

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**INESTABILIDAD COMOLÓGICA DE UN CAMPO ESCALAR**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTA:**

**WALDEMAR RUIZ LUNA**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**JUAN CARLOS HIDALGO CUÉLLAR  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM.**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2017**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

## *Agradecimientos*

---

Quiero agradecer a mis padres por guiarme en este camino y ayudarme a progresar día con día en mi vida profesional, a mi hermano por compartir lo que nuestros padres con tanto esfuerzo nos han ofrecido, quiero agradecer a mis padrinos y al resto de mi familia por compartir momentos llenos de alegrías y tristezas.

Dentro de las personas a las que quiero agradecer, está mi asesor, quien me ha ayudado en el entendimiento de la cosmología, y me ha conducido hasta el punto de poder hacer este escrito enfocado al entendimiento del universo.

Agradezco al proyecto PAPIIT-UNAM IA101414 "Fluctuaciones no lineales en cosmología relativista" y al proyecto PAPIIT-UNAM IA103616 "Observables en cosmología relativista" por su apoyo.



---

## *Contenido*

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Relatividad General y Cosmología</b>	<b>5</b>
2.1	Fundamentos . . . . .	6
2.1.1	Vectores, vectores duales y tensores . . . . .	6
2.1.2	Derivada covariante . . . . .	8
2.1.3	Teorema de la planitud local o principio de equivalencia . . . . .	10
2.1.4	Curvatura . . . . .	11
2.1.5	Conservación del momento y la energía . . . . .	12
2.2	Primera formulación de la relatividad general . . . . .	13
2.3	Formalismo Lagrangiano para la relatividad general . . . . .	14
2.3.1	Variación del término de Hilbert . . . . .	15
2.3.2	Variación del término de superficie . . . . .	17
2.3.3	Variación del término de materia . . . . .	18
2.4	Cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	20
2.4.1	Métrica FRLW . . . . .	20
2.4.2	Ecuaciones de Friedmann . . . . .	24
2.4.3	Soluciones a las ecuaciones cosmológicas . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Agujeros Negros y Colapso gravitacional</b>	<b>29</b>

3.1	Agujero negro de Schwarzschild . . . . .	29
3.1.1	Horizonte de eventos y Horizonte aparente . . . . .	30
3.2	Masa de Misner-Sharp . . . . .	32
3.3	Colapso Gravitacional . . . . .	32
3.3.1	Colapso esférico (Top-Hat) . . . . .	33
3.3.2	Modelo de 3 zonas . . . . .	37
3.3.3	Horizonte aparente en el modelo de 3 zonas . . . . .	39
3.3.4	Criterio de colapso en agujeros negros para universos de materia . . . . .	40
3.3.5	Criterio de Carr para formación de Agujeros Negros . . . . .	41
3.3.6	Fluctuación de curvatura . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Campo escalar en cosmología</b>	<b>45</b>
4.1	Formulación Lagrangiana para el campo escalar . . . . .	46
4.1.1	Solución a la ecuación de Klein-Gordon . . . . .	47
4.2	Inflación . . . . .	48
4.2.1	Inflación con un campo escalar . . . . .	49
4.3	Campo escalar oscilante como materia oscura . . . . .	50
4.3.1	Perturbaciones cosmológicas en un campo escalar . . . . .	53
4.3.2	Perturbaciones para el campo escalar oscilante . . . . .	55
4.4	Inestabilidad para campo escalar . . . . .	57
4.5	Corte en la escala del espectro de potencias . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

## *capítulo 1*

---

### *Introducción*

---

El principio y el fin del universo han sido temas de fascinación desde que el hombre tiene uso de razón hasta la contemporaneidad, su entendimiento se ha desarrollado en el tiempo gracias al asombro y la capacidad de creación que la humanidad posee.

El mayor logro de la humanidad en el entendimiento del universo es poder relacionar los fenómenos naturales con conceptos e intuiciones, a estos conceptos e intuiciones en conjunto se les conoce como matemáticas. Tal relación de los fenómenos con las matemáticas nos deja asimilar una parte de la naturaleza. La esencia de la relación y la asimilación de los fenómenos naturales es la física como una ciencia exacta, la física es entonces la mejor herramienta para entender al cosmos.

La relatividad general propuesta por Albert Einstein es la teoría que usa la cosmología moderna para entender los fenómenos observables a escalas cósmicas, Einstein comienza a gestar su teoría de la relatividad con la firme idea de que la naturaleza del universo es completamente independiente del observador, y es esta idea la que lo lleva a completar una de las teorías más importantes del siglo XX.

La cosmología moderna hace uso de la relatividad general, ésta explica el origen y el comportamiento del universo a gran escala. La cosmología moderna tiene sus bases en el principio cosmológico, el cual postula que el universo a gran escala es homogéneo e isotrópico, es decir, que el universo se ve igual desde cualquier punto en el que se esté situado (homogeneidad), y que además el universo se observa igual en todas direcciones (isotropía). Entre de los años 1922 y 1924, el físico soviético Alexander Friedmann obtuvo los primeros resultados en lo que sería el modelo cosmológico actual, sin embargo su trabajo no fue muy conocido en esa época. En 1927 el investigador de astronomía y profesor parcial de la universidad de Lovaina Georges Lemaître, publicó un trabajo en el que resolvía las ecuaciones de campo de Einstein, soluciones que describen una expansión del universo a escala cósmica, trabajo similar, pero desarrollado independientemente al trabajo de Friedmann. Las pruebas observacionales de la expansión del cosmos que obtuvo Edwin Hubble a finales del año 1920, ayudaron a la aceptación de los trabajos de Lemaître y Friedmann, logrando

que en el período 1930-1931 se tradujeran estos trabajos al inglés y se publicaran en la revista *Nature*. Para los años 30's Howard Percy Robertson y Arthur Geoffrey Walker estudiaban la cosmología de Friedmann-Lemaître. En 1935 probaron que la solución cosmológica es la única métrica en una variedad Lorentziana que es homogénea e isotrópica (la unicidad de la métrica cae en tres casos especiales, Minkowski, de Sitter y anti-de Sitter). En la actualidad se le conoce a la solución cosmológica del universo en expansión como la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW).

El marco de estudio de la relatividad incluye a las estructuras ultradensas conocidas como agujeros negros, tales estructuras se entienden dentro de la relatividad, como singularidades del espacio-tiempo. En capítulos posteriores se abordará el tema de los agujeros negros y su importancia en el universo temprano.

El estudio del universo no se restringe solo al comportamiento en su crecimiento, considerándolo como homogéneo e isotrópico, sino que en las observaciones, se tiene evidencia de que hay pequeñas perturbaciones que abren el campo de estudio del universo hacia la dinámica de estas fluctuaciones, quienes en su esencia tienen el porqué de las estructuras que se observan en el cielo. En el ámbito de las perturbaciones, lo que la teoría busca es entender la razón de que la homogeneidad y la isotropía en el cosmos no son absolutas, y el porqué hay estrellas, galaxias, etcétera.

Uno de los retos más grandes que ha tenido la gravedad relativista es la materia oscura. Un tipo de materia que no interactúa con las partículas del modelo estándar, y que además es una consecuencia de las observaciones en la teoría. Esto puede resultar en discusiones sobre la validez de la teoría de la relatividad general, o en su defecto la existencia de algún tipo de materia extraña, la cual no puede ser vista en modo alguno, y la única razón para su existencia sea una deformación del espacio-tiempo. En este trabajo se buscará dar un criterio para la formación de estructura hecha enteramente de materia oscura. Este criterio aunado a las observaciones, brindará un punto de apoyo en el entendimiento de la materia oscura en el ámbito cosmológico.

En épocas tempranas del universo se considera una época de expansión del cosmos, en la cual la tasa de crecimiento era tan grande que muchas zonas del universo que hasta ese momento pudieron estar conectadas causalmente, se desconectaron debido a esta forma de expansión denominada inflación. El modelo de inflación explica muchos de los problemas de compatibilidad entre la teoría cosmológica y las observaciones, por esto la teoría de inflación es importante para el entendimiento de nuestro universo.

Dentro de la teoría inflacionaria se estipula que el universo estuvo dominado por una partícula llamada inflatón, la cual cumple ciertas restricciones en su dinámica para la existencia de la inflación. Cuando termina inflación y se considera que el universo deja de expandirse de forma tan abrupta, y se comienzan a formar los tipos de materia que se observan hoy en día. Para ello, el inflatón debe tener una transición llamada la época de recalentamiento, en la que la materia dominante es el inflatón y éste pasa su energía a las partículas del modelo estándar.

La dinámica del universo en la época primordial, debe incluir por supuesto la dinámica de perturbaciones a la homogeneidad e isotropía. La posibilidad de que algunas de estas perturbaciones produzcan estructuras es un problema importante, ya que la existencia de estructuras primordiales conlleva el estudio de la materia dominante hasta entonces, y en el contexto de inflación, el campo escalar es quien modela al inflatón. Debido a la ausencia de partículas distintas a este campo, las únicas estructuras que se formarían en la teoría relativista son los agujeros negros, y por el momento en que se forman y el tipo de materia que los forman, a éstos se les conoce como agujeros negros primordiales.

Uno de los usos de la formación de agujeros primordiales, es la de revisar si una propuesta teórica produce un gran número de estos agujeros negros. Si es el caso las observaciones descartan la verosimilitud de dicha propuesta, imponiendo restricciones a los posibles planteamientos teóricos.



## *capítulo 2*

---

### *Relatividad General y Cosmología*

---

La teoría de la relatividad es una teoría métrica que estudia la geometría del "espacio-tiempo", el cual es un espacio geométrico de 4 dimensiones (una temporal y tres espaciales). Esta teoría propuesta por Albert Einstein ha explicado grandes incógnitas del universo. Desde que Einstein dió a conocer su teoría especial de la relatividad en 1905, en la cual se pone como base la invarianza de las leyes fundamentales de la física ante transformaciones de coordenadas en donde cada observador inercial tiene su propio tiempo y espacio, i.e., que la física no debe depender del observador. Las ciencias naturales han dado grandes pasos hacia el entendimiento de las leyes que rigen la fenomenología del universo. Después de la relatividad especial, Einstein busca generalizar su teoría de la relatividad (1907) pensando que no solo las transformaciones de coordenadas inerciales deben preservar las leyes físicas. Esto es que la física es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. La ciencia cambiaría cuando en 1915 Einstein presenta ante la Academia Prusiana de las Ciencias su trabajo con las ecuaciones de campo, las cuales explican que la materia y energía de un sistema cambian la métrica del espacio-tiempo.

En el estudio de la relatividad se han encontrado múltiples vías matemáticas de llegar a las ecuaciones de campo, una de ellas es proponer a un difeomorfismo como la percepción entre dos observadores de un mismo fenómeno y asentar la invarianza de la curvatura bajo este difeomorfismo, y así obtener la geometría del espacio tiempo, así es como Einstein llega a sus ecuaciones de campo. La otra forma de obtener las ecuaciones de campo es proponer una acción con la curvatura como argumento, a la cual se le aplica una variación, llegando a las ecuaciones de Euler-Lagrange, que en este contexto son las ecuaciones de campo.

## 2.1 Fundamentos

En esta sección se revisarán las herramientas necesarias para el estudio de la relatividad general. Entre las herramientas que se presentan son: la definición de vectores, sus vectores duales correspondientes, tensores; el transporte paralelo y la conexión afín; la curvatura; y finalmente la ecuación de conservación del tensor de energía-momento.

### 2.1.1 Vectores, vectores duales y tensores

Las definiciones que se muestran a continuación vienen de la referencia [17].

Se considera una curva  $\gamma$  sobre una variedad. La curva se parametriza con la variable  $\lambda$  y es descrita en un sistema arbitrario de coordenadas por la relación  $x^\alpha(\lambda)$ . Calculando la tasa de cambio de una función escalar  $f(x^\alpha)$  a lo largo de esta curva:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = f_{,\alpha} u^\alpha. \quad (2.1)$$

Este procedimiento permite introducir dos tipos de objetos sobre la variedad:  $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$  es un vector tangente sobre toda la curva  $\gamma$ , y  $f_{,\alpha} = \partial f/\partial x^\alpha$  es un vector dual, el gradiente de la función  $f$ . Estos objetos se transforman como sigue bajo una transformación de coordenadas arbitraria desde  $x^\alpha$  hacia  $x^{\alpha'}$ :

$$f_{,\alpha'} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} f_{,\alpha}$$

y

$$u^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha.$$

De estas ecuaciones se recupera el hecho de que  $df/d\lambda$  es un invariante:  $f_{,\alpha'} u^{\alpha'} = f_{,\alpha} u^\alpha$ .

Cualquier objeto  $A^\alpha$  que se transforme bajo una transformación de coordenadas como

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (2.2)$$

será denominado como un vector. Por otro lado, cualquier objeto  $p_\alpha$  que se transforme como

$$p_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} p_\alpha \quad (2.3)$$

bajo la misma transformación de coordenadas se denominará como un vector dual. La contracción  $A^\alpha p_\alpha$  entre un vector y un vector dual es invariante bajo la transformación de coordenadas, y es por lo tanto un escalar.

Generalizando estas definiciones, un tensor de tipo  $(n, m)$  es un objeto  $T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}$  que se transforma

bajo una transformación de coordenadas como

$$T^{\alpha' \dots \beta'}_{\gamma' \dots \delta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \dots \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \dots \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\delta'}} T^{\alpha \dots \beta}_{\gamma \dots \delta}. \quad (2.4)$$

El entero  $n$  es igual al número de superíndices, mientras  $m$  es igual al número de subíndices. Debe notarse que el orden de los índices es importante; en general,  $T^{\beta \dots \alpha}_{\gamma \dots \delta} \neq T^{\alpha \dots \beta}_{\gamma \dots \delta}$ . Por definición, los vectores son tensores de tipo  $(1, 0)$ , y los vectores duales son tensores de tipo  $(0, 1)$ .

Un tensor de especial interés es el tensor métrico o métrica de la variedad  $g_{\alpha\beta}$ , el cual es usado para definir el producto interno entre dos vectores. Es también la cantidad que representa al campo gravitacional en relatividad general. La métrica  $g_{\alpha\beta}$  y su inversa  $g^{\alpha\beta}$  pueden ser usados para bajar y subir índices. Por ejemplo,  $A_{\alpha} \equiv g_{\alpha\beta} A^{\beta}$  y  $p^{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} p_{\beta}$ . La métrica inversa está definida por las relaciones  $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ .

Los tensores no están definidos sobre la variedad. Para ilustrar esto, considérese un vector  $u^{\alpha}$  tangente a la curva  $\gamma$ , como se muestra en la FIG. 2.1. El diagrama deja en claro que el vector tangente sobresale de la variedad. De hecho, un vector en el punto  $P$  sobre la variedad está definido en un plano tangente a la variedad en ese punto; a este plano se le conoce como el plano tangente en  $P$ . De forma similar, tensores en el punto  $P$  pueden ser considerados como objetos pertenecientes a este plano. Tensores en  $P$  pueden ser sumados, y el resultado sigue siendo un tensor. Sin embargo, un tensor en  $P$  y un tensor en un punto distinto  $Q$  no pueden ser combinados en una forma tensorial, ya que estos tensores pertenecen a distintos planos tangentes. Por ejemplo, las operaciones  $A^{\alpha}(P)B^{\beta}(Q)$  y  $A^{\alpha}(Q) - A^{\alpha}(P)$  no están definidas como operaciones tensoriales. Esto implica que la diferenciación no es un operación sencilla en los tensores. Para definir la derivada de un tensor, se debe tener una forma de mover un tensor de un punto a otro.

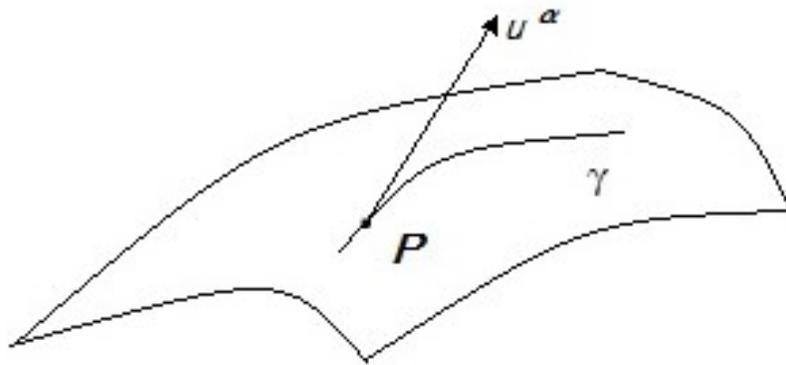


FIG. 2.1: Un tensor en  $P$  pertenece al plano tangente de la variedad en  $P$ .

### 2.1.2 Derivada covariante

Una forma de mover un tensor de un punto  $P$  a un punto  $Q$ , es el transporte paralelo. Considerando la curva  $\gamma$ , su vector tangente  $u^\alpha$ , y un campo vectorial  $A^\alpha$  definido en alguna vecindad de  $\gamma$  (FIG. 2.2). Sea un punto  $P$  en la curva  $\gamma$  con las coordenadas  $x^\alpha$ , un punto  $Q$  con coordenadas  $x^\alpha + dx^\alpha$ . Como se mencionó anteriormente, la operación

$$\begin{aligned} dA^\alpha &= A^\alpha(Q) - A^\alpha(P) \\ &= A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x^\beta) \\ &= A^\alpha_{,\beta} dx^\beta \end{aligned}$$

no es tensorial. Es fácil revisar que bajo una transformación de coordenadas,

$$A^{\alpha'}_{,\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha_{,\beta} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha, \quad (2.5)$$

y esto no es una transformación tensorial. Para ser propiamente tensorial, el operador derivada debe tener la forma  $DA^\alpha = A^\alpha_T(P) - A^\alpha(P)$ , donde  $A^\alpha_T$  es el vector obtenido del transporte de  $A^\alpha$  desde  $Q$  hasta  $P$ . Esto se puede escribir como  $DA^\alpha = dA^\alpha + \delta A^\alpha$ , donde  $\delta A^\alpha \equiv A^\alpha_T(P) - A^\alpha(Q)$  que tampoco es una operación tensorial. Ahora se comenzará a especificar la regla del transporte paralelo. Se requiere que  $\delta A^\alpha$  sea lineal en  $A^\alpha$  y  $dx^\beta$ , así que  $\delta A^\alpha = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu dx^\beta$  para algún campo (no tensorial)  $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$  conocido como la conexión.

Ahora se tiene  $DA^\alpha = A^\alpha_{,\beta} dx^\beta + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu dx^\beta$ , y dividiendo por  $d\lambda$ , el parámetro de la curva  $\gamma$ , se obtiene

$$\frac{DA^\alpha}{d\lambda} = A^\alpha_{;\beta} u^\beta, \quad (2.6)$$

donde  $u^\beta = dx^\beta/d\lambda$  es el vector tangente, y se define

$$A^\alpha_{;\beta} \equiv A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu. \quad (2.7)$$

Esta es la derivada covariante del vector  $A^\alpha$ . Otras formas de notación para la derivada covariante son  $A^\alpha_{;\beta} \equiv \nabla_\beta A^\alpha$  y  $DA^\alpha \equiv \nabla_u A^\alpha$ .

El hecho de que  $A^\alpha_{;\beta}$  es un tensor permite deducir la propiedad de la transformación de la conexión. Comenzando por  $\Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu = A^\alpha_{;\beta} - A^\alpha_{,\beta}$  se llega a que

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A^\mu - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\mu. \quad (2.8)$$

Expresando  $A^{\mu'}$  en términos de  $A^\mu$ , y usando el hecho de que  $A^\mu$  es un campo vectorial arbitrario, se

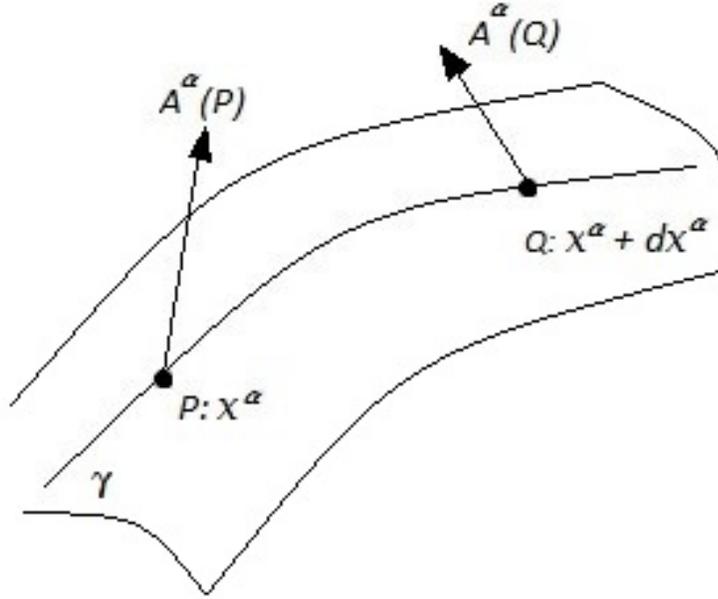


FIG. 2.2: Diferenciación de un tensor.

obtiene

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}. \quad (2.9)$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por  $\partial x^{\mu} / \partial x^{\mu'}$  y reacomodando los índices, se llega a

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}. \quad (2.10)$$

Esta es la ley de transformación para la conexión; el segundo término previene que la transformación de la derivada covariante sea tensorial.

La diferenciación covariante puede ser extendida a otro tipo de tensores, demandando que el operador  $D$  obedezca la regla del producto del cálculo diferencial. (Para escalares se entiende que  $D \equiv d$ ). Por ejemplo, se puede encontrar una expresión para la derivada covariante de un vector dual, del requerimiento de que

$$d(A^{\alpha} p_{\alpha}) \equiv D(A^{\alpha} p_{\alpha}) = (DA^{\alpha}) p_{\alpha} + A^{\alpha} (Dp_{\alpha}). \quad (2.11)$$

Escribiendo el lado izquierdo como  $A^{\alpha}_{,\beta} p_{\alpha} dx^{\beta} + A^{\alpha} p_{\alpha,\beta} dx^{\beta}$  y usando ecs.(2.6) y (2.7), se obtiene

$$\frac{Dp_{\alpha}}{d\lambda} = p_{\alpha;\beta} u^{\beta}, \quad (2.12)$$

donde

$$p_{\alpha;\beta} \equiv p_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} p_{\mu}. \quad (2.13)$$

Este procedimiento generaliza a tensores de tipo arbitrario. Por ejemplo, la derivada covariante de un tensor tipo (1, 1) está dada por

$$T^{\alpha}_{\beta;\gamma} = T^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} T^{\mu}_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} T^{\alpha}_{\mu}. \quad (2.14)$$

La regla es que hay un término de conexión para cada índice tensorial; y el signo depende de si es un índice covariante (entonces lleva signo menos), o si es un índice contravariante (entonces lleva signo más).

Hasta ahora la conexión tiene un carácter arbitrario. Una elección específica se toma considerando que la conexión es simétrica y compatible con la métrica, esto es

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \quad g_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \quad (2.15)$$

En relatividad general, vienen como una consecuencia del principio de equivalencia de Einstein. De las ecs.(2.15) se llega a

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}). \quad (2.16)$$

Entonces, la conexión está completamente determinada por la métrica. Bajo estas condiciones, a la conexión  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  se le conoce como los símbolos de Christoffel.

Un campo tensorial se dice que está transportado de forma paralela a lo largo de  $\gamma$  si su derivada covariante es nula, i.e.,  $DT^{\alpha\dots}_{\beta\dots}/d\lambda = T^{\alpha\dots}_{\beta\dots;\mu} u^{\mu} = 0$ .

### 2.1.3 Teorema de la planitud local o principio de equivalencia

El principio débil de equivalencia establece que [6]:

*la gravedad y la inercia son equivalentes, por lo que concierne a experimentos locales. Ellas, gravedad e inercia, no pueden ser distinguidas una de la otra experimentalmente.*

Las definiciones que se muestran a continuación vienen de la referencia [17].

Para un punto dado  $P$  en un espacio-tiempo, siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas  $x^{\alpha'}$  tal que

$$g_{\alpha'\beta'}(P) = \eta_{\alpha'\beta'}, \quad \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(P) = 0, \quad (2.17)$$

donde  $\eta_{\alpha'\beta'} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  es la métrica de Minkowski. Dicho sistema de coordenadas será nombrado como marco local Lorentziano (o de Lorentz) en  $P$ . La interpretación física del teorema de la planitud local es que observadores en caída libre no ven efectos gravitacionales en la vecindad in-

mediata, esto es, como dice el principio de equivalencia débil [6], que en la localidad del experimento no se puede distinguir un campo gravitacional de un sistema de referencia no-inercial.

## 2.1.4 Curvatura

El tensor de Riemann  $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$  puede ser definido por la relación

$$A^\mu{}_{;\alpha\beta} - A^\mu{}_{;\beta\alpha} = -R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}A^\nu, \quad (2.18)$$

que se cumple para cualquier campo vectorial  $A^\alpha$ . Evaluando el lado izquierdo se llega a

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}, \quad (2.19)$$

El tensor de Riemann es obviamente antisimétrico en los últimos dos índices. Sus otras propiedades de simetría pueden ser establecidas evaluando  $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$  en un marco local de Lorentz en algún punto  $P$ . El cálculo de esto lleva a

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \doteq \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}), \quad (2.20)$$

eso implica las relaciones tensoriales

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (2.21)$$

y

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} = 0, \quad (2.22)$$

al ser relaciones tensoriales, son válidas en cualquier sistema de referencia. Continuando con el análisis del tensor de Riemann se llega que éste cumple con las identidades de Bianchi,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma;\alpha} = 0. \quad (2.23)$$

En adición a la ec.(2.18), el tensor de Riemann satisface las relaciones

$$p_{\mu;\alpha\beta} - p_{\mu;\beta\alpha} = R^\nu{}_{\mu\alpha\beta}p_\nu \quad (2.24)$$

y

$$T^\mu{}_{\nu;\alpha\beta} - T^\mu{}_{\nu;\beta\alpha} = -R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}T^\lambda{}_\nu + R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta}T^\mu{}_\lambda, \quad (2.25)$$

que se cumplen para tensores arbitrarios  $p_\alpha$  y  $T^\alpha_\beta$ . La generalización a tensores de rangos más altos

es obvia: el número de términos con el tensor de Riemann en el lado derecho de la ecuación es igual al número de índices tensoriales.

Contracciones del tensor de Riemann producen el tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  y el escalar de Ricci  $R$ . Estos objetos están definidos por

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}, \quad R = R^{\alpha}{}_{\alpha}. \quad (2.26)$$

Es fácil mostrar que  $R_{\alpha\beta}$  es un tensor simétrico.

### 2.1.5 Conservación del momento y la energía

Las definiciones que se muestran a continuación vienen de la referencia [6].

La energía, el momento y los esfuerzos relativistas presentes en cualquier campo de materia están descritos por el tensor simétrico de *energía-momento-esfuerzo*  $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ , que proporciona la energía y el 4-momento cruzando un elemento de superficie  $ds_{\alpha}$  por la relación  $T^{\alpha} = T^{\alpha\beta} ds_{\beta}$ . La simetría de  $T_{\alpha\beta}$  es una propiedad fundamental de la teoría de la relatividad, que expresa la equivalencia entre masa y energía relativista ( $T_{0i} = T_{i0}$ ) y la ausencia de efectos macroscópicos de spin en la materia ( $T_{ij} = T_{ji}$ ). La conservación de la energía y el momento está dada por la ecuación

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (2.27)$$

esta ecuación de conservación puede obtenerse considerando el balance de los flujos netos de energía y momento que pasan a través de todas las caras de un volumen infinitesimalmente pequeño.

## 2.2 Primera formulación de la relatividad general

Sean  $M$  y  $M'$  variedades de dimensión 4, de las cuales 3 son espaciales y una es temporal. Se define un difeomorfismo

$$\phi : M \longrightarrow M' \quad (2.28)$$

que conserve la curvatura al ser aplicada en la variedad  $M$ .

Einstein elige al difeomorfismo, que es un mapeo biyectivo, continuo y con derivadas continuas de una variedad a otra, como el fenómeno observable o la forma en que se percibe la realidad, y al ser la curvatura invariante ante el difeomorfismo  $\phi$ , es evidente que Einstein entendía que la curvatura era la clave para describir al universo.

Se observan dos puntos moviéndose sobre una variedad en geodésicas paralelas; si su movimiento muestra un cambio en la distancia entre ellos, entonces: los puntos están bajo un efecto geométrico ajeno a la variedad o bien, la variedad es curva. Con esto, Einstein llega a la conclusión de que la curvatura debe generar estos cambios en la trayectoria y no un campo externo al espacio-tiempo.

Tomando en cuenta el principio de equivalencia enunciado en la sección anterior se infiere que la masa inercial es indistinguible de la masa gravitacional. Einstein consideraba este principio en su teoría ya que la fuerza gravitacional está fuertemente ligada a la métrica del espacio-tiempo.

Uno de los primeros intentos de Einstein para obtener las ecuaciones que ligan la curvatura del espacio-tiempo con la energía y momento inerciales, fue reducir el tensor de curvatura de Riemann para que tenga el mismo número de componentes que el tensor de energía-momento  $T_{\alpha\beta}$ .

El tensor de Riemann se escribe

$$\mathcal{R} = R^\alpha_{\beta\mu\nu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\beta \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.29)$$

Luego para lograr igualar el número de componentes del tensor de energía-momento con la curvatura es posible tomar la traza del tensor de Riemann en dos de sus componentes, obteniendo el tensor de Ricci de la ec.(2.26)

$$Tr(\mathcal{R}) = R_{\alpha\beta} \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta,$$

Con esto, se puede tener una primera ecuación de campo en términos de las componentes de los tensores

$$R_{\alpha\beta} \approx \mathcal{K}T_{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

Esta ecuación implica un primer problema, Einstein considera que la energía debe conservarse en un sistema cerrado, es decir, de la ec.(2.27),

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0,$$

pero en general  $R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \neq 0$ .

El segundo problema es la necesidad de subir o bajar índices, para esto es necesaria una función  $f : T_p M \rightarrow T_p M^*$ , en donde  $f$  es un isomorfismo.

La solución trivial es tomar  $f = g$ , con  $g$  la métrica. Esto produce una restricción importante al problema: se tiene que equipar a la variedad con una métrica  $(M(\nabla, g))$ , lo más directo es tomar una métrica compatible con la conexión, es decir,  $\nabla g = 0$ . Esto da una ecuación para  $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$  cuya solución son los símbolos de Christoffel de la ec.(2.16)

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\nu\gamma,\mu} + g_{\mu\gamma,\nu} - g_{\mu\nu,\gamma}).$$

Con estas restricciones e imponiendo que  $\mathcal{R}$  cumple con las identidades de Bianchi, ec.(2.23), se llega a que el tensor

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (2.31)$$

en donde  $R$  es el escalar de Ricci, satisface

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (2.32)$$

A este tensor se le denomina tensor de Einstein, y a la ec.(2.32) se le conoce como la forma reducida de las identidades de Bianchi.

Una vez resueltos los problemas de compatibilidad entre el tensor de Ricci y el tensor de energía-momento se retoma la idea de que la geometría define la energía del sistema, es decir,  $G_{\alpha\beta} = \mathcal{K}T_{\alpha\beta}$ , así se llega a las ecuaciones de campo

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \mathcal{K}T_{\alpha\beta}, \quad (2.33)$$

con  $\mathcal{K} = \frac{8\pi G}{c^4}$ , definida por el límite de campo débil. Cabe mencionar que la importancia de estas ecuaciones reside en la asociación de la geometría del espacio-tiempo con el campo de materia.

## 2.3 Formalismo Lagrangiano para la relatividad general

En esta sección se usará el método empleado en el capítulo 4 de la referencia [17].

El funcional de acción para la relatividad general contiene una contribución  $S_G[g]$  del campo geométrico  $g_{\alpha\beta}$  y una contribución  $S_M[\phi; g]$  del campo de materia, el cual se denotará como  $\phi$ .

La acción geométrica contiene un término de Hilbert  $S_H[g]$ , un término de frontera  $S_B[g]$  y un término no-dinámico  $S_0$  que afecta numéricamente a la acción pero no afecta a las ecuaciones de movimiento.

$$S_G[g] = S_H[g] + S_B[g] - S_0, \quad (2.34)$$

donde

$$S_H[g] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.35)$$

$$S_B[g] = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Omega} \epsilon K |h|^{1/2} d^3y, \quad (2.36)$$

$$S_0 = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Omega} \epsilon K_0 |h|^{1/2} d^3y. \quad (2.37)$$

Aquí,  $R$  es el escalar de Ricci en  $\Omega$ ,  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca de la frontera  $\partial\Omega$ ,  $\epsilon$  es igual a  $+1$  si  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie tipo-tiempo y  $-1$  si  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie tipo-espacio (se asume que  $\partial\Omega$  no es nula en punto alguno), y  $h$  es el determinante de la métrica inducida sobre  $\partial\Omega$ . Se usan coordenadas  $x^\alpha$  en  $\Omega$ , y las coordenadas  $y^a$  se usan en la región  $\partial\Omega$ .

La acción de materia, en este caso un campo escalar, está dada de la forma

$$S_m[\phi; g] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\alpha}; g_{\alpha\beta}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.38)$$

para alguna densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ .

Por lo tanto, el funcional de acción total es

$$S[g, \phi] = \int_{\Omega} \left( \frac{R}{16\pi} + \mathcal{L} \right) \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Omega} \epsilon (K - K_0) |h|^{1/2} d^3y. \quad (2.39)$$

Se llega a las ecuaciones de Einstein haciendo la variación de  $S[g, \phi]$  con respecto a la métrica  $g_{\alpha\beta}$ . La variación está sujeta a la condición

$$\delta g_{\alpha\beta} |_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.40)$$

Esto implica que la métrica inducida en  $\partial\Omega$ ,  $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b$ , se mantiene constante durante la variación.

### 2.3.1 Variación del término de Hilbert

Será conveniente usar las variaciones  $\delta g^{\alpha\beta}$  en lugar de las variaciones  $\delta g_{\alpha\beta}$ . Se observa que la relación  $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$ , implica

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

Por otro lado, tomando el hecho de que  $\delta \log |g| = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$  se llega a

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (2.42)$$

También sabiendo de antemano que los símbolos de Christoffel  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  no son tensores, pero la diferencia entre dos conjuntos de los símbolos es un tensor, por lo tanto  $\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ , es un tensor.

A continuación se procede con la variación del término de Hilbert en la acción geométrica.

$$\begin{aligned} (16\pi)\delta S_H &= \int_{\Omega} \delta(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\Omega} (R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta R_{\alpha\beta} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned}$$

Se observa que en la primera integral del último renglón tiene en su integrando el tensor  $G_{\alpha\beta}$ , pero aun hay otro factor en la segunda integral que no se puede despreciar de la variación.

En la segunda integral se toma primero la variación  $\delta R_{\alpha\beta}$ , la cual se calcula en un marco de referencia Lorentziano local sobre un punto  $P$ :

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta(\Gamma^\mu_{\alpha\beta})_{;\mu} - \delta(\Gamma^\mu_{\alpha\mu})_{;\beta}, \quad (2.43)$$

donde la derivada covariante es definida respecto a la métrica de referencia  $g_{\alpha\beta}$ , para la cual está siendo tomada la variación. Dado que la última expresión es tensorial, es válida en cualquier sistema de referencia. Se encuentra además que,

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \bar{\delta} \nu^\mu_{;\mu}, \quad \text{con} \quad \bar{\delta} \nu^\mu = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \quad (2.44)$$

Se usa la notación  $\bar{\delta} \nu^\mu$  para enfatizar el hecho de que  $\bar{\delta} \nu^\mu$  no es la variación de alguna cantidad  $\nu^\mu$ . Usando lo anterior, la segunda integral de la variación de la acción de Hilbert se vuelve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x &= \int_{\Omega} \bar{\delta} \nu^\mu_{;\mu} \sqrt{-g} d^4x \\ &= \oint_{\delta\Omega} \bar{\delta} \nu^\mu d\Sigma_\mu \\ &= \oint_{\delta\Omega} \epsilon \bar{\delta} \nu^\mu n_\mu |h|^{1/2} d^3y, \end{aligned}$$

donde  $n_\mu$  es el vector unitario normal a  $\delta\Omega$  y  $\epsilon = n^\mu n_\mu = \pm 1$ .

Ahora se debe evaluar  $\bar{\delta} \nu^\mu n_\mu$ , recordando que la variación de la métrica es nula en la frontera de

$\Omega$ . Bajo estas condiciones, las variaciones de los símbolos de Christoffel en la frontera se escriben de la forma

$$\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.45)$$

Sustituyendo esto en la definición de  $\bar{\delta}\nu^\mu$ , lleva a

$$\bar{\delta}\nu_\mu = g^{\alpha\beta}(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}), \quad (2.46)$$

lo cual implica

$$n^\mu \bar{\delta}\nu_\mu|_{\partial\Omega} = n^\mu(\epsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta})(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}), \quad (2.47)$$

$$= n^\mu h^{\alpha\beta}(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}). \quad (2.48)$$

En la primera línea se usa la relación  $g^{\alpha\beta} = \epsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}$ , en donde  $h^{\alpha\beta} = h^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta$  es la métrica inducida en la frontera de  $\Omega$ . Para la segunda línea, la multiplicación de  $n^\mu n^\alpha$  con la diferencia de variaciones en el paréntesis es nula. Se observa que si  $\delta g_{\alpha\beta}$  es cero en todo punto de  $\partial\Omega$ , entonces sus derivadas tangentes también deben ser cero:  $\delta g_{\alpha\beta,\gamma} e_c^\gamma = 0$ . Se sigue que  $h^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta,\alpha} = 0$  y finalmente se obtiene

$$n^\mu \bar{\delta}\nu_\mu|_{\partial\Omega} = -h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu. \quad (2.49)$$

Este término es distinto de cero ya que la derivada normal de la variación no es necesariamente cero en la hipersuperficie.

Reuniendo los resultados de la variación se llega a que

$$(16\pi)\delta S_H = \int_{\Omega} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x - \oint_{\partial\Omega} \epsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu |h|^{1/2} d^3y. \quad (2.50)$$

### 2.3.2 Variación del término de superficie

Del término de la acción que corresponde a la variación de superficie  $S_B[g]$ , dado por la ec. (2.36), se observa que la única cantidad que va a variar es  $K$  (la curvatura inducida en la superficie  $\delta\Omega$  de la variedad), debido a que en la frontera la variación de la métrica inducida es cero.

Por definición la curvatura extrínseca se ve como

$$\begin{aligned} K &= n^\alpha{}_{;\alpha} \\ &= (\epsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} (n_{\alpha;\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} n_\lambda), \end{aligned}$$

por lo tanto su variación es

$$\begin{aligned}\delta K &= -h^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}n_\lambda \\ &= -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu})n^\mu \\ &= \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta,\mu}n^\mu;\end{aligned}$$

se usó el hecho de que las derivadas tangenciales de las variaciones de la métrica son cero en la frontera de  $\Omega$ . Al final se obtiene

$$(16\pi)\delta S_B = \oint_{\partial\Omega} \epsilon h^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta,\mu}n^\mu|h|^{1/2}d^3y, \quad (2.51)$$

y se observa que este término se elimina con la segunda integral de la variación del término de Hilbert. Dado que  $\delta S_0 = 0$ , la variación completa del término de acción geométrica es

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x. \quad (2.52)$$

Esto produce el lado izquierdo de las ecuaciones de campo.

### 2.3.3 Variación del término de materia

La variación del término de materia  $S_m[\phi; g]$ , como está dado en la ec.( 2.38), lleva a

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \int_{\Omega} (\delta\mathcal{L}\sqrt{-g})d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} + \mathcal{L}\delta\sqrt{-g} \right) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\mathcal{L}g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x.\end{aligned}$$

Definiendo al tensor de energía-momento como

$$T_{\alpha\beta} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} + \mathcal{L}g_{\alpha\beta}, \quad (2.53)$$

entonces

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.54)$$

esto produce el lado derecho de las ecuaciones de campo.

Al final se obtiene

$$\delta(S_G + S_m) = 0 \Rightarrow G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (2.55)$$

debido a que la variación  $\delta g^{\alpha\beta}$  es arbitraria dentro de  $\Omega$ .

Por lo tanto, de las ecuaciones de campo aunadas a la forma reducida de las identidades de Bianchi en la ec.(2.32) se recuperan las ecuaciones de conservación ec.(2.27)

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0,$$

en donde la componente 0 da la ecuación de conservación de energía, las componentes espaciales dan la conservación del momento.

## 2.4 Cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

El principio cosmológico es un principio filosófico, el cual postula que, a escala cósmica, el universo es homogéneo e isotrópico. El principio viene de la admisión de que la tierra no es el centro del universo, principio que la ciencia ha adquirido desde los tiempos de Copérnico. La evidencia del principio cosmológico refuerza su importancia y aceptación. Parte de esta evidencia es la isotropía en la radiación cósmica de fondo.

La homogeneidad e isotropía en relatividad general se define con que 1) el espacio-tiempo puede ser foliado en hipersuperficies 3-dimensionales  $\Sigma_t$ , etiquetadas por el parámetro  $t$  (tiempo cósmico); 2) se pueden definir observadores comóviles que observan un universo isotrópico cuyas características dependen solo del parámetro  $t$ ; 3) hay un solo observador comóvil para cada evento del espacio-tiempo.

### 2.4.1 Métrica FRLW

A cada observador comóvil se le pueden asignar coordenadas espaciales  $x^1, x^2$  y  $x^3$ . Se tiene entonces una métrica de forma general como

$$ds^2 = -F dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.56)$$

Donde  $F, g_{0i}$  y  $g_{ij}$  son funciones de  $x^\alpha$ .

Hay una primera restricción para esta métrica en el entorno cosmológico, la cual establece que los observadores comóviles tienen su 4-velocidad perpendicular a las superficies  $\Sigma_t$  de tiempo constante (a esto se le denomina isotropía).

Dado que la 4-velocidad está definida como la derivada respecto del tiempo propio de los eventos  $x^\alpha$ , i.e.

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (2.57)$$

con  $\tau$  el tiempo propio. Por otro lado se sabe que  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , así

$$u^\alpha u_\alpha = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -F \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2g_{0i} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} + g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = -1. \quad (2.58)$$

Dado que los observadores están ubicados por coordenadas comóviles, las coordenadas espaciales no cambian en el sentido del flujo de las líneas de mundo, y por definición la 4-velocidad es paralela al

flujo de las líneas de mundo, por lo tanto

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (F^{-1/2}, 0, 0, 0). \quad (2.59)$$

Esta 4-velocidad es, como se mencionó anteriormente, perpendicular a todo vector tangente  $\mathbf{v}$  de la superficie  $\Sigma_t$ , i.e.  $\mathbf{v} \equiv v^\alpha = (0, v^1, v^2, v^3)$ , por lo tanto la proyección de este vector tangente sobre la 4-velocidad debe ser nula, esto es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = g_{0i} v^i F^{-1/2} = 0. \quad (2.60)$$

Lo cual implica dos casos importantes: i)  $F^{-1/2} = 0$ , esto es un sistema coordenado singular en todo tiempo; ii)  $g_{0i} = 0$  caso para el cual no se observa tipo alguno de singularidad. Además  $g^{ij}$  es la inversa de  $g_{ij}$ .

La segunda restricción viene de la aceleración de los observadores comóviles,  $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$ . Suponiendo que la conexión afín es compatible con la métrica, y además no hay torsión, la derivada covariante puede ser dada en términos de los símbolos de Christoffel, i.e.

$$a^\mu = F^{-1/2} \frac{\partial u^\mu}{\partial t} + F^{-1} \Gamma^\mu_{00}, \quad (2.61)$$

donde la parte espacial de esta aceleración es

$$a^i = \frac{1}{2} F^{-1} g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \log \sqrt{F}. \quad (2.62)$$

Bajando los índices con la métrica, se tiene que la parte espacial de la aceleración es

$$a_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \log \sqrt{F}. \quad (2.63)$$

Esta aceleración es la que puede medir cualquier observador comóvil, esto es que si  $a_i$  es distinta de cero, la medición de la aceleración puede tener alguna dirección preferencial, por lo tanto, dado que se busca que  $a_i$  sea cero, la función  $F$  debe ser una constante en el espacio. Así  $F$  solo depende de  $t$ , y se puede eliminar la función  $F$  redefiniendo al tiempo de la forma

$$t'(t) = \int \sqrt{F(t)} dt \quad (2.64)$$

y de esta forma el elemento de línea queda como

$$ds^2 = -dt'^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.65)$$

En estas coordenadas la 4-velocidad es  $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$ , y es claro que la aceleración es cero, en adelante se cambiará  $t'$  por  $t$ .

La tercera restricción viene de la isotropía de la expansión local. Tomando cualquier vector espacial  $\mathbf{v}$  normalizado (en el marco de referencia comóvil, i.e. ortogonal a  $\mathbf{u}$ ) y construyendo una función

$$\mathbf{H}(t, x^i, \mathbf{v}) = v^\mu v_\nu \nabla_\mu u^\nu. \quad (2.66)$$

Dado que  $\mathbf{v}$  es puramente espacial,  $v_0 = v^0 = 0$ , lo que implica

$$\mathbf{H}(t, x^i, \mathbf{v}) = v^i v_j \Gamma^j_{i0} = v^i v_j g^{jk} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g_{ik} = \frac{1}{2} v^i v^k \frac{\partial}{\partial t} g_{ik}. \quad (2.67)$$

Dada la normalización de  $\mathbf{v}$ , i.e.  $g_{ik} v^i v^k = 1$  se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ik} = 2\mathbf{H}g_{ik}, \quad (2.68)$$

y dada la isotropía local,  $\mathbf{H}$  solo depende de  $t$ . Definiendo el factor de escala como

$$a(t) = \exp\left(\int \mathbf{H}(t) dt\right), \quad (2.69)$$

se llega a que

$$g_{ij}(t, x^k) = \gamma_{ij}(x^k) \exp\left(2 \int \mathbf{H}(t) dt\right) = \gamma_{ij}(x^k) a^2(t). \quad (2.70)$$

Así el elemento de línea se ve como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j, \quad (2.71)$$

donde  $\gamma_{ij}(x^k)$  es la métrica de una 3-variedad inducida.

La expresión ec.(2.71) es conocida como la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW).

La métrica espacial  $\gamma_{ij}(x^k)$  debe ser isotrópica alrededor de cualquier punto, por lo tanto se usarán coordenadas polares  $(\chi, \theta, \phi)$ :

$$ds_3^2 = d\chi^2 + f(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.72)$$

El problema ahora radica en encontrar las funciones  $f(\chi)$  que conlleven a la 3-variedad homogénea e isotrópica.

La primera elección para esta función es  $f(\chi) = \chi^2$ , la cual corresponde al espacio 3-dimensional

euclídeo en coordenadas polares. Tiene la transformación

$$\begin{aligned}x^1 &= \chi \cos \theta, \\x^2 &= \chi \sin \theta \cos \phi, \\x^3 &= \chi \sin \theta \sin \phi,\end{aligned}$$

a este modelo se le conoce como espacio plano.

La segunda opción para un espacio isotrópico y homogéneo, es la hiperesfera de radio  $R$ , llamada  $S^3$ .

La ecuación para la hiperesfera es

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = R^2, \quad (2.73)$$

cambiando a coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}y^1 &= R \cos \frac{\chi}{R}, \\y^2 &= R \sin \frac{\chi}{R} \cos \theta, \\y^3 &= R \sin \frac{\chi}{R} \sin \theta \cos \phi, \\y^4 &= R \sin \frac{\chi}{R} \sin \theta \sin \phi.\end{aligned}$$

En este caso la métrica espacial se ve

$$ds_3^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 = d\chi^2 + R^2 \sin^2 \frac{\chi}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.74)$$

con esta métrica la función que se encuentra es  $f(\chi) = R^2 \sin^2 \frac{\chi}{R}$ . Usualmente se define la curvatura  $k$  en lugar del radio de curvatura  $R$ , con  $k = R^{-2}$ . Entonces

$$f(\chi) = k^{-1} \sin^2(k^{1/2}\chi), \quad (2.75)$$

en donde  $k$  es la curvatura espacial. A este universo se le conoce como universo cerrado.

La tercera opción se puede seguir de forma similar al caso anterior, usando  $k$  negativo.

$$f(\chi) = (-k)^{-1} \sinh^2((-k)^{1/2}\chi), \quad (2.76)$$

este espacio es hiperbólico, y el universo que de él se deriva, se le llama universo abierto.

Todos los casos posibles que cumplen con homogeneidad e isotropía caen dentro de estas tres opciones, ya que la construcción de esta métrica lo exige.

Una transformación de la coordenada radial  $\chi$  permite la normalización del caso del universo cerrado de tal modo que  $k = 1$ , el caso del universo abierto con  $k = -1$ , y por último el caso de universo plano con  $k = 0$ .

## 2.4.2 Ecuaciones de Friedmann

La métrica FLRW como fue formulada anteriormente se escribe de forma general de la forma que sigue

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right), \quad (2.77)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala que modula el tamaño del universo y  $k$  es la curvatura espacial homogénea (como se estudió en la subsección anterior, de tal forma que  $k$  toma los valores  $+1, 0$  y  $-1$ ), además  $a(t)r$  es el radio de área asociado a la métrica del espacio-tiempo.

Escribiendo la métrica en forma matricial se obtiene

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Con esta métrica puede construirse el tensor de Einstein  $G^\alpha_\beta$  como se definió en la ec.(2.31) para insertarlo en las ecuaciones de campo.

$$G^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{3(kc^2 + \dot{a}^2)}{c^2 a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kc^2 + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2 c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{kc^2 + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2 c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{kc^2 + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2 c^2} \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

Tomando el tensor de energía-momento para un fluido perfecto con densidad  $\rho$  y presión  $p$ , dado en el sistema de referencia propio,

$$T^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} -c^2 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

se tienen dos ecuaciones independientes al usar las ecuaciones de Einstein:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.81)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi Gp}{c^2}. \quad (2.82)$$

Con  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  llamado el parámetro de Hubble, que describe la tasa de crecimiento del universo. A estas ecuaciones se les conoce como las ecuaciones de Friedmann, tales ecuaciones describen la dinámica del factor de escala  $a$ , el cual describe el tamaño del universo.

Dentro de la teoría cosmológica se impone un principio de conservación regido por la derivada covariante del tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$  y lleva a

$$\dot{\rho} = -3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right), \quad (2.83)$$

que es la única ecuación no trivial de este principio de conservación, y es conocida como la ecuación de continuidad.

### 2.4.3 Soluciones a las ecuaciones cosmológicas

Considerando la convención  $c = 1$  se examinarán diversas soluciones de las ecuaciones de Friedmann. Comenzando con un universo dominado por un fluido perfecto, que cumple con la ecuación politrópica  $p = \omega\rho$ .

Tomando la ec.(2.83), se tiene

$$\dot{\rho} = -3H(1 + \omega)\rho, \quad (2.84)$$

Usando la definición  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , se llega a que

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}, \quad (2.85)$$

con  $\omega \geq -1$  y  $a_0 = 1$  (notar que las soluciones con  $\omega < -1$  llevan al incumplimiento de la condición fuerte de la energía, y llevan a la producción de materia en un universo en expansión).

Usando esta ecuación, la primera ecuación de Friedmann puede escribirse en términos del parámetro  $\Omega = \rho/\rho_c$ , en donde  $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$ , tomando en cuenta que  $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ ,

$$H^2 = H_0^2\Omega_{r,0}a^{-4} + H_0^2\Omega_{m,0}a^{-3} + H_0^2\Omega_\Lambda + H_0^2\Omega_k, \quad (2.86)$$

en donde el subíndice 0 corresponde a un tiempo inicial arbitrario pero fijo.

En la FIG. 2.2 se muestra el comportamiento de la densidad de energía descrita por la ec. (2.85) para cuando el universo está dominado por distintos tipos de materia, los cuales se determinan por la

ecuación de estado  $\omega$

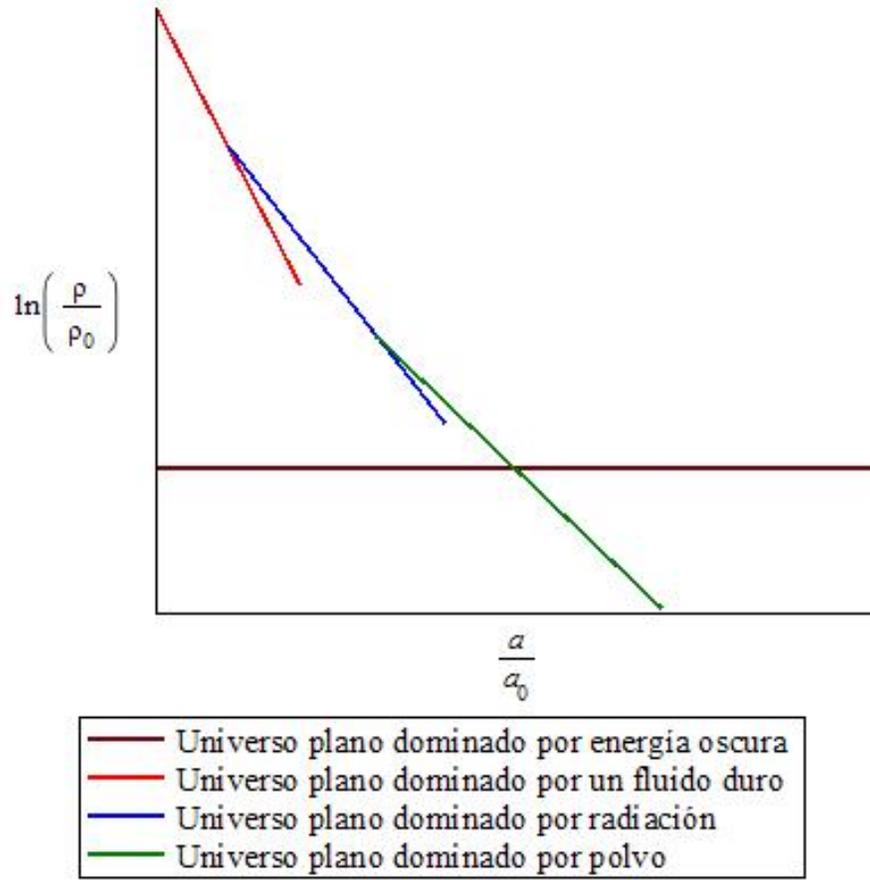


FIG. 2.2: Evolución de la densidad de energía para universos planos dominados por: polvo ( $\omega = 0$ ), radiación ( $\omega = 1/3$ ) y un fluido duro ( $\omega = 1$ ).

Insertando la ec.(2.84) en la primera ecuación de Friedmann, ec. (2.81), para un universo plano ( $k = 0$ ), se obtiene

$$a(t) = \left[ \frac{3}{2}(1 + \omega) \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}} \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.87)$$

Las soluciones estudiadas correspondientes a universos planos servirán como un fondo (background), en el cual las perturbaciones evolucionan, como se estudiará en capítulos subsecuentes.

Por otro lado, resolviendo la primera ecuación de Friedmann para un universo cerrado, i.e. considerando  $k = 1$  se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^2}{3a} - 1}, \quad (2.88)$$

Esto implica

$$\int dt = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^2}{3a} - 1}} \quad (2.89)$$

expresando lo anterior en términos del tiempo conforme, definido como  $d\eta = \frac{dt}{a}$ , se obtiene

$$\int d\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^2 a}{3} - a^2}}, \quad (2.90)$$

tomando  $A = \frac{4\pi G\rho_0}{3}$  se llega a

$$a = A(1 - \cos \eta) = \frac{a_{max}}{2}(1 - \cos \eta), \quad (2.91)$$

y dado que  $dt = ad\eta$ , se puede integrar una forma para el tiempo cósmico

$$t = \frac{t_{max}}{\pi}(\eta - \sin \eta). \quad (2.92)$$

De las soluciones anteriores se infiere que, un universo cerrado recolapsará en un tiempo  $t = 2t_{max}$ , donde  $t_{max}$  es llamado el tiempo de retorno o el tiempo de expansión máxima.

Suponiendo el caso de un universo abierto, en donde  $k=-1$ , se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^2}{3a} + 1}, \quad (2.93)$$

que implica

$$\int d\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^2 a}{3} + a^2}}. \quad (2.94)$$

De aquí, y con la misma definición para la constante  $A$ , se obtiene la solución para el factor de escala

$$a = A(\cosh \eta - 1), \quad (2.95)$$

y con  $dt = ad\eta$  se obtiene

$$t = A(\sinh \eta - \eta). \quad (2.96)$$

El último caso es el de un universo plano, en el que la curvatura es  $k = 0$ , se soluciona con

$$a = \left(\frac{2}{3}\pi G\rho_0\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.97)$$

El comportamiento de los universos con distintas curvaturas se muestra en la FIG. 2.3.

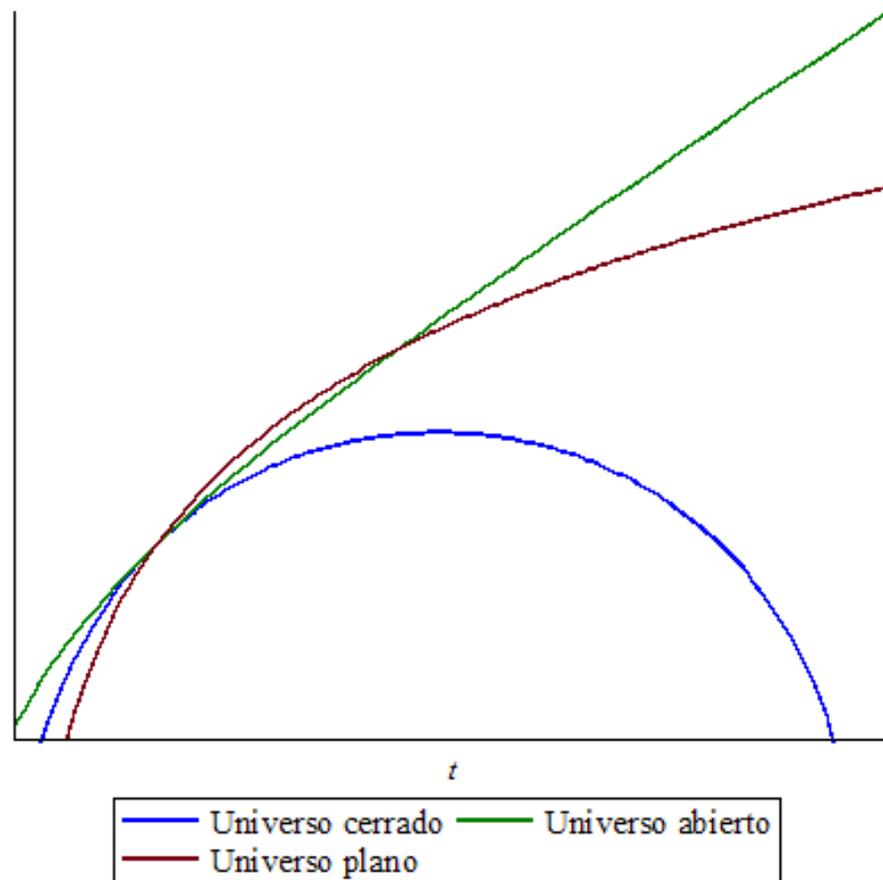


FIG. 2.3: Se observa un crecimiento monótono para los universos plano y abierto. Para el universo cerrado se tiene una época de crecimiento, un tiempo de retorno y una etapa final de colapso.

## capítulo 3

---

# *Agujeros Negros y Colapso gravitacional*

---

La gravedad es un fenómeno físico, para el cual varias teorías se han formulado. La relatividad general ha dado grandes resultados en la explicación de este fenómeno. En este capítulo se estudiará una solución importante, que ha dado esta teoría: la métrica de Schwarzschild, solución que conduce a la explicación de uno de los fenómenos astronómicos más interesantes, los llamados agujeros negros.

El estudio de la cosmología conlleva el estudio de la formación de estructura a gran escala, y una forma de comenzar con el estudio de la formación de estructura, es definiendo perturbaciones de materia en el universo en expansión (background), de tal manera que éstas crecen dentro del fondo cósmico y después de cierto tiempo colapsan debido a su gravedad. Estas perturbaciones pueden colapsar a un agujero negro o llegar a un punto de virialización, en cual se detiene el colapso debido a la energía cinética de las partículas del fluido de materia, generando así galaxias, estrellas, etc.

### 3.1 Agujero negro de Schwarzschild

Las definiciones que se muestran a continuación se ilustran en la referencia [17].

La métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (3.1)$$

es la única posible solución a las ecuaciones de Einstein que describe un espacio-tiempo fuera de un cuerpo simétricamente esférico de masa  $M$ , en el vacío.

Las dificultades que se tienen para la métrica de Schwarzschild en  $r = 2M$  causan el estudio de otra forma de la misma. Como se observa de la ec.(3.1) la geometría es singular en  $r = 2M$ , pero esto no implica una correspondencia uno a uno con eventos en el espacio-tiempo. Este problema puede ser removido introduciendo un nuevo sistema coordenado  $(u, v)$ . Considerando un conjunto de partículas sin masa moviéndose radialmente en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Es fácil notar que las partículas que se mueven hacia el centro, se mueven en curvas  $v = constante$  y las partículas que se alejan se mueven en curvas  $u = constante$ , donde

$$u = t - r^*, v = t + r^*,$$

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (3.2)$$

Nótese que en  $r = 2M$ ,  $v - u = -\infty$ , lo cual sigue siendo una singularidad de coordenadas. Para resolver esto, se considera una vecindad de la superficie  $r = 2M$  en la cual  $r^* = 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$ , ésto implica que  $r/2M = 1 \pm e^{r^*/2M} = 1 \pm e^{(v-u)/4M}$ , ahora sean las nuevas coordenadas nulas

$$U = \mp e^{-u/4M}, V = e^{v/4M}, \quad (3.3)$$

con la definición de estas coordenadas, se usa de nuevo la definición de la ec.(3.2). Así, despejando las nuevas coordenadas se obtiene

$$e^{r/2M} \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) = -UV. \quad (3.4)$$

Dando así una nueva métrica en estas coordenadas, donde la superficie  $r = 2M$  está bien definida.

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 d\Omega \quad (3.5)$$

Las coordenadas  $U$  y  $V$  son llamadas coordenadas nulas de Kruskal. En un diagrama de Kruskal (ver FIG. 3.1) las partículas entrantes siguen curvas  $V = constante$ , y las partículas salientes siguen curvas  $U = constante$ .

### 3.1.1 Horizonte de eventos y Horizonte aparente

En el diagrama de Kruskal (FIG. 3.1), los conos de luz están orientados a 45 grados, y las líneas de mundo tipo tiempo se mueven con una pendiente mayor a la unidad. Entonces es claro que la superficie  $r = 2M$ , que separa las regiones I y II tiene la siguiente consecuencia: un observador que cruza esta superficie ( $r = 2M$ ) no puede regresar jamás, debido a que la enorme curvatura del espacio tiempo no permite siquiera que los rayos de luz salgan de este horizonte, yendo éstos a parar

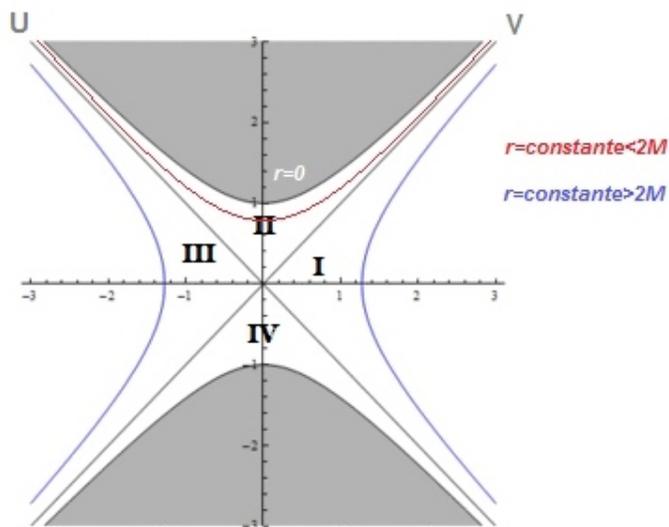


FIG. 3.1: Diagrama de Kruskal.

en la singularidad  $r = 0$ . La superficie  $r = 2M$  es, en este contexto, el horizonte de eventos. La región dentro del horizonte de eventos (región II) es llamada el agujero negro del espacio tiempo de Schwarzschild.

La superficie  $r = 2M$  que separa a las regiones I y II, debe distinguirse de la superficie  $r = 2M$  que separa a las regiones I y IV. Al igual que la superficie  $r = 2M$  entre I y II, la superficie entre I y IV, también separa dos regiones que se comunican unilateralmente, es decir, la región IV nunca percibirá rayos que salgan de la región I. A la superficie  $r = 2M$  que separa a la región I de la II suele llamársele horizonte futuro; y la superficie  $r = 2M$  que separa la región I de la IV se le llama horizonte pasado. La región dentro del horizonte pasado (región IV) se le llama agujero blanco del espacio tiempo de Schwarzschild.

Ahora se probará que la expansión de una congruencia de rayos salientes ( $U = constante$ ) cambia de signo en  $r = 2M$ . Los rayos salientes tienen a

$$k_\alpha = -\partial_\alpha U, \quad (3.6)$$

como sus vectores tangentes, y su expansión se calcula como

$$\theta = k^\alpha_{;\alpha}. \quad (3.7)$$

Entonces usando ec. (3.4) y ec. (3.5)

$$\theta = k^\alpha_{;\alpha} = -\frac{U}{2Mr}. \quad (3.8)$$

Se comprueba por lo tanto, en el diagrama de Kruskal, que la expansión cambia de signo en  $r = 2M$ , en este contexto, la superficie  $r = 2M$  es llamada horizonte aparente.

## 3.2 Masa de Misner-Sharp

Dada la métrica

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B + r^2 d\Omega, \quad (3.9)$$

donde  $g_{AB}$  es algún tensor métrico cuyas componentes son independientes de los ángulos. Se considera a  $r$  como el radio de area de las esferas, ya que el area de las esferas en dicho espacio es  $4\pi r^2$  -independientemente de si  $r$  es la distancia propia radial o no.

El radio de area  $r$  tiene un significado invariante, por lo tanto, tiene la expresión

$$||\nabla r||^2 = g^{ab}\nabla_a r \nabla_b r \quad (3.10)$$

Con esto, se define la función de masa de Misner-Sharp-Hernandez [15]  $m$  como sigue

$$m = \frac{r}{2}(1 - g^{ab}\nabla_a r \nabla_b r). \quad (3.11)$$

Se observa que  $m$  es constante en cada esfera, y representa la masa gravitacional activa dentro de la esfera. Este concepto ayudará en secciones posteriores, a definir el horizonte aparente de una densidad de materia colapsando en un fondo FRLW.

## 3.3 Colapso Gravitacional

Para comenzar a tratar el problema del colapso gravitacional de sobredensidades en un universo de Friedmann, se define una sobredensidad como un sector del universo en el cual, la densidad es distinta del resto del universo, observándose un contraste en la distribución de materia. También se definirá el universo plano cósmico como

$$ds^2 = -dt^2 + a_b^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega), \quad (3.12)$$

en donde  $d\Omega$  es el elemento de línea correspondiente al ángulo sólido de la 2-esfera en coordenadas esféricas.

Así, la primera ecuación de Friedmann queda de la forma

$$\left(\frac{\dot{a}_b}{a_b}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_b}{3}. \quad (3.13)$$

En donde  $\rho_b$  es la densidad de masa del universo de Friedmann plano.

La sobredensidad estará descrita por un universo con curvatura positiva inmerso en un universo con curvatura plana, y éste se describe con la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega) \quad (3.14)$$

Expresando a la misma métrica, redefiniendo el radio comóvil

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right). \quad (3.15)$$

Se observa que de la ec.(3.15) se obtiene la ec.(3.14), y viceversa, con  $k = 1$  y  $r = \sin(\chi)$ .

La primera ecuación de Friedmann para este universo, queda de la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_s}{3} - \frac{1}{a^2}, \quad (3.16)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa de esta región sobredensa.

### 3.3.1 Colapso esférico (Top-Hat)

Para comprender el modelo de colapso de tres zonas, que se utilizará en este trabajo, es útil conocer primeramente el colapso esférico de tipo Top-Hat.

Se considera que dentro de un universo plano o background, el cual se describe con la ec.(3.13), hay una sobredensidad de materia, a dicha sobredensidad la describe la ecuación ec.(3.16). Dentro de las prescripciones del modelo Top-Hat, está la suposición de que a un tiempo arbitrario pero fijo  $t_u$  la expansión de la fluctuación y la expansión del universo del fondo son iguales, entonces

$$\begin{aligned} H_u = H_b^2(t_u) = \frac{8\pi G\rho_b(t_u)}{3} &= H_s^2(t_u) = \frac{8\pi G\rho_s(t_u)}{3} - \frac{1}{a_s^2(t_u)} \\ \implies \frac{8\pi G\rho_b(t_u)}{3} &= \frac{8\pi G\rho_s(t_u)}{3} - \frac{1}{a_s^2(t_u)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la densidad de la fluctuación  $\rho_s(x, t)$  puede ser definida en términos de la densidad del

background más una perturbación, como

$$\rho_s(t, x) = \rho_b(t)(1 + \delta(t, x)), \quad (3.17)$$

$$= \rho_b(t) + \delta\rho(t, x), \quad (3.18)$$

sin pérdida de generalidad se puede renombrar a  $\rho_b(t)\delta(t, x)$  como  $\delta\rho(t, x)$  y a esto se le conoce como la perturbación de densidad. Haciendo uso de esto y del hecho de que existe un tiempo  $t_u$  en el cual los valores de la expansión de la fluctuación y del background son iguales ( $H_b(t_u) = H(t_u)$ ), se llega a

$$\frac{8\pi G\rho_b(t_u)}{3} = \frac{8\pi G}{3} [\rho_s(t_u, x) - \delta\rho(t_u, x)] = \frac{8\pi G\rho_b(t_u)}{3} + \frac{8\pi G\delta\rho(t_u, x)}{3} - \frac{1}{a_s^2(t_u)}. \quad (3.19)$$

De la ec.(3.19) se observa una relación entre la perturbación de densidad y el término de curvatura en la ecuación de Friedmann

$$\Omega_k = -\frac{1}{H_u^2 a_u^2} = -\frac{8\pi G\delta\rho(t_u, x)}{3H_u^2} = 1 - \Omega_s(t_u, x). \quad (3.20)$$

En donde  $\Omega_s = \rho_s/\rho_c$ , con  $\rho_c = 3H^2/8\pi G$  conocida como la densidad crítica (cantidad usada para determinar el tipo de universo que se estudia).

La ec.(3.20) es importante porque relaciona a la perturbación de densidad de materia con la curvatura espacial del universo cerrado, hecho que se usará más adelante.

El colapso esférico Top-Hat es una extensión del régimen lineal, para observar este hecho son necesarias las expansiones a segundo orden de las ec.(2.91) y ec.(2.92) que dictan la evolución de la sobredensidad,

$$a = \frac{a_{max}}{2}(1 - \cos \eta),$$

$$t = \frac{t_{max}}{\pi}(\eta - \sin \eta),$$

las expansiones para  $|\eta| \ll 1$  dan lugar a

$$\frac{a}{a_{max}} \simeq \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{48}, \quad (3.21)$$

$$\frac{t}{t_{max}} \simeq \frac{1}{\pi} \left( \frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^5}{120} \right). \quad (3.22)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se llega a [12]

$$\frac{a_{lin}}{a_{max}} = \frac{1}{4} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \right], \quad (3.23)$$

donde  $a_{lin}$  es el factor de escala linearizado.

Se observa que al truncar la ec.(3.23) se obtiene el factor de escala para el fondo.

$$\frac{a_b}{a_{max}} = \frac{1}{4} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \quad (3.24)$$

El factor de escala linearizado completo da la expresión de la teoría linearizada para el crecimiento de la perturbación. Por último, la solución paramétrica de la ec.(2.91) y ec.(2.92) da la evolución (no-lineal) completa de la perturbación. Hay que recordar que  $a_{max}$  es el valor del factor de escala en el punto de expansión máxima, o punto de retorno.

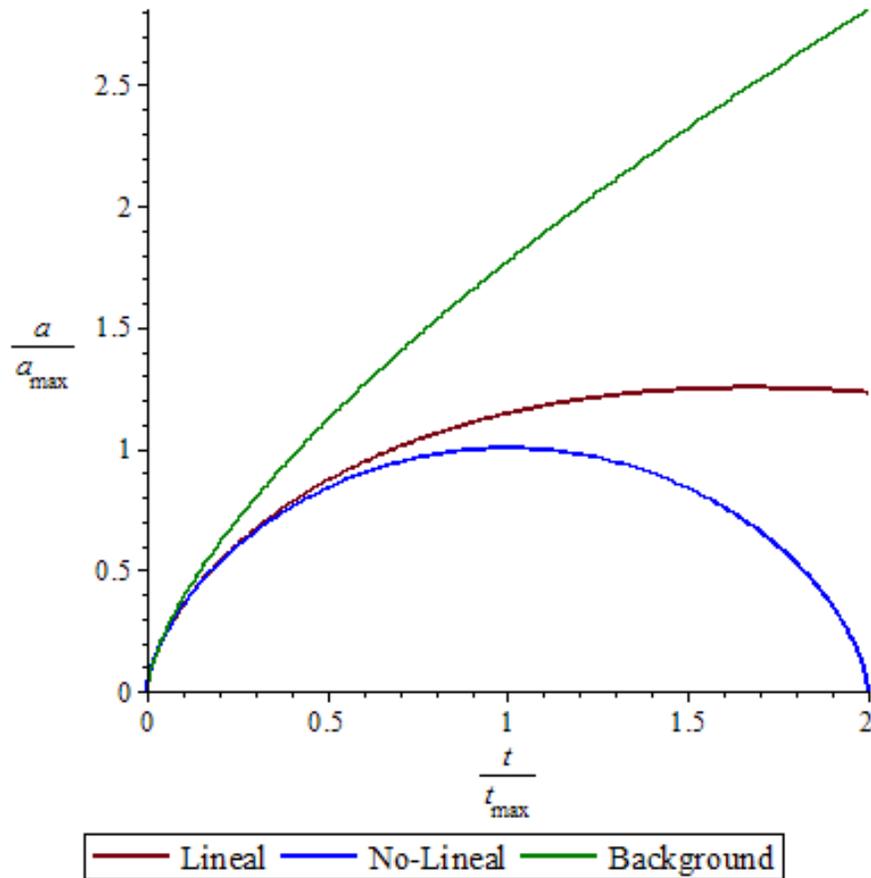


FIG. 3.2: La evolución de los tres factores de escala que se obtuvieron.

Ahora se considera que la densidad del background y de la fluctuación son uniformes, y recor-

dando la simetría esférica, se tiene

$$\rho_b = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a_b r_{com})^3}, \quad (3.25)$$

$$\rho_s = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(a_s r_{com})^3}. \quad (3.26)$$

Entonces la definición de perturbación

$$\delta = \frac{\rho_s - \rho_b}{\rho_b}, \quad (3.27)$$

implica la siguiente relación para la fluctuación

$$1 + \delta = \frac{\rho_s}{\rho_b} = \frac{M/\frac{4}{3}\pi(a_s r_{com})^3}{M/\frac{4}{3}\pi(a_b r_{com})^3} = \frac{a_b^3}{a_s^3}, \quad (3.28)$$

en particular, el contraste lineal de densidad se escribe como

$$1 + \delta_{lin} = \frac{a_b^3}{a_{lin}^3}. \quad (3.29)$$

Sustituyendo los valores de  $a_{lin}$  y  $a_b$  en la expresión anterior se llega a que

$$\delta_{lin} = \frac{3}{20} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, en el tiempo de retorno  $t = t_{max}$ , la perturbación tendrá el valor [12]

$$\delta_{lin}^{ret} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} = 1.06, \quad (3.31)$$

lo que este resultado dice es que cuando la perturbación alcanza la unidad, i.e.  $\delta_{lin} = 1$ , las fluctuaciones dejan de expandirse, recordando que esto es una aproximación a orden lineal.

Después del punto de retorno, el factor de escala de la fluctuación deja de crecer, se dice que la fluctuación comienza a colapsar. Se observa que la fluctuación colapsa completamente a un tiempo  $t = 2t_{max}$ . En este tiempo el contraste de densidad lineal alcanza el valor [12]

$$\delta_{lin}^{colap} = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} = 1.686. \quad (3.32)$$

Así, un contraste de densidad lineal cerca del valor 1.7 corresponde al colapso gravitacional de una fluctuación esféricamente simétrica.

En la FIG. 3.3 se presenta el crecimiento de las perturbaciones lineal y no-lineal, en función del tiempo (en este caso el tiempo conforme).

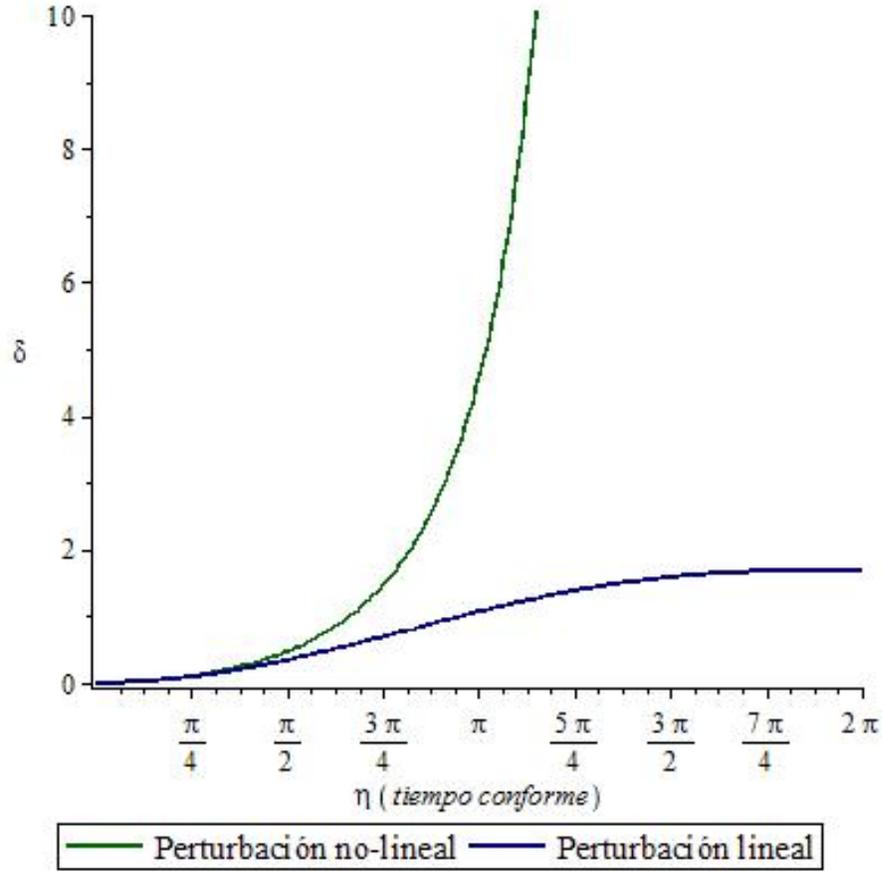


FIG. 3.3: El comportamiento de la perturbación no-lineal, como se espera, diverge cuando la fluctuación colapsa por completo, mientras que la perturbación linealizada crece de manera suave. También se observa que a tiempos tempranos la perturbación lineal se comporta de manera muy parecida a la perturbación no-lineal.

### 3.3.2 Modelo de 3 zonas

Suponiendo que la sobredensidad está rodeada de una subdensidad que compensa a la otra. Se adoptará el modelo donde la región sobredensa es descrita por un universo de Friedmann cerrado con  $0 < \chi < \chi_a$  en donde coincide con el radio de la sobredensidad, y los alrededores que son el universo plano estarán conectados con la subdensidad en  $r = r_b$ . Entonces, el radio de la sobredensidad está dado por  $R_a = a \sin \chi_a$ , mientras que el radio de la subdensidad está dado por  $R_b = a_b r_b$ . Llamaremos fluctuaciones  $0 < \chi_a < \pi/2$  y  $\pi/2 < \chi_a < \pi$  tipo I y tipo II, respectivamente, de acuerdo a la notación de Kopp, Hormann y Weller [11]. Ver FIG. 3.4

Ahora, sabiendo que en la sobredensidad se tiene

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho_s}{3H^2} = 1 + \left( \frac{1}{aH} \right)^2, \quad (3.33)$$

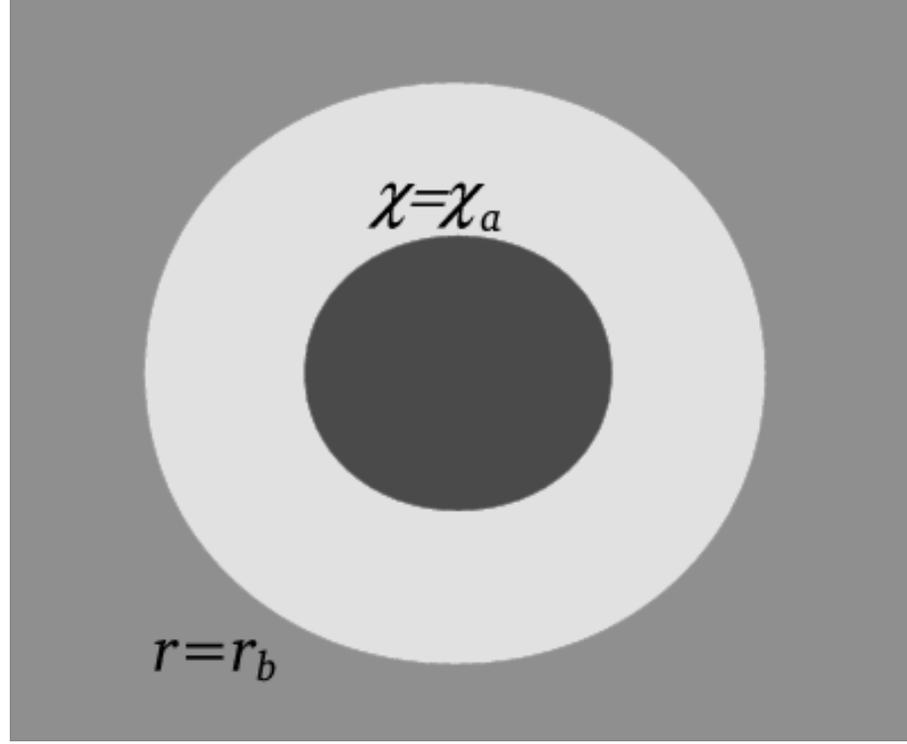


FIG. 3.4 Muestra el modelo de tres zonas de densidad, con  $\chi_a$  el ángulo correspondiente al radio comóvil de la sobredensidad [7]

y definiendo  $R_H = H^{-1}$ , la distancia al horizonte cosmológico de la sobredensidad, se obtiene

$$(\Omega - 1) \left( \frac{R_a}{R_H} \right)^2 = \sin^2(\chi_a). \quad (3.34)$$

Ahora se escribe el parámetro de densidad  $\Omega$  en términos de la perturbación descrita en la ec.(3.27), usando ec.(3.13) y ec.(3.33)

$$\Omega = (1 + \delta) \left( \frac{H_b}{H} \right)^2. \quad (3.35)$$

Ahora, usando ec.(3.34) y ec.(3.35) en el cruce del horizonte (en donde el radio de la perturbación es igual al radio del horizonte de Hubble del background), i.e.,  $R_a = cH_b^{-1}$ , implica que la amplitud de la perturbación en este radio es

$$\delta_H = \left( \frac{H_b}{H} \right)^2 - \cos^2(\chi_a), \quad (3.36)$$

ecuación que implica la relación

$$\left( \frac{H_b}{H} \right)^2 - 1 < \delta_H \leq \left( \frac{H_b}{H} \right)^2, \quad (3.37)$$

en donde  $H_b$  es el parámetro de Hubble en el universo plano. El tiempo de cruce de horizontes está dado por la igualdad entre el radio de la sobredensidad y la distancia al horizonte del universo plano de Friedman,  $R_{H_b} = H_b^{-1}$ . Luego, se usa la norma en que la tasa de expansión del universo interno es igual a la del externo, provocando que la perturbación  $\delta_H$  esté constreñida entre los valores 0 y 1, i.e. en esta norma [7]

$$0 < \delta_H^{UH} \leq 1, \quad (3.38)$$

en donde  $UH$  denota la norma de expansión uniforme ( $UH$  Uniform Hubble, por sus siglas en inglés). Este criterio para la formación de agujeros negros es consistente para fluctuaciones de materia tipo polvo, es decir, el modelo de 3 zonas da un criterio exacto. Para otros tipo de materia deben considerarse otros criterios, ya que puede haber ondas de sonido en las fluctuaciones que prevengan al colapso.

Dentro de esta norma al tiempo del cruce de horizontes también se puede obtener de la ec.(3.36) una relación entre la perturbación y el radio comóvil de ésta

$$\delta_H^{UH} = \sin^2 \chi_a, \quad (3.39)$$

con esto se pueden relacionar las perturbaciones de la densidad de materia con su tamaño.

### 3.3.3 Horizonte aparente en el modelo de 3 zonas

Haciendo uso de la ec.(3.11), se calcula la masa de Misner-Sharp [15] del universo cerrado, para el radio de area  $R = a \sin(\chi)$

$$M = \frac{1}{2G} a (1 + \dot{a}^2) \sin^3(\chi), \quad (3.40)$$

que implica

$$\frac{2GM}{R} = (1 + \dot{a}^2) \sin^2(\chi). \quad (3.41)$$

Luego para tener un horizonte aparente, se busca que  $2GM/R = 1$ . Así, con esta igualdad y la ec.(3.41), se obtiene

$$\sin(\chi) = (1 + \dot{a}^2)^{-1/2}. \quad (3.42)$$

En la máxima expansión, hay una superficie encerrada en  $\chi = \pi/2$ . De la ec.(3.41) y ec.(3.42), se sigue que cualquier fluctuación tipo II (en la fase de colapso) tiene una región de futuro atrapado, donde  $2GM/R > 1$ , conteniendo a  $\chi = \pi/2$ . Si hay una máxima expansión en la evolución del universo cerrado, se llega a que

$$a_{max} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G \rho_{max}/3}}, \quad (3.43)$$

donde  $\rho_{max}$  es la densidad de la región sobredensa al tiempo de la máxima expansión. En otras

palabras,  $a_{max}$  coincide con el radio de Hubble del universo de Friedman plano que contiene a la sobredensidad, en la norma  $H = H_b$  (la cual corresponde a una expansión que se da igual tanto en la región sobredensa como en el universo plano del fondo).

### 3.3.4 Criterio de colapso en agujeros negros para universos de materia

Se asume que el campo de materia es polvo, en donde el modelo de 3 zonas es exacto. La ecuación de Friedmann para la fluctuación está dada por la ec.(2.88)

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^2}{3a} - 1},$$

y las soluciones dadas por la ec.(2.91) y ec.(2.92) se escriben como

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_{max}}{2}(1 - \cos \eta), \\ t &= \frac{t_{max}}{\pi}(\eta - \sin \eta), \end{aligned}$$

en donde  $a_{max}$  y  $t_{max}$  pueden ser dados en términos de los parámetros cosmológicos, y recordando que  $dt = a d\eta$

$$a_{max} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} a_0 = \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} H_0^{-1} \quad ; \quad t_{max} = \frac{\pi}{2} a_{max}. \quad (3.44)$$

El horizonte aparente en la región sobredensa está dado por

$$\eta = 2\chi \quad ; \quad \eta = 2\pi - 2\chi. \quad (3.45)$$

Dado que todas las fluctuaciones de tipo II colapsan, el estudio se centrará en las fluctuaciones de tipo I, en las cuales,  $0 < \chi_a < \pi/2$ , esto es que el horizonte aparente corresponde a  $\eta = 2\pi - 2\chi$ . Se considera que el horizonte aparente existe cuando la región sobredensa colapsa a un valor  $f$  veces la expansión máxima, i.e.,  $a_{hap}/a_{max} = f$ . Entonces de la ec.(2.88) y ec.(3.42) se tiene que

$$\chi_a > \arcsin \sqrt{f}. \quad (3.46)$$

En la máxima expansión, el radio de área está dado por

$$R_{a,max} = a_{max} \sin \chi_a. \quad (3.47)$$

Esto no puede ser mayor que  $a_{max}$ . Entonces de las últimas dos ecuaciones se tiene la siguiente

relación

$$\sqrt{f}a_{max} < R_{a,max} \leq a_{max}. \quad (3.48)$$

Como se tiene la forma de  $a_{max}$  en términos de los parámetros cosmológicos (ec.(3.44)),

$$R_{a,max} = a_{max} \sin(\chi_a) = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} a_0 \sin(\chi_a) = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} R_{a,0}, \quad (3.49)$$

donde  $R_{a,0}$  es el radio de área de la sobredensidad al tiempo  $t = t_0$ , así

$$f < (\Omega_0 - 1) \left( \frac{R_{a,0}}{R_{H_0}} \right)^2 \leq 1, \quad (3.50)$$

en donde  $R_{H_0} = H_0^{-1}$  es el radio del horizonte cosmológico. Esta condición de formación de agujeros negros es exacta, aunque el factor  $f$  se deja sin especificar.

Es conveniente escribir esta condición en términos de la perturbación  $\delta_H$  en el cruce del horizonte. Como se vió anteriormente,

$$\delta_U^{UH} = \sin^2(\chi_a) = (\Omega_0 - 1) \left( \frac{R_{a,0}}{R_{H_0}} \right)^2, \quad (3.51)$$

al momento del cruce del horizonte en la norma de expansión uniforme. Con esto la condición de colapso queda como [7]

$$f < \delta_U^{UH} \leq 1. \quad (3.52)$$

En el caso de polvo,  $f$  se determina considerando los efectos dentro de la fluctuación, tales como caústicas, inhomogeneidades, y desviaciones en la simetría esférica; estos efectos pueden afectar fuertemente la dinámica del colapso y prevenir el colapso en agujero negro de la región sobredensa antes de que la fluctuación llegue a colapsar a  $f$  veces la expansión máxima.

### 3.3.5 Criterio de Carr para formación de Agujeros Negros

Asumiendo la ecuación de estado  $p = \omega\rho$ . Podemos esperar que el criterio de Jeans nos dé la condición para la formación de agujeros negros. Para este caso, en el universo plano de Friedman

$$a_b \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (3.53)$$

La ecuación de Friedman para la región sobre densa está dada por

$$\dot{a} = Aa^{-(1+3\omega)} - 1, \quad (3.54)$$

donde

$$A = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^{3(1+\omega)}, \quad (3.55)$$

con  $\rho_0$  y  $a_0$ , al tiempo  $t_0$ .

En la máxima expansión el radio de la sobredensidad está dado por

$$R_{a,max} = a_{max} \sin(\chi_a). \quad (3.56)$$

Dado  $R_{a,max}$ , éste no puede ser mayor a  $a_{max}$  debido a la geometría esférica, mientras que éste debe ser mayor al radio de Jeans de la región sobredensa al momento de máxima expansión.

$$R_J < R_{a,max} \leq a_{max}. \quad (3.57)$$

De antemano sabemos que el radio de Jeans se define como el radio mínimo para que se dé el colapso esférico, y se escribe

$$R_J = c_s \sqrt{\frac{1}{G\rho}}. \quad (3.58)$$

En donde  $\rho$  y  $c_s$  son la densidad y la velocidad del sonido en el fluido del universo plano, respectivamente. Dado que  $c_s = \sqrt{\omega}c = \sqrt{\omega}$  y hacemos  $\sqrt{1/G\rho} \approx 1/\sqrt{8\pi G\rho_{max}/3}$ , pasamos a que

$$R_J \approx \sqrt{\omega}a_{max}, \quad (3.59)$$

lo cual implica que la sobre densidad que colapsará a un agujero negro debe cumplir que

$$\sqrt{\omega}a_{max} < a_{max} \sin(\chi_a) \leq a_{max}, \quad (3.60)$$

considerando la ec.(3.51), y elevando al cuadrado todos los elementos de la desigualdad [5]

$$\omega < \delta_H^{UH} \leq 1. \quad (3.61)$$

### 3.3.6 Fluctuación de curvatura

Como se estudió anteriormente, la perturbación  $\delta$  asociada a la perturbación de materia, tiene un valor máximo finito, y un valor de  $\delta$  conduce generalmente a dos configuraciones de la perturbación, i.e. dos valores posibles para  $\chi_a$ , una configuración de tipo I y otra de tipo II. La fluctuación de tipo II es grande en el sentido de que  $\pi/2 < \chi_a < \pi$ , aunque  $\delta$  puede ser muy pequeña. La suposición Gaussiana para  $\delta$  implica la siguiente consecuencia: una perturbación linealmente pequeña  $\chi_a \simeq 0$ , en donde la región sobredensa está ligeramente curvada, y una perturbación altamente no-lineal  $\chi_a \simeq \pi$ , la cual está casi separada del resto del universo, se pueden presentar con la misma probabilidad.

Kopp, Hofmann y Weller [11] sugieren que la fluctuación de curvatura es más adecuada para la suposición de la distribución de probabilidad. La fluctuación de curvatura está definida por el factor conforme de la tres-métrica en la forma conformalmente plana [7]

$$ds_3^2 = b^2(t)e^{2\zeta(t,s)}(ds^2 + s^2d\Omega^2). \quad (3.62)$$

El promedio de la fluctuación de curvatura  $\bar{\zeta}$  en términos de  $\chi_a$  está dada por [11]

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{3} \ln \frac{3(\chi_a - \sin \chi_a \cos \chi_a)}{2 \sin^3 \chi_a}, \quad (3.63)$$

en donde  $b(t)$  es escogida de tal modo que sea común para la sobredensidad y para el universo plano del fondo cósmico. Por otro lado, el pico de la variable original  $\zeta(t, 0)$ , la cual se denotará como  $\zeta$ , puede expresarse como [11]

$$\zeta \simeq -2 \ln \cos \frac{\chi_a}{2}. \quad (3.64)$$

Hay que notar que la evolución de la fluctuación de curvatura pico crece monótonamente con el parámetro del radio de área  $\chi_a$ , i.e. que  $\chi_a$  de 0 a  $\pi$  implica que  $\zeta$  va de 0 a  $\infty$ , esto también implica una relación uno a una con el radio de área y la perturbación de materia.

Usando las relaciones anteriores, se tiene que para un fluido que satisface la ecuación de estado  $\omega$ , la relación (3.61) puede reescribirse en términos del pico de la fluctuación de curvatura como

$$-2 \ln \left[ \cos \left( \frac{\arcsin \sqrt{\omega}}{2} \right) \right] < \zeta \leq \ln 2. \quad (3.65)$$



## *capítulo 4*

---

### *Campo escalar en cosmología*

---

La necesidad de proponer distintos tipos de materia como el sector oscuro de materia, nace de la relación entre la teoría y las observaciones. Estos tipos de materia solo se encuentran a través de su interacción gravitacional, no hay otra forma de observarlos. La materia oscura es una componente del universo que parece no interactuar con ninguna partícula conocida, y aún así su predicción en la teoría de la relatividad general con las observaciones hace que su estudio tome importancia.

La cosmología moderna ha alcanzado grandes logros a lo largo de la historia, uno de estos logros es la teoría de inflación, la cual explica grandes incógnitas en el entendimiento del universo. La inflación propone que el universo estuvo dominado en una época temprana, por una partícula llamada inflatón la cual produce una expansión acelerada del universo.

El recalentamiento (reheating) [2] al final de la etapa de expansión acelerada del universo es una parte importante de la cosmología inflacionaria. La teoría de inflación sin recalentamiento implicaría un universo carente de materia. La época de recalentamiento se produce a través del acoplamiento del campo escalar del inflatón  $\phi$  con la materia del modelo estándar (SM). Este acoplamiento debe estar presente, al menos, a través de interacciones gravitacionales.

En este capítulo se propone modelar a la materia oscura con un campo escalar oscilante, así como al campo inflatón que se considera oscila en recalentamiento.

## 4.1 Formulación Lagrangiana para el campo escalar

La formulación Lagrangiana es una herramienta muy importante para las teorías de campo, haciendo uso de principios variacionales se puede llegar a las ecuaciones que rigen el movimiento de un campo dentro de un volumen  $V$ , variando el funcional de acción, el cual es la integral del Lagrangiano que genera el campo dentro de  $V$ .

Se considera la dinámica de un campo  $q(x^\alpha)$  en un espacio-tiempo curvo, dada la importancia del campo escalar para el fin de este trabajo, se considera que  $q(x^\alpha)$  es un campo escalar.

En la formulación Lagrangiana de una teoría de campos, se da una región arbitraria  $V$  de la variedad espacio-temporal, cuya frontera es una hipersuperficie  $\partial V$ . También se da una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}(q, q_{,\alpha})$ , que es una función escalar del campo y de sus primeras derivadas. Así el funcional de acción  $S[q]$  queda

$$S[q] = \int_V \mathcal{L}(q, q_{,\alpha}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.1)$$

Las ecuaciones dinámicas para  $q$  se obtienen de introducir una variación  $\delta q(x^\alpha)$  arbitraria dentro de  $V$  pero que es cero en toda la frontera  $\partial V$ ,

$$\delta q|_{\partial V} = 0, \quad (4.2)$$

y con la propiedad  $\delta S = 0$  si la variación es alrededor de la trayectoria  $q(x^\alpha)$ . Tal variación se escribe (usando la notación  $\mathcal{L}' \equiv \partial \mathcal{L} / \partial q$ ,  $\mathcal{L}^\alpha \equiv \partial \mathcal{L} / \partial q_{,\alpha}$ ),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_V (\mathcal{L}' \delta q + \mathcal{L}^\alpha \delta q_{,\alpha}) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_V [\mathcal{L}' \delta q + (\mathcal{L}^\alpha \delta q)_{;\alpha} - \mathcal{L}^\alpha_{;\alpha} \delta q] \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_V (\mathcal{L}' - \mathcal{L}^\alpha_{;\alpha}) \delta q \sqrt{-g} d^4x + \int_{\partial V} \mathcal{L}^\alpha \delta q d\Sigma_\alpha, \end{aligned}$$

donde el teorema de Gauss fue usado en el último paso. Por la ec.(4.2) la integral de superficie se hace cero, y dado que  $\delta q$  es una variación arbitraria dentro de  $V$  se obtiene

$$\delta S = 0 \implies \nabla_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (4.3)$$

Esta es la ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar  $q$ .

Considerando ahora el campo escalar de Klein-Gordon  $\psi$  con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} + m^2 \psi^2). \quad (4.4)$$

Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange como se definieron en la ec.(4.3) se escriben como

$$g^{\alpha\beta}\psi_{;\alpha\beta} - m^2\psi = 0, \quad (4.5)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon para espacios-tiempos curvos.

Para la cosmología el campo escalar es importante, ya que modela a una de las teorías que ayuda al entendimiento del cosmos: la teoría de inflación.

Ahora, conviene definir las variables que se usarán, tomando el campo escalar  $\varphi(t)$  como el campo de materia, éste se puede insertar a la métrica cosmológica gracias a sus simetrías. El funcional de acción para este campo es

$$S = - \int \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.6)$$

donde  $V(\varphi)$  es el potencial, el cual es una función arbitraria pero se espera que, para inflación, éste cumpla ciertas constricciones. El tensor de energía-momento puede escribirse como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + V(\varphi) \right]. \quad (4.7)$$

Se hace notar que en el caso homogéneo, esta expresión puede ser considerada como un fluido perfecto. La densidad de energía y la presión son definidas, en el sistema propio, a partir de las definiciones  $T^0_0 = -\rho$  y  $T^i_j = p\delta^i_j$ , por lo que se tiene

$$\rho = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + V(\varphi), \quad p = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 - V(\varphi), \quad (4.8)$$

que corresponden a la suma y a la resta, respectivamente, de las energías cinética y potencial.

### 4.1.1 Solución a la ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon para un espacio-tiempo cosmológico se escribe como

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (4.9)$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo cósmico.

Un caso de interés para el potencial del campo es  $V = m^2\varphi^2/2$ , llamado el potencial cuadrático simple. Este potencial con escalas de tiempo suficientemente grandes, produce la solución analítica [10]

$$\varphi(t) \simeq \varphi_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \sin(mt), \quad (4.10)$$

en donde  $m$  es la masa del campo escalar,  $a$  es el factor de escala y  $t$  es el tiempo cósmico. Esta solución será utilizada más adelante para modelar a la materia oscura.

## 4.2 Inflación

La teoría inflacionaria es una herramienta que nació de la necesidad de explicar varios problemas que tenía la cosmología, el poder de la teoría inflacionaria para entender estos problemas la ha convertido en una de las teorías más exitosas y bellas que explican al universo a gran escala.

Uno de los problemas que explica la inflación es el problema del horizonte que consiste en: la homogeneidad e isotropía que se observan desde tiempos tempranos del universo. El evento más temprano del que se tienen mediciones es la época de recombinación, en la cual se supone que los electrones y los protones se combinan para formar átomos de hidrógeno, antes de esta época el universo era opaco debido a que los fotones eran dispersados por la alta densidad de electrones. La observación de regiones causalmente desconectadas en la época de recombinación indica anisotropías equivalentes, hecho que no se explica con la expansión en una era dominada por materia o radiación.

La teoría de una época de inflación explica que las zonas que se observan en el cielo y que están causalmente desconectadas deben su homogeneidad e isotropía a que en algún momento anterior, la expansión del universo desconectó estas zonas, a esta expansión se le conoce como inflación.

Otro problema es el de la planitud del universo. El universo a gran escala conduce a una curvatura muy plana que en términos del parámetro  $\Omega = \rho/\rho_c$  con la ecuación de Friedmann  $k/(a^2 H^2) = \Omega_T - 1$ . El parámetro  $\Omega_T(t)$ , da directamente el signo de la curvatura de las secciones tipo-espaciales (space-like). Dado que  $k$  no es una función del tiempo, el signo de  $\Omega_T(t) - 1$  no cambia con la evolución cósmica.

Si se asume únicamente que radiación y materia están presentes en el universo, se puede deducir que para  $a/a_0 \rightarrow 0$  la radiación se vuelve dominante, y se tiene aproximadamente lo siguiente

$$\Omega_T(t) - 1 \simeq \frac{\Omega_T(t_0) - 1}{\Omega_{rad}(t_0)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{\Omega_T(t_0) - 1}{\Omega_{rad}(t_0)} \left( \frac{1}{z + 1} \right)^2 \quad (4.11)$$

Al día de hoy se sabe que  $|\Omega_T(t_0) - 1| < 0.1$ . Así que para redshifts grandes la cantidad  $|\Omega_T(z) - 1|$  es casi cero. Esto conduce a que el universo en sus orígenes era prácticamente plano.

La solución a estos problemas se consigue al suponer una época primordial de expansión acelerada, conocida como inflación, época que a continuación se estudiará.

### 4.2.1 Inflación con un campo escalar

Se considera que la inflación tuvo lugar en el universo temprano, a muy grandes energías. A esas escalas, no se espera que la descripción del fluido de materia funcione, con esto, una teoría cuántica de campos parece ser la forma más apropiada para describir el comportamiento de la materia.

Se considera a la inflación como una época de expansión acelerada, de tal forma que se cumple que  $\ddot{a} > 0$ . Esto implica

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{aH} \right) = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \ll 0, \quad (4.12)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  es el factor de Hubble, y esta expresión indica que en inflación, el radio comóvil del horizonte causal decrece. Tomando la primera derivada respecto al tiempo del factor de Hubble, y utilizando la ecuación anterior se llega a

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1. \quad (4.13)$$

De la primera y segunda ecuación de Friedmann y haciendo uso de las definiciones de la ec. (4.8),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(p + \frac{1}{3}\rho). \quad (4.14)$$

Para que se cumpla inflación  $p + \frac{1}{3}\rho \ll 0$ , esto lleva a la condición en términos de las energías del campo

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi), \quad (4.15)$$

entonces  $\rho \simeq V(\varphi)$ , lo cual se refleja en la primera ecuación de Friedmann ec.(2.81) como

$$H^2 \simeq \frac{1}{3m_{pl}^2} V(\varphi). \quad (4.16)$$

Por otro lado, a partir de la segunda ecuación de Friedmann ec.(2.82) y de la presión y densidad en términos del campo escalar ec.(4.8),

$$2m_{pl}^2 \dot{H} = -\dot{\varphi}^2. \quad (4.17)$$

Usando lo anterior se obtiene

$$3H\dot{\varphi} \simeq \frac{d}{d\varphi} V \Rightarrow \ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi}. \quad (4.18)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación se obtiene insertando las expresiones anteriores de la densidad y presión en la ecuación de continuidad ec. (2.83). Asumiendo que  $\dot{\varphi} \neq 0$ , esto reproduce la

ecuación de Klein-Gordon en un fondo cosmológico de FLRW,

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (4.19)$$

A partir de esta ecuación se pueden imponer las condiciones para que exista inflación. Usando las condiciones de la ec. (4.18) se llega a

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'}{3H}, \quad (4.20)$$

tomando el cuadrado de esto y usando la ec.(4.16), la ec.(4.13) puede reescribirse como

$$\epsilon = \frac{m_{pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1. \quad (4.21)$$

Por otro lado, usando la condición de la ec. (4.18) y derivando respecto al tiempo la ecuación de movimiento (ec.(4.19)) se tiene

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}}{9H^2} \right| \ll 1, \quad (4.22)$$

recordando la ec.(4.16) se llega a la condición

$$\eta = m_{pl}^2 \left| \frac{V''}{V} \right| \ll 1. \quad (4.23)$$

Las condiciones de las ecuaciones ec.(4.21) y ec.(4.23), son conocidas como las condiciones de Slow-Roll, y los parámetros  $\epsilon$  y  $\eta$  son conocidos como el primer parámetro de Slow-Roll y el segundo parámetro de Slow-Roll, respectivamente.

### 4.3 Campo escalar oscilante como materia oscura

La suposición de que la materia oscura puede ser modelada por un campo escalar oscilante, implica proponerlo a partir de la ecuación de movimiento de algún campo escalar, por lo tanto en la ec.(4.10)

$$\varphi(t) \simeq \varphi_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \sin(mt),$$

se tiene un campo oscilante, el cual se considerará como el campo que describe la dinámica de la materia oscura y del campo escalar en las etapas finales de inflación (recalentamiento).

Es importante tener relación de las cantidades que del campo escalar se derivan, i.e., tener las expresiones para  $V$ ,  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{\varphi}^2$ .

$$V = m^2\varphi^2 = m^2\varphi_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \sin^2(mt). \quad (4.24)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\varphi_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} H \sin(mt) + \varphi_0 m \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} \cos(mt). \quad (4.25)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{4}\varphi_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 H^2 \sin^2(mt) - 3\varphi_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 mH \sin(mt) \cos(mt) + \varphi_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 m^2 \cos^2(mt), \quad (4.26)$$

en donde  $H$  es el factor de Hubble.

La materia oscura como un campo escalar requiere otra suposición: el tiempo de las oscilaciones del campo debe ser mucho menor que el tiempo de Hubble, i.e.  $m \gg H$  dado que  $m$  funge como la frecuencia angular de oscilación del campo y  $H^{-1} \propto t_H$  (tiempo de Hubble). Esto para tener una aproximación a la condición de materia oscura fría, i.e. que la presión promedio en un período sea casi nula. Por lo tanto, se considera (como se mencionó antes) que el tiempo de oscilación es muy pequeño en comparación al tiempo de Hubble  $t_H \propto H^{-1}$ , i.e.  $t_H \gg t_\varphi$  o lo que es lo mismo

$$H \ll m/2\pi, \quad (4.27)$$

de este modo la evolución en este lapso de tiempo no afectará al factor de Hubble ni al factor de escala. Entonces para obtener la expresión para la densidad, se tiene que considerar la ec.(4.8)

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \\ &= \frac{9}{8}C^2 a^{-3} H^2 \sin^2(mt) - \frac{3}{2}C^2 mH a^{-3} \sin(mt) \cos(mt) + \frac{1}{2}C^2 m^2 a^{-3} \cos^2(mt) \\ &\quad + \frac{m^2}{2}C^2 a^{-3} \sin^2(mt), \end{aligned}$$

en donde la constante  $C$  se define como

$$C = (\varphi_0)(a_0)^{3/2}. \quad (4.28)$$

De la misma forma, se obtiene una expresión para la presión

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \\ &= \frac{9}{8}C^2 a^{-3} H^2 \sin^2(mt) - \frac{3}{2}C^2 mH a^{-3} \sin(mt) \cos(mt) + \frac{1}{2}C^2 m^2 a^{-3} \cos^2(mt) \\ &\quad - \frac{m^2}{2}C^2 a^{-3} \sin^2(mt). \end{aligned}$$

Para calcular la densidad en función del tiempo cósmico, se necesita considerar el promedio en

una oscilación completa del campo escalar

$$\begin{aligned}
 \langle \rho \rangle &= \frac{1}{2\pi/m} \int_0^{2\pi/m} \frac{9}{8} C^2 a^{-3} H^2 \sin^2(mt) - \frac{3}{4} C^2 m H a^{-3} \sin(mt) \cos(mt) \\
 &\quad + \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} \cos^2(mt) + \frac{m^2}{2} C^2 a^{-3} \sin^2(mt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi/m} \frac{9}{8} C^2 a^{-3} H^2 \int_0^{2\pi/m} \sin^2(mt) dt - \frac{1}{2\pi/m} \frac{3}{4} C^2 m H a^{-3} \int_0^{2\pi/m} \sin(mt) \cos(mt) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi/m} \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} \int_0^{2\pi/m} \cos^2(mt) dt + \frac{1}{2\pi/m} \frac{m^2}{2} C^2 a^{-3} \int_0^{2\pi/m} \sin^2(mt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi/m} \frac{9}{8} C^2 a^{-3} H^2 \frac{\pi}{m} + \frac{1}{2\pi/m} \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} \frac{\pi}{m} + \frac{1}{2\pi/m} \frac{m^2}{2} C^2 a^{-3} \frac{\pi}{m} \\
 &= \frac{9}{16} C^2 H^2 a^{-3} + \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3},
 \end{aligned}$$

y recordando que  $H \ll m$ , se obtiene que la densidad se escribe como

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} + \mathcal{O}(H^2/a^3), \quad (4.29)$$

con esto se puede calcular la ecuación de Friedmann

$$\langle H^2 \rangle = \frac{\kappa}{3} \langle \rho \rangle \quad (4.30)$$

$$= \frac{\kappa}{3} \left( \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} + \mathcal{O}(H^2/a^3) \right). \quad (4.31)$$

Para la presión se tiene el siguiente promedio.

$$\begin{aligned}
 \langle p \rangle &= \frac{1}{2\pi/m} \int_0^{2\pi/m} \frac{9}{8} C^2 a^{-3} H^2 \sin^2(mt) - \frac{3}{4} C^2 m H a^{-3} \sin(mt) \cos(mt) \\
 &\quad + \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} \cos^2(mt) - \frac{m^2}{2} C^2 a^{-3} \sin^2(mt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi/m} \frac{9}{8} C^2 a^{-3} H^2 \int_0^{2\pi/m} \sin^2(mt) dt - \frac{1}{2\pi/m} \frac{3}{4} C^2 m H a^{-3} \int_0^{2\pi/m} \sin(mt) \cos(mt) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi/m} \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} \int_0^{2\pi/m} \cos^2(mt) dt - \frac{1}{2\pi/m} \frac{m^2}{2} C^2 a^{-3} \int_0^{2\pi/m} \sin^2(mt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi/m} \frac{9}{8} C^2 a^{-3} H^2 \frac{\pi}{m} + \frac{1}{2\pi/m} \frac{1}{2} C^2 m^2 a^{-3} \frac{\pi}{m} - \frac{1}{2\pi/m} \frac{m^2}{2} C^2 a^{-3} \frac{\pi}{m} \\
 &= \frac{9}{16} C^2 a^{-3} H^2 \\
 &= \mathcal{O}(H^2/a^3).
 \end{aligned}$$

Dado que en promedio, la presión en términos del campo escalar debe aproximarse a la presión de un universo dominado por polvo (i.e. materia oscura fría),  $\langle p \rangle \approx 0$ , entonces de la expresión para la presión promedio se tiene que  $\langle p \rangle = \mathcal{O}(H^2/a^3) \approx 0$ , esto quiere decir que los términos con factores  $(H^2/a^3)$  se vuelven subdominantes.

Con esto, se recuperan las ecuaciones cosmológicas para un universo dominado por polvo, por lo que el campo oscilante es un recurso factible para modelar a la materia oscura fría y al mismo tiempo, como consecuencia, se observa que el campo inflacionario durante recalentamiento presenta una ecuación de estado tipo polvo.

### 4.3.1 Perturbaciones cosmológicas en un campo escalar

En esta subsección se usará el formalismo Invariante de Norma expuesto en la referencia [14].

El elemento de línea para un espacio-tiempo perturbado se escribe como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -(1 - 2\phi)d\eta^2 + 2(\partial_i B)dx^i d\eta + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E + h_{ij}]dx^i dx^j \right\}. \quad (4.32)$$

En la métrica anterior, las funciones  $\phi$ ,  $B$ ,  $\psi$  y  $E$  representan el sector escalar mientras el tensor  $h_{ij}$ , que satisface  $h_i{}^i = h_{ij}{}^{,j} = 0$ , representa a las ondas gravitacionales. No hay perturbaciones vectoriales ya que un campo escalar no puede generar perturbaciones de tipo rotacional, a primer orden de perturbación. A orden lineal, las perturbaciones escalares y de ondas gravitacionales se desacoplan, permitiendo tratarlas separadamente.

Esta forma de considerar a las perturbaciones conlleva la necesidad de definir invariantes de norma, ya que, al hacer transformaciones de norma puede perderse el sentido de las perturbaciones.

Para comenzar a tratar las perturbaciones, se comienza definiendo lo que son. Para el espacio-tiempo anterior se supone un campo escalar en la perturbación que se define como

$$\varphi_p(t, x^i) = \varphi(t) + \delta\varphi(t, x^i). \quad (4.33)$$

En donde  $\varphi_p$  es el campo escalar total en la perturbación,  $\varphi$  es el campo escalar del fondo o background, y  $\delta\varphi$  es la perturbación de campo escalar relacionado a la perturbación espacio-temporal.

Dado que las transformaciones de norma pueden imitar a una deformación física del background, se tiene que trabajar con invariantes de norma, una posibilidad es el potencial métrico, que se definen como [3]

$$\Phi_B = \phi - \mathcal{H}(B - E'), \quad (4.34)$$

conocido como el potencial de Bardeen, y donde  $\phi$  es la perturbación en la métrica,  $\mathcal{H}$  es el factor de Hubble para el tiempo conforme y,  $B$  y  $E$  son también perturbaciones en la métrica definidas en la ec.(4.32). Otro invariante es

$$\delta\varphi_{i.n.} = \delta\varphi + \varphi'(B - E'), \quad (4.35)$$

en donde  $\delta\varphi_{i.n.}$  es el invariante de norma ligado al campo escalar,  $\delta\varphi$  es la perturbación del campo escalar y  $\varphi$  es el campo escalar en el background. En ambos invariantes, las cantidades primadas significan derivada respecto al tiempo conforme  $\eta$ .

Dado que los invariantes descritos en la ec.(4.34) y en ec.(4.35) están relacionados por las ecuaciones de Einstein, se tiene un sólo grado de libertad. La dinámica de las perturbaciones escalares se puede reducir al estudio la variable de Mukhanov-Sasaki, definida por [16]

$$\nu = a \left[ \delta\varphi_{i.n.} + \varphi' \frac{\Phi_B}{\mathcal{H}} \right]. \quad (4.36)$$

En la norma de densidad uniforme, se puede construir el invariante

$$\zeta \equiv - \left( \phi + \frac{\mathcal{H}}{\rho'_0} \delta\rho \right). \quad (4.37)$$

Por otro lado, en la norma de curvatura uniforme

$$\delta\rho_{1\Psi} = \delta\rho_1 + \rho'_0 \frac{\phi}{\mathcal{H}}. \quad (4.38)$$

Dado que las dos cantidades anteriores son invariantes, no hay contradicciones si se relacionan, por lo tanto

$$\zeta = - \left( \Phi_B + \frac{\mathcal{H}}{\rho'_0} \delta\rho_{1\Psi} \right). \quad (4.39)$$

Ahora, comparando las definiciones del tensor de energía-momento para un fluido simple, ec.(2.80) y el de un campo escalar en la perturbación, ec.(4.7), permite reescribir la perturbación invariante de densidad en términos de la perturbación invariante del campo  $\delta\varphi_{i.n.}$  con lo cual, la perturbación de curvatura comóvil se escribe de la forma [13]

$$\zeta = - \left( \Phi_B + \frac{\mathcal{H}}{\varphi'} \delta\varphi_{i.n.} \right). \quad (4.40)$$

Por lo tanto, la variable de Mukhanov-Sasaki está relacionada a  $\zeta$  por  $-\sqrt{2\kappa}\nu = \mu_s = -2a\sqrt{\gamma}\zeta$ , donde  $\gamma = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}$ . La función  $\gamma$  en el background se reduce a la constante  $(2 + \beta)/(1 + \beta)$ , para factores de escala que evolucionan con ley de potencia  $a(\eta) \propto (-\eta)^{1+\beta}$ . En particular, es cero para el espacio-tiempo de de-Sitter, ya que  $\beta = -2$ . La ecuación de movimiento de la cantidad  $\mu_s$  en el

espacio de Fourier se escribe como [4]

$$\mu_s'' + \left[ k^2 - \frac{(a\sqrt{\gamma})''}{(a\sqrt{\gamma})} \right] \mu_s = 0, \quad (4.41)$$

donde  $k$  es el número de onda comóvil al modo de Fourier. El potencial efectivo  $U_S = (a\sqrt{\gamma})''/(a\sqrt{\gamma})$  involucra únicamente al factor de escala  $a(\eta)$  y sus derivadas.

El sector tensorial no se considerará en esta tesis, por lo tanto, sólo interesa la ecuación para el campo escalar.

Para continuar con el estudio de estas perturbaciones se propone el cambio de variable

$$\tilde{\mu}_s = a^{1/2} \mu_s, \quad (4.42)$$

y recordando a la densidad y presión en términos del campo escalar y su potencial de la ec.(4.8), entonces la ec.(4.41) toma la forma [10]

$$\ddot{\tilde{\mu}}_s + \left[ \frac{k^2}{a^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2} + 3\kappa\dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa^2}{2H^2}\dot{\varphi}^4 + \frac{3\kappa}{4} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V \right) + 2\kappa \frac{\dot{\varphi}}{H} \frac{dV}{d\varphi} \right] \tilde{\mu}_s = 0, \quad (4.43)$$

en donde  $\kappa = 8\pi G$  es una constante y  $\varphi$  es el campo escalar en el universo del fondo.

Dado que en este procedimiento no se impuso ninguna de las condiciones de slow-roll, la ec.(4.43) es válida también para un campo escalar oscilante como el de recalentamiento, o el de la materia oscura.

### 4.3.2 Perturbaciones para el campo escalar oscilante

El estudio de la perturbaciones hecho en la sección anterior servirá para modelar la dinámica de las perturbaciones del campo oscilante. Por lo tanto la ec.(4.43) dictará el comportamiento de las perturbaciones, la ecuación para éstas se escribe

$$\ddot{\tilde{\mu}}_s + \left[ \frac{k^2}{a^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2} + 3\kappa\dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa^2}{2H^2}\dot{\varphi}^4 + \frac{3\kappa}{4} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V \right) + 2\kappa \frac{\dot{\varphi}}{H} \frac{dV}{d\varphi} \right] \tilde{\mu}_s = 0.$$

Tomando el potencial  $V = m^2\varphi^2/2$  y el campo  $\varphi = Ca^{-3/2} \sin(mt)$ , se reduce cada término dentro del corchete, comenzando de izquierda a derecha. El primer término será entonces  $k^2/a^2$ , el segundo término será

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = m^2. \quad (4.44)$$

La combinación del tercer término y el cuarto término, y haciendo uso del factor de escala promedio

en un período, producen

$$3\kappa\dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa^2}{2H^2}\dot{\varphi}^4 = \frac{3}{4}\kappa m^2 C^2 a^{-3}, \quad (4.45)$$

notando que el quinto término es una constante por la presión, entonces en promedio este término es  $(3\kappa/4)\mathcal{O}(a^{-5})$ .

Por último el sexto término se calcula suponiendo que  $H \ll m$ , con  $\dot{\varphi} = Cma^{-3/2} \cos(mt)$ , entonces este término se escribe de la forma

$$2\kappa \frac{\dot{\varphi}}{H} \frac{dV}{d\varphi} = 2\kappa C a^{-3/2} m \cos(mt) m^2 \varphi \frac{\sqrt{6} a^{3/2}}{\sqrt{\kappa} C m} = 2\sqrt{6\kappa} m^2 C a^{-3/2} \sin(mt) \cos(mt). \quad (4.46)$$

Se observa que de los últimos 4 términos el dominante es el último, debido a que los otros tiene factores de escala como  $\mathcal{O}(a^{-3})$  o  $\mathcal{O}(a^{-5})$ , por lo tanto estos factores se ignoran en la ecuación, dando lugar a

$$\ddot{\tilde{\mu}}_s + \left[ \frac{k^2}{a^2} + m^2 + 2\sqrt{6\kappa} m^2 C a^{-3/2} \sin(mt) \cos(mt) \right] \tilde{\mu}_s = 0, \quad (4.47)$$

usando la identidad trigonométrica  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$  se obtiene

$$\ddot{\tilde{\mu}}_s + \left[ \frac{k^2}{a^2} + m^2 + \sqrt{6\kappa} m^2 C a^{-3/2} \sin(2mt) \right] \tilde{\mu}_s = 0. \quad (4.48)$$

Considerando el cambio de variable  $z = mt + \pi/4$ , la ec.(4.48) toma la forma [10]

$$\frac{d^2 \tilde{\mu}_s}{dz^2} + \left[ 1 + \frac{k^2}{m^2 a^2} - \sqrt{6\kappa} \varphi_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \cos(2z) \right] \tilde{\mu}_s = 0. \quad (4.49)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de Mathieu [9], y dado que se considerará solo el caso de las perturbaciones de campo escalar  $\mu_s = \mu_k$

$$\frac{d^2 \tilde{\mu}_k}{dz^2} + [A_k - 2q \cos(2z)] \tilde{\mu}_k = 0, \quad (4.50)$$

en donde  $k$  es el modo de Fourier,

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{6\kappa} \varphi_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \quad (4.51)$$

y

$$A_k = 1 + \frac{k^2}{m^2 a^2}. \quad (4.52)$$

## 4.4 Inestabilidad para campo escalar

Como se vió en las secciones anteriores, para definir una cota para el colapso de la perturbación, se usó la ecuación de estado, la cual se deriva de la velocidad del sonido en el medio de la perturbación. En el caso del campo escalar no se tiene esta opción, ya que la velocidad del sonido en este tipo de medio es la velocidad de la luz, por lo tanto con los criterios tomados antes, la formación de cualquier estructura en un universo dominado por campo escalar sería imposible. Así que se buscará una inestabilidad dentro del formalismo planteado en el capítulo 3, para generar un colapso esférico en un medio de campo escalar.

Considerando el esquema del capítulo 3 en el que el universo del fondo y el universo cerrado dentro de éste están dominados por campo escalar (tomando la misma geometría que en la figura FIG. 3.4), dentro de la fluctuación la dinámica está regida por la ec.(4.50)

$$\partial_z^2 \tilde{\mu}_k + [A_k - 2q \cos(2z)] \tilde{\mu}_k = 0,$$

en donde  $\tilde{\mu}_k$  está relacionada a la variable de Mukhanov-Sasaki por la ec.(4.42),  $A_k$  y  $q$  parámetros necesarios en el sistema dinámico,  $z$  es la variable que parametriza al sistema y  $k$  es el modo de vibración.

Por otro lado, la forma de  $q$  dada en la ec.(4.51), y la relación (4.31) llevan a la relación

$$q = 3 \frac{H}{m}, \quad (4.53)$$

por tanto, recordando la ec.(4.27),

$$q \ll 1. \quad (4.54)$$

En esta región ( $q \ll 1$ ), solamente hay una banda de inestabilidad, dada por [10]

$$1 - q < A_k < 1 + q, \quad (4.55)$$

despejando el número de onda asociado al modo de Fourier, con la forma de  $A_k$  de la ec.(4.52)

$$\begin{aligned} -q < 1 + \frac{k^2}{m^2 a^2} - 1 < 1 + q - 1 = q \\ -q < \frac{k^2}{m^2 a^2} < q, \end{aligned}$$

dado que no hay modos imaginarios en la banda de inestabilidad,  $\frac{k^2}{m^2 a^2} > 0$ , por lo tanto

$$0 < \frac{k^2}{m^2 a^2} < q \quad (4.56)$$

tomando la raíz cuadrada de esta última relación usando de la ec.(4.53) se obtiene

$$0 < \frac{k}{a} < \sqrt{3mH}, \quad (4.57)$$

es decir que, los número de onda físicos  $k/a$  que provocan una inestabilidad en la ecuación de Mathieu, tienen un valor crítico, que a la vez es máximo, en la región  $q < 1$ . Por tanto, la longitud crítica de inestabilidad será mínima, en el sentido que las fluctuaciones con longitudes menores a la crítica son estables. Así la longitud crítica se escribe como

$$\lambda_I = \frac{2\pi}{k_I} a(t), \quad (4.58)$$

por lo tanto, el radio de inestabilidad es

$$R_{dB} = \lambda_I = \frac{1}{\sqrt{3mH}}, \quad (4.59)$$

en donde  $R_{dB}$  es el radio de de Broglie asociado a la longitud de inestabilidad. En la FIG. 4.1 se muestra la evolución del horizonte cósmico y de los radios de las fluctuaciones para valores distintos del modo de Fourier.

Con la fluctuación dada como en la FIG. 3.4, se puede dar un criterio de colapso esférico

$$R_{dB} < R_{a,max} \leq a_{max}, \quad (4.60)$$

por lo tanto, en términos de la perturbación, siguiendo el análisis del capítulo 3, se obtiene

$$\frac{1}{3mH a_{max}^2} < \delta_H^{UH} \leq 1 \quad (4.61)$$

Tomando la fluctuación con su máxima expansión en el cruce del horizonte, de tal forma que  $a_{max} = 1/H$ , se obtiene

$$\frac{H}{3m} < \delta_H^{UH} \leq 1. \quad (4.62)$$

Entonces el criterio para colapso en términos del pico de la fluctuación de curvatura, el cual tiene cierta libertad por la definición hasta un factor arbitrario constante del radio de Jeans. Puede redefinirse a partir del reescalamiento del radio comóvil por un factor de  $4\pi$ , esto sin tener contradicción

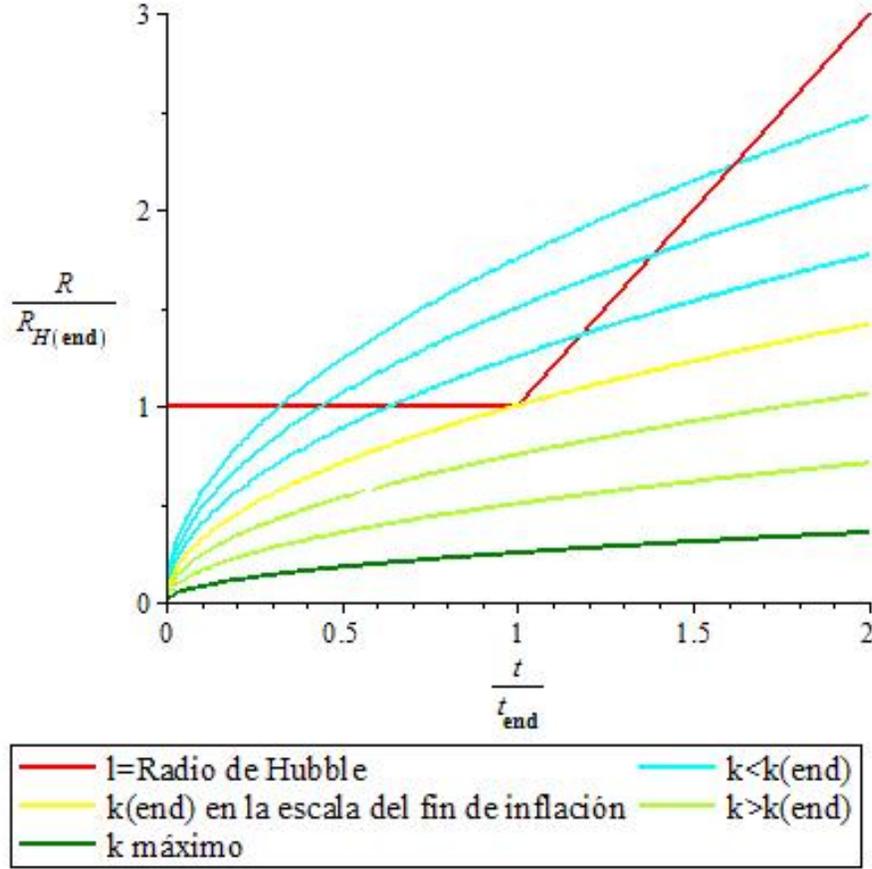


FIG. 4.1: La evolución de los radios  $R$  de las perturbaciones en el universo salen del horizonte cósmico, para  $k < k(\text{end})$ , en donde el tiempo  $t_{\text{end}}$ , se refiere al final de inflación, esto quiere decir que las fluctuaciones no están en contacto causal, por lo tanto durante este período conocido como congelamiento, las perturbaciones de materia no crecen. Dada la norma de expansión uniforme al tiempo del cruce del horizonte, los radios  $R$  de las perturbaciones que permiten el colapso en agujeros negros son las que están por debajo de la línea roja, i.e., los radios dentro del horizonte.

con la definición original. Así, la fluctuación de curvatura se escribe como

$$\zeta_c = -2 \ln \cos \left( \frac{\arcsin \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{H/3m}}{2} \right) < \zeta \leq \ln 2, \quad (4.63)$$

y el criterio en términos de la fluctuación de curvatura promedio queda como

$$\bar{\zeta}_c = \frac{1}{3} \ln \frac{3(\arcsin \sqrt{H/3m} - \sqrt{H/3m} \cos(\arcsin \sqrt{H/3m}))}{2(H/3m)^{3/2}} < \bar{\zeta} \leq \ln(3\pi) - 2 \ln(2), \quad (4.64)$$

donde  $\ln(3\pi) - 2 \ln(2) = 0.85704781339$ . Cabe señalar que estas últimas dos expresiones se obtienen

de utilizar la ec.(3.64) y la ec.(3.63).

## 4.5 Corte en la escala del espectro de potencias

En esta sección, se explorarán los efectos de considerar un valor crítico para la escala en la cual se produce la formación de estructura, ésto en el contexto de un universo dominado por un campo escalar como materia oscura y con constante cosmológica, i.e., un universo  $\Lambda$ SFDM.

En el universo temprano la amplitud de la perturbación de curvatura puede expresarse en términos del espectro de potencias

$$\zeta^2 = \mathcal{P}(k) = A_s \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s-1} \quad (4.65)$$

Una suposición para nuestro trabajo es que las fluctuaciones de curvatura  $\zeta^2$  son invariantes de escala en el cruce del horizonte, i.e., el espectro de potencias tampoco depende de la escala, por lo tanto [8]

$$n_s \cong 1. \quad (4.66)$$

Con esto, y teniendo el valor empírico [1]

$$A_s^{1/2} \simeq 4.71 \times 10^{-5}, \quad (4.67)$$

que corresponde al valor de las fluctuaciones de curvatura primordiales del espectro de potencias. Las observaciones acotan los valores de la curvatura de la fluctuación, dando lugar a un valor límite de las estructuras que se pueden formar en distintos escenarios. Explícitamente, se obtiene una expresión para la fluctuación crítica de campo escalar para el colapso a partir de la igualdad

$$\zeta_c \cong A_s^{1/2} \quad (4.68)$$

Dado que la forma de la fluctuación de curvatura crítica ec.(4.63) es equiparada a un valor empírico, la ecuación que se produce es de tipo trascendental. Sin embargo, se puede despejar un valor numérico para la relación entre el parámetro de Hubble y la masa del campo escalar, esto indica la época en la que las fluctuaciones con valor crítico  $\delta = \delta_c$  entran al horizonte cosmológico. Por lo tanto, se obtiene que para un campo escalar con masa  $m$

$$\frac{H_{c,m}}{m} = 0.293609. \quad (4.69)$$

Por otro lado, se puede encontrar el redshift para el cual las fluctuaciones que colapsan entran al horizonte cosmológico a partir de la ec.(2.86) para el Background en términos del corrimiento al rojo (redshift)  $z$

$$H^2 = \left( H_0^2 \Omega_{r,0} + H_0^2 \Omega_{m,0} \frac{1}{1+z} \right) (1+z)^4. \quad (4.70)$$

Asumiendo que los valores al día de hoy del factor de Hubble y de  $\Omega_m$  están dados de forma observacional por [1], se tienen

$$H_0 = 1.52 \times 10^{-32} eV, \quad (4.71)$$

$$\Omega_{m,0} h^2 = 0.143. \quad (4.72)$$

Considerando que existió una época de equivalencia, en la que las densidades de energía de la radiación y de materia eran iguales, se tiene

$$\frac{\rho_r(\mathbf{z}_{eq})}{\rho_m(\mathbf{z}_{eq})} = \frac{\Omega_{r,0} h^2}{\Omega_{m,0} h^2} (1 + \mathbf{z}_{eq}) = 1, \quad (4.73)$$

entonces, tomando las mediciones de [1] para el corrimiento al rojo de esta época,  $\mathbf{z}_{eq} = 3402$ , se llega al valor

$$\Omega_{r,0} h^2 = 4.2 \times 10^{-5}. \quad (4.74)$$

Con esto, y tomando la ec.(4.70) se obtiene una ecuación algebraica para  $\mathbf{z}$  para un valor dado  $H_{c,m}$ . Por lo tanto, para cada masa hay un corrimiento al rojo, del cual se generan estructuras. A corrimientos al rojo mayores que el crítico, las fluctuaciones presentan una menor amplitud con respecto a la fluctuación crítica del criterio de la ec.(4.63), según la ec.(4.69), y por lo tanto no se formarán estructuras de menor tamaño.

En consecuencia, el corte en la escala del espectro de potencias se calcula con

$$k_{c,m} = \frac{2\pi H_{c,m}}{1 + z_{c,m}}, \quad (4.75)$$

donde  $k_{c,m}$  es el modo de Fourier crítico en la fluctuación, para generar colapso. Sus valores numéricos para cada masa considerada como candidato a materia oscura se ilustran en Table 4.1

Table 4.1: Modos de Fourier para distintas masas.

Masa del campo $m$	$H_{c,m}$	$z_{c,m}$	$Mpc \cdot k_{c,m}$
$10^{-20} eV$	$0.293609 \times 10^{-20} eV$	$5.46 \times 10^6$	84.09
$10^{-22} eV$	$0.293609 \times 10^{-22} eV$	545,097	8.42
$10^{-24} eV$	$0.293609 \times 10^{-24} eV$	53,762	0.853
$10^{-25} eV$	$0.293609 \times 10^{-25} eV$	16,471.2	0.2787
$10^{-26} eV$	$0.293609 \times 10^{-26} eV$	4770.75	0.0962

En la figura siguiente se muestra un resultado independiente, en el cual se obtiene una escala de corte del espectro.

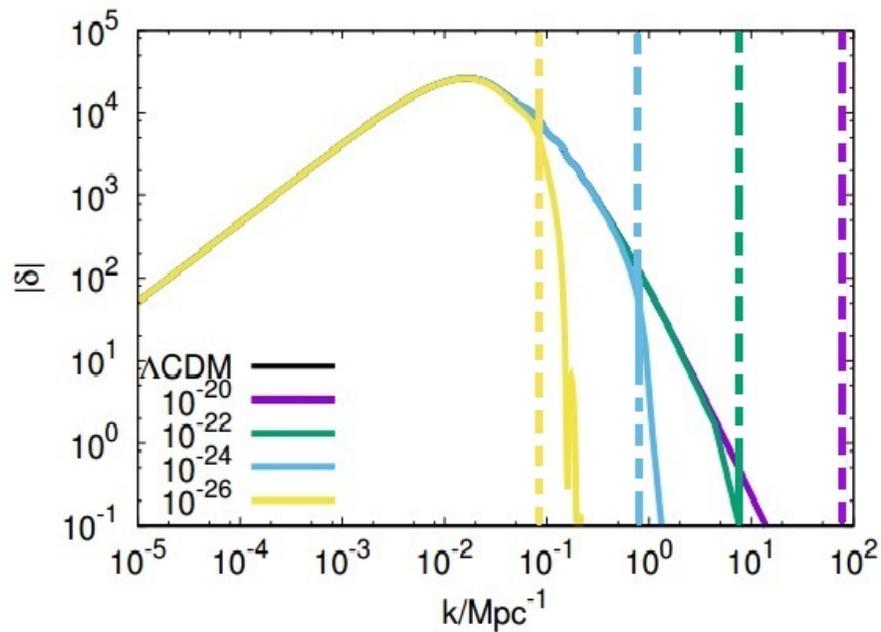


FIG. 4.3: Espectro de potencias para el modelo  $\Lambda$ SFDM en comparación con el modelo  $\Lambda$ CDM. El efecto más apreciable, es el conocido como el corte en el espectro de potencias para las masas más ligeras, en sus escalas más grandes. Las líneas discontinuas representan los cortes en la escala representados en la tabla 4.1. Dados estos cortes críticos del colapso calculados con el criterio analítico de la ec.(4.63), se observa una clara corrección del espectro calculado en la referencia [18], esto es, que la consideración de fluctuaciones de curvatura en universos curvos embebidos en universos planos dominados por campo escalar, en este resultado se produce un corte en la escala para la producción de estructuras, tales como agujeros negros (en el caso de épocas muy tempranas del universo), estrellas y galaxias, que implican perturbaciones más grandes de universos embebidos.



## capítulo 5

---

### Conclusiones

---

Los resultados analíticos de cualquier problema, dan una perspectiva matemática que permite conceptualizar un fenómeno, y con datos empíricos llegar al entendimiento del mismo. Por esto, este trabajo se dirigió a proponer un criterio de colapso de las perturbaciones de materia oscura, modelada con el campo escalar oscilante, que se expresa de forma analítica. Considerando importantes restricciones para el colapso, en el sentido de facilitar los cálculos, se tuvieron que ignorar términos subdominantes en expresiones como: el promedio de la densidad de la perturbación de campo escalar y el promedio de la presión, así como en el caso de polvo, del criterio de la ec.(3.52),  $f$  se determina considerando los efectos dentro de la fluctuación, tales como caústicas, inhomogeneidades, y desviaciones en la simetría esférica; estos efectos pueden afectar fuertemente la dinámica del colapso y prevenir el colapso en agujero negro de la región sobredensa antes de que la fluctuación llegue a colapsar a  $f$  veces la expansión máxima.

Al final de inflación se considera que las perturbaciones del campo escalar oscilante cumplen con la dinámica de la ec.(4.50). También en esta época el campo escalar inflatón se encuentra oscilando. A esta etapa del universo se le conoce como recalentamiento, y en esta etapa es donde el colapso de las perturbaciones puede generar agujeros negros primordiales. En la ec.(4.62) se da el criterio analítico para el colapso en agujeros negros de las perturbaciones del inflatón. En este criterio se entiende que las perturbaciones, en la norma de expansión uniforme con el background, y al momento del cruce del horizonte, i.e., cuando el radio de las fluctuaciones de materia es igual a su radio de Hubble, tienden a generar agujeros negros primordiales para  $\delta_H^{UH}/(4\pi^2) > H/3m$ . Como se vió en el capítulo anterior, esto presenta un criterio analítico simple para entender cuándo y cómo se genera estructura a partir de una perturbación de materia oscura que cumple con la dinámica del campo escalar.

En recalentamiento se tienen ciertas restricciones para los parámetros cosmológicos, tales restricciones se explican brevemente, y se toman de la referencia [10]. Al suponer que el campo inflatón decae inmediatamente después de inflación, y considerando que el potencial tiene la forma

$m^2\varphi^2/2$ , la temperatura cósmica en la época de recalentamiento debe ser muy grande, del orden de  $T_{rh} \sim 10^{16} GeV$ . Esta enorme temperatura conlleva problemas fenomenológicos, tales como la regeneración de reliquias no deseadas, como monopolos magnéticos en una transición de la época de gran unificación, o gravitinos masivos en súpergravedad. Nuevas constricciones que vienen de la época de nucleosíntesis en gravitinos inestables, limitan la temperatura del recalentamiento abajo de  $10^7 GeV$  (esto abre la posibilidad de una época en la que el universo se expande hasta alcanzar la temperatura límite de recalentamiento  $T_{rh} \sim 10^7 GeV$ ). Otro posible problema es la sobreproducción de agujeros negros primordiales, ya que, como se sabe no hay evidencia de este tipo de estructuras en las observaciones cosmológicas. Este problema puede ser revisado, considerando la temperatura límite en recalentamiento de  $T_{rh} \sim 10^7 GeV$ , lo que implica en el contexto del campo escalar oscilante, que el factor de Hubble está determinado por la temperatura del universo

$$H_{rh} = \frac{1}{m_{planck}} T_{rh}^2 \sim 10^{-4} GeV. \quad (5.1)$$

Usando el valor de la masa del inflatón, al final de la expansión acelerada (inflación), dado por [10] en la sección 3,

$$m \simeq 1.4 \times 10^{-6} m_{planck}, \quad (5.2)$$

se puede calcular la fluctuación de curvatura crítica haciendo uso de la ec.(4.63)

$$\zeta_{c,rh} = -2 \ln \cos \left( \frac{\arcsin \sqrt{H_{rh}/3m}}{2} \right) \sim 4.5 \times 10^{-12}. \quad (5.3)$$

Este valor está muy por debajo del valor de las fluctuaciones primordiales, i.e.

$$\zeta_{c,rh} \ll A_s^{1/2}, \quad (5.4)$$

por lo tanto, este tipo de fluctuaciones serían más comunes que las observadas. Sin embargo, las estructuras generadas por estas fluctuaciones son agujeros negros. Esto conduce, entonces, a una sobreproducción de agujeros negros primordiales, hecho que descarta al campo escalar oscilante como candidato a ser la materia dominante en la época del recalentamiento. Alternativamente, este resultado lleva a que la temperatura de recalentamiento no puede ser tan baja como  $T_{rh} \sim 10^7 GeV$ .

Por último, los resultados previamente obtenidos, dan la pauta para la exploración de nuevas formas de considerar las condiciones de la época de recalentamiento y sus implicaciones cósmicas. Así como la búsqueda de agujeros negros primordiales, en el caso de admitir que la temperatura de recalentamiento es  $T_{rh} \sim 10^7 GeV$ . En este caso, los agujeros negros pudieron haber existido en gran número, pero algún evento debió evaporarlos antes de la recombinación primordial, dejando algunos vestigios de su existencia. La otra posibilidad dentro del parámetro de temperatura considerado para

recalentamiento ( $T_{rh} \sim 10^7 GeV$ ), es que considerar al campo escalar oscilante, como el estudiado, no es una buena opción debido a la sobreproducción de estructuras primordiales. En este caso, se pueden incluir en el lagrangiano de materia, términos no sólo cuadráticos, sino términos de autointeracción del campo, así como términos adicionales de distintos campos y términos de interacción entre ellos.



---

## *Bibliografía*

---

- [1] ADE, P., AGHANIM, N., ARMITAGE-CAPLAN, C., ARNAUD, M., ASHDOWN, M., ATRIO-BARANDELA, F., AUMONT, J., BACCIGALUPI, C., BANDAY, A. J., BARREIRO, R., ET AL. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics* 571 (2014), A16.
- [2] ALLAHVERDI, R., BRANDENBERGER, R., CYR-RACINE, F.-Y., AND MAZUMDAR, A. Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 60 (2010), 27–51.
- [3] BARDEEN, J. M. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys. Rev. D* 22 (1980), 1882–1905.
- [4] BRANDENBERGER, R. H., FELDMAN, H., MUKHANOV, V. F., AND PROKOPEC, T. Gauge invariant cosmological perturbations: Theory and applications. In *The Origin of Structure in the Universe Chateau de Pont d’Oye, Belgium, April 27-May 2, 1992* (1992).
- [5] CARR, B. J. The Primordial black hole mass spectrum. *Astrophys. J.* 201 (1975), 1–19.
- [6] ELLIS, G., MAARTENS, R., AND MACCALLUM, M. *Relativistic Cosmology*. Relativistic Cosmology. Cambridge University Press, 2012.
- [7] HARADA, T., YOO, C.-M., AND KOHRI, K. Threshold of primordial black hole formation. *Phys. Rev. D* 88, 8 (2013), 084051. [Erratum: *Phys. Rev. D* 89, no. 2, 029903 (2014)].
- [8] HARRISON, E. R. Fluctuations at the threshold of classical cosmology. *Phys. Rev. D* 1 (1970), 2726–2730.
- [9] HE, W., AND MIAO, Y.-G. Mathieu equation and Elliptic curve. *Commun. Theor. Phys.* 58 (2012), 827–834.

- [10] JEDAMZIK, K., LEMOINE, M., AND MARTIN, J. Collapse of Small-Scale Density Perturbations during Preheating in Single Field Inflation. *JCAP* 1009 (2010), 034.
- [11] KOPP, M., HOFMANN, S., AND WELLER, J. Separate Universes Do Not Constrain Primordial Black Hole Formation. *Phys. Rev. D* 83 (2011), 124025.
- [12] LYTH, D., AND LIDDLE, A. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge University Press, 2009.
- [13] MALIK, K. A., AND WANDS, D. Cosmological perturbations. *Phys. Rept.* 475 (2009), 1–51.
- [14] MARTIN, J. Inflation and precision cosmology. *Braz. J. Phys.* 34 (2004), 1307–1321.
- [15] MISNER, C. W., AND SHARP, D. H. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.* 136 (1964), B571–B576.
- [16] MUKHANOV, V. F., AND CHIBISOV, G. V. The Vacuum energy and large scale structure of the universe. *Sov. Phys. JETP* 56 (1982), 258–265. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 83,475(1982)].
- [17] POISSON, E. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [18] UREÑA-LÓPEZ, L. A., AND GONZALEZ-MORALES, A. X. Towards accurate cosmological predictions for rapidly oscillating scalar fields as dark matter.