtén la ecuación que represente las condiciones dadas.



11. Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe el procedimiento que se realiza para llegar al resultado.

k) $6x = \mathbf{18}$	l) $\boldsymbol{-6x = 18}$
m) $4x - \mathbf{2} = \mathbf{6}$	n) $\boldsymbol{6x - 7x + 10 = 13}$

o) $\frac{4}{3}x = \frac{48}{6}$	p) $\frac{2}{4}x + 7 = \frac{5}{3}x$
q) $8(x+1) = 2(3x+6)$	r) $(x+5)^2 = (x+13)(x+1)$
s) $\frac{(x+3)}{(x-3)} = \frac{(x-1)}{(x-4)}$	t) $\frac{4x+3}{2x-5} - \frac{3x+8}{3x-7} = 1$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando únicamente propiedades válidas para los números y la igualdad.

A. $\mathrm{r} - \frac{2}{7}\boldsymbol{r} + \mathbf{12} = \mathbf{0}$	B. $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{w}+\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}(\boldsymbol{w}+\mathbf{3})}$

13. Despeja la literal que se indica para cada caso:

E. $F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$ $\quad \boldsymbol{q_1} =$	F. $d = vt$ $\quad \boldsymbol{v} =$
G. $P = \frac{\sqrt{3Mk}}{2t^2}$ $\quad \boldsymbol{t} =$	H. $d = V_o t + \frac{at^2}{2}$ $\quad \boldsymbol{a} =$

14. Escribe en cada línea de la derecha el nombre de la propiedad que se utilizó en cada paso de la resolución de la siguiente ecuación:

	Propiedad que se utilizó
$\frac{2}{4}x+7=\frac{5}{3}x$	
$4\left(\frac{2}{4}x+7\right)=4\left(\frac{5}{3}x\right)$	
$4\left(\frac{2}{4}x\right)+4(7)=4\left(\frac{5}{3}x\right)$	
$\frac{8}{4}x+28=\frac{20}{3}x$	
$2x+28=\frac{20}{3}x$	
$3(2x+28)=3\left(\frac{20}{3}x\right)$	
$3(2x)+3(28)=3\left(\frac{20}{3}x\right)$	
$6x+84=\frac{3}{3}20x$	
$6x+84=(1)20x$	
$6x+84-84=20x-84$	
$6x+0=20x-84$	
$6x-20x=20x-20x-84$	
$6x-20x=0-84$	
$-14x=-84$	
$\frac{1}{-14}(-14x)=\left(\frac{1}{-14}\right)-84$	
$\frac{-14}{-14}x=\frac{-84}{-14}$	
$x=\frac{-84}{-14}$	
$x=6$	

15. Simboliza las siguientes expresiones, indicando claramente el significado de cada símbolo que utilices:

	Simbolización de la expresión	Significado de cada símbolo utilizado
a) La edad de Pedro más la edad de Luis		
b) El triple de la velocidad de un avión		
c) La mitad de la diagonal del cuadrado		
d) El perímetro de un triángulo equilátero		
e) El área de un rectángulo		
f) El costo de un artículo más su IVA (considérese IVA de15%)		
g) Mi mamá tiene el doble de pares de zapatos que mi papá		
h) El área de un semicírculo cuyo radio es r		
i) La distancia que se recorre en una semana de la casa a la escuela		

j) El doble de la diferencia de dos números.		
k) La diferencia del doble de dos números		
l) La suma de los cuadrados de dos números		
m) La suma de dos números al cuadrado		
n) El dinero de un padre, repartido por partes iguales entre sus hijos		
o) El denominador de una fracción, es cinco unidades menor que su numerador		
p) En un terreno de forma rectangular, su ancho mide la mitad de su largo		
q) El numerador de una fracción excede al denominador en tres unidades		
r) La quinta parte del cubo de un número		
s) El cubo de la quinta parte de un número		
t) Un número más su décima parte		

ANEXO 2. Materiales utilizados durante las sesiones

Anexo 2.a. Sesión 1

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
Plantel **VALLEJO**
MATEMÁTICAS

Integrantes del equipo: ______________________, ______________________

______________________, ______________________

Contesta cada pregunta, tan claro y amplio como sea posible.

1. ¿Qué es una Ecuación?

2. ¿De qué elementos se compone una ecuación?

3. Escribe 10 ejemplos de ecuaciones ordenadas de acuerdo a su dificultad.

Anexo 2.b. Sesión 2 y 3

FECHA ______________

NOMBRE DEL ALUMNO

____

Instrucciones: Encerrar en con un semicírculo las expresiones que representan una ecuación.

1) $3(7x+2)=4(3x+2)$

2) $(x+8)^2$

3) $6x-2x-6=7-4x+3$

4) $7m+35$

5) $\frac{(3x-1)^2}{x-1}+\frac{18x-1}{2}$

6) $5x-3y+8=6z$

7) $2m+5-7m=35$

8) $8f+5y-2f-4y+3fy$

9) $4a-8a-6a-a$

10) $9w - 2w$

11) $\frac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}=1$

20) $(x+8)^2+6=180-x$

21) $w^2-\frac{5w}{3}+11$

22) $\frac{p}{2}-\frac{5}{2}$

23) $\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$

24) $7m+35=70$

25) $x-\frac{x+2}{12}$

26) $n^2+8=n^2+n$

27) $3x^2+8x=3$

28) $\frac{(3x-1)^2}{x-1}=\frac{18x-1}{2}$

29) $3(5x-2)+15$

30) $2x^2-4=-7x$

31) $(7+z)(5)+14-7z$

32) $\frac{22}{11}y+(10)-y$

NOMBRE DEL ALUMNO:________________________________ GRUPO________ FECHA________

ECUACIÓN	MIEMBROS DE LA IGUALDAD		INCÓGNITA(s) (0.3)	VALORES CONOCIDOS (0.3)	OPERACIONES PRIMER MIEMBRO (0.4)	OPERACIONES SEGUNDO MIEMBRO (0.4)	TOTAL PUNTOS FILA
	Primero (0.3)	Segundo (0.3)					
1. $25 = \frac{4}{8}x$							
2. $41 - 22z - 18z = -30z$							
3. $\frac{3}{x} - 15 = \frac{12}{x}$							
4. $x^2 + 6x + 9 = 0$							
5. $3x + y = 28$							
6. $8w - 4 + 3x = 7x + x + 14$							
7. $x + y + z = 16$							
8. $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$							
9. $x^3 - 1 = 26$							
10. $a(x + 1) = 1$							
11. $3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 7$							
12. $7x - 9 = \frac{x}{4}$							
13. $3x + 2 = 5y + 7$							
14. $x + \frac{1}{2}x - 3x = -4$							

ECUACIÓN	MIEMBROS DE LA IGUALDAD		INCÓGNITA(s) (0.3)	VALORES CONOCIDOS (0.3)	OPERACIONES PRIMER MIEMBRO (0.4)	OPERACIONES SEGUNDO MIEMBRO (0.4)	TOTAL PUNTOS FILA
	Primero (0.3)	Segundo (0.3)					
15. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$							
16. $15x-10=6x-(x+2)+(-x+3)$							
17. $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x+6)$							
18. $3x+[-5x-(x+3)]=8x+(-5x-9)$							
19. $(x+1)(2x+5)=(2x+3)(x-4)+5$							
20. $(x-2)^2-(3-x)^2=1$							
21. $14x-(3x-2)-[5x+2-(x-1)]=0$							
22. $8x-(7x^2+2)=7(5-x)(3+x)$							
23. $5\left(3-\frac{1}{5}x\right)=14\left(x-\frac{1}{7}\right)$							
24. $\frac{3}{z}-\frac{4}{5z}=\frac{1}{10}$							
25. $4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{3t}\right)+2\left(\frac{1}{t}\right)=1$							
26. $2[3x-(4x-6)]=5(x-6)$							
27. $4\{2-[3(c+1)-2(c+1)]\}=-2c$							

ECUACIÓN	MIEMBROS DE LA IGUALDAD		INCÓGNITA(s) (0.3)	VALORES CONOCIDOS (0.3)	OPERACIONES PRIMER MIEMBRO (0.4)	OPERACIONES SEGUNDO MIEMBRO (0.4)	TOTAL PUNTOS FILA
	Primero (0.3)	Segundo (0.3)					
28. $\frac{5}{x^2+1} = \frac{1}{4x+1}$							
29. $\frac{10x^2-5x+8}{5x^2+9x-19} = 2$							
30. $\frac{1}{3x-3} + \frac{1}{4x+4} = \frac{1}{12x-12}$							
31. $\frac{x}{4} - \frac{x^2-8x}{4x-5} = \frac{7}{4}$							
32. $\frac{2x-9}{10} + \frac{2x-3}{2x-1} = \frac{x}{5}$							
33. $\frac{-2+y}{3} - \frac{y-3}{4} = \frac{y-4}{5}$							
34. $\frac{3}{5}\left(\frac{2x-1}{6}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{3x+2}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{1}{5} = 0$							
35. $\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-6}{3}\right)$							
36. $\frac{3x-1}{2} - \frac{5x+4}{3} - \frac{x+2}{8} = \frac{2x+3}{5} - \frac{1}{10}$							
37. $4 - \frac{10x+1}{6} = 4x - \frac{16x+3}{4}$							
38. $8x + \frac{11}{3} = \frac{1}{5}x - 7$							
39. $\frac{3a}{2} + \frac{a-4}{4} = 5 - \frac{a-2}{4}$							

ECUACIÓN	MIEMBROS DE LA IGUALDAD		INCÓGNITA(s) (0.3)	VALORES CONOCIDOS (0.3)	OPERACIONES PRIMER MIEMBRO (0.4)	OPERACIONES SEGUNDO MIEMBRO (0.4)	TOTAL PUNTOS FILA
	Primero (0.3)	Segundo (0.3)					
40. $\frac{x+5}{x+6}=\frac{x+9}{x+7}$							
41. $\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$							
42. $\frac{2x+7}{5x+2}-\frac{2x-1}{5x-4}=0$							
43. $\frac{x}{4}-\frac{x^2-8x}{4x-5}=\frac{7}{4}$							
44. $\frac{4x+3}{2x-5}=\frac{3x+8}{3x-7}+1$							
45. $\frac{2x-4}{x-3}=3+\frac{2}{x-3}$							
46. $\frac{3x+5}{4}-\frac{2x-3}{3}=3$							
47. $\frac{4x+3}{6}+\frac{3x+1}{4}=2x-1$							
48. $\frac{5}{3x-12}=\frac{x-2}{2x-8}-5$							
49. $\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{2-x}=-3$							

Anexo 2.d. Sesión 6

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________________ **GRUPO:** ________ **FECHA:** __________

ECUACIÓN	Descripción de las operaciones que se realizan para hallar la solución
1. $x - 92 = 28$	
2. $7x = 84$	
3. $\frac{x}{6} = 4$	
4. $4x - 3 = 9$	
5. $x + 9 = 21$	
6. $100x = 50$	
7. $\frac{x}{2} = 75$	
8. $\frac{1}{2}x - 3 = 2$	
9. $7x - 81 = 59$	
10. $6x = 72$	
11. $\frac{300}{x} = 6$	
12. $5x + 29 = 49$	

ECUACIÓN	Descripción De las operaciones que se realizan para hallar la solución
13. $33 = 45 - x$	
14. $12x = 96$	
15. $\frac{x}{10} = 22$	
16. $6x + 14 = 56$	
17. $73 - x = 55$	
18. $48 = 16x$	
19. $\frac{x}{8} = 15$	
20. $3x + 10 = 70$	
21. $21 = x - 5$	
22. $13x = 52$	
23. $\frac{x}{7} = 20$	
24. $\frac{x}{12} + 6 = 11$	
25. $x^2 + 2 = 38$	

ECUACIÓN	Descripción De las operaciones que se realizan para hallar la solución
26. $108 = -40 + x$	
27. $39x = 156$	
28. $\frac{1}{5}x = 21$	
29. $12x - 12 = 48$	
30. $9 = x^3 + 1$	
31. $450x = 50$	
32. $\frac{1500}{3x} =$	
33. $\frac{2}{3}x + 4 = 20$	
34. $x^3 = 64$	
35. $\frac{1}{5}x = 9$	
36. $\frac{2}{x} = \frac{1}{5}$	
37. $-5x + 22 = 42$	
38. $x^3 - 8 = -35$	

ECUACIÓN	Descripción De las operaciones que se realizan para hallar la solución
39. $-33 = 7 - x$	
40. $-13x = 52$	
41. $\frac{3}{4}x = -75$	
42. $4x + 4 = -16$	
43. $x + 9 = -21$	
44. $-100x = 50$	
45. $\frac{x}{2} = -26$	
46. $\frac{1}{4}x - 3 = -13$	
47. $x^2 + 9 = 18$	
48. $10x = -33$	
49. $\frac{x}{5} = -30$	
50. $x + 29 = -21$	

Anexo 2.e. Sesión 7

Resolver los ejercicios por descomposición de números, observar los ejemplos.

EJEMPLO 1	EJEMPLO 2	Ejemplo 3
$b+12=22$	$11x=66$	$3x-8=16$
$b+12=10+12$	$11x=11(6)$	$3x-8=24-8$
$si\ 12=12$	$si\ 11=11$	$-8=-8$
$entonces\ x=10$	$entonces\ x=6$	$entonces\ 3x=24$
		$3x=3(8)$
		$si\ 3=3$
		$entonces\ x=8$

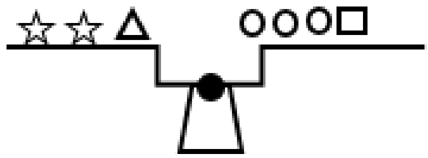
1. $8=t-12$
2. $3x=165$
3. $x+11=15$
4. $14=29+c$
5. $144=12t$
6. $-19+a=5$
7. $r-4=43$
8. $2250=9y$
9. $\frac{1}{2}x=50$
10. $20=-10+q$
11. $63-z=50$
12. $23=12+x$
13. $125=25y$
14. $\frac{x}{3}=9$
15. $a-19=21$
16. $800=32z$
17. $27=4x+3$
18. $35b=105$
19. $63=7x$
20. $8q+3=3q+28$
21. $3z++7=19$
22. $\frac{1}{4}x=8$
23. $7r+4=39$
24. $5a+6a=71$
25. $2t-10=40$
26. $28-y=2y+4$
27. $\frac{1}{5}x=2$
28. $85=9r+22$
29. $4x-2=3x+6$
30. $3m+11=4+5m$
31. $\frac{1}{5}x=2$
32. $3x-7=14$
33. $3y+=6x-2$
34. $x+3(x-2)=2x-)$
35. $\frac{x}{6}=4$
36. $5a-1=14$
37. $5s-3=2s+6$
38. $2x+3+x=9$
39. $4x-8=-8x+16$
40. $\frac{x}{9}=3$
41. $7t-7=4t+8$
42. $8w+7=-3w-4$
43. $2z+21=4z+9$
44. $3w-8=2w+1$
45. $50y-25=5y+20$
46. $8x+10=26$
47. $80-13r=15$
48. $20+3t=2t+25$
49. $9+7r=37$
50. $6k-15=4k-9$

Anexo 2.f. Sesión 9 y 10

En cada balanza que se presenta descomponer las cantidades representadas con figuras, de manera que con otras figuras representen la misma ecuación y se pueda hallar la solución.

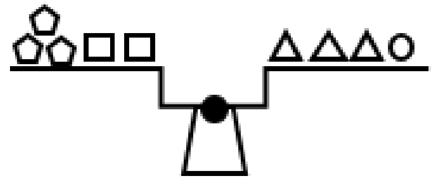
○ = 1 ☆ = 10 △ = 5 ⬠ = 2 □ = x ✚ = y ⊕ = z

1



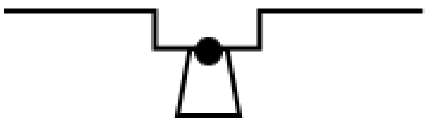
Ecuación______________________

2



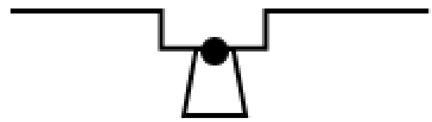
Ecuación ______________________

1'



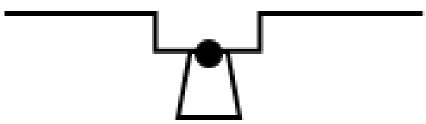
Ecuación______________________

2'



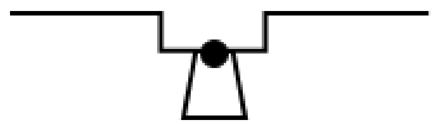
Ecuación______________________

1''



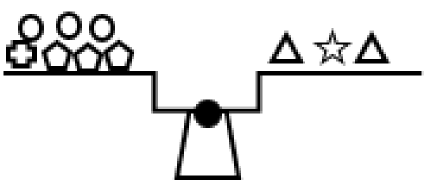
Ecuación______________________

2''



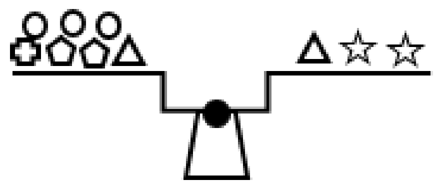
Ecuación______________________

3



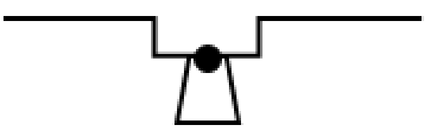
Ecuación______________________

4



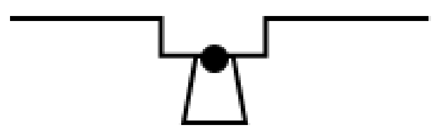
Ecuación______________________

3'



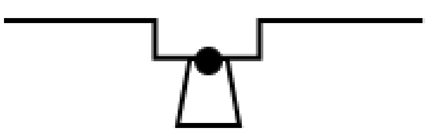
Ecuación______________________

4'



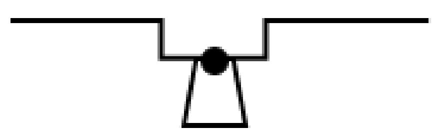
Ecuación______________________

3''



Ecuación______________________

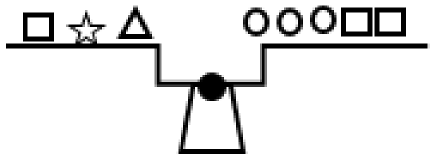
4''



Ecuación______________________

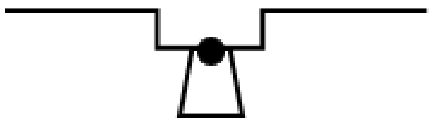
○ = 1 ☆ = 10 △ = 5 ⬠ = 2 □ = x ✪ = y ⊕ = z

5



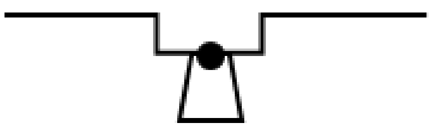
Ecuación____________________

5'



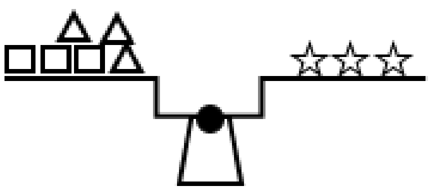
Ecuación____________________

5''



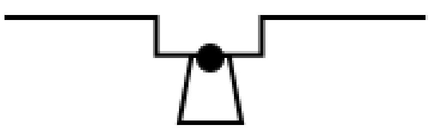
Ecuación____________________

7



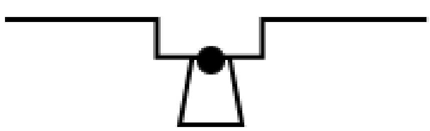
Ecuación____________________

7'



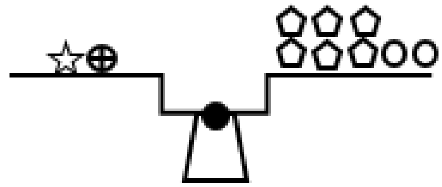
Ecuación____________________

7''



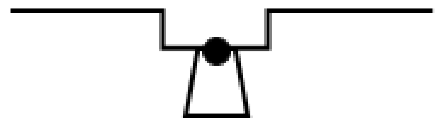
Ecuación____________________

6



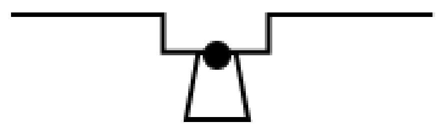
Ecuación ____________________

6'



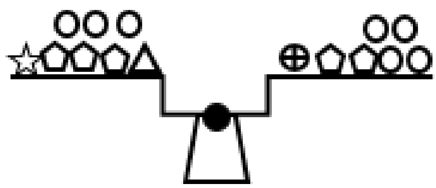
Ecuación____________________

6''



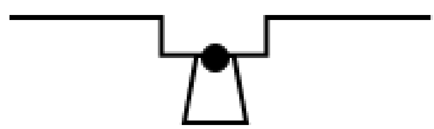
Ecuación____________________

8



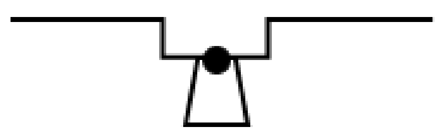
Ecuación____________________

8'



Ecuación____________________

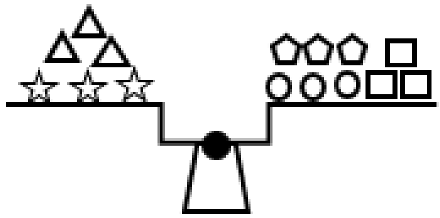
8''



Ecuación____________________

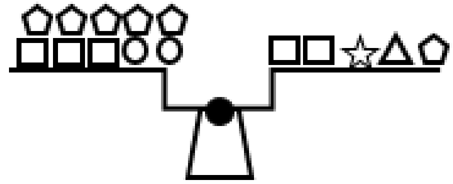
○ = 1 ☆ = 10 △ = 5 ⬠ = 2 □ = x ✚ = y ⊕ = z

9



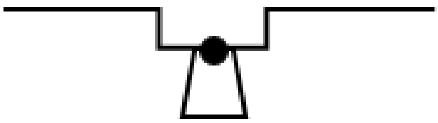
Ecuación____________________

10



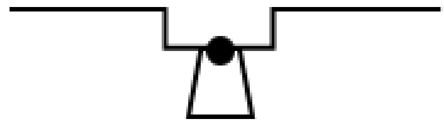
Ecuación ____________________

9'



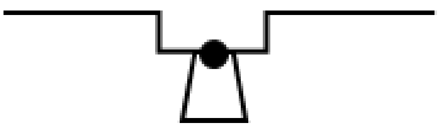
Ecuación____________________

10'



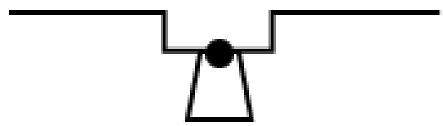
Ecuación____________________

9"



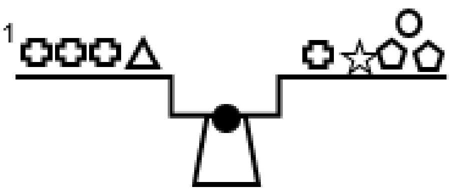
Ecuación____________________

10"



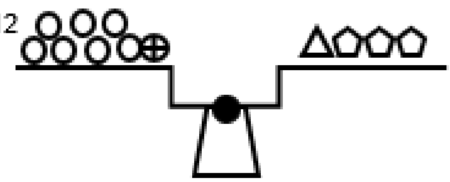
Ecuación____________________

11



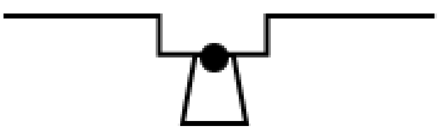
Ecuación____________________

12



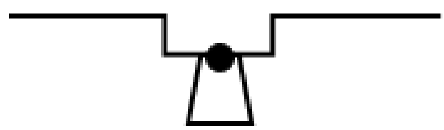
Ecuación____________________

11'



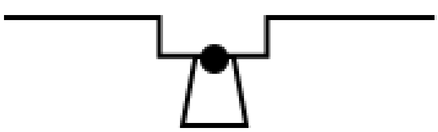
Ecuación____________________

12'



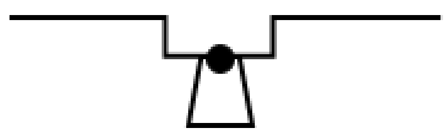
Ecuación____________________

11"



Ecuación____________________

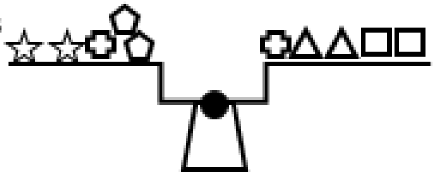
12"



Ecuación____________________

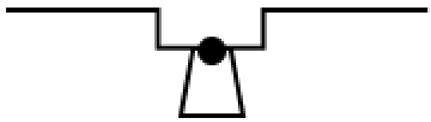
○ = 1 ☆ = 10 △ = 5 ⬠ = 2 □ = x ✚ = y ⊕ = z

13



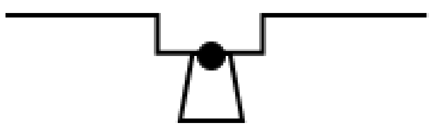
Ecuación_______________________

13'



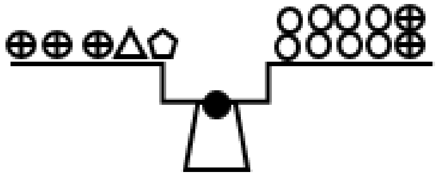
Ecuación_______________________

13''



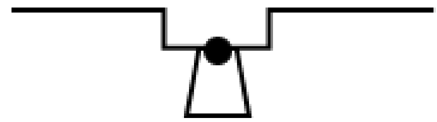
Ecuación_______________________

14



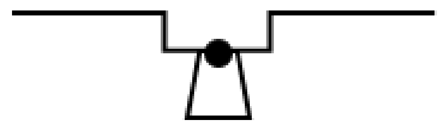
Ecuación _______________________

14'



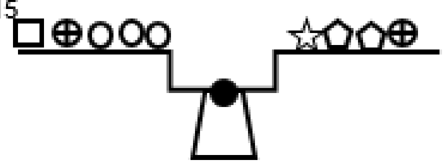
Ecuación_______________________

14''



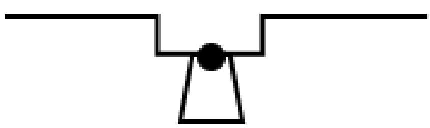
Ecuación_______________________

15



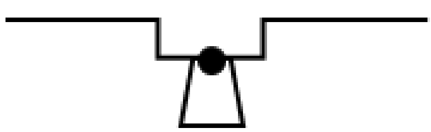
Ecuación_______________________

15'



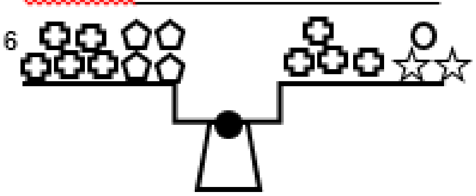
Ecuación_______________________

15''



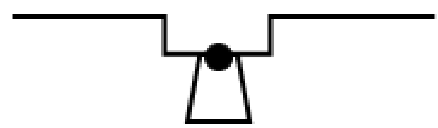
Ecuación_______________________

16



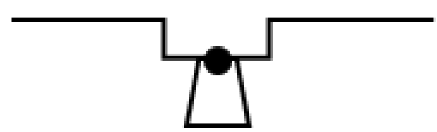
Ecuación_______________________

16'



Ecuación_______________________

16''

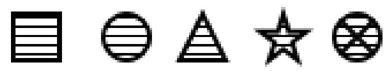


Ecuación_______________________

Anexo 2.g. Sesión 11

Nombre: ________________________________ **grupo:** _______ **Fecha**_______

□ = 2; ○ = 1; △ = 5; ☆ = 10; ⊗ = Incógnita

 Estas figuras achuradas son para números negativos

Con las figuras anteriores representa las siguientes ecuaciones en balanzas y resuélvelas.

1. $6x + 30 = -12$
2. $x - 4 - 3x = -10 + 6$
3. $5x = 8x - 15$
4. $5x - 15 = 4x + 16$
5. $-3x + 9 = 2x - 11$
6. $-3 - 6x = -27$
7. $2x - 6 = 4x - 36$
8. $-12 - 5x = -x + 12$
9. $-14 + 3x = 21 + 8x$
10. $-6x - 10 = 2x + 6$
11. $3x + 5 = 5x - 13$
12. $35 - 5x = 3 - x$
13. $13 - 12x = -2x - 27$
14. $6x - 8 = -8x + 20$
15. $9x - 6 = 6x + 9$
16. $12x + 23 = 4x - 25$
17. $7x + 15 = 9x - 21$
18. $4x = 2x - 12$
19. $8x - 24 = 5x$
20. $7x + 12 = 4x - 17$
21. $3x - 25 = x - 5$
22. $5x + 13 = 10x + 12$
23. $12x - 10 = -11 + 9x$
24. $36 - 6x = 34 - 4x$
25. $10x - 25 = 6x - 25$
26. $16x - 1 = 65x - 36$
27. $13 - x = -4x + 9$
28. $8x + 11 = 10x - 3$
29. $10x - 13 = -5x + 17$
30. $-7x + 5 = 10 - 2x$

Anexo 2.h. Sesión 12 y 13

CCH Vallejo

Resolver mediante segmentos las siguientes ecuaciones:

1. $x = 5$
2. $m = -4$
3. $2x = 6$
4. $2A = -66$
5. $2 + x = 8$
6. $n - 2 = 10$
7. $4A = -6$
8. $4x = 2x - 3$
9. $5B + 4 = B + 12$
10. $10 + 3t = 6 + 5$
11. $100x = 50$
12. $21 = y - 5$
13. $2r + 8 = 14$
14. $2C - 8 = 12$
15. $3x - 4 = 8$
16. $6x + 4 = 22$
17. $44 = 2z + 30$
18. $9 + z = 2z + 6$
19. $25x = -200$
20. $75 + x = 150 - 2x$

Anexo 2.i. Sesión 15, 16 y 17

Nombre del alumno: ____Fecha________

Instrucciones: Resuelve las siguientes ecuaciones y anota las propiedades que vas utilizando durante el procedimiento.

1. $2x = 6$
2. $2A = -66$
3. $2 + x = 8$
4. $n - 2 = 10$
5. $4A = -6$
6. $4x = 2x - 3$
7. $5B + 4 = B + 12$
8. $10 + 3t = 6 + 5$
9. $100x = 50$
10. $21 = y - 5$
11. $2r + 8 = 14$
12. $2C - 8 = 12$
13. $3x - 4 = 8$
14. $6x + 4 = 22$
15. $44 = 2z + 30$
16. $9 + z = 2z + 6$
17. $25x = -200$
18. $75 + x = 150 - 2x$
19. $b + 12 = 22$
20. $8 = t - 12$
21. $x + 11 = 15$
22. $14 = 29 + c$
23. $-19 + a = 5$
24. $r - 4 = 43$
25. $20 = -10 + q$
26. $63 - z = 50$
27. $23 = 12 + x$
28. $a - 19 = 21$
29. $x + 2 = -2x - 8$
30. $x - 92 = 28$
31. $7x = 84$
32. $\frac{x}{6} = 4$
33. $4x - 3 = 9$
34. $x + 9 = 21$
35. $\frac{x}{2} = 75$
36. $\frac{1}{2}x - 3 = 2$
37. $6x = 72$
38. $\frac{300}{x} = 6$
39. $5x + 29 = 49$
40. $\frac{x}{12} + 6 = 11$
41. $33 = 45 - x$
42. $12x = 96$
43. $\frac{x}{10} = 22$
44. $6x + 14 = 56$
45. $73 - x = 55$
46. $48 = 16x$
47. $\frac{x}{8} = 15$
48. $3x + 10 = 70$
49. $13x = 52$

50. $\frac{x}{7} = 20$

51. $-5x + 22 = 42$

52. $108 = -40 + x$

53. $39x = 156$

54. $\frac{1}{5}x = 21$

55. $12x - 12 = 48$

56. $450x = 50$

57. $\frac{2}{3}x + 4 = 20$

58. $\frac{1}{5}x = 9$

59. $\frac{2}{x} = \frac{1}{5}$

60. $108 = -40 + x$

61. $39x = 156$

62. $-33 = 7 - x$

63. $-13x = 52$

64. $\frac{3}{4}x = -75$

65. $4x + 4 = -16$

66. $x + 9 = -21$

67. $-100x = 50$

68. $\frac{x}{2} = -26$

69. $\frac{1}{4}x - 3 = -13$

70. $10x = -33$

71. $\frac{x}{5} = -30$

72. $-5x + 22 = 42$

Anexo 2.j. Sesión 18

Ejercicios sesión 18.

Resolver utilizando Propiedades y anotar al lado de cada paso la propiedad u operación realizada

1. $\frac{42}{x} - 15 = \frac{-48}{x}$

2. $\frac{4}{3}x = \frac{48}{6}$

3. $8(x+1) = 2(3x+6)$

4. $3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 7$

5. $t + \frac{1}{2}t - 3t = -6$

6. $-5(3z-2) + 8z - 1 = 2(8-5z)$

7. $2(x-2) - 4 = 8(x-3) + 15$

8. $x - (2x+1) = 8 - (3x+3)$

Anexo 2.k. Sesión 21

Ejercicios para sesión 21, 28 de Marzo. Anotar en el pizarrón

1. $\frac{4}{t-5} = \frac{3}{2-5t}$

2. $\frac{5-x}{9} = \frac{3+x}{2}$

3. $\frac{15}{2-x} = \frac{4}{3x-7}$

4. $\frac{4-2x}{x} + \frac{3}{2x} = 1$

5. $\frac{5}{7y} - \frac{8-3y}{3y} = 5$

Anexo 2.l. Sesión 22

$$5x = 75$$

$$6t = 3$$

$$8x - 10 = 14$$

$$8y + 3 = 2y + 9$$

$$7z = -8 + 3y$$

$$2x - 5x + 7 = 13$$

$$\frac{3}{2}x = 9$$

$$\frac{5}{4}x + 3 = 13$$

$$\frac{1}{4}w + 5 = w + \frac{1}{2}$$

$$5(3 - z) = z + 3$$

$$6(5 - 2x) = 3(x - 10)$$

$$3(x + 4) = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x + 1}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x - 6}{3}\right)$$

$$\frac{5x + 8}{3x + 4} = \frac{5x + 2}{3x - 4}$$

$$\frac{2x + 7}{5x + 2} - \frac{2x - 1}{5x - 4} = 0$$

Anexo 2.m. Sesión 24

Para sesión 24, lunes 4, Abril

1. $\frac{(\mathbf{x}+1)}{(\mathbf{x}-1)}=\frac{(2\mathbf{x}-5)}{(2\mathbf{x}-7)}$

2. $\frac{(\mathbf{x}+2)}{(\mathbf{x}-3)}=\frac{(2\mathbf{x}-5)}{(2\mathbf{x}-10)}$

3. $\frac{(\mathbf{x}-5)}{(\mathbf{x}+6)}=\frac{(3\mathbf{x}-17)}{(3\mathbf{x}+6)}$

4. $\frac{(2\mathbf{x}-1)}{(2\mathbf{x}+1)}=1-\frac{2}{3\mathbf{x}}$

5. $(\mathbf{x}+3)^2=(\mathbf{x}+2)(\mathbf{x}+1)$

6. $2(3\mathbf{x}-1)^2=(18\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}-1)$

Anexo 2.n. Sesiones 27, 28 y 29

1) $2x - x + 4 + 2 = 8$
2) $3x + 1 - 2x = 9 - 3$
3) $6 + 2x - 4 = x - 1$
4) $-6 - 2x = -3x - 6$
5) $x + x + 4 + 2 = 8$
6) $2x + x + 5 - 5 = 6$
7) $2x - x - 3 - 5 = 2$
8) $2x + 2 - 1 - x = 2$
9) $5x - 4 = 3x - 2$
10) $2x - 5 + 1 + x = + x - 6$
11) $-2x - 5 = 6 - x - 2x$
12) $-10 - 4x + 2 = x - 3 - 4x$
13) $-9x - 6 + 4 = 4 + 2x - 8x$
14) $-x = -6 - 2 - 2x$
15) $5x - 10 - 3x + 3 + 2x = 20 - x - 4 - 3 + 3x$
16) $2(x + 1) = 2$
17) $3(x - 2) - x = 8$
18) $4(-x - 1) + 5x - 2 = -2x - x$
19) $2(x + 1) = -6$
20) $2(x - 1) = 4$
21) $2(-x - 1) = 5 + 1$
22) $3 + 2(4 + 2x) + 1 = 20 - 2(2 - x)$
23) $2 - x + 4(-2x - 3) = -8x + 1$
24) $6(x - 2 + 3x) = -3(-4x + 1 - 5)$
25) $6x = -4 + x + 3 + 1$
26) $x + 2(x + 1) = 4$
27) $4(x - 3) - 5(x + 2) = 7(3x - 1) + 29$
28) $6x + 2(1 + x) = 3x - 8 + x - 2$
29) $3(x + 1) = 2(x + 3) - 1$
30) $3(4 + 12x) - 6(2x + 3) = 36 + 2(3x + 2)$
31) $4(3x - 2) - 3(x + 1) = 5(x + 1) + 6$
32) $\frac{x+2}{3} = 12$
33) $\frac{x-2}{-2} = 6$
34) $\frac{-5+x}{-3} = -5$
35) $\frac{-5-x}{-3} = -2$
36) $\frac{x+2}{2} = x + 1$
37) $\frac{-2x}{3} = x + 10$
38) $\frac{x-3}{-2} = 9 + 2x$
39) $\frac{-6+3x}{-2} = -4 - x$
40) $6 + 2x - 1 = \frac{x}{3}$
41) $\frac{x}{2} + 1 = 7$
42) $4 + \frac{x}{3} - 2 = 6$
43) $3 - x + \frac{x}{2} = 5$
44) $\frac{2x}{3} + 2 = 4$
45) $6 + 2\frac{x+1}{3} = 8$
46) $2 - \frac{x-1}{3} = 4$
47) $-2\frac{x+1}{3} = 2 - x$
48) $-2\frac{-4-x}{-3} = 10$
49) $-\frac{x-2}{5} = 7$
50) $4x - 4\frac{2x+2}{6} = 12$

STA DOS-ECUACIONES DE 51-50

51. $\frac{x-3}{2}+\frac{x+1}{4}=\frac{x+1}{2}-\frac{3x}{2}$

52. $\frac{3(x-5)}{2}+\frac{2(x-4)}{3}=\frac{2}{3}$

53. $\frac{2(x-4)}{3}+\frac{x}{5}=\frac{5}{3}$

54. $\frac{x+4}{3}+\frac{3x-7}{4}-\frac{x-5}{12}-\frac{x-7}{14}=x$

55. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=5$

56. $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}x=3$

57. $\frac{3}{4}x+2=\frac{5}{6}x+1$

58. $\frac{x}{2}+6-\frac{x}{4}=\frac{2x}{5}+3$

59. $\frac{5}{6}x-\frac{x}{18}-\frac{3}{4}x=\frac{7}{12}-\frac{2x}{9}+\frac{2}{3}$

60. $\frac{3x}{8}+2-\frac{4x}{5}=1+\frac{3}{10}x+\frac{3}{2}$

61. $\frac{4x+5}{8}-\frac{8x-3}{6}+\frac{5-3x}{3}=\frac{3+5x}{2}+\frac{3}{4}$

62. $\frac{x+3}{4}-\frac{x-4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+1}{4}+\frac{2x+1}{9}$

63. $\frac{3x-5}{2}-1-\frac{2x-1}{3}+\frac{x+3}{4}=\frac{5x-1}{8}$

64. $\frac{3x-8}{5}-\frac{x-1}{4}+\frac{7-x}{3}=\frac{4-x}{3}-\frac{8x-5}{10}$

65. $\frac{7}{2x}-\frac{8}{3x}+\frac{9}{4x}-\frac{1}{3}=\frac{31-7x}{6x}$

66. $\frac{11}{x}-2=\frac{3}{x}$

67. $\frac{5}{x}-\frac{3}{2}=\frac{3}{x}$

68. $\frac{1}{6x}+\frac{1}{9x}+\frac{1}{12x}+\frac{1}{24x}-\frac{13}{72}=0$

69. $\frac{3}{4x}-\frac{5}{14}-\frac{8}{7x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}-\frac{11}{14x}$

70. $\frac{3}{0.8x}-\frac{5}{1.6x}=1.25$

71. $\frac{5}{0.6x}+\frac{7}{3}=\frac{16}{1.5x}$

72. $\frac{7}{x-3}=2$

73. $\frac{3}{x+2}+\frac{5}{2}=0$

74. $\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$

75. $\frac{3x+2}{3x-1}-\frac{6x}{6x-1}=0$

76. $\frac{13}{2x-3}-\frac{11}{x+3}=0$

77. $\frac{x+4}{x-3}-\frac{2x+5}{2x}=0$

78. $\frac{-7x+5}{7}+\frac{9x-7}{8}=-1$

79. $\frac{2x-(x+1)}{4}=\frac{5x+2}{6}$

80. $\frac{3x-7(x+1)}{6}=\frac{2x-1}{3}-2$

81. $\frac{2x-5}{3}-\frac{-2x+8}{7}=x$

82. $\frac{6x-(x-8)}{6}=\frac{-2x-17}{3}+x$

83. $\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{3}=1$

84. $\frac{x-3}{2}-3(x+2)=-20$

85. $\frac{2-2(x-3)}{2}-\frac{x+4}{4}=3$

86. $\frac{4(x+1)}{2}+x-\frac{x+3}{3}=5+3(x-2)$

87. $60+10x-6(x+5)=6x$

88. $6(x-14)-7(x-18)=41$

89. $-18(x+1)+14(x-3)+76=0$

90. $10(3x+2)-16(9-2x)=0$

91. $3x+2(20-x)=50$

92. $4x+5(21-2x)+9x=9(13-x)$

93. $6x-3(15-7x)-360=0$

94. $6x-8(x-2)=2(x-10)$

95. $8[3x-4(x-2)]=x-8$

96. $\frac{x}{3}+\frac{4x}{2}=\frac{6}{2}$

97. $x+\frac{3x}{2}=\frac{7}{4}$

98. $\frac{8}{3}=\frac{2x}{9}$

99. $\frac{x}{2}+1=\frac{2x}{2}$

100. $-x-\frac{x}{5}=\frac{6x}{3}-2$

3RA LISTA DE ECUACIONES

1) $\frac{3}{5}+\frac{3}{2x-1}=0$

2) $\frac{2}{4x-1}=\frac{3}{4x+1}$

3) $\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$

4) $\frac{10x^2-5x+8}{5x^2+9x-19}=2$

5) $\frac{x}{4}-\frac{x^2-8x}{4x-5}=\frac{7}{4}$

6) $\frac{2x-9}{10}+\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x}{5}$

7) $\frac{(3x-1)^2}{x-1}=\frac{18x-1}{2}$

8) $\frac{2x+7}{5x+2}-\frac{2x-1}{5x-4}=0$

9) $\frac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}-1=0$

10) $\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-4}{3x-2}=\frac{2}{3}$

11) $\frac{4x+3}{2x-5}-\frac{3x+8}{3x-7}=1$

12) $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}-1=\frac{x}{2}$

13) $\frac{4x-1}{3}=\frac{12x-3}{7}$

14) $\frac{2x-5}{12}=\frac{-x}{4}-\frac{5}{3}$

15) $\frac{2x+4}{3}=\frac{x}{6}-3$

16) $\frac{x+11}{2}-\frac{2x+3}{5}=5$

17) $\frac{5x+1}{6}+\frac{2x+1}{3}=2$

18) $\frac{6x+1}{5}=-10+\frac{2x+1}{3}$

19) $x-\frac{x}{5}=40$

20) $\frac{4x}{33+x}=\frac{1}{3}$

21) $\frac{4x}{15}-\frac{6x+28}{5}=0$

22) $3x-\frac{2x}{5}=\frac{3x}{10}+14$

23) $\frac{4x-3}{5}-\frac{4x}{3}=\frac{2(x-13)}{15}$

24) $\frac{9x-1}{13}-\frac{5x-8}{4}=x+6$

25) $2x-6-\frac{2(2x+8)}{3}=4x-1$

26) $\frac{7x-6}{3}-(x+2)=4x+2$

27) $\frac{6x-19}{6x+1}=5$

28) $\frac{121x-2x}{x}=\frac{5}{3}$

29) $(x+4)^2=x(x-14)+5$

30) $x^2+4=(x+1)(x+3)$

31) $(x+3)(x-1)=x^2+5$

32) $x^2+(x+1)^2=(2x-1)(x+4)$

33) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}=\frac{2}{4}x+\frac{1}{12}$

34) $\frac{x}{x+1}+\frac{5}{8}=\frac{5}{2(x+1)}+\frac{3}{4}$

35) $\frac{2}{x+1}-3=4+\frac{2}{x+1}$

36) $\frac{2x+1}{3}=3x+16$

37) $\frac{4x+6}{6}=12-3x$

38) $\frac{3x+5}{5}=2x-16$

39) $\frac{3x-2}{4}+3=x-\frac{1}{2}$

40) $\frac{2x-3}{3}+4=\frac{3x-4}{2}$

41) $\frac{3x+5}{4}-\frac{2x-3}{3}=3$

42) $\frac{x+4}{2}-\frac{5}{6}=\frac{2x-2}{3}$

43) $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=-\frac{11}{12}$

44) $\frac{x-3}{x+2}=\frac{x-2}{x+8}$

45) $\frac{2x-5}{4x-1}=\frac{3x-4}{6x+9}$

46) $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+4}{x-1}$

47) $\frac{6x-8}{9x+8}=\frac{2x-3}{3x+2}$

48) $\frac{4x+3}{6}+\frac{3x+1}{4}=2x-1$

49) $\frac{5x-2}{6}+\frac{4x+2}{9}=2x-3$

4ta. Lista de Ecuaciones a resolver paso por paso y anotando cada una de las propiedades utilizadas.

1) $\frac{4}{3}x = 16$

2) $150 = 2y + 42$

3) $7w + 69 = 30w - 23$

4) $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$

5) $\frac{5z-50}{2} = 17 - z$

6) $\frac{5k}{2} + \frac{3k}{4} = \frac{k}{6} + 37$

7) $\frac{1}{r+1} + \frac{2}{r-2} = \frac{4}{r-1}$

8) $\frac{t-2}{t+2} = \frac{3}{7}$

9) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x-5}{2x-7}$

10) $\frac{2y+5}{3} = \frac{2y^2}{1+3y}$

11) $\frac{10x^2-5x+8}{5x^2+9x-19} = 2$

12) $\frac{6x-3}{2x-1} = \frac{3x-4}{x+1}$

13) $(x + 7)^2 = (x + 1)(x + 25)$

14) $w^3 - 8w = w^3 - 10x + 16$

15) $\frac{k+10}{k+3} + 8 = \frac{9k-6}{k-1}$

16) $(x + 4)^2 = x(x - 14) + 5$

17) $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 4)$

18) $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{9x+7}{x+1} - 7$

19) $3 - x + \frac{x}{2} = 5$

20) $3\,(x + 1) = 2\,(x + 3) - 1$

ANEXO 3. Examen de evaluación formativa

Nombre del alumno: ______________________________ Gpo. ______
Fecha_________

INSTRUCCIONES: LEE CON MUCHA ATENCIÓN Y CONTESTA LO QUE SE TE PIDE.

1. ¿Qué es una Ecuación?

2. Proporciona un ejemplo de ecuación y anota el nombre a cada una de sus partes.

3. ¿Qué es la solución de una Ecuación?

4. ¿Qué es la resolución de una ecuación?

5. ¿Cómo se puede saber si un determinado valor es o no la solución de una ecuación y qué nombre recibe ese procedimiento?

6. Elabora un esquema, cuadro sinóptico o mapa (mental o conceptual) dónde clasifiques las propiedades que has utilizado para resolver ecuaciones. Auxíliate de ejemplos para explicarlas.

ANEXO 4. Red conceptual amplia