Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

De la Hipótesis Generalizada del Continuo a la Fórmula de Galvin-Hajnal

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

MANUEL ALEJANDRO ZÚÑIGA PÉREZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. GABRIELA CAMPERO ARENA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Índice general

Introducción

¿Qué sabemos de la exponenciación cardinal? Por la idempotencia del producto (y la suma) cardinal de un cardinal infinito, las operaciones de suma y producto cardinal se trivializan, pero, en el caso de la exponenciación, la historia es bastante distinta. Uno de los problemas que se relaciona íntimamente con tal problema es la famosa Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), así como la Hipótesis del Cardinal Singular (HCS). En el primer capítulo de esta tesis, veremos algunos resultados bastante conocidos sobre exponenciación cardinal, suponiendo primero la axiomática clásica de ZFE, para posteriormente ver algunos resultados asumiendo ambas hipótesis, pues los resultados antes demostrados sólo bajo ZFE pueden reforzarse e incluso trivializarse suponiendo alguna de las dos hipótesis. Comenzamos dando algunas propiedades bastante conocidas acerca de la cofinalidad de los ordinales y de los cardinales infinitos. Posteriormente damos el teorema que mejor expresa las propiedades de la exponenciación cardinal, desarrollada en la menor cantidad de casos posibles, todavía sin suponer ningún axioma salvo la axiomática clásica de ZFE. Dedicamos la última sección del primer capítulo a ver las consecuencias de suponer la Hipótesis Generalizada del Continuo y cómo ésta afecta a la forma de exponenciar cardinales primeramente con base finita 2, importante dada su relación con la potencia de un conjunto y, de hecho, la única necesaria en el caso de bases finitas, para posteriormente ver cómo se reduce la exponenciación entre dos cardnales infinitos. Por último, veremos las consecuencias de suponer ahora la Hipótesis del Cardinal Singular respecto a la misma operación.

En el segundo capítulo, daremos un repaso de las propiedades de los filtros e ideales, primero vistos en un contexto general, para luego verlos en el contexto de los ordinales. Esto, con el fin de definir lo que es un subconjunto cerrado y no acotado de un conjunto con un orden dado, llamados en la literatura como subconjuntos clubs, para posteriormente definir los subconjuntos estacionarios, que a su vez son la base para definir a un ideal de suma importancia. Ya con esa herramienta correctamente desarrollada y profundizada, procederemos a probar dos teoremas, debidos a Silver, los cuales nos permiten saber qué tanto se necesita pedir para que, bajo ciertas condiciones, el hecho de que la Hipótesis Generalizada del Continuo o la del Cardinal Singular se cumpla para todos los cardinales bajo un cierto cardinal, implique que se cumple para el mismo cardinal. Con ese fin, daremos una serie de resultados relacionados directamente con el concepto de familias casi ajenas de funciones, en el producto de los cardinales involucrados en la prueba que buscamos, con el fin de dar estimaciones acerca del tamaño de las exponenciaciones de cardinales sobre los cuales tenemos las hipótesis de los dos teoremas de Silver.

Finalmente, en el tercer capítulo, intentaremos dar una generalización de uno de los teoremas de Silver vistos en el capítulo 2. Con ese objetivo, primero daremos una introducción a la llamada Teoría de Ramsey, con el fin de concluir un teorema conocido como el Teorema de Partición de Erdös-Rado, pasando por propiedades y construcciones de árboles cuyos elementos sean conjuntos de ordinales. Posteriormente, retomaremos a los ideales, nuevamente vistos de manera general y no sólo como ideales sobre ordinales, para ver su uso cuando se consideran relaciones definidas sobre sus respectivos conjuntos base, desarrollando un método para reducir tales relaciones módulo el ideal, o, dicho de otra forma, dar una medida de qué tan pequeños son los subconjuntos del conjunto base, respecto a la relación y al ideal dado. Finalmente, y tomando nuevamente las anteriores secciones como una herramienta, demostraremos los resultados que nos permitirán probar a su vez la tan ansiada generalización del teorema de Silver. Ésto concluirá en la prueba de la llamada Fórmula de Galvin-Hajnal, donde nuevamente trataremos con funciones casi ajenas cuyo tamaño sea igual al tamaño del cardinal que queremos estimar, y donde también aplicaremos el ideal construido en el capítulo 2 con base en los subconjuntos estacionarios, mostrando así que son la herramienta fundamental sobre la cual se apoyan los resultados fuertes del presente trabajo.

Para comprender la lectura del presente escrito, se recomienda tener conocimiento de los temas desarrollados en los dos primeros cursos de Teoría de Conjuntos, más específicamente, haber profundizado en los conceptos y propiedades de los ordinales y los cardinales, y las operaciones aritméticas entre los mismos. Además, aún cuando se presenta una introducción a la cofinalidad, es recomedable tener ya cierta experiencia con el concepto y las propiedades de la misma. Por último, es conveniente haber estudiado el comportamiento de los órdenes parciales y, más específicamente, de los árboles, cuyo uso es clave en el desarrollo del tercer capítulo.

Capítulo I

La Hipótesis Generalizada del Continuo y sus consecuencias en la Exponenciación Cardinal

La exponenciación cardinal, especialmente cuando involucra cardinales infinitos, es una operación muy importante en la Teoría de Conjuntos, además de ser muy importante en la historia de las mismas. Uno de los enunciados más famosos de las matemáticas es la Hipótesis Generalizada del Continuo, denotada por HGC, la cual establece que para cualquier ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Como fue mencionado en la introducción, en este capítulo veremos cómo la HGC afecta la operación de la exponenciación cardinal. Para ello, primero daremos un repaso de un concepto muy útil para calcular dicha exponenciación cuando sólo suponemos los axiomas clásicos de ZFE.

1.1 | Cofinalidad

El concepto de cofinalidad surge para comparar la manera en la que termina el aspecto de los ordinales.

Definición 1.1 *Sean α y β ordinales. Decimos que α es cofinal en β si y sólo si existe una función $f : \alpha \to \beta$ de forma que para cada $\delta \in \beta$ existe $\gamma \in \alpha$ tal que $\delta \leq f(\gamma)$.*

Directamente de la definición, podemos deducir que cualquier ordinal es cofinal con él mismo. Así, el conjunto de ordinales cofinales a un ordinal fijo es no vacío, lo que nos permite dar la definición de cofinalidad.

Definición 1.2 *Sea α un ordinal. La cofinalidad de α, que se denota $cf(\alpha)$, es el mínimo ordinal β tal que β es cofinal en α. En otras palabras, la cofinalidad de un ordinal α se define como*

$$cf(\alpha) = \bigcap\{\beta : \beta \text{ es cofinal en } \alpha)\}.$$

Recordaremos tres de las características principales de la cofinalidad, para ello primero enunciaremos otras propiedades sencillas de probar y que aparecen en [Ca]. Antes, vale la pena recordar que un subconjunto A de un ordinal α es no acotado si para cada β en α se tiene que hay un γ en A de tal forma que $\beta < \gamma$ y que una función con codominio α es no acotada en α si su imagen es un subconjunto no acotado de α.

Lema 1.3 *Sean α y β ordinales y $f : \alpha \to \beta$. Entonces f es no acotada en β si y sólo si $\bigcup f[\alpha] = \beta$.*

Lema 1.4 *Sean α un ordinal, β un ordinal límite y $f : \alpha \to \beta$. Entonces $f[\alpha]$ es no acotado en β si y sólo si f es testigo de que α es cofinal en β.*

Lema 1.5 *Sea α un ordinal y β un ordinal límite. Entonces α es cofinal en β si y sólo existe $f : \alpha \to \beta$ tal que $f[\alpha]$ es no acotado en β.*

Observación 1

(i) El hecho de que en los últimos dos lemas sea necesario suponer que β es un ordinal límite se desprende de que la definición de no acotado incluye una desigualdad estricta, a diferencia de la desigualdad que aparece en la definición de cofinal.

(ii) El único ordinal con cofinalidad 0 es justamente el 0, lo cual se sigue de que la imagen del vacío bajo cualquier función es el vacío.

(iii) Relacionado a los dos incisos anteriores, si consideramos $\beta = \alpha + 1$ un ordinal sucesor, la función $f : 1 \to \beta$ dada por $f(0) = \alpha$ es cofinal en β, de donde tenemos que 1 es cofinal en cualquier ordinal sucesor, y por el inciso anterior, podemos concluir que la cofinalidad de cualquier ordinal sucesor es 1.

(iv) Por lo dicho tras la definición de ser cofinal, obtenemos que, para cualquier ordinal β, $cf(\beta) \leq \beta$. Por el inciso anterior, sabemos que en el caso de los ordinales sucesores distintos de 1, esta desigualdad es estricta, y para el caso del 0 y el 1 se da la igualdad. El caso de los límites es de hecho más complicado, como cabría esperar, pues habrá casos en los que la igualdad se cumpla y otros en los que sea estricta, como veremos más adelante.

(v) Si γ es un ordinal límite, por los lemas anteriores se tiene que ningún ordinal finito puede ser cofinal en γ, de aquí que $\omega \leq cf(\gamma)$.

Con estos lemas y observaciones en mente, ya podemos probar las tres propiedades principales de la cofinalidad.

Lema 1.6 *Sea β un ordinal cualquiera. Existe una función $f : cf(\beta) \to \beta$ tal que f es cofinal y estrictamente creciente.*

Demostración Si $\beta = 0$, la función vacía constituye un ejemplo de lo pedido. Por otro lado, si β es un ordinal sucesor, por lo dicho en el tercer inciso de la observación, también obtenemos una función con las propiedades requeridas.

Supongamos pues que β es un ordinal límite.

Por la definición, podemos considerar $g : cf(\beta) \to \beta$ cofinal. Por los lemas mencionados anteriormente, se tiene que $g[cf(\beta)]$ es no acotado en β y que $\bigcup g[\beta] = \beta$. Definimos, por recursión transfinita la función f con dominio $cf(\beta)$ dada por

$$f(\gamma) := max\{g(\gamma), sup\{f(\delta) + 1 : \delta < \gamma\}\}.$$

Primero probaremos que $f : cf(\beta) \to \beta$ por inducción sobre $\gamma \in cf(\beta)$. Sea $\gamma \in \beta$, por definición, $g(\gamma) \in \beta$ y, por la hipótesis de inducción, para cada $\zeta \in \gamma$ se tiene que $f(\zeta) \in \beta$, de donde, como β es límite, para cada $\zeta \in \gamma$, $f(\zeta) + 1 \in \beta$. Supongamos entonces que el supremo de tales sucesores no está en β. Entonces, como cada elemento del conjunto sí es un elemento de β, se tiene que $sup\{f(\zeta) + 1 : \zeta \in \gamma\} = \beta$, pues es un ordinal contenido en β que no es su elemento. Pero en ese caso $f \restriction_\gamma : \gamma \to \beta$ cumple que $\bigcup f \restriction_\beta [\gamma] = \beta$. Por el lema 1.5, se tiene que γ es cofinal en β, lo que contradice la minimalidad de $cf(\beta)$. Concluimos entonces que tal supremo sí está en β y, por tanto, por inducción, para cada $\gamma \in cf(\beta)$, $f(\gamma) \in \beta$.

Ahora veamos que f efectivamente es cofinal en β y estrictamente creciente. Sea $\delta \in \beta$, como g es cofinal en β, existe $\gamma \in cf(\beta)$ tal que $\delta \leq g(\gamma)$. Como por construcción de f se tiene que $g(\gamma) \leq f(\gamma)$, tenemos que $\delta \leq f(\gamma)$. Ahora bien, sean $\gamma, \delta \in cf(\beta)$ y supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $\gamma < \delta$, entonces tenemos que $f(\gamma) < f(\gamma) + 1 \leq f(\delta)$. Concluimos entonces que f es la función buscada.

$\dashv$

Las funciones cofinales y estrictamente crecientes también determinan la cofinalidad de los ordinales de la siguiente manera.

Lema 1.7 *Sean α y β ordinales tales que existe $f : \alpha \to \beta$ cofinal y estrictamente creciente, entonces $cf(\alpha) = cf(\beta)$.*

Demostración Sea f la función mencionada en las hipótesis y sea $g : cf(\alpha) \to \alpha$ cofinal. Se puede ver entonces que $f \circ g : cf(\alpha) \to \beta$ es cofinal en β, de donde podemos concluir que $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$.

Ahora sea $h : cf(\beta) \to \beta$ cofinal. Para cada $\gamma \in \beta$, se tiene que $\{\delta \in \alpha : h(\gamma) < f(\delta)\} \neq \varnothing$ pues $h(\gamma) \in \beta$ y f es cofinal y estrictamente creciente. Así, podemos definir $m : cf(\beta) \to \alpha$ de forma que si $\zeta \in cf(\beta)$, entonces $m(\zeta) := min\{\delta \in \alpha : h(\zeta) < f(\delta)\}$. Afirmamos que m es cofinal en α.

En efecto, sea $\eta \in \alpha$, entonces tenemos que $f(\eta) \in \beta$ y, como h es cofinal en β, existe $\epsilon \in cf(\beta)$ tal que $f(\eta) \leq h(\epsilon)$. Consideremos entonces $m(\epsilon)$, por la definición, se tiene que $f(\eta) \leq h(\epsilon) \leq f(m(\epsilon))$ y, por tanto, que $f(\eta) \leq f(m(\epsilon))$. Aseguramos que entonces $\eta \leq m(\epsilon)$. Supongamos que, por el contrario, $m(\epsilon) < \eta$, como f es estrictamente creciente, se tiene entonces que $f(m(\epsilon)) < f(\eta)$ contradiciendo las desigualdades anteriores. Concluimos entonces que $\eta \leq m(\epsilon)$, de donde m es cofinal en α. por lo tanto, $cf(\alpha) \leq cf(\beta)$ y concluimos que $cf(\alpha) = cf(\beta)$.

$\dashv$

Un corolario muy útil del lema anterior es el siguiente.

Corolario 1.8 *Sean α y γ ordinales. Si existe $\{\beta_i : i < \gamma\}$ una sucesión no decreciente de ordinales en α tal que $\bigcup\{\beta_i : i < \gamma\} = \alpha$, entonces $cf(\gamma) = cf(\alpha)$.*

Por último, veremos la propiedad más importante de la cofinalidad, pero esta vez pensada ya en el ámbito de los cardinales. De hecho, en la literatura muchas veces ésta es la definición de cofinalidad de un cardinal.

Teorema 1.9 *Sea κ un cardinal infinito. La cofinalidad de κ es el menor cardinal λ tal que κ puede escribirse como la unión de λ subconjuntos de κ, cada uno de cardinalidad menor a κ.*

Demostración Primero veamos que $cf(\kappa)$ es un cardinal. Por definición, $cf(\kappa)$ es un ordinal. Ahora bien, si $cf(\kappa)$ no fuera un cardinal, existe un ordinal $\delta < cf(\kappa)$ tal que δ es equipotente con $cf(\kappa)$, pero entonces, componiendo la biyección con la función cofinal de $cf(\kappa)$ en κ, obtendríamos que δ es cofinal en κ, lo cual contradice la minimalidad de $cf(\kappa)$. Por lo tanto, $cf(\kappa)$ es un cardinal. Ahora veamos que existe una familia de $cf(\kappa)$ subconjuntos con cardinalidad menor a κ cuya unión es κ. Sea $f : cf(\kappa) \to \kappa$ cofinal. Entonces se tiene que $\bigcup f[cf(\kappa)] = \kappa$. Definimos, para cada $\zeta \in \kappa$ el conjunto $S_\zeta = f(\zeta)$, entonces tenemos que $f(\zeta) \subseteq \kappa$, que $|f(\zeta)| < \kappa$ y que $\bigcup\{f(\zeta) : \zeta < cf(\kappa)\} = \bigcup f[cf(\kappa)] = \kappa$, de donde queda probada la existencia de la familia de subconjuntos buscada.

Ahora supongamos que existe tal familia de conjuntos para cierto cardinal λ. Si se tiene que $\kappa \leq \lambda$, entonces, por observaciones previas, $cf(\kappa) \leq \lambda$. Así, podemos suponer que $\lambda < \kappa$.

En ese caso, se tiene que

$$\kappa = \left|\bigcup\{S_\zeta : \zeta < \lambda\}\right| \leq \sum_{\zeta<\lambda} |S_\zeta| = \lambda \cdot sup\{|S_\zeta| : \zeta < \lambda\} \leq \lambda\kappa = \kappa.$$

Concluimos que $sup\{|S_\zeta| : \zeta < \lambda\} = \kappa$. Definimos entonces $f : \lambda \to \kappa$ de manera que si $\zeta < \lambda$, entonces $f(\zeta) = |S_\zeta|$ y, por la igualdad arriba obtenida, se tiene que $\bigcup f[\lambda] = \bigcup\{|S_\zeta| : \zeta < \lambda\} = \kappa$, y se concluye que $cf(\kappa) \leq \lambda$.

$\dashv$

Ejemplo 1 *Considérese el cardinal $\aleph_\omega$ y la función $f : \omega \to \aleph_\omega$ dada por $f(n) = \aleph_n$. Entonces se tiene que f es cofinal en $\aleph_\omega$, de donde se tiene que $cf(\aleph_\omega) = \omega$. Por tanto, aún entre los cardinales infinitos, existen algunos cuya cofinalidad es estrictamente menor al mismo cardinal. Lo que motiva la siguiente definición.*

Definición 1.10 *Un cardinal κ es regular si y sólo si $cf(\kappa) = \kappa$. En caso contrario, κ será llamado cardinal singular.*

Por la observación anterior, sabemos que efectivamente existen cardinales infinitos singulares, y en la siguiente proposición veremos que hay una clase de cardinales infinitos que son regulares.

Proposición 1.11 *Todo cardinal infinito sucesor es regular.*

Demostración Sea κ un cardinal sucesor infinito, entonces existe un cardinal infinito λ tal que $\kappa = \lambda^+$. Supongamos entonces que $cf(\kappa) < \kappa$, entonces $cf(\kappa) \leq \lambda$ y, por la prueba del lema anterior, podemos hallar una familia de cardinales $\{\eta_\zeta : \zeta < \lambda\}$ cada uno menor que κ tal que

$$\kappa = \sum_{\zeta<\lambda} \eta_\zeta \leq \sum_{\zeta<\lambda} \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$$

lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que κ es regular.

$\dashv$

Con esto concluimos nuestra revisión de los resultados más importantes de la cofinalidad de los ordinales.

1.2 | Exponenciación cardinal sin HGC

El teorema principal acerca de la exponenciación cardinal, sin suponer ningún axioma adicional a la teoría de ZFE es el siguiente.

Teorema 1.12 (Teorema de Exponenciación) *Sea λ un cardinal infinito. Para cada cardinal infinito κ, el valor de κ^λ se calcula de la forma siguiente:*

(i) *Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.*

(ii) *Si existe $\mu < \kappa$ tal que $\kappa \leq \mu^\lambda$, entonces $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$.*

(iii) *Si para toda $\mu < \kappa$ se tiene que $\mu^\lambda < \kappa$ y $\lambda < cf(\kappa)$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa$.*

(iv) *Si para toda $\mu < \kappa$ se tiene que $\mu^\lambda < \kappa$ y $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)}$.*

Para ver su prueba, repasaremos algunas otras propiedades de la exponenciación cardinal, y veremos la llamada función del continuo, relacionada directamente con la HGC.

Teorema 1.13 *Sea κ un cardinal infinito. Se cumplen las siguientes propiedades*

(i) $\kappa < cf(2^\kappa)$,

(ii) $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$, *y*

(iii) $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$, *donde* $2^{<\kappa} = sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa\}$.

Demostración Sea κ un cardinal infinito.

(i) Supongamos que $cf(2^\kappa) \leq \kappa$, entonces, por el teorema 1.9, podemos hallar una familia de cardinales $\{\lambda_\alpha : \alpha < cf(2^\kappa)\}$ tal que cada λ_α es menor que 2^κ y cuya suma es 2^κ. Entonces se tiene que $2^\kappa = \sum_{\alpha < cf(2^\kappa)} \lambda_\alpha < \prod_{\alpha < cf(2^\kappa)} 2^\kappa = 2^{\kappa \cdot cf(2^\kappa)} = 2^\kappa$, donde la primer desigualdad es válida por el teorema de König y la condición sobre los cardinales λ_α y la última igualdad por la suposición inicial y porque κ es cardinal infinito. Pero esto es una clara contradicción. Por lo que $\kappa < cf(2^\kappa)$.

(ii) Nuevamente, por el teorema 1.9, tenemos que existe $\{\kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ familia de cardinales, cada uno menor que κ tal que su suma es κ.

Entonces tenemos que $\kappa = \Sigma\{\kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\} < \prod_{\alpha < cf(\kappa)} \kappa_\alpha \leq \kappa^{cf(\kappa)}$, de donde se obtiene que $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.

(iii) Para cada $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda \leq 2^\kappa$, de donde $(2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} \leq 2^{\kappa cf(\kappa)} = 2^\kappa$.

Por otra parte, utilizando la familia mencionada en el primer inciso, tenemos que $\kappa = \Sigma\{\kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$, de donde

$$2^\kappa = 2^{\Sigma\{\kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}} = \prod_{\alpha < cf(\kappa)} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha < cf(\kappa)} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}.$$

Por lo tanto, al tener ambas desigualdades, podemos concluir que $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$.

$\dashv$

Antes de continuar nuestra exposición de propiedades y lemas previos a la prueba del teorema de exponenciación enunciado al inicio de la sección, veremos una definición íntimamente relacionada con la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Definición 1.14 *Al funcional con dominio en los cardinales tal que a cada cardinal κ, le asocia el cardinal 2^κ lo llamaremos el funcional del continuo.*

Con esta definición, podemos dar un sencillo corolario al teorema anterior.

Corolario 1.15 *Si κ es un cardinal singular y existe un cardinal λ tal que el funcional del continuo restringido a κ es eventualmente constante estacionándose en λ, es decir, que existe $\nu < \kappa$ tal que para cada $\eta > \nu$ con $\eta < \kappa$ se cumple que $2^\eta = \lambda$, entonces $2^\kappa = \lambda$.*

Demostración Como κ es singular, sea μ cardinal tal que $cf(\kappa) \leq \mu < \kappa$ y $2^{<\kappa} = \lambda = 2^\mu$. Entonces, por el tercer inciso del teorema anterior

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = (2^\mu)^{cf(\kappa)} = 2^{\mu cf(\kappa)} = 2^\mu = \lambda,$$

lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Observación 2

(i) Con ayuda del primer inciso del teorema 1.13, podemos obtener cardinales que NO pueden ser iguales a $2^{\aleph_0}$, a saber, cualquier ordinal de cofinalidad numerable.

(ii) De un modo más general, podemos concluir que, dado κ un cardinal cualquiera, ningún cardinal λ con cofinalidad no mayor a κ puede ser igual a 2^κ.

(iii) Para el caso de un cardinal sucesor $\kappa = \lambda^+$, del tercer inciso del teorema 1.13 se sigue fácilmente, del hecho de que $2^{<\kappa} = 2^\lambda$, puesto que en ese caso $(2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = (2^\lambda)^\kappa = 2^\kappa$, donde la segunda igualdad es válida dado que κ es cardinal sucesor y podemos aplicar la proposición 1.11.

Continuando con la discusión del tercer inciso de la observación previa, en el caso de considerar como base de la exponenciación a un cardinal sucesor, podemos enunciar y demostrar una fórmula recursiva para el cálculo de esta exponenciación, conocida como fórmula de Hausdorff. Para ello, probamos primero un lema.

Lema 1.16 *Sea κ un cardinal infinito y $\lambda < cf(\kappa)$. Entonces ${}^{\lambda}\kappa = \bigcup\{{}^{\lambda}\gamma : \gamma \in \kappa\}$.*

Demostración Como para cada $\gamma \in \kappa$ se tiene que $\gamma \subseteq \kappa$, cualquier función f elemento de ${}^{\lambda}\gamma$ puede verse como una función con dominio λ y codominio κ.

Ahora, dada f una función en ${}^{\lambda}\kappa$, como $\lambda < cf(\kappa)$, se tiene que la función f es acotada, es decir, existe $\gamma \in \kappa$ tal que $f[\lambda] \subseteq \gamma$, de donde podemos ver a f como una función con dominio λ y codominio γ. Así, concluimos que $f \in \bigcup\{{}^{\lambda}\gamma : \gamma \in \kappa\}$.

$\dashv$

Teorema 1.17 (Fórmula de Hausdorff) *Sean κ un cardinal mayor a 1 y λ un cardinal infinito. Se tiene que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda\kappa^+$.*

Demostración Partimos en casos, los cuales surgen de la comparación entre κ^+ y λ.

Si se tiene que $\kappa^+ \leq \lambda$, entonces, del hecho de que $2 \leq \kappa < \kappa^+ \leq \lambda < 2^\lambda$ podemos obtener que $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$. Así, obtenemos que tanto κ^λ como $(\kappa^+)^\lambda$ son 2^λ, y como $\kappa^+ \leq \lambda < 2^\lambda$, obtenemos que $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda\kappa^+$.

Por otro lado, en el caso en el que $\lambda < \kappa^+$, probaremos la doble desigualdad para concluir la fórmula dada.

Por la proposición 1.11, sabemos que $cf(\kappa^+) = \kappa^+$ y, por el lema anterior, dado que $\lambda < cf(\kappa^+)$, ${}^{\lambda}\kappa^+ = \bigcup\{{}^{\lambda}\gamma : \gamma \in \kappa^+\}$. Así,

$$(\kappa^+)^\lambda = |{}^{\lambda}\kappa^+| = |\bigcup\{{}^{\lambda}\gamma : \gamma \in \kappa^+\}| \leq \Sigma\{|{}^{\lambda}\gamma| : \gamma \in \kappa^+\} = \Sigma\{|\gamma|^\lambda : \gamma \in \kappa^+\}.$$

Pero como dado $\gamma \in \kappa^+$ se tiene que $|\gamma| < \kappa^+$, para cada $\gamma \in \kappa^+$, $|\gamma|^\lambda \leq \kappa^\lambda$. Por tanto, el último miembro de la igualdad previa es menor o igual a $\Sigma\{\kappa^\lambda : \gamma \in \kappa^+\} = \kappa^\lambda\kappa^+$.

Por otra parte, como $\kappa < \kappa^+$, se tiene que $\kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda$ y, como $\kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$, podemos concluir que $\kappa^\lambda\kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda(\kappa^+)^\lambda = (\kappa^+)^\lambda$, lo que concluye la prueba de la fórmula.

$\dashv$

Podemos reducir notación utilizando la siguiente definición:

Definición 1.18 *Sea κ un cardinal infinito. Definimos el funcional gimel para κ, denotado como $\gimel(\kappa)$, como el cardinal $\kappa^{cf(\kappa)}$.*

Respecto a cardinales finitos utilizados como base de la exponenciación, el más importante (y de hecho el único necesario) es el que nos lleva a calcular el cardinal de la potencia, es decir, el 2, del cual también podemos enunciar un pequeño teorema sólo utilizando los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos.

Teorema 1.19 *Sea κ un cardinal infinito.*

(i) Si κ es un cardinal sucesor, entonces $2^\kappa = \gimel(\kappa)$.

(ii) Si κ es un cardinal límite y la función del continuo es eventualmente constante bajo κ, entonces $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

(iii) Si κ es un cardinal límite y la función del continuo bajo κ no es eventualmente constante, entonces se tiene que $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$

Demostración

(i) Como κ es un cardinal sucesor, entonces en particular es regular, es decir, $cf(\kappa) = \kappa$, y como $2^\kappa = \kappa^\kappa$, obtenemos la igualdad deseada.

(ii) Por el corolario 1.15, sabemos que $2^\kappa = \mu$, donde μ es la constante dada por la hipótesis. Pero, en ese caso, $2^{<\kappa} = \mu$, de donde se sigue lo pedido.

(iii) Como el funcional del continuo no es eventualmente constante bajo κ, se tiene que $2^{<\kappa}$ es el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales, en otras palabras, la función $f : \kappa \to 2^{<\kappa}$ definida como $f(\lambda) = 2^\lambda$ es cofinal y estrictamente creciente en $2^{<\kappa}$. Así, por el lema 1.7, obtenemos que $cf(\kappa) = cf(2^{<\kappa})$ y, por tanto, por el tercer inciso del teorema 1.13, se obtiene la igualdad pedida.

$\dashv$

Antes de finalmente probar el teorema principal de la sección, probaremos otro lema, esta vez relacionado a otro tipo de cardinal, parecido al ya definido $2^{<\kappa}$.

Lema 1.20 *Si κ es un cardinal límite y $cf(\kappa) \leq \lambda$, entonces $\kappa^\lambda = ((<\kappa)^\lambda)^{cf(\kappa)}$, donde $(<\kappa)^\lambda$ se define como $sup\{\mu^\lambda : \mu < \kappa\}$.*

Demostración Sea $\{\kappa_i : i < cf(\kappa)\}$ una familia de cardinales, cada uno menor que κ, tal que $\kappa = \Sigma\{\kappa_i : i < cf(\kappa)\}$. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que cada miembro de la familia es mayor a 1, entonces se tiene que $\sum_{i<cf(\kappa)} \kappa_i \leq \prod_{i<cf(\kappa)} \kappa_i$ y, por tanto, que $\kappa^\lambda \leq (\prod_{i<cf(\kappa)} \kappa_i)^\lambda = \prod_{i<cf(\kappa)} \kappa_i^\lambda \leq \prod_{i<cf(\kappa)} (<\kappa)^\lambda = ((<\kappa)^\lambda)^{cf(\kappa)} \leq (\kappa^\lambda)^{cf(\kappa)} = \kappa^{\lambda \cdot cf(\kappa)} = \kappa^\lambda$. Así, se concluye la demostración, pues el primer y el último miembro de la serie de desigualdades es κ^λ.

$\dashv$

Con todas estas propiedades en mente, finalmente estaremos listos para dar una prueba del teorema enunciado al inicio de la sección.

Teorema [Teorema de Exponenciación] Sea λ un cardinal infinito. Para cada cardinal infinito κ, el valor de κ^λ se calcula de la forma siguiente:

(i) Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

(ii) Si existe $\mu < \kappa$ tal que $\kappa \leq \mu^\lambda$, entonces $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$.

(iii) Si para toda $\mu < \kappa$ se tiene que $\mu^\lambda < \kappa$ y $\lambda < cf(\kappa)$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa$.

(iv) Si para toda $\mu < \kappa$ se tiene que $\mu^\lambda < \kappa$ y $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)}$.

Demostración

(i) Se sigue del inicio de la prueba de la fórmula de Hausdorff, omitiendo la existencia de κ^+ en las desigualdades.

(ii) Como $\mu < \kappa \leq \mu^\lambda$, se tiene que $\mu^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (\mu^\lambda)^\lambda = \mu^\lambda$, de donde $\mu^\lambda = \kappa^\lambda$.

(iii) Primero observemos que, si κ es cardinal sucesor, entonces es regular, de donde el hecho de que $\kappa > \lambda$, implica ya que $\lambda < cf(\kappa)$. Así, si suponemos que $\kappa = \nu^+$, entonces, aplicando la fórmula de Hausdorff, $\kappa = \nu^+ \leq (\nu^+)^\lambda = \nu^\lambda \nu^+ \leq \kappa\kappa = \kappa$, donde la última desigualdad es válida, pues $\nu < \kappa$ y aplicamos la hipótesis. Como nuevamente los extremos de la serie de desigualdades son iguales, se concluye lo pedido.

Ahora supongamos que κ es cardinal límite y que $\lambda < cf(\kappa)$, entonces, por el lema 1.16, podemos concluir que $\kappa^\lambda = |\bigcup\{^\lambda\alpha : \alpha \in \kappa\}| \leq \Sigma\{|\alpha|^\lambda : \alpha \in \kappa\} = sup\{|\alpha|^\lambda : \alpha \in \kappa\}\kappa \leq \kappa\kappa = \kappa$, donde la última desigualdad es válida por la hipótesis y porque para cada $\alpha \in \kappa$ se tiene que $|\alpha| < \kappa$. Por tanto, como ya se tiene que $\kappa \leq \kappa^\lambda$, se sigue la igualdad deseada.

(iv) Ahora supongamos lo mismo que en el inciso anterior, salvo el hecho de que esta vez $cf(\kappa) \leq \lambda$, entonces necesariamente κ es cardinal límite. Así, por el lema anterior $\kappa^\lambda = ((< \kappa)^\lambda)^{cf(\kappa)} \leq \kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^\lambda$, donde se aplica la hipótesis para obtener la penúltima desigualdad. Concluimos entonces que $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)}$.

$\dashv$

Con ayuda del funcional $\beth$, podemos obtener una forma más compacta y concisa del teorema ya probado.

Corolario 1.21 *Para cualesquiera cardinales infinitos κ y λ, κ^λ es 2^λ, o κ, o $\beth(\mu)$ para algún μ tal que $cf(\mu) \leq \lambda < \mu$.*

Demostración Sean κ y λ cardinales infinitos y supongamos que $\kappa^\lambda \neq 2^\lambda$ y $\kappa^\lambda \neq \kappa$, entonces nos encontramos en los casos (ii) y (iv) del Teorema de Exponenciación. En el caso (iv) se tiene que κ cumple que $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$ y $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)} = \beth(\kappa)$.

Entonces supongamos que nos encontramos en el caso (ii), y sea μ el menor cardinal tal que $\mu^\lambda = \kappa^\lambda$. Si $\mu \leq \lambda$, entonces se tiene que $\mu^\lambda = 2^\lambda$, de donde $\kappa^\lambda = 2^\lambda$, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, tenemos que $\lambda < \mu$.

Por otro lado, si existe $\eta < \mu$ tal que $\mu \leq \eta^\lambda$, por el inciso (ii) del mismo teorema, tendremos que $\mu^\lambda = \eta^\lambda$, de donde $\kappa^\lambda = \eta^\lambda$ con $\eta < \mu$, contradiciendo la minimalidad de μ. Podemos entonces concluir que se cumplen las 2 condiciones de los incisos (iii) y (iv) del Teorema 1.12. Así, si suponemos ahora que $\lambda < cf(\mu)$, entonces tendremos que $\mu^\lambda = \mu$ y, por tanto, $\kappa \leq \kappa^\lambda = \mu^\lambda = \mu < \kappa$, lo cual es una contradicción. Entonces se concluye que $cf(\mu) \leq \lambda < \mu$ y, por el inciso (iv) del teorema anterior, se concluye que $\mu^\lambda = \mu^{cf(\mu)} = \beth(\mu)$.

$\dashv$

La importancia de suponer la Hipótesis Generalizada del Continuo, radica en que la exponenciación cardinal se vuelve una operación mucho más fácil de calcular, como veremos en la siguiente sección. También veremos otro importante enunciado de la Teoría de Conjuntos relacionado con la exponenciación cardinal.

1.3 | La Hipótesis Generalizada del Continuo

Como ya se ha mencionado anteriormente, la HGC permite reducir bastante los cálculos a la hora de realizar exponenciaciones cardinales, antes de ver tales reducciones, veremos algunos conceptos que se relacionan directamente con la propiedad que posiblemente pueden tener ciertos cardinales respecto a su exponenciación por cardinales más pequeños que los mismos, y veremos como esas definiciones se reducen a ser equivalentes al suponer HGC.

Comenzamos dando algunas definiciones de los cardinales, que son los primeros o más pequeños, por decirlo de algún modo, entre los llamados cardinales grandes.

Definición 1.22 *Un cardinal κ es llamado límite fuerte si para cada $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda < \kappa$.*

Observación 3

(i) Directamente de la definición se desprende que cualquier cardinal fuerte es infinito. Más aún, si κ es un cardinal sucesor, digamos $\kappa = \lambda^+$, entonces se tiene que $\kappa \leq 2^\lambda$, de donde obtenemos que cualquier cardinal límite fuerte es un cardinal límite.

(ii) Recordando la definición del cardinal $2^{<\kappa}$, se puede ver que si κ es un cardinal límite fuerte, $2^{<\kappa} \leq \kappa$.

(iii) El primer ejemplo de un cardinal límite fuerte es ω, puesto que, para cada $n \in \omega$ se tiene que 2^n también es finito.

(iv) Como bajo HGC se tiene que para cualquier κ cardinal infinito $\kappa^+ = 2^\kappa$, bajo HGC todo cardinal límite es cardinal límite fuerte.

En la definición de cardinal límite fuerte se tiene que la base para la exponenciación es el 2, sin embargo, en la siguiente proposición, veremos que eso basta para tener que la desigualdad sea válida tomando como base a cualquier cardinal menor que el cardinal límite fuerte en cuestión.

Proposición 1.23 *Si κ es un cardinal límite fuerte, entonces para cualesquiera cardinales λ y ν menores que κ, se tiene que $\lambda^\nu < \kappa$.*

Demostración Sean λ y ν cardinales menores a κ. Por el corolario 1.21, hay tres posibles valores para el cardinal λ^ν.

Si $\lambda^\nu = 2^\nu$, como κ es un límite fuerte, se tiene que $\lambda^\nu = 2^\nu < \kappa$.

Si $\lambda^\nu = \lambda$, por la hipótesis tenemos que $\lambda^\nu < \kappa$.

Por último, si nos encontramos en el tercer caso, hay μ tal que $\lambda^\nu = \gimel(\mu)$ y $cf(\mu) \leq \nu < \mu$. Por la prueba del corolario, sabemos que nos encontramos en alguno de los casos de los incisos (ii) y (iv) del Teorema de Exponenciación. En el caso del inciso (ii), se tiene que la μ hallada cumple que $\mu < \lambda$, de donde $\lambda^\nu = \gimel(\mu) = \mu^{cf(\mu)} \leq 2^\mu \leq 2^\lambda$ y, como κ es un límite fuerte, $2^\lambda < \kappa$. Por otro lado, si nos encontramos en el caso del inciso (iv), entonces $\lambda^\nu = \gimel(\lambda) = \lambda^{cf(\lambda)} \leq 2^\lambda$ que vuelve a ser menor que κ.

En los tres casos dados por el corolario, obtenemos que $\lambda^\nu < \kappa$, como se quería demostrar. $\dashv$

Con esta proposición, podemos darnos cuenta de qué tan grande debe ser un cardinal para ser límite fuerte, puesto que no es posible obtenerlo o bien superarlo mediante la exponenciación de los cardinales menores a él. Sin embargo, no es muy díficil hallarlos, de hecho, para cada cardinal κ, podemos construir recursivamente un cardinal límite fuerte mayor a él, considerando el supremo de la sucesión numerable definida como $\kappa_0 = \kappa$ y, suponiendo definido κ_n, definimos a $\kappa_{s(n)}$ como 2^{κ_n}. Dicho supremo es un cardinal límite fuerte de cofinalidad numerable.

De hecho, en este contexto, procedemos a recordar una jerarquía de cardinales que a su vez también está íntimamente relacionada con la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Definición 1.24 *Definimos el funcional $\beth$ (beth) sobre el conjunto de ordinales del siguiente modo*

1. $\beth_0 = \aleph_0$,
2. $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ *y,*
3. $\beth_\gamma = sup\{\beth_\delta : \delta \in \gamma\}$, *si γ es ordinal límite.*

Observación 4

(i) Con la definición del funcional $\beth$, se puede ver que la Hipótesis Generalizada del Continuo es equivalente a que para cualquier ordinal α, se cumpla la igualdad $\aleph_\alpha = \beth\alpha$.

(ii) Directamente de la definición del funcional $\beth$ se puede ver también que, para cualquier ordinal límite γ, el cardinal $\beth_\gamma$ es un cardinal límite fuerte.

Antes de proceder a definir los primeros cardinales grandes, veremos una última proposición que relaciona a los cardinales límites fuertes con el funcional $\gimel$.

Proposición 1.25 *Si κ es un cardinal límite fuerte, entonces $\beth(\kappa) = 2^\kappa$.*

Demostración Como $\kappa < 2^\kappa$, $\kappa^{cf(\kappa)} \leq (2^\kappa)^{cf(\kappa)} = 2^{\kappa cf(\kappa)} = 2^\kappa$, de donde obtenemos que $\beth(\kappa) \leq 2^\kappa$.

Para obtener la desigualdad contraria consideramos los casos para κ entre ser un cardinal singular y uno regular.

Primero, si suponemos que κ es regular, entonces $\kappa = cf(\kappa)$, de donde $\beth(\kappa) = \kappa^\kappa = 2^\kappa$.

Ahora supongamos que κ es singular. Por el inciso (iii) del Teorema 1.13, sabemos que $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$ y, como κ es límite fuerte, sabemos que $2^{<\kappa} \leq \kappa$. Así, $2^\kappa \leq \kappa^{cf(\kappa)} = \beth(\kappa)$. Por lo tanto, si κ es un cardinal límite fuerte, $\beth(\kappa) = 2^\kappa$.

$\dashv$

Tomando la anterior proposición como base, podemos definir lo siguiente.

Definición 1.26 *Un cardinal es débilmente inaccesible si y sólo si es no numerable, regular y límite. Un cardinal es fuertemente inaccesible, o simplemente inaccesible, si es no numerable, regular y límite fuerte.*

Observación 5

(i) *Como cualquier cardinal límite fuerte es cardinal límite, todo cardinal inaccesible es débilmente inaccesible y, bajo HGC, el recíproco también se cumple.*

(ii) *El nombre inaccesible hace referencia al hecho de que no es posible obtener tal cardinal mediante la aplicación de operaciones conjuntistas a cardinales menores.*

(iii) *Salvo por el hecho de ser numerable, ω cumple todas las condiciones de ser un cardinal inaccesible. Un hecho conocido es que la existencia de tales cardinales, tanto débilmente inaccesibles como fuertemente inaccesibles, probaría que la teoría ZFE demostraría su propia consistencia, lo cual es imposible si ZFE es consistente. Por otro lado, y en relación al hecho de que ω cumple casi todas las características de ser cualquiera de esos dos tipos de cardinales, recordemos que, para probar la existencia de ω se incluyó un axioma específico, el axioma de infinito. Lo que implica suponer la existencia o no existencia de tales cardinales es parte de un tema distinto al tema que ocupa a este trabajo, sin embargo, puede consultarse en [Je1] y en [Ku].*

Habiendo visto ya algunas consecuencias de suponer la HGC, procedemos ahora a probar un teorema parecido al Teorema de Exponenciación, pero esta vez suponiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Teorema 1.27 (HGC) *Sean κ y λ cardinales infinitos.*

(i) *Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa^\lambda = \lambda^+$.*

(ii) *Si $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa^+$.*

(iii) *Si $\lambda < cf(\kappa)$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa$.*

Demostración

(i) Supongamos que $\kappa \leq \lambda$. Como κ es infinito, se tiene en particular que $2 < \kappa$, de donde $\lambda < 2^\lambda \leq \kappa^\lambda$. Por tanto, $\lambda^+ \leq \kappa^\lambda$. Por otra parte, como $\kappa \leq \lambda$, obtenemos que $\kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda$. Como λ es infinito y estamos suponiendo HGC, $\lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$. Concluimos que $\lambda^+ = \kappa^\lambda$.

(ii) Supongamos que $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$. Entonces $\kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$, donde aplicamos HGC en la última igualdad. Así, $\kappa^\lambda \leq \kappa^+$.

Por otro lado, $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^\lambda$ y, consideramos una familia $\{\lambda_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ de cardinales menores que κ cuya suma es κ. Entonces, por el teorema de König, tenemos que $\kappa =$

$\Sigma\{\lambda_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\} < \prod\limits_{\alpha < cf(\kappa)} \kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$, de donde obtenemos que $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$. Por tanto, que $\kappa^+ \leq \kappa^{cf(\kappa)}$. Al tener ambas desigualdades, obtenemos la igualdad deseada.

(iii) Supongamos que $\lambda < cf(\kappa)$. Como $cf(\kappa) \leq cf(\kappa) < \kappa$, aplicando el inciso anterior, $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$. Así, $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$ Ahora, por el lema 1.16, como $\lambda < cf(\kappa)$,

$$\kappa^\lambda = \left|{}^\lambda\kappa\right| = \left|\bigcup\{{}^\lambda\gamma : \gamma \in \kappa\}\right| \leq sup\{|{}^\lambda\gamma| : \gamma \in \kappa\} \cdot \kappa.$$

Dado $\gamma \in \kappa$ se tiene que $|{}^\lambda\gamma| = |\gamma|^\lambda \leq max\{|\gamma|, \lambda\}^{max\{|\gamma|,\lambda\}} = 2^{max\{|\gamma|,\lambda\}}$, lo cual por HGC es igual a $max\{|\gamma|, \lambda\}^+$. Como $\gamma \in \kappa$ y $\lambda < cf(\kappa) \leq \kappa$, $max\{|\gamma|, \lambda\}^+ \leq \kappa$. Así, $sup\{|{}^\lambda\gamma| : \gamma \in \kappa\} \cdot \kappa$ es menor a $\kappa\kappa = \kappa$, lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Con lo anterior podemos percatarnos de que la HGC simplifica enormemente a la exponenciación cardinal. Así, la importancia de aceptarla o no aceptarla como válida se ve influenciada por los intereses posteriores que se persigan.

1.4 | La Hipótesis del Cardinal Singular

Otro enunciado además de la HGC que es importante en el estudio de la exponenciación cardinal es la llamada Hipótesis del Cardinal Singular.

Definición 1.28 *La Hipótesis del Cardinal Singular (HCS) establece que para cada cardinal infinito κ, si κ es singular y $2^{cf(\kappa)} < \kappa$, entonces $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$.*

Observación 6

(i) Por el teorema anterior, bajo HGC, para $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, se tiene que $\kappa^\lambda = \kappa^+$. Así, HGC implica HCS.

(ii) Si κ es un cardinal infinito tal que $\kappa \leq 2^{cf(\kappa)}$, entonces $\kappa^{cf(\kappa)} \leq (2^{cf(\kappa)})^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)}$ y, como $2^{cf(\kappa)} \leq \kappa^{cf(\kappa)}$, se tiene que $\kappa^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)}$.

(iii) Si κ es un cardinal infinito cualquiera, por el segundo inciso del teorema 1.13 sabemos que $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$, de donde una desigualdad que siempre se cumple en ZFE es que $\kappa^+ \leq \kappa^{cf(\kappa)}$.

Análogamente a como hicimos con la Hipótesis Generalizada del Continuo, podemos enunciar un teorema de exponenciación cardinal suponiendo la Hipótesis del Cardinal Singular, en el cual veremos que la exponenciación está determinada por el funcional del continuo restringido a algún cardinal.

Teorema 1.29 *Sea κ un cardinal singular.*

(i) Si el funcional del continuo restringido a κ es eventualmente constante, entonces $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

(ii) (HCS) En otro caso, se tiene que $2^\kappa = (2^{<\kappa})^+$.

Demostración Sea κ un cardinal singular.

(i) Se cumple por el corolario 1.15 acerca de la exponenciación con base 2.

(ii) Supongamos que el funcional del continuo restringido a κ no es eventualmente constante. Por el tercer inciso del teorema 1.13, se tiene que $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$. Por lo dicho en la prueba del tercer inciso del Teorema 1.19, sabemos que $cf(\kappa) = cf(2^{<\kappa})$, entonces $2^{cf(2^{<\kappa})} = 2^{cf(\kappa)}$. Como el funcional no es eventualmente constante y κ es singular, se tiene que $2^{cf(\kappa)}$ es menor a $2^{<\kappa}$, de donde el cardinal $2^{<\kappa}$ cumple las condiciones de la Hipótesis del Cardinal Singular. Así, $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = (2^{<\kappa})^{cf(2^{<\kappa})} = (2^{<\kappa})^+$, lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Habiendo probado ya un teorema de exponenciación cuya base es el 2, procedemos a probar una versión más general cuya base de exponenciación es cualquier cardinal infinito.

Teorema 1.30 *Sean κ y λ cardinales infinitos.*

(i) Si $\kappa \leq 2^\lambda$, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

(ii) Si $2^\lambda < \kappa$ y $\lambda < cf(\kappa)$, $\kappa^\lambda = \kappa$.

(iii) (HCS) Si $2^\lambda < \kappa$ y $cf(\kappa) \leq \lambda$, $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

Demostración Sean κ y λ cardinales infinitos. Si $\kappa \leq 2^\lambda$, por el teorema de exponenciación, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. Supongamos entonces que $2^\lambda < \kappa$. Procedemos por inducción sobre κ. Si κ es un cardinal sucesor, entonces existe ν tal que $\nu^+ = \kappa$, de donde, por la fórmula de Hausdorff, se tiene que $\kappa^\lambda = (\nu^+)^\lambda = \nu^+\nu^\lambda$. Por la hipótesis de inducción, se tiene que $\nu^\lambda \in \{2^\lambda, \nu, \nu^+\}$, de donde $\nu^\lambda \leq \kappa$ y concluimos que $\kappa^\lambda = \nu^+ = \kappa$. Como κ es regular, no es posible cumplir las hipótesis del tercer inciso, por lo que en este caso se cumple el segundo inciso de la proposición.

Supongamos que κ es un cardinal límite. Por la hipótesis de inducción se sigue cumpliendo que, para cada $\nu < \kappa$, $\nu^\lambda \in \{\nu, 2^\lambda, \nu^+\}$. Así, para cada $\nu < \kappa$, $\nu^\lambda < \kappa$. Por el teorema de exponenciación, si $\lambda < cf(\kappa)$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa$. Y si $cf(\kappa) \leq \lambda$, $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)}$ y como $cf(\kappa) \leq \lambda < 2^\lambda < \kappa$, κ necesariamente es singular y $2^{cf(\kappa)} \leq 2^\lambda < \kappa$, de donde κ cumple las hipótesis de la HCS. Por tanto, $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$, de donde $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

$\dashv$

Con la discusión anterior, queda claro que ambas Hipótesis, HGC y HCS reducen el cálculo de la exponenciación a cardinales que sólo tienen que ver con los cardinales involucrados, en cambio, si sólo suponemos ZFE, aparece un caso en el que obtenemos la existencia de un cardinal indeterminado evaluado en el funcional $\beth$ y dicho cardinal no necesariamente es uno de los involucrados.

Podemos darnos cuenta de la fuerza de tales Hipótesis con los resultados mostrados aquí, sin embargo, una pregunta interesante es qué tanto usamos de la fuerza de tales hipótesis en cada proposición del capítulo. Más aún, es interesante explorar si es posible debilitar estas hipótesis para obtener los mismos resultados. Los teoremas de Silver dan luz a estas preguntas, y en el siguiente capítulo construiremos las herramientas necesarias para dar una prueba de tales teoremas, uno por cada una de las grandes hipótesis presentadas en este capítulo.

Capítulo II

Conjuntos estacionarios y dos teoremas de Silver

Como fue mencionado en la introducción, mediante la suposición de que se cumplen HGC o HCS, se pueden reforzar algunos resultados acerca de la exponenciación cardinal e incluso, en el caso de la HGC, trivializar algunos otros. Sin embargo, es interesante explorar qué tanto se puede decir de tales resultados partiendo únicamente de los axiomas de ZFE. Para ello, necesitaremos una herramienta especial, los conjuntos estacionarios, así como los subconjuntos cerrados y acotados, primeramente pensados como subconjuntos de un ordinal.

Describiremos algunas propiedades de ambos tipos de conjuntos en esta sección. Previamente, y debido a que con tales tipos de conjuntos pueden construirse filtros e ideales sobre ordinales, recordaremos algunas propiedades de los mismos.

2.1 | Filtros e ideales

Definición 2.1 *Sea X un conjunto no vacío y F una familia de subconjuntos de X. Si F cumple que:*

(i) $X \in F$ y $\varnothing \notin F$,

(ii) la intersección de cualesquiera dos elementos de F está en F,

(iii) todo subconjunto de X que contenga a un elemento de F es a su vez elemento de F, es decir, si $Y \subseteq X$ y existe $Z \in F$ tal que $Z \subseteq Y$ entonces $Y \in F$,

decimos que F es un filtro *en el conjunto X. Si además se cumple que F es maximal en el conjunto de los filtros en X, decimos que F es un* ultrafiltro *en X.*

De manera dual, si I es una familia de subconjuntos de X tal que:

(i) $\varnothing \in I$ y $X \notin I$,

(ii) la unión de cualesquiera dos elementos de I está en I,

(iii) cualquier subconjunto de un elemento de I es a su vez un elemento de I,

decimos que I es un ideal *en el conjunto X. Análogo al caso de los filtros, si se cumple que I es maximal en el conjunto de los ideales en X, decimos que I es un* ideal primo *en X.*

Observación 7

(i) Dado cualquier conjunto no vacío X, los conjuntos $F = \{X\}$ e $I = \{\varnothing\}$ son los primeros ejemplos de un filtro e ideal en X, respectivamente.

(ii) *Por inducción se puede demostrar que si F es un filtro en un conjunto no vacío A, la segunda condición implica que las intersecciones finitas de elementos de F son también elementos de F. En particular, cualquier intersección finita de elementos de F debe ser no vacía por la primera condición. Tal propiedad será fundamental para construir filtros más adelante.*

(iii) *Análogamente, si I es un ideal en un conjunto no vacío A, se tiene que I es cerrado bajo uniones finitas de sus elementos, de donde ninguna unión finita de elementos de I puede ser el conjunto total A. De modo que tal propiedad será la que nos permitirá construir ideales más adelante.*

Además del filtro mencionado en la observación anterior, por cada elemento en un conjunto no vacío podemos obtener un filtro. De hecho, veremos en la siguiente proposición que podemos obtener un ultrafiltro por cada elemento del conjunto.

Proposición 2.2 *Si A es un conjunto no vacío y a es un elemento de A, entonces el conjunto $\langle a\rangle := \{X \subseteq A : a \in X\}$ es un ultrafiltro en A.*

Demostración San A un conjunto no vacío y a un elemento de A. Primero veamos que el conjunto $\langle a\rangle$ es un filtro en A. Como claramente $a \in A$ y $A \subseteq A$, $A \in \langle a\rangle$, además, también es claro que $a \notin \varnothing$, de donde $\varnothing \notin \langle a\rangle$.

Ahora sean f y g elementos de $\langle a\rangle$, por definición se tiene que $a \in f$ y $a \in g$, de donde $a \in f \cap g$ y, por tanto, $f \cap g \in \langle a\rangle$.

Por último, sean f un elemento de $\langle a\rangle$ y g un subconjunto de A tales que $f \subseteq g$. Por definición se tiene que $a \in f$ y, por tanto, $a \in g$, de donde se tiene que $g \in \langle a\rangle$. Como $\langle a\rangle$ cumple las tres propiedades requeridas, concluimos que $\langle a\rangle$ es un filtro en A.

Ahora veamos que $\langle a\rangle$ es un ultrafiltro en A; para ver esto, consideremos G un filtro en A tal que $\langle a\rangle \subseteq G$. Queremos ver que $\langle a\rangle = G$, para lo cual basta ver que $G \subseteq \langle a\rangle$. Mostraremos que todo elemento de G debe tener como elemento a su vez a a. En efecto, como claramente $\{a\} \in \langle a\rangle$, si existiera $g \in G$ tal que $a \notin g$ se tendría que $\varnothing = \{a\} \cap g \in G$, contradiciendo que G sea un filtro en A. Entonces todo elemento de G tiene a a como elemento. Por definición de $\langle a\rangle$, se tiene entonces que $G \subseteq \langle a\rangle$ y, por tanto, $G = \langle a\rangle$. Concluimos entonces que $\langle a\rangle$ es un ultrafiltro en A.

$\dashv$

Justamente del hecho de que, dado un conjunto no vacío A y $a \in A$, se tiene que $\{a\} \in \langle a\rangle$, se tiene la afirmación dicha previamente de que dados a y b dos elementos distintos del conjunto A, se tiene que los ultrafiltros $\langle a\rangle$ y $\langle b\rangle$ son distintos. Al ultrafiltro $\langle a\rangle$ en A se le llama el *ultrafiltro principal en A generado por* $\{a\}$. Cualquier ultrafiltro en A que no sea principal es llamado *ultrafiltro libre.*

La noción de generado dada en el comentario anterior se generaliza para un subconjunto no vacío de conjuntos de A de la siguiente forma.

Definición 2.3 *Sea A un conjunto no vacío y $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ no vacío.*

(i) *Decimos que S tiene la propiedad de la intersección finita si para cada $s \subseteq S$ finito y no vacío, se tiene que $\bigcap s \neq \varnothing$.*

(ii) *El generado de S es el conjunto $\{X \subseteq A : \exists s \in [S]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\} \, (\bigcap s \subseteq X)\}$, y lo denotamos por $\langle S\rangle$.*

De esta forma, el generado de un elemento a es de hecho una abreviación del conjunto $\langle\{a\}\rangle$. Como veremos en el siguiente teorema, dado A un conjunto no vacío, por cada subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ con la propiedad de la intersección finita, podemos definir un filtro en A que contiene a tal subconjunto, lo cual puede verse como una generalización de la construcción de $\langle a\rangle$; pues claramente el conjunto $\{\{a\}\}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ con la propiedad de la intersección finita.

Teorema 2.4 *Sea A un conjunto no vacío. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) Si $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ tiene la propiedad de la intersección finita*, entonces $\langle S\rangle$ es el filtro $\subseteq$-menor en A que contiene a S.*

(ii) Sea U un filtro en A, son equivalentes:

a*) U es un ultrafiltro en A,*

b*) para cualesquiera X y Y subconjuntos de A tales que $X \cup Y \in U$, se tiene que $X \in U$ o $Y \in U$,*

c*) para X subconjunto de A, se tiene que $X \in U$ o $A \setminus X \in U$.*

(iii) Si I es un ideal en A y F es un filtro en A tales que $I \cap F = \varnothing$, entonces existe un ultrafiltro D en A tal que $F \subseteq D$ y $D \cap I = \varnothing$.

(iv) Si A es infinito y U es un ultrafiltro en A, entonces son equivalentes:

a*) U es un ultrafiltro libre,*

b*) $F_{cof} := \{X \subseteq A : |A \setminus X| < \omega\} \subseteq U$,*

c*) U no tiene elementos finitos.*

Demostración

(i) Sea $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ con la propiedad de la intersección finita, entonces en particular S es no vacío. Primero veremos que $\langle S\rangle$ es un filtro en A. Como S es no vacío, se tiene que existe $s \in S$. Entonces claramente $\{s\}$ es un subconjunto finito no vacío de S tal que $\bigcap\{s\} \subseteq A$, por lo tanto, $A \in \langle S\rangle$. Además, dado $B \in \langle S\rangle$ por definición existe $b \in [S]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$ tal que $\bigcap b \subseteq B$ y, como S tiene la propiedad de la intersección finita, se tiene que $\bigcap b \neq \varnothing$, de donde $B \neq \varnothing$. Por lo anterior, concluimos que $\varnothing \notin \langle S\rangle$.

Sean ahora f y g elementos de $\langle S\rangle$, entonces existen S_1 y S_2 subconjuntos finitos de S tales que $\bigcap S_1 \subseteq f$ y $\bigcap S_2 \subseteq g$. Entonces se tiene que $S_1 \cup S_2$ es un subconjunto finito de S tal que $\bigcap(S_1 \cup S_2) \subseteq f \cap g$, de donde $f \cap g \in \langle S\rangle$.

Por último, sea B un subconjunto de A que contiene a un elemento C de $\langle S\rangle$, entonces existe $t \subseteq S$ finito tal que $\bigcap t \subseteq C$, y como $C \subseteq B$, tenemos que $\bigcap t \subseteq B$ y, por tanto, $B \in \langle S\rangle$. Entonces se cumple que $\langle S\rangle$ es un filtro en A.

Ahora sea F un filtro en A tal que $S \subseteq F$. Queremos ver que $\langle S\rangle \subseteq F$. Sea pues $f \in \langle S\rangle$, entonces existe $t \subseteq S$ finito tal que $\bigcap t \subseteq f$. Como $S \subseteq F$, t es también un subconjunto finito de F y, por la segunda observación posterior a la definición de filtro e ideal, se tiene que $\bigcap t \in F$, de donde, por la tercera condición de filtro, se tiene que $f \in F$. Por tanto, $\langle S\rangle$ es el filtro $\subseteq$-menor en A que contiene a S.

(ii) Sea U un filtro en A y supongamos primero que U es un ultrafiltro en A. Sean X y Y subconjuntos de A tales que $X \cup Y \in U$ y supongamos que $X \notin U$. Hay que probar entonces que $Y \in U$. Probaremos primero que Y intersecta a todos los elementos de U. Sea $Z \in U$, si se tuviera que $Z \cap Y = \varnothing$, entonces se tendría que $Z \subseteq A \setminus Y$ y, como U es un filtro en A, tendríamos que $A \setminus Y \in U$ y, por tanto, $(A \setminus Y) \cap (X \cup Y) \in U$. Pero $(A \setminus Y) \cap (X \cup Y) = X \cap (A \setminus Y) \subseteq X$, de donde se obtiene que $X \in U$, contradiciendo nuestra suposición inicial. Entonces Y intersecta a todos los elementos de U, de donde el conjunto $U \cup \{Y\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por el inciso (i), tenemos entonces que $\langle U \cup \{Y\}\rangle$ es un filtro en A que contiene a U. Como U es un ultrafiltro, se sigue que ambos filtros son iguales y, por tanto, $Y \in U$.

Ahora supongamos que U es un filtro en A tal que si cualesquiera dos subconjuntos de A cumplen que su unión está en U, entonces alguno de ellos está en U, y sea $X \in \mathcal{P}(A)$. Como

U es un filtro en A, tenemos que $A \in U$ y, al ser X un subconjunto de A, $A = X \cup (A \setminus X)$, de donde, por nuestra hipótesis, $X \in U$ o $A \setminus X \in U$.

Por último, supongamos que U es un filtro en A tal que, para cada subconjunto X de A, se tiene que $X \in U$ o $A \setminus X \in U$, veamos que U es un ultrafiltro en A. Sea entonces G un filtro en A tal que $U \subseteq G$, y supongamos que existe $f \in G$ tal que $f \notin U$. Por la hipótesis, se tiene que $A \setminus f \in U$ y, por tanto, se tiene que $\varnothing = f \cap (A \setminus f) \in G$, contradiciendo que G era un filtro en A. Por tanto, $G \subseteq U$, de donde U es un ultrafiltro en A, lo que concluye las equivalencias requeridas.

(iii) Sean F un filtro e I un ideal en A tales que $F \cap I = \varnothing$. Mostraremos primero que el conjunto

$$F' := F \cup \{A \setminus X : X \in I\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $C \subseteq F'$ finito no vacío. Veamos los tres casos posibles: $C \subseteq F$, o $C \subseteq \{A \setminus X : X \in I\}$, o $C \subseteq F \cup \{A \setminus X : X \in I\}$ e intersecta a ambos uniendos.

Si $C \subseteq F$, como F es un filtro en A, tenemos que $\bigcap C \neq \varnothing$, y, de hecho, sabemos que se cumple que $\bigcap C \in F$.

Si $C \subseteq \{A \setminus X : X \in I\}$ entonces, suponiendo que $C = \{C_i : i \in s(n)\}$ para alguna $n \in \omega$, se tiene que para cada $i \in s(n)$ existe $I_i \in I$ tal que $C_i = A \setminus I_i$. Como I es un ideal en A, se tiene que $\bigcup \{I_i : i \in s(n)\} \in I$, de donde

$$\bigcap C = \bigcap \{C_i : i \in s(n)\} = A \setminus \bigcup \{I_i : i \in s(n)\} \in \{A \setminus X : X \in I\}.$$

Como $A \notin I$, al ser I un ideal en A, se tiene que $\varnothing \notin \{A \setminus X : X \in I\}$ y, por tanto, se tiene que $\bigcap \{C_i : i \in s(n)\} \neq \varnothing$.

Por último, si C intersecta a ambos uniendos, por las demostraciones de los dos casos anteriores, basta ver que para cada $X \in F$ y para cada $Y \in I$ se tiene que $X \cap (A \setminus Y) \neq \varnothing$. Sean pues $X \in F$ y $Y \in I$, y supongamos que $X \cap (A \setminus Y) = \varnothing$, entonces $X \subseteq Y$ y, como F es filtro en A, $Y \in F$, de donde $F \cap I \neq \varnothing$, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, se tiene que $X \cap (A \setminus Y) \neq \varnothing$, de donde tenemos que F' tiene la propiedad de la intersección finita.

Ahora definimos $\mathcal{F} = \{U : U \text{ es un filtro en A} \wedge F' \subseteq U\}$, por el inciso (i) tenemos que $\langle F' \rangle \in \mathcal{F}$, de donde $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Además, $\mathcal{F}$ está parcialmente ordenado por la relación $\subseteq$ y se puede ver que la unión de una cadena de filtros en $\mathcal{F}$ es un filtro en A que sigue conteniendo a F'. Así, $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$ es un orden parcial no vacío tal que toda cadena en $\mathcal{F}$ está superiormente acotada en $\mathcal{F}$ (por su unión), por el lema de Zorn, hay $D \in \mathcal{F}$ elemento maximal.

Hay que ver que D es maximal como filtro, para ver esto, sea G un filtro en A tal que $D \subseteq G$, entonces se tiene que $F' \subseteq G$. Aseguramos que $G \cap I = \varnothing$. En otro caso, se tendría que hay $f \in G \cap I$ y, como por la definición $A \setminus f \in F'$, entonces $\varnothing = f \cap A \setminus f \in G$, contradiciendo que G sea filtro en A. De lo anterior, obtenemos que $G \in \mathcal{F}$ y, como D es un elemento maximal de $\mathcal{F}$, se tiene que $D = G$. Por lo tanto, D es un ultrafiltro en A. Como $F' \subseteq D$, $F \subseteq D$ y de forma análoga a como se probó que $G \cap I = \varnothing$, se puede ver que $D \cap I = \varnothing$. Por tanto, D es el ultrafiltro buscado.

(iv) Sea A un conjunto infinito y U un ultrafiltro en A, y supongamos primero que U es libre en A. Hay que probar que $F_{cof} \subseteq U$. Sea $X \subseteq A$ tal que $A \setminus X$ es finito, y supongamos que $X \notin U$. Como U es un ultrafiltro en A, por el inciso (iii), se tiene que $A \setminus X \in U$, entonces el conjunto

$$\mathcal{F} := \{n \in \omega : \exists Y \in \mathcal{P}(A) \, (|Y| = n \wedge Y \in U)\}$$

es no vacío. Sea $m = min\mathcal{F}$, entonces existe $Z \in U$ tal que $|Z| = m$. Como U es libre, se tiene que $1 < m$, entonces hay $z_1 \in Z$ tal que $Z \setminus \{z_1\} \neq \varnothing$. Nuevamente, al ser U un ultrafiltro libre, se tiene que $\{z_1\} \notin U$ y, por el inciso (iii), $A \setminus \{z_1\} \in U$. Entonces tenemos que

$$Z \setminus \{z_1\} = (A \setminus \{z_1\}) \cap Z \in U$$

y que $|Z \setminus \{z_1\}| = m - 1 < m$, lo que contradice la minimalidad de m. Por tanto, $X \in U$ y $F_{cof} \subseteq U$.

Ahora supongamos que U es un ultrafiltro en A tal que $F_{cof} \subseteq U$. Entonces se tiene que para todo subconjunto finito X de A, $A \setminus X \in U$. Así, si X fuera un subconjunto finito de A tal que $X \in U$, se tendría que $\varnothing = X \cap (A \setminus X) \in U$, contradiciendo que U es un filtro en A. Concluimos entonces que U no tiene elementos finitos.

Por último, supongamos que U es un ultrafiltro en A que no tiene elementos finitos, en particular, tenemos que, para todo $x \in A$, $(\{x\} \notin U)$. Como todo ultrafiltro principal tiene por elemento al unitario de algún elemento de A, U es no principal, es decir, es un ultrafiltro libre.

$\dashv$

Para la prueba del inciso (iii) del teorema anterior usamos el Lema de Zorn. Esto podría indicarnos que tal inciso está relacionado con el Teorema del Ultrafiltro(el cual afirma que todo filtro está contenido en un ultrafiltro), lo cual quedará comprobado en el siguiente corolario. Más aún, también hay otras importantes consecuencias del teorema previo.

Corolario 2.5 *Sea A un conjunto no vacío.*

(i) Para cualquier filtro F en A, existe un ultrafiltro D en A tal que $F \subseteq D$.

(ii) Si I es un ideal en A y d es un subconjunto de A tal que $d \notin I$, entonces existe un ultrafiltro D en A tal que $D \cap I = \varnothing$ y $d \in D$.

(iii) Si A es infinito, existe un ultrafiltro libre D en A.

Demostración

(i) Sea F un filtro en A. Sabemos que $I = \{\varnothing\}$ es un ideal en A y claramente $I \cap F = \varnothing$. Por el inciso (iii) del teorema anterior, existe un ultrafiltro D en A tal que $I \cap D = \varnothing$ (lo cual ya se desprendía de que D en particular es un filtro) y $F \subseteq D$. Por lo tanto, todo filtro en A está contenido en un ultrafiltro.

(ii) Sea I un ideal en A y $d \subseteq A$ tal que $d \notin I$. Aseguramos entonces que el conjunto $I' = \{Y \subseteq X : X \setminus Y \in I\} \cup \{d\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. En efecto, por la prueba del inciso (iii) del teorema anterior, el conjunto $\{Y \subseteq X : X \setminus Y \in I\}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, así basta ver que si $X \in I$, entonces $(A \setminus X) \cap d \neq \varnothing$. En otro caso, para algún $X \in I$ se tendría que $d \subseteq X$ y, como I es ideal en A, $d \in I$, contradiciendo la hipótesis. Entonces, por el inciso (i) del teorema anterior, tenemos que $\langle I' \rangle$ es un filtro en A y, por el inciso anterior, existe un ultrafiltro D en A tal que $\langle I' \rangle \subseteq D$ y $d \in D$. Como $\{Y \subseteq X : X \setminus Y \in I\} \subseteq D$ y D es en particular un filtro, obtenemos que $D \cap I = \varnothing$, de donde D cumple las propiedades requeridas.

(iii) Sea A un conjunto infinito. Usaremos el inciso (iv) del teorema anterior para concluir que existe un ultrafiltro libre en A, mostrando que F_{cof} es un filtro en A. Como $A \setminus A = \varnothing$ y $\varnothing$ es finito, $A \in F_{cof}$. Como A es infinito $\varnothing \notin F_{cof}$.

Ahora sean X y Y elementos de F_{cof}, entonces $A \setminus X$ y $A \setminus Y$ son ambos finitos, de donde $A \setminus (X \cap Y) = (A \setminus X) \cup (A \setminus Y)$ es también finito. Así, $X \cap Y \in F_{cof}$.

Por último, sean $X \in F_{cof}$ y $Y \subseteq A$ tales que $X \subseteq Y$. Entonces $A \setminus Y \subseteq A \setminus X$ y, como $A \setminus X$ es finito, $A \setminus Y$ también es finito, de donde $Y \in F_{cof}$.

Como F_{cof} cumple las tres propiedades requeridas, F_{cof} es un filtro en A, por el inciso (i), existe un ultrafiltro D en A tal que $F_{cof} \subseteq D$ y, por el inciso (iv) del teorema anterior, D es un ultrafiltro libre. Por lo tanto, existe un ultrafiltro libre en A.

$\dashv$

Otra propiedad a destacar en la prueba del teorema anterior es que, dado un ideal I, el conjunto $\{Y \subseteq X : X \setminus Y \in I\}$ resulta ser cerrado bajo intersecciones finitas, característica propia de los filtros. Veremos que este conjunto es en realidad un filtro. Más aún, dado un filtro sobre un conjunto podemos obtener un ideal sobre el mismo conjunto e inversamente, según el siguiente resultado.

Proposición 2.6 *Sea X un conjunto no vacío. Si F es un filtro sobre X, entonces el conjunto $F^* := \{Y \subseteq X : X \setminus Y \in F\}$ es un ideal sobre X. Inversamente, si I es un ideal sobre X, entonces el conjunto $I^* := \{Y \subseteq X : X \setminus Y \in I\}$ es un filtro sobre X.*

Demostración Sea X un conjunto no vacío y F un filtro sobre X. Veamos que F^* es un ideal sobre X. Como F es un filtro y $X \in F$, $X \setminus X$ es un elemento de F^*. Como $X \setminus X = \varnothing$, $\varnothing$ es un elemento de F^*. Además, si tuviéramos que $X \in F^*$, entonces, por la definición de F^*, se tendría que $\varnothing \in F$, lo que contradice que F es un filtro. Por lo tanto, $X \notin F^*$.

Ahora sean f y g dos elementos de F^*. Queremos ver que $f \cup g$ es también un elemento de F^*. Como f y g son elementos de F^*, por la definición de F^*, tenemos que $X \setminus f$ y $X \setminus g$ son elementos de F. Por tanto, $(X \setminus f) \cap (X \setminus g) \in F$. Como $(X \setminus f) \cap (X \setminus g) = X \setminus (f \cup g)$, $f \cup g \in F^*$.

Por último, sean f un elemento de F^* y g un subconjunto de X tales que $g \subseteq f$, entonces $X \setminus f \in F$ y $X \setminus f \subseteq X \setminus g$. Como F es un filtro sobre X, se tiene que $X \setminus g \in F$ y, por tanto, que $g \in F^*$.

De esta forma, al cumplir las tres propiedades, se tiene que F^* es un ideal en X.

Análogamente, se obtiene que si I es un ideal en X, entonces I^* es un filtro en X.

$\dashv$

Dado un filtro F (o un ideal I) en un conjunto no vacío X, al ideal F^* (al filtro I^*) mencionado en la proposición anterior se le llama el ideal dual de F (el filtro dual de I). Es fácil mostrar que si F es un ultrafiltro en A, entonces F^* resulta ser un ideal maximal en A y, correspondientemente, si I es un ideal maximal en A, entonces I^* es un ultrafiltro en A.

La noción de "la propiedad de la intersección finita" para construir filtros también tiene su noción dual para la construcción de ideales.

Definición 2.7 *Sea A un conjunto no vacío. Si $M \subseteq \mathcal{P}(A)$ y cumple que para cada m subconjunto finito de M, $\bigcup m \neq A$, entonces M tiene la propiedad de la unión finita. Al conjunto*

$$\{X \subseteq A : \exists m \in [M]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}(X \subseteq \bigcup m)\}$$

se le llama el ideal generado por M y se denota por $\langle M \rangle$.

Veremos que efectivamente el conjunto expresado en la definición anterior es un ideal. Además, con esta definición, podemos establecer resultados análogos a las propiedades de filtros y ultrafiltros probadas anteriormente, cuyas pruebas también son análogas.

Como una última propiedad de los ideales, veremos cómo extender o restringir un ideal sobre un conjunto A tomando como base a un subconjunto de A que cumpla ciertas propiedades con respecto al ideal.

Proposición 2.8 *Sean A un conjunto no vacío, B un subconjunto de A, M un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(A)$ con la propiedad de la unión finita e I un ideal en A.*

(i) El conjunto $\langle M\rangle$ es el $\subseteq$-menor ideal que contiene a M.

(ii) Si $A\setminus B\notin I$, entonces el conjunto $I\cup\{B\}$ tiene la propiedad de la unión finita. Al ideal $\langle I\cup\{B\}\rangle$ se le llama el ideal generado por B sobre I y se denota como $I[B]$.

(iii) Si $B\notin I$, entonces el conjunto $I\restriction_B := \{Z\subseteq A : B\cap Z\in I\}$ es un ideal en A, llamado restricción del ideal I a B.

(iv) Si $B\notin I$, entonces $I\restriction_B = I[A\setminus B]$.

Demostración

(i) Sea $M\subseteq\mathcal{P}(A)$ no vacío con la propiedad de la unión finita. Primero veremos que $\langle M\rangle$ es en efecto un ideal en A que contiene a M. Como M es no vacío, sea $m\in M$, entonces $\{m\}$ es un subconjunto finito de M tal que $\varnothing\subseteq\bigcup\{m\}$. Por tanto, $\varnothing\in\langle M\rangle$. Ahora bien, supongamos que $A\in\langle M\rangle$, entonces existe un subconjunto finito N de M tal que $A\subseteq\bigcup N$. Como claramente $\bigcup N\subseteq A$, se tiene que $A=\bigcup N$, lo que contradice la propiedad inicial de M. Así, $A\notin\langle M\rangle$.

Ahora, sean X y Y elementos de $\langle M\rangle$, entonces existen N y P subconjuntos finitos de M tales que $X\subseteq\bigcup N$ y $Y\subseteq P$. Como N y P son finitos, se tiene que $N\cup P$ es un subconjunto finito de M tal que $X\cup Y\subseteq\bigcup(N\cup P)$. Concluimos entonces que $X\cup Y\in\langle M\rangle$.

Por último, sean $X\in\langle M\rangle$ y $Y\subseteq A$ tales que $Y\subseteq X$. Como $X\in\langle M\rangle$, existe $N\subseteq M$ finito tal que $X\subseteq\bigcup N$. Pero entonces $Y\subseteq\bigcup N$ y, por definición, $Y\in\langle M\rangle$.

Como $\langle M\rangle$ cumple las tres propiedades, concluimos entonces que $\langle M\rangle$ es un ideal en A. De manera análoga a como se probó que $\varnothing\in\langle M\rangle$, se puede demostar que $M\subseteq\langle M\rangle$.

Para ver que es $\subseteq$-menor, sea I otro ideal en A tal que $M\subseteq I$. Al ser I cerrado bajo uniones finitas, se tiene que, para cada $N\subseteq M$ finito, $\bigcup N\in I$ y, por tanto, al ser cerrado bajo subconjuntos, concluimos que $\langle M\rangle\subseteq I$.

Concluimos entonces que $\langle M\rangle$ es el $\subseteq$- menor ideal en A que contiene a M.

(ii) Supongamos que $B\subseteq A$ es tal que $A\setminus B\notin I$. Hay que ver que $I\cup\{B\}$ es un generador de ideal. Sea N un subconjunto finito de $I\cup\{B\}$, si $N\subseteq I$, como I es un ideal en A, se tiene que $\bigcup N\neq A$. Entonces podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $B\in N$. Si tuviéramos que $\bigcup N=A$, en particular se tiene que $A\setminus B\subseteq\bigcup N$. Sea $M=N\setminus\{B\}$, entonces, como claramente $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$, tenemos que $A\setminus B\subseteq\bigcup M$. Pero M es un subconjunto finito de I, y como I es cerrado bajo uniones finitas, tenemos que $\bigcup M\in I$, de donde concluimos que $A\setminus B\in I$, contradiciendo el supuesto inicial. Por tanto, para cada $m\subseteq I\cup\{B\}$ finito, $\bigcup m\neq A$ y $I\cup\{B\}$ es un generador de ideal.

(iii) Supongamos que $B\notin I$. Hay que demostrar que $I\restriction_B$ es un ideal en A. Claramente $B\cap\varnothing=\varnothing$, y como I es un ideal, tenemos que $B\cap\varnothing\in I$, de donde obtenemos que $\varnothing\in I\restriction_B$. Ahora bien, si $A\in I\restriction_B$, entonces tendríamos que $B=A\cap B$ es un elemento de I, contradiciendo la hipótesis. Entonces concluimos que $\varnothing\in I\restriction_B$ y $A\notin I\restriction_B$.

Ahora sean X y Y elementos de $I\restriction_B$, por definición tenemos que $X\cap B\in I$ y $Y\cap B\in I$. Como I es un ideal, tenemos que $(X\cap B)\cup(Y\cap B)\in I$. Pero entonces $(X\cup Y)\cap B\in I$ y, por tanto, $X\cup Y\in I\restriction_B$.

Por último, sean $X\in I\restriction_B$ y $Y\subseteq A$ tales que $Y\subseteq X$. Como $X\in I\restriction_B$, tenemos que $X\cap B\in I$. Pero $Y\cap B\subseteq X\cap B$ e I es cerrado bajo subconjuntos, de donde obtenemos que $Y\cap B\in I$ y, por tanto, concluimos que $Y\in I\restriction_B$.

Como $I\restriction_B$ cumple las tres propiedades, se concluye entonces que $I\restriction_B$ es un ideal en A.

(iv) Supongamos nuevamente que $B \notin I$, por el segundo inciso, tenemos que $I[A \setminus B]$ es en efecto un ideal en A. Ahora bien, como para cada $m \in I$ se tiene que $m \cap B \subseteq m$, se tiene que $I \subseteq I\restriction_B$. Como $B \cap (A \setminus B) = \varnothing \in I$, también tenemos que $A \setminus B \in I\restriction_B$. Así, $I \cup \{A \setminus B\} \subseteq I\restriction_B$.

Ahora sea $Z \in I\restriction_B$, por la definición, se cumple que $B \cap Z \in I$. Claramente, $Z \subseteq (B \cap Z) \cup (A \setminus B)$, de modo que $\{B \cap Z, A \setminus B\}$ es un subconjunto finito de $I \cup \{A \setminus B\}$ tal que su unión contiene a Z. Como $I[A \setminus B]$ es cerrado bajo subconjuntos, se tiene que $Z \in I[A \setminus B]$. Entonces tenemos que $I\restriction_B \subseteq I[A \setminus B]$ e $I\restriction_B$ es un ideal que contiene al generador de $I[A \setminus B]$. Por el primer inciso, concluimos que $I\restriction_B = I[A \setminus B]$.

$\dashv$

Más adelante veremos otras propiedades de filtros e ideales, pero esta vez pensados sobre conjuntos de ordinales, de tal forma que podremos relacionar las propiedades ya arriba mencionadas con el hecho de que los ordinales se comportan como un buen orden respecto a la pertenencia.

2.2 | Subconjuntos Cerrados No Acotados

Habiendo ya repasado las propiedades de filtros e ideales, finalmente podemos definir el primer concepto que nos servirá para probar los dos teoremas de Silver, objetivo de este capítulo.

Definición 2.9 *Sea α un ordinal límite y $C \subseteq \alpha$.*

(1) C es acotado en α si y sólo si existe $\beta < \alpha$ tal que para cada $\xi \in C$ se tiene que $\xi < \beta$. En caso contrario decimos que C es no acotado.

(2) C es cerrado en α si y sólo si para todo ordinal límite $\delta < \alpha$ tal que $C \cap \delta$ es no acotado en δ se tiene que $\delta \in C$.

(3) C es un club en α si y sólo si es un subconjunto cerrado y no acotado de α.

(4) Un ordinal γ es un punto de acumulación de C si $C \cap \gamma$ es no acotado en γ. Al conjunto de puntos de acumulación de un conjunto C lo denotamos por $der(C)$.

(5) Si α es un cardinal de cofinalidad no numerable, C es llamado un club especial si y sólo si C es un club en α tal que $t.o.(C) = cf(\alpha)$.

(6) Una sucesión de clubs, $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$, donde A es un conjunto de ordinales, es una sucesión tipo club si y sólo si A es un conjunto de ordinales límite y, para cada $\beta \in A$, se tiene que C_β es un subconjunto club de β tal que $t.o.(C_\beta) = cf(\beta)$, donde $t.o.(C_\beta)$ es el tipo de orden de C_β, es decir, el único ordinal que es isomorfo a $\langle C_\beta, \in \rangle$.

Los subconjuntos club de un ordinal son la herramienta fundamental para definir el concepto de subconjunto estacionario de un ordinal. Comenzaremos demostrando algunas propiedades de los clubs sobre ordinales de cofinalidad no numerable, para más tarde considerar el caso de los clubs sobre cardinales, para lo cual recordamos un tipo muy importante de funciones entre ordinales. Recordemos que se denota por $\text{Lím}(\alpha)$ al conjunto de los ordinales límite que son elementos del ordinal α.

Definición 2.10 *Sean α y β ordinales y $f : \alpha \to \beta$.*

(i) Decimos que f es continua si y sólo si para cada $\gamma \in \text{Lím}(\alpha)$ se cumple que $f(\gamma) = \bigcup f[\gamma]$

(ii) Decimos que f es normal si y sólo si f es monótona creciente y continua.

Proposición 2.11 *Sea α un ordinal de cofinalidad no numerable. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) El conjunto Lím(α) es un club en α.

(ii) La intersección de cualquier cantidad finita de subconjuntos club en α es un subconjunto club en α.

(iii) El ordinal α contiene un club C tal que $t.o.(C) = cf(\alpha)$.

(iv) Si E es un subconjunto no acotado de α, entonces $der(E) \cap \alpha$ es un club en α.

(v) La imagen de cualquier función normal f con dominio α es un club en $sup(f[\alpha])$.

(vi) Si α es regular, para cada subconjunto club C en α, existe f función de α en sí mismo normal tal que $f[\alpha] = C$.

(vii) Si α es singular, para cada subconjunto club C en α existe f función con domino $t.o.(C)$ y codominio α normal tal que $f[\alpha] = C$.

(viii) Si α es singular, existe un subconjunto club especial en α.

Demostración

(i) De la definición se sigue que Lím(α) es cerrado, por tanto, basta probar que Lím(α) es no acotado en α. Sea $\beta \in \alpha$. Definiremos una sucesión $\{\beta_n : n \in \omega\} \subseteq \alpha$ por inducción hasta ω. Como $\beta \in \alpha$ y α es ordinal límite, $s(\beta) \in \alpha$, de donde definimos $\beta_0 := s(\beta)$. Ahora bien, suponiendo definido $\beta_n \in \alpha$, nuevamente al ser α un ordinal límite, podemos definir $\beta_{s(n)} = s(\beta_n)$. De este modo, hallamos $\{\beta_n : n \in \omega\}$ sucesión estrictamente creciente contenida en α. Sea $\gamma := sup\{\beta_n : n \in \omega\}$; como γ es el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales, γ es un ordinal límite y, además, también tenemos que $\beta < \gamma$. Por otro lado, como α tiene cofinalidad no numerable, se tiene que $\gamma \in \alpha$. Entonces encontramos $\gamma \in$ Lím(α) tal que $\beta < \gamma$ y, por tanto, concluimos que Lím(α) es no acotado en α. Así, Lím(α) es un club en α.

(ii) Procedemos por inducción sobre n, con n la cantidad de subconjuntos club de α tomados, para lo cual iniciaremos con $n = 2$. Sean C_1 y C_2 subconjuntos club en α, probaremos que $C := C_1 \cap C_2$ es un subconjunto club en α. Primero veamos que C es cerrado en α. Consideremos γ un ordinal límite en α tal que $C \cap \gamma$ es no acotado en γ. Se puede ver entonces que tanto $C_1 \cap \gamma$ como $C_2 \cap \gamma$ son subconjuntos no acotados de γ. Como C_1 y C_2 son cerrados, $\gamma \in C_1 \cap C_2$ y C es un subconjunto cerrado de α. Ahora veamos que C es no acotado en α, para ello consideramos $\beta \in \alpha$ cualquier ordinal. Construiremos dos sucesiones $\{a_n\} \subseteq C_1$ y $\{b_n\} \subseteq C_2$ estrictamente crecientes de tal modo que $\beta < a_0$, $\beta < b_0$ y, para cada n natural, $a_n < b_n < a_{n+1}$ por recursión sobre n. Como C_1 es no acotado en α, se tiene que existe $a_0 \in C_1$ mínimo tal que $\beta < a_0$ y, análogamente, como C_2 es no acotado en α, se tiene que existe $b_0 \in C_2$ mínimo tal que $a_0 < b_0$. Supongamos ya definidos $a_n \in C_1$ y $b_n \in C_2$ tales que $a_n < b_n$. De modo análogo al paso base, podemos hallar $a_{n+1} \in C_1$ y b_{n+1} tales que $b_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} < b_{n+1}$. Así, encontramos las suceciones buscadas. Definimos ahora $a := sup\{a_n\}$ y $b := sup\{b_n\}$ respectivamente, entonces, como α tiene cofinalidad no numerable, C_1 y C_2 son cerrados y a y b son ordinales límite al ser supremo de sucesiones crecientes de ordinales contenidas en C_1 y C_2 respectivamente, se tiene que $a \in C_1$ y $b \in C_2$ y, por su construcción, $a = b$ y $\beta < a$. Así, $a \in C$, $\beta < a$ y C es no acotado en α. Concluimos entonces que C es un subconjunto club en α, lo que completa nuestro paso base.

Ahora supongamos que la proposición es válida para $m > 2$ y consideremos C un conjunto de $m + 1$ subconjuntos club en α. Hay que probar que $\bigcap C$ es un subconjunto club en

α. Para ello, obsérvese que, si $c \in C$, $\bigcap C = \bigcap(C \setminus \{c\}) \cap c$ donde, por la hipótesis de inducción, $\bigcap(C \setminus \{c\})$ es un subconjunto club en α al ser la intersección de m subconjuntos clubs en α. Así, $\bigcap C$ es la intersección de dos subconjuntos club en α, por el paso base, se tiene que es un club en α, lo que concluye la inducción.

(iii) Sabemos que existe $g : cf(\alpha) \to \alpha$ cofinal y estrictamente creciente. Más aún, podemos hallar una g cofinal y normal, redefiniendo apropiadamente por recursión, de forma que en el paso límite la evaluación de un ordinal límite sea el supremo de las evaluaciones previas, tomando como base una función de $cf(\alpha)$ en α que ya sea cofinal y estrictamente creciente, de donde g es un morfismo de orden entre $cf(\alpha)$ y $g[cf(\alpha)]$. Por tanto, el tipo de orden de $g[cf(\alpha)]$ es $cf(\alpha)$. Por la definición de g se tiene que $g[cf(\alpha)] \subseteq \alpha$ y como g es cofinal en α $g[cf(\alpha)]$ es no acotado en α. Así, basta ver que $g[cf(\alpha)]$ es cerrado en α. Sea $\gamma \in \alpha$ un límite tal que $\gamma \cap g[cf(\alpha)]$ es no acotado en γ. Hay que demostrar que $\gamma \in g[cf(\alpha)]$. Como $\gamma \cap g[cf(\alpha)]$ es no acotado en γ, para cada $\beta < \gamma$ existe $\gamma_\beta \in cf(\alpha)$ tal que $\beta < g(\gamma_\beta)$ y $g(\gamma_\beta) \in \gamma$.

Consideremos entonces $\eta := sup\{\gamma_\beta : \beta \in \gamma\}$. Como cada γ_β es un elemento de $cf(\alpha)$, tenemos que $\eta \leqslant cf(\alpha)$. Además, si η fuera un ordinal sucesor, digamos $\eta = s(\zeta)$, entonces necesariamente existe δ tal que $\eta = \gamma_\delta$ y, por tanto, $g(\eta) \in \gamma$. De este modo, se tiene que $g(\eta) < g(\gamma_\eta)$ y, como g es estrictamente creciente, se sigue que $\eta < \gamma_\eta$, lo que contradice el hecho de que η sea el supremo. Concluimos entonces que η es un ordinal límite.

Supongamos que $\eta = cf(\alpha)$, entonces, recordando que $\gamma \in \alpha$ y que α es un ordinal límite, podemos considerar $\zeta \in cf(\alpha)$ tal que $s(\gamma) < g(\zeta)$, y como $\eta = cf(\alpha)$, existe $\alpha_0 \in \gamma$ tal que $\zeta < \gamma_{\alpha_0}$.

Por tanto, por la monotonía de g se tiene que:

$$s(\gamma) < g(\zeta) < g(\gamma_{\alpha_0}) < \gamma$$

lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que $\eta < cf(\alpha)$ y, por tanto, $\eta \in dom(g)$.

Aseguramos que $g(\eta) = \gamma$. En efecto, como g es normal, entonces es continua, de donde $g(\eta) = sup\{g(\gamma_\beta) : \beta \in \gamma\}$. De la definición de cada γ_β se sigue que $g(\eta) \leqslant \gamma$.

Supongamos ahora que $g(\eta) < \gamma$, entonces existe $\beta_0 \in \gamma$ tal que $sup\{g(\gamma_\beta) : \beta \in \gamma\} \leqslant \beta_0$. Por tanto, se tiene que

$$sup\{g(\gamma_\beta) : \beta \in \gamma\} \leqslant \beta_0 < g(\gamma_{\beta_0}) \leqslant sup\{g(\gamma_\beta) : \beta \in \gamma\}$$

de donde obtenemos una contradicción.

Así, $g(\eta) = \gamma$ y, por tanto, $\gamma \in g[cf(\alpha)]$. Concluimos entonces que $g[cf(\alpha)]$ es cerrado en α y no acotado, por lo que es un club en α con tipo de orden $cf(\alpha)$.

(iv) Sea E un subconjunto no acotado de α. Veamos primero que $der(E) \cap \alpha$ es no acotado en α. Sea $\beta \in \alpha$. Construiremos una sucesión estrictamente creciente $\{\beta_n : n \in \omega\} \subseteq E$ a partir de β de tal forma que $sup\{\beta_n : n \in \omega\} \in der(E)$.

Como E es no acotado en α, existe $\beta_0 \in E$ tal que $\beta < \beta_0$. Suponiendo definido $\beta_n \in E$, como $\beta_n \in \alpha$, existe $\beta_{s(n)} \in E$ tal que $\beta_n < \beta_{s(n)}$. Tenemos así que $\{\beta_n : n \in \omega\}$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales contenida en E, de donde, por la definición de $der(E)$, se tiene que $\eta := sup\{\beta_n : n \in \omega\} \in der(E)$. Como α tiene cofinalidad no numerable, tenemos que $\eta \in \alpha$. Entonces $\eta \in der(E) \cap \alpha$ y $\beta < \eta$ Por tanto, podemos concluir que $der(E) \cap \alpha$ es no acotado en α.

Ahora veamos que $der(E) \cap \alpha$ es cerrado en α. Sea $\gamma \in \alpha$ un límite tal que $der(E) \cap \alpha \cap \gamma$ es no acotado en γ. Hay que demostrar que $\gamma \in der(E) \cap \alpha$.

Por la definición, basta ver que $sup(\gamma \cap E) = \gamma$. Sea $\delta \in \gamma$, como $der(E) \cap \alpha \cap \gamma$ es no acotado en γ, existe $\beta \in der(E) \cap \alpha \cap \gamma$ tal que $\delta < \beta$. Como $\beta \in der(E)$, existe $\zeta \in E$ tal que $\delta < \zeta < \beta$. Particularmente, encontramos $\zeta \in E$ tal que $\delta < \zeta$, de donde podemos concluir que $\gamma \cap E$ es no acotado en γ y que $sup(\gamma \cap E) = \gamma$. Así, $\gamma \in der(E) \cap \alpha$ y, por tanto, $der(E) \cap \alpha$ es cerrado en α.

Como $der(E) \cap \alpha$ cumple las dos propiedades, se tiene que $der(E) \cap \alpha$ es un club en α.

(v) Sea f una función normal con dominio α. Directamente de la definición de supremo se sigue que $f[\alpha]$ es no acotado en $sup(f[\alpha])$. Ahora bien, con una prueba análoga a la dada en el segundo inciso, podemos ver que $f[\alpha]$ es un subconjunto cerrado de $sup(f[\alpha])$ (utilizando la continuidad de f), de donde podemos concluir que $f[\alpha]$ es un club en $sup(f[\alpha])$.

(vi) Supongamos que α es regular y que C es un club en α. Sea $\rho := t.o.(C)$ y f el isomorfismo de orden entre ρ y C. Entonces f es estrictamente creciente y, por tanto, monótona. Además, como $f[\rho] = C$, f es cofinal en α. Concluimos entonces que $cf(\rho) = cf(\alpha)$ y, como α es regular, $\alpha \leqslant \rho$.

Por otro lado, como f es estrictamente creciente, tenemos que, para cada $\zeta \in \rho$, se tiene que $\zeta \leqslant f(\zeta)$. Como α es límite, C es club de α y $\rho = t.o.(C)$, $\rho \leqslant sup(f[\rho]) = \alpha$ y, por tanto, $\alpha = \rho$.

Dado que $\alpha = \rho$, tenemos que $f \in^{\alpha} \alpha$. Por tanto, sólo falta ver que f es continua.

Sea γ un ordinal límite en ρ. Como f es monótona, para cada $\beta \in \gamma$, $f(\beta) < f(\gamma)$. Por tanto, $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\} \leqslant f(\gamma)$.

Por otra parte, como f es monótona, se tiene que $\{f(\beta) : \beta \in \gamma\}$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales, de donde $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\}$ es un ordinal límite tal que $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\} \cap C$ es no acotado en $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\}$. Por tanto, $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\} \in C$, de donde existe $\delta \in \rho$ tal que $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\} = f(\delta)$ y, por tanto, $f(\delta) \leqslant f(\gamma)$. Como f es monótona, se sigue que $\delta \leqslant \gamma$.

Si suponemos que $\delta < \gamma$, como γ es límite, se tiene que $\delta + 1 < \gamma$. Por tanto,

$$f(\delta) < f(\delta + 1) \leqslant sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\} = f(\delta),$$

lo cual es una contradicción.

Entonces $\delta = \gamma$ y $sup\{f(\beta) : \beta \in \gamma\} = f(\gamma)$. Por tanto, f es continua.

Como f ya era cofinal y estrictamente creciente, se concluye que f es la función buscada.

(vii) Nuevamente, si C es un club en α, consideramos $\rho := t.o.(C)$ y f el isomorfismo de orden entre ρ y C. Por el inciso anterior, sabemos que f es normal y, como $C \subseteq \alpha$, se tiene que $f \in^{t.o.(C)} \alpha$. Así, f es la función buscada.

(viii) Por el segundo inciso, sabemos que existe $f : cf(\alpha) \to \alpha$ cofinal y normal, y es tal que $f(cf(\alpha))$ es un club en α de tipo de orden $cf(\alpha)$, es decir, es un club especial en α.

$\dashv$

Con ayuda de la proposición previa, podemos probar el siguiente resultado, el cual nos dice qué tan grande puede ser el tipo de orden de un club en un ordinal α cualquiera.

Corolario 2.12 *Si α es un ordinal y C es un club en α, entonces se tiene que $cf(\alpha) \leqslant t.o.(C) \leqslant \alpha$.*

Demostración Por el inciso (v) de la proposición anterior (para el cual no se requería de ninguna condición sobre la cofinalidad de α), si $\rho := t.o.(C)$, entonces $cf(\rho) = cf(\alpha)$, de donde se tiene que $cf(\alpha) \leqslant \rho$. Por otra parte, como $C \subseteq \alpha$, también se tiene que $\rho \leqslant \alpha$. Por tanto, podemos concluir que $cf(\alpha) \leqslant t.o.(C) \leqslant \alpha$.

$\dashv$

El hecho de que α fuera un ordinal de cofinalidad no numerable se uso sólo de manera parcial en la proposición anterior. La razón para restringirnos a tales ordinales es que en el caso en el que consideremos el conjunto de los subconjuntos clubs de un ordinal de cofinalidad no numerable, tal conjunto cumplirá ciertas propiedades bastante interesantes. Con el fin de demostrar tales propiedades, primero daremos una definición.

Definición 2.13 *Dado un ordinal de cofinalidad no numerable α, definimos el conjunto $Club(\alpha)$ como el conjunto $\{X \subseteq \alpha : \exists C(C\, es\ club\ en\ \alpha \wedge C \subseteq X)\}$.*

Con las condiciones ya dadas, finalmente podemos relacionar los conceptos de filtros y club de un ordinal. Una de las propiedades más importantes de los filtros es el hecho de que la intersección de una cantidad finita de sus elementos sigue siendo un elemento del filtro, lo que en particular nos permite concluir que tal intersección es no vacía. El hecho es que $Club(\alpha)$ cumple una propiedad aún más fuerte que la recién mencionada, así como otras que también se relacionan con intersecciones de sus elementos. Con el fin de reducir notación, le daremos nombre a tales propiedades, y a continuación presentaremos el lema que nos dará finalmente la relación buscada entre filtros y clubs.

Definición 2.14 *Sean A un conjunto no vacío y κ un cardinal.*

(i) Sea F un filtro en A. Decimos que F es κ-completo si para cada $S \subseteq F$ tal que $|S| < \kappa$, se tiene que $\bigcap S \in F$.

(ii) De manera dual, si I es un ideal en A tal que para cada $S \subseteq I$ con $|S| < \kappa$, se tiene que $\bigcup S \in I$, entonces decimos que I es un ideal κ-completo.

(iii) Si A es un ordinal límite y F es un filtro en A tal que, para cada subconjunto $\{X_\zeta : \zeta \in cf(A)\}$ de F, se tiene que el conjunto

$$\Delta\{X_\zeta : \zeta \in cf(A)\} := \{\beta \in A : \forall\zeta(\zeta \in \beta \to \beta \in X_\zeta)\}$$

también es un elemento de F, entonces se dice que F es un filtro normal en A. Al conjunto $\Delta\{X_\zeta : \zeta \in cf(A)\}$ se le llama la intersección diagonal de la familia $\{X_\zeta : \zeta \in cf(A)\}$.

(iv) De manera dual, si A es un ordinal límite α e I es un ideal en α tal que para cada $\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\}$ de I se tiene que el conjunto

$$\nabla\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\} := \{\beta \in \alpha : \exists\zeta(\zeta \in \beta \wedge \beta \in X_\zeta)\}$$

también es un elemento de I, entonces se dice que I es un ideal normal en α. Al conjunto $\nabla\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\}$ se le llama la unión diagonal de la familia $\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\}$.

Ahora demostraremos los resultados prometidos, para después dar ejemplos que muestran que las hipótesis no pueden debilitarse.

Lema 2.15 *Sea α un ordinal de cofinalidad no numerable. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) Si C es una familia de clubs en α tal que $0 < |C| < cf(\alpha)$, entonces $\bigcap C$ es un club en α.

(ii) Sea $\{C_\gamma : \gamma \in \alpha\}$ una sucesión de clubs en α. Si se tiene que para cada $\beta \in \alpha$ el conjunto $\bigcap\{C_\gamma : \gamma < \beta\}$ es no acotado en α, entonces $\Delta\{C_\gamma : \gamma \in \alpha\}$ es un club en α.

(iii) El conjunto $Club(\alpha)$ es un filtro normal $cf(\alpha)$-completo.

Demostración

(i) Sean $0 < \tau < cf(\alpha)$ y $\{C_\gamma : \gamma \in \tau\}$ una familia de clubs en α. Sea $\mathcal{C} := \bigcap\{C_\gamma : \gamma \in \tau\}$. Veremos que $\mathcal{C}$ es cerrado en α.

Sea η un límite en α tal que $\mathcal{C} \cap \eta$ es no acotado en η. Sea $\gamma \in \tau$ y $\delta \in \eta$. Como $\mathcal{C} \cap \eta$ es no acotado en η, existe $\beta \in \mathcal{C} \cap \eta$ tal que $\delta < \beta$. Al tener que $\beta \in \mathcal{C}$, en particular $\beta \in C_\gamma$ y, por tanto, existe $\beta \in C_\gamma \cap \eta$ tal que $\delta \in \beta$. Se tiene entonces que $C_\gamma \cap \eta$ es no acotado en η y C_γ es un club en α y η es un ordinal límite. Concluimos que $\eta \in C_\gamma$ y, al ser γ un elemento arbitrario de τ, tenemos ya que $\eta \in \mathcal{C}$.

Ahora procederemos por inducción hasta $cf(\alpha)$ para probar que la intersección de una cantidad menor a $cf(\alpha)$ clubs en α es no acotada en α.

Comenzando con $\tau = 1$ se tiene que $\bigcap\{C_\gamma : \gamma \in \tau\} = C_0$ y, como C_0 es un club en α, se tiene que es no acotado en α.

Supongamos ahora que $\tau = s(\epsilon)$ y que la intersección de cualesquiera ϵ clubs en α es no acotada en α. Entonces tenemos que

$$\mathcal{C} := \bigcap\{C_\gamma : \gamma < \tau\} = C_\epsilon \cap \bigcap\{C_\gamma : \gamma < \epsilon\}.$$

De este modo podemos ver a $\mathcal{C}$ como intersección de dos clubes por hipótesis de inducción, de modo que, por la misma prueba dada acerca de que la intersección finita de clubs en α es un club en α, obtenemos que $\mathcal{C}$ es un club en α.

Por último, supongamos que τ es un ordinal límite y que la proposición se cumple para cada $\delta < \tau$. Sea $\sigma < \alpha$, definimos, por inducción hasta τ una sucesión estrictamente creciente de la siguiente forma:

Como C_0 es no acotado en α, elegimos $\gamma_0 \in C_0$ tal que $\sigma < \gamma_0$ y, suponiendo definido γ_i para cada $i < j$ con $j < \tau$, sea $\gamma_j \in \bigcap\{C_i : i < j\}$ tal que $sup\{\gamma_i : i < j\} < \gamma_j$. En cada paso, γ_j está bien definido pues, al tener que $j < \tau$, por hipótesis de inducción tenemos que $\bigcap\{C_i : i < j\}$ es no acotado en α y, como $j < \tau < cf(\alpha)$, se cumple que $sup\{\gamma_i : i < j\} \in \alpha$.

Entonces, si $\beta := sup\{\gamma_j : j < \tau\}$, se cumple que $\sigma < \gamma_0 < \beta < \alpha$ y, como la sucesión construida es estrictamente creciente, para cada $k < \tau$, $\beta = sup\{\gamma_i : k < i < \tau\}$.

Concluimos entonces que β es un ordinal límite y que, para cada $k < \tau$, β es el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales contenida en C_k. Por tanto, β es límite y $\beta \cap C_k$ es no acotado en β. Como cada C_k es cerrado en α, para cada $k < \tau$, $\beta \in C_k$. Por tanto, $\beta \in \bigcap\{C_\gamma : \gamma < \tau\}$ y es tal que $\sigma < \beta$. De donde $\bigcap\{C_\gamma : \gamma < \tau\}$ es no acotado en α, lo que prueba el paso límite y concluye la inducción.

Se concluye entonces que la intersección de una cantidad menor a $cf(\alpha)$ clubs en α es a su vez un club en α.

(ii) Supongamos que $\{C_\gamma : \gamma \in \alpha\}$ es una sucesión de clubs en α con las propiedades requeridas. Sea $\mathfrak{C} := \Delta\{C_\gamma : \gamma \in \alpha\}$. Hay que probar que $\mathfrak{C}$ es un club en α.

Primero veamos que $\mathfrak{C}$ es cerrado en α. Sea $\tau \in \alpha$ ordinal límite tal que $\mathfrak{C} \cap \tau$ es no acotado en τ y sea $\delta < \tau$. Hay que demostrar que $\tau \in C_\delta$. Como τ es un ordinal límite, dado $i < \tau$, $\tau = sup\{\sigma : i < \sigma < \tau\}$. Más aún, como $\mathfrak{C} \cap \tau$ es no acotado en τ, tenemos que $\tau = sup\{\sigma \in \mathfrak{C} : \delta < \sigma < \tau\}$. Entonces, dado $\sigma \in \mathfrak{C}$ tal que $\delta < \sigma$ y $\sigma < \tau$, se tiene que $\sigma \in C_\delta$, de donde τ es un ordinal límite y es el supremo de una sucesión de elementos en C_δ. Como C_δ es cerrado en α, $\tau \in C_\delta$. Concluimos entonces que $\tau \in \mathfrak{C}$ y que $\mathfrak{C}$ es cerrado en α.

Ahora sea $\sigma < \alpha$. Definimos, por recursión hasta ω, una sucesión $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ de la siguiente forma:

$\sigma_0 := \text{mín}(C_0 \setminus \sigma)$ y, suponiendo que σ_n está definido, definimos

$$\sigma_{s(n)} = \text{mín}(\bigcap\{C_\gamma : \gamma \in \sigma_n\} \setminus s(\sigma_n)).$$

En cada caso σ_n está definido puesto que, por hipótesis, para cada $\gamma < \alpha$ el conjunto $\bigcap\{C_\delta : \delta < \gamma\}$ es no acotado en α.

Definimos ahora $\beta := sup\{\sigma_n : n \in \omega\}$, como α tiene cofinalidad no numerable, tenemos que $\beta \in \alpha$. Como β es el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales, β es un ordinal límite y, por construcción, $\sigma < \beta$, de donde sólo faltaría probar que $\beta \in \mathfrak{C}$.

Sea $\zeta < \beta$, entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $\zeta < \sigma_{n_0}$ y, como β es límite, se cumple que $\beta = sup\{\sigma_n : n > n_0\}$.

Por otro lado, sea $n > n_0$, en particular $n \neq 0$, de donde existe $m \in \omega$ tal que $n = s(m)$. Así, por definición, $\sigma_n \in \bigcap\{C_\gamma : \gamma < \sigma_m\}$ y $\sigma_n \notin s(\sigma_m)$. Además, se tiene que $\zeta < \sigma_{n_0} \leqslant \sigma_m$, de donde $\sigma_n \in C_\zeta$ y, por tanto, β es el supremo de una sucesión estrictamente creciente de elementos de C_ζ. Como C_ζ es un club en α, se concluye que $\beta \in C_\zeta$.

Entonces tenemos que $\beta \in \bigcap\{C_\zeta : \zeta < \beta\}$ y, por tanto, que $\beta \in \mathfrak{C}$. Se sigue que $\mathfrak{C}$ es no acotado en α y, como ya era cerrado, se tiene que $\mathfrak{C}$ es un club en α.

(iii) Primero veamos que $Club(\alpha)$ es en efecto un filtro en α.

Como α es un ordinal límite, es no vacío, de donde cualquier club en α también debe ser no vacío. Por tanto, tenemos que $\varnothing$ no puede contener a ningún club en α, es decir, $\varnothing \notin Club(\alpha)$. Por otro lado, se tiene que $\text{Lím}(\alpha) \subseteq \alpha$, de donde $\alpha \in Club(\alpha)$.

Ahora, sean $X \in Club(\alpha)$ y $Y \subseteq \alpha$ tal que $X \subseteq Y$. Como $X \in Club(\alpha)$, existe un club C en α tal que $C \subseteq X$. Pero entonces tenemos que $C \subseteq Y$ y, por tanto, que $Y \in Club(\alpha)$.

Por último, si X y Y en $Club(\alpha)$, entonces existen clubs C_1 y C_2 en α tales que $C_1 \subseteq X$ y $C_2 \subseteq Y$, y, por tanto, tenemos que $C_1 \cap C_2 \subseteq X \cap Y$. Por otro lado, como $cf(\alpha)$ es no numerable, en particular $2 < cf(\alpha)$, de donde, por el primer inciso, tenemos que $C_1 \cap C_2$ también es un club en α y está contenido en $X \cap Y$, de donde concluimos que $X \cap Y \in Club(\alpha)$. Como se cumplen las tres propiedades, $Club(\alpha)$ es un filtro en α.

Más aún, si consideramos $\{X_\lambda : \lambda < \kappa\} \subseteq Club(\alpha)$ para algún $\kappa < cf(\alpha)$, entonces existe una familia de clubs $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ tal que para cada $\eta < \kappa$, se tiene que $C_\eta \subseteq X_\eta$, de donde $\bigcap\{C_\lambda : \lambda < \kappa\} \subseteq \bigcap\{X_\lambda : \lambda < \kappa\}$. Como $\kappa < cf(\alpha)$, nuevamente por el primer inciso se tiene que $\bigcap\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es un club en α, de donde se concluye que $\bigcap\{X_\lambda : \lambda < \kappa\} \in Club(\alpha)$ y, por tanto, $Club(\alpha)$ es un filtro $cf(\alpha)$-completo.

Para ver que es un filtro normal basta considerar nuevamente los conjuntos $\{X_\lambda : \lambda < cf(\alpha)\} \subseteq Club(\alpha)$ y $\{C_\lambda : \lambda < cf(\alpha)\}$ como arriba. En efecto, para cada $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ con $\kappa < cf(\alpha)$ se tiene que $\bigcap\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es no acotado en α (al ser un club nuevamente por el primer inciso), así, una prueba análoga a la expuesta en el segundo inciso demuestra que $\Delta\{C_\lambda : \lambda < cf(\alpha)\}$ es un club en α.

Por otro lado, se puede ver que $\Delta\{C_\lambda : \lambda < cf(\alpha)\} \subseteq \Delta\{X_\lambda : \lambda < cf(\alpha)\}$, de donde $\Delta\{X_\lambda : \lambda < cf(\alpha)\} \in Club(\alpha)$ y $Club(\alpha)$ resulta ser un filtro normal $cf(\alpha)$-completo en α.

$\dashv$

Para finalizar esta sección, veremos ejemplos en los cuales se muestra que las hipótesis principales del lema anterior son indispensables para que se cumpla el mismo. Es decir, veremos que el primer inciso del lema falla en los casos en los que α tiene cofinalidad no numerable, o bien, cuando consideramos una familia de clubs en α de cardinalidad $cf(\alpha)$. Así, concluiremos que el lema anterior no puede mejorarse.

Ejemplo 2

(i) *Sea $\alpha = \omega$, entonces tenemos que $cf(\alpha) = \omega$. Consideremos $P = \{n \in \omega : n \text{ es par}\}$ e $I = \{n \in \omega : n \text{ es impar}\}$. Como ω no tiene ningún ordinal límite como elemento, se tiene que cualquier subconjunto de ω es cerrado, de donde P e I son cerrados y se puede ver que son no acotados. Por tanto, P e I son dos subconjutos clubs de ω ajenos, lo que muestra que la hipótesis de que α tenga cofinalidad no numerable es necesaria en el lema previo.*

(ii) *Sea α un ordinal límite cualquiera. Sabemos que existe $f : cf(\alpha) \to \alpha$ cofinal y estrictamente creciente. Veamos primero que, para cada $\beta < cf(\alpha)$, se tiene que $\alpha \setminus f(\beta)$ es un club en α.*

Sea entonces $\beta \in cf(\alpha)$ y $\delta \in \alpha$. Si $\delta \in f(\beta)$, entonces se tiene que $f(\beta) \in \alpha \setminus f(\beta)$ y que $\delta \in f(\beta)$. Por otro lado, si $f(\beta) \leqslant \delta$, como α es un ordinal límite, tenemos que $s(\delta) \in \alpha$ y es tal que $\delta < s(\delta)$ y $s(\delta) \in \alpha \setminus f(\beta)$. Concluimos entonces que $\alpha \setminus f(\beta)$ es no acotado en α.

Ahora supongamos que $\gamma \in \alpha$ y es un ordinal límite tal que $\gamma \cap (\alpha \setminus f(\beta))$ es no acotado en γ. Como γ es un ordinal límite, en particular $0 \in \gamma$. Por tanto, existe $\delta \in \gamma \cap (\alpha \setminus f(\beta))$ tal que $0 < \delta$. Entonces $\delta \in \alpha \setminus f(\beta)$ y $\delta < \gamma$, de donde concluimos que $\gamma \notin f(\beta)$ y, por tanto, se tiene ya que $\gamma \in \alpha \setminus f(\beta)$.

Entonces se tiene que el conjunto $\{\alpha \setminus f(\beta) : \beta \in cf(\alpha)\}$ es una familia de clubs en α, y además, cumple que:

$$\bigcap\{\alpha \setminus f(\beta) : \beta \in cf(\alpha)\} = \alpha \setminus \bigcup\{f(\beta) : \beta \in cf(\alpha)\} = \alpha \setminus \alpha = \varnothing,$$

donde la penúltima igualdad es válida, puesto que f es cofinal en α.

Concluimos entonces que $\{\alpha\setminus f(\beta) : \beta \in cf(\alpha)\}$ es una familia de clubs en α de cardinalidad $cf(\alpha)$ con intersección vacía, de donde se tiene que la hipótesis de que la familia de clubs sea de cardinalidad menor que $cf(\alpha)$ en el lema anterior es necesaria.

2.3 | Conjuntos estacionarios

Con respecto a los clubs de un cardinal dado, existe otro tipo de subconjuntos del cardinal que también son una herramienta fundamental a desarrollar en el presente trabajo: los conjuntos estacionarios, primeramente pensados también en un ordinal.

Definición 2.16 *Sea α un ordinal de cofinalidad no numerable. Decimos que un subconjunto X de α es estacionario en α si para cada subconjunto C en $Club(\alpha)$ se tiene que $C \cap X \neq \varnothing$.*

Inmediatamente de la definición, se tiene que un subconjunto X de un ordinal de cofinalidad no numerable α es estacionario si y sólo si intersecta a todos los clubs en α.

Demostremos algunas propiedades inciales acerca de tales conjuntos.

Proposición 2.17 *Sea α un ordinal de cofinalidad no numerable. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *Todo subconjunto de α que contenga a un subconjunto club de α es estacionario en α.*

(ii) *Todo subconjunto estacionario de α es no acotado en α.*

(iii) Toda unión de menos de $cf(\alpha)$ subconjuntos no estacionarios en α es un subconjunto no estacionario en α.

(iv) Para cada $\lambda < cf(\alpha)$, si λ es cardinal regular, entonces el conjunto $E^{\alpha}_{\lambda} := \{\gamma \in \alpha : cf(\gamma) = \lambda\}$ es estacionario en α. Más aún, todo club C en α tiene un elemento η tal que $cf(\eta) = \lambda$ y $C \cap \eta$ es un club en η.

Demostración

(i) Sea C un club en α, $X \subseteq \alpha$ tal que $C \subseteq X$ y D otro club cualquiera en α. Como α es un ordinal de cofinalidad no numerable, sabemos que $C \cap D \neq \varnothing$. Entonces se tiene $\varnothing \subsetneq C \cap D \subseteq X \cap D$, de donde $X \cap D \neq \varnothing$ y, por tanto, concluimos que X es estacionario en α.

(ii) Sea $\beta \in \alpha$ y S un subconjunto estacionario de α. Por una prueba análoga al segundo inciso del ejemplo 2, se tiene que $\alpha \setminus s(\beta)$ es un club en α, y, por tanto, se cumple que $S \cap (\alpha \setminus s(\beta)) \neq \varnothing$, de donde se tiene que hay $\delta \in S$ tal que $\beta < \delta$. Concluimos entonces que S es no acotado en α.

(iii) Sean $\kappa < cf(\alpha)$ y $\{S_\beta : \beta \in \kappa\}$ una familia de subconjuntos no estacionarios de α, entonces, para cada $\beta \in \kappa$ existe C_β un subconjunto club en α tal que $C_\beta \cap S_\beta = \varnothing$. Como α es un ordinal de cofinalidad no numerable, se tiene que $\bigcap\{C_\beta : \beta \in \kappa\}$ es un subconjunto club en α tal que

$$\bigcap\{C_\beta : \beta \in \kappa\} \cap \bigcup\{S_\beta : \beta \in \kappa\} = \varnothing.$$

Concluimos entonces que $\bigcup\{S_\beta : \beta \in \kappa\}$ es un subconjunto no estacionario en α.

(iv) Sea $\lambda < cf(\alpha)$ un cardinal regular y C un club en α. Definimos por recursión una sucesión $\{c_\kappa : \kappa < \lambda\}$ contenida en C estrictamente creciente de la siguiente forma, dado $\delta \in \lambda$:

Si $\delta = 0$, sea $c_0 := \min C$, dicho mínimo existe, pues C es no vacío al ser un club en α.

Si $\delta = s(\beta)$ y suponemos definido c_β, sea $c_\delta := \min(C \setminus s(c_\beta))$. Dicho mínimo existe, pues C es no acotado en α y $s(c_\beta) \in \alpha$ al ser α un ordinal límite.

Por último, si δ es un ordinal límite y, para cada $\beta < \delta$, suponemos definido el correspondiente c_β, definimos $c_\delta := sup\{c_\beta : \beta < \delta\}$. Como se tiene que $\delta < \lambda < cf(\alpha)$, $c_\delta \in \alpha$.

Hay que demostrar que $\{c_\delta : \delta < \lambda\} \subseteq C$. Procedemos por inducción hasta λ.

Para el paso base, como c_0 es el mínimo de C, en particular $c_0 \in C$.

Para el caso en que $\delta = s(\beta)$, suponiendo que $c_\beta \in C$, por definición se tiene que $c_{s(\beta)} = \min(C \setminus s(c_\beta))$ que en particular es un elemento de C.

Por último, si consideramos $\gamma \in \lambda$ límite y que, para cada $\delta \in \gamma$, se tiene que $c_\delta \in C$, como $\{c_\delta : \delta \in \gamma\}$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales, se tiene que, por su definición, c_γ es un ordinal límite tal que $C \cap c_\gamma$ es no acotado en c_γ. Como C es un club en α, se concluye que $c_\gamma \in C$.

Por tanto, por inducción concluimos que $\{c_\beta : \beta \in \lambda\} \subseteq C$. Sea $\eta := sup\{c_\beta : \beta \in \lambda\}$.

Ahora bien, como $\lambda < cf(\alpha)$, entonces tenemos que $\eta \in \alpha$ y, al ser el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales, es un ordinal límite y además $cf(\lambda) = cf(\eta)$. Por tanto, $\lambda = cf(\eta)$ y $\eta \in C$. Concluimos entonces que $\eta \in C \cap E^{\alpha}_{\lambda}$. Por lo tanto, E^{α}_{λ} es un subconjunto estacionario de α.

Por otro lado, como $\{c_\beta : \beta \in \lambda\}$ es monótona y para cada $\gamma \in \text{Lím}(\lambda)$ se tiene que $c_\gamma = sup\{c_\delta : \delta < \gamma\}$, tal sucesión, vista como una función f de λ en η, es una función normal. Por tanto, se tiene que $im(f)$ es un club en η. Y como $im(f) \subseteq C \cap \eta$, entonces $C \cap \eta$ es no acotado en η y, por tanto, es un club en η.

$\dashv$

El tercer inciso de la proposición anterior nos indica una relación entre el conjunto de subconjuntos no estacionarios de un ordinal de cofinalidad no numerable y un ideal en el mismo ordinal. Esta relación quedará asentada en el siguiente corolario.

Corolario 2.18 *Si α es un ordinal de cofinalidad no numerable, entonces el conjunto $nonstat(\alpha) := \{X \subseteq \alpha : X$ es no estacionario en $\alpha\}$ es un ideal $cf(\alpha)$-completo.*

Demostración Por el tercer inciso de la proposición anterior, se tiene que $nonstat(\alpha)$ es cerrado bajo uniones de subconjuntos con cardinalidad menor a $cf(\alpha)$. Como α es un club en α, $\alpha \notin nonstat(\alpha)$ y $\varnothing \in \alpha$. Por último, si $X \in nonstat(\alpha)$ y $Y \subseteq X$, entonces Y es ajeno al mismo club en α al cual era ajeno X, de donde se tiene que $nonstat(\alpha)$ es cerrado bajo subconjuntos.

Concluimos que $nonstat(\alpha)$ es un ideal $cf(\alpha)$-completo en α.

$\dashv$

Continuando esta idea, veremos cómo se comporta el ideal de los conjuntos no estacionarios de un ordinal α de cofinalidad no numerable con respecto a otros ideales en tal ordinal. Para ello, veremos primero algunas nuevas definiciones.

Definición 2.19 *Sea A un conjunto no vacío de ordinales. Definimos $I_b(A) := \{X \subseteq A : \exists\beta(\beta \in A \wedge X \subseteq \beta)\}$ como el ideal de los subconjuntos acotados de A. Un ultrafiltro U en A es llamado no acotado si $U \cap I_b(A) = \varnothing$.*

Lema 2.20 *Si α es un ordinal de cofinalidad no numerable, entonces $nonstat(\alpha)$ es un ideal normal en α tal que $I_b(\alpha) \subseteq nonstat(\alpha)$.*

Demostración Por el corolario anterior, $nonstat(\alpha)$ es un ideal $cf(\alpha)$-completo en α. Primero veremos que $I_b(\alpha) \subseteq nonstat(\alpha)$. Sea $X \in I_b(\alpha)$, por definición, existe $\beta \in \alpha$ tal que $X \subseteq \beta$. Al ser α ordinal límite, sabemos que $\alpha \setminus \beta$ es un club en α tal que $X \cap (\alpha \setminus \beta) \neq \varnothing$. Así, $X \in nonstat(\alpha)$ y concluimos que $I_b(\alpha) \subseteq nonstat(\alpha)$.

Ahora veamos que $nonstat(\alpha)$ es normal. Sea $\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\} \subseteq nonstat(\alpha)$, entonces, para cada $\zeta \in \alpha$, existe un club C_ζ en α tal que $C_\zeta \cap X_\zeta = \varnothing$. Por el inciso (*ii*) del lema 2.15, se tiene que $\Delta\{C_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\}$ es un club en α. Aseguramos entonces que $\Delta\{C_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\} \cap \nabla\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\} = \varnothing$. En otro caso, supongamos que δ está en ambos conjuntos. Por definición, tenemos que $\delta \in \bigcap\{C_\eta : \eta \in \delta\}$ y que $\delta \in \bigcup\{X_\eta : \eta \in \delta\}$. Por tanto, existe $\epsilon \in \delta$ tal que $\delta \in X_\epsilon \cap C_\epsilon$, contradiciendo que tal intersección es vacía.

Concluimos entonces que $\Delta\{C_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\} \cap \nabla\{X_\zeta : \zeta \in cf(\alpha)\} = \varnothing$ y, por tanto, que $nonstat(\alpha)$ es un ideal normal en α.

$\dashv$

Proposición 2.21 *Sea κ cardinal regular no numerable e I un ideal normal en κ. Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) Si I es κ-completo y $\bigcup I = \kappa$, entonces $I_b(\kappa) \subseteq I$ y $\{\epsilon + 1 : \epsilon \in \kappa\} \in I$

(ii) Si $I_b(\kappa) \subseteq I$, entonces $nonstat(\kappa) \subseteq I$. Es decir, $nonstat(\kappa)$ es el $\subseteq$-menor ideal κ-completo y normal tal que $\bigcup(nonstat(\kappa)) = \kappa$.

Demostración

(i) Sea $\epsilon < \kappa$, como $\bigcup I = \kappa$, tenemos que $\epsilon \in \bigcup I$, de donde existe $i \in I$ tal que $\epsilon \in i$. Por tanto, concluimos que $\{\epsilon\} \subseteq i$ y, como $\epsilon \in \kappa$ fue arbitraria, se tiene que $\forall\epsilon(\epsilon \in \kappa \rightarrow \{\epsilon\} \in I)$, pues I es un ideal en κ.

Con esto, al ser I un ideal κ-completo, podemos concluir que, para cada $\alpha \in \kappa$ el conjunto

$$X_\alpha := \{\epsilon < \kappa : \epsilon \leq \alpha + 1\}$$

es un elemento de I, de donde se tiene que $I_b(\kappa) \subseteq I$.

Ahora bien, como I es un ideal normal en κ, se tiene que $\nabla\{X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\} \in I$, y, como para cada $\epsilon \in \kappa$ se tiene por definición que $\epsilon + 1 \in X_\epsilon$, podemos concluir que, para cada $\epsilon \in \kappa$, $\epsilon + 1 \in \bigcup\{X_\eta : \eta \in \epsilon + 1\}$.

Concluimos entonces que $\{\epsilon + 1 : \epsilon \in \kappa\} \subseteq \nabla\{X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\}$ y, como I es un ideal en κ, que $\{\epsilon + 1 : \epsilon \in \kappa\} \in I$.

(ii) Supongamos que $I_b(\kappa) \subseteq I$ y sea $T \in nonstat(\kappa)$, entonces existe C un club en κ tal que $T \cap C = \varnothing$. Por el corolario 2.12, sabemos que $t.o.(T) = cf(\kappa) = \kappa$. Consideremos f un isomorfismo de orden y normal entre κ y C, y para cada $\alpha < \kappa$, sean X_α como en el inciso anterior y $Y_\alpha := \{\epsilon < \kappa : \epsilon \leq f(\alpha)\}$. Como $I_b(\kappa) \subseteq I$, para cada $\alpha \in \kappa$, $Y_\alpha \in I$. Como I es un ideal normal, se tiene que $\nabla\{X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\} \in I$ y que $\nabla\{Y_\epsilon : \epsilon \in \kappa\} \in I$ y, por tanto, $D \in I$, donde $D := \nabla\{X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\} \cup \nabla\{Y_\epsilon : \epsilon \in \kappa\}$.

Por otro lado, se puede ver que $\kappa \setminus D = \Delta\{\kappa \setminus X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\} \cap \Delta\{\kappa \setminus Y_\epsilon : \epsilon \in \kappa\}$ de donde, si $\beta \in \kappa \setminus D$, en particular $\beta \in \Delta\{\kappa \setminus X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\}$, de donde, por la prueba del inciso anterior, se tiene que β es un ordinal límite. Asimismo, como $\beta \in \Delta\{\kappa \setminus X_\epsilon : \epsilon \in \kappa\}$, se tiene que para cada $\alpha < \beta$, $f(\alpha) < \beta$.

Por último, tenemos que

$$\beta_0 := sup\{f(\alpha) : \alpha < \beta\} \leq \beta = sup\{\alpha : \alpha < \beta\} \leq sup\{f(\alpha) : \alpha < \beta\} = \beta_0,$$

donde la última desigualdad es válida, pues f es monótona creciente al ser normal. Entonces $\beta = \beta_0$ y, como β_0 es un ordinal límite cuya intersección con el club C es no acotada, $\beta \in C$ y, por tanto, $\beta \notin T$. Entonces $T \subseteq D$ y $T \in I$, como se quería demostrar.

$\dashv$

Antes de demostrar las proposiciones principales de esta sección, veremos un último lema relacionado con el ideal de los subconjuntos acotados en un cardinal regular no numerable κ.

Lema 2.22 *Si κ es un cardinal regular no numerable e I es un ideal normal en κ tal que $I_b(\kappa) \subseteq I$, entonces I es κ-completo.*

Demostración Sea $\mu < \kappa$ y sea $\{I_\alpha : \alpha < \mu\} \subseteq I$. Hay que demostrar que $\bigcup\{I_\alpha : \alpha < \mu\} \in I$. Como $\mu \subseteq \kappa$ y es acotado, por hipótesis tenemos que $\mu \in I$. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos el conjunto J_α del siguiente modo: si $\alpha < \mu$, entonces $J_\alpha := I_\alpha \setminus \mu$, y como el conjunto vacío en otro caso. Consideremos entonces $\alpha \in \kappa$ cualquiera. Si $\mu \leq \alpha$, como $\varnothing \in I$, tenemos que $J_\alpha \in I$. Por otro lado, si $\alpha < \mu$, por definición tenemos que $J_\alpha \subseteq I_\alpha$ y, utilizando que I es un ideal en κ, obtenemos que, para cada $\alpha < \kappa$, $J_\alpha \in I$. Ahora bien, como I es normal, que $\nabla\{J_\alpha : \alpha < \kappa\} \in I$.

Probaremos que $\bigcup\{J_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \nabla\{J_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea $j \in \bigcup\{J_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces existe $\beta \in \kappa$ tal que $j \in J_\beta$. Como $j \in J_\beta$, se tiene que $J_\beta \neq \varnothing$ de donde, por definición, necesariamente $\beta < \mu$ y, por tanto, $j \in I_\beta \setminus \mu$. Entonces $\mu \leq j$, de donde $J_\beta \in \{J_\alpha : \alpha < j\}$ y, por tanto, $j \in \bigcup\{J_\alpha : \alpha < j\}$. Por definición, concluimos que $j \in \nabla\{J_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y que $\bigcup\{J_\alpha : \alpha < \kappa\} \in I$.

Como I es un ideal en κ, obtenemos también que $\bigcup\{J_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \mu \in I$, de donde para concluir basta probar que $\bigcup\{I_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \bigcup\{J_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \mu$.

En efecto, si consideramos $\gamma \in \bigcup\{I_\alpha : \alpha < \kappa\}$, existe $\alpha < \mu$ tal que $\gamma \in I_\alpha$. Pero

$$I_\alpha \subseteq (I_\alpha \setminus \mu) \cup \mu \subseteq \bigcup\{J_\alpha : \alpha < \mu\} \cup \mu,$$

de donde se sigue la contención deseada y podemos finalmente concluir que I es un ideal κ-completo.

$\dashv$

Teniendo construida ya nuestra herramienta, podemos proceder a probar los dos teoremas principales de esta sección, los cuales servirán a su vez para probar los dos teoremas principales de este capítulo, ambos debidos a Silver.

Dado un cardinal de cofinalidad no numerable, los clubs tienen la característica de ser cerrados bajo intersecciones de a lo más la cofinalidad del cardinal. Contrario a lo que se podría pensar intuitivamente, aún en el caso de considerar un cardinal de cofinalidad no numerable, el conjunto de subconjuntos estacionarios de dicho cardinal no cumple una propiedad parecida. Más aún, cuando el cardinal involucrado nuevamente tiene cofinalidad no numerable, y es mayor que ω_1, se sigue fácilmente del siguiente lema, que ya probamos, la existencia de subconjuntos estacionarios ajenos de tal cardinal.

Lema 2.23 *Sean κ un cardinal de cofinalidad no numerable y $\lambda < cf(\kappa)$ un cardinal regular. Entonces el conjunto $E^\kappa_\lambda := \{\gamma \in \kappa : cf(\gamma) = \lambda\}$ es estacionario en κ.*

De hecho, en ese contexto, considerando cardinales regulares no numerables, se tiene que los conjuntos estacionarios pueden partirse en otros conjuntos estacionarios, como asegura el Teorema de Solovay.

Teorema 2.24 (Solovay) *Sea κ un cardinal regular no numerable y S un subconjunto estacionario de κ. Entonces S tiene una partición en κ subconjuntos estacionarios de κ.*

Pospondremos la demostración de este teorema hacia el final de la presente sección, primero presentando algunos lemas previos al mismo y el otro teorema objetivo de esta sección.

A pesar de que en los últimos lemas y proposiciones nos hemos restringido a cardinales, el concepto de conjunto estacionario no se restringe a tales tipos de ordinales, puesto que el concepto de club se define para cualquier ordinal límite. Es importante mencionar lo anterior, pues a continuación veremos una de las propiedades más importantes de los conjuntos estacionarios de la manera más general, es decir, considerando cualquier ordinal límite pero que conserve la propiedad de tener cofinalidad no numerable. Requerimos una definición previa.

Definición 2.25 *Sea α un ordinal límite y $X \subseteq \alpha$. Una función $f : X \to \alpha$ se llama regresiva si $\forall\beta(\beta \in X \setminus \{0\} \to f(\beta) \in \beta)$.*

Teorema 2.26 (Lema de Fodor) *Sean α un ordinal de cofinalidad no numerable y S un subconjunto estacionario en α. Sea $f : S \to \alpha$ una función regresiva. Entonces existe $\beta < \alpha$ tal que el conjunto $f^{-1}[\beta]$ es estacionario en α.*

Más aún, si α es regular, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\{\beta\}]$ es estacionario en α. Es decir, f es constante en un subconjunto estacionario de S. Se dice entonces que f tiene una fibra estacionaria.

Demostración Supongamos que, para cada $\beta < \alpha$, existe $T_\beta \subseteq \alpha$ club tal que $T_\beta \cap f^{-1}[\beta] = \varnothing$.

Por el tercer inciso de la proposición 2.11, consideremos $C \subseteq \alpha$ un club tal que $t.o.(C) = cf(\alpha)$. Para cada $\beta < \alpha$, definimos $\mu(\beta)$ como el mínimo de los elementos en C mayores que β. Tal μ está bien definida, pues C en particular es no acotado en α. Sea $C_\beta = \bigcap\{T_\gamma : \gamma \in C \cap (\mu(\beta) + 1)\}$.

Como $t.o.(C) = cf(\alpha)$, en particular $|C| = cf(\alpha)$ y, utilizando que α es límite y que $C \cap (\mu(\beta) + 1)$ es acotado en C, obtenemos que $|C \cap (\mu(\beta) + 1)| < cf(\alpha)$. Así, C_β resulta ser intersección de una cantidad menor a $cf(\alpha)$ clubs en α y, por tanto, para cada $\beta < \alpha$, C_β es un club en α. Más aún, como por hipótesis tenemos que $T_{\mu(\beta)} \cap f^{-1}[\mu(\beta)] = \varnothing$ y por definición tenemos que $\beta \leq \mu(\beta)$, $\beta \subseteq \mu(\beta)$ y, por tanto, $T_{\mu(\beta)} \cap f^{-1}[\beta] = \varnothing$. Como $C_\beta \subseteq T_{\mu(\beta)}$, concluimos que $C_\beta \cap f^{-1}[\beta] = \varnothing$.

Por otra parte, la sucesión $\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ es, por definición, decreciente de donde, por el segundo inciso del lema 2.15, tenemos que $D := \Delta\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ es un club en α y, por tanto,

$D \cap Lim(\alpha)$ también lo es. Como S es estacionario en α, se sigue que $S \cap D \cap Lim(\alpha) \neq \varnothing$, de donde consideramos γ en tal intersección.

Como f es una función regresiva, se tiene que $f(\gamma) < \gamma$. Al ser γ un ordinal límite, obtenemos que $f(\gamma)+1 < \gamma$ y, por tanto, al tener que $\gamma \in D$, se sigue que $\gamma \in C_{f(\gamma)+1}$. Sin embargo, sabemos que $f(\gamma) \in f(\gamma)+1$, de donde $\gamma \in f^{-1}[f(\gamma)+1]$ y, por tanto, $C_{f(\gamma)+1} \cap f^{-1}[f(\gamma)+1] \neq \varnothing$, contradiciendo lo anterior. Concluimos entonces que existe $\beta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\beta]$ es estacionario en α.

Ahora supongamos que α es regular y, por lo arriba probado, consideremos un ordinal $\beta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\beta]$ es estacionario en α. Como $f^{-1}[\beta] = \bigcup\{f^{-1}[\{\delta\}] : \delta < \beta\}$, por el cuarto lema de la sección, al ser un conjunto estacionario que a su vez es unión de β subconjuntos de α y$\beta < \alpha = cf(\alpha)$, alguno de los uniendos es estacionario en α. Es decir, existe $\delta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\{\delta\}]$ es estacionario en α.

$\dashv$

El lema de Fodor, mejor conocido en la literatura como Pressing Down Lemma, es de suma importancia no sólo en la exposición aquí mostrada, sino que en general es una propiedad muy fuerte y utilizada de los conjuntos estacionarios y las recién definidas funciones regresivas.

Teniendo ya el primero de los dos teoremas que son el objetivo de esta sección, procedemos a probar algunos lemas previos para luego dar una demostración del Teorema de Solovay. Comenzamos relacionando nuevamente el concepto de funciones regresivas, esta vez con los ideales de un cardinal regular, obteniendo de hecho una equivalencia respecto a tales funciones y los ideales normales.

Lema 2.27 *Sean κ un cardinal regular e I un ideal en κ. Entonces I es normal si y sólo si, para cada $S \subseteq \kappa$ tal que $S \notin I$ y cada función regresiva con dominio S, existe un conjunto $S_0 \subseteq S$ tal que $S_0 \notin I$ y $f\restriction_{S_0}$ es constante.*

Demostración Probaremos primero la suficiencia. Sea $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ contenido en I y sea X su unión diagonal. Sea $\beta \in X$, entonces $\beta \in \bigcup\{X_\gamma : \gamma < \beta\}$, de donde obtenemos que el conjunto $\{\gamma < \beta : \beta \in X_\gamma\}$ es no vacío.

Definimos entonces $f : X \to \kappa$ como, para $\beta \in X$, $f(\beta) = min\{\epsilon < \beta : \beta \in X_\epsilon\}$. Por lo dicho arriba, f está bien definida y además, por definición, para cada $\beta \in X \setminus \{\varnothing\}$ se tiene que $f(\beta) < \beta$. Entonces f es una función regresiva con dominio X.

Supongamos que $X \notin I$. Por hipótesis existe $S_0 \subseteq X$ tal que $S_0 \notin I$ y f es constante en S_0, es decir, existe $\eta \in \kappa$ tal que $f[S_0] = \{\eta\}$. Pero, por definición de f, esto implica que, para cada $\gamma \in S_0$, $\gamma \in X_\eta$, de donde $S_0 \subseteq X_\eta \in I$ y, por tanto, $S_0 \in I$, contradiciendo lo anterior. Concluimos entonces que $X \in I$ y que I es normal.

Ahora procedemos a probar la necesidad. Sea I un ideal normal, $S \subseteq \kappa$ tal que $S \notin I$ y f una función regresiva con dominio S y valores en κ.

Para cada $\gamma < \kappa$, definimos $S_\gamma = f^{-1}[\{\gamma\}]$. Primero observemos que, si $0 \in S$ y $S \setminus \{0\} \in I$, necesariamente $\{0\} \notin I$ y $\{0\} \subseteq S$ y se cumple que f es constante en $\{0\}$. Así, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $0 \notin S$.

Aseguramos entonces que, de hecho, $S = \nabla\{S_\gamma : \gamma < \kappa\}$. En efecto, como por definición tenemos que $\nabla\{S_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq S$, basta probar la contención opuesta. Sea $\alpha \in S$, entonces $\alpha \neq 0$ de donde, utilizando que f es regresiva, tenemos que $f(\alpha) < \alpha$. Obtenemos entonces que $\alpha \in f^{-1}[\{f(\alpha)\}]$ y, por tanto, como $f(\alpha) < \alpha$, podemos deducir que $\alpha \in \bigcup\{S_\gamma : \gamma < \alpha\}$ de donde, por definición, $\alpha \in \nabla\{S_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Así, $S = \nabla\{S_\gamma : \gamma < \kappa\}$.

Ahora bien, como I es normal y $S \notin I$, existe $\gamma < \kappa$ tal que $S_\gamma \notin I$. Como $S_\gamma \subseteq S$ y para cada $\alpha \in S_\gamma$ se tiene que $f(\alpha) = \gamma$, f es constante en S_γ y S_γ es el conjunto buscado.

$\dashv$

Corolario 2.28 *Sea κ un cardinal regular, I un ideal normal en κ y $X \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus I$, entonces $I\restriction_X$ es un ideal normal en κ.*

Demostración Utilizaremos la equivalencia dada en el lema anterior. Así pues, sea $S \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus I\restriction_X$ y $f : S \to \kappa$ regresiva. Por la definición de $I\restriction_X$, se tiene que $X \cap S \notin I$. Así, como I ya es normal en κ por hipótesis y $f\restriction_{X\cap S}$ es regresiva, por el lema anterior tenemos que existe $X_0 \subseteq X \cap S$ tal que $X_0 \notin I$ y existe $\gamma < \kappa$ tal que $f\restriction_{X\cap S}[X_0] = \{\gamma\}$. Como $X_0 = X_0 \cap X \notin I$, $X_0 \notin I\restriction_X$ y, habiendo probado las condiciones del lema anterior, podemos concluir que $I\restriction_X$ es un ideal normal en κ.

$\dashv$

Lema 2.29 *Sea κ un cardinal regular no numerable y S un subconjunto estacionario de κ. Entonces el conjunto*

$$T := \{\alpha \in S : cf(\alpha) = \omega \vee (cf(\alpha) > \omega \wedge S \cap \alpha \in nonstat(\alpha))\}$$

es estacionario en κ.

Demostración Sea $C \subseteq \kappa$ un club, entonces el conjunto $C' := \{\lambda < \kappa : \lambda \neq 0 \wedge sup(C \cap \lambda) = \lambda\}$ de puntos de acumulación de C es también un club en κ, de donde se tiene que $S \cap C' \neq \varnothing$. Consideremos $\alpha_0 := min(S \cap C')$ entonces por definición se tiene que $\alpha_0 \neq 0$ y, por tanto, α_0 es un ordinal límite, al ser un punto de acumulación. Así, como $sup(C \cap \alpha_0) = \alpha_0$, obtenemos que $\alpha_0 \in C$.

Por otra parte, si α_0 tiene cofinalidad numerable, por definición se tiene que $\alpha_0 \in T$, de donde ya tendríamos que $\alpha_0 \in T \cap C$. Supongamos entonces que α_0 tiene cofinalidad no numerable. Como α_0 es punto de acumulación de C, se tiene que $\alpha_0 \cap C'$ es un club en α_0, y como $\alpha_0 = min\{C' \cap S\}$, se tiene que $C' \cap S \cap \alpha_0 = \varnothing$, de donde $(C' \cap \alpha_0) \cap (S \cap \alpha_0) = \varnothing$. Concluimos entonces que $S \cap \alpha_0$ es no estacionario en α_0, por tanto, concluimos que T es estacionario en κ.

$\dashv$

Lema 2.30 *Sea κ un cardinal regular no numerable y $T \subseteq \kappa \cap Lim(\kappa)$ un conjunto estacionario. Si para cada $\alpha \in T$ se tiene que f_α es una sucesión normal cofinal en α, entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

(1) Existe $\epsilon < \kappa$ tal que, para cada $\lambda < \kappa$ el conjunto $T_\lambda := \{\alpha \in T : \epsilon \in dom(f_\alpha) \wedge \lambda \leq f_\alpha(\epsilon)\}$ es estacionario en κ.

(2) Existe $C \subseteq \kappa$ club tal que para cualesquiera α y γ en $C \cap T$ tales que $\gamma < \alpha$, se tiene que $\gamma = f_\alpha(\gamma)$.

Demostración Supongamos que la primera condición no se cumple, entonces tenemos que, para cada $\epsilon < \kappa$, existen $\lambda(\epsilon) < \kappa$ y un club C_ϵ en κ tales que $C_\epsilon \cap T_{\lambda(\epsilon)} = \varnothing$. Definimos entonces la función $\lambda : \kappa \to \kappa$ dada por el ordinal cuya existencia se afirma arriba.

Sea $D := \Delta\{C_\epsilon : \epsilon < \kappa\}$ y $C := \{\alpha \in D : \lambda[\alpha] \subseteq \alpha\} \cap Lim(\kappa)$. Como κ es regular no numerable, el conjunto de los ordinales límites menores que κ es un club en κ y D también lo es. Ahora veamos que $E := \{\alpha < \kappa : \lambda[\alpha] \subseteq \alpha)\}$ es un club en κ.

Primero veremos que E es cerrado. Sea $\gamma < \kappa$ un ordinal límite tal que $E \cap \gamma$ es no acotado en γ. Hay que ver que $\lambda[\gamma] \subseteq \gamma$. Sea $\beta \in \lambda[\gamma]$, entonces existe $\delta \in \gamma$ tal que $\beta = \lambda(\delta)$, como $E \cap \gamma$ es no acotado en γ, existe $\eta \in E \cap \gamma$ tal que $\delta < \eta$, es decir, $\delta \in \eta$. Entonces $\lambda(\delta) \in \lambda[\eta] \subseteq \eta \subseteq \gamma$, de donde $\lambda(\delta) \in \gamma$, es decir, $\beta \in \gamma$ y concluimos que E es cerrado.

Ahora veremos que E es no acotado en κ. Sea $\sigma < \kappa$, definiremos por recursión una sucesión estrictamente creciente $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ de la siguiente forma: $\sigma_0 := max\{\sigma + 1, sup(\lambda[\sigma]) + 1\}$ y, si suponemos que $\sigma_n \in \kappa$ está definido, definimos $\sigma_{s(n)} := max\{\sigma_n + 1, sup(\lambda[\sigma_n]) + 1\}$. Como κ es regular no numerable, para cada $\alpha \in \kappa$, $sup(\lambda[\alpha]) \in \kappa$, entonces se tiene que $\sigma_0 \in \kappa$ y, si $\sigma_n \in \kappa$, entonces $\sigma_{s(n)} \in \kappa$. Por tanto, la sucesión construida arriba es un subconjunto de κ. Como κ es regular no numerable, se tiene que $\gamma := sup\{\sigma_n : n \in \omega\}\kappa \in \kappa$ y, como $\sigma < \sigma_0$, se sigue que $\sigma < \gamma$. Ahora bien, sea $\beta \in \lambda[\gamma]$, por la construcción recursiva de γ, existe $m \in \omega$ tal que $\beta \in \sigma_m$, de donde $\lambda(\beta) \in \lambda[\sigma_m]$, y por tanto, $\lambda(\beta) \in sup(\lambda[\sigma_m]) \in \sigma_{s(m)} \in \gamma$. Concluimos entonces que $\lambda[\gamma] \subseteq \gamma$ y que $\gamma \in E$. Por tanto, E es no acotado en κ y, junto con la prueba dada arriba, podemos deducir que E es un club en κ.

Por último, dado que $C = D \cap E \cap Lim(\kappa)$, podemos concluir que C es un club en κ. Ahora, sean α y γ elementos de $C \cap T$ tales que $\gamma < \alpha$. Como $\alpha \in C$, en particular $\alpha \in D$ y, por tanto, para cada $\epsilon < \alpha$, tenemos que $\alpha \in C_\epsilon$. Así, para cada $\epsilon \in \alpha$, $\alpha \notin T_{\lambda(\epsilon)}$. Entonces, si $\epsilon \in \gamma \cap dom(f_\alpha)$, como $\alpha \notin T_{\lambda(\epsilon)}$, $f_\alpha(\epsilon) < \lambda(\epsilon)$. Como $\epsilon \in \gamma$ y $\gamma \in C$, $\lambda(\epsilon) \in \lambda[\gamma] \subseteq \gamma$, de donde, si $dom(f_\alpha) \leq \gamma$, entonces se tendría que $im(f_\alpha) \subseteq \gamma < \alpha$, lo cual contradice que f_α sea una función cofinal en α. Así, recordando que una sucesión normal siempre tiene por dominio a un ordinal, se tiene que $\gamma < dom(f_\alpha)$. Como f_α es normal y γ es un ordinal límite, se tiene que $f_\alpha(\gamma) \leq sup\{\lambda(\beta) : \beta < \gamma\} \leq \gamma$ y, al ser estrictamente creciente, se sigue que $\gamma \leq f_\alpha(\gamma)$. Concluimos que $f_\alpha(\gamma) = \gamma$, lo que concluye la demostración de la segunda afirmación del lema. $\dashv$

Finalmente estamos en condiciones de probar el Teorema de Solovay.

Teorema [Solovay] Sea κ un cardinal regular no numerable y S un subconjunto estacionario de κ. Entonces S tiene una partición en κ subconjuntos estacionarios de κ.

Demostración [del Teorema de Solovay] Sea $T := \{\alpha \in S : cf(\alpha) = \omega \vee (\omega < cf(\alpha) \wedge S \cap \alpha \in nonstat(\alpha))\}$, por el lema 2.29, sabemos que T es estacionario en κ.

Sea $\alpha \in T$. Si $cf(\alpha) = \omega$, sea $g_\alpha : \omega \to \alpha$ cofinal y estrictamente creciente. Definimos entonces $f_\alpha : \omega \to \alpha$ dada por $f_\alpha(n) = g_\alpha(n) + 1$. Así, f_α es cofinal, estrictamente creciente y, como $im(f_\alpha) \cap Lim(\kappa) = \varnothing$, se tiene que $im(f_\alpha) \cap T = \varnothing$.

Por otro lado, si $\omega < cf(\alpha)$, por definición de T tenemos que $S \cap \alpha$ es no estacionario en α, de donde existe un club C_α en α tal que $C_\alpha \cap S \cap \alpha = \varnothing$. Como C_α es un club, por el inciso (vi) de la proposición 2.11, podemos obtener una función normal f_α con dominio α tal que $im(f_\alpha) = C_\alpha$. Como $C_\alpha \subseteq \alpha$, $C_\alpha \cap S = \varnothing$ y, por tanto, $C_\alpha \cap T = \varnothing$ e $im(f_\alpha) \cap T = \varnothing$.

Entonces, para cada $\alpha \in T$ podemos hallar una sucesión cofinal f_α en α, tal que $im(f_\alpha) \cap T = \varnothing$, y como $T \subseteq \kappa \cap Lim(\kappa)$, tenemos las hipótesis del lema anterior. Así, se debe cumplir alguna de las dos condiciones expuestas en la conclusión del mismo. Pero si se cumpliera la segunda condición, entonces, para algún club C, dados β y γ en $C \cap T$ con $\gamma < \beta$, se tendría que $f_\alpha(\gamma) = \gamma$ y, en particular, $\gamma \in im(f_\alpha) \cap T$ contradiciendo la construcción de f_α. Entonces podemos concluir que se cumple la primera de tales condiciones. Es decir, existe $\epsilon < \kappa$ tal que, para cada $\lambda < \kappa$ el conjunto $T_\lambda = \{\alpha \in T : \epsilon \in dom(f_\alpha) \wedge \lambda \leq f_\alpha(\epsilon)\}$ es estacionario en κ.

Definimos ahora $f : T \to \kappa$ tal que, si $\epsilon \in dom(f_\alpha)$, entonces $f(\alpha) = f_\alpha(\epsilon)$ y $f(\alpha) = 0$ en otro caso.

Para cada $\lambda \neq 0$ se tiene que, por definición de f, $\{\alpha \in T : \epsilon \in dom(f_\alpha) \wedge \lambda \leq f_\alpha(\epsilon)\} \subseteq \{\alpha \in T : \lambda \leq f(\alpha)\}$, de donde $\{\alpha \in T : \lambda \leq f(\alpha)\}$ es estacionario en κ. Además, como cada función f_α tiene codominio α o $f(\alpha) = 0 < \alpha$, obtenemos que f es una función regresiva.

Denotamos por $X_\lambda := \{\alpha \in T : \lambda \leq f(\alpha)\}$, entonces, para cada $\lambda < \kappa$, X_λ es estacionario en κ. Por tanto, como $f\restriction_{X_\lambda}$ es regresiva y κ es regular no numerable, para cada $\lambda < \kappa$ existe $\gamma_\lambda < \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\gamma_\lambda\}] \cap X_\lambda$ es estacionario en κ. Por otro lado, si γ_λ y γ_μ son dos elementos distintos de κ entonces se tiene que

$$(f^{-1}[\{\gamma_\lambda\}] \cap X_\lambda) \cap (f^{-1}[\{\gamma_\mu\}] \cap X_\mu) = \varnothing.$$

Por lo tanto, los conjuntos $Y_\lambda := f^{-1}[\{\gamma_\lambda\}] \cap X_\lambda$ son ajenos por pares.

Además, por la definición de X_λ, para cada $\lambda < \kappa$ se tiene que, dado $\delta \in Y_\lambda$, $\lambda \leq f(\delta)$, de donde en particular $\lambda \leq \gamma_\lambda$. Con esto concluimos que el conjunto $\{\gamma_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es no acotado en κ y, como κ es regular, el conjunto de las γ_λ tiene cardinalidad κ. Por tanto, se tiene que $|\{Y_\lambda : \lambda < \kappa\}| = \kappa$, de donde obtenemos así un conjunto de κ subconjuntos estacionarios de κ ajenos por pares. Como cualquier supraconjunto de un estacionario es a su vez estacionario, basta elegir un

Y_λ y unir el complemento de la unión de los estacionarios obtenidos para así obtener finalmente una partición de S en κ suconjuntos estacionarios de κ, lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Tanto en la prueba del teorema de Solovay como en el lema de Fodor se hace uso del Axioma de Elección, lo cual en realidad no haría falta notar de no ser por lo siguiente. Como se mencionó anteriormente, si tenemos un cardinal κ mayor a ω_1, los conjuntos E^κ_λ para $\lambda < cf(\kappa)$ nos ayudan a obtener conjuntos estacionarios ajenos de κ. Sin embargo, el caso en que κ sea ω_1 es de hecho muy distinto. En efecto, puede probarse que hay modelos de ZF donde cualesquiera dos estacionarios en ω_1 se intersectan. Una de las formas de hacerlo es con el llamado Axioma de Determinación que, por tanto, es incompatible con el Axioma de Elección. Lo anterior puede consultarse en [Je1].

2.4 | Dos Teoremas de Silver

Finalmente estamos en condiciones de probar los dos teoremas de Silver mencionados en nuestra introducción, con las herramientas desarrolladas hasta el momento en este capítulo. Comenzaremos enunciando ambos teoremas, uno de los cuales se relaciona con la Hipótesis Generalizada del Continuo y el otro habla acerca de la Hipótesis del Cardinal Singular, abordada desde el capítulo uno.

Teorema 2.31 (Silver) *Sea κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable. Si para cada $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda = \lambda^+$, entonces $2^\kappa = \kappa^+$.*

Teorema 2.32 (Silver) *Si la Hipótesis del Cardinal Singular se cumple para todos los cardinales singulares de cofinalidad ω, entonces se cumple para todos los cardinales singulares.*

Para probar tales teoremas, requerimos probar una serie de lemas, en los cuales se aplicará lo desarrollado para subconjuntos estacionarios de un ordinal, pasando por propiedades de ultrafiltros en un ordinal. Para ello requerimos primero un par de definiciones.

Definición 2.33 *Sea κ un cardinal y f y g funciones con dominio κ. Decimos que f y g son casi ajenas si existe α_0 en κ tal que para cada $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene que $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Una familia de funciones $\mathcal{F}$, cada una con dominio κ, es una familia casi ajena si sus elementos son casi ajenos por pares.*

Teniendo en mente las definiciones anteriores, procedemos a enunciar y demostrar el primer lema.

Lema 2.34 *Supóngase que para cada α ordinal numerable se cumple que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$. Sean A_α con $\alpha < \omega_1$ conjuntos tales que $\{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$ es un conjunto estacionario en ω_1. Si $\mathcal{F}$ una familia casi ajena de funciones tal que $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ entonces $|\mathcal{F}| \leq \aleph_{\omega_1}$.*

Demostración Podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que si $E := \{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$, entonces para todo $\alpha \in E$, $A_\alpha \subseteq \omega_\alpha$.

Definimos $S_0 := \{\gamma < \omega_1 : \gamma \in \text{Lím}(\omega_1) \wedge A_\gamma \subseteq \omega_\gamma\}$. Como ω_1 es un ordinal límite, el conjunto de límites bajo ω_1 es un conjunto cerrado y no acotado en ω_1, por tanto, S_0 es estacionario en ω_1.

Entonces se tiene que para cualquier $f \in \mathcal{F}$ y cualquier $\gamma \in S_0$, $f(\gamma) < \omega_\gamma$.

Sean $f \in \mathcal{F}$ y $\gamma \in S_0$, como γ es un ordinal límite, se tiene que $\omega_\gamma = \bigcup\{\omega_\beta : \beta < \gamma\}$, y como $f(\gamma) < \omega_\gamma$, existe $\beta_\gamma < \gamma$ tal que $f(\gamma) < \omega_{\beta_\gamma}$. Entonces tenemos que la función $g : S_0 \to \omega_1$ tal que, para cada $\gamma \in S_0$ se tiene que $g(\gamma) = \beta_\gamma$, es una función regresiva con dominio estacionario S_0. Por el Lema de Fodor, existe $S_f \subseteq S_0$ estacionario tal que g es constante en S_f, es decir, que existe $\gamma \in \omega_1$ tal que para todo $\delta \in S_f$ se cumple que $f(\delta) \in \omega_\gamma$.

Usando lo anterior, a cada $f \in \mathcal{F}$ le asignamos una pareja ordenada $(S_f, f\restriction_{S_f})$ donde $S_f \subseteq S_0$ es estacionario y $f\restriction_{S_f}$ es acotada (al ser constante). Dadas f y g en $\mathcal{F}$, si se tiene que $f\restriction_{S_f} = g\restriction_{S_g}$, entonces $S_f = S_g$ y, como $\mathcal{F}$ es una familia casi ajena de funciones y S_f es no acotado (al ser estacionario), se tiene que $f = g$. Por tanto, la asignación definida es inyectiva.

Dado $S \subseteq \omega_1$, la cantidad de funciones acotadas de S en $\aleph_{\omega_1}$ es a lo más $\sum_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma^{|S|}$. Procederemos a acotar tal suma.

$$\sum_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma^{|S|} \leq \sum_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma^{\aleph_1} = \sup_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma^{\aleph_1}$$

y como por hipótesis $\forall\alpha(\alpha < \omega_1 \to \aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1})$, entonces se tiene que $\sum_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma^{|S|} \leq \aleph_{\omega_1}$. Como $|\mathcal{P}(\omega_1)| = 2^{\aleph_1}$ y por hipótesis $2^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1}$, se tiene que el número de parejas $(S_f, f\restriction_{S_f})$ es a lo más $\aleph_{\omega_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$ y como la correspondencia es inyectiva, se tiene que $|\mathcal{F}| \leq \aleph_{\omega_1}$.

$\dashv$

El lema anterior puede verse como el primer paso para demostrar nuestro siguiente lema.

Lema 2.35 *Supongamos que para cada ordinal numerable α se cumple que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$. Sean A_α con $\alpha < \omega_1$ conjuntos tales que $\{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}\}$ es un conjunto estacionario en ω_1. Si $\mathcal{F}$ es una familia casi ajena de funciones tal que $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ entonces $|\mathcal{F}| \leq \aleph_{\omega_1+1}$.*

Demostración Sea $S := \{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}\}$ y sea U un ultrafiltro que extiende al filtro de clubs y a S. Entonces tenemos que todo elemento de U es estacionario.

Podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que cada A_α es un conjunto de ordinales y que para cada $\alpha \in S$ se tiene que $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}$.

Definimos la relación $<$ en $\mathcal{F}$ como

$$f < g \leftrightarrow \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U.$$

Aseguramos que $(\mathcal{F}, <)$ es un orden lineal. En efecto, como para cada $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < f(\alpha)\} = \varnothing$ y U es un filtro, se tiene que para cada $f \in \mathcal{F}$ se cumple que $\neg(f < f)$, es decir, $<$ es antireflexiva.

Ahora sean f, g, h funciones en $\mathcal{F}$ y supongamos que $f < g$ y $g < h$. Hay que demostrar que $f < h$, es decir, que $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < h(\alpha)\} \in U$. Como U es un filtro, y tenemos que $f < g$ y $g < h$, se tiene que el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \omega_1 : g(\alpha) < h(\alpha)\}$ es un elemento de U y además, $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \omega_1 : g(\alpha) < h(\alpha)\} \subseteq \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < h(\alpha)\}$, de donde $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\}$ es un elemento de U (al contener a un elemento de U). Entonces $f < h$ y, por tanto, $<$ es transitiva.

Por último, sean f y g funciones en $\mathcal{F}$ y supongamos que $f \neq g$. Veremos que entonces $f < g$ o $g < f$. Como $f \neq g$ y $\mathcal{F}$ es casi ajena, se tiene que $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = g(\alpha)\}$ es acotado en ω_1, de donde no es estacionario y, por tanto, no está en U. Como U es un ultrafiltro, el complemento de $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = g(\alpha)\}$ está en U, de donde se obtiene que $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\} \cup \{\alpha < \omega_1 : g(\alpha) < f(\alpha)\} \in U$. Así, al ser U un ultrafiltro, se tiene que $\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$ o $\{\alpha < \omega_1 : g(\alpha) < f(\alpha)\} \in U$, es decir, $f < g$ o $g < f$. Por tanto, $<$ es tricotómico en $\mathcal{F}$, de donde se tiene ya que $(\mathcal{F}, <)$ es un orden total.

Ahora bien, para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada subconjunto estacionario T de ω_1, definimos el conjunto $\mathcal{F}_f^T := \{g \in \mathcal{F} : \forall\alpha(\alpha \in T \to g(\alpha) < f(\alpha))\}$. Así, se tiene que $\mathcal{F}_f^T \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} A'_\alpha$, donde, si $\alpha \in T$, entonces $A'_\alpha = f(\alpha)$. Y $A'_\alpha = A_\alpha$ en otro caso. Además, si consideramos el conjunto $S_f^g := \{\alpha \in \omega_1 : g(\alpha) < f(\alpha)\} \cap S$ entonces $S \in U$ y para cada $\alpha \in S_f^g$ se tiene que $f(\alpha) \in \omega_{\alpha+1}$. Por tanto, $|f(\alpha)| \leq \aleph_\alpha$ de donde, para cada $f \in \mathcal{F}$, al ser S_f^g estacionario en ω_1, por el lema anterior, tenemos que $|\mathcal{F}_f^{S_f^g}| \leq \aleph_{\omega_1}$.

Fijemos $f \in \mathcal{F}$. Dado $g \in \mathcal{F}$ tal que $g < f$, existe un T en U subconjunto de S tal que $g \in \mathcal{F}_f^T$ y, por tanto, $g \in \bigcup\{\mathcal{F}_f^T : g < f\}$.

En tal caso

$$|\{g \in F : g < f\}| \leq |\bigcup\{\mathcal{F}_f^T : T \in U \wedge T \subseteq S\}| \leq \sum_{T \in U \wedge T \subseteq S} |\mathcal{F}_f^T| \sum_{T \in U \wedge T \subseteq S} \aleph_{\omega_1} \leq$$

$$\sum_{T \in \mathcal{P}(\omega_1)} \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}|\mathcal{P}(\omega_1)| = \aleph_{\omega_1} 2^{\omega_1} \leq \aleph_{\omega_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1},$$

donde la última desigualdad es válida, puesto que por hipótesis $\aleph_0^{\omega_1} < \aleph_{\omega_1}$.

Entonces, $\mathcal{F}$ es un orden lineal tal que cada segmento inicial tiene tamaño menor a $\aleph_{\omega_1}^+ = \aleph_{\omega_1+1}$, de donde podemos concluir que $|\mathcal{F}| \leq \aleph_{\omega_1+1}$.

$\dashv$

Con los anteriores lemas en mente, y previo a probar nuestro siguiente lema, damos una nueva definición.

Definición 2.36 *Sea α un ordinal límite y sea $\langle \gamma_\xi : \xi < \alpha \rangle$ una sucesión no decreciente de ordinales. Definimos el límite de la sucesión por $lim_{\xi \to \alpha} \gamma_\xi = sup\{\gamma_\xi : \xi < \alpha\}$. Una sucesión de ordinales $\langle \gamma_\alpha : \alpha \in OR \rangle$ es normal si es creciente y continua, es decir, para cada ordinal límite α, $lim_{\xi \to \alpha} \gamma_\xi = \gamma_\alpha$.*

Lema 2.37 *Sea κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable y supongamos que para todo $\lambda < \kappa$ se cumple que $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$. Si para cada sucesión normal de cardinales $\langle \kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa) \rangle$ tal que $lim_{\alpha \to cf(\kappa)} \kappa_\alpha = \kappa$ el conjunto $\{\alpha < cf(\kappa) : \kappa_\alpha^{cf(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+\}$ es estacionario en $cf(\kappa)$, entonces $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$.*

Demostración Probaremos el lema en el caso $\kappa = \aleph_{\omega_1}$ con el fin de reducir notación, el caso general se deduce de éste al hacer cambios pertinentes de la misma. En tal caso, nuestra hipótesis es que, para cada $\alpha < \omega_1$, tenemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$.

Sea E el conjunto estacionario mencionado en las hipótesis, entonces, para cada $\alpha \in E$, se tiene que $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$. Hay que demostrar que $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1+1}$.

Para cada $h : \omega_1 \to \aleph_{\omega_1}$, definimos $f_h = \langle h_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ donde $h_\alpha(\zeta) = h(\zeta)$ siempre que $\zeta < \omega_1$ es tal que $h(\zeta) < \aleph_\alpha$ y $h_\alpha(\zeta) = 0$ en otro caso. Y definimos $\mathfrak{F} = \{f_h : h : \omega_1 \to \aleph_{\omega_1}\}$.

Consideremos $h : \omega_1 \to \aleph_{\omega_1}$ y $\alpha < \omega_1$, por definición sabemos que $dom(h_\alpha) = \omega_1$ y, dado $\zeta < \omega_1$, si $h(\zeta) < \omega_\alpha$, entonces $h_\alpha(\zeta) = h(\zeta) \in \omega_\alpha$, y si $\omega_\alpha \leq h(\zeta)$, $h_\alpha(\zeta) = 0 \in \omega_\alpha$. Por tanto, concluimos que $h_\alpha : \omega_1 \to \aleph_\alpha$ y que $\mathfrak{F} \subseteq \prod\limits_{\alpha < \omega_1} ({}^{\omega_1}\aleph_\alpha)$.

Ahora sean g y h funciones distintas con dominio ω_1 y codominio $\aleph_{\omega_1}$. Demostraremos que, en tal caso, f_g y f_h son funciones casi ajenas. Como $g \neq h$, existe $\alpha_0 \in \omega_1$ tal que $g(\alpha_0) \neq h(\alpha_0)$. Sea $\alpha_1 \in \omega_1$ tal que $h(\alpha_0), g(\alpha_0) \in \aleph_{\alpha_1}$ entonces, si $\alpha_1 \leq \beta < \omega_1$, tenemos que $h_\beta(\alpha_0) = h(\alpha_0) \neq g(\alpha_0) = g_\beta(\alpha_0)$, donde las igualdades son válidas, puesto que $h(\alpha_0), g(\alpha_0) \in \aleph_{\alpha_1} \leq \aleph_\beta$. Concluimos entonces que, si $\beta \in \omega_1$ es tal que $\alpha_1 < \beta$, entonces $h_\beta \neq g_\beta$ y, por tanto, para cada $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha_1 < \beta$, tenemos que $f_h(\beta) \neq f_g(\beta)$ y f_h y f_g son casi ajenas.

Ahora bien, como $\{\aleph_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión normal de cardinales cuyo límite es $\aleph_{\omega_1}$, por hipótesis tenemos que el conjunto $E := \{\alpha \in \omega_1 : \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_{\alpha+1}\}$ es estacionario en ω_1.

Para aplicar el lema anterior, debemos demostrar que el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : \aleph_\alpha^{\aleph_1} \leq \aleph_{\alpha+1}\}$ es estacionario. Como tenemos que $2^{\aleph_1} \leq \aleph_0^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$, existe $\delta < \omega_1$ tal que para cada $\gamma \geq \delta$ se cumple que $2^{\aleph_1} < \aleph_\gamma$. Además, como ω_1 es ordinal límite, sabemos que $\omega_1 \setminus \delta$ es un club en ω_1, de donde $E_0 := E \cap (\omega_1 \setminus \delta)$ es también estacionario en ω_1.

Ahora bien, si $\alpha \in E_0$ y cumple que $\aleph_1 \leq cf(\aleph_\alpha)$, entonces tendremos que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} \leq \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_{\alpha+1}$ de donde obtenemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} \leq \aleph_{\aleph_{\alpha+1}}$.

Ahora supongamos que $\alpha \in E_0$ y cumple que $cf(\aleph_\alpha) < \aleph_1$. Entonces necesariamente $cf(\aleph_\alpha) = \aleph_0$, de donde obtenemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$, $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_1}$ y, al ser singular, α es un ordinal límite.

Por el corolario 1.21, sabemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_1}$ es, o bien $2^{\aleph_1}$, o $\aleph_\alpha$ o $\gimel(\mu)$ para algún μ tal que $cf(\mu) \leq \aleph_1 < \mu$. Pero por lo visto arriba, la única posibilidad que se puede cumplir es la última, es decir, $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \mu^{cf(\mu)}$ y, pediremos que μ sea el mínimo que cumpla la condición.

Observemos que, como $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \mu^{cf(\mu)}$, se sigue que $(\aleph_\alpha^{\aleph_1})^{\aleph_1} = (\mu^{cf(\mu)})^{\aleph_1}$. Pero, por las leyes de los exponentes, sabemos que $(\aleph_\alpha^{\aleph_1})^{\aleph_1} = \aleph_\alpha^{\aleph_1}$ y, como $cf(\mu) \leq \aleph_1$, obtenemos que $(\mu^{cf(\mu)})^{\aleph_1} = \mu^{\aleph_1}$. Entonces tenemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \mu^{\aleph_1}$. Por otra parte, en el corolario 1.21, se dice que la μ tal que la igualdad se cumple satisface a su vez que $\mu \leq \aleph_\alpha$ y, como $cf(\mu) < \mu$, obtenemos que μ es un cardinal límite. Con esto concluimos que existe un ordinal límite $\beta \leq \alpha$ tal que $\mu = \aleph_\beta$, de donde $cf(\mu) = cf(\aleph_\beta) = cf(\beta) \leq \beta < \omega_1$ y, por tanto, $cf(\mu) = \aleph_0$. Aplicando lo anterior, obtenemos entonces que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \mu^{cf(\mu)} = \mu^{\aleph_0} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$.

Habiendo cubierto los dos casos, obtenemos que, para todo $\alpha \in E_0$, se tiene que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} \leq \aleph_{\alpha+1}$, de donde el conjunto es estacionario. Aplicando el lema anterior, obtenemos que $|\mathfrak{F}| \leq \aleph_{\omega_1+1}$ y, como $|\mathfrak{F}| = \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}$, obtenemos que $\aleph_{\omega_1}^{cf(\aleph_{\omega_1})} = \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1+1}$. Como por el segundo inciso del teorema 1.13 sabemos que $\aleph_{\omega_1} < \aleph_{\omega_1}^{cf(\aleph_{\omega_1})}$, $\aleph_{\omega_1}^{cf(\aleph_{\omega_1})} = \aleph_{\omega_1+1}$ como queríamos demostrar.

$\dashv$

Finamente estamos en condiciones de probar los teoremas enunciados al principio de esta sección. Comenzamos probando el teorema relacionado con la Hipótesis Generalizada del Continuo

Teorema 2.38 (Silver) *Sea κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable. Si para cada $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda = \lambda^+$ entonces $2^\kappa = \kappa^+$.*

Demostración Sea κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable tal que para cada $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda = \lambda^+$. Debemos demostrar que $2^\kappa = \kappa^+$. Probaremos las condiciones del lema anterior. Sea entonces $\lambda < \kappa$, si $\lambda < \omega$, entonces se tiene que $\lambda^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)}$ y como κ es un cardinal singular, se tiene que $cf(\kappa) < \kappa$, de donde $2^{cf(\kappa)} = (cf(\kappa))^+$. Como κ es un cardinal singular, es un cardinal límite; por tanto, $(cf(\kappa))^+ < \kappa$. Concluimos que, si λ es finito, entonces $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$.

Ahora supongamos que λ es infinito. Entonces se tienen dos casos

1. Si $\lambda \leq cf(\kappa)$, entonces $\lambda^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)}$. Por hipótesis, como $cf(\kappa) < \kappa$ al ser κ un cardinal singular, se tiene que $2^{cf(\kappa)} = cf(\kappa)^+$ de donde, como κ es un cardinal límite, $cf(\kappa)^+ < \kappa$. Por tanto, en este caso $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$.

2. Si $cf(\kappa) < \lambda$, entonces se tiene que $\lambda^{cf(\kappa)} \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$, donde la última igualdad es válida, pues $\forall\lambda\left(\lambda < \kappa \rightarrow 2^\lambda = \lambda^+\right)$ y, como κ es un cardinal límite, se tiene que $\lambda^+ < \kappa$, e igualmente concluimos que $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$.

Por tanto, en ambos casos se tiene que $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$. Entonces se tiene que $\forall\lambda(\lambda < \kappa \rightarrow \lambda^{cf(\kappa)} < \kappa)$. Ahora sea $\langle \kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\rangle$ una sucesión normal de cardinales tal que $lim_{\alpha\rightarrow cf(\kappa)}\kappa_\alpha = \kappa$ y sea $A := \{\alpha < cf(\kappa) : \kappa_\alpha^{cf(\kappa_\alpha)} = \kappa^+\}$. Hay que demostrar que A es estacionario en $cf(\kappa)$. Sea $\alpha < cf(\kappa)$ tal que κ_α es infinito, entonces tenemos que $\kappa_\alpha^+ \leq \kappa_\alpha^{cf(\kappa_\alpha)} \leq \kappa_\alpha^{\kappa_\alpha} = 2^{\kappa_\alpha}$, y como la sucesión es normal, es creciente, de donde sabemos que $\kappa_\alpha < \kappa$. Por tanto, por hipótesis se tiene que $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$. Entonces concluimos que $\{\alpha < cf(\kappa) : \aleph_0 \leq \kappa_\alpha\} \subseteq A$. Al tener que κ tiene cofinalidad no numerable, en particular $\aleph_0 < \kappa$ de donde existe $\gamma < cf(\kappa)$ tal que para cada $\delta > \gamma$ se tiene que $\aleph_0 < \kappa_\delta$.

Ahora sea $B \subseteq cf(\kappa)$ un club en $cf(\kappa)$, entonces en particular se tiene que B es no acotado en $cf(\kappa)$, de donde existe ξ en B tal que $\gamma \leq \xi$. Por tanto, $\aleph_0 \leq \kappa_\xi$, de donde se tiene que $\xi \in A$. Concluimos entonces que $A \cap B \neq \varnothing$, de donde A es estacionario en $cf(\kappa)$. Por el lema 2.37, tenemos que $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$. Por otro lado, como κ es un cardinal límite, tenemos dos casos para el valor de 2^κ.

1. Si $2^\kappa = 2^{<\kappa}\gimel(\kappa)$, como $2^{<\kappa} = sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \in CAR\}$ y suponemos que cualquier cardinal infinito $\lambda < \kappa$ cumple que $\lambda^+ = 2^\lambda$, se tiene que $2^{<\kappa} \leq \kappa$, de donde tenemos que $2^\kappa \leq \kappa\gimel(\kappa) = \kappa\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$. Por tanto, $\kappa^{cf(\kappa)} = 2^\kappa$ y concluimos que $2^\kappa = \kappa^+$.

2. Si $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$, entonces $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(2^{<\kappa})} \leq \kappa^{cf(2^{<\kappa})} = \kappa^{cf(\kappa)} \leq 2^\kappa$, donde la primera desigualdad es válida, puesto que $2^{<\kappa} \leq \kappa$; y la última igualdad es válida pues suponer que $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$ significa que la función del continuo bajo κ no es eventualmente constante, de donde $cf(\kappa) = cf(2^{<\kappa})$. Entonces nuevamente tenemos que $\kappa^{cf(\kappa)} = 2^\kappa$ y nuevamente concluimos que $2^\kappa = \kappa^+$.

Entonces, al ser los dos casos anteriores los únicos posibles, se tiene entonces que $2^\kappa = \kappa^+$, que es lo que se quería demostrar.

$\dashv$

Procedemos ahora a probar el Teorema de Silver relacionado a la Hipótesis del Cardinal Singular.

Teorema 2.39 (Silver) *Si la Hipótesis del Cardinal Singular se cumple para todos los cardinales singulares de cofinalidad ω, entonces se cumple para todos los cardinales singulares.*

Demostración Procedemos por inducción sobre $cf(\kappa)$. Por hipótesis, lo pedido se tiene para los cardinales singulares de cofinalidad numerable. Entonces sea κ cardinal singular de cofinalidad no numerable y supongamos que $2^{cf(\kappa)} < \kappa$. Probaremos las condiciones del lema 2.36, así pues, sea $\lambda < \kappa$, procedemos por inducción sobre λ y partimos en casos

Si $\lambda \leq cf(\kappa)$ entonces, por el teorema de exponenciación tenemos que $\lambda^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)}$ de donde $\lambda < \kappa$ por hipótesis.

Si existe $\mu < \lambda$ tal que $\lambda \leq \mu^{cf(\kappa)}$, entonces se tiene que $\lambda^{cf(\kappa)} = \mu^{cf(\kappa)} < \kappa$ por la hipótesis de inducción.

Si para cada $\mu < \lambda$ se tiene que $\mu^{cf(\kappa)} < \lambda$, tenemos dos subcasos. Si $cf(\lambda) > cf(\kappa)$, entonces $\lambda^{cf(\kappa)} = \lambda < \kappa$ por hipótesis.

El caso importante es cuando $cf(\lambda) \leq cf(\kappa)$, en tal caso $\lambda^{cf(\lambda)} = \lambda^{cf(\kappa)}$ y por hipótesis tenemos que $2^{cf(\lambda)} \leq 2^{cf(\kappa)} < \lambda$, de donde $2^{cf(\lambda)} < \lambda$. Por tanto, podemos concluir que λ es singular, $\lambda < \kappa$ y $2^{cf(\lambda)} < \lambda$, entonces, por la hipótesis de inducción o bien por hipótesis en el caso de que λ tenga cofinalidad numerable, obtenemos que $\lambda^{cf(\lambda)} = \lambda^+ < \kappa$. Así, la última desigualdad es válida, puesto que κ es un cardinal límite al ser singular. Concluimos entonces que para cada $\lambda < \kappa$, $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$.

Por último, sea $S_0 := \{\kappa_\alpha : \alpha \in cf(\kappa)\}$ cualquier sucesión normal de cardinales con límite κ. Definimos $S = \{\alpha < cf(\kappa) : cf(\kappa_\alpha) = \omega \wedge 2^{\aleph_0} < \kappa_\alpha\}$. Como κ tiene cofinalidad no numerable, tenemos que $2^{\aleph_0} \leq 2^{cf(\kappa)} < \kappa$ y, por tanto, existe $\gamma < cf(\kappa)$ tal que, para cada δ tal que $\delta \geq \gamma$, se cumple que $2^{\aleph_0} < \kappa_\delta$.

Ahora, sea $B \subseteq cf(\kappa)$ un club cualquiera, entonces $B \setminus \gamma$ es también un club en $cf(\kappa)$. Consideremos $\{\gamma_i : i \in \omega\} \subseteq B \setminus \gamma$ una sucesión estrictamente creciente. Como $cf(\kappa) > \omega$ y es regular, su supremo, que llamaremos η, es también un elemento de $cf(\kappa)$ y, al ser el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales, tenemos que η es un ordinal límite tal que $(B \setminus \gamma) \cap \eta$ es no acotado. Concluimos entonces que $\eta \in B \setminus \gamma$ y, como S_0 es normal, el supremo del conjunto $\{\kappa_{\gamma_i} : i \in \omega\}$ es κ_η. Por tanto, tenemos que $cf(\kappa_\eta) = \omega$ y que $2^{\aleph_0} < \kappa_\eta$, de donde $\eta \in S \cap B \setminus \gamma \subseteq S \cap B$. Tenemos entonces que S es estacionario en $cf(\kappa)$, y como todos los κ_α's, con $\alpha \in S$ son cardinales singulares de cofinalidad ω, se tiene que el conjunto $\{\alpha < cf(\kappa) : \kappa_\alpha^{cf(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+\}$ es estacionario en $cf(\kappa)$. Por el lema anterior, concluimos la inducción y tenemos que $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$.

$\dashv$

Si se observan las pruebas anteriores, la única forma en la que se utilizó el hecho de que κ tuviera cofinalidad no numerable es en el hecho de que esta propiedad implica que $\aleph_0 \leq \kappa$, lo cual puede llevarnos a pensar que las hipótesis pueden debilitarse. Sin embargo, esto no es así, pues también debe recordarse que en la prueba de tal teorema utilizamos una serie de lemas, en donde la condición sobre la cofinalidad es fundamental, puesto que en sus respectivas pruebas se utilizan sucesiones numerables dentro del cardinal κ y sus supremos, los cuales podemos asegurar que siguen siendo elementos de κ, usando fuertemente que su cofinalidad es no numerable.

Los últimos lemas antes de probar los resultados principales de este capítulo pueden dar la idea de que las hipótesis pueden debilitarse a cumplirse sólo, digamos, en un subconjunto estacionario del cardinal en cuestión y no sobre todo el cardinal. En el siguiente capítulo veremos que, en efecto y bajo ciertas condiciones, podemos obtener tales debilitamientos, pero para ello requeriremos algunos resultados combinatorios de preparación para poder determinar las condiciones adecuadas.

Capítulo III

El Teorema de Erdös-Rado y la Fórmula de Galvin-Hajnal

Al final del capítulo anterior, se mencionó acerca de que es posible debilitar las hipótesis de los teoremas de Silver y obtener las mismas conclusiones, pero para ello, hay que desarrollar algunos temas combinatorios y considerar ahora el tamaño de los subconjuntos de un ordinal respecto a un ideal ya dado. Con éstas herramientas desarrolladas adecuadamente, tendremos lo necesario para probar otro teorema de Silver, esta vez más general. Gran parte del desarrollo del capítulo puede hallarse en [Ho10], con la diferencia de que algunas pruebas han sido desarrolladas con el fin de obtener claridad.

3.1 | El Teorema de Partición de Erdös-Rado

En un primer curso de Álgebra Superior, se enuncia y demuestra el llamado Principio del Palomar, el cual informalmente dice que si hay más palomas que casillas en un palomar, entonces alguna casilla tendrá más de una paloma.

Más formalmente, si se distribuyen m objetos en n cajas y se tiene que $m > n$, entonces al menos una caja tendrá más de un objeto.

Tal principio se generaliza, aún de manera finita, a lo siguiente:

Proposición 3.1 *Si $t, k \in \omega \setminus 0$ y $t \cdot k + 1$ objetos se distribuyen en k lugares, entonces algún lugar tiene $t + 1$ objetos.*

Pero, en el capítulo 1, ya probamos la versión infinita del principio, el cual se enuncia de la siguiente forma.

Proposición 3.2 *Si κ es un cardinal, μ es un cardinal infinito y tenemos una partición de μ en κ conjuntos, donde $\kappa < cf(\mu)$, entonces al menos un elemento de la partición tiene cardinalidad μ.*

Para comenzar a desarrollar los teoremas y proposiciones de este capítulo, introduciremos algo de notación, para ello, comenzamos probando el siguiente lema.

Lema 3.3 *Sean A y B conjuntos cualesquiera y $g : A \to B$ una función. Entonces el conjunto $\{g^{-1}[\{b\}] : b \in im(g)\}$ es una partición de A.*

Demostración Como g es una función de A en B, se tiene que para cada $b \in im(g)$ el conjunto $g^{-1}[\{b\}]$ está contenido en A, de donde $\{g^{-1}[\{b\}] : b \in im(g)\}$ es una familia de subconjuntos de A. Así, sólo falta probar las 3 propiedades de cualquier partición.

Como estamos considerando $b \in im(g)$, cada elemento de la familia es no vacío.

Al ser una función con dominio A, se tiene que $A = \bigcup\{g^{-1}[\{b\}] : b \in im(g)\}$.

Por último, si b y c son elementos distintos de $im(g)$, tenemos que

$$g^{-1}[\{b\}] \cap g^{-1}[\{c\}] = g^{-1}[\{b\} \cap \{c\}] = g^{-1}[\varnothing] = \varnothing,$$

lo cual prueba que los elementos del conjunto son ajenos 2 a 2.

Al cumplir las 3 propiedades, concluimos que $\{g^{-1}[\{b\}] : b \in im(g)\}$ es una partición del conjunto A.

$\dashv$

Definición 3.4 *Dados dos conjuntos A y B y $g : A \to B$, a la partición $\{g^{-1}[\{b\}] : b \in im(g)\}$ mencionada en el lema anterior se le llama partición g.*

Ahora sí, comenzamos a presentar la notación que usaremos de ahora en adelante, notación que es de hecho universal respecto a la llamada teoría de Ramsey.

Definición 3.5 *Sean κ, λ, μ y ν cardinales tales que $\nu \leq \mu$ y $\lambda \leq \mu$. Si para cualesquiera conjuntos K y M de cardinalidades κ y μ respectivamente y cualquier función $f : [M]^\nu \to K$, se cumple que existe $L \subseteq M$, con $|L| = \lambda$ y existe $k_0 \in K$ tal que $f[[L]^\nu] = \{k_0\}$, entonces denotamos este hecho por*

$$\mu \to (\lambda)^\nu_\kappa$$

y decimos que tal L es homogéneo respecto a la partición f.

Con esta nueva notación, podemos reescribir los principios enunciados al inicio de la sección de la siguiente forma.

Proposición 3.6 (Principio del Palomar, versión finita) *Si $t, k \in \omega \setminus \{0\}$, entonces $t \cdot k + 1 \to (t+1)^1_k$.*

Proposición 3.7 (Principio del Palomar, versión infinita) *Si κ y λ son cardinales y $1 \leq \kappa < c(\lambda)$, entonces $\lambda \to (\lambda)^1_\kappa$.*

En esta sección probaremos un teorema debido a Erdös y Rado, relacionado con particiones de cardinales como las arriba mencionadas, y mediante éste probaremos la fórmula de Galvin-Hajnal. Esto a su vez nos permitirá debilitar las hipótesis del Teorema de Silver antes demostrado, como seguro se puede vaticinar, sólo a suponer que el conjunto $\{\kappa < \aleph_\eta : \kappa \in CAR \wedge 2^\kappa = \kappa^+\}$, con $\aleph_\eta$ singular de cofinalidad no numerable, sea estacionario en $\aleph_\eta$. Comenzaremos probando una serie de lemas necesarios para dar una prueba del Teorema de Erdös-Rado.

Lema 3.8 *Sean $n \in \omega$ y μ y λ cardinales, con μ infinito, tales que $\mu \to (\lambda)^n_\kappa$. Sean ν un cardinal infinito y $f : [\nu]^{n+1} \to \kappa$, y $\{\tau_i : i < \mu\}$ una función inyectiva de μ en ν tal que, para cada $i_1 < ... < i_n < j < \mu$, se tiene que $f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_j\}) = f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_n+1}\})$. Entonces existe un conjunto $M_0 \subseteq \{\tau_i : i < \mu\}$ de cardinalidad λ y $k \in \kappa$ tal que $f[[M_0]^{n+1}] = \{k\}$.*

Demostración Supongamos que τ es una función con las propiedades dadas en las hipótesis. Si $i_1 < ... < i_n < \mu$, definimos $g(\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}) = f(\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_n+1})$.

Como $\mu \to (\lambda)^n_\kappa$ y podemos ver a g como función de $[M]^n$ en κ (al ser τ inyectiva), existe $M_0 \subseteq \{\tau_i : i < \mu\}$ de cardinalidad λ y $k \in \kappa$ tal que $g[[M_0]^n] = \{k\}$.

Si $i_1 < ... < i_n < i_{n+1} < \mu$ y $\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_n+1} \in M_0$, entonces $f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_{(n+1)}}\}) = f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_n+1}\}) = g(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}) = k$, como se quería probar.

$\dashv$

El objetivo ahora es probar, para $n \in \omega$ y μ cardinal infinito que, si $\mu \to (\lambda)^n_\kappa$ para algún λ, entonces existe ν cardinal infinito tal que $\nu \to (\lambda)^{n+1}_\kappa$. Para probarlo usando el lema anterior, debemos demostrar que, si $f : [\nu]^{n+1} \to \kappa$ es una partición, podemos encontrar una sucesión inyectiva $\{\tau_i : i < \mu\}$ de elementos de ν tal que, para cada $i_1 < .. < i_n < j < \mu$ se tiene que $f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_j\}) = f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_n+1}\})$.

Es importante notar que no hemos hablado en ningún momento del tamaño de ν. Para resolver el problema introduciremos un nuevo concepto, de suma importancia en las matemáticas.

Definición 3.9 *Un orden parcial $(T, <)$ es llamado árbol si y sólo si, para cada $x \in T$, el conjunto $x^< := \{y \in T : y < x\}$ está bien ordenado por $<$. Una rama en T es una cadena $\subseteq$-maximal en T. La altura de cada $y^<$, donde $y \in T$, se define como $h(y) := t.o.(y^<)$.*

Definimos la función rango ρ con dominio T y valores ordinales como $\rho(x) := sup\{\rho(y)+1 : y \in T \wedge y < x\}$. El ordinal $sup\{\rho(x) + 1 : x \in T\} =: h(T)$ es llamada la altura del árbol. Un α-árbol es un árbol de altura α.

El conjunto $S_\beta := \{x \in T : \rho(x) = \beta\}$ es el β-ésimo nivel de $(T, <)$.

Teniendo ya este concepto, y considerando que tenemos $f : [\nu]^{n+1} \to \kappa$ una partición, construiremos un árbol con las siguientes características.

Lema 3.10 *Existe un árbol T con altura μ contenido en $\mathcal{P}(\nu) \setminus \{\varnothing\}$, tal que para cualesquiera $A, B \in T$ se tiene que $A < B$ si y sólo si $B \subsetneq A$ y, para cada $\alpha < \mu$, los niveles S_α de T cumplen que:*

(i) $\bigcup S_\alpha = \nu \setminus \{min(A) : A \in \bigcup\{S_\beta : \beta < \alpha\}\}$,

(ii) para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mu$, si $\alpha \neq \beta$, entonces $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$, y

(iii) si $\zeta < \alpha$ y $B \in S_\alpha$, existe un único $A \in S_\zeta$ tal que $A < B$.

Demostración Comenzamos definiendo por recursión los niveles del árbol T.

Definimos $S_0 = \{\nu\}$ y, suponiendo que S_ζ está definido y satisface los 3 incisos para cada $\zeta \leq \alpha$, obtenemos que, para cada $B \in S_\alpha$, existe una cadena tal que $B = A_\alpha \subsetneq ... \subsetneq A_\zeta \subsetneq ... \subsetneq A_1 \subsetneq A_0 = \nu$ donde, para cada $\zeta \leq \alpha$ se tiene que $A_\zeta \in S_\zeta$.

Definimos $\tau_\zeta = min(A_\zeta)$ y una relación R_B en $B \setminus \{\tau_\alpha\}$ tal que

$$\rho R_B \sigma \leftrightarrow \forall \zeta_1 < ... < \zeta_n \leq \alpha (f(\{\tau_{\zeta_1}, ..., \tau_{\zeta_n}, \rho\}) = f(\{\tau_{\zeta_1}, ..., \tau_{\zeta_n}, \sigma\})).$$

Como la igualdad es una relación de equivalencia, obtenemos que R_B es una relación de equivalencia. Denotamos al conjunto de las clases de equivalencia con ε_B y sea $S_{\alpha+1} := \bigcup\{\varepsilon_B : B \in S_\alpha\}$ el $\alpha+1$-ésimo nivel de T. Por construcción de la relación, se tiene que $S_{\alpha+1}$ cumple los tres incisos requeridos.

Observemos que $|S_{\alpha+1}| \leq \Sigma\{|\varepsilon_B| : B \in S_\alpha\}$. Ahora bien, para cada $B \in S_\alpha$ y $\rho \in B \setminus \{\tau_\alpha\}$, definimos $g_\rho : [\{\tau_\zeta : \zeta \leq \alpha\}]^n \to \kappa$ definida por $g_\rho(\{\tau_{\zeta_1}, ..., \tau_{\zeta_n}\}) = f(\{\tau_{\zeta_1}, ..., \tau_{\zeta_n}, \rho\})$.

Por definición de R_B, se tiene que, para cualesquiera $\rho, \sigma \in B \setminus \{\tau_\alpha\}$, $\rho R_B \sigma$ si y sólo si $g_\rho = g_\sigma$, de donde obtenemos que $|\varepsilon_B| \leq \kappa^{|\alpha|\aleph_0}$.

Por tanto, se concluye que $|S_{\alpha+1}| \leq |S_\alpha|\kappa^{|\alpha|\aleph_0}$ y, obsérvese que en el caso finito, es decir, con $\kappa < \aleph_0$ y $\alpha < \aleph_0$, tenemos que $|S_{\alpha+1}| < \aleph_0$.

Ahora sea $\alpha < \mu$ un ordinal límite. Definimos entonces

$$S_\alpha = \{\bigcap\{h(\zeta) : \zeta < \alpha\} : h \in \prod_{\zeta<\alpha} S_\zeta\} \setminus \{\varnothing\}$$

y $T_\alpha = \bigcup\{S_\zeta : \zeta < \alpha\}$. Por hipótesis de inducción, T_α es un árbol y, de hecho, como los elementos de cada S_ζ son ajenos, se tiene que, si $h \in \prod_{\zeta<\alpha} S_\zeta$ es tal que $\bigcap\{h(\zeta) : \zeta < \alpha\} \neq \varnothing$, entonces en particular existen $\zeta_1, \zeta_2 \in \alpha$ tales que $h(\zeta_1) \cap h(\zeta_2) \neq \varnothing$ y, por definición, $h(\zeta_1) \in S_{\zeta_1}$ y $h(\zeta_2) \in S_{\zeta_2}$. De donde, si suponemos sin perder la generalidad que $\zeta_1 < \zeta_2$, por el tercer inciso e hipótesis de inducción, existe una única cadena de elementos $A_\zeta \in S_\zeta$ que incluye a $h(\zeta_2)$.

Como por el segundo inciso los elementos de un mismo S_ζ son ajenos entre sí, obtenemos que el elemento en el lugar ζ_1-ésimo de tal cadena es $h(\zeta_1)$ y, por tanto, obtenemos que $h(\zeta_2) \subsetneq h(\zeta_1)$.

Por lo tanto, la intersección mencionada arriba es de hecho la intersección de una cadena decreciente de conjuntos, es decir, de una rama de tamaño α del árbol T_α. Ahora probaremos por inducción que S_α cumple los tres incisos requeridos.

Primero, sea $\rho \in \nu \setminus \{min(A) : A \in \bigcup\{S_\zeta : \zeta < \alpha\}\}$, entonces para cada $\zeta < \alpha$ se tiene que $\rho \in \nu \setminus \{min(A) : A \in \bigcup\{S_\beta : \beta < \zeta\}\}$ y, como S_ζ cumple el primer inciso por hipótesis de inducción, se tiene que $\rho \in \bigcup S_\zeta$. Aplicando ahora el segundo inciso, existe un único $A^\rho_\zeta \in S_\zeta$ que tiene a ρ.

Sea ahora $h \in \prod\limits_{\zeta<\alpha} S_\zeta$ tal que, para cada $\zeta < \alpha$ se tiene que $h(\zeta) := A^\rho_\zeta$. Entonces $\rho \in \bigcap\{h(\zeta) : \zeta < \alpha\}$, es decir, $\rho \in \bigcup S_\alpha$ por definición.

Ahora sea $\rho \in \bigcup S_\alpha$, entonces existe $h \in \prod\limits_{\zeta<\alpha} S_\zeta$ tal que ρ es la intersección de sus imágenes. Sea $\zeta < \alpha$, por el inciso dos, tenemos que si $A \in S_\zeta \setminus \{h(\zeta)\}$, entonces $\rho \notin A$ y, por tanto, $\rho \neq min(A)$. Por otra parte, si $A = h(\zeta)$, entonces se tiene que $min(A) = min(h(\zeta)) \notin h(\zeta+1)$, pues $h(\zeta) \cap h(\zeta+1) = \varnothing$ por hipótesis de inducción y el inciso (i). Pero $\rho \in h(\zeta+1)$ al α ser límite, de donde también se tiene que $\rho \neq min(A)$. En ambos casos ρ no es un mínimo y, por tanto, obtenemos ambas contenciones y S_α cumple el primer inciso.

Ahora sean $A, B \in S_\alpha$ distintos, entonces existen h_A y h_B tales que $A = \bigcap\{h_A(\zeta) : \zeta < \alpha\}$ y $B = \bigcap\{h_B(\zeta) : \zeta < \alpha\}$. Como son elementos distintos, se tiene que $h_A \neq h_B$, de donde existe $\zeta_0 \in \alpha$ tal que $h_A(\zeta_0) \neq h_B(\zeta_0)$ y ambos son elementos de S_{ζ_0}. Por hipótesis de inducción, tenemos que $h_A(\zeta_0)$ y $h_B(\zeta_0)$ son ajenos y, por tanto, $A \cap B = \varnothing$ y S_α cumple el segundo inciso.

Por último, sean $\zeta < \alpha$ y $B \in S_\alpha$, entonces existe $h_B \in \prod\limits_{\zeta<\alpha} S_\zeta$ tal que B es la intersección de sus imágenes, de donde se tiene que $h_B(\zeta) \in S_\zeta$ y $h_B(\zeta) < B$. Por otra parte, como S_ζ cumple el segundo inciso por hipótesis de inducción, se tiene que $h_B(\zeta)$ es el único elemento de S_ζ por debajo de B, de donde se cumple el tercer inciso.

Entonces $(T, <)$ es un árbol con las propiedades requeridas y $|S_\alpha| \leq \prod\limits_{\zeta<\alpha} |S_\zeta|$.

$\dashv$

La siguiente es una observación clave previo a concluir los lemas para probar el teorema prometido.

Observación 8 *Supongamos que μ es un cardinal y que tenemos T un μ-árbol como el construido arriba que tiene una rama de longitud μ, digamos $\{A_i : i < \mu\}$. Definimos, para cada $i < \mu$, $\tau_i = min(A_i)$. Supongamos que $i_1 < ... < i_n < j < \mu$. Entonces $i_n + 1 \leq j$ y, como $A_j \subseteq A_{i_n}$ y $A_{i_n+1} \subseteq A_{i_n}$, se tiene que $\tau_j, \tau_{i_n+1} \in A_{i_n}$ de donde pertenecen a la misma clase de equivalencia, es decir, que $f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_j\}) = f(\{\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_n}, \tau_{i_n+1}\})$. Con esto y aplicando el lema 3.8, el cardinal ν base de la construcción del árbol será el que posibilite el paso de tener homogéneos para n-tuplas a tener homogéneos para (n+1)-tuplas. De aquí, sólo falta considerar un ν adecuado y probar la existencia de la rama que se supuso existe.*

Para la existencia de ramas, hay un lema bastante famoso en las matématicas, el Lema de König, el cual de hecho usaremos para probar el primer caso de nuestro teorema de partición.

Lema 3.11 (König) *Sea T un ω-árbol. Si todos los niveles de T son finitos, entonces T tiene una rama de longitud ω.*

Demostración Sea $\{S_n : n \in \omega\}$ el conjunto de niveles de T. Definiremos una ω-rama para T por inducción sobre $i < \omega$. Como T es un ω-árbol, en particular es un conjunto infinito, y como S_0 es finito, existe $x_0 \in S_0$ tal que $x_0^> := \{x \in T : x_0 < x\}$ es infinito. Ahora, para obtener x_1, como $x_0^> \cap S_1 \neq \varnothing$ y S_1 es infinito y todo elemento de $x_0^>$ es mayor o igual a un elemento de S_1, entonces existe $x_1 \in x_0^> \cap S_1$ tal que $x_1^>$ es infinito. Ahora supongamos que existe $x_n \in S_n$ tal que $x_n^>$ es infinito y $\{x_i : i < n\}$ es una cadena en T. Como $x_n^>$ es infinito, $\bigcup\{S_i : i < n\}$ es finito y todo elemento en $x_0^> \setminus \bigcup\{S_i : i < n\}$ es mayor o igual a un elemento en S_{n+1}, se tiene que existe $x_{n+1} \in S_{n+1}$ tal que $x_n < x_{n+1}$ y $x_{n+1}^>$ es infinito. De este modo, obtenemos una rama $\{x_n : n \in \omega\}$ en T de longitud ω.

$\dashv$

Antes de probar nuestro teorema de partición, probaremos otro famoso resultado, esta vez debido a Ramsey, y que es de hecho el resultado introductorio a la ya mencionada Teoría de Ramsey.

Teorema 3.12 (Ramsey) *Si $k, n \in \omega$, entonces se tiene que $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k$.*

Demostración En el lema 3.10, consideremos $\mu = \nu = \aleph_0$ y $\kappa = k \in \omega$. Por lo dicho durante la prueba de tal lema, tenemos que cada nivel de tal árbol T es finito. Por el lema de König, T tiene una ω-rama y, como $\mu = \nu = \aleph_0$, por la observación anterior tenemos que $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k \Rightarrow \aleph_0 \to (\aleph_0)^{n+1}_k$.

Así, como $\aleph_0$ es un cardinal infinito. por el principio del palomar en su versión infinita, tenemos que $\aleph_0 \to (\aleph_0)^1_k$, de donde, aplicando $n-1$ veces la implicación arriba mencionada, obtenemos lo pedido.

$\dashv$

Finalmente estamos en condiciones de probar el teorema de partición objetivo de esta sección. Y, tras él, probaremos un corolario muy útil del mismo.

Teorema 3.13 (Erdös y Rado) *Supongamos que μ y λ son cardinales infinitos tales que $\lambda \leq \mu$. Sea κ un cardinal tal que $0 < \kappa < \mu$ y n un natural no cero. Entonces tenemos que*

$$\mu \to (\lambda)^n_\kappa \Rightarrow (2^{<\mu})^+ \to (\lambda)^{n+1}_\kappa$$

Demostración Si $\mu = \aleph_0$, entonces se tiene que $\lambda = \aleph_0$. Por el teorema anterior, y como $(2^{<\aleph_0})^+ = \aleph_1 > \aleph_0$, tenemos que $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_\kappa \Rightarrow (2^{<\aleph_0})^+ \to (\aleph_0)^{n+1}_\kappa$, pues κ también resulta ser un número natural.

Entonces podemos suponer ahora que $\aleph_0 < \mu$. Por el lema 3.10, consideremos T un μ-árbol sobre $\nu = (2^{<\mu})^+$ con las condiciones dadas en tal lema. Probaremos por inducción sobre $\alpha < \mu$ que $|S_\alpha| \leq 2^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa}$.

Para el paso base, sabemos por construcción que $|S_0| = 1 < 2^{\aleph_0+\kappa}$.

Para el paso sucesor, usando la propiedad obtenida en el paso sucesor del lema 3.10, tenemos que

$$|S_{\alpha+1}| \leq |S_\alpha|\kappa^{|\alpha|+\aleph_0} \leq 2^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa}\kappa^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa} = 2^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa} = 2^{|\alpha+1|+\aleph_0+\kappa},$$

donde la última desigualdad es válida por hipótesis de inducción y la última igualdad se cumple pues, si α es finito, entonces $|\alpha| + \aleph_0 = \aleph_0 = |\alpha+1| + \aleph_0$ y, si α es infinito, se tiene que $|\alpha| = |\alpha+1|$.

Por último, supongamos que α es un ordinal límite, entonces, por la prueba del lema 3.10, tenemos que

$$|S_\alpha| \leq \prod_{\zeta<\alpha} |S_\zeta| \leq \prod_{\zeta<\alpha} 2^{|\zeta|+\aleph_0+\kappa} \leq \prod_{\zeta<\alpha} 2^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa} = 2^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa},$$

donde aplicamos la hipótesis de inducción para obtener la segunda desigualdad. Entonces obtenemos la desigualdad deseada para cada $\alpha < \mu$.

Entonces tenemos que

$$\left|\bigcup\{S_\alpha : \alpha < \mu\}\right| \leq \mu \cdot sup\{|S_\alpha| : \alpha < \mu\} \leq \mu \cdot sup\{2^{|\alpha|+\aleph_0+\kappa}\} \leq \mu \cdot 2^{<\mu} = 2^{<\mu},$$

donde la última desigualdad es válida, puesto que tanto α como $\aleph_0$ y κ son menores que μ.

Así, definimos $S_\mu = \{\bigcap\{h(\zeta) : \zeta < \mu\} : h \in \prod_{\zeta<\mu} S_\zeta\} \setminus \{\varnothing\}$ y, por una prueba análoga a la dada en el lema 3.10, podemos demostrar que $\bigcup S_\mu = \nu \setminus \{min(A) : A \in \bigcup\{S_\zeta : \zeta < \mu\}\}$.

Se tiene entonces que $|\{min(A) : A \in \bigcup\{S_\zeta : \zeta < \mu\}\}| \leq |\bigcup\{S_\zeta : \zeta < \mu\}| \leq 2^{<\mu}$ y, por tanto, podemos concluir que $\bigcup S_\mu \neq \varnothing$, de donde necesariamente $S_\mu \neq \varnothing$.

Concluimos entonces que T tiene una μ-rama y, por la observación posterior al lema 3.10, se concluye la demostración.

$\dashv$

Corolario 3.14 (Erdös y Rado) *Si κ es un cardinal infinito, entonces $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa$.*

Demostración Como $cf(\kappa^+) = \kappa^+ > \kappa$, obtenemos que $\kappa^+ \to (\kappa^+)^1_\kappa$. Por el Teorema de Erdös y Rado, tenemos entonces que $(2^{<\kappa^+})^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa$. Por otro lado, como $2^{<\kappa^+} = 2^\kappa$, se concluye la prueba.

$\dashv$

El Teorema anterior constituye una parte vital en la prueba de la fórmula de Galvin-Hajnal, pero para llegar por lo menos a enunciar tal fórmula, requerimos primero regresar a los ideales en un cardinal y definir una medida respecto a los mismos, de esto nos ocuparemos en la siguiente sección.

3.2 | Reducción de relaciones a ideales

Dado A un conjunto e I un ideal en A, podemos definir una medida para el tamaño de cada subconjunto de A, de una forma parecida a como lo hicimos respecto a un ultrafiltro en la prueba del primer teorema de Silver al final del capítulo anterior. Podemos pensar que los elementos del ideal I son los subconjuntos más pequeños según la medida que definamos posteriormente, de este modo, el vacío tiene tamaño mínimo, si 2 conjuntos tiene tamaño mínimo su unión también tiene tamaño mínimo y, finalmente, si tenemos un conjunto de tamaño mínimo, cualquier subconjunto de éste seguirá siendo de tamaño mínimo. Incidentalmente, como A es el subconjunto $\subseteq$-maximal en $\mathcal{P}(A)$, si queremos tener una buena medida del tamaño, no debería tenerse que A sea un conjunto de tamaño mínimo, lo cual se desprenderá del hecho de que $A \notin I$. Así, la medida de los elementos del ideal I será 0.

Definición 3.15 *Sea A un conjunto e I un ideal en A.*

(i) *$dom(I) := \bigcup I$ es el dominio del ideal I.*

(ii) *$I^+ := \{X \in \mathcal{P}(A) : X \notin I\}$ es el conjunto de los subconjuntos positivos o de medida positiva de A módulo I.*

(iii) *Los elementos de I son llamados conjuntos nulos o de medida cero módulo I.*

Observación 9 *Por lo dicho anteriormente, se tiene que la intersección y unión de dos conjuntos de medida cero módulo I vuelve a ser un conjunto de medida cero, así como cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero continúa siendo de medida cero. Paralelamente, se tiene que cualquier conjunto que contenga a un conjunto de medida positiva sigue siendo de medida positiva, lo cual se desprende del hecho de que I sea cerrado bajo subconjuntos de sus elementos. Más aún, se tiene que, dados $X \in I^+$ y $Y \in I$, $X \setminus Y \in I^+$, lo cual se traduce en que si un conjunto tiene medida positiva, lo seguirá siendo aún al sustraer un conjunto de medida cero del mismo.*

Por último, como $A \notin I$, para cualesquiera $X, Y \in I$ se tiene que $A \setminus X, A \setminus Y \in I^+$ y como $X \cup Y \in I$, se tiene que $(A \setminus X) \cap (A \setminus Y) \in I^+$. Entonces podemos concluir que, para cualquier $X \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que $X \notin I$ o $A \setminus X \notin I$, pero, y como se verá más adelante, se puede cumplir que, para algún $X \subseteq A$, $X \in I^+$ y $A \setminus X \in I^+$.

Procedemos ahora a definir la reducción de relaciones intrínsecas de cualesquiera subconjuntos de un conjunto respecto a un ideal dado. Como en lo siguiente se incluye también qué ocurre en el caso de las funciones con dominio A y valores ordinales, se verá el análogo a lo utilizado en la prueba del primer teorema de Silver.

Definición 3.16 *(i) Decimos que una propiedad ϕ se cumple para casi toda $a \in A$ módulo I si y sólo si el conjunto de los $x \in A$ que no la cumplen es un elemento de I.*

(ii) Decimos que un ideal J en A extiende a un ideal I si y sólo si $I \subseteq J$.

(iii) Un ultrafiltro D extiende a un ideal I si y sólo si $D \cap I = \varnothing$. En tal caso I está contenido en el ideal maximal D^*.

(iv) Si f y g son funciones con dominio A y valores ordinales, decimos que f es menor que g módulo I, denotado $f <_I g$, si y sólo si $f(a) < g(a)$ para casi toda $a \in A$ módulo I, es decir, si $\{a \in A : g(a) \leq f(a)\} \in I$. En particular, si $I = \{\varnothing\}$ escribimos $f <_A g$ o simplemente $f < g$ como es usual si el conjunto A es fijo. En este último caso decimos que f es menor que g puntualmente.

Previo a enunciar la primera serie de propiedades de las relaciones módulo I, introduciremos algo de notación. Dados $B, C \in \mathcal{P}(A)$ y f y g funciones ordinales en A diremos que:

(i) $f <_B g$ si y sólo si $f\restriction_B < g\restriction_B$.

(ii) $B \subseteq_I C$ si y sólo si $B \setminus C \in I$.

(iii) $B =_I C$ si y sólo si $(B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in I$.

(iv) $f =_I g$ si y sólo si $\{a \in A : f(a) \neq g(a)\} \in I$.

(v) $f \leq_I g$ si y sólo si $\{a \in A : g(a) < f(a)\} \in I$.

(vi) $f \lneqq_I g$ si y sólo si $f \leq_I g$ y $\neg(f =_I g)$.

Ahora veremos la primera serie de propiedades respecto a estas notaciones, cuya prueba es inmediata de la definición de las mismas.

Lema 3.17 *Sean A un conjunto no vacío, I un ideal en A. Sean $B, C, D \in \mathcal{P}(A)$ y f, g y h funciones ordinales en A. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $B =_I B$ y $f =_I f$.

(ii) Si $B =_I C$ entonces $C =_I B$, y si $f =_I g$ entonces $g =_I f$.

(iii) Si $B =_I C$ y $C =_I D$ entonces $B =_I D$, y si $f =_I g$ y $g =_I h$ entonces $f =_I h$.

(iv) $B \subseteq_I B$ y $f \leq_I f$.

(v) Si $B \subseteq_I C$ y $C \subseteq_I D$ entonces $B \subseteq_I D$, y si $f \leq_I g$ y $g \leq_I h$ entonces $f \leq_I h$.

(vi) Si $B \subseteq C$ entonces $B \subseteq_I C$, y si $f \leq g$ entonces $f \leq_I g$.

(vii) $B \subseteq_I C$ y $C \subseteq_I B$ si y sólo si $B =_I C$ y $f \leq_I g$ y $g \leq_I f$ si y sólo si $f =_I g$.

(viii) $B \subseteq_I C$ si y sólo si $A \setminus C \subseteq_I A \setminus B$.

(ix) Si $B \subseteq_I C$ y $C \in I$ entonces $B \in I$.

(x) Si $f \lneqq_I g$ entonces $\{a \in A : f(a) < g(a)\} \in I^+$.

(xi) $\neg(f <_I f)$ y si $f < g$ entonces $f <_I g$.

(xii) Si $f <_I g$ y $g <_I h$ entonces $f <_I h$.

(xiii) Si $f <_I g$ entonces $f \leq_I g$, y si $f \lneqq_I g$ entonces $f \leq_I g$.

(xiv) Si $f \leq_I g$ y $g \gneqq_I h$ entonces $f \gneqq_I h$.

(xv) Si $f \leq_I g$ y $g <_I h$ entonces $f <_I h$.

Demostración Probaremos el inciso (xiv), el resto se prueba similarmente y utilizando las definiciones correspondientes. Sean f y g funciones ordinales en A tales que $f \leq_I g$ y $g \gneqq_I h$ entonces, por definición, se tiene que $\{a \in A : g(a) < f(a)\} \in I$, que $\{a \in A : h(a) < g(a)\} \in I$ y que $\{a \in A : g(a) \neq h(a)\} \notin I$, entonces se tiene que $\{a \in A : g(a) \neq h(a)\} \in I^+$. Demostraremos primero que $f \leq_I h$. Sea $a \in A$ tal que $h(a) < f(a)$ entonces partimos por casos: si $h(a) < g(a)$ entonces a está en un elemento del ideal I, por otro lado, si se cumple que $g(a) \leq h(a)$, entonces $g(a) < f(a)$ de donde vuelve a estar en un elemento de I, entonces se tiene que $\{a \in A : h(a) < f(a)\}$ es un subconjunto de la unión de dos elementos de I, de donde al ser I un ideal, obtenemos que $\{a \in A : h(a) < f(a)\} \in I$ obteniendo así que $f \leq_I h$. Supongamos ahora que $\{a \in A : f(a) \neq h(a)\} \in I$. Sea $a \in A$ tal que $g(a) \neq h(a)$ entonces comparamos a $h(a)$ con $g(a)$. Si $f(a) \neq h(a)$, por nuestra suposición, a está en un elemento de I, y si $f(a) = h(a)$, como suponemos que $g(a) \neq h(a)$, entonces se tiene que o bien $g(a) < f(a)$ o que $h(a) < g(a)$, en ambos casos se tiene que a está en algún elemento de I, de donde $\{a \in A : g(a) \neq h(a)\} \in I$ contradiciendo la hipótesis. Concluimos entonces que $\{a \in A : f(a) \neq h(a)\} \notin I$, es decir, que no se cumple que $f =_I h$.

$\dashv$

Observación 10

(i) Las relaciones $\subseteq_I$ y $\leq_I$ en general no son antisimétricas, como cabría esperar, sólo lo son módulo I debido a su construcción intrínseca, por el inciso (vii) del lema anterior. Más aún, como veremos un poco más adelante, no necesariamente se cumple que $f <_I g$ si y sólo si $f \leq_I g$ y $\neg(f =_I g)$, lo cual nos dará la razón principal de haber definido aparte la relación $\gneqq_I$ en la notación previa.

(ii) Si I es un ideal en un conjunto A y J es un ideal que extiende a I, y ϕ es una fórmula que se cumple para casi toda $a \in A$ módulo I, entonces se tiene que ϕ se cumple para casi toda $a \in A$ módulo J. En particular, lo anterior se cumple para ideales maximales J tales que J^* es un ultrafiltro. De donde, si D es un ultrafiltro que extiende a I, se tiene que $\{a \in A : \phi(a)\} \in D$.

(iii) Por el lema 3.17, se tiene que si J extiende a un ideal I en A, entonces la relaciones $<_I, \leq_I, =_I$ se extienden a J. Sin embargo, esto no ocurre así para la relación $\gneqq_I$ puesto que es posible que $\{a \in A : f(a) \neq g(a)\} \in J$ aún si se tiene que no es un elemento de I.

Recordando algunos de los resultados del inicio del capítulo anterior, obtenemos el siguiente lema, el cual nos permitirá extender un ideal I vía un subconjunto de A que no esté en el ideal.

Lema 3.18 *Sea A un conjunto no vacío e I un ideal en A. Sea $B \in \mathcal{P}(A)$, entonces existe J un ideal en A que extiende a I y $A \setminus B \in J$ si y sólo si no se cumple que $(A \setminus B) =_I A$.*

Demostración Es una reformulación del segundo inciso de la proposición 2.8.

$\dashv$

Al ideal más pequeño que cumpla la propiedad dada por el lema anterior, dados el ideal I y el subconjunto B de A, lo denotaremos por $I\restriction_B$.

Como las propiedades de los ideales se preservan al ser restringidas a subconjuntos, se puede ver que si I es un ideal en A y B es un subconjunto de A que no está en I, entonces el conjunto $I \cap \mathcal{P}(B)$ es un ideal en B. El siguiente lema nos muestra la relación entre el ideal $I \cap \mathcal{P}(B)$ y el ideal $I\restriction_B$.

Lema 3.19 *Sean A un conjunto no vacío, I un ideal en A y $B \in I^+$. Si f y g son funciones ordinales en A, entonces tenemos que:*

(i) $f <_{I\restriction_B} g$ *si y sólo si* $f\restriction_B <_{I\cap\mathcal{P}(B)} g\restriction_B$.

(ii) $f =_{I\restriction_B} g$ *si y sólo si* $f\restriction_B =_{I\cap\mathcal{P}(B)} g\restriction_B$

(iii) $f \leq_{I\restriction_B} g$ *si y sólo si* $f\restriction_B \leq_{I\cap\mathcal{P}(B)} g\restriction_B$

Demostración Veremos el caso de la relación $<$, los otros casos tienen pruebas análogas. Sean f y g funciones ordinales en A, entonces tendremos que $f <_{I\restriction_B} g$ si y sólo si $\{a \in A : g(a) \leq f(a)\} \in I\restriction_B$, como se tiene que $\{a \in B : g(a) \leq f(a)\} \subseteq \{a \in A : g(a) \leq f(a)\}$ entonces se tiene que $\{a \in B : g(a) \leq f(a)\} \in \mathcal{P}(B) \cap I\restriction_B$. Hay que demostrar que $E := \{a \in B : g\restriction_B \leq f\restriction_B\} \in I \cap \mathcal{P}(B)$.

Como $E \subseteq B$, tenemos ya que $E \in \mathcal{P}(B)$, supongamos entonces que $E \notin I$. Por el lema anterior, se tiene que existe un ideal J que extiende a I y que $A \setminus E \in J$. Más aún, aseguramos que el conjunto $I^* \cup \{A \setminus E, B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

En efecto, si se tuviese que $(A \setminus E) \cap B = \varnothing$, entonces se tiene que $B \subseteq E$. Por tanto, $E = B$ y entonces tenemos que $B \in I\restriction_B$, lo que contradice que $A \setminus E \in I\restriction_B$ al ser $I\restriction_B$ un ideal. Por tanto, concluimos que $(A \setminus E) \cap B \neq \varnothing$.

Por otra parte, como $B \in I^+$, si existiera $d \in I^*$ tal que $B \cap d = \varnothing$, entonces se tendría que $B \subseteq A \setminus d \in I$, lo que contradice que $B \notin I$. Por tanto, la intersección de B con cualquier elemento de I^* es no vacía.

Por último, dado $d \in I^*$ si nuevamente suponemos que $d \cap (A \setminus E)$ es vacío, entonces se concluye que $A \setminus E \subseteq A \setminus d \in I$, de donde $A \setminus E \in I\restriction_B$ y, por tanto, $A = (A \setminus E) \cup E \in I\restriction_B$, lo que contradice que $I\restriction_B$ es un ideal en A. Se tiene entonces que, para cada $d \in I^*$, el conjunto $d \cap (A \setminus E)$ es no vacío.

Como I es un ideal, I^* es un filtro en A. Podemos concluir que la familia de conjuntos dada tiene la propiedad de la intersección finita, de donde existe D un ultrafiltro en A que extiende a $I^* \cup \{A \setminus E, B\}$. Por tanto, tenemos que D^* es un ideal maximal que extiende a I tal que $A \setminus B \in D^*$, por tanto, como $I\restriction_B$ es minimal respecto a tales condiciones, tenemos que $I\restriction_B \subseteq D^*$. Así, concluimos que $\{E, A \setminus E\} \subseteq D^*$, lo que contradice que D^* sea un ideal en A. Concluimos que $E \in I$, de donde $E \in I \cap \mathcal{P}(B)$ y finalmente tenemos que $f\restriction_B <_{I\cap\mathcal{P}(B)} g\restriction_B$.

Ahora, supongamos que $f\restriction_B <_{I\cap\mathcal{P}(B)} g\restriction_B$, entonces, por definición, $\{b \in B : g\restriction_B (b) \leq f\restriction_B (b)\} \in I \cap \mathcal{P}(B)$. Hay que demostrar que $\{a \in A : g(a) \leq f(a)\} \in I\restriction_B$. Como $\{a \in A : g(a) \leq f(a)\} \subseteq \{b \in B : g\restriction_B (b) \leq f\restriction_B (b)\} \cup (A \setminus B)$ y tanto $A \setminus B \in I\restriction_B$ como $\{b \in B : g\restriction_B (b) \leq f\restriction_B (b)\} \in I\restriction_B$, aplicando el hecho de que $I\restriction_B$ es ideal en A, obtenemos que $\{a \in A : g(a) \leq f(a)\} \in I\restriction_B$, de donde se sigue que $f <_{I\restriction_B} g$.

$\dashv$

Con ayuda del lema anterior, para cualquier ideal I en algún conjunto A, podemos hallar un ideal de la forma $I\restriction_B$ con $B \in I^+$ en el caso en el que nos interese comparar funciones ordinales en A pero restringidas a cierto conjunto B.

Antes de pasar al último lema de la sección, daremos unas últimas notaciones relacionadas a las funciones ordinales en un conjunto A.

Definición 3.20 *Sea A un conjunto cualquiera.*

1. *Si S es un conjunto de funciones ordinales en A, definimos el supremo puntual de S en a como $sup(S)(a) := sup\{f(a) : f \in S\}$.*

2. *En el caso en el que S sea finito, análogamente definimos las funciones $max(S)$ y $min(S)$.*

3. *Dada una función ordinal f en A definimos la función $f + 1$ tal que, para cada $a \in A$ $(f + 1)(a) := f(a) + 1$.*

Todas las nociones hasta ahora presentadas para ideales se pueden hacer para filtros en A considerando el ideal dual de cada filtro F. De hecho, esta noción ya fue presentada, como se dijo antes, en la prueba del primer teorema de Silver al final del capítulo anterior, respecto a la comparación de funciones ordinales.

Como fue mencionado antes, los órdenes presentados respecto a los ideales no necesariamente son lineales, sin embargo, esta situación cambia cuando el ideal considerado es un ideal maximal, y es lo que veremos en nuestro último lema, pero pasaremos los conceptos a ultrafiltros para hacer un ánalogo a la prueba dada del Teorema de Silver.

Lema 3.21 *Sea A un conjunto no vacío y D un ultrafiltro en A. Sean f y g funciones ordinales en A. Se cumple lo siguiente.*

(i) $f \leq_D g$ *o* $g \leq_D f$,

(ii) $f \leq_D g$ *si y sólo si* $f <_D g$ *o* $f =_D g$,

(iii) $f <_D g$ *o* $f =_D g$ *o* $g <_D f$, *y*

(iv) $f <_D g$ *si y sólo si* $f \lneqq_D g$.

Demostración

(i) Sean f y g funciones ordinales en A y supongamos que $\neg(f \leq_D g)$, entonces tenemos que $\{a \in A : f(a) \leq g(a)\} \notin D$. Como D es un ultrafiltro en A, se tiene que el conjunto $A \setminus \{a \in A : f(a) \leq g(a)\} \in D$, es decir, que $\{a \in A : f(a) > g(a)\} \in D$. Pero se tiene que $\{a \in A : g(a) < f(a)\} \subseteq \{a \in A : g(a) \leq f(a)\}$ y, como D es cerrado bajo supraconjuntos de sus elementos al ser filtro, se tiene que $\{a \in A : g(a) \leq f(a)\} \in D$. Por definición, se tiene ya que $g \leq_D f$.

(ii) Sean f y g funciones ordinales en A tales que $f \leq_D g$, entonces tenemos que el conjunto $S := \{a \in A : f(a) \leq g(a)\} \in D$. Pero también se tiene que $S = \{a \in A : f(a) < g(a)\} \cup \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ y, como D es un ultrafiltro, se tiene que $\{a \in A : f(a) < g(a)\} \in D$ o $\{a \in A : f(a) = g(a)\} \in D$, es decir, que $f <_D g$ o $f =_D g$.

Por otro lado, si suponemos que $f <_D g$ o $f =_D g$, entonces $\{a \in A : f(a) < g(a)\} \in D$ o bien que $\{a \in A : f(a) = g(a)\} \in D$, de donde, como S es supraconjunto de cualquiera de ellos, se tiene entonces que $S \in D$ y, por tanto, que $f \leq_D g$.

(iii) Consideremos f y g funciones ordinales en A. Como se cumple naturalmente que $A = \{a \in A : f(a) < g(a)\} \cup \{a \in A : f(a) = g(a)\} \cup \{a \in A : f(a) > g(a)\}$ y $A \in D$, al ser D un ultrafiltro, se tiene que alguno de los tres uniendos anteriormente mencionados está en D, es decir, $f <_D g$ o $g <_D f$ o $f =_D g$.

(iv) Sean f y g funciones ordinales en A. Recuérdese que $f \lneqq_D g$ si y sólo si $f <_D g$ y $\neg(f =_D g))$. Por el inciso anterior, podemos reescribir esta equivalencia como

$$f \lneqq_D g \Leftrightarrow (f <_D g \wedge (f <_D g \vee g <_D f)) \Leftrightarrow (f <_D g \vee (f <_D g \wedge g <_D f))$$

.

Veremos entonces que no es posible que $f <_D g \wedge g <_D f$. Supongamos que sí es posible, entonces, por definición de $<_D$, $\{a \in A : f(a) < g(a)\} \in D$, $\{a \in A : f(a) > g(a)\} \in D$ y tales conjuntos son ajenos, lo que contradice que D sea un filtro en A. Concluimos entonces que $f <_D g$ si y sólo si $f \lneqq_D g$.

$\dashv$

Con esto damos por concluidas las propiedades generales de la reducción de relaciones a ideales en un conjunto. En la siguiente sección, la última de este trabajo, veremos cómo aplicarlo a nuestro objetivo de probar una versión más general del teorema de Silver visto al final del capítulo pasado, mediante el uso de ideales específicos dados por las hipótesis de tal debilitamiento.

3.3 | La Fórmula de Galvin-Hajnal

Finalmente aplicaremos lo visto hasta ahora en las dos secciones anteriores para poder probar nuestro objetivo de generalizar el teorema de Silver visto al final del segundo capítulo, comenzamos dando la construcción de una medida respecto a ideales para poder formular y probar el teorema de Galvin-Hajnal. Primero, definimos un nuevo tipo de función y estudiando sus características.

Definición 3.22 *(i) Sea A un conjunto cualquiera. A una función $K : A \to \mathcal{P}(A)$ la llamaremos función conjuntista en A.*

(ii) Decimos que $B \in \mathcal{P}(A)$ es independiente respecto a la función conjuntista K si y sólo si, para cualesquiera $x, y \in B$ distintos, se tiene que $x \notin K(y)$.

(iii) Dados un conjunto A y una función conjuntista K, para cada $X \in \mathcal{P}(A)$ definimos los conjuntos $X_u = \{a \in A : K(a) \cap X = \varnothing\}$ y $K_X = \bigcup\{K(x) : x \in X\}$.

(iv) Si A es un conjunto de cardinalidad κ y K es una función conjuntista, decimos que un conjunto $X \in \mathcal{P}(A)$ es popular si $|X_u| < \kappa$. En caso contrario, diremos que X es impopular.

Observación 11 *(i) Pensando a A como el conjunto de personas en el mundo, un buen primer ejemplo sería definir que K sea la función que a cada x le asigna el conjunto de personas que son reconocidas por x, de tal modo que la relación no tiene por qué ser simétrica. De esta forma, se puede pensar a un conjunto independiente como un conjunto de personas que no se reconocen entre sí.*

(ii) De un modo más general, en cualquier conjunto A y cualquier función conjuntista con dominio A, el vacío constituye el primer y más simple ejemplo de un conjunto independiente.

(iii) Recordando el ejemplo dado en el primer inciso, dado $X \in \mathcal{P}(A)$, podemos pensar al conjunto X_u como el conjunto de los elementos de A que no reconocen a algún elemento de X. Esto justifica el hecho de que, si tal conjunto tiene cardinalidad menor a la del conjunto base, al conjunto X se le llame popular, e impopular en el caso opuesto.

(iv) Dada C una cadena de conjuntos independientes de A respecto a una función K, se tiene que $\bigcup C$ es un conjunto independiente(lo cual, nótese, no tiene por qué cumplirse en una familia de conjuntos independientes que no sea cadena), por tanto, por el lema de Zorn, existe un conjunto independiente $\subseteq$-maximal de A. Más aún, para cada $Y \in \mathcal{P}(A)$, podemos hallar un subconjunto independiente de A que sea $\subseteq$-maximal respecto a ser ajeno a Y.

Con lo anterior, falta ver que realmente existen subconjuntos de un conjunto A con una función conjuntista K fija lo suficientemente grandes para que podamos trabajar con ellos en la práctica. El siguiente lema nos da la existencia de tales subconjuntos.

Lema 3.23 (Lázár) *Sea κ un cardinal regular y $\lambda < \kappa$ cualquier cardinal. Sean A un conjunto de cardinalidad κ y K una función conjuntista en A tal que, para cada $x \in A$ se tiene que $|K(x)| < \lambda$. Entonces existe un subconjunto B de A de cardinalidad κ independiente respecto a la función K.*

Demostración Podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que A es el cardinal κ vía una biyección entre A y κ. Definimos una función $g : \kappa \to \kappa$ de tal forma que $g(\alpha) = sup(K(\alpha)) \cap \alpha$, como cada $K(\alpha)$ tiene cardinalidad λ, $\lambda < \kappa$ y κ es regular, entonces se tiene que $sup(K(\alpha)) \in \kappa$ para cada $\alpha \in \kappa$. Entonces g es una función regresiva cuyo dominio es el conjunto estacionario κ en κ mismo. Como κ es regular, por el lema de Fodor, existe $\nu < \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\nu\}]$ es un subconjunto estacionario de κ. Sea $S := f^{-1}[\{\nu\}]$. Entonces el conjunto $(\kappa \setminus \nu) \cap S := S_0$ sigue siendo un conjunto estacionario en κ. Así, para cada $\alpha \in S_0$ se tiene que $f(\alpha) \cap \alpha \subseteq \nu$.

Observemos entonces que, si α y β son elementos distintos de S_0 y $\beta \in f(\alpha)$, entonces $\alpha < \beta$. En efecto, al ser distintos, se tiene que $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$, pero si suponemos que $\beta < \alpha$, entonces se tiene que $\beta \in f(\alpha) \cap \alpha$ y, por tanto, $\beta \in \nu$, contradiciendo que $\beta \in S_0$, de donde necesariamente $\alpha \in \beta$. Entonces procedemos a construir B como una κ-sucesión estrictamente creciente en S_0 por recursión fuerte. Sea $\eta < \kappa$ y supongamos definido s_ζ para cada $\zeta < \eta$, entonces procedemos a definir s_η como el mínimo del conjunto $S_0 \setminus (\bigcup\{f(s_\zeta) : \zeta < \eta\} \cup \{s_\zeta : \zeta < \eta\})$, tal conjunto es no vacío pues $\zeta < \eta$, tenemos a lo más η elementos en ambos uniendos y cada $f(s_\zeta)$ tiene cardinal estrictamente menor a κ por hipótesis. Entonces, si definimos $B = \{s_\eta : \eta < \kappa\}$, por la observación arriba dada, obtenemos que B es el conjunto independiente buscado.

$\dashv$

Teniendo ya un lema que nos prueba la existencia de conjuntos independientes grandes, ahora procedemos a relacionar estos conceptos con las relaciones restringidas a ideales vistas en la sección anterior. Comenzamos probando un lema acerca de tales relaciones, ahora ya vistas en un contexto que involucra a los ordinales.

Lema 3.24 *Sea A un conjunto no vacío, I un ideal σ-completo (es decir, $\aleph_1$-completo) en A y α cualquier ordinal, entonces la relación $<_I$ es bien fundada en ${}^A\alpha$.*

Demostración Como ${}^A\alpha$ es un conjunto, obtenemos que $<_I$ es limitada por la izquierda, es decir, que la colección de los elementos que están relacionados con un conjunto dado es a su vez un conjunto. Ahora supongamos que existe una sucesión de funciones $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq^A \alpha$ estrictamente decreciente según el orden $<_I$, es decir, para cada $n \in \omega$ se tiene que $\{a \in A : f_n(a) \leq f_{n+1}(a)\} \in I$. Como I es un ideal σ-completo, se tiene que $\bigcup_{n\in\omega}\{a \in A : f_n(a) \leq f_{n+1}(a)\} \in I$, de donde $S_I := \bigcap_{n\in\omega}\{a \in A : f_{n+1}(a) < f_n(a)\} \in I^+$, de donde en particular $S_I \neq \varnothing$.

Ahora, sea $a \in S_I$, entonces se tiene que $\{f_n(a) : n \in \omega\}$ es una sucesión infinita y estrictamente decreciente de ordinales, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que $<_I$ es un orden bien fundado en ${}^A\alpha$.

$\dashv$

Ahora que ya hemos probado que $<_I$ es una relación bien fundada, podemos proceder a definir el rango de una función $\phi \in^A \alpha$ según tal orden de la siguiente forma.

Definición 3.25 *Sean α un ordinal, A un conjunto no vacío e I un ideal σ-completo en A. Por recursión transfinita definimos, para cada $\phi \in^A \alpha$, su rango o norma $||\phi||_{I,\alpha}$ respecto al ideal I como*

$$||\phi||_{I,\alpha} := sup\{||\psi||_{I,\alpha} + 1 : \psi \in^A \alpha \wedge \psi <_I \phi\}.$$

Como puede notarse arriba, la notación de la norma respecto al ideal I y a un ordinal α puede volverse tediosa y cargada de escribir por el doble subíndice que se tiene en su definición. Si el ideal I es claro por el contexto, podemos omitirlo de la notación, pero veremos que más aún, podemos también quitar al ordinal del que se supone dependemos considerando las hipótesis y conclusión de la siguiente proposición.

Proposición 3.26 *Si A es un conjunto e I un ideal σ-completo en A, entonces para toda $\phi \in^A \alpha$ y $\beta > \alpha$ se tiene que $||\phi||_{I,\alpha} = ||\phi||_{I,\beta}$.*

Demostración Lo demostramos por inducción transfinita en la relación bien fundada $<_I$ en ${}^A\alpha$. Como ${}^A\alpha \subseteq^A \beta$, se sigue que $||\phi||_{I,\alpha} \leq ||\phi||_{I,\beta}$.

Para obtener la desigualdad opuesta, procederemos de la siguiente manera:

Para cada $\psi \in^A \beta$ tal que $\psi <_I \phi$, hallaremos $\psi' \in^A \alpha$ tal que $||\psi||_{I,\beta} = ||\psi'||_{I,\alpha}$ y $\psi' <_I \phi$. De esta forma tendremos que, por hipótesis de inducción, $||\psi||_{I,\beta} + 1 = ||\psi'||_{I,\beta} + 1 = ||\psi'||_{I,\alpha} + 1 \leq ||\phi||_{I,\alpha}$ de donde tendríamos que $||\phi||_{I,\beta} \leq ||\phi||_{I,\alpha}$.

Sea entonces $\psi \in^A \beta$ tal que $\psi <_I \phi$. Así, $\{a \in A : \phi(a) \in \psi(a)\} \in I$. Obsérvese que $B := \{a \in A : \alpha \leq \psi(a)\} \subseteq \{a \in A : \phi(a) \leq \psi(a)\}$, de donde $B \in I$. Entonces definimos $\psi' \in^A \alpha$ tal que $\psi'(x) = 0$ si $x \in B$ y como $\psi(x)$ en otro caso. Entonces efectivamente $\psi' \in^A \alpha$ y $\psi' <_I \phi$. Además, como el conjunto donde ψ y ψ' difieren es B que está en I, se tiene que $\psi =_I \psi'$. Ahora, dado $\xi \in^A \beta$ tal que $\xi <_I \psi$, se tiene que $\{a \in A : \psi(a) \leq \xi(a)\} \in I$. Hay que probar entonces que $D := \{a \in A : \psi'(a) \leq \xi(a)\} \in I$. Sea $a \in D$, si se tiene que $\psi'(a) = \psi(a)$, entonces $a \in \{a \in A : \psi(a) \leq \xi(a)\} \in I$ y si $\psi'(a) \neq \psi(a)$, entonces $a \in B \in I$, de donde D está contenido en la unión de dos elementos de I, y por tanto, $D \in I$ y concluimos que $\xi <_I \psi$. De forma análoga se prueba que, si $\xi <_I \psi'$, entonces $\xi <_I \psi$, de donde, por la definición de $|| \cdot ||_{I,\beta}$ se tiene que las normas de ψ y ψ' coinciden y se sigue la proposición.

$\dashv$

Con lo anterior, ya podemos hacer lo dicho antes y omitir el α en la notación de la norma. De hecho, de ahora en adelante, se considerará α lo suficientemente grande como para tener a todas las funciones con las que estemos tratando.

Veamos ahora algunas propiedades de la norma recién definida.

Lema 3.27 *Supongamos que $\phi, \phi_1, \phi_2 \in^A \alpha$ Entonces se tiene que*

(i) Si $\phi_1 =_I \phi_2$, entonces $||\phi_1||_I = ||\phi_2||_I$.

(ii) Si $\phi_1 <_I \phi_2$, entonces $||\phi_1||_I < ||\phi_2||_I$.

(iii) Si $\phi_1 \leq \phi_2$, entonces $||\phi_1||_I \leq ||\phi_2||_I$.

(iv) Si $\{\phi_\zeta : \zeta \leq \gamma\} \subseteq {}^A\alpha$ es una sucesión estrictamente creciente bajo $<_I$, entonces $\gamma \leq ||\phi_\gamma||_I$.

(v) Si $\tau < ||\phi||_I$, entonces existe $\psi \in {}^A\alpha$ tal que $\psi <_I \phi$ y $||\psi||_I = \tau$.

Demostración Los primeros tres incisos se siguen de la definición del rango y las propiedades del orden $<_I$.

Para el cuarto inciso, procedemos por inducción sobre γ. Supongamos que para todo $\alpha < \gamma$ se cumple la proposición y sea $\{\phi_\zeta : \zeta \leq \gamma\}$ una sucesión estrictamente $<_I$-creciente. Sea $\alpha < \gamma$, entonces consideremos la subsucesión de la sucesión dada hasta el α-ésimo elemento, la cual preserva el ser estrictamente creciente bajo $<_I$. Por hipótesis de inducción, se tiene que $\alpha \leq ||\phi_\alpha||_I$ y, por el segundo inciso, al tener que $\phi_\alpha < \phi_\gamma$, $\alpha < ||\phi_\gamma||_I$ para cada $\alpha < \gamma$. Concluimos entonces que $\gamma \leq ||\phi_\gamma||_I$.

Por último, para el último inciso, aplicamos inducción transfinita sobre el ordinal $||\phi|| := ||\phi||_I$. Sea $\tau < ||\phi||$. Si $||\phi|| = 0$ la afirmación se cumple por vacuidad.

Supongamos que $||\phi|| = s(\tau)$ y que la afirmación se cumple siempre que la norma de una función sea igual a τ. Por la definición de la norma, se tiene que existe $\psi_0 <_I \phi$ tal que $||\phi|| = ||\psi_0|| + 1$, de dodne $\tau \leq ||\psi_0||$. Si son iguales, sea $\psi := \psi_0$. En otro caso, $\tau < ||\psi_0|| < ||\phi||$ y, por hipótesis de inducción, existe $\psi \in^A \alpha$ tal que $\psi <_I \psi_0$ y $||\psi|| = \tau$ y, como por el lema previo se tiene que $<_I$ es transitiva, se cumple el caso sucesor.

Ahora supongamos que $||\phi||$ es un ordinal límite y que para cualquier ordinal menor que $||\phi||$ se cumple la proposición. Como $\tau < ||\phi||$, existe $\psi_0 <_I \phi$ tal que $\tau < ||\psi_0|| + 1$, de donde $\tau \leq ||\psi_0||$ y, de forma ánaloga a como se probó el caso sucesor, podemos concluir la proposición.

$\dashv$

Con el anterior lema en mente, ahora sabemos que la sucesiones de rangos de sucesiones crecientes de funciones preservan, por decirlo de algún modo, la forma creciente de las funciones. Además, también vimos que podemos cubrir todo lo anterior a un ordinal dado, cuando tal ordinal es el rango de una función ya dada, y podemos hacerlo con una función que sea menor a la original con el orden $<_I$.

Ahora, relacionaremos el rango que ya hemos definido respecto a cualquier ideal con los ideales restringidos tratados en la sección anterior.

Lema 3.28 *Supongamos que α es un ordinal e I es un ideal σ-completo en un conjunto no vacío A. Si $\phi \in {}^{A}\alpha$, $Y \in I^+$ y $\{a \in Y : \phi(a)$ no es cardinal sucesor$\} \in I$, entonces $||\phi||_{I\restriction_Y}$ es un ordinal sucesor.*

Demostración Sea $X := \{a \in Y : \phi(a) \in Lim \vee \phi(a) = 0\}$ y sea $||\phi|| := ||\phi||_{I\restriction_Y}$. Definimos $\psi \in^A \alpha$ tal que $\psi(a) = 0$ si $a \in X$, y si $a \in Y \setminus X$, entonces definimos $\psi(a) = \beta$, donde β es el ordinal tal que $\phi(a) = \beta + 1$.

Entonces se tiene que $\{a \in Y : \phi(a) \leq \psi(a)\} \subseteq X$ y, al estar $X \in I$, se tiene que $\{a \in Y : \phi(a) \leq \psi(a)\} \in I\restriction_Y$, de donde se tiene que $\psi <_{I\restriction_Y} \phi$ y, por un lema previo, $||\psi|| < ||\phi||$.

Aseguramos que, de hecho, $||\phi|| = s(||\psi||)$. En efecto, sea ϕ_1 menor que ϕ según el orden $<_{I\restriction_Y}$, entonces se tiene que $Z := \{a \in Y : \phi(a) \leq \phi_I(a)\} \in I$. Ahora bien, dado $a \in Y$ tal que $a \notin X \cup Z$ se tiene que $\phi_1(a) < \phi(a)$ y $\phi(a) = \psi(a) + 1$, de donde $\phi_1(a) \leq \psi(a)$ y, por tanto, $\{a \in Y : \psi(a) < \phi_1(a)\} \subseteq X \cup Z \in I$. Entonces $\phi_1 \leq_{I\restriction_Y} \psi$ y, por el tercer inciso del lema anterior, se tiene que $||\phi_1|| \leq ||\psi||$, de donde ya tenemos que $||\phi|| = ||\psi|| + 1$ por la definición de $||\phi||$.

$\dashv$

Finalmente estamos en condiciones de probar la Fórmula de Galvin-Hajnal, para ello requerimos una equivalencia respecto a los ordinales mayores o iguales a un rango dado.

Lema 3.29 *Sea κ un cardinal regular no numerable, ϕ una función ordinal en κ e I un ideal κ-completo en κ tal que $dom(I) = \kappa$. Entonces se tiene que, para cada $\sigma \in \kappa$, $||\phi||_I \leq \sigma$ si y sólo si $\{\zeta < \kappa : \phi(\zeta) \leq \sigma\} \in I^+$.*

Demostración Sea $S_\sigma := \{\zeta < \kappa : \phi(\zeta) \leq \sigma\}$. Supongamos que $S_\sigma \in I$. Definimos, para cada $\lambda < \kappa$, $\psi_\lambda = \kappa \times \{\lambda\}$, entonces, para $\lambda \leq \sigma$ se tiene que $\psi_\lambda <_I \phi$ lo cual se cumple puesto que $\{\zeta < \kappa : \phi(\zeta) \leq \psi_\lambda(\zeta)\} \subseteq \{\zeta < \kappa : \phi(\zeta) \leq \sigma\} \in I$. Además, para cualesquiera ρ y η tales que $\rho < \eta \leq \sigma$ se tiene que $\psi_\rho <_I \psi_\eta$ y, por tanto, $\psi_\rho <_I \psi_\eta$, de donde la sucesión $\{\psi_\rho : \rho < \sigma\}$ es una sucesión estrictamente creciente según $<_I$. Por el cuarto inciso del lema 3.27, se tiene que $\sigma \leq ||\psi_\sigma||_I < ||\phi||_I$ y por contrapuesta, se sigue el resutado.

Para el recíproco, aplicaremos inducción transfinita sobre el ordinal σ. Sea ψ función ordinal en κ fija tal que $\psi <_I \phi$. Como I es un ideal normal κ-completo con dominio κ, sabemos que $\{\zeta < \kappa : \zeta < \sigma\}$ y $\{\zeta < \kappa : \phi(\zeta) \leq \psi(\zeta)\}$ son elementos de I. Por tanto, el conjunto $S := \{\zeta < \kappa : \psi(\zeta) < \phi(\zeta) \leq \sigma \leq \zeta\} \in I^+$, puesto que, si $\zeta \in S_\sigma$, sabemos que $\zeta < \sigma$ o $\sigma \leq \zeta$, si $\zeta < \sigma$, entonces $\zeta \in \{\zeta < \kappa : \zeta < \sigma\}$ y si $\sigma \leq \zeta$, como $\zeta \in S_\sigma$, se tiene que $\phi(\zeta) \leq \sigma$, de donde, al tener que o bien $\phi(\zeta) \leq \psi(\zeta)$ o $\psi(\zeta) < \phi(\zeta)$, obtenemos que $S_\sigma \subseteq S \cup \{\zeta < \kappa : \zeta < \sigma\} \cup \{\zeta < \kappa : \phi(\zeta) \leq \psi(\zeta)\}$ y aplicamos que I es un ideal en κ. Más aún, por definición se tiene que ψ es regresiva en S. Como I es normal, por el lema 2.27, se tiene que existe $S_0 \subseteq S$ tal que $S_0 \in I^+$ y $\alpha \in \sigma$ tal que $ran(\psi\restriction_{S_0}) = \{\alpha\}$. Como en este caso, $S^\psi_\alpha \in I^+$, tenemos por hipótesis de inducción que $||\psi||_I \leq \alpha < \sigma$. Como esto sucede para cada $\psi <_I \phi$, obtenemos que $||\phi|| \leq \sigma$.

$\dashv$

Antes de proceder a demostrar finalmente nuestro teorema, recordaremos un concepto del capítulo pasado, esta vez enunciado con notación introducida en el presente capítulo, y definiremos una función sobre el mismo.

Definición 3.30 *Si κ es un cardinal infinito y ψ es una función con dominio κ que toma como valores cardinales infinitos, entonces definimos*

$$T(\psi) = sup\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \prod_{\zeta<\kappa} \psi(\zeta) \text{ donde } F \text{ es un conjunto de funciones casi ajenas}\}$$

.

En el caso de que σ sea un ordinal y ψ sea la constante σ, se escribirá $T(\kappa, \aleph_\sigma)$ en lugar de $T(\aleph \circ \psi)$.

Con todos estos lemas en mente, ya podemos dar una prueba de la llamada Fórmula de Galvin-Hajnal, la cual es de hecho la clave para probar las generalizaciones mencionadas al final del capítulo anterior.

Teorema 3.31 (Fórmula de Galvin-Hajnal) *Supongamos que κ es un cardinal regular de cofinalidad no numerable e I un ideal normal κ-completo tal que $\bigcup I = \kappa$. Sean $\{l(\zeta) : \zeta < \kappa\}$ una sucesión continua y estrictamente creciente de ordinales y $\aleph_\lambda := 2^\kappa sup\{T(\kappa, \aleph_{l(\zeta)}) : \zeta < \kappa\}$. Si Φ es una función con dominio κ que toma valores ordinales y definimos Ψ como, para cada $\zeta \in \kappa$, $\Psi(\zeta) = l(\zeta) + \Phi(\zeta)$, entonces se tiene que $T(\aleph \circ \Psi) \leq \aleph_{(\lambda+||\Phi||_I)}$.*

Demostración Sea $\mathfrak{F} \subseteq \prod\limits_{\zeta<\kappa} \aleph_{\lambda+||\Phi||_I}$ casi ajena. Para demostrar lo requerido, usaremos inducción sobre el ordinal $||\Phi||_I$ distinguiendo el caso en el que tal ordinal sea 0.

Supongamos primero que $||\Phi||_I = 0$. Por el primer inciso de la proposición 2.21, sabemos que $I_b(\kappa) \subseteq I$ y, por tanto, todo $X \in I^+$ tiene cardinalidad exactamente κ. Por el lema anterior y aplicando la proposición mencionada arriba, obtenemos que $\{\zeta < \kappa : \Phi(\zeta) = 0\} \in I^+$ y que $\{\zeta + 1 : \zeta < \kappa\} \in I$. De hecho, como $\bigcup I = \kappa$, obtenemos que $\{0\} \in I$, de donde, como en el lema anterior, el conjunto $X_0 = \{\zeta < \kappa : \Phi(\zeta) = 0 \wedge Lim(\zeta)\}$ es positivo.

Sea $f \in \mathfrak{F}$. Por hipótesis, tenemos que, para cada $\zeta \in X_0$, $f(\zeta) < \aleph_{l(\zeta)}$. Como l es una función continua, existe un ordinal $\alpha_f(\zeta) < \zeta$ tal que $f(\zeta) < \aleph_{l(\alpha_f(\zeta))}$. Entonces la función α_f es regresiva y, como I es normal, por el lema de Fodor, existen $X_f \in \mathcal{P}(X_0) \cap I^+$ y $\beta_f < \kappa$ tal que, para cada $\zeta \in X_f$, $\alpha_f(\zeta) = \beta_f$, de donde podemos concluir que $f \restriction_{X_f} \in \prod\limits_{\zeta \in X_f} \aleph_{\lambda(\beta_f)}$.

Ahora bien, sean $X \in \mathcal{P}(X_0) \setminus I$ y $\beta < \kappa$. Definimos

$$\mathfrak{F}_{X,\beta} = \{f \in \mathfrak{F} : f \restriction_X \in \prod_{\zeta \in X} \aleph_{\lambda(\beta)}\}.$$

Como cada elemento de $\mathcal{P}(X_0) \setminus I$ es no acotado en κ, la familia $\{f \restriction_X : f \in \mathfrak{F}_{X,\beta}\}$ es equipotente a la familia $\mathfrak{F}_{X,\beta}$, además, es casi ajena y es subconjunto de $\prod\limits_{\zeta \in X} \aleph_{\lambda(\beta)}$. Como κ es regular, cualquier biyección de X a κ preserva la condición de que dos funciones sean casi ajenas, de donde obtenemos que $|\mathfrak{F}_{X,\beta}| \leq T(\kappa, \aleph_{\lambda(\beta)}) \leq \aleph_\lambda$.

Por último, como $\mathfrak{F} = \bigcup\{\mathfrak{F}_{X,\beta} : X \in \mathcal{P}(X_0) \setminus I \wedge \beta < \kappa\}$ y la cantidad de parejas (X, β) está acotada por 2^κ, obtenemos la desigualdad buscada en este caso.

Ahora supongamos que $||\Phi||_I = \alpha > 0$ y que la proposición se cumple para cualquier función Φ' tal que $||\Phi'||_I < \alpha$.

Sea $f \in \mathfrak{F}$. Si $\Phi(\zeta) \neq 0$, existe una mínima $\delta < \Phi(\zeta)$ tal que $f(\zeta) \leq \aleph_{\lambda(\zeta)+\delta}$. Pero como tenemos que $||\Phi||_I > 0$, por el lema anterior, se tiene que $\{\zeta < \kappa : \Phi(\zeta) = 0\} \in I$, de donde, módulo I, se cumple que $\Phi(\zeta) > 0$ para casi toda $\zeta < \kappa$. Ahora bien, si definimos las funciones Φ_f y Ψ_f con dominio κ, como, para cada $\zeta < \kappa$, $\Phi_f(\zeta) = min\{\delta : |f(\zeta)| \leq \aleph_{\lambda(\zeta)+\delta}\}$ y $\Psi_f(\zeta) = \lambda(\zeta) + \Phi_f(\zeta)$, tenemos que, módulo I, se cumple que para casi toda $\zeta < \kappa$, $\Phi_f(\zeta) < \Phi(\zeta)$, es decir, que $\Phi_f <_I \Phi$, de donde, por el lema 3.27, $||\Phi_f||_I < ||\Phi||_I$. Así, si definimos $\mathfrak{F}_\eta = \{f \in \mathfrak{F} : ||\Phi_f||_I = \eta\}$, entonces tenemos que $\mathfrak{F} = \bigcup\{\mathfrak{F}_\eta : \eta < \alpha\}$.

Sea $\eta < \alpha$ y $f \in \mathfrak{F}_\eta$. Sea $g \leq f$, entonces tenemos que $g \in \prod\limits_{\zeta<\kappa} (f(\zeta) + 1)$. Por la notación introducida anteriormente, sabemos que para $\zeta < \kappa$ se cumple que $|f(\zeta)| \leq \aleph_{l(\zeta)+\Phi_f(\zeta)}$. Para cada $\zeta < \kappa$, sea $i_\zeta : f(\zeta) + 1 \to \aleph_{\lambda(\zeta)+\Phi_f(\zeta)}$. Para cada $g \in Pr(f) := \{g \in \mathfrak{F}_\eta : g \leq f\}$, definimos $g^* \in \prod\limits_{\zeta<\kappa} \aleph_{\lambda(\zeta)+\Phi_f(\zeta)}$ tal que $g^*(\zeta) = i_\zeta(g(\zeta))$. Si definimos $Pr^*(f) = \{g^* : g \in Pr(f)\}$, al ser inyección, tenemos que $|Pr(f)| = |Pr^*(f)|$ y $Pr^*(f)$ es una familia casi ajena de funciones subconjunto del producto arriba mencionado. Y como $||\Phi_f||_I < \alpha$, por hipótesis de inducción se sigue que $|Pr(f)| = |Pr^*(f)| \leq T(\aleph \circ \Psi_f) \leq \aleph_{\lambda+||\Phi_f||_I} = \aleph_{\lambda+\eta}$.

Ahora es momento de aplicar los resultados combinatorios vistos al inicio del capítulo. Supongamos que existe $\eta < \alpha$ tal que $\aleph_{\lambda+\eta+2} \leq |\mathfrak{F}_\eta|$. De ser necesario tomar un subconjunto de tal cardinalidad, podemos suponer que $|\mathfrak{F}_\eta|$ es exactamente tal número $\aleph$. Así, $|\mathfrak{F}_\eta|$ es regular, y aplicando el lema de Lázár, tomando la función conjuntista $P_r : \mathfrak{F}_\sigma \to \mathcal{P}(\mathfrak{F}_\eta)$ tal que $P_r(f) = \{g \in \mathfrak{F} : g \leq_\kappa f\}$ y recordando que, para cada f, $|P_r(f)| \leq \aleph_{\lambda+\eta}$, obtenemos que existe un subconjunto de $\mathfrak{F}_\eta$ con cardinalidad $\aleph_{\lambda+\eta+2}$ independiente respecto a la función P_r. Por la definición de λ, se tiene que $2^\kappa < \aleph_{\lambda+\eta+2}$, de donde existe una sucesión inyectiva $\{f_\zeta : \zeta < (2^\kappa)^+\}$ de elementos de la familia $\mathfrak{F}_\eta$ tal que, para cada ζ y ξ tales que $\zeta < \xi < (2^\kappa)^+$, se cumple que $f_\zeta \notin P_r(f_\xi)$. Entonces existe un mínimo ordinal $I(\zeta,\xi)$ tal que $f_\xi(I(\zeta,\xi)) < f_\zeta(I(\zeta,\xi))$, con lo cual podemos definir una función $I : ((2^\kappa)^+)^2 \to \kappa$. Con esto, podemos aplicar un corolario al teorema de Erdös-Rado que menciona que $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa$. Es decir, existe $A \subseteq (2^\kappa)^+$ de cardinalidad κ^+ y un ordinal $\gamma < \kappa$ tal que $ran(I \restriction_{[A]^2}) = \{\gamma\}$. En particular, elegimos una sucesión estrictamente creciente $\{\zeta_n : n \in \omega\}$ de miembros en A. Entonces, por construcción, $\{f_{\zeta_n} : n \in \omega\}$ es una sucesión estrictamente decreciente de ordinales, lo cual es una contradicción. Como en ambos casos la desigualdad se cumple, concluimos que la desigualdad dada es válida para cualquier función ordinal ψ con dominio en κ.

$\dashv$

Habiendo probado ya la fórmula que nos permitirá dar la generalización del teorema de Silver, sólo resta probar otra serie de resultados antes de completar tal generalización.

Corolario 3.32 *Supongamos que $\aleph_\zeta$ es un cardinal singular κ-fuerte, donde $\kappa = cf(\aleph_\zeta) > \omega$, que ϕ es una función ordinal con dominio κ, $\{\zeta(\eta) : \eta < \kappa\}$ es una función normal cofinal en $\aleph_\zeta$ y $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\eta<\kappa} \aleph_{\zeta(\eta):+\phi(\eta)}$ es una familia casi ajena de funciones. Entonces se cumple que $|\mathcal{F}| \leq \aleph_{\zeta+||\phi||_{I_d(\kappa)}}$. Dicho de otro modo, si se define $\psi := \zeta + \phi$, se tiene que $T(\aleph \circ \psi) \leq \aleph_{\zeta+||\phi||_{I_d(\kappa)}}$.*

Demostración Primero que nada, como $\aleph_\zeta$ es κ-fuerte, podemos dar una aproximación del cardinal $\aleph_\lambda$ definido en la prueba de la Fórmula de Galvin-Hajnal de la forma siguiente:

$$\aleph_\lambda = 2^\kappa sup\{T(\kappa, \aleph_{\zeta(\eta)}) : \eta < \kappa\} \leq 2^\kappa sup\{\aleph^\kappa_{\zeta(\eta)} : \eta < \kappa\} \leq 2^\kappa \aleph_\eta = \aleph_\eta.$$

De la fórmula de Galvin-Hajnal, como $I_d(\kappa)$ es un ideal que cumple las hipótesis requeridas por la fórmula, si se define $\psi = \{\zeta(\eta) + \phi(\eta) : \eta < \kappa\}$, entonces se tiene que $|\mathcal{F}| \leq T(\aleph \circ \psi) \leq \aleph_{\lambda+||\phi||_{I_d(\kappa)}} \leq \aleph_{\zeta+||\phi||_{I_d(\kappa)}}$, lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Lema 3.33 *Sean $\aleph_\zeta$ un cardinal límite, κ un cardinal, λ cardinal mayor a 1, y $\{\zeta(\eta) : \eta < \kappa\}$ como en el corolario anterior. Entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \prod^{\lambda}_{\eta<\kappa} \aleph_{\zeta(\eta)}$ casi ajena tal que $|\mathcal{F}| = \aleph^\lambda_\zeta$.*

Demostración Para cada función $\phi \in^\lambda \aleph_\zeta$, definimos $f_\phi \in \prod^{\lambda}_{\eta<\kappa} \aleph_{\zeta(\eta)}$ tal que $f_\phi(\eta)(\alpha)$ es $\phi(\alpha)$, si se tiene que $\phi(\alpha) < \aleph_{\zeta(\eta)}$ y 0 en otro caso. Así, si ϕ y ψ son dos funciones distintas en ${}^\lambda\aleph_\zeta$, entonces existe $\alpha_0 < \lambda$ donde tales funciones difieren. Sea $\eta_0 < \kappa$ un ordinal tal que $\phi(\alpha_0)$ y $\psi(\alpha_0)$ son menores a $\aleph_{\zeta(\eta_0)}$. Entonces, para cada η entre η_0 y κ se tiene que $f_\phi(\eta)(\eta_0) \neq f_\psi(\eta)(\eta_0)$ y, por tanto, para tales η's $f_\phi(\eta) \neq f_\psi(\eta)$. De aquí que ambas funciones son casi ajenas y el conjunto $\mathcal{F} := \{f_\phi : \phi \in^\lambda \aleph_\zeta\}$ es la familia casi ajena de funciones buscada.

$\dashv$

Corolario 3.34 (Lema de Galvin-Hajnal) *Sean $\aleph_\zeta$, κ y $\{\zeta(\eta) : \eta < \kappa\}$ como en el corolario anterior y λ un cardinal mayor a 1. Sea ϕ una función ordinal en κ tal que, para cada $\eta < \kappa$, $\aleph^\lambda_{\zeta(\eta)} = \aleph_{\zeta(\eta)+\phi(\eta)}$. Entonces se cumple que $\aleph^\lambda_\zeta \leq \aleph_{\zeta+||\phi||_{I_d(\kappa)}}$.*

Demostración Por el lema anterior, consideramos a $\mathcal{F}$ una familia casi ajena de funciones de cardinalidad $\aleph^\lambda_\zeta$. Pero, aplicando el corolario 3.32, se tiene que $\mathcal{F}$ tiene cardinalidad no mayor a $\aleph_{\zeta+||\phi||_{I_d(\kappa)}}$, lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Corolario 3.35 *Si σ es un ordinal numerable tal que el conjunto $S := \{\zeta < \omega_1 : \aleph_\zeta^{\aleph_1} \leq \aleph_{\zeta+\sigma}\}$ es estacionario en ω_1, entonces se cumple que $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1+\sigma}$.*

Demostración Si $\beta < \omega_1$, como S es estacionario, sabemos que existe η mayor a β tal que $\aleph_\eta^{\aleph_1} \leq \aleph_{\eta+\sigma} < \aleph_{\omega_1}$, de donde se tiene que $\aleph_\beta^{\aleph_1} \leq \aleph_{\eta+\sigma}$. Entonces $\aleph_{\omega_1}$ es $\aleph_1$-fuerte, y la función ϕ definida por la ecuación $\aleph_\eta^{\aleph_1} = \aleph_{\eta+\phi(\eta)}$ es una función de ω_1 en sí mismo. Ahora bien, como el conjunto $\{\zeta < \omega_1 : \phi(\zeta) \leq \sigma\}$ es estacionario en $\aleph_1$ por hipótesis, por el lema 3.29, sabemos que $||\phi||_{I_d(\aleph_1)} \leq \sigma$. Más aún, sabemos que $cf(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1$, de donde poniendo, para cada η numerable, a la sucesión pedida como la identidad obtenemos, por el lema de Galvin-Hajnal, que $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1+\sigma}$.

$\dashv$

Como puede notarse, con el lema anterior volvemos a entrar en materia al suponer que tales o cuales conjuntos son estacionarios dentro del cardinal que nos interesa, con esto podemos ver que nuestro objetivo cada vez está más cerca. Falta un último lema preeliminar antes de obtener el resultado que nos dará como corolario la esperada generalización.

Lema 3.36 *Sean $\aleph_\zeta$, κ y $\{\zeta(\eta) : \eta < \kappa\}$ como en el lema anterior. Entonces existe una familia casi ajena de funciones $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\eta<\kappa} ({}^{\aleph_{\zeta(\eta)}}2)$ y $2^{\aleph_\zeta} = |\mathcal{F}| = |\prod_{\eta<\kappa} ({}^{\aleph_{\zeta(\eta)}}2)|$.*

Demostración Para cada $X \in \mathcal{P}(\aleph_\zeta)$, definimos $f_X \in \prod_{\eta<\kappa} \mathcal{P}(\aleph_{\zeta(\eta)})$ como $f_X(\eta) = X \cap \aleph_{\zeta(\eta)}$. Si X y Y son dos elementos distintos en la potencia, existe un ordinal $\eta_0 < \kappa$ tal que sus funciones difieren. Como estamos considerando una sucesión no decreciente, se tiene que $f_X(\eta) \neq f_Y(\eta)$ para cada η mayor a η_0, de donde f_X y f_Y son casi ajenas. Como $2^{\aleph_{\zeta(\eta)}} = |\mathcal{P}(\aleph_{\zeta(\eta)})|$, podemos identificar cada f_X con un elemento del producto tratado en el lema y poner $\mathcal{F} := \{f_X : X \in \mathcal{P}(\aleph_\zeta)\}$. Por tanto, $2^{\aleph_\zeta} = |\mathcal{P}(\aleph_\zeta)| = |\mathcal{F}| \leq |\prod_{\eta<\kappa} ({}^{\aleph_{\zeta(\eta)}}2)| \leq (2^{\aleph_\zeta})^\kappa = 2^{\aleph_\zeta}$.

$\dashv$

Corolario 3.37 *Sean $\aleph_\zeta$, κ y $\{\zeta(\eta) : \eta < \kappa\}$ como en el lema anterior, y $\sigma < \kappa$ tal que $\{\eta < \kappa : 2^{\aleph_{\zeta(\eta)}} \leq \aleph_{\zeta(\eta)+\sigma}\} \in I_d(\kappa)^+$. Entonces $2^{\aleph_\zeta} \leq \aleph_{\zeta+\sigma}$.*

Demostración Como en la prueba del corolario anterior, podemos definir una función $\phi \in^\kappa \kappa$ basados en la igualdad $2^{\aleph_{\zeta(\eta)}} = \aleph_{\zeta(\eta)+\phi(\eta)}$ y obtener que $\aleph_\zeta$ es un cardinal límite fuerte. Como el conjunto $\{\eta < \kappa : \phi(\eta) \leq \sigma\} \in I_d(\kappa)^+$, el lema 3.29 nos dice que $||\phi||_{I_d(\kappa)} \leq \sigma$. Por el lema anterior, obtenemos una familia casi ajena de funciones de cardinal $2^{\aleph_\zeta}$, $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\eta<\kappa} \aleph_{\zeta(\eta)+\phi(\eta)}$. Por nuestro primer corolario a la fórmula de Galvin-Hajnal, $|\mathcal{F}| \leq \aleph_{\zeta+||\phi||} \leq \aleph_{\zeta+\sigma}$, lo que concluye la demostración.

$\dashv$

Finalmente, podemos concluir lo siguiente,

Teorema 3.38 (Silver) *Si $\aleph_\zeta$ es un cardinal singular de cofinalidad no numerable y el conjunto $\{\kappa < \aleph_\zeta : \kappa \in CAR \wedge 2^\kappa = \kappa^+\}$ es estacionario en $\aleph_\zeta$, entonces $2^{\aleph_\zeta} = \aleph_{\zeta+1}$.*

Demostración Aplicando el corolario anterior, con $\sigma = 1$ y considerando la sucesión cofinal y normal de $cf(\aleph_\zeta)$ a $\aleph_\zeta$ cuya existencia se demostró en el capítulo uno, obtenemos entonces que $2^{\aleph_\zeta} \leq \aleph_{\zeta+1}$. Como la otra desigualdad siempre se cumple, obtenemos el resultado requerido.

$\dashv$

Puede pensarse que el camino fue bastante largo para la conclusión, la cual de hecho ya podía vaticinarse. Sin embargo, estas construcciones tienen muchas más consecuencias que las expuestas aquí, ya que en este caso se expusieron los lemas y corolarios requeridos para dar una prueba de la generalización del teorema probado en el capítulo 2, el cual era el objetivo principal de este trabajo. Debido a la complejidad con la cual fueron creadas las relaciones aquí dadas respecto a ideales dados, podemos percatarnos de que existen muchas otras relaciones entre cardinales y exponenciación de los mismos que pueden obtenerse a partir de los resultados aquí obtenidos.

Con esto concluimos la generalización deseada para el primer teorema de Silver presentado en el capítulo pasado, el cual a su vez sirve como objetivo de este trabajo en general. Con todo lo visto hasta ahora, podemos concluir que los conjuntos estacionarios, o bien lo que se cumpla en un subconjunto estacionario de algún conjunto, pueden darnos una idea de algún resultado en el conjunto general, o incluso pueden bastarnos para probar tal resultado. Esto nos lo muestran los dos teoremas de Silver, las relaciones restringidas a ideales, o bien la cardinalidad de funciones de familias casi ajenas. Como ya puede vaticinarse, las aplicaciones son aún mayores en otros contextos, como los famosos números pcf, además del presentado aquí, el cual está enfocado en la aritmética cardinal.

Bibliografía

[Ca] J.A. Amor Montaño, G. Campero Arena y F.E. Miranda Perea, *Teoría de Conjuntos, Curso Intermedio*, Segunda Edición, Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2014

[EHM] P. Erdös, A. Hajnal, A. Máté, R. Rado, *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 76, North-Holland, Amsterdam 1984

[GH] F. Galvin, A. Hajnal, *Inequalities for cardinal powers*, Ann. Of Math. 101, 1975 pp. 491-498

[Ho10] M. Holz, K. Steffens, E. Weitz. *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Primera reimpresión Birkhäuser Verlag AG.Basel, Switzerland, 2010

[HrJe] K.Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Third Edition, Marcel Dekker Inc., 1999

[Je1] T. Jech *Set Theory.* Segunda edición, Springer-Verlag, Berlin, 1997

[Ku] K. Kunen *Set Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 34, North-Holland, Amsterdam 2013

[Si] J. Silver, *On the singular cardinals problem*, Proc. Internat. Congress of Math., Vancouver 1974, vol. I, pp.265-268