



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Instantones en
el Oscilador Armónico Polimérico y
la Cosmología Polimérica**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

P R E S E N T A:

Joan Aitor Austrich Olivares

**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José David Vergara Oliver**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Prefacio	I
1. Fundamentos Matemáticos	1
1.1. Conceptos Básicos	1
1.2. El Álgebra de la Mecánica Cuántica Polimérica	7
1.2.1. Cuadro de Schrödinger	7
1.2.2. Ecuación de Schrödinger y Ecuación de Evolución	11
1.2.3. Cuadro de Heisenberg	12
1.2.4. Teorema de Stone-von Neumann	13
1.2.5. Álgebra Mecánica Cuántica Polimérica	14
1.2.6. Teoría de Constricciones	16
1.2.7. Método de Promedio sobre el Grupo	19
2. Introducción a la Cosmología Isotrópica	22
2.1. Obtención de la métrica FLRW	22
2.2. Ecuaciones de Einstein y Principio de Covarianza General	26
2.3. Cosmología Isotrópica	27
2.4. Acción de Einstein-Hilbert	28
2.4.1. Obtención del escalar de Ricci	29
2.5. Lagrangiano Reducido Gravitacional.	33
2.6. Análisis Canónico	35
2.6.1. Derivación del Hamiltoniano Gravitacional y de Materia	35
2.7. Ecuaciones de Movimiento del Hamiltoniano Total	37
2.8. Ecuaciones de Friedmann, Raychaudhuri y Klein-Gordon	38
2.9. Parámetros de Materia y Ecuación de Continuidad	40
2.10. Condiciones de Energía y Singularidades	42
2.10.1. Condiciones de Energía	42

2.10.2. Singularidades	44
3. Integral Funcional y Determinantes Funcionales	45
3.1. Integral Funcional	45
3.1.1. Partícula Puntual Sobre un Círculo.	49
3.2. Determinantes Funcionales	55
3.2.1. El Formalismo de Gel'fand-Yaglom	56
3.2.2. Determinantes Funcionales en presencia de Modos Cero	58
4. Aplicaciones de la Mecánica Cuántica Polimérica.	60
4.1. Partícula Libre Polimérica	60
4.2. Partícula Libre Relativista	69
4.2.1. No-Polimérico	70
4.2.2. Polimérico	72
4.3. Oscilador Armónico Polimérico	73
4.3.1. Aproximación a primer orden $V(p_x) \simeq \frac{p_x^2}{2m}$	75
4.3.2. Aproximación a segundo orden $V(p_x) = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{p_x^4}{6m}$	77
4.3.3. Potencial completo: $V(p_x) = \frac{\hbar^2}{2\mu^2 m} \sin^2\left(\frac{\mu p_x}{\hbar}\right)$	79
5. Instantones	84
5.1. Introducción.	84
5.2. Integrales Funcionales y Tiempo Imaginario.	86
5.2.1. Oscilador Armónico.	89
6. Cálculo del Determinante del Oscilador Armónico Polimérico.	94
6.1. Obtención de la Acción (\mathcal{S}) en espacio de momentos (p).	94
6.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange y la Solución Clásica (p_{cl})	100
6.3. Cálculo de la Amplitud de Transición del Oscilador Armónico Polimérico.	102
6.3.1. Solución General a la Ecuación de Schrödinger.	103
6.3.2. Espectro Continuo.	106
6.3.3. Espectro Discreto.	110
6.3.4. Modo Cero.	111
6.3.5. Contribución Completa al determinante de un Instantón del Oscilador Armónico Polimérico.	114
6.4. El Oscilador Armónico en Mecánica Cuántica Polimérica.	117

7. Cálculo de la Amplitud de Transición en Cosmología Polimérica.	119
7.1. Eliminación de la dependencia de ϕ y p_ϕ en la acción \mathcal{S} .	119
7.2. Amplitud de Transición en Cosmología Polimérica.	122
7.2.1. Acción Efectiva en Cosmología Polimérica (espacio de momentos)	127
7.2.2. Operador Determinante Funcional y Ecuación de Movimiento.	129
7.2.3. Solución a la Ecuación de Movimiento.	130
7.3. Radio Cosmológico Polimérico.	131
Conclusiones	134
A. Aproximación WKB	137
B. Cuantización de Dirac y Método de Promedio sobre el Grupo	141
B.1. Teoría de norma y Cuantización de Dirac	141
B.2. Método de Promedio sobre el Grupo de vuelta	144
Bibliografía	146

Índice de figuras

4.1. Solución al potencial Pöschl-Teller	82
7.1. Representación del radio cosmológico.	132
7.2. Representación del radio cosmológico con la condición inicial $p_0 = \frac{\hbar}{2\mu}\pi$	133

Prefacio

La palabra *cosmología* proviene del griego *κοσμολογία* (compuesto por *κόσμος* - cosmos - *orden* y *λογία* -loguía- *tratado, estudio*) denominado filosofía de la naturaleza, que estudia todo lo relacionado con el universo: su origen, su forma, su tamaño, las leyes que lo rigen, etc.

El presente trabajo surgió como continuación a mi Servicio Social en el tema de Integrales de Trayectoria y de un *Seminario de Cosmología* del verano de 2013 impartido por el Dr. José David Vergara Oliver en el *Instituto de Ciencias Nucleares* (ICN), UNAM.

Esta tesis tiene como objetivo dar una introducción general a la Cosmología centrándose en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), luego dar un vistazo al álgebra de la Cosmología polimérica y su distinción con la Cosmología usual y, finalmente, obtener dos resultados: *el oscilador armónico polimérico y la evolución del radio cosmológico en la Cosmología Polimérica a partir del espacio de momentos*.

Para esto se presenta en el Capítulo 1 las bases matemáticas necesarias: qué es un producto interior, un espacio de Banach, de Hilbert, un C^* -álgebra y el teorema de Hahn-Banach; un poco de álgebra de operadores junto con la definición de la norma de un operador, siguiendo con el álgebra de la Mecánica Cuántica (el formalismo de Schrödinger y el de Heisenberg), luego el teorema de Stone-von Neumann, que nos da las condiciones suficientes y necesarias para que las representaciones de la Mecánica Cuántica sean equivalentes entre sí. Además, se presenta el álgebra de la Cosmología Polimérica y una breve introducción a la teoría de constricciones y al método de promedio de grupo, el cual sirve para extraer estados físicos de un espacio de Hilbert cinemático.

En el Capítulo 2 se expone una introducción a la Cosmología Isotrópica,

obteniendo la métrica FLRW, las ecuaciones de Einstein (donde se detalla cómo obtener los símbolos de Christoffel y el escalar de Ricci) y se postula el principio de Covarianza General, también se obtienen las ecuaciones de Friedmann, Raychaudhuri, Klein-Gordon y la ecuación de continuidad a partir del análisis canónico del Hamiltoniano Gravitacional y del Hamiltoniano de Materia. Finalmente, se dan las condiciones de Energía y las singularidades que presenta la Cosmología Isotrópica.

El Capítulo 3 es una breve introducción a las integrales funcionales (o de trayectoria) y su relación con el Kernel de la ecuación de Schrödinger; además, se hace una visita fugaz a los determinantes funcionales centrándose en el formalismo de Gel'fand-Yaglom.

En el Capítulo 4 se utiliza el álgebra de la cosmología polimérica al caso más simple, el de la partícula libre, luego se sigue a la partícula libre relativista en los casos usual y polimérico para finalizar planteando el problema del oscilador armónico polimérico y resolverlo en dos primeras aproximaciones y finalizar con el potencial completo utilizando el teorema de Gel'fand-Yaglom, el cual presenta ciertos problemas.

El Capítulo 5 es un capítulo con mayor relevancia pues introduce a los *instantones*, que son un método para resolver integrales de trayectoria y a modo de ejemplo se presenta el oscilador armónico No-Polimérico. La importancia de este capítulo radica en el método que presentan los instantones para obtener la energía base del sistema.

Los siguientes dos capítulos son los más importantes de este trabajo pues dan el nombre a la tesis: *Instantones en el Oscilador Armónico Polimérico y la Cosmología Polimérica*.

El Capítulo 6 es el más importante de esta tesis en cuanto al uso de instantones se refiere, pues aparece el primer resultado que es la obtención de un instantón específico del determinante del oscilador armónico polimérico. El resultado que se obtiene del oscilador armónico polimérico es muy parecido al que se obtiene con un potencial cuártico $((x^2 - a)^2)$.¹

El Capítulo 7 es el más importante físicamente, pues presenta el resultado esencial de esta tesis, que es la obtención del radio cosmológico a partir de integrales de trayectoria y del método de instantones vistos en los Capítulos 3, 5 y 6, el cual no tiene la singularidad del caso usual.

Se anexan además dos apéndices: el primero expone brevemente el método Wentzel-Kramer-Brillouin (WKB) por su relación con las aproximaciones no

¹COLEMAN, S. *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, NY, 1988.

perturbativas y es mencionado en la tesis; y el otro presenta la teoría de la segunda cuantización (la cuantización de Dirac y constricciones) junto con el método de promedio de grupo con más detalle.

Este trabajo no podría haber sido realizado sin el cariño de mis padres, *María de las Nieves Olivares Correa* y *Jordi Iñaki Austrich Senosiain*, así como el apoyo de mi hermana. Pero sobre todo me gustaría agradecer a mi asesor de tesis el Dr. *José David Vergara Oliver* por su apoyo, dedicación y paciencia que ha tenido conmigo y en motivarme en la realización de este proyecto.

Finalmente, agradecer a los proyectos DGAPA PAPIIT: IN109013 y IN103716 por su apoyo económico parcial.

México, D.F., julio 2016.

Capítulo 1

Fundamentos Matemáticos

En este capítulo se hará un repaso a los espacios de Hilbert, a la definición de una álgebra C^* , varios teoremas y lemas que serán utilizados en capítulos posteriores o que dan un mayor entendimiento al espacio en el que se está trabajando y se desarrolla el álgebra en la mecánica cuántica polimérica.

1.1. Conceptos Básicos

Se asume que el concepto de espacio vectorial es conocido por el lector.

Definición 1. Norma:

Sea V un espacio vectorial, se define la norma como un mapeo $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- I. $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- II. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall v \in V$
- III. $\|v + \omega\| \leq \|v\| + \|\omega\| \quad (\text{Desigualdad del Triángulo})$

Nota 1. La norma de un espacio vectorial, V , define una métrica d sobre V dada por

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|$$

Un espacio vectorial normado completo con la métrica asociada, es decir, toda sucesión de Cauchy converge bajo esta métrica, se llama espacio de Banach, al cual denotaremos como \mathcal{B} .

Definición 2. Producto Pre-Interior:

El producto preinterior sobre un espacio vectorial es un mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- I. $\overline{\langle v, \omega \rangle} = \langle \omega, v \rangle \quad \forall v, \omega \in V$
- II. $\langle v, \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, \omega_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, \omega_2 \rangle \quad \forall v, \omega_1, \omega_2 \in V \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
- III. $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

Cuando $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$, se le conoce como **producto interior**.

Un producto interior induce una norma dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Teorema 1. Desigualdad Cauchy-Schwartz:

Sean V un espacio vectorial normado, $v, \omega \in V$, entonces:

$$|\langle v, \omega \rangle| \leq \|v\| \|\omega\|$$

$\forall v, \omega \in V$

Definición 3. Espacio de Hilbert:

Un espacio vectorial con producto interior completo bajo la norma asociada, se le llama espacio de Hilbert \mathcal{H} ; además \mathcal{H} es separable, es decir:

$\exists \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ tal que es una sucesión densa en \mathcal{H} , i.e., para cualquier $\phi \in \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0 \quad \exists \phi_j \in \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|\phi - \phi_j\| < \epsilon$

Esto nos establece un sistema coordinado.

Definición 4. Linealmente independiente:

Sea $\{\phi\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, se dice ser linealmente independiente si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_i \phi_i = 0$,

entonces $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$

Se dice linealmente dependiente si no es linealmente independiente.

La dimensión de \mathcal{H} se conoce como el número máximo de vectores linealmente independientes; un espacio de Hilbert está caracterizado por su dimensión.

Definición 5. Variedad lineal:

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión linealmente independiente, entonces el conjunto de elementos de la forma $\phi = \sum_n c_n \phi_n$ definen una variedad lineal que satisface, ser un espacio vectorial con producto interior, pero no necesariamente es separable ni completo.

Definición 6.¹ *Operador Acotado*

Un operador acotado sobre un espacio de Banach \mathcal{B} es un mapeo lineal $A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que

$$\|A\| \equiv \sup\{\|Ax\| \mid x \in \mathcal{B}, \|x\| = 1\} < \infty$$

Teorema 2. *Un mapeo lineal sobre un espacio de Banach es continuo si y sólo si es acotado.*

Observación 1. *Cuando se tiene un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\|A\| \equiv \sup\{\langle A\psi, A\psi \rangle^{\frac{1}{2}} \mid \psi \in \mathcal{H}; \langle \psi, \psi \rangle = 1\}$$

Cuando A es acotado en un espacio de Banach \mathcal{B} , por definición se sigue que

$$\|Av\| \leq \|A\|\|v\| \quad \forall v \in \mathcal{B}$$

entonces, del mismo modo, si $\exists C > 0$ tal que $\|Av\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in \mathcal{B}$, entonces A es acotado y

$$\|A\| \equiv \inf\{C > 0 \mid \|Av\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in \mathcal{B}\}$$

Teorema 3. *El espacio $B(\mathcal{B})$ de todos los operadores sobre un espacio \mathcal{B} de Banach es también de Banach.*

Definición 7. Funcional

Definimos un funcional sobre un espacio de Banach \mathcal{B} como un mapeo lineal $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$, el cual es continuo, entonces $|\rho(x)| \leq C\|x\|$ p.a. $C > 0$ y $\forall x \in \mathcal{B}$

Observación 2. *Por el teorema anterior, el espacio de todos los funcionales sobre un espacio de Banach \mathcal{B} , es de Banach, a este espacio se le conoce como **espacio Dual** y se denota como \mathcal{B}^**

Teorema 4. Representación de Riesz

Todo funcional lineal acotado ρ sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un producto interior, es decir, es de la forma:

$$\rho(x) = \langle x_0, x \rangle$$

para algún $x_0 \in \mathcal{H}$ fijo.

¹Es la definición también de norma de un operador; notemos que es acotado por ser un número real.

Teorema 5. Hahn-Banach

Para un funcional ρ_0 sobre un subespacio lineal \mathcal{B}_0 de un espacio de Banach \mathcal{B} existe un funcional ρ sobre \mathcal{B} tal que $\rho = \rho_0$ sobre \mathcal{B}_0 y $\|\rho\| = \|\rho_0\|$

Definición 8. Álgebra

Un álgebra es un espacio vectorial \mathcal{A} con una operación (multiplicación) asociativa bilineal:

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

Observación 3. El espacio de los operadores acotados $B(\mathcal{B})$ es un álgebra bajo la operación de multiplicación.

Más aún, sea $A, B \in B(\mathcal{B})$, $x \in \mathcal{B}$, utilizando dos veces la propiedad de la norma $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ se tiene que

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$$

y como es para todo $x \in \mathcal{B}$, entonces:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Lo que nos dice que la multiplicación en un álgebra de Banach es continua separadamente en cada variable.²

Por tanto, $B(\mathcal{B})$ es un álgebra de Banach.

Consideremos un espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces el álgebra obtiene una estructura adicional:

Definición 9. Involución

Una involución sobre un álgebra \mathcal{A} es un mapeo lineal $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo $A, B \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

- I. $A^{**} = A$
- II. $(AB)^* = B^*A^*$
- III. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$

Entonces un álgebra con involución se le conoce como **álgebra-***

Ejemplo:

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, el operador adjunto $A \rightarrow A^*$ sobre \mathcal{H} definido por la propiedad: $\langle \psi | A^* \phi \rangle \equiv \langle A \psi | \phi \rangle$, define una involución sobre $B(\mathcal{H})$, por lo tanto $B(\mathcal{B})$ es un álgebra-*

²Un álgebra de Banach es un álgebra cuyo espacio vectorial es de Banach

Definición 10. Autoadjunto

Sea \mathcal{A} un álgebra-*, entonces si $A \in \mathcal{A}$, se dice que A^* es autoadjunto si:

$$A^* = A.$$

Al conjunto todos los elementos autoadjuntos se le denota por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \equiv \{A \in \mathcal{A} \mid A^* = A\}$$

Observación 4. Todo elemento de un álgebra-* \mathcal{A} se puede escribir como combinación lineal de dos operadores autoadjuntos.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$A = \frac{1}{2}(A + A + A^* - A^*) = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}$$

donde el primer sumando es autoadjunto y el segundo sumando es antiautoadjunto, entonces, sea

$$A = A' + iA''$$

con $A' = \frac{A+A^*}{2}$ y $A'' = -i\frac{A-A^*}{2}$. □

En un espacio de Hilbert \mathcal{H} se tiene que³.

$$\|A\psi\|^2 = \langle A\psi | A\psi \rangle = \langle \psi | A^* A \psi \rangle \leq \|\psi\| \|A^* A \psi\| \leq \|\psi\|^2 \|A^* A\|$$

Entonces por definición de norma:

$$\|A\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

así $\|A\| \leq \|A^*\|$.

Análogamente se obtiene:

$$\|A^* \psi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \|A^* A\|$$

entonces

$$\|A^*\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

Por lo tanto $\|A^*\| \leq \|A\|$

Obtenemos las siguientes propiedades:

³utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

- I. $\|A\| = \|A^*\|$
- II. $\|A^*A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$

Esto motiva a dar la siguiente definición:

Definición 11. Álgebra- C^*

Una álgebra- C^* es un espacio complejo de Banach \mathcal{A} que al mismo tiempo es un álgebra- $*$, tal que si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces:

- I. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
- II. $\|A\|^2 = \|A^*A\|$

Es decir, una álgebra- C^* es un álgebra de Banach con involución donde se cumple $\|A\|^2 = \|A^*A\|$.

Además de i) y ii) se obtiene $\|A\| = \|A^*\|$.

Lema 1. *Un álgebra- $*$ de Banach que cumple $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$ es una álgebra- C^* .*

Demostración. Sólo basta probar que se da la igualdad; i) se cumple por definición de la norma de un operador. Entonces:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

entonces $\|A\| \leq \|A^*\|$ Análogamente

$$\|A^*\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

entonces $\|A^*\| \leq \|A\|$

Se tiene así que $\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$ Por lo tanto se sigue

$$\|A\|^2 = \|A^*\| \|A\|$$

□

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 6. *El espacio de los operadores acotados sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $B(\mathcal{H})$ es una álgebra- C^* .*

Por último daremos la definición de un morfismo entre álgebras:

Definición 12. *Un morfismo entre álgebras- C^* \mathcal{A}, \mathcal{B} es un mapeo lineal (complejo) $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que*

- I. $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$
- II. $\phi(A^*) = (\phi(A))^*$

1.2. El Álgebra de la Mecánica Cuántica Polimérica

Antes de definir el álgebra de la mecánica cuántica polimérica haremos un repaso al cuadro de Schrödinger y al de Heisenberg (“mecánicas cuánticas usuales”) y haremos mención al teorema de Stone-von Neumann.

1.2.1. Cuadro de Schrödinger

Los operadores básicos son independientes del tiempo, es decir:

I. $\partial_t \hat{q} = 0$

II. $\partial_t \hat{p} = 0$

donde \hat{p} y \hat{q} son los operadores asociados al momento y coordenada generalizados.

Además se cumplen las siguientes relaciones de conmutación⁴:

$$[q^a, q^b] = i\hbar(\{q^a, q^b\}) = 0 \quad (1.1a)$$

$$[p_a, p_b] = i\hbar(\{p_a, p_b\}) = 0 \quad (1.1b)$$

$$[q^a, p_b] = i\hbar(\{q^a, p_b\}) = i\hbar\delta_b^a \quad (1.1c)$$

Con estos operadores podemos definir un conjunto completo de observables que conmutan y de las relaciones (1.1a), (1.1b) y (1.1c) se puede ver que los más simples son: $q^a = (q^1, \dots, q^n)$ o $p_a = (p_1, \dots, p_n)$.

Para cada conjunto completo de observables podemos, entonces, definir una base de la forma:

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \quad (1.2)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (1.3)$$

donde \hat{q} y \hat{p} se convierten en un valor definido.

⁴ Siguen siendo operadores aunque por simplicidad se omitió \hbar ; el término $\{A,B\}$, representa a los paréntesis de Poisson. δ es la delta de Krönecker

Al ser bases completas éstas satisfacen con la *propiedad de cerradura*:⁵

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| = \mathbb{I} \quad (1.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| = \mathbb{I} \quad (1.5)$$

En la representación de coordenadas donde se usa la base $|q\rangle$, el operador \hat{p} queda definido como:

$$\hat{p}_b = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^b} \quad (1.6)$$

Entonces para encontrar los coeficientes de conexión entre la base \hat{q} y la base \hat{p} consideremos lo siguiente^{6,7}:

$$\langle q|\hat{p}|p\rangle = p\langle q|p\rangle \quad (1.7)$$

$$\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q|p\rangle = p\langle q|p\rangle \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow \frac{-i\hbar \partial \langle q|p\rangle}{\langle q|p\rangle} = p \partial q \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \ln \|\langle q|p\rangle\| = \frac{i}{\hbar} pq \quad (1.10)$$

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}pq}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (1.11)$$

Proposición 1.

$$\langle q|q_0\rangle = \delta(q - q_0) \quad (1.12)$$

⁵ \mathbb{I} representa la matriz identidad la cual puede ser infinita no numerable

⁶pq tiene unidades de acción

⁷ $\sqrt{2\pi\hbar}$ es un factor de normalización

Demostración. Para demostrar esta proposición se hará uso de (1.5)

$$\begin{aligned}
\langle q|q_0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q|p\rangle\langle p|q_0\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\frac{i}{\hbar}p(q-q_0)} \\
&= \delta(q - q_0) \quad \square
\end{aligned}$$

Nota 2. Hemos propuesto a \hat{p} de la forma (1.6) para que satisfaga las relaciones de conmutación (1.1a), (1.1b) y (1.1c), pero se observa que existe una forma más general de este operador:

$$\hat{p} = a\partial_j + f_j(x) \quad (1.13)$$

Para obtener la constante a y la forma de la función $f_j(x)$ este operador debe satisfacer las relaciones (1.1a) y (1.1c); entonces:

$$\begin{aligned}
[x^i, p_j]\Psi &= (x^i p_j - p_j x^i)\Psi \\
&= (x^i a\partial_j \Psi + x^i f_j) - (a\partial_j(x^i \Psi) + f_j x^i \Psi) \\
&= (x^i a\partial_j \Psi + x^i f_j) - (a x^i \partial_j \Psi + a \delta_j^i \Psi + f_j x^i \Psi) \\
&= -a \delta_j^i \Psi \\
&= i\hbar \delta_j^i \Psi
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$a = -i\hbar \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
[p_i, p_j]\Psi &= 0 \\
&= \{(a\partial_i + f_i)(a\partial_j + f_j) - (a\partial_j + f_j)(a\partial_i + f_i)\}\Psi \\
&= (a\partial_i + f_i)(a\partial_j \Psi + f_j \Psi) - (a\partial_j + f_j)(a\partial_i \Psi + f_i \Psi) \\
&= a^2 \partial_i \partial_j \Psi + f_i a \partial_j \Psi + a \partial_i (f_j \Psi) + f_i f_j \Psi - (a^2 \partial_j \partial_i \Psi + f_j a \partial_i \Psi + a \partial_j (f_i \Psi) + f_j f_i \Psi) \\
&= f_i a \partial_j \Psi - f_j a \partial_i \Psi + a \Psi \partial_i f_j - a \Psi \partial_j f_i + a \Psi \partial_i f_j - a \Psi \partial_j f_i \\
&= a \Psi (\partial_i f_j - \partial_j f_i)
\end{aligned}$$

Entonces proponemos a $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f_j(x) = \partial_j g(x) \quad (1.15)$$

Donde $g(x)$ es una función con derivadas parciales continuas, garantizando la igualdad de las parciales cruzadas, es decir, $f_j(x)$ se puede ver como derivable de un potencial $g(x)$. La teoría desarrollada con el operador (1.13) es unitariamente equivalente a la teoría desarrollada con (1.6) por lo cual vamos a utilizar el operador definido en (1.6) de aquí en adelante.

Sabemos que $\Psi(q, t) = \langle q | \Psi, t \rangle$ y que $\Psi(p, t) = \langle p | \Psi, t \rangle$, ¿pero qué relación hay entre $\Psi(q, t)$ y $\Psi(p, t)$, es decir, cómo pasamos de un espacio al otro?

Vamos a demostrar que es una simple transformada de Fourier:

Proposición 2.

$$\Psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{\frac{i}{\hbar}pq} \Psi(p)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (1.16)$$

Demostración. Para la demostración se usarán las igualdades (1.4) y (1.11).

$$\begin{aligned} \Psi(q) &= \langle q | \Psi \rangle \\ &= \langle q | \mathbb{I} | \Psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q | p \rangle \langle p | \Psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}pq} \langle p | \Psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}pq} \Psi(p) \end{aligned}$$

□

Proposición 3.

$$\Psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \Psi(q)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (1.17)$$

Demostración. Análogamente a la Proposición anterior:

$$\begin{aligned}
 \Psi(p) &= \langle p | \Psi \rangle \\
 &= \langle p | (I) | \Psi \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle p | q \rangle \langle q | \Psi \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \langle q | \Psi \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \Psi(q) \quad \square
 \end{aligned}$$

En resumen, el cuadro de Schrödinger nos dice que los operadores no dependen explícitamente del tiempo, sino que la dependencia temporal se encuentra en la función de onda $\Psi = \Psi(q, t) = \langle q | \Psi, t \rangle$

1.2.2. Ecuación de Schrödinger y Ecuación de Evolución

A partir del cuadro de Schrödinger determinaremos dos muy importantes resultados:

- I. La ecuación de Evolución.
- II. El Kernel de la ecuación de Schrödinger.

La ecuación de Schrödinger está dada por

$$\hat{H}\Psi(q, t) = i\hbar\partial_t\Psi(q, t) \quad (1.18)$$

que reescrita en notación de Dirac y proponiendo el operador $\hat{P}_t = -i\hbar\partial_t$ es:

$$\langle q | \hat{P}_t + \hat{H} | \Psi, t \rangle = 0 \quad (1.19)$$

Donde el hamiltoniano está definido como⁸

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \quad (1.20)$$

⁸se trabajará con potenciales que solo dependen de q

Proposición 4.

$$|\Psi, t\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\Psi, t_0\rangle \quad (1.21)$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de evolución

Demostración.

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t|\Psi, t\rangle &= \hat{H}|\Psi, t\rangle \\ \Rightarrow \frac{\partial|\Psi, t\rangle}{|\Psi, t\rangle} &= \frac{-i}{\hbar}\hat{H}\partial_t \\ \Rightarrow \ln|\Psi, t\rangle - \ln|\Psi, t_0\rangle &= \frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0) \\ \Rightarrow |\Psi, t\rangle &= e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\Psi, t_0\rangle \end{aligned}$$

□

Utilizaremos la ecuación (1.4) y la ecuación de evolución, para llegar a obtener otra expresión para $\Psi(q, t)$:

$$\Psi(q, t) = \langle q|\Psi, t\rangle \quad (1.22)$$

$$= \langle q|e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\Psi, t_0\rangle \quad (1.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \langle q|e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|q_0\rangle \langle q_0|\Psi, t_0\rangle \quad (1.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 K(q, t; q_0, t_0)\Psi(q_0, t_0) \quad (1.25)$$

Donde hemos definido:

$$K(q, t; q_0, t_0) \equiv \langle q|e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|q_0\rangle \quad (1.26)$$

Esta última ecuación es de suma importancia y se le conoce como *el Kernel de la ecuación de Schrödinger*.

1.2.3. Cuadro de Heisenberg

I. $\partial_t|\Psi\rangle_H = 0$

II. $|\Psi\rangle_H = |\Psi, t_0\rangle$

$$\text{III. } |\Psi, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\Psi, t_0\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\Psi\rangle_H$$

⁹Se observa que en II. la función de onda de Heisenberg está dada a un tiempo fijo respecto al cuadro de Schrödinger.

Ahora vamos a presentar los operadores en el cuadro de Heisenberg:

$$\hat{q}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\hat{q}e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \quad (1.27)$$

$$\hat{p}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\hat{p}e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \quad (1.28)$$

Además cumplen la relación de los anticonmutadores que en el cuadro de Schrödinger se presentaron, con la condición de que sea a tiempos iguales:

$$[\hat{q}(t), \hat{q}(t)] = 0 \quad (1.29)$$

$$[\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = 0 \quad (1.30)$$

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar \quad (1.31)$$

1.2.4. Teorema de Stone-von Neumann

En esta subsección daremos las ideas fundamentales para desarrollar la cosmología polimérica sin profundizar en los conceptos matemáticos, que fácilmente abarcarían un libro y no es la intención de este texto.¹⁰

Al conjunto de ecuaciones de estructura, aquéllas que satisfacen las relaciones de conmutación de Heisenberg en mecánica cuántica, se le conoce como *álgebra de Lie de Heisenberg*.

Como es posible construir una familia de representaciones irreducibles del grupo de Heisenberg \mathbf{H}_n sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces se cumple el siguiente teorema:

Teorema 7 (Stone-von Neumann). *Sea π una representación unitaria de \mathbf{H}_n sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , tal que $\pi(0, 0, t) = e^{2\pi i h t} I$ para algún $h \in \mathbb{R}/\{0\}$. Entonces $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_\alpha$ donde \mathcal{H}_α son mutuamente subespacios ortogonales de \mathcal{H} , cada uno invariante bajo π , tal que la restricción $\pi|_{\mathcal{H}_\alpha}$ es unitariamente equivalente a ρ_h para cada α . En particular si π es irreducible, entonces π es equivalente a ρ_h .*

⁹Este subíndice H es de Heisenberg, no confundir con el hamiltoniano

¹⁰Mayores detalles en G.B. Folland, *Harmonic Analyse in Phase Space*.

Donde ρ es el mapeo del grupo de Heisenberg al grupo de operadores unitarios de \mathcal{L}^2 : $\rho : \mathbf{H}_n \rightarrow \mathcal{L}^2$ definido por

$$\rho(p, q, t) = e^{2\pi i(pD+qX+tI)} = e^{2\pi it} e^{2\pi i(pD+qX)}$$

Y $\rho_h(p, q, t) = \rho(hp, q, ht)$ y como es un operador al ser evaluado se tiene:

$$\rho(p, q, t)f(x) = e^{2\pi it+2\pi iqx+2\pi ipq} f(x+p)$$

el cual es una representación unitaria del grupo de Heisenberg \mathbf{H}_n

En resumen, el grupo de Heisenberg tiene sólo una única representación irreducible, localmente fiel. Es decir, que salvo equivalencias unitarias tiene una familia dependientes de un parámetro de tales representaciones, todas relacionadas entre sí vía automorfismos del grupo de Heisenberg, y a su vez, todas equivalentes al cuadro de Schrödinger.

1.2.5. Álgebra Mecánica Cuántica Polimérica

Haremos un pequeño resumen de la mecánica cuántica tradicional (Schrödinger y Heisenberg [S-H]) para compararla con la mecánica cuántica polimérica, entonces: El espacio en (S-H) es $\mathcal{H}_{Sch} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$, es decir, el espacio de las funciones cuadrado-integrables con la topología usual. Cuando \hat{x}, \hat{p} son los operadores autoadjuntos (observables de posición y momento) definimos los operadores de rotación y traslación del álgebra de Heisenberg-Weyl:

$$\hat{U}_\lambda \Psi(x) = e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x} \Psi(x) \quad (1.32)$$

$$\hat{V}_\mu \Psi(x) = \Psi(x + \mu) \quad (1.33)$$

Entonces los operadores están representados por

$$\hat{U}_\lambda = e^{i\frac{\lambda}{\hbar}\hat{x}} \quad (1.34)$$

$$\hat{V}_\mu = e^{i\frac{\mu}{\hbar}\hat{p}} \quad (1.35)$$

Que claramente en el espacio de momentos se sigue

$$\hat{U}_\lambda \Psi(k) = \Psi(k - \lambda) \quad (1.36)$$

$$\hat{V}_\mu = e^{i\frac{\mu}{\hbar}k} \Psi(k) \quad (1.37)$$

Estos operadores tienen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\hat{U}_\lambda \hat{V}_\mu = e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \mu} \hat{V}_\mu \hat{U}_\lambda \quad (1.38)$$

$$\hat{U}_{\lambda_1} \hat{U}_{\lambda_2} = \hat{U}_{\lambda_2} \hat{U}_{\lambda_1} \quad (1.39)$$

$$\hat{V}_{\mu_1} \hat{V}_{\mu_2} = \hat{V}_{\mu_2} \hat{V}_{\mu_1} \quad (1.40)$$

Las cuales se siguen de las relaciones de conmutación de la posición y del momento usuales.

Hay que hacer notar que los parámetros (λ, μ) son débilmente continuos, es decir, se puede considerar cuando ambos parámetros tienden a *cero*. Entonces por el teorema de Stone-von Neumann todas las mecánicas cuánticas con estos parámetros débilmente continuos son equivalentes, por lo que se realiza el siguiente postulado:

Postulado Mecánica Cuántica Polimérica:

Para generar una mecánica cuántica no unitariamente equivalente a la generada por el grupo de Heisenberg, se considera:

- I. λ es débilmente continuo.
- II. μ ya no es débilmente continuo, aunque se permite que sea del orden de la constante de Planck.

Esto nos hace considerar que el espacio de Hilbert Polimérico está dado por¹¹: $\mathcal{H}_{Poly} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_d, \mu_d)$, donde \mathbb{R}_d es la recta real con la topología discreta y μ_d es la medida de l^2 dada por $\|f\|_2^2 = \sum_{j \in \Lambda} \|f\|^2 < \infty$

Entonces la nueva base ortonormal está dada por $|x_j\rangle$ con $(x_n = n\mu \quad n \in \mathbb{Z})$. Y se obtiene que el producto punto entre ellos (la condición de ortonormalidad) es:

$$\langle x_i | x_j \rangle = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_j e^{\frac{i}{\hbar} p_j (x_i - x_j)} = \delta_{x_i, x_j} \quad (1.41)$$

Una delta de Krönecker.¹²

¹¹Topología Discreta: todo punto de nuestra recta es un abierto, donde se considera una longitud, sea μ , la cual se convierte en nuestra “regla”

¹²Si $\mu \rightarrow 0$ entonces se obtiene la delta de Dirac.

Por lo que los operadores básicos en mecánica cuántica polimérica son definidos de la siguiente forma:¹³

$$\text{I. } \hat{U}_\lambda |x_j\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{x}} |x_j\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\lambda x_j} |x_j\rangle$$

$$\text{II. } \hat{V}_\mu |x_j\rangle = |x_j - \mu\rangle \equiv |x_{j-1}\rangle$$

Nota 3.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \langle x_j | \hat{V}_\mu | x_j \rangle = 0$$

pero

$$\langle x_j | \mathbb{I} | x_j \rangle = 1$$

Entonces el operador de traslación \hat{V}_μ que corresponde al operador de momento ya no es continuo porque x_j es ortonormal a $x_{j-\mu}$ para toda $\mu \neq 0$

Entonces la relación de conmutación satisface:

$$[\hat{x}, \hat{V}_\mu] = -\mu \hat{V}_\mu$$

Falta definir un operador de momento \hat{p} , entonces considerando la definición del operador de momento en el cuadro de Schrödinger:

$$\hat{p} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\hbar}{\mu} \left(\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\mu\hat{p}} - e^{-\frac{i}{\hbar}\mu\hat{p}}}{2i} \right) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2i\mu} \left(\frac{i}{\hbar}\mu\hat{p} + \frac{i}{\hbar}\mu\hat{p} + O^2\left(\frac{\mu}{\hbar}\right) \right)$$

Así, el operador de momento en **caso polimérico** queda definido como

$$\boxed{\hat{p} = \frac{\hbar}{\mu} \frac{\hat{V}_\mu - \hat{V}_\mu^\dagger}{2i}} \quad (1.42)$$

1.2.6. Teoría de Constricciones

En este apartado consideraremos unidades naturales, i.e., $\hbar = 1 = c$. Consideremos una partícula relativista, entonces la acción está dada por

$$\mathcal{S} = -m \int d\tau = -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (1.43)$$

¹³Nótese que $\hat{x}|x_j\rangle = x_j|x_j\rangle$

En general tenemos que $\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu}\right) \neq 0$, pero en una teoría Física este determinante es *cero*, lo que nos indica que habrá ecuaciones de constricción¹⁴.

Consideremos Φ_α como nuestra constricción, entonces $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(q, p) = 0$ que es dependiente del momento y la coordenada.

En el caso relativista, teniendo en cuenta que

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} \quad (1.44)$$

Entonces:

$$p_\mu p^\mu = -m^2 \quad (1.45)$$

Ahora bien, si consideramos el Hamiltoniano usual obtenemos:

$$\mathcal{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - L \quad (1.46)$$

$$= \frac{mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} - \mathcal{L} = 0 \quad (1.47)$$

¡El Hamiltoniano es cero!

Para solucionar esto, Paul M. Dirac propuso un nuevo Hamiltoniano (un Hamiltoniano global, donde no sólo valga la constricción $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$ dado por

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_C + \lambda^\alpha \Phi_\alpha \quad (1.48)$$

Donde $\mathcal{H}_C = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}$ el Hamiltoniano Canónico.

Φ_α las constricciones.

Si $\dot{\Phi}_\alpha = \{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_T\} \neq 0$, entonces hay constricciones secundarias, cuando es cero sólo tenemos constricciones primarias.

Para familiarizarnos con este concepto haremos un pequeño ejemplo:

Ejemplo:

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1 - \alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2$

Obtenemos los momentos:

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + q_2$$

¹⁴Si el determinante es distinto de cero, entonces se puede poner los momentos p en términos de las coordenadas q y viceversa

$$p_2 = (1 - \alpha)q_1$$

Entonces de la primera ecuación obtenemos que $\dot{q}_1 = p_1 - q_2$ (EDO)¹⁵ y la segunda ecuación nos genera una restricción Φ dada por

$$\Phi = 0 = p_2 - (1 - \alpha)q_1$$

Claramente $\det\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b}\right) = 0$

El Hamiltoniano canónico está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \end{aligned}$$

Ahora construiremos nuestro Hamiltoniano Total, pero primero chequeemos si hay restricciones secundarias:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \{\Phi, H_T\} = \{\Phi, H_C + \lambda\Phi\} = \{p_2 - (1 - \alpha)q_1, H_C\} \\ &= \{p_2, \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2\} - (1 - \alpha)\{q_1, \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2\} \\ &= p_1 - q_2 + \beta(q_1 - q_2) - (1 - \alpha)(p_1 - q_2) \\ &= \alpha(p_1 - q_2) + \beta(q_1 - q_2) \equiv \Phi_2 \end{aligned}$$

Que es una nueva restricción secundaria, ya que si no fuera cero, entonces la partícula se movería fuera de la restricción original.

Calculando $\dot{\Phi}_2$ es fácil ver que $\dot{\Phi}_2 = 0$

Ahora bien, calculando el paréntesis de Poisson entre estas dos restricciones obtenemos:

$$\{\Phi_2, \Phi\} = -\{\alpha^2 + \beta^2\}$$

En general:

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = C_{\alpha\beta}$$

Si $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^\gamma \Phi_\gamma \approx 0$, es decir, que son débilmente cero, se dice que las restricciones son de *primera clase*¹⁶. Si $\det C_{\alpha\beta} \neq 0$, entonces tendremos restricciones de segunda clase.

En este caso es necesario generalizar los paréntesis de Poisson a unos que tengan en cuenta las restricciones de segunda clase conocidos como *paréntesis de Dirac*.

¹⁵EDO: ecuación diferencial ordinaria

¹⁶ $C_{\alpha\beta}$ son las constantes de estructura y, si en verdad son constantes, generan un álgebra de Lie.

Definición 13. *Los paréntesis de Dirac se definen como:*

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} \quad (1.49)$$

Donde χ_α son las constricciones del sistema y además se impone la condición:

$$\{A, \chi_\alpha\}^* = \{A, \chi_\alpha\} - \{A, \chi_\gamma\} C^{\gamma\beta} \{\chi_\beta, \chi_\alpha\} = 0$$

Esto nos sirve para poder cuantizar con constricciones de la siguiente manera:

$$[\hat{O}_i, \hat{O}_j] = i\hbar \{O_i, O_j\}^*$$

Una pequeña observación es que las constricciones de primera clase generan simetrías y nos dan las transformaciones de norma.

Se invita al lector leer el apéndice B de este trabajo para una mayor profundización de este tema.

1.2.7. Método de Promedio sobre el Grupo

En un sistema Hamiltoniano con constricciones, las eigenfunciones no son, en general, estados físicos, entonces para poder derivar el espacio de Hilbert con estados físicos se utiliza el formalismo llamado *método de promedio sobre el grupo*.

Consideremos el espacio de Hilbert cinemático (\mathcal{H}_{kin}) donde todas las constricciones (\hat{C}) están bien definidas y son de **primera clase**, entonces se define el estado físico (a través de la cuantización de Dirac) como aquél que satisface:

$$e^{i\epsilon_\alpha \hat{C}^\alpha} |\Psi_{fis}\rangle = |\Psi_{fis}\rangle \quad (1.50)$$

Es decir, los estados físicos se definen como aquellos que son invariantes bajo las transformaciones generadas por las constricciones de primera clase. De forma infinitesimal tenemos que (1.50) se reduce a

$$\hat{C}^\alpha |\Psi_{fis}\rangle = 0 \quad (1.51)$$

En el método del promedio sobre el grupo los estados físicos se definen como

$$|\Psi_{fis}\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{C}} |\Psi_{kin}\rangle \quad (1.52)$$

que es un promedio sobre los estados cinéticos con función de peso $e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{C}}$ y el Kernel de este sistema está dado por

$$G(x_f, t_f; x_0, t_0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \langle x_f, t_f | e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{C}} | x_0, t_0 \rangle \quad (1.53)$$

Entonces se puede extraer un estado físico a través del kernel de la siguiente manera:

$$\Psi_{fis}(x, t) = \langle x, t | \Psi_{fis} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(x, t; x', t') \Psi_{kin}(x', t') \quad (1.54)$$

Para que el espacio \mathcal{H}_{fis} sea un espacio de Hilbert es necesario asignarle un producto interior.

Consideremos $|\Phi_{kin}\rangle$ y $|\Psi_{kin}\rangle$ dos estados en \mathcal{H}_{kin} cuyos mapeos al espacio \mathcal{H}_{fis} están dados por $|\Phi_{fis}\rangle$ y $|\Psi_{fis}\rangle$, entonces se define el *producto interior*, en el espacio \mathcal{H}_{fis} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{fis} | \Psi_{fis} \rangle &\equiv \langle \Phi_{kin} | \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{C}} | \Psi_{kin} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' dt dt' \Phi_{kin}(x, t) G(x, t; x', t') \Psi_{kin}(x', t') \end{aligned} \quad (1.55)$$

Por lo que toda la información de la dinámica cuántica está codificada en la amplitud de transición de x_0 al tiempo t_0 a x_f al tiempo t_f , dado por el Kernel $G(x_f, t_f; x_0, t_0)$

La ecuación (1.54) está bien definida, ya que si descomponemos la evolución en N intervalos de longitud $\epsilon = \frac{1}{N}$ y consideramos una base completa de la forma: $\mathbb{I} = \int dt_n \int dx_n |x_n, t_n\rangle \langle x_n, t_n|$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{C}} = \prod_{n=1}^N e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\lambda\hat{C}_n} \quad (1.56)$$

Entonces el Kernel está dado por

$$G(x_f, t_f; x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^N \langle x_n, t_n | e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\lambda\hat{C}_n} | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \quad (1.57)$$

donde $\hat{\mathcal{C}}_n = \hat{\mathcal{C}}$ y $x_f = x_N$.

Estas expresiones las usaremos posteriormente en la cuantización polimérica.

Se invita como en la subsección anterior leer el apéndice B de esta tesis para profundizar más sobre el método del promedio de grupo.

Capítulo 2

Introducción a la Cosmología Isotrópica

En este capítulo se obtienen las soluciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) a las ecuaciones de Einstein, se introduce a la cosmología isotrópica obteniendo la acción gravitacional y de la materia que son las contribuciones a la acción total de Einstein-Hilbert.

Además, se trabaja con la métrica de FLRW generalizada al agregarle una función de lapso. Se obtienen las ecuaciones de Friedmann, pasando por la obtención del escalar de Ricci, el Lagrangiano reducido, además de la derivación del Hamiltoniano total dado por la suma del Hamiltoniano gravitacional y el de materia. A partir del análisis canónico encontramos la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de continuidad.

También, se hará mención a las condiciones de Energía y escogiendo la condición de energía fuerte se observarán las singularidades del sistema.

En este capítulo se obtiene con lujo de detalle los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemman y el escalar de Ricci para la métrica FLRW.

2.1. Obtención de la métrica FLRW

Debido a observaciones astronómicas a más de 300 años luz, se ha llegado a considerar que el universo donde habitamos es homogéneo, es decir, que observadores en distintas galaxias verían prácticamente lo mismo en cualquier dirección.¹ A partir de las bases de isotropía y homogeneidad Roberston

¹Recuérdese que un observador está considerado por un sistema inercial o a lo más en caída libre.

y Walker construyeron las ecuaciones de campo de Einstein que guiaron a Friedmann a escoger un sistema de coordenadas para que la métrica tomara una forma sencilla como solución a estas ecuaciones.

Consideremos la geometría de un espacio homogéneo e isotrópico de tres dimensiones. La geometría está “metida” implícitamente en la *métrica* $g_{ij}(\bar{x})$ o equivalentemente en un *segmento de línea* $ds^2 = g_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, donde ds representa la distancia propia entre \bar{x} y $\bar{x} + d\bar{x}$. Hay tres posibilidades para este espacio homogéneo: el plano (caso obvio), esférico e hiperbólico.

Caso Plano

Sea el espacio homogéneo e isotrópico plano, entonces el segmento de línea está definido positivamente, es decir,

$$ds^2 = d\bar{x}^2 \tag{2.1}$$

Las transformaciones que dejan invariante esta métrica, obviamente, son las rotaciones y traslaciones en tres dimensiones.

Caso Esférico²

Si consideramos una esfera de radio a dentro de un espacio Euclidiano de 4 dimensiones y elemento de línea

$$ds^2 = d\bar{x}^2 + dz^2 \tag{2.2}$$

con la siguiente restricción:

$$\bar{x}^2 + z^2 = a^2 \tag{2.3}$$

Entonces, las transformaciones que dejan invariante al elemento de línea son las rotaciones en 4-dimensiones; la dirección de \bar{x} puede ser cambiada a cualquier dirección por una rotación 4-dimensional, pero que deje la coordenada z invariante, es decir, rotaciones de 3-dimensiones. Y si se permite que la rotación cambie z entonces podemos llevar la coordenada \bar{x} a cualquier otro punto.

Caso Hiperbólico

Consideremos una hiperesfera con una métrica pseudo-euclidiana en 4 dimensiones con elemento de línea

$$ds^2 = d\bar{x}^2 - dz^2 \tag{2.4}$$

²En este caso y el siguiente se considera $a > 0$ y constante

con la restricción

$$z^2 - \bar{x}^2 = a^2 \quad (2.5)$$

Entonces, las transformaciones que dejan invariante a este elemento de línea son pseudo-rotaciones de 4 dimensiones, como las transformaciones de Lorentz, pero con la variable z en vez del tiempo.

Procederemos a encontrar las ecuaciones de FLRW utilizando para esto los casos “esférico e hiperbólico”.

Reescalando las coordenadas

$$az = z', \quad (2.6)$$

$$a\bar{x} = \bar{x}' \quad (2.7)$$

y pues como las primas solo nos estorban se dejan a un lado, así, tenemos que el elemento de línea reescalado está dado por

$$ds^2 = a^2(d\bar{x}^2 \pm dz^2) \quad (2.8)$$

donde

$$z^2 \pm \bar{x}^2 = 1 \quad (2.9)$$

Diferenciando esta última ecuación se obtiene $\mp \bar{x} \cdot d\bar{x} = z dz$.

Para proseguir tenemos dos casos distintos:

$$z^2 = 1 - \bar{x}^2; \quad \text{y} \quad (2.10)$$

$$z^2 = 1 + \bar{x}^2 \quad (2.11)$$

Escogiendo el primer caso (el referente al caso *esférico*), se tiene

$$dz^2 = \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{z^2} = \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{1 - \bar{x}^2} \quad (2.12)$$

Entonces el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = a^2 \left[d\bar{x}^2 + \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{1 - \bar{x}^2} \right] \quad (2.13)$$

Escogiendo el segundo caso (referente al caso *hiperbólico*), se sigue análogamente que el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = a^2 \left[d\bar{x}^2 - \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{1 + \bar{x}^2} \right] \quad (2.14)$$

Uniendo (2.13) y (2.14), obtenemos:

$$ds^2 = a^2 \left[d\bar{x}^2 \pm \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{1 \mp \bar{x}^2} \right] \quad (2.15)$$

Finalmente, agregando el caso plano:

$$ds^2 = a^2 \left[d\bar{x}^2 + K \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{1 - K\bar{x}^2} \right] \quad (2.16)$$

con

$$K = \begin{cases} 1 & \text{esférico (cerrado)} \\ 0 & \text{plano (euclidiano)} \\ -1 & \text{hiperbólico (abierto)} \end{cases} \quad (2.17)$$

Escogemos, $a^2 > 0$ para que el elemento de línea $ds^2 \geq 0$ cuando $\bar{x} = 0$ y por tanto será definido positivamente, i.e., $ds^2 \geq 0$ en todos lados. El tiempo propio, es decir, el elemento de línea del espacio-tiempo, se obtiene a partir de la métrica de la siguiente forma:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.18)$$

Sustituyendo el elemento de línea “espacial” en la ecuación anterior, obtenemos la *Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-WalKer* (FLRW):

$$\boxed{d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\bar{x}^2 + K \frac{(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2}{1 - K\bar{x}^2} \right]} \quad (2.19)$$

donde $a = a(t)$, es una función arbitraria del tiempo, conocido como *factor de escala de Robertson-WalKer*.

Más aún, esta es la única métrica (salvo transformaciones de coordenadas)³ si se considera el universo como simétrico e isotrópico para observadores en caída libre, por ejemplo, astrónomos en galaxias.

Las componentes de la métrica están dadas por

$$g_{ij} = a^2(t) \left[\delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\bar{x}^2} \right] \quad (2.20)$$

$$g_{00} = -1 \quad (2.21)$$

$$g_{0j} = 0 \quad (2.22)$$

³S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, 1972. Sec. 13.2.

Si realizamos el cambio a coordenadas esféricas

$$d\bar{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.23)$$

Se llega entonces a

$$\boxed{d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[dr^2 + r^2 d\Omega^2 + K \frac{r^2 dr^2}{1 - Kr^2} \right]} \quad (2.24)$$

Con componentes de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2} \quad (2.25)$$

$$g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2 \quad (2.26)$$

$$g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \quad (2.27)$$

$$g_{00} = -1 \quad (2.28)$$

¡Una métrica diagonal!

2.2. Ecuaciones de Einstein y Principio de Covarianza General

Dejemos de momento a la métrica de FLRW y prosigamos con la respuesta a la pregunta ¿qué es la ecuación de Einstein?

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

Una observación, no es una ecuación, sino es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de hasta segundo orden para el espacio-tiempo con la métrica $g_{\mu\nu}$. Como la ecuación tensorial que es, nos determina la estructura del espacio-tiempo en una forma covariante y de coordenadas independientes. Sin embargo, las coordenadas se escogen para obtener soluciones específicas, que provocan la distinción entre ecuaciones de primer orden (*aparecen como constricciones del sistema, es decir, ya no son ecuaciones de evolución*) y de segundo orden que aprovechan las constricciones dadas por las de primer orden para resolverse y son las de evolución. Más aún, es probable que varias componentes de la métrica no aparezcan como segundas derivadas para nada.

“Las ecuaciones de Einstein no deben resolverse dado un espacio-tiempo, sino que sus soluciones determinan cómo evoluciona el espacio-tiempo empezando con la estructura de una variedad espacial inicial.”

Principio de Covarianza General

La métrica del espacio-tiempo es la única cantidad perteneciente al espacio que puede aparecer en las leyes de la Física. Específicamente, no hay preferencia entre espacios vectoriales o bases de los espacios vectoriales pertenecientes sólo a la estructura del espacio-tiempo que aparezcan en las leyes de la Física.⁴

Nota 4. *El principio de covarianza general nos permite expresar las soluciones en cualquier sistema coordenado y relacionar las soluciones basándose sólo en escoger consistentemente distintos tipos de coordenadas. La consistencia es asegurada por las constricciones dadas por las ecuaciones diferenciales de primer orden.*

2.3. Cosmología Isotrópica

Recordemos que con la hipótesis de considerar el espacio-tiempo isotrópico y homogéneo a grandes escalas se encuentra la métrica de FLRW dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a(t)^2 d\sigma_K^2 \quad (2.30)$$

donde $d\sigma_K$ representa el elemento de línea espacial:

$$d\sigma_K^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

que representa un espacio de 3 dimensiones con curvatura constante.

Se observa que hay un factor extra ($N^2(t)$) en esta ecuación a la dada en la sección anterior, que representa una función libre, así como el factor de escala ($a(t)$).

A la constante K se le denomina parámetro de curvatura, recordemos que está dado por

$$K = \begin{cases} 1 & \text{esférico (cerrado)} \\ 0 & \text{plano (euclidiano)} \\ -1 & \text{hiperbólico (abierto)} \end{cases} \quad (2.31)$$

⁴En palabras mundanas, las leyes de la Física están descritas por ecuaciones covariantes que ante transformaciones de coordenadas (observadores) son invariantes.

Funciones Libres

- I. Función de Lapso ($N(t)$): es una variable arbitraria no determinada por las ecuaciones de movimiento y que establece la relación entre el tiempo propio cosmológico, τ , y la elección de tiempo hecha en la teoría, t . Esta función se puede absorber si se usa el tiempo propio cosmológico τ definido a través de $d\tau = N(t)dt$, que es una ecuación diferencial para τ .⁵
- II. Factor de Escala ($a(t)$) mide la expansión o contracción del espacio en el tiempo:
 - Para el caso plano puede ser reescalada a una constante que sólo cambiaría las coordenadas espaciales.
 - Para los modelos con $K \neq 0$ la libertad de reescalar las coordenadas se fija al normalizar $K = \pm 1$.
 - Contrario a la función de lapso no puede ser absorbida completamente por las coordenadas mientras se quiera preservar la isotropía del elemento de línea.

El *tiempo propio cosmológico* se refiere a observadores que están en movimiento fijos en un punto en el espacio y se mantienen siguiendo la expansión o contracción del universo.

2.4. Acción de Einstein-Hilbert

En relatividad general la dinámica del espacio-tiempo y la gravedad está determinada por la Acción de Einstein-Hilbert

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi} G \sqrt{-\det g} R + \mathcal{L}_{mat} \right) \\ &= S_G + S_{mat} \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\det g$ es el determinante de la métrica del espacio-tiempo, \mathcal{L}_{mat} representa la densidad Lagrangiana de materia y R es el escalar de Ricci, definido

⁵Como $N(t) > 0$, entonces $\tau(t) = \int N(t)dt$ es una función monótona por lo que puede ser invertida para obtener $t(\tau)$ y ser sustituido en $a(t)$, recuperando la ecuación de la sección anterior.

como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (2.33)$$

donde $R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ es el tensor de Ricci.

2.4.1. Obtención del escalar de Ricci

Para obtener el escalar de Ricci recordaremos los símbolos de Christoffel (los cuales nos indican las conexiones de la geometría del espacio-tiempo entre las coordenadas), el tensor de Riemann, su contracción, que nos da el tensor de Ricci y la contracción de este tensor para obtener, finalmente, el escalar de Ricci.

Nuestro elemento de línea está dado por

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.34)$$

Entonces como se ha mencionado es una métrica diagonal cuyas componentes están dadas por

$$g_{00} = -N^2(t) \quad (2.35)$$

$$g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2} \quad (2.36)$$

$$g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2 \quad (2.37)$$

$$g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \quad (2.38)$$

Y las componentes de la matriz inversa de la métrica están dadas por

$$g^{00} = -\frac{1}{N(t)} \quad (2.39)$$

$$g^{rr} = \frac{1 - Kr^2}{a^2(t)} \quad (2.40)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2(t)r^2} \quad (2.41)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{a^2(t) \sin^2 \theta} \quad (2.42)$$

Nota 5. Para simplificar la notación la dependendencia temporal en la función de lapso ($N(t)$) y en el factor de escala ($a(t)$) se omitirán, una coma

seguida por un índice indicará una derivada parcial, por ejemplo,

$$g_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \quad (2.43)$$

además se denotará:⁶

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \dot{N}$$

y

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \dot{a} \quad (2.44)$$

Recordemos que los símbolos de Christoffel están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (2.45)$$

Para obtener los símbolos de Christoffel se van a tomar en cuenta una serie de observaciones, donde la primer observación es general y las demás resultan de una métrica diagonal y de las componentes de ésta.

Observación 5. Cuando λ es igual a μ se obtiene que⁷

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\mu &= \frac{1}{2}g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\mu} g_{\rho\mu,\nu} + \frac{1}{2}g^{\rho\mu} g_{\nu\rho,\mu} - \frac{1}{2}g^{\rho\mu} g_{\mu\nu,\rho} \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\mu} g_{\rho\mu,\nu} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Observación 6. Utilizando una métrica diagonal y consideramos $\lambda = 0$ y los subíndices son latinos⁸

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}g^{\rho 0} (g_{\rho i,j} + g_{j\rho,i} - g_{ij,\rho}) \quad (2.47)$$

Como es una métrica diagonal $\rho = 0$, por lo tanto

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}g^{00} g_{ij,0} \quad (2.48)$$

⁶En realidad son derivadas totales pues sólo dependen del tiempo.

⁷O $\lambda = \nu$, recuérdese que índices repetidos van sumados, i.e., son mudos.

⁸Índices latinos corren de 1, 2, 3 o en su defecto en coordenadas esféricas: ρ, θ, ϕ .

Observación 7. *El siguiente caso está dado por*

$$\Gamma_{0i}^j = \frac{1}{2} g^{\rho j} (g_{\rho 0, i} + g_{i \rho, 0} - g_{0i, \rho}) \quad (2.49)$$

Y como la métrica es diagonal, entonces $\rho = j$, lo cual implica que $j = i$ y los términos con subíndices cruzados son cero, se obtiene que

$$\Gamma_{0j}^j = \frac{1}{2} g^{jj} g_{jj, 0} \quad (2.50)$$

En este caso no se consideran índices repetidos que vayan sumados.

Observación 8. *En esta observación tomaremos cuatro casos más particulares:*

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^j &= \frac{1}{2} g^{\rho j} (g_{\rho 0, 0} + g_{0 \rho, 0} - g_{00, \rho}) \\ &= \frac{1}{2} g^{jj} (g_{j0, 0} + g_{0j, 0} - g_{00, j}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde debido a que la métrica es diagonal, $j = \rho$.

Luego:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ri}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\rho \theta} (g_{\rho r, i} + g_{i \rho, r} - g_{ri, \rho}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\theta \theta} (g_{\theta r, i} + g_{i \theta, r} - g_{ri, \theta}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Entonces $i = \theta$, análogamente se obtiene el caso cuando $\lambda = \phi$, que indicaría que $i = \phi$.

Consideremos el siguiente caso:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi j}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\rho \theta} (g_{\phi \rho, j} + g_{j \rho, \phi} - g_{\phi j, \rho}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\theta \theta} (g_{\phi \theta, j} + g_{j \theta, \phi} - g_{\phi j, \theta}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Lo que indica que $j = \phi$.

El último caso se deriva de:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta j}^\phi &= \frac{1}{2} g^{\rho \phi} (g_{\theta \rho, j} + g_{j \rho, \theta} - g_{\theta j, \rho}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\phi \phi} (g_{\theta \phi, j} + g_{j \phi, \theta} - g_{\theta j, \phi}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Entonces, $j = \phi$

Utilizando esta serie de observaciones encontramos que en nuestro caso los símbolos de Christoffel distintos de cero son:⁹

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{N}}{N} \quad (2.55)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - Kr^2) \quad (2.56)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -(1 - Kr^2)r \sin^2 \theta \quad (2.57)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{Kr}{1 - Kr^2} \quad (2.58)$$

$$\Gamma_{rr}^0 = \frac{a\dot{a}}{N^2(1 - Kr^2)} \quad (2.59)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^0 = \frac{a\dot{a}r^2}{N^2} \quad (2.60)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^0 = \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta}{N^2} \quad (2.61)$$

$$\Gamma_{0r}^r = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.62)$$

$$\Gamma_{0\theta}^\theta = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.63)$$

$$\Gamma_{0\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.64)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (2.65)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \quad (2.66)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta \quad (2.67)$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \quad (2.68)$$

Ahora proseguimos a calcular las componentes del *tensor de Ricci*, que es la contracción al tensor de Riemann: $R_{\alpha\nu} = R_{\alpha\mu\nu}^\mu$.

En general, el **tensor de Riemann** está definido por

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \quad (2.69)$$

Entonces, el **tensor de Ricci** está dado por

$$R_{\beta\nu} = R_{\beta\mu\nu}^\mu = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\mu - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\mu + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \quad (2.70)$$

⁹Por definición $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$

Por lo que las componentes del tensor de Ricci son:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \quad (2.71)$$

$$R_{rr} = g_{rr} \left[\frac{2\dot{a}^2}{a^2 N^2} + \frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{2K}{a^2} \right] \quad (2.72)$$

$$R_{\theta\theta} = g_{\theta\theta} \left[\frac{2\dot{a}^2}{a^2 N^2} + \frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{2K}{a^2} \right] \quad (2.73)$$

$$R_{\phi\phi} = g_{\phi\phi} \left[\frac{2\dot{a}^2}{a^2 N^2} + \frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{2K}{a^2} \right] \quad (2.74)$$

Finalmente, el escalar de Ricci definido por (2.33), para el caso de la métrica de FLRW está dado por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{00} R_{00} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\ &= 6 \left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} + \frac{K}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Y el *determinante* de la métrica es¹⁰

$$\det g = -\frac{N^2 a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - Kr^2} \quad (2.76)$$

2.5. Lagrangiano Reducido Gravitacional.

Las últimas ecuaciones de la sección anterior determinan la parte gravitacional de la acción de Einstein-Hilbert, en un espacio isotrópico, dada

¹⁰ $\det g = g_{00}g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}$ por ser diagonal.

por

$$\begin{aligned}
S_{grav}^{iso}[a, N] &= \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-\det gR} \right) \\
&= \int d^4x \frac{1}{16\pi G} \frac{Na^3 r^3 \sin \theta}{(1 - Kr^2)^{\frac{1}{2}}} 6 \left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} + \frac{K}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} \right) \\
&= \frac{3V_0}{8\pi G} \int dt \frac{\ddot{a}a^2 + \dot{a}^2 a}{N} + KNa - \frac{\dot{a}\dot{N}a^2}{N^2}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Observación 9. V_0 representa el volumen espacial en una región compacta definido como¹¹

$$V_0 \equiv \int dr d\theta d\phi \frac{r^4 \sin^3 \theta}{\sqrt{1 - Kr^2}} \tag{2.78}$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \tag{2.79}$$

$$\int_0^{r_0} \frac{r^4 dr}{(1 - Kr^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3 \sin^{-1}(\sqrt{K}r_0) - \sqrt{K}r_0 \sqrt{1 - Kr_0^2} (2Kr_0^2 + 3)}{8 K^{\frac{5}{2}}} \tag{2.80}$$

Entonces podemos escoger el radio de integración de tal manera que

$$V_0 = 1$$

Observación 10. Esta observación tiene un doble propósito, añadir una notación a la derivada parcial respecto algún parámetro y para que el resultado sea aplicado a nuestra acción gravitacional.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2 \dot{a}}{N} \right) = \partial_t \left(\frac{a^2 \dot{a}}{N} \right) = \frac{2a\dot{a}^2}{N} + \frac{\ddot{a}a^2}{N} - \frac{a^2 \dot{a}\dot{N}}{N^2} \tag{2.81}$$

Entonces al sustituir en nuestra acción gravitacional y suponiendo que la integral es válida para todo el espacio, i.e., consideramos nuestro espacio-tiempo compacto, obtenemos:

$$\boxed{S_{grav}^{iso}[a, N] = -\frac{3V_0}{8\pi G} \int dt \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - KaN \right)} \tag{2.82}$$

¹¹ $d^4x = r^2 \sin^2 \theta dt dr d\theta d\phi$.

$$\boxed{\mathcal{L}_{grav}^{iso}[a, N] = \frac{\dot{a}^2 a}{N} - KaN} \quad (2.83)$$

¡No dependen de la derivada temporal de la función de lapso!

2.6. Análisis Canónico

Las variables de nuestra acción reducida son: $a(t)$ y $N(t)$, entonces tenemos las variables canónicas dadas por (a, p_a, N, p_N) . Donde los momentos están definidos por

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}_{grav}^{iso}}{\partial \dot{a}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{a}} \left(-\frac{3V_0}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - KaN \right) \right) \\ &= -\frac{3V_0}{4\pi GN} a \dot{a} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Despejando \dot{a}

$$\dot{a} = -\frac{4\pi GN}{3V_0} \frac{p_a}{a} \quad (2.85)$$

y el momento de la función de lapso $N(t)$ es

$$p_N = \frac{\partial \mathcal{L}_{grav}^{iso}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (2.86)$$

Esta última ecuación nos dice que N no es un grado de libertad efectivo, es decir, no es una variable independiente, pues su momento asociado p_N se anula, lo cual representa una restricción primaria sobre las variables canónicas y la dinámica de éstas. Las *restricciones primarias* son aquellas que aparecen de la definición de los momentos.

2.6.1. Derivación del Hamiltoniano Gravitacional y de Materia

Calcularemos primero el Hamiltoniano Gravitacional.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{grav}^{iso} &= \dot{a}p_a + \dot{N}p_N - \mathcal{L}_{grav}^{iso} \\
&= \frac{-4\pi GN}{3a}p_a^2 + \left(\frac{3a}{8\pi GN}\right) \left(\frac{16\pi^2 G^2 N^2}{9a^2}p_a^2\right) - \frac{3KaN}{8\pi G} \\
&= -\frac{2\pi GN}{3a}p_a^2 - \frac{3}{8\pi G}KaN
\end{aligned} \tag{2.87}$$

De aquí, en adelante normalizaremos el volumen $V_0 = 1$, lo cual se puede hacer tomando una región conveniente para integrar.

Ahora bien, proseguimos a calcular el Hamiltoniano de Materia.

En cosmología isotrópica, la única fuente de materia compatible con las simetrías exactas es un campo escalar ϕ , que acoplado minimalmente, tiene la siguiente acción:

$$S_{mat}^{iso}[\phi] = - \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right) \tag{2.88}$$

Teniendo así nuestro Lagrangiano de materia dado por

$$\mathcal{L}_{mat}^{iso} = -\sqrt{-\det g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right) \tag{2.89}$$

Recordemos que el determinante de la métrica está dado por

$$\det g = -\frac{N^2 a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - Kr^2} \tag{2.90}$$

y substituyendo las componentes de la métrica en el Lagrangiano de materia se obtiene que para métricas isotrópicas y campos escalares espacialmente homogéneos, donde $\phi = \phi(t)$, la acción queda determinada por

$$S_{mat}^{iso}[\phi] = \int dt \left[\frac{a^3}{2N} \dot{\phi}^2 - Na^3 V(\phi) \right] \tag{2.91}$$

Así el Lagrangiano queda dado por

$$\mathcal{L}_{mat}^{iso}[\phi] = \frac{a^3}{2N} \dot{\phi}^2 - Na^3 V(\phi) \tag{2.92}$$

Y el momento queda determinado como

$$p_\phi = \frac{a^3}{N} \dot{\phi} \quad (2.93)$$

Entonces, el Hamiltoniano de materia es

$$\mathcal{H}_{mat}^{iso} = \dot{\phi} p_\phi - \mathcal{L}_{mat}^{iso} = \frac{1}{2} \frac{N}{a^3} p_\phi^2 + Na^3 V(\phi) \quad (2.94)$$

2.7. Ecuaciones de Movimiento del Hamiltoniano Total

El Hamiltoniano isotrópico total está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{tot}^{iso} &= \mathcal{H}_{grav}^{iso} + \mathcal{H}_{mat}^{iso} + \lambda p_N \\ &= \left(-\frac{2\pi GN}{3a} p_a^2 - \frac{3}{8\pi G} KaN \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{N}{a^3} p_\phi^2 + Na^3 V(\phi) \right) + \lambda p_N \end{aligned} \quad (2.95)$$

Entonces las ecuaciones de movimiento están dadas por¹²

$$\dot{N} = \frac{\partial \mathcal{H}_{tot}^{iso}}{\partial p_N} = \lambda \quad (2.96)$$

Para la evolución de la constricción primaria p_N tenemos

$$\dot{p}_N = -\frac{\partial \mathcal{H}_{tot}^{iso}}{\partial N} = \frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{3}{8\pi G} Ka - \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3} - a^3 V(\phi) \approx 0 \quad (2.97)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial \mathcal{H}_{tot}^{iso}}{\partial p_a} = -\frac{4\phi GN}{3a^2} p_a \quad (2.98)$$

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}_{tot}^{iso}}{\partial a} = -\frac{2\pi GN}{3a^2} p_a^2 + \frac{3}{8\pi G} KN + \frac{3}{2} \frac{N}{a^4} p_\phi^2 - 3Na^2 V(\phi) \quad (2.99)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}_{tot}^{iso}}{\partial p_\phi} = \frac{N}{a^3} p_\phi \quad (2.100)$$

¹²Donde se agrega el término λp_N por ser nuestra constricción primaria.

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}_{tot}^{iso}}{\partial \phi} = -a^3 N \frac{d}{d\phi} V(\phi) \quad (2.101)$$

La ecuación (2.96) nos dice que $N(t)$ es completamente arbitraria como función del tiempo, para que $\lambda(t)$ permanezca libre cuando se añada la constricción primaria al Hamiltoniano.

La ecuación (2.97) implica una *constricción secundaria* ya que $p_N = 0 \quad \forall t$, entonces $\dot{p}_N = 0$, es decir,¹³

$$\mathcal{C} = \frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{3}{8\pi G} K a - \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3} - a^3 V(\phi) = 0 \quad (2.102)$$

La ecuación (2.98) reproduce la definición de momento p_a cuya ecuación de movimiento obtenida usando el Lagrangiano gravitacional nos provee una ecuación de evolución de segundo orden para a

2.8. Ecuaciones de Friedmann, Raychaudhuri y Klein-Gordon

Para eliminar p_a , sustituimos (2.98) en la constricción de segundo orden (2.97), obteniendo así que (2.97) está dada por

$$\frac{3a\dot{a}^2}{8\pi G N^2} + \frac{3}{8\pi G} K a - \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3} - a^3 V(\phi) = 0 \quad (2.103)$$

Dividiendo entre a^2 y reordenando términos obtenemos la **Ecuación de Friedmann**:

$$\left[\left(\frac{\dot{a}}{aN} \right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{p_\phi^2}{2a^6} + V(\phi) \right) \right] \quad (2.104)$$

De (2.98), obtenemos que el momento p_a está dado por

$$p_a = -\frac{3a\dot{a}}{4\pi G N} \quad (2.105)$$

Entonces, despejando \dot{a}^2 de (2.104) obtenemos

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G N^2}{3a} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} - K N^2 \quad (2.106)$$

¹³Nótese que la constricción cumple $\{\mathcal{C}, p_\phi\} = 0$, si ponemos que el potencial se anula $V(\phi) = 0$.

donde

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3} + a^3 V(\phi) \quad (2.107)$$

Derivando (2.105) respecto al tiempo obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{p}_a &= -\frac{3}{4\pi GN} \left[\frac{\dot{a}^2}{N} + a \left(\frac{\dot{a}}{N} \right)^\bullet \right] \\ &= -\frac{3}{4\pi G} \left[\frac{8\pi GN^2}{3aN} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} - \frac{KN^2}{N} + a \left(\frac{\dot{a}}{N} \right)^\bullet \right] \\ &= -\frac{2N}{a} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} + \frac{3KN}{4\pi G} - \frac{3a}{4\pi GN} \left(\frac{\dot{a}}{N} \right)^\bullet \end{aligned} \quad (2.108)$$

Por otro lado de (2.99):

$$\begin{aligned} \dot{p}_a &= -\frac{2\pi GN}{3a^2} \left[\frac{9a^2 \dot{a}^2}{16\pi^2 G^2 N^2} \right] + \frac{3NK}{8\pi G} - \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial a} \\ &= -\frac{3}{8\pi GN} \left[\frac{8\pi GN}{3} \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} - KN^2 \right] + \frac{3NK}{8\pi G} - \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial a} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Uniendo estas dos ecuaciones, dividiendo entre $a^2 N$ se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{\dot{a}}{N} \right)^\bullet}{aN} = -\frac{4\pi GN}{3} \left[\frac{1}{a^3} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} - \frac{1}{a^2 N} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial a} \right] \quad (2.110)$$

Sustituyendo las parciales (los momentos respectivos) de (2.96) y (2.98) se obtiene la **ecuación de Raychaudhuri**:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{\dot{a}}{N} \right)^\bullet}{aN} = -\frac{8\pi GN}{3} \left[\frac{p_\phi}{a^6} - V(\phi) \right]} \quad (2.111)$$

Para encontrar la ecuación de Klein-Gordon, basta con combinar las ecuaciones de primer orden del Hamiltoniano para ϕ y p_ϕ . Entonces:

$$p_\phi = \frac{\mathcal{L}_{mat}^{iso}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3 \dot{\phi}}{N} \quad (2.112)$$

Recordemos que

$$\mathcal{L}_{mat}^{iso} = \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{2N} - Na^3 V(\phi) \quad (2.113)$$

Entonces la ecuación de movimiento está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{iso_{mat}}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{iso_{mat}}}{\partial \phi} = \frac{3a^2 \dot{a} \phi}{N} + a^3 \left(\frac{\dot{\phi}}{N} \right)' + Na^3 V(\phi) \quad (2.114)$$

Sustituyendo y reordenando, encontramos la **ecuación de Klein-Gordon**

$$\boxed{\frac{\left(\frac{\dot{\phi}}{N}\right)'}{N} + \frac{3\dot{\phi}\dot{a}}{N^2 a} + V'(\phi) = 0} \quad (2.115)$$

2.9. Parámetros de Materia y Ecuación de Continuidad

En esta sección se proponen los denominados *parámetros de materia* que no dependen del factor de escala, cómo las ecuaciones de Friedmann y Raychaudhuri se ven modificadas y finalmente se obtiene la ecuación de Continuidad en esta cosmología isotrópica. En un Hamiltoniano de materia, formulado en variables canónicas, se tiene que cualquier *N-dependencia* surge sólo del factor de “medición”, i.e., $\sqrt{-\det g}$ y por lo tanto el Hamiltoniano debe ser proporcional a N .

En un espacio homogéneo se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial N} = \frac{1}{N} \mathcal{H}_{mat}^{iso} = \mathcal{E} \quad (2.116)$$

es el Hamiltoniano de materia (Energía) medido en el tiempo propio (recuérdese que la energía depende del marco de referencia).

Consideremos el volumen espacial dado por $V = a^3$, entonces definimos:

Densidad de Energía

$$\rho \equiv \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{\mathcal{H}_{mat}^{iso}}{a^3 N} \quad (2.117)$$

y la **Presión**:

$$P \equiv -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} = -\frac{1}{3Na^2} \frac{\partial \mathcal{H}_{mat}^{iso}}{\partial a} \quad (2.118)$$

Estas cantidades (*densidad de energía* y *presión*) son independientes al reescalar a , es decir, a un cambio de coordenadas temporal.

Entonces, considerando un universo isotrópico, estas dos cantidades determinan completamente el *Tensor de esfuerzos-energía* dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (2.119)$$

Si consideramos la aproximación de un fluido perfecto, entonces:

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (2.120)$$

$$P = T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad (2.121)$$

donde u^μ es la *4-velocidad* y v^μ es un vector espacial tal que $u_\mu v^\mu = 0$, $u_\mu u^\mu = -1$ y $v^\mu v_\mu = 1$.

Sustituyendo la definición de densidad de energía y de presión, en las ecuaciones de Friedmann (2.104) y de Raychaudhuri (2.111) estas toman la forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{aN}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.122)$$

$$\frac{\left(\frac{\dot{a}}{N}\right)^\bullet}{aN} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (2.123)$$

A partir de estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación de continuidad de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\dot{a}}{N}\right)^2 = \frac{8\pi G a^2}{3}\rho - K \quad (2.124)$$

$$2\left(\frac{\dot{a}}{N}\right)\left(\frac{\dot{a}}{N}\right)^\bullet = \frac{8\pi G}{3}[2a\dot{a}\rho + a^2\dot{\rho}] \quad (2.125)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{N}\right)^\bullet = \frac{4\pi GN}{3}\left[2a\rho + \frac{a^2\dot{\rho}}{\dot{a}}\right] \quad (2.126)$$

Sustituyendo en la ecuación de Raychaudhuri con los parámetros de materia se obtiene

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}}{N} + \frac{3\dot{a}}{Na}(\rho + P) = 0} \quad (2.127)$$

¡Que es la **Ecuación de Continuidad!**¹⁴

¹⁴Es posible derivar esta ecuación a través de la derivada covariante del tensor de energía-momento ya que es una cantidad conservada, pero es mucho más laborioso.

La ecuación de continuidad sólo depende de observables: ρ y P , que son parámetros de materia independientes de la elección de la coordenada temporal, i.e., del factor de escala.

De aquí, se define el *parámetro de Hubble*

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{aN} \quad (2.128)$$

y el *parámetro de desaceleración*

$$q \equiv -\frac{a(\dot{a}/N)N}{\dot{a}^2}. \quad (2.129)$$

2.10. Condiciones de Energía y Singularidades

Recordemos que el principio de Covarianza se fundamenta en las tres condiciones:

- I. *Principio de Equivalencia Débil*: la trayectoria de un cuerpo neutral de prueba es independiente de su estructura inercial y su composición. (Principio de la universalidad de “caída libre”).
- II. *Invarianza de la Posición Local*: todo experimento no gravitacional es independiente del punto del espacio-tiempo donde el experimento fue hecho.
- III. *Invarianza local de Lorentz*: los resultados de los experimentos no gravitacionales son independientes del movimiento del laboratorio donde fue realizado, mientras este movimiento haya sido *caída libre*.

2.10.1. Condiciones de Energía

Ahora, sólo falta poder distinguir de una forma general las fuentes de materia con propiedades físicas y causales razonables, que no necesariamente son caracterizadas por un parámetro, entonces, uno define las condiciones de energía que el tensor de energía-momento debe satisfacer:

- I. *Condición de Energía Débil* (WEC)¹⁵: Se debe satisfacer $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ para todo v^μ temporal oide (por contuinidad implica que se satisface

¹⁵Por sus siglas en inglés Weak Energy Condition.

para todo campo vectorial nulo). Cuando esto sucede, la densidad de energía local será no-negativa para cualquier observador.

En un espacio-tiempo isotrópico se tiene que el tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (2.130)$$

Por lo que (WEC) implica inmediatamente que $\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0$. Entonces, $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = (\rho + P)(u_\mu v^\mu)^2 + P v_\mu v^\mu \geq 0$, por lo que $\rho + P \geq 0$ ya que es para todo v^μ temporaloide, entonces puede ser un vector muy cercano al vector nulo. En el caso que se da la igualdad $P = -\rho$ es conocido como *expansión de Sitter*.

- II. *Condición de Energía Dominante*: para todo v^μ temporaloide se debe satisfacer que $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0$ y $T_{\mu\nu} v^\nu$ debe ser un vector no-espacialoide. Entonces, el flujo local de energía nunca es de forma espacial y la energía domina las otras componentes del tensor de energía-momento: $T^{00} \geq |T^{\mu\nu}| \forall \mu, \nu$. Cuando $\rho \geq P$, la velocidad del sonido $\frac{dP}{d\rho} \leq 1$ no es mayor que la velocidad de la luz cuando ρ y P son pequeñas.
- III. *Condición de Energía Fuerte (SEC)*¹⁶: se debe cumplir $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq \frac{1}{2} T^\nu_\nu v^\mu v_\mu$, para todo v^μ temporaloide implica la convergencia tipo tiempo a través de la ecuación de Einstein, entonces, tenemos que $R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0$ y la expansión de una familia de geodésicas temporaloides no puede aumentar¹⁷.

Para $v^\mu = u^\mu$ la *4-velocidad* de un fluido perfecto, se tiene que $\rho \geq -\frac{1}{2}(-\rho + 3P)$ y por lo tanto $\rho + 3P \geq 0$. Esta condición (SEC) elimina la posibilidad de una expansión acelerada.

Para la fuerza gravitacional que rige un universo isotrópico, las condiciones de energía implican que la gravedad siempre es atractiva, debido al signo de $\rho + \omega P$ que restringe a su vez el signo de \ddot{a} a través de la ecuación de Raychaudhuri (2.111).¹⁸

¹⁶Por sus siglas en inglés Strong Energy Condition.

¹⁷En esta tesis no abordaremos más detalles sobre el significado de este enunciado.

¹⁸En (WEC) y (SEC) hay presencia de singularidades.

2.10.2. Singularidades

Si se considera (SEC), como se mencionó la aceleración de un universo isotrópico se elimina y la presencia de singularidades se garantiza. Para esto último utilizamos la ecuación de Raychaudhuri en la forma de tiempo propio y aplicando también la ecuación de Friedman, tenemos:

$$\dot{\mathcal{H}} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)' = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) - \mathcal{H}^2 \leq -\mathcal{H}^2 \quad (2.131)$$

La desigualdad se debe a (SEC), entonces, el parámetro de Hubble (\mathcal{H}), satisface:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\mathcal{H}} \geq 1 \quad (2.132)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\mathcal{H}} - \frac{1}{\mathcal{H}_0} \geq \tau - \tau_0 \quad (2.133)$$

Si se consideran valores iniciales tales que el universo se está contrayendo al tiempo $\tau = \tau_0$, entonces $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\tau_0) < 0$.

Entonces $\frac{1}{\mathcal{H}}$ es positivo para $\tau > \tau_0 + \frac{1}{|\mathcal{H}_0|}$, pero $\frac{1}{\mathcal{H}}$ era inicialmente negativa, por lo que existe un tiempo antes a $\tau_1 = \tau_0 + \frac{1}{|\mathcal{H}_0|}$ donde $\frac{1}{\mathcal{H}}$ debe ser cero, lo que indica que \mathcal{H} diverge en un intervalo finito de tiempo: $[\tau_0, \tau_1]$ y por la ecuación de Friedmann ρ diverge.

Uno concluye que en un universo isotrópico que contenga materia y satisfaga *SEC*, y asumiendo que el universo haya sido contraído en un tiempo inicial, este universo podrá existir sólo en un tiempo finito. Análogamente, un universo que se está expandiendo tuvo un pasado válido en un tiempo finito.¹⁹

¹⁹Aquí el tiempo se refiere a tiempo propio.

Capítulo 3

Integral Funcional y Determinantes Funcionales

En este capítulo se hace una pequeña introducción a la integral de trayectoria (o integral funcional) y se presenta una introducción a los determinantes funcionales y cómo calcularlos a través del teorema de Gelfand-Yaglom y, finalmente, cómo tratar con operadores que tengan modos cero (eigenvalores cero).

3.1. Integral Funcional

Clásicamente, si uno desea conocer la posición de una partícula a un tiempo determinado basta con conocer las condiciones iniciales, es decir, la posición y la velocidad de ésta a un tiempo anterior al que se desea saber. Cuánticamente, desgraciadamente, no es el caso, entonces una forma de poder predecir la probabilidad de encontrar la partícula en un lugar a un tiempo dado, se debe a Richard Feynmann guiado por P.A.M. Dirac, donde el punto del asunto es calcular todas las trayectorias posibles que pudo haber recorrido la partícula, es decir, se busca integrar en todo el espacio todas las trayectorias posibles con una función de peso, que es la acción.

Clásicamente, la acción está definida como¹:

Definición 14.

$$\mathcal{S}_{Cl} = \int_{t_0}^t dt (T - V(q)) \quad (3.1)$$

¹ T es la energía cinética y V la potencial

Además satisface que $\delta\mathcal{S} = 0$, donde se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange ²:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (3.2)$$

Recordemos nuestros cursos de cálculo, ¿qué es lo que se hace al integrar una función?

Particionábamos nuestro intervalo de integración; justamente eso es lo que haremos para la integral funcional.

Pero ¿qué intervalo?, ¿qué función?

Primero, el intervalo está determinado por $[q_0, q]$ y la función que queremos calcular es $\Psi(q, t)$ que si recordamos es obtenida a través del Kernel, $K(q, t; q_0, t_0)$, de la función de Schrödinger evaluada en $(q, t; q_0, t_0)$

Proposición 5.

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}} \quad (3.3)$$

Demostración. Tenemos que el Kernel está dado por

$$K(q, t; q_0, t_0) = \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | q_0 \rangle \quad (3.4a)$$

$$= \langle q, t | q_0, t_0 \rangle \quad (3.4b)$$

Introducimos un “uno” en la ecuación, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1| = \mathbb{I} \quad (3.5)$$

Entonces el Kernel está dado por

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \langle q, t | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \quad (3.6)$$

ahora, anexando otro “uno” a la ecuación y así sucesivamente:

²Recordemos que $\mathcal{L} = T - V$

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 dq_1 \langle q, t | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q \rangle \quad (3.7a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \cdots dq_1 \langle q, t | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \quad (3.7b)$$

Trabajaremos ahora con el j -ésimo término, es decir:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_j \rangle \quad (3.8)$$

Haremos una expansión de Taylor de la exponencial para poder aplicar el operador e introduciremos un “uno” pero ahora del espacio de p , es decir, la ecuación (3.4a) del cuadro de Schrödinger y de Heisenberg; además recordemos que $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}(q)$, entonces la ecuación anterior está dada por

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_j \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H} | q_j \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j)} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \mathbf{H}(q_j; p_j) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \mathbf{H}(q_j; p_j) + \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde $\mathbf{H}(q_j; p_j)$ representa el hamiltoniano ya evaluado y en la ecuación (3.9) se observa que ya son puros valores propios, es decir, ya no hay operadores en la integral.

Haciendo este paso N veces más, es decir, agregamos $N + 1$ unos a la

ecuación (3.7b), tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_N \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_N (q - q_N)} e^{\frac{i}{\hbar} p_{N-1} (q_N - q_{N-1})} \cdots \\ & \cdots e^{\frac{i}{\hbar} p_1 (q_2 - q_1)} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 (q_1 - q_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \mathbf{H}(q_N; p_N)} \cdots e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \mathbf{H}(q_0; p_0)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por lo tanto

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_N \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N p_j (q_{j+1} - q_j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{j=0}^N \mathbf{H}(q_j; p_j)} \quad (3.11)$$

Vamos a desarrollar a q_{j+1} en una expansión respecto a t_j ya que

$$q_{j+1} = q(t_{j+1}) = q(t_j + \Delta t) \quad (3.12)$$

entonces

$$q_{j+1} = q(t_j) + \Delta t \dot{q}(t_j) \quad (3.13)$$

$$= q_j + \Delta t \dot{q}_j \quad (3.14)$$

Ahora bien, sea

$$\lim_{N \rightarrow \infty} dq_1 \cdots dq_N = \mathcal{D}q \quad (3.15)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} = \mathcal{D}p \quad (3.16)$$

Entonces la ecuación (3.10) al sustituir (3.14), introduciendo el límite a la integral y aplicar el cambio (3.15) y (3.16), nos queda el Kernel como:

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N (p_j \dot{q}_j - \mathbf{H}(q_j, p_j))} \quad (3.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt (p \dot{q} - \mathbf{H}(q, p))} \quad (3.18)$$

Además, como el hamiltoniano al ser una transformada de Legendre del Lagrangiano, tenemos:

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - H \quad (3.20)$$

entonces:

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (3.21)$$

□

3.1.1. Partícula Puntual Sobre un Círculo.

Consideremos que las órbitas están especificadas en términos de una variable angular, i.e., $\varphi(t) \in [0, 2\pi)$, sujetas a la restricción topológica $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$ son puntos idénticos (el caso de un círculo).

Para encontrar la integral de trayectoria en este caso empezamos de manera usual, es decir, separamos la amplitud de trayectoria en un producto

$$\langle \varphi_f, t_f | \varphi_0, t_0 \rangle = \langle \varphi_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_0)\hat{H}} | \varphi_0 \rangle = \langle \varphi_f | \prod_{n=1}^{N+1} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}} | \varphi_0 \rangle \quad (3.22)$$

donde $\epsilon = \frac{t_f - t_0}{N+1}$.

Debido a la geometría en la que estamos, las relaciones de completitud se ven modificadas como

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = \mathbb{I} \quad (3.23)$$

las cuales cumplen las relaciones de ortogonalidad:

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta(\varphi_i - \varphi_j), \quad \varphi_k \in [0, 2\pi) \quad (3.24)$$

Expandimos ahora la función- δ como una serie de funciones periódicas sobre el círculo:

$$\delta(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \quad (3.25)$$

Para un sistema con Hamiltoniano idénticamente cero la amplitud de transición está dada como

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle_0 = \prod_{n=1}^N \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \right] \exp \left\{ i \sum_{n=1}^{N+1} m_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right\} \quad (3.26)$$

Introducimos el Hamiltoniano, $H(p, \varphi)$, entonces en cada partición tenemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n t_n | \varphi_{n-1} t_{n-1} \rangle &= \langle \varphi_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{\varphi})} | \varphi_{n-1} \rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(\hat{p}_n, \hat{\varphi}_n)} \langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(\hat{p}_n, \hat{\varphi}_n)} \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i m_n (\varphi_n - \varphi_{n-1})} \\ &= \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i m_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(\hbar m_n, \varphi_n)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde se aplicó el operador en cada término $\hat{H}(\hat{p}, \hat{\varphi}) \rightarrow \hat{H}(\hat{p}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow H(\hbar m_n, \varphi_n)$.

Por lo tanto la amplitud de transición cuando el Hamiltoniano es distinto de cero obtenemos la **Integral de Trayectoria Generalizada en Coordenadas Cíclicas**

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle_0 = \prod_{n=1}^N \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \right] e^{i \sum_{n=1}^{N+1} [m_n (\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \frac{\epsilon}{\hbar} H(\hbar m_n, \varphi_n)]} \quad (3.28)$$

Nota 6. Como consecuencia de que no se distinguen los puntos $\varphi(t)$ y $\varphi(t) + 2\pi$, las integrales respecto al momento se convirtieron en sumas sobre números enteros, lo que nos representa que las funciones de onda son univalueadas en mecánica cuántica.

Es decir, la “discretización” del momento entra como “una suma de escalón” en vez de una integral de trayectoria propia.

En lo que queda de esta sección vamos a obtener una forma de cambiar estas *espantosas* sumas en integrales de trayectorias *bonitas*, para esto es necesario añadir una suma infinita que garantice la invariancia cíclica en la

variable φ .

Consideremos la *Fórmula de Poisson*:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikl} = \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \delta(k - m) \quad (3.29)$$

Proposición 6. *Podemos reescribir la relación de ortonormalidad de las funciones φ como sigue:*

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l) \quad (3.30)$$

Demostración. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle &= \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \\ &= \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right) \delta(k_n - m_n) \\ &= \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \delta(k_n - m_n) \right) \\ &= \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k_n l} \right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l)} \right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l) \end{aligned}$$

□

Lo que convierte a $\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle$ en una suma periódica de funciones- δ . Entonces aplicando una descomposición de Fourier de las funciones- δ obtenemos

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle = \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_n}{2\pi} \exp [ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + 2i\pi k_n l_n] \quad (3.31)$$

Así la integral de trayectoria con el Hamiltoniano idénticamente cero queda determinada como sigue:

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle_0 = \prod_{n=1}^N \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_n}{2\pi} \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \right] e^{i \sum_{n=1}^{N+1} [k_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + 2\pi k_n l_n]} \quad (3.32)$$

Notemos que las sumas sobre l_n pueden absorberse en las variables φ_n al extender los límites de integración: $[0, 2\pi) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Salvo que en la última suma esto no es posible³, entonces la integral de trayectoria es

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle_0 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_n}{2\pi} \right] e^{i \sum_{n=1}^{N+1} [k_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + 2\pi k_n l_n \delta_{n,N+1}]} \quad (3.33)$$

Así, la amplitud de transición con una restricción de coordenadas cíclicas (con Hamiltoniano idénticamente cero) puede verse como

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle_{0,cic} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle \varphi_f t_f + 2\pi l_n | \varphi_0 t_0 \rangle_0 \quad (3.34)$$

Donde el segundo miembro es la integral de trayectoria usual, es decir, sin restricción topológica del círculo.

Por lo tanto, cuando el Hamiltoniano no es idénticamente cero, podemos insertarlo en cada término del lado derecho de la amplitud de trayectoria de forma usual y llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle &\simeq \sum_{l=-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} [p_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + 2\pi p_n l_n \delta_{n,N+1}]} \times \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon H(p_n, \varphi_n)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Así, en el límite continuo obtenemos que tiende a la siguiente integral de

³Esto se debe a que sobra una suma sobre l_n pues hay $N + 1$ de éstas, en cambio hay N integrandos sobre φ_n .

trayectoria:

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi_0, \varphi_f + 2\pi l} \mathcal{D}\varphi(t) \int \frac{\mathcal{D}p(t)}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} dt [p\dot{\varphi} - H(p, \varphi)] \right\} \quad (3.36)$$

Nota 7. En esta nota se presentará como es posible "absorber" las sumas al extender los límites de integración de $[0, 2\pi)$ a $(-\infty, \infty)$ lo cual se usará para las integrales de trayectoria en Mecánica Cuántica Polimérica.

Antes de extender los límites de integración teníamos que la amplitud de trayectoria es

$$\langle \varphi_f t_f | \varphi_0 t_0 \rangle = \prod_{n=1}^N \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_n}{2\pi} \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} e^{i \sum_n^{N+1} [k_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + 2\pi k_n l_n]} \right] \quad (3.37)$$

Notemos que el j -ésimo término de la variable φ aparece en

$$k_{j+1}(\varphi_{j+1} - \varphi_j + 2\pi l_{j+1}) + k_j(\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_j)$$

de la suma. Por lo cual está determinado por dos multiplicandos:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_j \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \sum_{l_{j+1}=-\infty}^{\infty} e^{ik_{j+1}(\varphi_{j+1} - \varphi_j + 2\pi l_{j+1})} \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} \sum_{l_j=-\infty}^{\infty} e^{ik_j(\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_j)} \right] \quad (3.38)$$

Que se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} \sum_{l_{j+1}=-\infty}^{\infty} e^{ik_{j+1}(\varphi_{j+1} + 2\pi l_{j+1} - ik_j \varphi_{j-1})} \int_0^{2\pi} d\varphi_j \sum_{l_j=-\infty}^{\infty} e^{i\varphi_j(k_j - k_{j+1}) + 2\pi i l_j k_j} \quad (3.39)$$

Sea $\hat{\varphi}_j = \varphi_j + 2\pi l_j$, entonces los límites de integración se transforman de $[0, 2\pi)$ a $[\pi l_j 2, 2\pi(l_j + 1))$ Entonces la integral anterior queda de la siguiente

forma

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} \sum_{l_{j+1}=-\infty}^{\infty} e^{ik_{j+1}(\varphi_{j+1}+2\pi l_{j+1})-ik_j\varphi_{j-1}} \int_{2\pi l_j}^{2\pi(l_j+1)} d\hat{\varphi}_j \sum_{l_j=-\infty}^{\infty} e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})+2\pi i l_j k_{j+1}} = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} \sum_{l_{j+1}} e^{ik_{j+1}(\varphi_{j+1}+2\pi l_{j+1})-ik_j\varphi_{j-1}} \sum_{l_j} e^{2\pi i l_j k_{j+1}} \int_{2\pi l_j}^{2\pi(l_j+1)} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})} = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} e^{i(k_{j+1}\varphi_{j+1}-k_j\varphi_{j-1})} \sum_{l_{j+1}} \sum_{l_j} e^{ik_{j+1}2\pi(l_{j+1}+l_j)} \int_{2\pi l_j}^{2\pi(l_j+1)} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ahora hagamos el siguiente cambio de variable $\hat{l}_{j+1} = l_{j+1} + l_j$, entonces la ecuación anterior queda como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} e^{i(k_{j+1}\varphi_{j+1}-k_j\varphi_{j-1})} \sum_{\hat{l}_{j+1}} \sum_{l_j} e^{ik_{j+1}2\pi\hat{l}_{j+1}} \int_{2\pi l_j}^{2\pi(l_j+1)} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})} \tag{3.41}$$

Lo que nos permite separar las sumas de nuevo, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} e^{i(k_{j+1}\varphi_{j+1}-k_j\varphi_{j-1})} \sum_{\hat{l}_{j+1}} e^{ik_{j+1}2\pi\hat{l}_{j+1}} \sum_{l_j} \int_{2\pi l_j}^{2\pi(l_j+1)} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})} \tag{3.42}$$

entonces la última suma está dada por

$$\sum_{l_j} \int_{2\pi l_j}^{2\pi(l_j+1)} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})} = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})} \tag{3.43}$$

Por lo que (3.42) toma la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} e^{i(k_{j+1}\varphi_{j+1}-k_j\varphi_{j-1})} \sum_{\hat{l}_{j+1}} e^{ik_{j+1}2\pi\hat{l}_{j+1}} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\varphi}_j e^{i\hat{\varphi}_j(k_j-k_{j+1})} \tag{3.44}$$

Que redefiniendo las variables mudas $\hat{l}_{j+1} = l_{j+1}$, $\hat{\varphi}_j = \varphi_j$ y reordenando términos podemos escribir

$$\sum_{l_{j+1}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{j+1}}{2\pi} e^{ik_{j+1}(\varphi_{j+1}-\varphi_j+2\pi l_{j+1})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_j}{2\pi} e^{ik_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})} \quad (3.45)$$

Como esto es válido para cada una de las integrales de la variable φ podemos “absorber” las sumas infinitas al extender los límites de integración, salvo la última suma, por lo tanto llegamos a lo que queríamos.

3.2. Determinantes Funcionales

A modo de introducción observaremos que la regularización a través de la función- ζ de Riemann es una forma conveniente de representar determinantes funcionales. Para ello consideremos la siguiente ecuación de eigenvalores con un operador diferencial \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}\phi_n = \lambda_n\phi_n \quad (3.46)$$

donde \mathcal{M} puede ser un operador de Dirac, de Klein-Gordon, Sturm-Liouville o de fluctuación, por ejemplo. Definimos la función- ζ correspondiente:

$$\zeta(s) \equiv Tr \left(\frac{1}{\mathcal{M}^s} \right) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s} \quad (3.47)$$

Ahora bien derivando respecto a s obtenemos

$$\zeta'(s) = - \sum_n \frac{\ln(\lambda_n)}{\lambda_n^s} \quad (3.48)$$

evaluando en $s = 0$

$$\zeta'(0) = - \ln \left(\prod_n \lambda_n \right) \quad (3.49)$$

Por lo que se obtiene una definición formal del determinante del operador \mathcal{M} dada por⁴

$$\boxed{\det \mathcal{M} \equiv e^{-\zeta'(0)}} \quad (3.50)$$

⁴Para más detalles sobre este tema, por ejemplo, la convergencia, DUNNE, Gerald, *Functional Determinants in Quantum Field theory*.

La relación entre el determinante funcional de un operador y la integral de trayectoria se pone de manifiesto en la siguiente observación, donde se tiene un operador en el integrando.

Observación 11. *Recordemos la función gaussiana:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (3.51)$$

Entonces sea A_{ij} los elementos de una matriz simétrica \mathbf{A} :⁵

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n e^{-x_i A_{ij} x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_n \mathcal{J} e^{-y_i D_{ij} y_j} \quad (3.52)$$

Donde \mathcal{J} es el jacobiano de la transformación $x_i = \mathcal{O}_{ij} y_j$ con \mathcal{O} una matriz ortogonal⁶ y D_{ij} son las entradas de una matriz diagonal \mathbf{D} ⁷.

Entonces se sigue después de realizar el producto en la exponencial de (3.52)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_n e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2)} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(\mathbf{A})}} \quad (3.53)$$

Donde $\det(\mathbf{A})$ es el determinante de la matriz \mathbf{A}

3.2.1. El Formalismo de Gel'fand-Yaglom

En este apartado veremos que si no se conocen los eigenvalores del operador, aún es posible calcular el determinante funcional al encontrar alguna función, que se anule exactamente en los eigenvalores λ_n de nuestro operador, \mathcal{M}

⁵podría ser una matriz no necesariamente simétrica pero recordando que se puede ver como la suma de una parte simétrica y otra antisimétrica, ésta última parte se cancelaría en el integrando.

⁶Una matriz ortogonal es aquella cuya inversa es su transpuesta conjugada, entonces en este caso $\mathcal{J} = 1$.

⁷Toda matriz simétrica es diagonalizable $A_{ij} = M_{ik}^T D_{kl} M_{lj}$.

Teorema 8. Teorema de Gel'fand-Yaglom

Consideremos los operadores diferenciales más simples dados por

$$L_i = -\frac{d^2}{dt^2} + R_i(t)$$

en el intervalo $[0, 1]$. Dado que el determinante de estos operadores divergen, se calcula la razón entre determinantes, tales que ambos involucran operadores de las mismas características, por ejemplo, definidos en el mismo intervalo y con el mismo orden. Entonces $i = 0, 1$, donde $i = 0$ representa a un operador conocido o de referencia (generalmente el de la partícula libre) e $i = 1$ representa nuestro operador de interés. Como es costumbre las funciones $R_i(t)$ se asumen continuas y los eigenvalores serán **positivos**⁸ Entonces:

$$\frac{\det L_1}{\det L_0} = \frac{y_1(1)}{y_0(1)} \quad (3.54)$$

donde $y_i(t)$ es la única solución de:

$$L_i y_i(t) = 0$$

y que satisface las condiciones de Dirichlet: $y_i(0) = 0$, $y_i'(0) = 1$

Demostración. Esta demostración es una construcción utilizando integración por contorno en el plano complejo⁹

Ahora bien, consideremos una función $f_{i,\lambda}$, tal que:

$$f_i(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda = \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se sigue que:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln f_i(\lambda) = \frac{f_i'(\lambda)}{f_i(\lambda)}$$

la cual tiene polos exactamente en λ_n Entonces la función ζ de Riemann asociada está dada por

$$\zeta_i(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\lambda \lambda^{-2s} \frac{d}{d\lambda} \ln f_i(\lambda) \quad (3.55)$$

⁸El caso donde existan modos cero será tratado más adelante.

⁹K.Kirsten and A.J. McKane, *Functional determinants for general Sturm-Liouville problems*. Journal of Physics A. Gen. 37:4649-4670

Donde el contorno γ está escogido de tal manera que envuelva el eje-real y que tenga sentido en contra de las manecillas del reloj y el corte en la parte negativa. Ahora bien, haciendo el cambio de contorno $\gamma \rightarrow \gamma_-$ tal que ahora envuelva la parte negativa del eje-real. Entonces, cuando hay un cambio entre la parte superior e inferior del contorno de γ_- en el corte del eje negativo los integrandos obtienen un factor de fase dado por $e^{\pm i\pi s}$ respectivamente, por lo que se obtiene que la función ζ de Riemann asociada está dada por

$$\begin{aligned}\zeta_i(s) &= \frac{1}{2\pi i} \left[e^{-i\pi s} \int_{-\infty}^0 d\lambda \lambda^{-2s} \frac{d}{d\lambda} \ln f_i(\lambda) + e^{i\pi s} \int_0^{-\infty} d\lambda \lambda^{-2s} \frac{d}{d\lambda} \ln f_i(\lambda) \right] \\ &= \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^{-\infty} d\lambda \lambda^{-s} \frac{d}{d\lambda} \ln f_i(\lambda)\end{aligned}\tag{3.56}$$

Diferenciando respecto a s y evaluando en $s = 0$, obtenemos

$$-\zeta'_i(0) = -\ln f_{i,0}(-\infty) + \ln f_{i,0}(1)\tag{3.57}$$

Como en problemas físicos se pide que la contribución de $f_i(\lambda)$ se desvanezca cuando λ tiende a ∞ , y haciendo uso de la relación de la función ζ de Riemann y el determinante de un operador obtenemos así que:

$$\ln \frac{\det L_1}{\det L_2} = \ln \frac{f_{1,0}(0)}{f_{0,0}(0)}\tag{3.58}$$

□

3.2.2. Determinantes Funcionales en presencia de Modos Cero

Cuando el eigenvalor $\lambda_0 = 0$ está presente en el operador \mathcal{M} , entonces no es posible utilizar la ecuación (3.58), debido a que $f_i(0) = 0$. Hay que eliminar este polo en el integrando en el plano $-\lambda$, entonces consideremos $L = -\frac{d^2}{dt^2} + R(t)$:

$$\int_0^1 dt f_0(t)^* L f_\lambda(x) = \lambda \int_0^1 dt f_0(t) f_\lambda(t) = \lambda \langle f_0 | f_\lambda \rangle\tag{3.59}$$

Integrando por partes obtenemos que:

$$\lambda \langle f_0 | f_\lambda \rangle = [f_0^* f'_\lambda - f_0' f_\lambda^*]_0^1 + \int dt f_\lambda L f_0^* = [f_0^* f'_\lambda - f_0' f_\lambda^*]_0^1 \quad (3.60)$$

Utilizando las condiciones de frontera obtenemos:

$$f_\lambda(1) = \frac{\lambda \langle f_0 | f_\lambda \rangle}{f_0'(1)} = \lambda g_\lambda \quad (3.61)$$

Aparentemente, el cambio en el determinante $g_\lambda \rightarrow f_\lambda(1)$ solucionaría el problema, pero cuando $\lambda \rightarrow \infty$, g_λ no preserva el comportamiento de f_λ

Entonces, se propone hacer el cambio $(1-\lambda)g_\lambda$ ya que $f_\lambda(1) \sim \lambda g_\lambda$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ y es distinto de cero cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Entonces la función ζ de Riemann asociada está dada por

$$\zeta_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma d\lambda \lambda^{-s} \frac{d}{d\lambda} \ln(1-\lambda) f_\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma d\lambda \lambda^{-s} \frac{d}{d\lambda} \ln(1-\lambda) \quad (3.62)$$

Obteniendo la derivada respecto a s y haciendo $s = 0$, entonces:

$$\zeta'(0) = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln g_\lambda \quad (3.63)$$

Por lo que el determinante funcional en presencia de modos cero está dado por

$$\boxed{\frac{\det L_1}{\det L_0} = \frac{g_0}{f_0(1)}} \quad (3.64)$$

Capítulo 4

Aplicaciones de la Mecánica Cuántica Polimérica.

En este capítulo se presentan a modo de ejemplo la partícula libre polimérica, la partícula libre relativista en el caso usual y el polimérico y el oscilador armónico polimérico, el cual se divide en la primera aproximación, una segunda aproximación y, finalmente, el potencial completo utilizando el teorema de Gel'fand-Yaglom para obtener el determinante funcional. En este capítulo se utiliza sin hacer mención al método de los *instantones* y los conceptos del Capítulo 2 referentes al álgebra polimérica y al Método de Promedio de Grupo.

4.1. Partícula Libre Polimérica

Consideremos la ecuación de Schrödinger dada por

$$(\hat{P}_t + \hat{H})\Psi = 0 \quad (4.1)$$

donde $\hat{P}_t = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ y $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$. Entonces el operador de la ecuación de Schrödinger (4.1) está dado por

$$\hat{P}_t + \frac{\hat{p}_x^2}{2m} = \hat{P}_t - \frac{\hbar^2}{8m\mu^2} (\hat{V}_\mu - \hat{V}_\mu^\dagger)^2 \quad (4.2)$$

Por lo que la ecuación de Schrödinger queda de la siguiente forma¹

$$\begin{aligned}
(\hat{P}_t + \hat{H})\Psi &= -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{8m\mu^2} (V_\mu^2 - 2V_\mu V_\mu^\dagger + V_\mu^{\dagger 2}) \Psi(x, t) \\
&= -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{8m\mu^2} (\Psi(x + 2\mu, t) + \Psi(x - 2\mu, t) - 2\Psi(x, t)) = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Observamos entonces, que el primer sumando es una diferencial cuando el resto de la ecuación está dada por diferencias, que en algunos casos conduce a la ecuación de Mathieu.

Entonces, tenemos que nuestra constricción es la ecuación de Schrödinger, por lo que nuestra acción está dada por

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left[p_t \dot{t} + p_x \dot{x} - \lambda \left(p_t + \frac{p_x^2}{2m} \right) \right] \tag{4.4}$$

Donde la identidad, recordemos, está dada por

$$\mathbb{I} = \sum_x \int dt |x, t\rangle \langle x, t| \tag{4.5}$$

Utilizando el método de promedio de grupo y tomando $\hat{C} = \hat{P}_t + \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ el Kernel de Schrödinger está dado por²

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \langle x_b, t_b | e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{C}} | x_a, t_a \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int dt_n \right] \prod_{n=1}^N \langle x_{n+1}, t_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon \hat{C}_n} | x_n, t_n \rangle
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde: $\epsilon = \frac{1}{N}$, $\hat{C}_n = \hat{C}$.

¹De aquí en adelante $\hat{\cdot}$ se omitirá en los operadores mientras no haya una posible confusión.

² x_b, t_b y x_a, t_a representan las posiciones y tiempos final e inicial, respectivamente, que los representamos con subíndice N y 0 después de hacer la partición.

Recordemos que

$$V_\mu |x_n\rangle = |x - \mu\rangle \quad (4.7)$$

entonces,

$$\hat{p}_x^2 |x_n\rangle = -\frac{\hbar^2}{4\mu^2} (|x_n - 2\mu\rangle - 2|x_n\rangle + |x_n + 2\mu\rangle) \quad (4.8)$$

$$\langle x_{n+1} | x_n \rangle = \delta_{x_{n+1}, x_n} = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n)} \quad (4.9)$$

Con esto en mente procederemos a calcular un término representativo del Kernel, pero primero notemos que

$$\begin{aligned} \langle x_{n+1} | \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 | x_n \rangle &= \frac{\hbar^2}{8m\mu^2} (2\langle x_{n+1} | x_n \rangle - \langle x_{n+1} | x_n - 2\mu \rangle - \langle x_{n+1} | x_n + 2\mu \rangle) \\ &= \frac{\hbar^2}{m\mu^2} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} \left(2e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n)} - e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n - 2\mu)} \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n + 2\mu)} \right) \\ &= \frac{\hbar}{16\pi m\mu} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n)} \left(2 - e^{-\frac{i}{\hbar} 2\mu p_{x_{n+1}}} - e^{\frac{i}{\hbar} 2\mu p_{x_{n+1}}} \right) \\ &= \frac{\hbar}{16\pi m\mu} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n)} \left(4 \sin^2 \left(\frac{\mu p_{x_{n+1}}}{\hbar} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\langle x_{n+1} | \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 | x_n \rangle = \frac{\hbar}{4\pi m\mu} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n)} \sin^2 \left(\frac{\mu p_{x_{n+1}}}{\hbar} \right) \quad (4.11)$$

Utilizando el método de promedio de grupo, un término representativo del Kernel en el espacio de configuraciones está dado por

$$\begin{aligned}
\langle x_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon \frac{\hat{p}_x^2}{2m}} | x_n \rangle &= \langle x_{n+1} | 1 + \frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon \frac{\hat{p}_x^2}{2m} | x_n \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{\mu}{2\pi \hbar} \int_{-\frac{\pi \hbar}{\mu}}^{\frac{\pi \hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_n - x_{n+1})} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_{x_{n+1}}}{\hbar} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{\mu}{2\pi \hbar} \int_{-\frac{\pi \hbar}{\mu}}^{\frac{\pi \hbar}{\mu}} dp_{x_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar} p_{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n)} e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon \left(\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\mu p_{x_{n+1}}}{\hbar} \right)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Además³

$$\langle t_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon \hat{P}_t} | t_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \epsilon p_{t_n} + \frac{i}{\hbar} p_{t_{n+1}} (t_{n+1} - t_n)} \tag{4.13}$$

Entonces, el Kernel de la partícula libre polimérica es:

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi \hbar} \int_{-\frac{\hbar \pi}{\mu}}^{\frac{\hbar \pi}{\mu}} dp_n \right] \\
&\quad \prod_{n=1}^N \left[\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) - \epsilon \alpha p_{t_n} + p_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{\epsilon \alpha \hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) \right] \right\} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi \hbar} \int_{-\frac{\hbar \pi}{\mu}}^{\frac{\hbar \pi}{\mu}} dp_n \right] \\
&\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) - \epsilon \alpha p_{t_n} + p_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{\epsilon \alpha \hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

³Se obtiene al introducir adecuadamente la identidad $\int dp_{t_n} |p_{t_n}\rangle \langle p_{t_n}| = \mathbb{I}$

Notemos que el sumando de la parte temporal de la exponencial del Kernel de la partícula libre polimérica está dado por

$$\sum_{n=1}^N [p_{t_n}(t_n - t_{n-1}) - \epsilon\alpha p_{t_n}] = p_{t_N}t_N - p_{t_1}t_0 - \sum_{n=1}^{N-1} [t_n(p_{t_{n+1}} - p_{t_n})] - \epsilon\alpha \sum_{n=1}^N p_{t_n} \quad (4.15)$$

Así la parte temporal del Kernel de la partícula libre polimérica está dado por

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ -\epsilon\alpha \sum_{n=1}^N p_{t_n} - \sum_{n=1}^{N-1} t_n(p_{t_{n+1}} - p_{t_n}) + p_{t_N}t_N - p_{t_1}t_0 \right\}} = \\ & \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ -\epsilon\alpha \sum_{n=1}^N p_{t_n} + p_{t_N}t_N - p_{t_1}t_0 \right\}} \prod_{n=1}^{N-1} \delta(p_{t_{n+1}} - p_{t_n}) = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_N} e^{-\frac{i}{\hbar} [\epsilon\alpha N p_{t_N} - p_{t_N}(t_N - t_0)]} = \delta(\alpha - (t_N - t_0)) = \delta(\alpha - T) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Luego el sumando correspondiente a la parte espacial en la exponencial del Kernel de la partícula libre polimérica está dado por

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[p_n(x_n - x_{n-1}) - \frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar}{\mu} p_n \right) \right] &= p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^{N-1} [x_n(p_{n+1} - p_n)] \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \left[\frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar}{\mu} p_n \right) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Entonces, el Kernel de la partícula libre polimérica viene dado por

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_n \right] \delta(\alpha - T) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^{N-1} [x_n(p_{n+1} - p_n)] - \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar}{\mu} p_n \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nos gustaría decir análogamente al caso temporal y obtener una función *delta* para el caso espacial, pero debido a la discretización de la variable espacial x_n esto no es posible, así que se debe trabajar de otra manera.

Una vez que notamos la similitud de nuestro caso de la partícula libre polimérica con la integral de trayectoria de la partícula puntual sobre un círculo y que

$$\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i}{\hbar} x_n (p_n - p_{n+1}) \right] = \langle p_{n+1} | p_n \rangle = \delta(p_{n+1} - p_n)$$

con las condiciones periódicas sobre los momentos, entonces utilizando la fórmula de Poisson expandimos esta función *delta* en un conjunto completo de funciones periódicas como sigue:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(p_{n+1} - p_n) &= \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} x_n (p_n - p_{n+1})} \\ &= \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} [k_n (p_n - p_{n+1}) + 2\pi k_n l_n]} \\ &= 2\pi \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \delta(p_{n+1} - p_n + 2\pi l_n) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ahora expandiendo la función *delta* con una transformada de Fourier tenemos que

$$2\pi \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \delta(p_{n+1} - p_n + 2\pi l_n) = \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_n e^{\frac{i}{\hbar} [q_n (p_n - p_{n+1}) + 2\pi q_n l_n]} \quad (4.20)$$

donde q_n es una variable continua.

Como q_n es una variable muda la renombramos como $q_n = x_n$.

Así el Kernel de la partícula libre polimérica está dado por

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_n \right] \delta(\alpha - T) \times \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^{N-1} [x_n (p_{n+1} - p_n) + 2\pi x_n l_n] - \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar}{\mu} p_n \right) \right\}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Notemos que podemos absorber las sumas sobre l_n si extendemos los límites de integración de $[-\frac{\hbar}{\mu}\pi, \frac{\hbar}{\mu}\pi)$ a $(-\infty, \infty)$ en la variable de los momentos, por lo tanto el Kernel de la partícula libre polimérica viene dado por

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_N \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right] \delta(\alpha - T) \times \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^{N-1} [x_n (p_{n+1} - p_n)] - \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\hbar}{\mu} p_n\right) \right\}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_N \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right] \delta(\alpha - T) \prod_{n=1}^{N-1} \delta(p_{n+1} - p_n) \times \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\hbar}{\mu} p_n\right) \right\}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_N \delta(\alpha - T) \times \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ p_N (x_N - x_0) - \frac{\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\hbar}{\mu} p_N\right) \right\}} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_N e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ T \left[p_N \frac{x_N - x_0}{T} - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\hbar}{\mu} p_N\right) \right] \right\}}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

En la forma más general, el Kernel de la partícula libre polimérica está

dado por

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_N \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_n \right] \\
& \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ -\epsilon\alpha \sum_{n=1}^N p_{t_n} - \sum_{n=1}^{N-1} t_n (p_{t_{n+1}} - p_{t_n}) + p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 \right\}} \times \\
& \times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^{N-1} [x_n (p_{n+1} - p_n)] - \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon\alpha\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\hbar}{\mu} p_n\right) \right\}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Entonces, considerando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, se deben realizar los siguientes cambios:

$$\epsilon \sum_{n=1}^N \rightarrow d\tau \tag{4.24}$$

$$\frac{t_n - t_{n-1}}{\epsilon} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} \tag{4.25}$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \rightarrow \frac{dx}{d\tau} \tag{4.26}$$

Entonces el Kernel de la partícula libre polimérica está dada por la siguiente integral de trayectoria:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int d\alpha Dx(\tau) Dt(\tau) DP_t(\tau) DP_x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S} \tag{4.27}$$

donde:

$$\mathcal{D}x(\tau) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right], \quad \mathcal{D}t(\tau) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt_n \right]; \tag{4.28}$$

$$\mathcal{D}P_x(\tau) = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right] \quad \mathcal{D}P_t(\tau) = \prod_{n=0}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_{t_n} \right] \tag{4.29}$$

Con la acción dada por

$$\mathcal{S} = \int_0^1 d\tau \left(p_t \dot{t} + p_x \dot{x} - \alpha \left[p_t + \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \right] \right) \quad (4.30)$$

Entonces tenemos:

$$\dot{p}_t = 0 \quad (4.31)$$

$$\dot{t} = \alpha \quad (4.32)$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, \mathcal{H}\} = 0 \quad (4.33)$$

$$\dot{x} = \frac{\hbar\alpha}{2m\mu} \sin \left(\frac{2\mu p_x}{\hbar} \right) \quad (4.34)$$

Vamos a obtener la acción efectiva, para esto haremos que nuestra con-
stricción sea una constricción fuerte, i.e., $p_t + \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) = 0$

De las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\dot{t} = \alpha = \frac{dt}{d\tau} \quad (4.35)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = \alpha \frac{dx}{dt} = \alpha x' \quad (4.36)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{2\mu} \arcsin \left(\frac{2m\mu x'}{\hbar} \right) \quad (4.37)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la acción (4.30) nuestra acción efectiva
polimérica, que es la acción Hamiltoniana ya desparametrizada, está dada
por

$$\mathcal{S} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[p_x x' - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \right] \quad (4.38)$$

Ahora bien, sustituyendo p_x :

$$\mathcal{S} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\hbar}{2\mu} x' \arcsin \left(\frac{2m\mu x'}{\hbar} \right) - \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2\mu}{\hbar^2} x'^2} \right) \right] \quad (4.39)$$

La cual no depende explícitamente del tiempo t por lo que la energía se conserva:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} x' - \mathcal{L} \\
 &= \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2\mu}{\hbar^2} x'^2} \right) \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

De la segunda igualdad se obtiene que nuestra velocidad está restringida por

$$\boxed{-\frac{\hbar}{2m\mu} < x' < \frac{\hbar}{2m\mu}} \tag{4.41}$$

Despejemos x' de nuestra energía $\mathcal{H} = cte$:

$$x'^2 = \frac{2\mathcal{H}}{m} \left(1 - \frac{2m\mu^2}{\hbar^2} \mathcal{H} \right) \tag{4.42}$$

Lo que nos dice que la energía está acotada por

$$\boxed{0 < \mathcal{H} < \frac{\hbar^2}{2m\mu^2}} \tag{4.43}$$

Integrando x' respecto al tiempo y despejando el tiempo t tenemos que este es lineal dado por

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{m} \left(1 - \frac{2m\mu^2}{\hbar^2} \mathcal{H} \right)}} x + t_0 \tag{4.44}$$

4.2. Partícula Libre Relativista

En esta sección se trabajará la partícula libre relativista empezando con el caso no polimérico y seguido del polimérico.⁴

⁴En este caso no se utilizarán unidades naturales, i.e., $c \neq 1$.

4.2.1. No-Polimérico

La acción de la partícula libre relativista está dada por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}c \int_0^1 d\tau \left(\frac{1}{\lambda} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - m^2 \lambda \right) \quad (4.45)$$

Donde λ es variable.

Entonces los momentos están dados por

$$p_\mu = -\frac{c}{\lambda} \dot{x}_\mu \quad (4.46)$$

$$p_\lambda = 0 \quad (4.47)$$

Por lo que, p_λ es nuestra constricción, dando lugar al Hamiltoniano canónico:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= p_\mu \dot{x}^\mu + p_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{p_\mu p^\mu}{c} + m^2 c \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Obteniendo, así, la acción hamiltoniana dada por

$$\mathcal{S}_H = \int d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{p_\mu p^\mu}{c} + m^2 c \right) \right] \quad (4.49)$$

entonces

$$\dot{p}_\lambda = \{p_\lambda, \mathcal{H}_T\} = \left\{ p_\lambda, -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{p_\mu p^\mu}{c} + m^2 c \right) + \gamma p_\lambda \right\} \quad (4.50)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{p_\mu p^\mu}{c} + m^2 c \right) \approx 0 \quad (4.51)$$

Que es igual a cero débilmente.⁵

Proseguimos a calcular el Kernel, con la constricción obtenida de la ecua-

⁵ γp_λ representa el multiplicador de Lagrange con la constricción primaria.

ción anterior, i.e., $\hat{C} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\mu p^\mu}{c} + m^2 c \right)$, entonces

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}^f, x_0^f, \vec{x}^i, x_0^i) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{C}} | x_i \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^D x_n \prod_{n=1}^N \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{C}} | x_{n-1} \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^D x_n \prod_{n=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^D \int_{-\infty}^{\infty} d^D p_n e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[-\frac{\epsilon\lambda}{2} \left(\frac{p_{\mu n} p_n^\mu}{c} + m^2 c \right) + p_{\mu n} (x_n^\mu - x_{n-1}^\mu) \right]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{D N-1} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(p_{\mu n} - p_{\mu n+1}) \right] \times \\
&\times \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} \left[p_{\mu N} x_N^\mu - p_{\mu 1} x_0^\mu - \sum_{n=1}^N -\frac{\epsilon\lambda}{2} \left(\frac{p_{\mu n} p_n^\mu}{c} + m^2 c \right) \right]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^D \int_{-\infty}^{\infty} d^D p_N e^{-\frac{i}{\hbar} \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{c} p_{\mu N} p_N^\mu + m^2 c \right) - p_{\mu N} (x_N^\mu - x_0^\mu) \right]}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Que es una integral gaussiana.⁶

Reescribiendo en términos de $\bar{x}^\mu = x_N^\mu - x_0^\mu$, el Kernel está dado por

$$K(\vec{x}^f, x_0^f, \vec{x}^i, x_0^i) = \int d\lambda \left(\frac{c}{2\pi\hbar\lambda} \right)^{\frac{D}{2}} e^{\frac{ic}{2\hbar} \left(\frac{\bar{x}_\mu \bar{x}^\mu}{\lambda} - \lambda m^2 \right)} \tag{4.53}$$

Claramente, depende aún de λ pues no se ha escogido la norma, es decir, no se ha definido el *tiempo*.

Este kernel puede ser escrito de la siguiente forma utilizando una delta

⁶ $\epsilon = \frac{1}{N}$, N denota el número en que se particionó el intervalo.

de Dirac debida a nuestra constricción:

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}^f, x_0^f, \vec{x}^i, x_0^i) &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D \int_{-\infty}^{\infty} d^D P_N 4\pi\hbar c \delta(p_{\mu_N} p_N^\mu + m^2 c) e^{\frac{i}{\hbar} p_{\mu_N} (x_N^\mu - x_0^\mu)} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{D-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^{D-1} P_N \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}_N (\bar{x}_N - \bar{x}_0)}}{2\sqrt{\bar{p}^2 + m^2 c}} \left[e^{\frac{i}{\hbar} (x_N^0 - x_0^0) \sqrt{\bar{p}^2 + m^2 c}} + e^{-\frac{i}{\hbar} (x_N^0 - x_0^0) \sqrt{\bar{p}^2 + m^2 c}} \right]
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Esta última igualdad es la forma más usual de escribir el Kernel de la partícula libre relativista del caso no polimérico.⁷

4.2.2. Polimérico

La constricción viene siendo la misma al caso no polimérico, lo distinto como se ha discutido, es la definición del operador de momento así como la topología viene siendo la discreta en el espacio de coordenadas.⁸

$$\begin{aligned}
K(x_f^1, x_f^0 | x_i^1, x_i^0) &= \int d\lambda \langle x_f^1, x_f^0 | e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{C}} | x_i^1, x_i^0 \rangle \\
&= \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda dx_n^0 \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n^1 = -\infty}^{\infty} \right] \prod_{n=1}^N \langle x_n^1, x_n^0 | e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{C}} | x_n^1, x_n^0 \rangle \\
&= \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda dx_n^0 \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n^0 \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n^1 = -\infty}^{\infty} \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\mu\hbar}{\mu}}^{\frac{\mu\hbar}{\mu}} dp_n^1 \right] \\
&\quad e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[-\frac{\epsilon\lambda}{2} \left(\frac{1}{c} p_{0n} p_n^0 + \frac{\hbar^2}{c\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_n^1}{\hbar} \right) + m^2 c \right) + p_{0n} (x_n^0 - x_{n-1}^0) + p_{1n} (x_n^1 - x_{n-1}^1) \right]} \\
&= \int d\lambda D x^0(\tau) D x^1(\tau) D p^0(\tau) D p^1(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

donde:

⁷ D es la dimensión del espacio.

⁸Se considera el caso más simple de dimensión 1+1

$$\mathcal{D}x^1(\tau) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n^1 \right], \quad \mathcal{D}x^0(\tau) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n^0 \right]; \quad (4.56)$$

$$\mathcal{D}p^1(\tau) = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N^1 \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n^1 \right] \quad \mathcal{D}p^0(\tau) = \prod_{n=0}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_n^0 \right] \quad (4.57)$$

Donde la acción está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_0^1 d\tau \left[p_0 \dot{x}^0 + p_1 \dot{x}^1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{p_0 p^0}{2} + \frac{\hbar^2}{c\mu^2} \sin^2 \frac{\mu p^1}{\hbar} + m^2 c \right) \right] \\ &= \int_0^1 d\tau \left[\frac{c}{2\lambda} \dot{x}_0 \dot{x}^0 + \frac{\hbar}{2\mu} \dot{x}_1 \arcsin \left(\frac{2\mu c}{\lambda \hbar} \dot{x}^1 \right) - \frac{\lambda \hbar^2}{4c\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4c^2 \mu^2}{\lambda^2 \hbar^2} \dot{x}_1 \dot{x}^1} \right) - \frac{1}{2} \lambda m^2 c \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Obteniendo la variación respecto al parámetro λ , escogiendo la norma dada por $\dot{t} = 1$, entonces

$$\dot{x}^2 \leq c^2 + \frac{2c^4 m^2 \mu^2}{\hbar} - 2\sqrt{\frac{c^6 m^2 \mu^2}{\hbar^2} + \frac{c^8 m^4 \mu^4}{\hbar^4}} \quad (4.59)$$

Observamos que a las partículas tipo luz, i.e., $m = 0$ la retícula no les afecta y su velocidad corresponde a c .

4.3. Oscilador Armónico Polimérico

Consideremos el Hamiltoniano total de un oscilador armónico parametrizado

$$\mathcal{H} = p_t + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \quad (4.60)$$

que en el caso polimérico es

$$\mathcal{H} = p_t + \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_x \right) + \frac{kx^2}{2} \quad (4.61)$$

El cual es la constricción de primera clase, entonces la acción parametrizada está dada por⁹

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left\{ p_t \dot{t} + p_x \dot{x} - \lambda \left(p_t + \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) + \frac{kx^2}{2} \right) \right\} \quad (4.62)$$

Sacando las variaciones de la acción respecto a las variables canónicas (t, p_t, p_x, x) , se obtienen las siguientes igualdades

$$\dot{t} = \lambda \quad (4.63)$$

$$\dot{p}_t = 0 \quad (4.64)$$

$$\dot{x} = \frac{\lambda \hbar}{2m\mu} \sin \left(\frac{2\mu p_x}{\hbar} \right) \quad (4.65)$$

$$x = -\frac{\dot{p}_x}{\lambda k} \quad (4.66)$$

Haciendo uso de la primera ecuación de las 4 anteriores se obtiene la acción desparametrizada, dada por¹⁰

$$\mathcal{S} = \int dt \left[p_x \dot{x} - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) - \frac{kx^2}{2} \right] \quad (4.67)$$

donde ahora los *puntos* representan la derivada respecto a t .

Sacando la variación respecto a p_x se obtiene:

$$\dot{x} = \frac{\hbar}{2m\mu} \sin \left(\frac{2\mu p_x}{\hbar} \right) \quad (4.68)$$

Vamos a obtener las ecuaciones de movimiento, para ello, utilizaremos las condiciones de frontera que $p_x(t_i) = 0$, con $i = 1, 2$, que representan los límites de integración. Luego aplicando regla de la cadena en $p_x \dot{x} = \frac{d}{dt}(p_x x) - \dot{p}_x x$, entonces la acción está dada por

$$\mathcal{S} = \int dt \left[-\dot{p}_x x - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) - \frac{kx^2}{2} \right] \quad (4.69)$$

⁹ λ es un multiplicador de Lagrange.

¹⁰Si recordamos que el potencial de un oscilador armónico simple está dado por $V(x) = \frac{k}{2}x^2$, entonces hemos llegado a que la acción polimérica y no-polimérica son “equivalentes” salvo por el término cinético.

Ahora sacando la variación respecto a x , encontramos que

$$x = -\frac{\dot{p}_x}{k} \quad (4.70)$$

Por lo que la acción efectiva, en términos del momento, está dada por

$$\mathcal{S} = \int dt \left[\frac{\dot{p}_x^2}{k} - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \right] \quad (4.71)$$

Notemos que nuestro potencial está dado por

$$V(p_x) = \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \quad (4.72)$$

entonces las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\ddot{p}_x = -\frac{k\hbar}{2m\mu} \sin \left(\frac{2\mu}{\hbar} p_x \right) \quad (4.73)$$

Para hacer el análisis dinámico del oscilador, haremos dos aproximaciones (a primer y segundo orden) y finalmente consideraremos el potencial total.

4.3.1. Aproximación a primer orden $V(p_x) \simeq \frac{p_x^2}{2m}$

Expandiendo en serie de potencias el potencial del oscilador armónico queda como:

$$\begin{aligned} V(p_x) &= \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^{n-1} \frac{p_x^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\mu}{\hbar} \right)^{2(n-1)} \\ &\simeq \frac{1}{m} \left[\frac{p_x^2}{2} - \frac{4}{4!} \frac{\mu^2}{\hbar^2} p_x^4 + \frac{16}{6!} \frac{\mu^4}{\hbar^4} p_x^6 + \mathcal{O} \left(\frac{\mu^6}{\hbar^6} p_x^8 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Entonces el potencial a primera aproximación está dado por

$$V(p_x) = \frac{1}{m} \frac{p_x^2}{2} \quad (4.75)$$

Por lo tanto, la acción a primer orden es

$$\mathcal{S} = \int dt \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2k} - \frac{p_x^2}{2m} \right] = \int id\tau \left[-\frac{\dot{p}_x^2}{2k} - \frac{p_x^2}{2m} \right] = -i \int d\tau \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2k} + \frac{p_x^2}{2m} \right] = -i\mathcal{S}_E \quad (4.76)$$

Donde la tercer igualdad se debe al haber aplicado una *rotación de Wick* al espacio euclideo, utilizando el cambio de variable $i\tau = t$, entonces la amplitud de transición (o Kernel), en general, se ve afectada de la siguiente manera:

$$K(x_f, t_f; x_0, t_0) = \langle x_f, t_f | e^{\frac{-i}{\hbar}\mathcal{S}} | x_0, t_0 \rangle = \langle x_f, t_f | e^{-\frac{1}{\hbar}\mathcal{S}_E} | x_0, t_0 \rangle \quad (4.77)$$

Entonces la acción, después de la *rotación de Wick*, se transforma en

$$\mathcal{S}_E = \frac{1}{k} \int d\tau \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2} + \omega^2 \frac{p_x^2}{2} \right] \quad (4.78)$$

Donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Entonces la ecuación de movimiento está dada por

$$\ddot{p}_x = \omega^2 p_x \quad (4.79)$$

Para obtener la solución de esta ecuación, expandimos alrededor de una solución clásica, entonces $p_x = p_{x_{cl}} + p_{x_q}$ ¹¹. Ahora, si escogemos las condiciones de frontera $p_{x_f} = 0 = p_{x_0}$, entonces la solución clásica es la trivial (ya que satisface ecuaciones de Euler-Lagrange), pero la solución cuántica no necesariamente las satisface y por lo tanto no podemos decir que sea la trivial.

Ahora calcularemos el determinante del operador correspondiente al oscilador armónico, dado por

$$\mathcal{W} = -\partial_\tau^2 + V'' = -\partial_\tau^2 + \omega^2 \quad (4.80)$$

Sean p_n las eigenfunciones, con la condición de $p_{n_f} = 0 = p_{n_0}$ y ϵ_n los eigenvalores de:

$$(-\partial_\tau^2 + \omega^2)p_n = \epsilon_n p_n \quad (4.81)$$

Cuya solución general está dada por

$$p_n = A \sin \left(\sqrt{\epsilon_n - \omega^2} (t + \alpha) \right) \quad (4.82)$$

¹¹ q denota la parte cuántica

Y como debe cumplir las condiciones de frontera, entonces

$$\alpha = \tau_0 \quad (4.83)$$

$$\epsilon_n = \frac{n^2\pi^2}{(\tau_f - \tau_0)^2} \quad (4.84)$$

Entonces el determinante del operador está dado por¹²

$$\det \mathcal{W} = c \prod_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = c \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{T_E^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 T_E^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (4.85)$$

Para calcular el Kernel, se toma:

$$\begin{aligned} K(p_f = 0, t_f; p_0 = 0, t_0) &= \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{W}}} \\ &= c \prod_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{T_E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 T_E^2}{n^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Entonces, si $\omega = 0$, implica que el primer producto de productos debe ser igual al determinante de la partícula libre, y el segundo producto de productos está dado por $\left(\frac{\sin \omega T}{i^2 \omega T}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Por lo tanto el Kernel del oscilador armónico a primera aproximación está dado por

$$K(p_f = 0, t_f; p_0 = 0, t_0) = \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi\hbar \sin(\omega T)}} \quad (4.87)$$

4.3.2. Aproximación a segundo orden $V(p_x) = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{p_x^4}{6m}$

Sustituyendo en la acción efectiva la aproximación a 2do. orden tenemos que

$$\mathcal{S} \int dt \left[\frac{\dot{p}_x}{2k} - \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{p_x^4}{6m} \right] \quad (4.88)$$

Nuevamente, aplicamos una *rotación de Wick* ($-i\tau = t$) para euclideanizar la acción, entonces

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{k} \int d\tau \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} p_x^2 - \frac{\omega^2 \mu^2}{\hbar^2} p_x^4 \right] \quad (4.89)$$

¹² $T_E = \tau_f - \tau_0$ y $T = i(t_f - t_0)$

Donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$
 Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{2} p_x^2 - \frac{\omega^2 \mu^2}{\hbar^2} p_x^4 &= -\frac{\omega^2 \mu^2}{6\hbar^2} \left(p_x^4 - \frac{3\hbar^2}{\mu^2} p_x^2 \right) \\ &= -\frac{\omega^2 \mu^2}{6\hbar^2} \left(p_x^2 - \frac{\sqrt{3}\hbar}{2\mu} \right)^2 + \frac{\omega^2}{8} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Haciendo $\lambda = -\frac{\omega^2 \mu^2}{6\hbar^2}$ y $a^2 = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2\mu}$, entonces el potencial está dado por

$$V(p_x) = \lambda(p_x^2 - a^2)^2 - \lambda a^4 \quad (4.91)$$

Entonces la acción queda como

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{k} \int d\tau \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2m} + \lambda(p_x^2 - a^2)^2 + \frac{\omega^2}{8} \right] \quad (4.92)$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange y la derivada del potencial respecto al tiempo τ se obtiene que

$$V(p_x) = \frac{\dot{p}_x^2}{2} - c \quad (4.93)$$

Donde c es una constante que se determinará más adelante. Entonces al sustituir este resultado en la acción ésta toma la siguiente forma:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{k} \int d\tau [\dot{p}_x^2 - c] \quad (4.94)$$

Se observa que cuando $|\tau| \rightarrow \infty$ para que esté bien definida la acción $\dot{p}_x = \pm\sqrt{c}$

Entonces $\frac{d^2 p_x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} V(p_x) = 0$, lo que nos indica que busquemos que las partículas tengan momento cero en lo máximo del potencial invertido, es decir, cuando $p_x = \pm a$ por lo tanto $c = -\frac{\omega^2}{8}$, por lo tanto

$$\frac{1}{2} \dot{p}_x^2 = V(p_x) + c = \lambda(a^2 - p_x^2)^2 \quad (4.95)$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones $p(\infty) = \mp a$, se obtiene que

$$p_x = \pm a \tanh(a\sqrt{2\lambda}\Delta\tau) \quad (4.96)$$

Sustituyendo los valores de λ, a y $\Delta\tau = -iT = -i(t_f - t_0)$

$$p_x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3}\hbar}{2\mu}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}\mu}{6\hbar}} \omega T \right) \quad (4.97)$$

4.3.3. Potencial completo: $V(p_x) = \frac{\hbar^2}{2\mu^2 m} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right)$

Recordemos que la acción efectiva está dada por

$$\mathcal{S}(p_x, \dot{p}_x) = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2k} - \frac{\hbar^2}{2\mu^2 m} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \right] \quad (4.98)$$

Entonces, para proseguir, euclideanizamos la acción:

$$\mathcal{S}_E(p_x, \dot{p}_x) = \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{\dot{p}_x^2}{2k} + \frac{\hbar^2}{2\mu^2 m} \sin^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \right] \quad (4.99)$$

Minimizando la energía haciendo la variación en la acción ($\delta\mathcal{S} = 0$), las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x} = 0 \quad (4.100)$$

$$\frac{1}{m} \frac{d^2 p_x}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial p_x} = 0 \quad (4.101)$$

Multiplicamos todo por $\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \dot{p}_x \ddot{p}_x - \dot{p}_x V'(p_x) &= \frac{1}{2k} \frac{d\dot{p}_x^2}{dt} - \frac{dp_x}{dt} \frac{\partial V}{\partial p_x} \\ &= \frac{1}{2k} \frac{d\dot{p}_x^2}{dt} - \frac{dV}{dt} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2k} \dot{p}_x^2 - V(p_x) \right) = 0 \quad (4.103)$$

Lo que nos dice que

$$\frac{1}{2k}\dot{p}_x^2 - V(p_x) = cte \quad (4.104)$$

Por comodidad, seleccionamos esta constante igual a cero, entonces

$$\dot{p}_x = \sqrt{2kV(p_x)} \quad (4.105)$$

Sustituyendo el potencial obtenemos:

$$\dot{p}_x = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\hbar}{\mu}} \sin\left(\frac{\mu p_x}{\hbar}\right) \quad (4.106)$$

Haciendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y resolviendo esta ecuación diferencial, encontramos que

$$\boxed{p_x = \frac{2\hbar}{\mu} \arctan(\exp(\omega t))} \quad (4.107)$$

Que es la solución clásica del momento ($p_{x_{cl}}$).

Ahora bien, queremos calcular el determinante del operador $\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2V}{dp_x^2}\Big|_{p_{x_{cl}}}\right)$ alrededor de la solución clásica.

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dp_x^2}\Big|_{p_{x_{cl}}} &= \frac{1}{m} \cos\left(\frac{2\mu}{\hbar} p_{x_{cl}}\right) \\ &= \frac{1}{m} \cos\left(\frac{2\mu}{\hbar} \frac{2\hbar}{\mu} \arctan(\exp(\omega t))\right) \\ &= \frac{1}{m} \cos(4 \arctan(\exp(\omega t))) \\ &= \frac{1}{m} (1 - 2\operatorname{sech}^2(\omega t)) \end{aligned} \quad (4.108)$$

Por lo que obtenemos un operador de *Pöschl-Teller*.

En general, los operadores de *Pöschl-Teller* están dados por

$$\hat{W} = -\frac{d^2}{dt^2} + n^2 - j(j+1)\operatorname{sech}^2(t) \quad (4.109)$$

que tienen j estados ligados discretos con energías $E_l = n^2 - l^2$ y $l = 1, \dots, j$, así como un espectro continuo de estados con densidad

$$\rho(k) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dk} \delta(k) = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{l}{l^2 + k^2},$$

y $\delta(k)$ representa el corrimiento de fase inducido por un potencial dispersor.

En nuestro caso, $n = 1$, $j = 1$, por lo que el determinante de nuestro operador

$$\hat{W} = -\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2V}{dp_x^2} \Big|_{p_{x_{cl}}} \quad (4.110)$$

tiene un modo cero.

La correspondiente eigenfunción para el *eigenvalor* 0 satisface

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2V}{dp_x^2} \Big|_{p_{x_{cl}}} \right) \Psi(t) = 0 \quad (4.111)$$

Donde es fácil verificar que una solución está dada por $\Psi = \dot{p}_{x_{cl}}$, que es equivalente a demostrar:

$$-\ddot{p}_{x_{cl}} + \frac{d^2V}{dp_x^2} \Big|_{p_{x_{cl}}} \dot{p}_{x_{cl}} = 0 \quad (4.112)$$

Luego haciendo uso que $\dot{p}_{x_{cl}} = \sqrt{2V(p_{x_{cl}})}$, entonces

$$-\ddot{p}_{x_{cl}} = - \left(\sqrt{2V(p_{x_{cl}})} \right)'' \Big|_{p_{x_{cl}}} \quad (4.113)$$

Por lo tanto

$$-\ddot{p}_{x_{cl}} = \frac{V'(p_{x_{cl}})}{\sqrt{2V(p_{x_{cl}})}} \dot{p}_{x_{cl}} = V'(p_{x_{cl}}) \quad (4.114)$$

Este modo nulo ocurre debido a la invariancia traslacional de la solución clásica.

El problema de esta solución es que no cumple con las condiciones de frontera impuestas por el teorema de Gelfand, y para calcular el determinante del operador es necesario recorrer el modo cero agregando un factor de $e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$ al determinante sin presencia de este modo.

Haciendo uso del programa *Mathematica 9.0*, introduciendo la ecuación homogénea del potencial de *Pöschl-Teller*, obtenemos que la solución $\Psi_0(t)$ que satisface las condiciones de frontera, $\Psi_0(0) = 0$ y $\Psi'_0(0) = 1$, está dada por

$$\Psi_0(t) = \frac{L_P \left[\frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, \tanh[t] \right] L_Q \left[\frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, 0 \right] - L_P \left[\frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, 0 \right] L_Q \left[\frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, \tanh[t] \right]}{(-2 + \sqrt{7} - i) (L_P \left[1 + \frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, 0 \right] L_Q \left[\frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, 0 \right] - L_P \left[\frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, 0 \right] L_Q \left[1 + \frac{i}{2}(i + \sqrt{7}), i, 0 \right])} \quad (4.115)$$

donde $L_P(l, m, x)$ representa a los polinomios asociados de Legendre de primera clase y $L_Q(l, m, x)$ representa a la segunda solución de la ecuación diferencial asociada de Legendre.

Resolviendo ahora numéricamente este potencial con las condiciones de frontera dadas por el Teorema de Gel'fand-Yaglom se pudo graficar la solución:

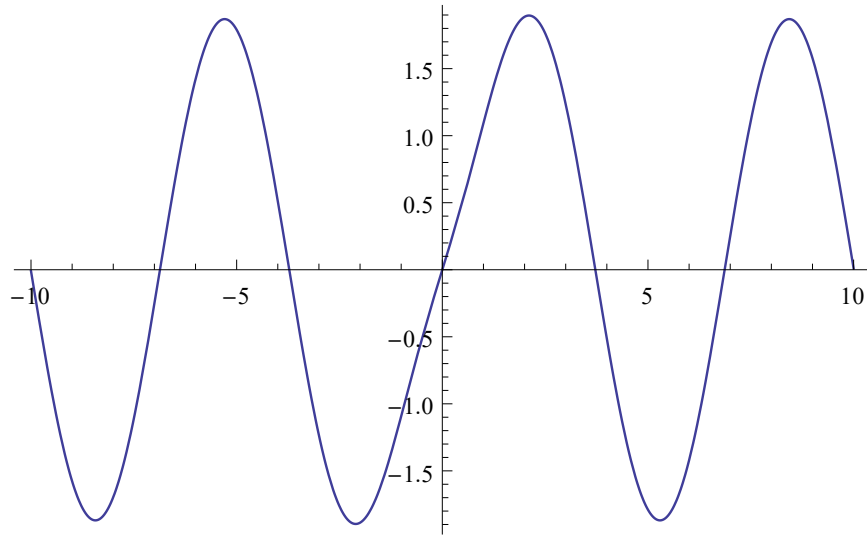


Figura 4.1:
Solución a la ecuación diferencial de Pöschl-Teller utilizando el teorema de Gel'fand-Yaglom

Código:

Para resolver la ecuación diferencial en general se utilizó el siguiente código:

```
ClearAll
a = 1;
s = DSolve[{f''[x] - 2a/Cosh[x]^2 f[x] == -af[x], f[0] == 0, f'[0] == 1}, f[x], x]
Para obtener la gráfica de la solución se implementó el código siguiente:
v = NDSolve[{f''[x] - 2a/Cosh[x]^2 f[x] == -af[x], f[0] == 0, f'[0] == 1}, f[x], x, -10, 10]
obteniendo
```

```
{f[x] -> InterpolatingFunction[{{-10., 10.}}, <>][x]}
```

y aplicando el comando *Plot*:

```
Plot[f[x]/.v, {x, -10, 10}]
```

se obtuvo la gráfica.

Nota 8. *Para obtener el determinante completo falta trabajar con el modo cero, pero no se hará así, sino se utilizará el método de los instantones del siguiente capítulo para resolver el problema del cálculo del determinante del oscilador armónico polimérico.*

Capítulo 5

Instantones

En este capítulo se presenta el método de los *instantones*, haciendo una breve introducción de dónde surgieron y su importancia en la Teoría de Campos, se presta especial atención a las integrales funcionales en un espacio Euclideo en vez del usual (Minkowskiano) y se resuelve el oscilador armónico usual.

5.1. Introducción.

En la teoría cuántica de campos ha habido muchos avances importantes, más aún, se han solucionado problemas que se creían imposibles; así como se ha obtenido un camino intuitivo hacia una teoría cuántica de campos final para las interacciones fuertes: *la cromodinámica cuántica*.

Todo esto ha sido posible a una familia de métodos computacionales llamados *instantones*. Estos métodos están basados en aproximaciones semiclásicas en el contexto de la teoría cuántica de campos.

Para entender a qué se refiere esto, consideremos la teoría de un campo escalar en un espacio de Minkowski de 4 dimensiones, cuya dinámica está descrita por la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g^2 \phi^4 \quad (5.1)$$

En la Física clásica, una constante de acoplamiento g , es un parámetro irrelevante ya que si uno hace el cambio de variable

$$\phi' = g\phi, \quad (5.2)$$

la densidad Lagrangiana queda como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \frac{1}{2} m^2 \phi'^2 - \phi'^4 \right) \quad (5.3)$$

Por lo que g no aparece en las ecuaciones de campo, así que si uno puede resolver la teoría para alguna g positiva, podrá resolverla para cualquier g positiva, es decir, g es sólo un parámetro dimensional que puede reescalarsse a 1.

En cambio, en física cuántica el parámetro g es relevante, ya que en la física cuántica existe la dependencia de una nueva constante: \hbar , y el objeto importante de estudio (por ejemplo, en la la integral de trayectoria de Feynman) es

$$\frac{\mathcal{L}}{\hbar} = \frac{1}{g^2 \hbar} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \dots \right). \quad (5.4)$$

Así, el parámetro (adimensional relevante es, $\frac{1}{g^2 \hbar}$, y para aproximaciones semiclásicas (aproximaciones de \hbar pequeñas) son equivalentes a aproximaciones de acoplamiento débil (aproximaciones con g pequeña).¹

Se llegó a creer que la teoría de perturbaciones resolvía todos los problemas en teoría de campos, pero el confinamiento de objetos de colores y la formación del espectro de hadrones son dos ejemplos en la Cromodinámica Cuántica que no son explicados con éxito bajo esta teoría puesto que presentan una analogía a la penetración de barrera de un potencial en la mecánica de partículas.

Ejemplo:

Consideremos una partícula de masa unitaria moviéndose en un potencial unidimensional, cuyo Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x, g) \quad (5.5)$$

dond $V(x, g) = \frac{1}{g^2} F(gx)$ y F es una función cuya serie de Taylor empieza con términos cuadráticos.

Entonces si consideramos el fenómeno de transmisión en una barrera de potencial donde la fórmula de amplitud de transmisión está dada por el

¹Constante de Acoplamiento: es un número adimensional que determina la fuerza de una interacción, ya sea de la parte del potencial o la cinética. Un ejemplo, la constante de estructura fina $\alpha \sim \frac{1}{137}$.

método WKB por

$$|T(E)| = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_i}^{x_f} dx \left[\sqrt{2(V-E)} \right] \right\} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (5.6)$$

donde x_i y x_f son los puntos de retorno clásicos con energía E . Esta transmisión no se observará en la teoría de perturbaciones pues (5.6) se desvanece más rápido que cualquier potencia de \hbar .

5.2. Integrales Funcionales y Tiempo Imaginario.

El método que se presenta a continuación se puede generalizar directamente a teoría de campos.

Consideremos el caso en una dimensión de una partícula sin espín y masa unitaria moviéndose bajo un potencial $V(x)$, así, su Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x) \quad (5.7)$$

y el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad (5.8)$$

Supongamos que al tiempo inicial, t_i , la partícula se encuentra en x_i y al tiempo final, t_f , se encuentra en x_f ; así, como Feynman encontró, la amplitud de dicho proceso es la suma de todas las trayectorias posibles que unen a los puntos de mundo (t_i, x_i) y (t_f, x_f) pesados por $e^{i\mathcal{S}}$, donde \mathcal{S} es la acción dada por

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(x, \dot{x}), \quad (5.9)$$

por lo que la amplitud de transición es

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_0} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[x(t)]} \quad (5.10)$$

donde $t_0 = t_f - t_i > 0$, $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_0}$ es el operador de evolución usual del sistema, el factor N es una constante de normalización y $\mathcal{D}x$ representa que hay que integrar sobre todas las funciones $x(t)$ tales que cumplan con las condiciones de frontera $x(t_i) = x_i$ y $x(t_f) = x_f$.

Consideremos ahora un conjunto completo de vectores propios ortonormales de la energía, $\{|n\rangle\}$, tales que $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, entonces la amplitud de transición está dada por

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_0} | x_i \rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t_0} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle, \quad (5.11)$$

es decir, la amplitud de transición es una suma de exponenciales que van oscilando. Pero como estamos interesados en el estado base (toda teoría cuántica y de campos está interesada en el estado base), entonces es conveniente cambiar estas exponenciales oscilatorias en unas exponenciales decrecientes. Para esto consideremos el cambio de variable $t \rightarrow -i\tau$. Así, en el límite cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$ el único término que sobrevive en la suma es $\Psi_0(x)$, por lo que la amplitud en el límite es $e^{-E_0\tau_0} \Psi_0(x_f) \Psi_0^*(x_i)$.

A este cambio de variable en el tiempo se le conoce como *rotación de Wick* y se le relaciona con el espacio Euclideo.

Entonces, en la formulación Euclidea la acción toma la forma

$$i\mathcal{S}[x(t)] \rightarrow -\mathcal{S}_E = - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (5.12)$$

Notemos que $S_E \geq 0$, entonces hemos obtenido una suma de exponenciales decrecientes y la amplitud de transición en el espacio Euclideo está dada por

$$\langle x_f | e^{\frac{1}{\hbar}H\tau_0} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{\hbar}S_E} \quad (5.13)$$

Consideremos $x_{cl}(\tau)$ una función tal que cumpla con las condiciones de frontera. Si $\{x_n(\tau)\}$ es un conjunto completo de funciones ortonormales, tales que $x_n(\tau_i) = 0 = x_n(\tau_f) \quad \forall n$, entonces cualquier función arbitraria $x(\tau)$ tal que cumpla con las condiciones de frontera se puede expresar como

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau) \quad (5.14)$$

Entonces, se define la medida $\mathcal{D}x$ de la siguiente forma²:

$$\mathcal{D}x = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (5.15)$$

Debido a la forma del lado derecho de (5.13), en la aproximación semiclásica³ (\hbar pequeño) la mayor parte de la integral está “acumulada” en las regiones cercanas al extremo (*mínimo*) de la acción \mathcal{S}_E . Entonces, la trayectoria de mínima acción, que denotaremos por $x_{cl}(\tau)$ es conocida como la solución clásica o la trayectoria extrema o punto estacionario.

Consideremos, por simplicidad, que sólo hay un punto extremo $x_{cl}(\tau)$, de no ser así, la integral sería la suma de las contribuciones de todos los puntos estacionarios. Entonces para que sea punto extremo debe cumplir que⁴

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \mathcal{S}[x_{cl}(\tau) + \delta x(\tau)] - \mathcal{S}[x_{cl}(\tau)] \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[-\frac{d^2 x_{cl}}{d\tau^2} + V'(x_{cl}) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $V'(x_{cl}) = \frac{dV}{dx}|_{x_{cl}}$ y

$$\frac{d^2 x_{cl}}{d\tau^2} = V'(x_{cl}) \quad (5.17)$$

es la ecuación de movimiento clásica para una partícula sujeta a un potencial $-V(x)$. Por lo que la energía está dada por

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x), \quad (5.18)$$

que es una constante de movimiento y puede ser usada para obtener cualitativamente la dinámica de las soluciones de la ecuación de movimiento clásica.

En la aproximación semiclásica, notamos que la exponencial de (5.13) está determinada por un *rayo* de trayectorias cercanas a la trayectoria clásica, es

²Esa medida difiere con la sugerida por Feynman, por lo que es necesario la constante de normalización, N .

³Matemáticamente conocido como *método de punto silla* o *método de fase estacionaria*.

⁴Como se seguirá trabajando en el espacio Euclideo el subíndice se omitirá de aquí en adelante.

decir, trayectorias cuya acción es cercana a S_0 , entonces, es necesario tomar en cuenta la desviación a segundo orden, es decir,

$$S[x_{cl}(\tau) + \delta x(\tau)] = S_0 + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left\{ \delta x \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \delta x \right\} \quad (5.19)$$

Consideremos, que el conjunto $\{x_n(\tau)\}$ es un conjunto completo de eigenfunciones de la ecuación

$$-\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + V''(x_{cl})x_n = \epsilon_n x_n, \quad (5.20)$$

entonces en la aproximación semiclásica, la amplitud de transición se convierte en un producto de gaussianas, es decir,

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-\frac{1}{\hbar} H t_0} | x_i \rangle &= N e^{-\frac{1}{\hbar} S_0} \prod_n \epsilon_n^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\ &= N e^{-\frac{1}{\hbar} S_0} [\det(-\partial_\tau^2 + V''(x_{cl}))]^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde se ha asumido que todos los eigenvalores, ϵ_n , son positivos.

5.2.1. Oscilador Armónico.

A modo de ejemplo consideremos el caso de un oscilador armónico, cuyo potencial está dado por

$$V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad (5.22)$$

con la ecuación de movimiento del sistema

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0 \quad (5.23)$$

Para proseguir con el problema debemos hacer una expansión al rededor de la solución clásica con acción finita. Por simplicidad consideraremos las condiciones de frontera $x_i = 0 = x_f$, así, la solución clásica es

$$x_{cl} \equiv 0 \quad (5.24)$$

Así, para esta solución $S_E \equiv 0$. Por lo tanto de la ecuación (5.21)

$$\langle 0 | e^{\frac{1}{\hbar} H \tau_0} | 0 \rangle = N [\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (5.25)$$

Entonces, el operador de onda, \mathcal{W} que determina la ecuación de Schrödinger es

$$\mathcal{W} \equiv -\partial_\tau^2 + \omega^2 \quad (5.26)$$

Ahora hay que obtener las eigenfunciones de nuestro operador de onda, por lo que la ecuación de Schrödinger queda como sigue:

$$\ddot{x}_n + (\epsilon_n - \omega^2)x_n = 0 \quad (5.27)$$

donde ϵ_n son los eigenvalores.

La solución a (5.27) que satisface $x_n(\tau_i) = 0$ es

$$x_n(\tau) = A \sin \left(\sqrt{\epsilon_n - \omega^2}(\tau - \tau_i) \right) \quad (5.28)$$

y como debe cumplir también que $x_n(\tau_f) = 0$, entonces obtenemos que los eigenvalores están dados por

$$\boxed{\epsilon_n = \frac{n^2\pi^2}{(\tau_f - \tau_i)^2}} + \omega^2 \quad (5.29)$$

Recordemos que $\tau_0 = \tau_f - \tau_i$, entonces factorizando $\left(\frac{n^2\pi^2}{\tau_0^2}\right)$ obtenemos que el determinante funcional está dado por

$$N \prod_n \epsilon_n^{-\frac{1}{2}} = N \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{\tau_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\tau_0^2\omega^2}{n^2\pi^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.30)$$

Para simplificar esta ecuación se puede hacer uso de que el primer producto debe coincidir con la contribución de la partícula libre, es decir,⁵

$$N \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{\tau_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\tau_0}} \quad (5.31)$$

y para el otro término usar la siguiente identidad:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{y^2}{n^2} \right) \right) = \frac{\sinh \pi y}{\pi y} \quad (5.32)$$

Pero utilizaremos mejor el teorema de Gelfand:⁶

⁵Notemos que aquí es donde radica la importancia del factor de normalización, N , el cual no es necesario calcular.

⁶La demostración no se escribirá.

Teorema 9 (Teorema de Gelfand). *Consideremos la siguiente ecuación diferencial:*

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{F}(t)\right) \psi(t) = \lambda \psi(t) \quad (5.33)$$

Con condiciones iniciales, $\psi(t_i) = 0$ y $\dot{\psi}(t_i) = 1$. Sean $\mathcal{F}^{(1)}(t)$ y $\mathcal{F}^{(2)}(t)$ dos funciones acotadas de t y sean, además, $\psi_{\lambda_1}(t)^{(1)}$ y $\psi_{\lambda_2}(t)^{(2)}$ soluciones a los problemas respectivos, entonces⁷

$$\frac{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{F}^{(1)}(t) - \lambda_1\right]}{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{F}^{(2)}(t) - \lambda_2\right]} = \frac{\psi_{\lambda_1}^{(1)}(t_f)}{\psi_{\lambda_2}^{(2)}(t_f)} \quad (5.34)$$

donde t_f denota el borde superior, entonces, tomando un caso particular, $\lambda = 0$ se tiene que

$$\frac{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{F}^{(1)}(t)\right]}{\psi_0^{(1)}(t_f)} = \frac{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{F}^{(2)}(t)\right]}{\psi_0^{(2)}(t_f)} \quad (5.35)$$

Para el oscilador armónico, tenemos la ecuación diferencial

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right) \psi_0(t) = 0 \quad (5.36)$$

cuya solución que satisface las condiciones iniciales $\psi_0(t_i) = 0$ y $\dot{\psi}_0(t_i) = 1$ es

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - t_i)) \quad (5.37)$$

Entonces aplicando el resultado del Teorema de Gelfand obtenemos que el determinante está dado por

$$\det\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) = \frac{c}{\omega} \sin(\omega(t_f - t_i)) \quad (5.38)$$

Y en general sabemos que la amplitud de transición es

$$\langle 0 | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_0} | 0 \rangle = K(0, t_f; 0, t_i) = \frac{k}{\sqrt{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \mathcal{F}(t)\right]}} \quad (5.39)$$

⁷ t representa el tiempo real, es decir, se trabaja en el espacio de Minkowski.

donde k es una constante, tal que cuando $\mathcal{F} \rightarrow 0$, se obtenga la amplitud de transición de la partícula libre.

Entonces en el caso del oscilador armónico, la amplitud de transición es

$$K_{OA}(0, t_f; 0, t_i) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega(t_f - t_i))}} \quad (5.40)$$

ya que cuando $\omega \rightarrow 0$, la amplitud del oscilador armónico debe ser igual a la de la partícula libre.

Obtención de la Energía Base

Notemos que el teorema de Gelfand sirve para el espacio de Minkowski, es decir, hemos obtenido $\langle 0|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_0}|0\rangle$, que si uno expande en una base de eigenkets de la energía, obtendríamos las exponenciales oscilatorias, entonces es necesario realizar la *rotación de Wick* ($t \rightarrow -i\tau$) y sacar el límite cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$.

Sea $\tau_0 = \tau_f - \tau_i$, entonces al realizar la rotación de Wick obtenemos que la amplitud de transición en el espacio Euclideo está dada por

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{-\frac{1}{\hbar}H\tau_0}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0\hbar}} \left(\frac{\sinh \omega}{\omega\tau_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{-\frac{1}{2}} (2 \sinh \omega\tau_0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} (e^{\omega\tau_0} - e^{-\omega\tau_0})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} (1 - e^{-2\omega\tau_0})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-2\omega\tau_0} + \dots \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Entonces cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$ notamos que la mayor contribución dada por la energía del estado base es

$$E_0 = \frac{\omega\hbar}{2} \quad (5.42)$$

y el estado base es

$$\Psi_0(t) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.43)$$

que concuerdan con los resultados ya conocidos del oscilador armónico.

Nota 9. Si hubiéramos obtenido el determinante utilizando las ecuaciones (5.31) y (5.32) no hubiera sido necesario realizar la rotación de Wick pues ya había sido hecha previamente, pero el resultado sigue siendo el mismo.

Más aún, este proceso se puede generalizar:

Proposición 7. Sea $x_{cl} \equiv 0$, entonces cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$ la amplitud de transición está dada por

$$\langle 0 | e^{-\frac{1}{\hbar} H \tau_0} | 0 \rangle = \left(\frac{\sqrt{V''(x_{cl})}}{\hbar \pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\sqrt{V''(x_{cl})}}{2} \tau_0}, \quad (5.44)$$

la energía base está dada por

$$E_0 = \frac{\sqrt{V''(0)}}{2} \hbar [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (5.45)$$

y la probabilidad de que la partícula esté en el origen está dada por

$$|\langle x_{cl} = 0 | n = 0 \rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{V''(0)}}{\hbar \pi} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (5.46)$$

La demostración de esta proposición puede ser obtenida al seguir los pasos del oscilador armónico, sustituyendo $\omega \rightarrow V''(0)$.

Capítulo 6

Cálculo del Determinante del Oscilador Armónico Polimérico.

En este capítulo vamos a obtener la amplitud de transición del oscilador armónico polimérico en el espacio de momentos como una integral de trayectoria detallando la mayoría de los pasos, así como resolveremos ésta para el caso particular $l = 0$.

6.1. Obtención de la Acción (\mathcal{S}) en espacio de momentos (p).

Sabemos que el Hamiltoniano de un oscilador armónico es

$$\mathcal{H} \equiv \frac{p^2}{2m} + k \frac{x^2}{2} \quad (6.1)$$

Entonces, la amplitud de transición o el Kernel del oscilador armónico está dado por

$$K(p_f, t_f; p_0, t_0) = \langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle = \langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_0)\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle \quad (6.2)$$

donde $p(t_f) = p_f, p(t_0) = p_0$ están fijos, más aún, representan el mismo punto, es decir, tienen una restricción topológica periódica y $\hat{\mathcal{H}}$ es el operador Hamiltoniano del oscilador armónico.

Vamos a generar una partición de $N + 1$ términos de la siguiente forma:
 Sea $\epsilon = \frac{t_f - t_0}{N+1}$, entonces:

$$\langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_0)\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle = \langle p_f | \prod_{n=1}^{N+1} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle \quad (6.3)$$

Recordemos que

$$\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n | p_n \rangle \langle p_n | = \mathbb{I} \quad (6.4)$$

Así, introducimos N “unos” en la amplitud de transición, entonces:

$$\begin{aligned} \langle p_f | \prod_{n=1}^{N+1} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle &= \langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} \times \dots \times e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle \\ &= \langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | \mathbb{I} \times \dots \times | \mathbb{I} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle \\ &= \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_N \rangle \langle p_N | \times \dots \times | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle \\ &= \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \langle p_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | p_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde $p_{N+1} \equiv p_f$. Luego, en Mecánica Cuántica Polimérica tenemos que

$$\sum_{x_n = -\infty}^{\infty} | x_n \rangle \langle x_n | = \mathbb{I} \quad (6.6)$$

Así, podemos introducir por cada braket una matriz identidad de la ecuación anterior, entonces la amplitud de transición queda como:

$$\langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_0)\hat{\mathcal{H}}} | p_0 \rangle = \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\sum_{x_n = -\infty}^{\infty} \right] \langle p_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathcal{H}}} | x_n \rangle \langle x_n | p_{n-1} \rangle \quad (6.7)$$

Escojamos un término representante para trabajar

$$\langle p_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{\mathcal{H}}} | x_n \rangle,$$

además recordemos que

$$\hat{p}^2 | x_n \rangle = \frac{\hbar^2}{4\mu^2} (2|x_n\rangle - 2|x_n - 2\mu\rangle - |x_n + 2\mu\rangle) \quad (6.8)$$

$$\hat{x} | x_n \rangle = x_n | x_n \rangle \quad (6.9)$$

$$\langle x_n | p_n \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} x_n p_n} \quad (6.10)$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle p_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{\mathcal{H}}} | x_n \rangle &= \langle p_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m} + k \frac{\hat{x}^2}{2}} | x_n \rangle \\ &= \langle p_n | 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + k \frac{\hat{x}^2}{2} \right] | x_n \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \langle p_n | x_n \rangle - \frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{1}{2m} \langle p_n | \hat{p}^2 | x_n \rangle + \frac{k}{2} \langle p_n | \hat{x}^2 | x_n \rangle \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \langle p_n | x_n \rangle - \frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{1}{2m} \langle p_n | \hat{p}^2 | x_n \rangle + k \frac{x_n^2}{2} \langle p_n | x_n \rangle \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ahora el término de $\langle p_n | \hat{p}^2 | x_n \rangle$ se trabajará a continuación:

$$\begin{aligned} \langle p_n | \hat{p}^2 | x_n \rangle &= \frac{\hbar^2}{4\mu^2} (2\langle p_n | x_n \rangle - 2\langle p_n | x_n - 2\mu \rangle - \langle p_n | x_n + 2\mu \rangle) \\ &= \frac{\hbar^2}{4\mu^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_n x_n} (2 - e^{-\frac{i}{\hbar} 2\mu p_n} - e^{\frac{i}{\hbar} 2\mu p_n}) \\ &= \frac{\hbar^2}{4\mu^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_n x_n} \left[4 \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) \langle p_n | x_n \rangle \end{aligned} \quad (6.12)$$

Por lo que nuestro término significativo está dado por

$$\begin{aligned} \langle p_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{\mathcal{H}}} | x_n \rangle &= \langle p_n | x_n \rangle \left[1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \left(\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) + k \frac{x_n^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \\ &= \langle p_n | x_n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) + k \frac{x_n^2}{2} \right]} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Así, la amplitud de transición toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle &= \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} x_n (p_n - p_{n-1})} \times \\ &\times e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar} p_n\right) + k \frac{x_n^2}{2} \right]} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Que a su vez puede ser escrita como sigue:

$$\langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle = \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \langle p_n | p_{n-1} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar} p_n\right) + k \frac{x_n^2}{2} \right]} \quad (6.15)$$

Observación 12. En esta observación expandiremos $\delta(p_n - p_{n-1})$ en una serie completa de funciones periódicas trabajando de manera similar al caso de la integral de trayectoria con restricción topológica de un círculo.¹

Sea $u_n \equiv \frac{\mu}{\hbar} p_n + \pi$ una variable adimensional asociada al momento que tiene la misma restricción topológica periódica y $u_n \in [0, 2\pi)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle p_n | p_{n-1} \rangle &= 2\pi \frac{\hbar}{\mu} \delta(p - p_{n-1}) \\ &= 2\pi \frac{\hbar}{\mu} \delta\left(\frac{\hbar}{\mu}(u_n - u_{n-1})\right) \\ &= 2\pi \delta(u_n - u_{n-1}) \\ &= \langle u_n | u_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (6.16)$$

Expandimos ahora la función δ para u_n en un conjunto completo de funciones periódicas:

$$\delta(u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} e^{im_n(u_n - u_{n-1})} \quad (6.17)$$

y usando la fórmula de Poisson:

$$\delta(u_n - u_{n-1}) = \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \delta(u_n - u_{n-1} + 2\pi l_n) \quad (6.18)$$

¹Más detalles Capítulo 3.

Por lo tanto en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned}
\langle p_n | p_{n-1} \rangle &= 2\pi \delta(u_n - u_{n-1}) \\
&= 2\pi \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \delta(u_n - u_{n-1} + 2\pi l_n) \\
&= 2\pi \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\mu}{\hbar} \left[p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n \right]\right) \\
&= 2\pi \frac{\hbar}{\mu} \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \delta\left(p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n\right)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Ahora, escribamos la función δ como una transformada de Fourier

$$\langle p_n | p_{n-1} \rangle = \frac{\hbar}{\mu} \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_n e^{i\varphi_n (p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n)} \tag{6.20}$$

Haciendo $\varphi \equiv \frac{x_n}{\hbar}$ en la observación anterior, entonces la amplitud de transición queda dada por

$$\begin{aligned}
\langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle &= \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\mu} \right] e^{i\frac{\hbar}{\mu} \sum_{n=1}^{N+1} x_n (p_n - p_{n-1})} \times \\
&\quad \times e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar} p_n\right) + k \frac{x_n^2}{2} \right]}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Integraremos ahora sobre x_n , que ya es una variable continua (la discretización del espacio se mantiene en las sumas sobre l_n). Para esto la reescribiremos como una integral gaussiana (o de Fresnel).

Sea $\rho \equiv p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n$, entonces

$$\begin{aligned}
x_n \rho - k\epsilon \frac{x_n^2}{2} &= -\frac{k\epsilon}{2} \left[x_n^2 - \frac{2}{k\epsilon} x_n \rho + \frac{\rho^2}{k^2 \epsilon} \right] + \frac{\rho^2}{2k\epsilon} \\
&= -\frac{k\epsilon}{2} \left(x_n - \frac{\rho}{k\epsilon} \right)^2 + \frac{\rho^2}{2k\epsilon}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\mu} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(x_n \rho - k\epsilon \frac{x_n^2}{2} \right) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{2\pi\mu} \exp \left[-\frac{ik\epsilon}{2\hbar} \left(x_n - \frac{\rho}{k\epsilon} \right)^2 + \frac{i\rho^2}{2\hbar k\epsilon} \right] \\
&= \exp \left\{ \frac{i\rho^2}{2\hbar k\epsilon} \right\} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{ik\epsilon\mu^2}} \\
&= \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{ik\epsilon\mu^2}} \exp \left\{ \frac{i \left(p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n \right)^2}{2\hbar k\epsilon} \right\}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Introduciendo este resultado en la amplitud de transición obtenemos que ésta está dada por

$$\begin{aligned}
\langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle &= \left(\frac{2\pi\hbar}{ik\epsilon\mu^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar}{\mu}\pi}^{\frac{\hbar}{\mu}\pi} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \right] e^{\frac{i}{2\hbar k\epsilon} \sum_{n=1}^{N+1} \left(p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n \right)^2} \times \\
&\quad \times e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) \right]}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Notemos que podemos “*absorber*” N sumas de l_n en las integrales de momento al extender los límites de integración de $[-\frac{\hbar}{\mu}\pi, \frac{\hbar}{\mu}\pi]$ a $(-\infty, \infty)$. Salvo que en la última suma esto no es posible, así llegamos a que

$$\begin{aligned}
\langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle &= \left(\frac{2\pi\hbar}{ik\epsilon\mu^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} \sum_{l_{N+1}=-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\left(p_n - p_{n-1} + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n \delta_{n,N+1} \right)^2}{2k\epsilon^2}} \times \\
&\quad \times e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_n \right) \right]}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Sea $\tilde{p}_n \equiv p_n + 2\pi \frac{\hbar}{\mu} l_n \delta_{n,N+1}$, entonces el Hamiltoniano, $\mathcal{H}(p_n) \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{p}_n)$, queda invariante debido a la periodicidad de la función seno.

Tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, que implica $\epsilon \rightarrow 0$, entonces haciendo los siguientes cambios

$$\epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \rightarrow \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (6.25)$$

$$\frac{\tilde{p}_n - \tilde{p}_{n-1}}{\epsilon} \rightarrow \dot{\tilde{p}} \quad (6.26)$$

la amplitud de transición del Oscilador Armónico Polimérico queda dada por la siguiente integral de trayectoria²:

$$\langle p_f, t_f | p_0, t_0 \rangle = \mathcal{N} \sum_{l_{N+1}=-\infty}^{\infty} \int \mathcal{D}p(t) e^{i \int_{t_0}^{t_f} dt \left\{ \frac{\dot{p}^2}{2k} - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p\right) \right\}} \quad (6.27)$$

Así, la acción del oscilador armónico polimérico está dada por

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_f} dt \left\{ \frac{\dot{p}^2}{2k} - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p\right) \right\} \quad (6.28)$$

6.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange y la Solución Clásica (p_{cl})

$$\mathcal{S} = \int dt \left[-\dot{p}x - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p\right) - k \frac{x^2}{2} \right] \quad (6.29)$$

A partir de la acción

$$\mathcal{S} = \int dt \left[\frac{\dot{p}^2}{2k} - \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p\right) \right] \quad (6.30)$$

pasamos al plano Euclideo, es decir, realizamos una rotación de Wick ($t \rightarrow i\tau$, $dt \rightarrow id\tau$).

Por lo que en nuestras nuevas coordenadas $\dot{p}^2 \rightarrow p'^2$.

Finalmente, hacemos nuestra acción euclidea $\mathcal{S}_E = -i\mathcal{S}$, obteniendo:

²Se hizo un abuso de notación quitando las tildes de la expresión.

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \int d\tau \left[\frac{p'^2}{2k} + \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p \right) \right]} \quad (6.31)$$

Así nuestro Lagrangiano euclideanizado está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{p'^2}{2k} + \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p \right) \quad (6.32)$$

Entonces las ecuaciones de Euler Lagrange están dadas por

$$p'' - \frac{k\hbar}{2m\mu} \sin \left(\frac{2\mu}{\hbar} p \right) = 0 \quad (6.33)$$

Para obtener la solución clásica (p_{cl}) es necesario resolver esta ecuación, así, primero multiplicamos por p' (con un potencial en general), quedando

$$p''p' - p' \frac{\partial V(p)}{\partial p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p'^2}{2} \right) - \frac{dV(p)}{dt} = 0$$

Sí y sólo sí³

$$p' = \sqrt{2V(p)} = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\hbar}{\mu}} \sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p \right) \quad (6.34)$$

donde $V(p) = \frac{k\hbar^2}{2\mu^2 m} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p \right)$.

Recordemos que la frecuencia del oscilador está dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, por lo que la ecuación anterior en forma integral está dada por

$$\frac{\mu}{\hbar} \int_{p_c}^{p_{cl}} dp \frac{1}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p \right)} = \omega \int_{\tau_c}^{\tau} d\tau \quad (6.35)$$

con $p_c = \frac{\hbar}{\mu} \pi$.

Cuya solución es

$$\boxed{p_{cl} = \frac{2\hbar}{\mu} \arctan[\exp(\omega(\tau - \tau_c))]} \quad (6.36)$$

³Escogemos por simplicidad la constante de integración igual a cero.

Nota 10. Utilizando la ecuación (6.34) se obtiene que el potencial dependiente del momento clásico está dado por:

$$V(p_{cl}) = \frac{k\hbar^2}{2m\mu^2} \sin^2(2 \arctan[\exp(\omega(\tau - \tau_c))]) \quad (6.37)$$

Usando las identidades

$$\sin(2 \arctan(x)) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (6.38)$$

$$\frac{2e^x}{e^{2x} + 1} = \operatorname{sech}(x) \quad (6.39)$$

el potencial clásico es

$$V(p_{cl}) = \frac{k\hbar^2}{2m\mu^2} \operatorname{sech}^2[\omega(\tau - \tau_c)] \quad (6.40)$$

Nuevamente, utilizando la ecuación (6.34), la acción clásica euclideanizada (\mathcal{S}_0), está dada por:

$$\mathcal{S}_0 = \int \frac{d\tau}{k} 2V(p_{cl}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\hbar^2}{m\mu^2} \operatorname{sech}^2(\omega(\tau - \tau_c)) \quad (6.41)$$

Resolviendo esta integral

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \frac{\hbar^2}{\mu^2 m \omega} \tanh(\omega(\tau - \tau_c))|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\hbar^2}{m\mu^2 \omega}} \quad (6.42)$$

6.3. Cálculo de la Amplitud de Transición del Oscilador Armónico Polimérico.

En esta sección, vamos a obtener la solución tipo instantón para un caso particular, es decir, cuando $l_{N+1} = 0$, que es el caso donde las condiciones de frontera son realmente periódicas, pues los demás casos se ven afectados por una fase.

Así, una vez obtenida la solución clásica

$$p_{cl} = \frac{2\hbar}{\mu} \arctan[\exp(\omega(\tau - \tau_c))] \quad (6.43)$$

proseguimos al cálculo de la amplitud de transición de $p = p_0$ a $p = p_f$ dada por⁴

$$\langle p_f | e^{-\frac{\tau_0}{\hbar} \hat{H}} | p_0 \rangle = N \det(-\partial_\tau^2 + V''(p_{cl}))^{-\frac{1}{2}} e^{-S_0} \quad (6.44)$$

Para calcular este determinante utilizaremos como factor de normalización el determinante obtenido para el oscilador armónico clásico (no-polimérico), entonces tenemos que

$$N \det(-\partial_\tau + V''(p_{cl}))^{-\frac{1}{2}} = N \det(-\partial_\tau + \omega_0^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\det(-\partial_\tau + V''(p_{cl}))}{\det(-\partial_\tau + \omega_0^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.45)$$

Como ya hemos calculado el determinante del oscilador armónico, busquemos la razón del segundo factor. Lo que nos lleva a resolver el siguiente problema de eigenvalores:

$$(-\partial_\tau^2 + V''(p_{cl})) x_n(\tau) = \epsilon_n x_n(\tau) \quad (6.46)$$

donde

$$V''(p_{cl}) = \frac{k}{m} (1 - 2\text{sech}^2(\omega(\tau - \tau_c))) \quad (6.47)$$

Por lo que la ecuación de eigenvalores está dada por

$$\boxed{-\frac{d^2 x_n(\tau)}{d\tau^2} + \frac{k}{m} [1 - 2\text{sech}^2(\omega(\tau - \tau_c))] x_n(\tau) = \epsilon_n x_n(\tau)} \quad (6.48)$$

Debido a la forma de este potencial, se espera obtener un espectro continuo y otro discreto.

6.3.1. Solución General a la Ecuación de Schrödinger.

Recordemos que la frecuencia de un oscilador está dada por la raíz cuadrada de $\omega^2 = \frac{k}{m}$, además para simplificar la ecuación (6.48) hagamos los siguientes cambios de variables:

⁴ $V''(p_{cl})$ corresponde a la segunda derivada respecto al momento.

$$u = \omega(\tau - \tau_c) \quad (6.49)$$

$$\xi = \tanh(u) \quad (6.50)$$

$$1 - \xi^2 = \frac{1}{\cosh^2(u)} \quad (6.51)$$

$$\dot{\xi} = \omega(1 - \xi^2) \quad (6.52)$$

$$\partial_\tau = \omega(1 - \xi^2)\partial_\xi \quad (6.53)$$

Entonces la ecuación de Schrödinger está dada por:

$$\partial_\xi(1 - \xi^2)\partial_\xi(1 - \xi^2)x_n + \left[2 - \frac{\omega^2 - \epsilon_n}{\omega^2(1 - \xi^2)}\right]x_n = 0 \quad (6.54)$$

Sea

$$a = 2 \quad (6.55)$$

$$b = \frac{\omega^2 - \epsilon_n}{\omega^2} \quad (6.56)$$

La ecuación de Schrödinger en términos de ξ queda como:

$$\partial_\xi(1 - \xi^2)\partial_\xi(1 - \xi^2)x_n + \left[a + \frac{b}{1 - \xi^2}\right]x_n = 0 \quad (6.57)$$

Esta ecuación se puede resolver explícitamente en forma de una función hipergeométrica de la siguiente manera:

Sea c una constante a determinar y consideramos que la solución está dada por:⁵

$$\boxed{x = (1 - \xi)^c \zeta} \quad (6.58)$$

Sustituyendo en nuestra ecuación de eigenvalores se obtiene la siguiente ecuación:

$$(1 - \xi^2)\partial_\xi^2 \zeta - \xi(4c + 2)(\partial_\xi)\zeta + \left[\frac{b + 4c^2}{1 - \xi^2} - 4c^2 - 2c + a\right]\zeta = 0 \quad (6.59)$$

⁵Dejaremos de escribir el subíndice n por practicidad.

Luego haciendo de nuevo un cambio de variable:

$$z = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (6.60)$$

Entonces:

$$1 - z = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (6.61)$$

$$1 - \xi^2 = 4z(1 - z) \quad (6.62)$$

Con los valores asintóticos correspondientes:

$$\tau \rightarrow \infty \Leftrightarrow \xi \rightarrow 1 \Leftrightarrow z \rightarrow 0 \quad (6.63)$$

$$\tau \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \xi \rightarrow -1 \Leftrightarrow z \rightarrow 1 \quad (6.64)$$

Entonces nuestra ecuación en términos de z queda de la siguiente forma:

$$z(1 - z)\partial_z^2 x + [2c + 1 - (4c + 2z)]\partial_z x + \left[\frac{b + 4c^2}{4z(1 - z)} - 4c^2 - 2c + a \right] x = 0 \quad (6.65)$$

Como c aún no está determinada, la escogemos de tal forma que satisfaga:

$$b + 4c^2 = 0 \quad (6.66)$$

De esta forma la ecuación queda transformada en una ecuación hipergeométrica de la siguiente forma:

$$z(1 - z)\partial_z^2 \zeta + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\partial_z \zeta - \alpha\beta\zeta = 0 \quad (6.67)$$

Donde:

$$\gamma = 2c + 1\alpha + \beta = 4c + 1\alpha\beta = 4c^2 + 2c - a \quad (6.68)$$

Sustituyendo el valor de $a = 2$, entonces los parámetros α y β (que son intercambiables) están dados por:

$$\alpha = 2c - 1 \quad (6.69)$$

$$\beta = 2c + 2 \quad (6.70)$$

La solución a la ecuación (6.67) es la función hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ cuya expansión cerca de $z = 0$ es:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta z}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (6.71)$$

6.3.2. Espectro Continuo.

Para $\epsilon \geq \omega^2$, si no se imponen condiciones asintóticas, el espectro es continuo, el cual se puede parametrizar por el momento real positivo definido de la siguiente manera:

$$p \equiv \sqrt{\epsilon - \omega^2} \quad (6.72)$$

y definimos la siguiente cantidad

$$k \equiv \frac{p}{\omega} \quad (6.73)$$

Como no hay barrera para $\epsilon > \omega^2$, esperamos que la partícula no sea reflejada mientras viaja de $\tau = -\infty$ a $\tau = \infty$. Es decir, la dinámica de dispersión está contenida en el conocimiento del cambio de fase δ_p definido por:⁶

$$x_p(\tau \rightarrow \infty) = e^{ip\tau} \quad (6.74)$$

$$x_p(\tau \rightarrow -\infty) = e^{ip\tau + i\delta_p} \quad (6.75)$$

Como se verá más adelante, para obtener la contribución al determinante de la parte del espectro continuo de energías, sólo es necesario conocer este cambio de fase (δ_p).

Ahora bien, para $\epsilon > \omega^2$ se tiene que $b = \frac{\epsilon - \omega^2}{\omega^2} = -4c^2 = \frac{p^2}{\omega^2} = k^2$, por lo tanto, $c^2 = -\frac{k^2}{4}$, para que la solución tienda asintóticamente a $e^{ip\tau}$ cuando $\tau \rightarrow \infty$, debemos escoger $c = -i\frac{k}{2}$

Así, la solución asintótica está dada por:

$$x = (1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad (6.76)$$

De hecho, cerca de $\tau \rightarrow \infty$ y usando que $\omega\tau k = p\tau$, se tiene que:

$$(1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} = \left(\frac{1}{\cosh^2(\omega\tau)} \right)^{-i\frac{k}{2}} = (\cosh^2(\omega\tau))^{i\frac{k}{2}} \simeq (4e^{-2\omega\tau})^{-i\frac{k}{2}} = 2^{-ik} e^{ip\tau} \quad (6.77)$$

Para encontrar el cambio de fase, debemos continuar esta función analíticamente a una válida al rededor de $z = 1$, i.e., cuando $\tau \rightarrow -\infty$. Entonces

⁶Consideraremos que el tiempo del centro del instantón $\tau_c = 0$.

$$(1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} \simeq (4e^{2\omega\tau})^{-i\frac{k}{2}} = 2^{-ik} e^{-ip\tau} \quad (6.78)$$

Lo que nos representa sólo la onda reflejada, pero por otra parte la función hipergeométrica debe ser reescrita como:⁷

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = F_1(1 - z) + F_2(1 - z) \quad (6.79)$$

Donde:

$$F_1(1 - z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z) \quad (6.80)$$

$$F_2(1 - z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - z) \quad (6.81)$$

Luego, sustituyendo el valor de c en α , β y γ , estos quedan como:

$$\alpha = -ik - 1 \quad (6.82)$$

$$\beta = -ik + 2 \quad (6.83)$$

$$\gamma = -ik + 1 \quad (6.84)$$

Entonces, $F_1(1 - z)$ se hace cero pues la parte del denominador ($\Gamma(\gamma - \beta) = \Gamma(-1)$) diverge. Lo que muestra que efectivamente no hay onda reflejada.

Por lo que la solución asintótica está dada por:

$$\begin{aligned} (1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} F_2(1 - z) &= \frac{\Gamma(-ik + 1)\Gamma(-ik)}{\Gamma(-ik - 1)\Gamma(ik + 2)} (1 - z)^{ik} (1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} (1 + \mathcal{O}(1 - z)) \\ &= \frac{k - i}{k + i} (1 - z)^{ik} (1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} (1 + \mathcal{O}(1 - z)) \\ &= \frac{k - i}{k + i} 2^{-2ik} (1 - \xi^2)^{-i\frac{k}{2}} (1 + \mathcal{O}(1 - z)) \\ &\simeq \frac{k - i}{k + i} 2^{-ik} e^{ip\tau} \end{aligned} \quad (6.85)$$

⁷Para obtener esta identidad hay que usar la forma integral de la función trigonométrica.

Comparando con (6.75) y (6.78), obtenemos que el cambio de fase está dado por:

$$\boxed{e^{i\delta_p} = \frac{k - i}{k + i}} \quad (6.86)$$

Discretización del Espectro Continuo.

Para obtener la contribución al determinante, es necesario regularizar el espectro continuo. La forma más sencilla es poner el sistema en una caja en el intervalo $-\frac{\tau_0}{2} < \tau < \frac{\tau_0}{2}$ e imponer condiciones de frontera, las cuales por simplicidad escogemos como: $x(-\frac{\tau_0}{2}) = 0 = x(\frac{\tau_0}{2})$

Debido a esta condición de frontera habrá una onda reflejada (la cual desaparece cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$) y se debe considerar la solución general.

Dado que $x_p(\tau)$ y $x_p(-\tau)$ son soluciones independientes, la solución general es una combinación lineal de ambas, así:

$$x = Ax_p(\tau) + Bx_p(-\tau) \quad (6.87)$$

Aplicando las condiciones de frontera, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Ax_p(\tau_0/2) + Bx_p(-\tau_0/2) = 0 \quad (6.88)$$

$$Ax_p(-\tau_0/2) + Bx_p(\tau_0/2) = 0 \quad (6.89)$$

El cual tendrá solución no trivial cuando $A = \pm B$.
Por lo que encontramos que:

$$\frac{x_p(\frac{\tau_0}{2})}{x_p(-\frac{\tau_0}{2})} = \pm 1 \quad (6.90)$$

Utilizando la solución asintótica en el lado izquierdo, entonces, se tiene la siguiente ecuación:

$$e^{ip\tau_0 - i\delta_p} = \pm 1 \quad (6.91)$$

Cuyas soluciones están dadas por:

$$\boxed{\tilde{p}_n = \frac{\pi n + \delta_p}{\tau_0}} \quad (6.92)$$

Con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Contribución a la Razón del Determinante.

Vamos a calcular la contribución de estos modos a la razón del determinante, para ello primero recordemos que el espectro del oscilador armónico (no polimérico) es $p_n = \frac{\pi n}{\tau}$

Claramente en el límite cuando $\tau \rightarrow \infty$, la contribución de un número finito de eigenvalores del oscilador armónico polimérico con $n \sim \mathcal{O}(1)$ se cancela con la contribución del oscilador armónico pues ambos son ω^2 . Por lo tanto, la razón a obtener puede ser tomada como:⁸

$$R = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 + \tilde{p}_n^2}{\omega^2 + p_n^2} \quad (6.93)$$

Cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$, la diferencia $\Delta\tilde{p}_n = \tilde{p}_n - p_n = \frac{\delta_p}{\tau_0} \rightarrow 0$.⁹

Entonces podemos expandir el logaritmo en potencias de $\Delta\tilde{p}_n$ a primer orden la razón R .

$$R = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\omega^2 + \tilde{p}_n^2}{\omega^2 + p_n^2} \right) \simeq \exp \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2p_n \Delta\tilde{p}_n}{\omega^2 + p_n^2} \right) \quad (6.94)$$

Al mismo tiempo el intervalo $\frac{\pi}{\tau_0} \rightarrow 0$, entonces podemos convertir la suma en una integral notando que $\Delta\tilde{p}_n = \frac{\delta_p}{\tau_0} = \frac{\pi \delta_p}{\pi \tau_0} = \frac{\delta_p}{\pi} (p_{n+1} - p_n) = \frac{\delta_p}{\pi} \delta p_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} R &\simeq \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \delta_p \frac{2p}{\omega^2 + p^2} dp \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \delta_p \frac{d}{dp} \ln \left(\frac{\omega^2 + p^2}{\omega^2} \right) dp \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \delta_p \frac{d}{dp} \ln \left(1 + \frac{p^2}{\omega^2} \right) dp \right) \\ &= \exp \left(\frac{-1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \left[\frac{d\delta_k}{dk} \ln (1 + k^2) \right] \right) \end{aligned} \quad (6.95)$$

⁸Recordemos que $p = \sqrt{\epsilon - \omega^2}$, así $\epsilon = \omega^2 - p^2$.

⁹Por lo tanto, $\tilde{p}_n^2 \simeq p_n^2 + 2p_n \Delta p_n$ a primer orden.

Para obtener la última expresión se utilizó integración por partes. Notemos que de la expresión de $e^{i\delta_p} = \frac{k-i}{k+i}$ se obtiene que:¹⁰

$$\frac{d}{dk} \delta_k = \frac{-2}{k^2 + 1} \quad (6.96)$$

Por lo que la razón está dada por:

$$R \simeq \exp \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\ln(1+k^2)}{k^2+1} \right) \quad (6.97)$$

Entonces, utilizando la fórmula

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln(1+x^2)}{a^2x^2+1} = \frac{\pi}{a} \ln \left(1 + \frac{1}{a} \right)$$

Obtenemos que la contribución a la razón del determinante del espectro continuo está dada por:

$$\boxed{R = e^{2\ln(2)} = 4} \quad (6.98)$$

6.3.3. Espectro Discreto.

Consideremos ahora la parte discreta del espectro en el caso $\omega^2 - \epsilon_n > 0$. Entonces, como $b^2 + 4c^2 = 0$ tenemos que $c^2 = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 - \epsilon_n}{\omega^2}$. Si definimos $k \equiv \sqrt{\frac{\omega^2 - \epsilon_n}{\omega^2}}$, entonces $c = \frac{k}{2}$.

Así, la solución a la ecuación de Schrödinger que es finita alrededor de $z = 0$ (i.e. $\tau \rightarrow \infty$) es:

$$x = (1 - \xi^2)^{\frac{k}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad (6.99)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta z}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (6.100)$$

¹⁰ $\frac{d}{dp} \delta_p = \frac{dk}{dp} \frac{d}{dk} \delta_p = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dk} \delta_k$

con

$$\alpha = k - 1 \quad (6.101)$$

$$\beta = k + 2 \quad (6.102)$$

$$\gamma = k + 1 \quad (6.103)$$

Para que esta solución sea finita en $z = 1$ y dado que $\beta, \gamma, k > 0$ y $\alpha = k - 1 > -1$, entonces la serie debe ser finita y esto ocurre sí y solo sí

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Esto nos dice que sólo hay un nivel de energía discreto (estado ligado).

De la definición de k obtenemos que este estado ligado corresponde al estado de energía cero (i.e., $\epsilon_0 = 0$)

Así, utilizando la forma truncada de la serie hipergeométrica, vemos que la solución correspondiente es:

$$x \simeq \frac{1}{\cosh(\omega(\tau - \tau_c))} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{-\omega(\tau - \tau_c)} \quad (6.104)$$

6.3.4. Modo Cero.

Notemos que al incluir el estado ligado al determinante nos generaría un problema pues este desaparecería, entonces hay que trabajar a parte el modo correspondiente a la energía cero (modo cero).

Normalización del Modo Cero.

Por conveniencia normalizaremos la solución del modo cero, i.e:

$$p_0 = \frac{C}{\cosh(\omega(\tau - \tau_c))} \quad (6.105)$$

Así:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{C^2}{\cosh^2(\omega(\tau - \tau_c))} = \frac{2C^2}{\omega} \quad (6.106)$$

Por lo tanto:

$$C = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \quad (6.107)$$

Y la solución del modo cero está dada por:

$$p_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\cosh(\omega(\tau - \tau_c))} \quad (6.108)$$

El Modo Cero y la Invariancia de la Teoría.

La existencia del modo cero es producto de la invariancia traslacional de la teoría. Claro, que cada solución de instantón (con un τ_c específico que describe el centro de su posición) rompe espontáneamente esta invariancia traslacional, pero el hecho de que la acción no dependa de τ_c es el reflejo de dicha invariancia bajo traslaciones. Más aún, notemos que para cambios infinitesimales del centro de posición, tenemos:

$$\mathcal{S}[p_{cl}(\tau, \tau_c + \delta\tau_c)] - \mathcal{S}[p_{cl}(\tau, \tau_c)] = 0 \quad (6.109)$$

Haciendo una expansión respecto a $\delta\tau_c$ obtenemos:

$$0 = \int d\tau \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta p_{cl}(\tau)} \delta\tau_c \frac{\partial p_{cl}(\tau)}{\partial \tau_c} + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \delta\tau' \delta\tau_c' \frac{\partial p_{cl}(\tau)}{\partial \tau'} \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta p_{cl}(\tau) \delta p_{cl}(\tau')} \delta\tau_c \frac{\partial p_{cl}(\tau)}{\partial \tau_c} + \mathcal{O}(\tau_c^3) \quad (6.110)$$

El primer término desaparece debido a las ecuaciones de movimiento y el segundo notamos que está dado por:

$$\frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta p_{cl}(\tau) \delta p_{cl}(\tau')} = [-\partial_\tau^2 + V''(p_{cl}(\tau))] \delta(\tau - \tau') \quad (6.111)$$

Lo que demuestra que $\frac{\partial p_{cl}(\tau, \tau_c)}{\partial \tau_c}$ es el modo cero del operador diferencial del lado derecho de la ecuación anterior.

Entonces usando que $\frac{\partial p_{cl}}{\partial \tau} = -\frac{\partial p_{cl}}{\partial \tau_c}$, la solución del modo cero se puede escribir como:

$$p_0 = C \frac{\partial p_{cl}}{\partial \tau} \quad (6.112)$$

Ahora usamos la condición de normalización:

$$1 = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{\partial p_{cl}}{\partial \tau} \right)^2 = C^2 \mathcal{S}_0 k \quad (6.113)$$

Despejamos la constante de normalización y obtenemos que la solución del modo cero normalizada está dada por:

$$p_0 = (k\mathcal{S}_0)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial p_{cl}}{\partial \tau} \quad (6.114)$$

Sustituyendo los valores y calculando la parcial de la solución clásica respecto a τ obtenemos que la solución del modo cero es:

$$p_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\cosh(\omega(\tau - \tau_c))} \quad (6.115)$$

¡Que coincide con la obtenida al resolver la ecuación de Schrödinger, sin tenerla que resolver!

Integral del Modo Cero (Aparición de Coordenada Colectiva)

Si uno quiere hacer la integral gaussiana formal con la expansión del momento $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \sum c_n p_n(\tau) \quad (6.116)$$

que origina el determinante con el modo cero, la integral $\int dc_0$ sin la supresión gaussiana diverge por lo que el determinante se hace cero, así que hay que trabajar este modo de forma separada, nuevamente.

Si se hace una variación respecto a c_0 en (6.116), entonces $p(\tau)$ cambia como sigue:

$$\Delta p(\tau) = \Delta c_0 p_0(\tau) \quad (6.117)$$

es decir, proporcional a p_0 , ahora haciendo una variación respecto a τ_c induce el siguiente cambio:

$$\Delta p(\tau) = \Delta p_{cl}(\tau) = \frac{dp_{cl}}{d\tau_c} \Delta \tau_c = -\frac{dp_{cl}}{d\tau} \Delta \tau_c = -\sqrt{k\mathcal{S}_0} p_0(\tau) \Delta \tau_c \quad (6.118)$$

Que también es proporcional a p_0 , entonces notamos que el Jacobiano está dado por

$$J = \left| \frac{dc_0}{d\tau} \right| = \sqrt{k\mathcal{S}_0} \quad (6.119)$$

Así, las dos variaciones son la misma, es decir, hemos encontrado que la integración sobre el modo cero debe ser reemplazada por la integración sobre

τ_c en vez de sobre dc_0 . En otras palabras, τ_c ha sido *promovida* a una variable de integración, la cual se le conoce como **Coordenada Colectiva**.¹¹

6.3.5. Contribución Completa al determinante de un Instantón del Oscilador Armónico Polimérico.

Combinando los resultados obtenidos, nos da la contribución completa de un instantón para grandes τ_0

$$\langle p_f | e^{-\frac{\tau_0}{\hbar} \hat{H}} | p_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\tau_0}} \left(\frac{\sinh(\omega\tau_0)}{\omega\tau_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(4 \times \frac{1}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\hbar} S_0} \sqrt{k\mathcal{S}_0} \frac{d\tau_c}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.120)$$

Notemos que el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ proviene del hecho que al cambiar ϵ_0 del oscilador armónico con la integración del modo cero hay que tomar en cuenta dicho factor en $\int dc_0 e^{-\frac{1}{2}\epsilon_0^2 c_0} = \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_0}}$.

Así, la contribución del oscilador armónico polimérico está dada por

$$\boxed{\langle p_f | e^{-\frac{\tau_0}{\hbar} \hat{H}} | p_0 \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\sinh(\omega\tau_0)}} e^{-\frac{1}{\hbar} S_0} \sqrt{k\mathcal{S}_0} \frac{\omega}{2} \frac{d\tau_c}{\sqrt{2\pi}}} \quad (6.121)$$

El cual para cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$ está dado por:¹²

$$\begin{aligned} \langle p_f | e^{-\frac{\tau_0}{\hbar} \hat{H}} | p_0 \rangle &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}} \frac{\omega}{2} \sqrt{k\mathcal{S}_0} e^{-\frac{S_0}{\hbar}} \frac{d\tau_c}{\sqrt{\pi}} \\ &= \text{Inst}_{O.A.} \times \rho \times d\tau_c \end{aligned} \quad (6.122)$$

donde $p_f = 2\pi n p_c$, $p_0 = 0$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $p_c = \frac{\hbar}{\mu}$,

$$\text{Inst}_{O.A.} = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar\pi}} e^{-\frac{\omega\tau_0}{2}}$$

es la contribución del oscilador armónico clásico y

$$\rho = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{k\mathcal{S}_0} e^{-\frac{S_0}{\hbar}}$$

¹¹Integrar sobre τ_c recupera la invariancia traslacional.

¹² $\sinh^{-\frac{1}{2}}(x) \simeq \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$ cuando x toma valores muy grandes.

es un tipo de densidad de instantón independiente de τ_0 .

Para terminar de trabajar con el modo cero hay que integrar en un intervalo $(-\frac{\tau_0}{2}, \frac{\tau_0}{2})$ la coordenada colectiva $d\tau_c$, entonces podemos reescribir la ecuación (6.122) como sigue

$$\langle p_f | e^{-\frac{\tau_0}{\hbar} \hat{H}} | p_0 \rangle = \langle 2\pi n p_c, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle = \langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)} \rho(\tau_0) \quad (6.123)$$

donde $\langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)}$ es la contribución de la integral de trayectoria del oscilador armónico usual y $\rho(\tau_0)$ es la “densidad de instantones dependiente del tiempo” dada por

$$\rho(\tau_0) = \frac{\omega \tau_0}{2} \sqrt{\frac{k \mathcal{S}_0}{\pi}} e^{-\frac{s_0}{\hbar}} \quad (6.124)$$

Ahora, dentro del intervalo $[-\pi p_c, \pi p_c]$ el potencial cuántico del oscilador armónico polimérico es igual a cero cuando $p \equiv 0$, este único punto y debido a la periodicidad de la variable del momento nos dicen que

$$\langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle 2\pi n p_c, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle \quad (6.125)$$

Aproximación de Gas Diluido de Instantones.

Dado que el dominio temporal es muy amplio podemos considerar la siguiente configuración: un instantón localizado en τ'_0 seguido de un anti-instantón en $\tau''_0 > \tau'_0$, seguido de nuevo de un instantón en $\tau'''_0 > \tau''_0$, así sucesivamente. Dicha configuración tendrá las correcciones de frontera correctas dadas por $p(\tau_0 \rightarrow -\infty) = p_{cl}(0)$ y $p(\tau_0 \rightarrow \infty) = p_{cl}(2\pi n p_c)$.

Mientras los instantones estén separados por una distancia finita (a lo largo del eje τ), en general, la configuración previa no será una solución clásica exacta, pero debido a que la distancia entre τ''_0 y τ'_0 , etc, empieza a crecer, la solución viene siendo mejor debido a que la superposición entre estas pseudo-partículas cada vez es menor. Lo cual es válido para cualquier número n_1 de instantones y n_2 de anti-instantones tales que $n_2 - n_1 = n$ para que las condiciones de frontera se satisfagan.

Como los n_1 instantones y los n_2 instantones anti-instantones se consideraran separados ampliamente, cada uno de ellos contribuirá de forma aditiva a la acción \mathcal{S}_0 . Cada uno dará un factor de proporcionalidad al determinante dado que $V''(p_{cl})$ difiere de ω^2 de la misma manera en cada intervalo donde se localicen estas pseudo-partículas. Finalmente, al estar separadas muy

ampliamente (más que el tamaño de cada instantón) cada una de las pseudo-partículas puede estar localizada en cualquier lugar del eje τ , por lo que la integral entre cada una de sus localizaciones producirá un factor de $\sqrt{\frac{kS_0}{2\pi}}\tau$.

Como estas pseudo-partículas son indistinguibles entre sí, es decir, “*instantón-instantón*” o “*anti-instantón-anti-instantón*” introducen un factor de $\frac{1}{n_1!}$ y $\frac{1}{n_2!}$ para no “contar” de más.

Utilizando esta aproximación, conocida como gas diluido en mecánica estadística, obtenemos que la contribución total de n_1 instantones y de n_2 anti-instantones desde el punto $p_i = 0$ al punto $p_f = 2\pi n p_c$ está dada por

$$\langle 2\pi n p_c, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle = \langle \frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)} \sum_{n_1, n_2} \frac{\rho(\tau_0)^{(n_1+n_2)}}{n_1! n_2!} \delta_{n_2-n_1, n} \quad (6.126)$$

Las sumas sobre n_1 y n_2 se pueden desacoplar al usar la siguiente identidad:

$$\delta_{n_2-n_1, n} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} [e^{-i\theta(n_1-n_2-n)}] \quad (6.127)$$

Sustituyendo en nuestra amplitud de transición, ésta queda dada por

$$\begin{aligned} \langle 2\pi n p_c, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle &= \langle \frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{in\theta} e^{2\rho(\tau_0) \cos(\theta)} \\ &= \langle \frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)} i^n J_n(-i2\rho(\tau_0)) \end{aligned} \quad (6.128)$$

donde $J_n(x)$ son las funciones de Bessel de primera clase.

Contribución Completa al Determinante del O.A.P.

Para obtener la contribución completa al determinante del oscilador armónico polimérico sustituimos (6.128) en la amplitud de trayectoria (6.125), entonces ésta quedada determinada como sigue:

$$\langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle = \langle \frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n J_n(-i2\rho(\tau_0)) \quad (6.129)$$

Ahora utilizamos la siguiente propiedad de las funciones de Bessel

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(x) \quad (6.130)$$

Entonces la contribución total de todos los instantones en el intervalo $[-\pi p_c, \pi p_c)$ es

$$\boxed{\langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle = \langle \frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H.)} e^{2\rho(\tau_0)}} \quad (6.131)$$

6.4. El Oscilador Armónico en Mecánica Cuántica Polimérica.

Como se ha mencionado durante esta tesis la Mecánica Cuántica Polimérica depende de un parámetro “ μ ”, el cual surge del debilitamiento del operador de momento en el teorema de Stone-von Neumann¹³. Una consecuencia de esto es que el espacio de Hilbert Polimérico (\mathcal{H}_{poly}) es un espacio no-separable dado por la suma directa (no-numerable) de unos espacios de Hilbert que sí lo son:

$$\mathcal{H}_{poly} = \bigoplus_{\lambda \in [0, \mu]} \mathcal{H}_{poly}^{(\lambda)} \quad (6.132)$$

Consideremos un estado arbitrario $\Psi(p) \in \mathcal{H}_{poly}$, entonces este se puede descomponer como

$$\Psi(p) = \bigoplus_{\lambda \in [0, \mu]} \Psi^{(\lambda)}(p) \quad (6.133)$$

con $\Psi^{(\lambda)}(p) \in \mathcal{H}_{poly}^{(\lambda)}$.

Entonces el Hamiltoniano del oscilador armónico polimérico¹⁴

$$\hat{\mathcal{H}}_{poly}^{(\mu)} = \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} \left(2 - \hat{V}_\mu - \hat{V}_{-\mu} \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \quad (6.134)$$

actúa sobre este estado como sigue:

$$\hat{\mathcal{H}}_{poly}^{(\mu)} \Psi(p) = \hat{\mathcal{H}}_{poly}^{(\mu)} \left(\bigoplus_{\lambda \in [0, \mu]} \Psi^{(\lambda)}(p) \right) = \bigoplus_{\lambda \in [0, \mu]} \left(\hat{\mathcal{H}}_{poly}^{(\mu)} \Psi^{(\lambda)}(p) \right) \quad (6.135)$$

Así el operador de evolución está dado por

$$\langle p_f, t_f | p_i, t_i \rangle^{(\lambda)} = \langle p_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i) \hat{\mathcal{H}}_{poly}^{(\mu)}} | p_i \rangle^{(\lambda)} \quad (6.136)$$

¹³Más aún este operador de momento no existe tal cual por lo que se *inventa* un nuevo operador \hat{V}_μ que actúe similarmente.

¹⁴Notemos que es el Hamiltoniano con el cual hemos estado trabajando.

donde el operador Hamiltoniano debe entenderse como el que actúa en el espacio $\hat{\mathcal{H}}_{poly}^{(\lambda)}$.

Para poder calcular este operador de evolución es necesario observar que $\Psi^{(\lambda)}(p)$ satisface:

$$\Psi^{(\lambda)}(p + 2\pi p_c) = e^{2\pi i p_c \frac{\lambda}{\mu}} \Psi^{(\lambda)}(p) \quad (6.137)$$

notando que si $\lambda = 0$ obtenemos las condiciones periódicas con las cuales hemos estado trabajando.

Así en Mecánica Cuántica Polimérica tenemos que

$$\langle p_j | p_k \rangle^{(\lambda)} = 2\pi p_c \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n \frac{\lambda}{\mu}} \delta(p_j - p_k + 2\pi n p_c) \quad (6.138)$$

por lo que la ecuación (6.125) se ve modificada como

$$\langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(\lambda)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n \frac{\lambda}{\mu}} \langle 2\pi n p_c, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(0)} \quad (6.139)$$

donde $\langle 2\pi n p_c, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(0)}$ es el que habíamos ya calculado.

Por lo que siguiendo los mismos pasos obtenemos que la amplitud de transición del oscilador armónico polimérico para cualquier $\lambda \in [0, \mu)$ está dada por

$$\boxed{\langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(\lambda)} = \langle 0, +\frac{\tau_0}{2} | 0, -\frac{\tau_0}{2} \rangle^{(O.H)} e^{2\rho(\tau_0) \cos(2\pi \frac{\lambda}{\mu})}} \quad (6.140)$$

Capítulo 7

Cálculo de la Amplitud de Transición en Cosmología Polimérica.

En este capítulo desarrollaremos el cálculo de la amplitud de transición en la Cosmología Polimérica dada por $\langle a_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{H}} | a_0 \rangle$ intentando hacer uso del método de los instantones y buscando semejanzas con el oscilador armónico polimérico.

7.1. Eliminación de la dependencia de ϕ y p_ϕ en la acción \mathcal{S} .

Recordemos que nuestra acción considerando un universo isotrópico está dada por

$$\mathcal{S}_{Tot}^{iso} = \mathcal{S}_{grav}^{iso} + \mathcal{S}_{mat}^{iso} = -\frac{3V_0}{8\pi G} \int dt \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - KaN \right) - V_0 \int dt \left(-\frac{a^3}{2N} \dot{\phi}^2 + V(\phi)Na^3 \right) \quad (7.1)$$

Calculando los momentos:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3V_0}{4\pi GN} \dot{a} \quad (7.2)$$

$$\dot{a} = -\frac{4\pi GN}{3aV_0} p_a \quad (7.3)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3 V_0 \dot{\phi}}{N} \quad (7.4)$$

$$\dot{\phi} = \frac{N}{p_\phi} a^3 V_0 \quad (7.5)$$

$$p_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (7.6)$$

Así la última ecuación nos genera nuestra primera restricción. Por lo que el Hamiltoniano queda dado por

$$\mathcal{H} = p_a \dot{a} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{3V_0}{8\pi GN} \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - kaN \right) - \frac{a^3 \dot{\phi}^2 V_0}{2N} + V_0 N a^3 V(\phi) \quad (7.7)$$

Consideremos que nuestro volumen ha sido normalizado a $V_0 = 1$ y que no tenemos potencial $V(\phi) = 0$. Entonces, sustituyendo los valores de \dot{a} y $\dot{\phi}$ el Hamiltoniano queda rescrito como

$$\mathcal{H} = N \left[-\frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{2a^3} - \frac{3aK}{8\pi G} \right] \quad (7.8)$$

Recordemos que en la cuantización de Dirac pedimos que nuestra restricción deba preservarse en el tiempo, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{p}_N &= \{p_N, \mathcal{H}\} \simeq 0 \\ \dot{p}_N &= -\frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{2a^3} - \frac{3aK}{8\pi G} \simeq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Entonces nuestro Hamiltoniano total con las restricciones correspondientes está dado por

$$\mathcal{H}_{Tot}^{iso} = \lambda_1 p_N + \lambda_2 \left(-\frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{2a^3} - \frac{3aK}{8\pi G} \right) \quad (7.10)$$

Consideremos p_N como restricción fuerte, i.e., $p_N = 0$.¹ Como consideramos que $V(\phi) = 0$ y al extremizar la acción $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi} = 0$ nos dice que $\dot{p}_\phi = 0$ por lo que $p_\phi = cte$. Así nuestro Hamiltoniano queda como

$$\mathcal{H}_{Tot}^{iso} = \lambda_2 \left(-\frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{2a^3} - \frac{3aK}{8\pi G} \right) \quad (7.11)$$

Proseguiremos a deshacernos del multiplicador de Lagrange considerando ahora nuestro Lagrangiano dado por²

$$\mathcal{L}_{Tot}^{iso} = p_\phi \dot{\phi} + p_a \dot{a} - \lambda \left(-\frac{2\pi G}{3a} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{a^3} - ka \right) \quad (7.12)$$

Haciendo la variación respecto a p_ϕ :

$$\delta p_\phi \left(\dot{\phi} - \lambda \frac{p_\phi}{a^3} \right) = 0 \quad (7.13)$$

$$\lambda = \frac{a^3 \dot{\phi}}{p_\phi} \quad (7.14)$$

$$\dot{\phi} = \lambda \frac{p_\phi}{a^3} \quad (7.15)$$

Sustituyendo el valor del multiplicador de Lagrange, λ , en nuestro Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{Tot}^{iso} = p_\phi \dot{\phi} + p_a \dot{a} + \dot{\phi} \left[\frac{2\pi G}{3\phi p_\phi} a^2 p_a^2 - \frac{p_\phi}{2} + \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a^4 \right] \quad (7.16)$$

Por lo que nuestra acción está dada por

$$\mathcal{S}_{Tot}^{iso} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ p_\phi \dot{\phi} + p_a \dot{a} + \dot{\phi} \left[\frac{2\pi G}{3\phi p_\phi} a^2 p_a^2 - \frac{p_\phi}{2} + \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a^4 \right] \right\} \quad (7.17)$$

Hacemos un cambio de escala $dt \rightarrow d\phi$, entonces nuestra acción queda determinada por³

$$\boxed{\mathcal{S}_{Tot}^{iso} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left\{ p_a a' + \frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G}{3p_\phi} a^2 p_a^2 + \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a^4 \right\}} \quad (7.18)$$

¹Sino al realizar los cálculos se obtiene a partir de una $\delta(p_N)$.

²Le quitaremos el subíndice al multiplicador de Lagrange.

³ $a' = \frac{da}{d\phi}$

7.2. Amplitud de Transición en Cosmología Polimérica.

La amplitud de transición (Kernel), en el espacio de configuración (a) está dada por

$$\langle a_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \phi_0 \hat{\mathcal{H}}} | a_i \rangle = N \int \mathcal{D}a e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}} \quad (7.19)$$

Con el Hamiltoniano total en este nuevo “tiempo” dado por

$$\mathcal{H}_{Tot}^{iso} = -\frac{2\pi G}{3p_\phi} a^2 p_a^2 - \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a^4 - \frac{p_\phi}{2} \quad (7.20)$$

Así nuestro Kernel es

$$\langle a_f | e^{-\frac{i\phi_0}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}} | a_i \rangle = \langle a_f | e^{\frac{i\phi_0}{\hbar} \left[\frac{2\pi G}{3p_\phi} a^2 p_a^2 + \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a^4 + \frac{p_\phi}{2} \right]} | a_i \rangle \quad (7.21)$$

Sea $\epsilon = \frac{1}{N}$, con $N =$ al número de particiones, entonces:

$$\begin{aligned} \langle a_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \phi_0 \mathcal{H}} | a_i \rangle &= \langle a_f | \prod_{m=1}^N e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \mathcal{H}} | a_i \rangle \\ &= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{a_m=-\infty}^{\infty} \right] \prod_{m=0}^{N-1} \langle a_{m+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \mathcal{H}_n} | a_m \rangle \end{aligned} \quad (7.22)$$

Calculemos ahora un término de este producto. Para ello primero se realiza una expansión de la exponencial quedándonos a primer orden y aplicamos las reglas de los operadores:

$$\hat{a}_m | a_m \rangle = a_m | a_m \rangle \quad (7.23)$$

$$\hat{p}_{a_m} | a_m \rangle = \frac{\hbar^2}{4\mu^2} (2|a_m\rangle - |a_m - 2\mu\rangle - |a_m + 2\mu\rangle) \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned}
\langle a_{m+1} | \frac{i\epsilon}{\hbar} \phi_0 \left(\frac{2\pi G}{p_\phi} \hat{p}_{a_m}^2 \hat{a}_m^2 \right) | a_m \rangle &= \\
= \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} a_m^2 [2\langle a_{m+1} | a_m \rangle - \langle a_{m+1} | a_m - 2\mu \rangle - \langle a_{m+1} | a_m + 2\mu \rangle] \\
= \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} a_m^2 \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{m+1} \left\{ 2e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m)} - e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m + 2\mu)} \right. \\
\left. - e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m - 2\mu)} \right\} \\
= \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} a_m^2 \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{m+1} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m)} \left[2 - e^{2\frac{i}{\hbar} p_{m+1} \mu} - e^{-2\frac{i}{\hbar} p_{m+1} \mu} \right] \right\} \\
= \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{\mu^2} a_m^2 \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{m+1} e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m)} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_{m+1} \right)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\langle a_{m+1} | \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a^4 | a_m \rangle &= \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a_m^4 \langle a_{m+1} | a_m \rangle \\
&= \frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a_m^4 \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{m+1} e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m)}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Continuamos con el último término:

$$\langle a_{m+1} | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{p_\phi}{2}} | a_m \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \phi_0 \frac{p_\phi}{2}} \frac{\mu}{2\pi \hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{m+1} e^{\frac{i}{\hbar} p_{m+1} (a_{m+1} - a_m)} \tag{7.27}$$

Finalmente, obtenemos que la amplitud de transición está dada por

$$\begin{aligned} \langle a_f | e^{-\frac{i\phi_0}{\hbar} \hat{H}} | a_i \rangle &= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{a_m=-\infty}^{\infty} \right] \prod_{m=0}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\hbar\pi} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{m+1} \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_{m=0}^{N-1} p_{m+1} (a_m - a_{m+1}) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \phi_0 \epsilon \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{2\pi G \hbar^2}{p_\phi \mu^2} a_m^2 \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_{m+1} \right) + \frac{3K}{8\pi G p_\phi} a_m^4 + \frac{p_\phi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.28)$$

Esta amplitud de transición se asemeja a la generalización de la integral de trayectoria en coordenadas cíclicas como consecuencia de la indistinguibilidad entre $p(\phi)$ y $p(\phi) + \frac{2n\pi\hbar}{\mu}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que debido a esto no hay integrales respecto a la posición, sino que son sumas sobre números enteros. Estas sumas reflejan que las funciones de onda $\sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p a}$ son univaluadas.

Vamos a convertir estas sumas tortuosas en formas equivalentes más fáciles de manejar y que incluyan integrales de trayectoria continuas.

Esto es posible a costa de una extra suma infinita que garantizará la invariancia cíclica en la variable p .

Utilizaremos la siguiente fórmula de Poisson:⁴

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b} e^{\frac{2\pi}{b} kl} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - mb) \quad (7.29)$$

y recordemos además que:

$$\langle p_{m+1} | p_m \rangle = \sum_{a_m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} a_m (p_{m+1} - p_m)} \quad (7.30)$$

Con $p_m \in \left[-\frac{\pi\hbar}{\mu}, \frac{\pi\hbar}{\mu} \right)$

Haciendo $b = \frac{2\pi\hbar}{\mu}$, entonces la ecuación (7.30) se ve transformada como

$$\langle p_{m+1} | p_m \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(p_{m+1} - p_m + \frac{2\pi\hbar}{\mu} l) \quad (7.31)$$

⁴ b es una constante.

Es decir una descomposición de Fourier en este intervalo de la función δ nos conduce a

$$\langle p_{m+1}|p_m\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} da_m e^{-\frac{i}{\hbar}a_m(p_{m+1}-p_m)+\frac{2i\pi\hbar}{\mu}a_ml} \quad (7.32)$$

Consideremos primero que en nuestra amplitud de transición el Hamiltoniano es cero, es decir:

$$\begin{aligned} \langle a_f|a_i\rangle &= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \right] \prod_{m=0}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{m+1} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{m=0}^{N-1} p_{m+1}(a_m - a_{m+1})} \\ &= \prod_{m=0}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{m+1} \right] \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \left(p_1 a_0 - p_N a_N - \sum_{m=0}^{N-1} (p_{m+1} - p_m) a_m \right)} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Usando la expansión obtenida en (7.32) la ecuación anterior se ve transformada en:

$$\prod_{m=0}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{m+1} \right] \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} da_m \sum_{l_m=-\infty}^{\infty} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \left(p_1 a_0 - p_N a_N - \sum_{m=1}^{N-1} (p_{m+1} - p_m) a_m \right) + \frac{2i\pi\hbar}{\mu} l_m a_m} \quad (7.34)$$

En esta expresión notamos que las sumas sobre l_m se pueden absorber en las variables p_m al extender su radio de integración de $\left[-\frac{\pi\hbar}{\mu}, \frac{\pi\hbar}{\mu}\right]$ a $(-\infty, \infty)$ ⁵. Sólo que la primer integral respecto a los momentos queda con los límites igual, esto se debe a que hay $N - 1$ sumas de las posiciones.

Entonces tenemos que la amplitud de transición con Hamiltoniano igual a cero viene dada por

⁵Donde se hace abuso de notación, pero las nuevas variables a_m ya no son discretas, i.e., ya es una variable continua, lo cual es posible debido a que es una variable muda.

$$\begin{aligned}
\langle a_f | a_i \rangle &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_1 \prod_{m=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{m+1} \right] \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} da_m \right] \\
&\quad e^{-\frac{i}{\hbar} \left(p_1 a_0 - p_N a_N - \sum_{m=1}^{N-1} (p_{m+1} - p_m) a_m \right)} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_1 \prod_{m=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{m+1} \right] \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} da_m \right] \\
&\quad e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{m=0}^{N-1} p_{m+1} (a_m - a_{m+1})}
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Si el sistema tiene un Hamiltoniano distinto de cero, es posible agregarlo en el lado derecho de la igualdad de la forma usual, es decir,

$$\begin{aligned}
\langle a_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \phi_0 \mathcal{H}} | a_i \rangle &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_1 \prod_{m=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{m+1} \right] \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} da_m \right] \\
&\quad e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{m=0}^{N-1} p_{m+1} (a_m - a_{m+1}) - \frac{i}{\hbar} \phi_0 \epsilon \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{H}_m}
\end{aligned} \tag{7.36}$$

que en este caso

$$\mathcal{H}_m = -\frac{2\pi G a_m^2 \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_{m+1} \right) - \frac{3K a_m^4}{8\pi G p_\phi} - \frac{p_\phi}{2} \tag{7.37}$$

Ahora hay que considerar el límite cuando $N \rightarrow \infty$, entonces se hacen las siguientes substitutiones:

$$\frac{a_{m+1} - a_m}{\epsilon} \rightarrow \frac{da}{d\phi} = a' \tag{7.38}$$

$$\epsilon \sum_{m=0}^{N-1} \rightarrow \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \tag{7.39}$$

Entonces nuestra integral de trayectoria queda como

$$\langle a_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \phi_0 \mathcal{H}} | a_i \rangle = \int [\mathcal{D}p(\phi)] [\mathcal{D}a(\phi)] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{J}} \quad (7.40)$$

Donde

$$[\mathcal{D}p(\phi)] = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_1 \prod_{m=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{m+1} \right] \quad (7.41)$$

$$[\mathcal{D}a(\phi)] = \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} da_m \right] \quad (7.42)$$

$$\mathcal{J} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left\{ p_a a' + \phi_0 \left[\frac{2\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3K a^4}{8\pi G p_\phi} + \frac{p_\phi}{2} \right] \right\} \quad (7.43)$$

Que es nuestra acción en cosmología polimérica.

7.2.1. Acción Efectiva en Cosmología Polimérica (espacio de momentos)

Para que sea la acción efectiva en cosmología polimérica $\mathcal{J} = \mathcal{J}(a, a')$ o bien $\mathcal{J} = \mathcal{J}(p_a, p'_a)$, en este caso trabajaremos en el espacio de momentos (p_a).

Antes de poner la acción en términos de p_a y p'_a obtendremos la variación respecto a p'_a para obtener la evolución del radio del universo, que recordemos, es la variable (a). Así

$$\delta \mathcal{J} = \delta p_a \left(a' + \phi_0 \frac{2\hbar\pi G}{3\mu p_\phi} a^2 \sin \left(\frac{2\mu}{\hbar} p_a \right) \right) = 0 \quad (7.44)$$

Entonces, el cambio respecto al tiempo del radio del universo es

$$a' = -\phi_0 \frac{2\pi\hbar G}{3\mu p_\phi} a^2 \sin \left(\frac{2\mu}{\hbar} p_a \right) \quad (7.45)$$

Ahora para obtener la acción en términos de p_a y p'_a integramos primero por partes⁶, es decir, utilizamos que $p_a a' = \frac{d(ap_a)}{d\phi} - ap'_a$, entonces la acción polimérica queda como⁷

$$\mathcal{J} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left\{ -ap'_a + \phi_0 \left[\frac{2\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3Ka^4}{8\pi G p_\phi} + \frac{p_\phi}{2} \right] \right\} \quad (7.46)$$

y la variación respecto al radio cosmológico, a , está dada por

$$\delta \mathcal{J} = \delta a \left(-p'_a + \frac{4\phi_0 \pi G \hbar^2}{3\mu^2 p_\phi} a \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3K\phi_0}{2\pi G p_\phi} a^3 \right) = 0. \quad (7.47)$$

Entonces obtenemos la siguiente ecuación para a :

$$\boxed{p'_a = \frac{4\phi_0 \hbar^2 \pi G}{3p_\phi \mu^2} a \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3K\phi_0}{2\pi G p_\phi} a^3} \quad (7.48)$$

que es una ecuación cúbica de la forma $Ax^3 + Bx + C = 0$, que tiene una solución real y dos imaginarias.

Trabajaremos en el caso $K = 0$, es decir, en el caso de un universo plano, entonces se puede despejar a en términos de p_a trivialmente

$$a = -\frac{3p_\phi}{4\phi_0 \pi G} \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{p'_a}{\sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right)} \quad (7.49)$$

Consideraremos, por simplicidad, que $\phi_0 = 1$, entonces sustituyendo en nuestra acción polimérica obtenemos:

$$\boxed{\mathcal{J}(p_a, p'_a) = \int_0^\phi d\phi \left[-\frac{p_\phi}{4\pi G} \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{p_a'^2}{\sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right)} + \frac{p_\phi}{2} \right]} \quad (7.50)$$

Notemos que esta acción es la de una partícula libre sujeta a un potencial constante $V = -\frac{p_\phi}{2}$, pero en una métrica no plana, entonces el Lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = p_a'^2 f(p_a) + \frac{p_\phi}{2} \quad (7.51)$$

⁶Entonces la amplitud de trayectoria estará dada en el espacio de momentos, es decir, $\langle p_f, t_f | p_i, t_i \rangle$, por lo que las medidas de integración $[Dp(\phi)]$ y $[Da(\phi)]$ se verán afectadas de manera análoga al Oscilador Armónico Polimérico haciendo que sobre una suma infinita.

⁷La derivada total ya no aparece debido a que se elimina por las condiciones de frontera.

7.2.2. Operador Determinante Funcional y Ecuación de Movimiento.

Proseguiremos obteniendo la primera y segunda variación respecto al momento (recordemos que la primer variación nos dan las ecuaciones de movimiento y la segunda variación nos indicarán el operador para el cálculo del determinante funcional).⁸

A primer orden:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta p(\sigma)} = \frac{\delta p(\phi)^{p^2}}{\delta p(\sigma)} f(p) + p' \frac{\delta f(p)}{p(\sigma)} \quad (7.52)$$

$$= \frac{\partial p'^2}{\partial p'} \frac{\delta p'(\phi)}{\delta p(\sigma)} f(p) + p'^2 \frac{df}{dp} \frac{\delta p(\phi)}{\delta p(\sigma)} \quad (7.53)$$

$$= 2p' \frac{d}{d\phi} (\delta(\phi - \sigma)) f + p'^2 \dot{f} \delta(\phi - \sigma) \quad (7.54)$$

con $\dot{f} \equiv \frac{df}{dp}$

A segundo orden:

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta p(\gamma) \delta p(\sigma)} = \frac{\delta}{\delta p(\gamma)} \left[2p' \frac{d}{d\phi} (\delta(\phi - \sigma)) f + p'^2 \dot{f} \delta(\phi - \sigma) \right] \quad (7.55)$$

$$= \left[2f \frac{d}{d\phi} (\delta(\gamma - \phi)) + 2p' \dot{f} \delta(\gamma - \phi) \right] \frac{d}{d\phi} (\delta(\phi - \sigma)) + \quad (7.56)$$

$$+ \left[2p' \dot{f} \frac{d}{d\phi} (\delta(\gamma - \phi)) + p'^2 \ddot{f} \delta(\gamma - \phi) \right] \delta(\phi - \sigma) \quad (7.57)$$

$$= \left[-p'^2 \ddot{f} - 2p' \dot{f} \frac{d}{d\phi} - 2\dot{f} p'' - 2f \frac{d^2}{d\phi^2} \right] \delta(\gamma - \phi) \quad (7.58)$$

Entonces nuestro operador, en forma general, está dado por

$$\hat{W} = - \left[p'^2 \ddot{f} + 2p' \dot{f} \frac{d}{d\phi} + 2\dot{f} p'' + 2f \frac{d^2}{d\phi^2} \right]_{p_{cl}} \quad (7.59)$$

El cálculo de este operador no se realizará en este trabajo, sino que se deja planteado para futuros proyectos para obtener el determinante de la amplitud de transición en el espacio de momentos en la Cosmología Polimérica.

⁸Se omitirá el subíndice a en la variable de los momentos por simplicidad.

7.2.3. Solución a la Ecuación de Movimiento.

Recordemos que para poder trabajar con la ecuación de movimiento es necesario considerar

$$p_a = p_{cl} + p_q \quad (7.60)$$

donde p_{cl} representa la parte clásica del momento ya que satisface las condiciones de frontera y las ecuaciones de Euler-Lagrange, i.e., $p_a(\phi_i) = p_{cl}(\phi_i) = p_0$ y $p_a(\phi_f) = p_{cl}(\phi_f) = p_f$, en cambio p_q representa la parte cuántica (la cual no necesariamente satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange) y tiene las condiciones de frontera siguientes: $p_q(\phi_0) = 0 = p_q(\phi_f)$.

La ecuación de movimiento para nuestro caso polimérico es:

$$\boxed{p'' - \frac{\hbar}{\mu} p'^2 \cot\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right) = 0} \quad (7.61)$$

Para poder resolver la ecuación (7.61), haremos el cambio de variable $p' = y$ y notamos que $\cot(ax) = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} (\ln(\sin(ax)))$, entonces la ecuación (7.61) queda escrita como sigue:

$$\begin{aligned} y' - \frac{\mu}{\hbar} y^2 \frac{\hbar}{\mu} \frac{d}{dp} \left[\ln\left(\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right)\right) \right] &= y' - y^2 \frac{d}{dp} \left[\ln\left(\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right)\right) \right] \\ &= y' - y \frac{dp}{d\phi} \frac{d\phi}{dp} \frac{d}{d\phi} \left[\ln\left(\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right)\right) \right] \\ &= y' - y \frac{d}{d\phi} \left[\ln\left(\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (7.62)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden separable cuya solución es

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p_0\right)} \quad (7.63)$$

Regresando a nuestra variable original, la ecuación anterior queda como la siguiente ecuación diferencial de primer orden, que de nuevo es separable,

$$p' = p'_0 \frac{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p_0\right)}, \quad (7.64)$$

cuya solución es fácil ver que es

$$\frac{\hbar}{\mu} \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\mu}{2\hbar} p\right)}{\tan\left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0\right)} \right] = \frac{p'_0}{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p_0\right)} (\phi - \phi_i) \quad (7.65)$$

Entonces la parte clásica del momento, de la manera más general, está dada por

$$p_{cl} = \frac{2\hbar}{\mu} \arctan \left[\tan \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right) \exp \left(\frac{\mu}{\hbar} \frac{p'_0}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right)} (\phi - \phi_i) \right) \right] \quad (7.66)$$

7.3. Radio Cosmológico Polimérico.

Para calcular la evolución del radio del universo en cosmología polimérica se utiliza la ecuación (7.48), que nos dice

$$p'_a = \frac{4\phi_0 \hbar^2 \pi G}{p_\phi \mu^2} a \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3K\phi_0}{2\pi G p_\phi} a^3, \quad (7.67)$$

pero en nuestro caso consideramos $K = 0$, es decir, un universo plano (debido a las observaciones es el tipo de universo en el que vivimos), entonces la ecuación queda como

$$p'_a = \frac{4\phi_0 \hbar^2 \pi G}{p_\phi \mu^2} a \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right). \quad (7.68)$$

Para calcular el radio cosmológico se utiliza la parte clásica del momento (7.66), así

$$p'_{cl} = 2 \frac{p'_0 \tan \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right)}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right)} \frac{\exp \left(\frac{\mu}{\hbar} \frac{p'_0}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right)} (\phi - \phi_i) \right)}{\tan^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right) \exp \left(2 \frac{\mu}{\hbar} \frac{p'_0}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right)} (\phi - \phi_i) \right) + 1} \quad (7.69)$$

Luego el $\sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right)$ va evaluado en la parte clásica también, entonces

$$\sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_{cl} \right) = \frac{4 \tan^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right) \exp \left(2 \frac{\mu}{\hbar} \frac{p'_0}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right)} (\phi - \phi_i) \right)}{\left(\tan^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right) \exp \left(2 \frac{\mu}{\hbar} \frac{p'_0}{\sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right)} (\phi - \phi_i) \right) + 1 \right)^2} \quad (7.70)$$

A partir de la ecuación (7.68) despejamos a y obtenemos el **Radio del Universo** dado por

$$a(\phi) = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{3p_\phi}{8\pi\phi_0 G} \frac{p'_0}{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar}p_0\right)} \frac{\tan^2\left(\frac{\mu}{2\hbar}p_0\right) \exp\left(2\frac{\mu}{\hbar}\frac{p'_0}{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar}p_0\right)}(\phi - \phi_i)\right) + 1}{\tan\left(\frac{\mu}{2\hbar}p_0\right) \exp\left(\frac{\mu}{\hbar}\frac{p'_0}{\sin\left(\frac{\mu}{\hbar}p_0\right)}(\phi - \phi_i)\right)} \quad (7.71)$$

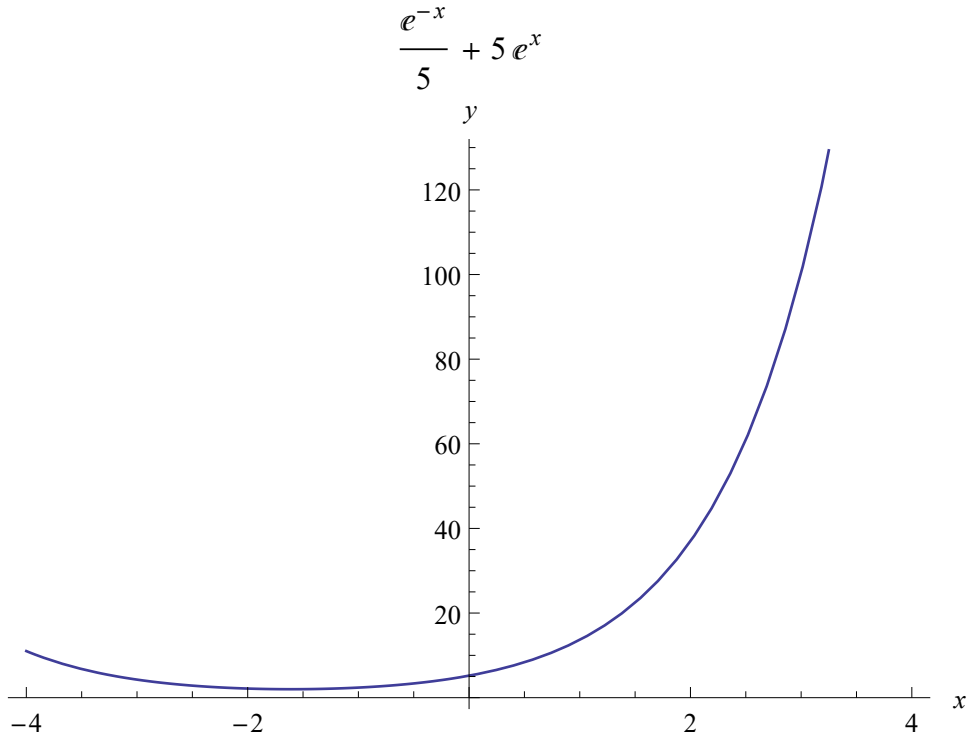


Figura 7.1: Representación del radio cosmológico.

Si escogemos $p_0 = \frac{\hbar\pi}{2\mu}$, entonces la ecuación del radio del universo queda de una forma más compacta dada por

$$a(\phi) = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{3p_\phi p'_0}{4\pi\phi_0 G} \cosh\left(\frac{\mu}{\hbar}p'_0(\phi - \phi_i)\right) \quad (7.72)$$

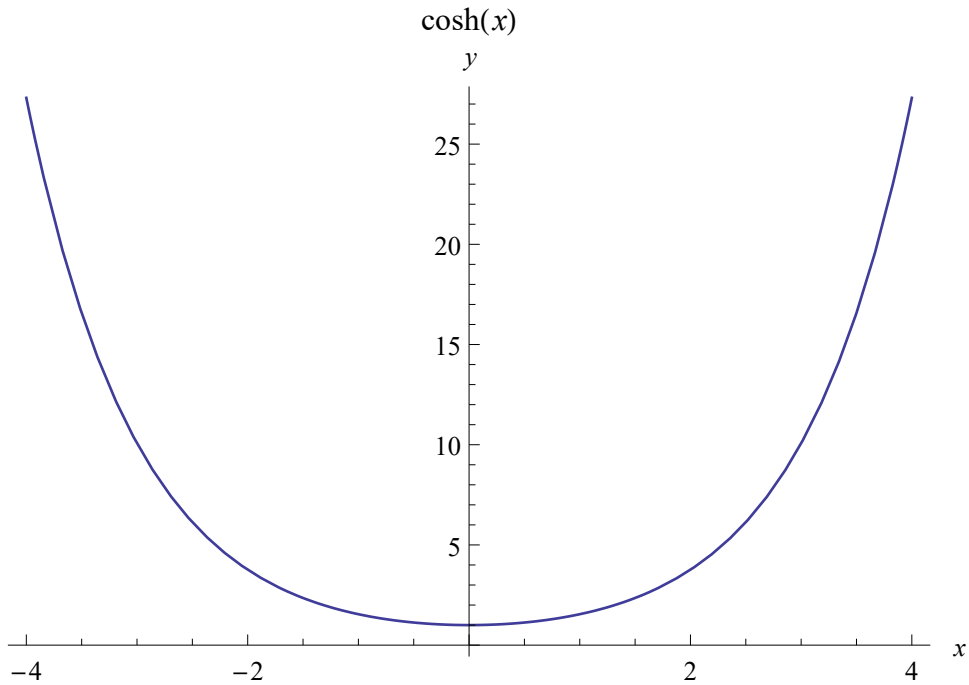


Figura 7.2: Representación del radio cosmológico con la condición inicial $p_0 = \frac{\hbar}{2\mu}\pi$.

Así, notamos que el radio del universo $a(\phi)$ presenta un rebote y nunca es cero, lo que indicaría que la densidad del universo no presenta la singularidad de volverse infinita en tiempos finitos del pasado, que concuerda con el resultado obtenido por Ashtekar.⁹

⁹A.Ashtekar, et. al., *Path integrals and the WKB approximation in loop quantum cosmology*, Physical Review D 82, 124043, 2010.

Conclusiones.

La Cosmología Polimérica se dedica a estudiar la evolución del universo con la novedad de debilitar una de las hipótesis del teorema de Stone-von Neumann para romper con la equivalencia entre los diferentes acercamientos a la mecánica cuántica (el cuadro de Schrödinger y el cuadro de Heisenberg) y, en un principio, obtener resultados distintos.

Por ejemplo, en la partícula libre polimérica uno obtiene que la velocidad está restringida por

$$-\frac{\hbar}{2m\mu} < \dot{x} < \frac{\hbar}{2m\mu}$$

y por ende la energía se encuentra acotada:

$$0 < H < \frac{\hbar^2}{2m\mu^2}.$$

En el caso de la partícula libre relativista se observa una diferencia entre la acción no-polimérica y la polimérica, dando como resultado que la velocidad de la partícula polimérica está acotada, nuevamente, pero ahora por

$$\dot{x}^2 \leq c^2 + \frac{2c^4 m^2 \mu^2}{\hbar} - 2\sqrt{\frac{c^6 m^2 \mu^2}{\hbar^2} + \frac{c^8 m^4 \mu^4}{\hbar^4}}$$

que si uno escoge una partícula tipo luz, i.e., $m = 0$ se observa que no son afectadas por la retícula pues mantienen la velocidad $\dot{x} = c$.

En este trabajo se puede apreciar, también, la importancia de la Integral de Trayectoria (o Integral Funcional), pero más aún el uso de los *instantones*, que son un método computacional semiclásico que nos permiten obtener la energía base del sistema aplicando primeramente una rotación de Wick ($t \rightarrow -i\tau$) cambiando del espacio Minkowskiano al espacio Euclideo ($i\mathcal{S}_M = -\mathcal{S}_E$) y así la amplitud de transición $\langle x_f, t_f | x_0, t_0 \rangle$ se transforme de

exponenciales oscilatorias a exponenciales decrecientes y, finalmente, obtener el límite cuando $\tau \rightarrow \infty$ para obtener la energía base E_0 .

El primer ejemplo explícito fue el del oscilador armónico usual y se obtuvo la energía base que corresponde a la misma que al resolverlo de manera usual y menos mal, sino el método no daría mucha confianza.

Los instantones se vieron empleados de manera especial en el oscilador armónico polimérico (OAP) y para la cosmología polimérica.

En el OAP se dividió el trabajo en aproximaciones del potencial (primer y segundo orden) y luego el potencial completo se trabajó de dos maneras distintas.

La primer aproximación del OAP dio como resultado el oscilador armónico usual mientras que la segunda aproximación dio el potencial de doble pozo: $V(x) = (x^2 - a^2)^2$ que ha sido trabajado en varios textos.

El primer método para obtener el determinante del potencial completo fue utilizar el teorema de Gel'fand-Yaglom obteniendo un resultado “*sinusoidal*” con polinomios de Legendre asociados de primera clase, pero es un resultado particular e incompleto.

La segunda manera de resolver el potencial completo del OAP fue observar la similitud entre la ecuación de movimiento del OAP y la del potencial de pozo doble, que dieron como resultado series hipergeométricas con la diferencia de que para el OAP sólo hay un estado ligado dado por $\epsilon_0 = 0$, en vez de los dos estados ligados del potencial de pozo doble: $\epsilon_0 = 0$ y $\epsilon_1 = \frac{3}{4}\omega^2$.

Debido a la existencia del modo cero ($\epsilon_0 = 0$) en el potencial completo del oscilador armónico, así como en el potencial de *Pöschl-Teller* el método de usar el teorema de Gel'fand-Yaglom se ve incompleto, pero en el segundo método fue posible obtener la contribución del modo cero con el efecto de la aparición de las *coordenadas colectivas*.

Debido a trabajar en el espacio de momentos (p_x) y el uso de la Mecánica Cuántica Polimérica, la amplitud de transición del oscilador armónico presenta una suma infinita en la representación de integrales de trayectoria, para el instantón relacionado a $l = 0$ la amplitud de transición del OAP es

$$\langle p_f | e^{-\frac{\tau_0}{\hbar} \hat{H}} | p_0 \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} \frac{1}{\sqrt{\sinh(\omega \tau_0)}} e^{-\frac{1}{\hbar} S_0} \sqrt{k S_0} \frac{\omega}{2} \frac{d\tau_c}{\sqrt{2\pi}}$$

donde se observa la contribución del instantón del oscilador armónico usual

$$Inst_{OA} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} \frac{1}{\sqrt{\sinh(\omega \tau_0)}}$$

y un tipo de densidad de instantón independiente de τ_0

$$\rho = \frac{\omega}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{k\mathcal{S}_0} e^{-\frac{S_0}{\hbar}}$$

¿Y en cosmología de que sirve la mecánica cuántica polimérica?

Recordemos, que en la cosmología isotrópica usual el parámetro de Hubble está dado por $\mathcal{H} = \frac{\dot{a}}{a}N$, que si consideramos las condiciones de energía fuerte (SEC), en un tiempo finito la densidad ρ diverge, o bien, que el radio cosmológico fue cero en algún tiempo pasado finito.

En cambio en cosmología polimérica isotrópica bajo las condiciones de energía fuerte al calcular la amplitud de transición del radio cosmológico a , se obtiene una función de la forma para la parte del momento *clásica*:

$$f(x) = ae^{cx} + be^{-cx}$$

la cual nunca es cero.

Más aún si uno escoge $p_0 = \frac{\hbar\pi}{2\mu}$ se obtiene que el radio cosmológico está determinado por

$$a(\phi) = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \frac{p_\phi p'_0}{8\pi\phi_0 G} \cosh\left(\frac{\mu}{\hbar} p'_0 (\phi - \phi_i)\right)$$

¡Lo que nos dice que la densidad no diverge en ningún tiempo finito!

Lo que procedería a este trabajo es calcular la parte *cuántica* del momento para obtener el determinante funcional completo y por lo tanto la amplitud de transición del radio cosmológico.

Apéndice A

Aproximación WKB

El método de aproximación WKB¹ está basado en el uso de regiones donde la longitud de onda es mucho más pequeña que la distancia típica sobre la que la energía del potencial varía, es decir, lejos de los puntos clásicos de retorno.

Consideremos la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar}(E - V(x))\Psi(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

y supongamos que nos encontramos en energías lejanas a los puntos de retorno donde $V(x)$ varía “*lentamente*” con x , entonces proponemos que la solución a la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\Psi(x) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}W(x)} \quad (\text{A.2})$$

donde $W(x)$ es una función compleja.

Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger, ésta se convierte en

$$i\hbar\frac{d^2W(x)}{dx^2} - \left(\frac{dW(x)}{dx}\right) + 2m(E - V(x)) = 0 \quad (\text{A.3})$$

y notemos que el momento *clásico* está dado por $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ entonces reescribimo (A.3) como sigue:

$$i\hbar\frac{d^2W(x)}{dx^2} - \left(\frac{dW(x)}{dx}\right) + p^2(x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

¹Debido a G.Wentzel, A. Kramers y L. Brillouin.

Ahora, para representar que el potencial varía “*lentamente*” hacemos la suposición de que

$$\hbar \left| \frac{d^2 W}{dx^2} \right| \ll \left| \frac{dW}{dx} \right|^2, \quad (\text{A.5})$$

entonces podemos dar una aproximación al orden menor de $W(x)$ a través de

$$W_0^2(x) = \pm p(x) \quad (\text{A.6})$$

que nos guía a obtener la aproximación a primer orde de $W(x)$ mediante

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW_1}{dx} \right)^2 &= p^2(x) + i\hbar \frac{d^2 W_0}{dx^2} \\ &= p^2(x) \pm i\hbar p'(x) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde el segundo término es mucho menor que el primero, por lo que $W(x)$ puede ser aproximado a primer orden como sigue:²

$$\begin{aligned} W(x) \simeq W_1(x) &= \pm \frac{1}{\hbar} \int dx' \sqrt{p^2(x') \pm i\hbar p'(x')} \\ &\simeq \pm \frac{1}{\hbar} \int dx' p(x') \left[1 + \frac{i}{2} \frac{p'(x)}{p(x)} \right] \\ &= \pm \left[\frac{1}{\hbar} \int dx' p(x') + \frac{i}{2} \ln p(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Que sustituyendo en nuestra función de onda esta queda dada por

$$\boxed{\Psi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int dx' p(x')}} \quad (\text{A.9})$$

entonces

$$|\Psi(x)|^2 \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \quad (\text{A.10})$$

lo que nos dice que encontrar la partícula en el punto x es inversamente proporcional a su momento “*clásico*” y por ello a su velocidad en dicho punto. En palabras mundanas, una partícula no pasará mucho tiempo en lugares donde se esté moviendo rápidamente.

²Los límites de integración no son especificados por ahora.

Consideremos ahora el problema de dispersión en una barrera de potencial rectangular con una tapa dada por una función continua y suave como potencial. Por simplicidad los bordes del potencial los ponemos en $x = 0$ y $x = x_0$.

Entonces para $x < 0$ la función de onda es

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\text{A.11})$$

donde A es la amplitud incidente y B la amplitud reflejada, y $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Análogamente para el lado derecho del potencial, considerando $0 < x_0 < x$, la función de onda es

$$\Psi(x) = Fe^{ikx} \quad (\text{A.12})$$

donde F es la amplitud de transmisión y no consideramos ondas viajando hacia la izquierda.

Así, la probabilidad de transmisión es

$$T \equiv \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad (\text{A.13})$$

Luego, en la región donde $V(x) \neq 0$, es decir, en la región de tunelaje ($0 < x < x_0$), la aproximación WKB nos dice que la función de onda es³

$$\Psi(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_0} dx' |p(x')|} + \frac{D}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_0} dx' |p(x')|}. \quad (\text{A.14})$$

Consideremos ahora que la barrera de potencial es muy ancha o muy alta, entonces el coeficiente de la exponencial positiva debe ser muy pequeño ($1 \gg C \approx 0$) por lo que las amplitudes relativas de la onda incidente y de la onda transmitida estarán determinadas esencialmente por el decaimiento total de la exponencial sobre la región *no-clásica*, es decir:

$$\frac{|F|}{|A|} \sim e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_0} dx' |p(x')|} \quad (\text{A.15})$$

Por lo tanto el coeficiente de transmisión está dado por

$$T \simeq e^{-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_0} dx' \sqrt{2m(E-V(x'))}} \quad (\text{A.16})$$

³Supongamos que la energía de la partícula es menor que el potencial, i.e., $E < V(x)$.

Las soluciones en las vecindades de los puntos de retorno se encuentran determinadas al asumir que el potencial puede ser aproximado linealmente, y haciendo una serie de cambios de variable la ecuación de Schrödinger se transforma en la ecuación de Airy:

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} - z\Psi(z) = 0 \quad (\text{A.17})$$

cuyas soluciones son las funciones Airy.

Antes de terminar, regresemos a la interpretación de la condición (A.5), que cuando $\hbar \rightarrow 0$ es exacta, lo que sugiere una conexión entre la aproximación WKB y el límite clásico, más aún, son las mismas condiciones, por lo que a esta aproximación se le suele denominar aproximación “*semiclásica*”.

Notemos, también que (A.5) es equivalente a $|p'(x)| \ll |p^2(x)|$, que en términos de la longitud de onda de D’Broglie tenemos que

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - v(x))}} \ll \frac{2(E - V(x))}{|dV/dx|}, \quad (\text{A.18})$$

es decir, λ debe ser pequeña comparada con la distancia característica sobre la cual el potencial varía apreciablemente. Por lo tanto la aproximación semiclásica es buena en el límite de *longitudes de onda cortas*, o bien frecuencias altas, i.e., energías grandes.

Apéndice B

Cuantización de Dirac y Método de Promedio sobre el Grupo

B.1. Teoría de norma y Cuantización de Dirac

Partiendo de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Toda teoría de norma debe satisfacer:

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Lo que implica que no todas las aceleraciones están determinadas por las ecuaciones de movimiento y, por ende, hay cierta arbitrariedad en nuestra teoría, la cual se ve reflejada en las soluciones de dichas ecuaciones que contienen parámetros arbitrarios. Así, los observables de la teoría son combinaciones de variables dinámicas independientes a estos parámetros (llamados *invariantes de norma*).

Una observación muy importante es que no toda teoría que cumple con (B.2) es una teoría de norma.

La ecuación (B.2) nos dice, también, que no todos los momentos $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ están determinados por las velocidades, es decir, existen k_1 relaciones del tipo:

$$\Phi(q, p)_{A_1} \approx 0 \quad (\text{B.3})$$

Donde \approx significa que estas relaciones son cero una vez evaluados todos los paréntesis de Poisson donde ellas aparezcan.

A este tipo de relaciones se les denomina como *constricciones primarias*. El número de constricciones primarias independientes es igual a la dimensión de la matriz definida por (B.2) menos el rango de ésta.

A partir de ahora consideraremos, por simplicidad, que todas las constricciones primarias son independientes y bosónicas generando un subespacio del espacio fase denominado superficie de restricción, sobre la cual está restringido el movimiento.

Como buscamos construir una teoría Hamiltoniana introducimos el Hamiltoniano canónico:

$$\mathcal{H}_1 = \dot{q}^j p_j - \mathcal{L} \quad (\text{B.4})$$

Notemos que este Hamiltoniano no está bien definido, pues no está determinado unívocamente como una función de los momentos y coordenadas, ya que las variaciones de estas variables no son todas independientes (están restringidas para preservar las constricciones primarias).

Entonces, el Hamiltoniano estará bien definido (unívocamente) sobre la superficie de restricción y al extenderlo fuera de ésta existirá arbitrariedad.

Definimos, así, el siguiente Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + \lambda^{A_1} \Phi_{A_1} \quad (\text{B.5})$$

Donde A_1 rotula las constricciones primarias y λ^{A_1} son los multiplicadores de Lagrange (arbitrarios hasta el momento).

Para que haya consistencia en este método de cuantización es necesario que la superficie de restricción se preserve en el tiempo, es decir, $\dot{\Phi}_{A_1} \approx 0$, que implica:

$$\{\Phi_{A_1}, \mathcal{H}_1\} = V_{A_1}^{B_1} \Phi_{B_1} + V_{A_1}^{A_2} \Phi_{A_2} \approx 0 \quad (\text{B.6})$$

Nótese que pueden aparecer nuevas constricciones Φ_{A_2} independientes de las primarias, las cuales llamaremos *constricciones secundarias*. Si aparecen, se se exige que su superficie de restricción se preserve también en el tiempo, que puede dar lugar a nuevas constricciones, llamadas terciarias y así sucesivamente, hasta que ya no se encuentren nuevas constricciones.

Teniendo el conjunto de todas las constricciones, se definen las constricciones de primera clase como aquellas con paréntesis de Poisson ≈ 0 con todas las constricciones. Es decir, F , es *constricción de primera clase* si:

$$\{F, \Phi_A\} \equiv V_A^B(p, q) \Phi_B \quad (\text{B.7})$$

donde $A = 1, \dots, M$ y $M = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, con k_i es el número de constricciones de la i -ésima generación.

Todas las constricciones que no satisfacen esta condición se les llama *constricciones de segunda clase*.

Definimos a las constricciones de primera clase \mathcal{G}_a a todas aquellas que satisfagan:

$$\{\mathcal{G}_a, \Phi_B\} = \mathcal{C}_{aB}^C(p, q)\Phi_C \quad (\text{B.8})$$

con $a \in \mathbb{N}$, de este modo, las funciones de estructura $\mathcal{C}_{aB}^C(p, q)$ generan un álgebra de Lie, cuando son funciones constantes. En el caso de las constricciones de primera clase no es posible determinar todos los multiplicadores de Lagrange asociados a ellas y éstos son los parámetros arbitrarios que aparecen en las soluciones a las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, para las constricciones de segunda clase (χ_α) , la matriz

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$$

tiene determinante diferente de cero, entonces es invertible permitiendo encontrar todos los multiplicadores de Lagrange. Por lo que si una teoría sólo tiene constricciones de segunda clase no existe libertad de norma aún cuando cumpla con (B.2).

Por lo tanto concluimos que una *teoría de norma*, desde el punto de vista Hamiltoniano, es aquella que satisface (B.2) y tiene al menos una restricción de primera clase.

De acuerdo al Hamiltoniano \mathcal{H}_1 , los generadores de las transformaciones de norma son las constricciones de primera clase primarias, aunque P.A.M Dirac postuló que todas las constricciones de primera clase de todos los órdenes generan una transformación de norma (algo cierto para sistemas físicos) dada por:

$$\delta F = \{F, \epsilon^a \mathcal{G}_a\} \quad (\text{B.9})$$

con ϵ^a una función que, en general, depende del tiempo, posiciones y momentos.

Ahora estamos en la posibilidad de escribir, en lugar del Hamiltoniano \mathcal{H}_1 , otro Hamiltoniano que toma en cuenta todas las constricciones de primera clase y la arbitrariedad al extenderlo fuera de la superficie de restricción, denominado *Hamiltoniano Extendido*:

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_0 + \lambda^a \mathcal{G}_a \quad (\text{B.10})$$

Donde $\mathcal{G}_a \equiv 0$ y $a = 1, \dots$, número de constricciones primera clase.

B.2. Método de Promedio sobre el Grupo de vuelta

“*Group averaging*”, traducido como método de promedio sobre el grupo, es un método muy poderoso para cuantizar sistemas con constricciones, por lo que es empleado en la cuantización de Dirac, la cual deja muchas preguntas abiertas respecto a los observables y al producto interior entre estados físicos.

La importancia de este método radica en que da una forma constructiva de obtener estados físicos y los observables.

Basándose en la cuantización de Dirac, uno genera dos espacios de estados: el primero es auxiliar, denominado el *espacio cinemático* (\mathcal{H}_{kin}), donde las constricciones están formuladas como operadores y el segundo espacio es el *espacio físico* (\mathcal{H}_{phys}) que contiene a los estados que “resuelven” las constricciones:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{G}}|\Psi_{phys}\rangle = |\Psi_{phys}\rangle \quad (\text{B.11})$$

El meollo del asunto es que \mathcal{H}_{phys} lo queremos como un espacio de Hilbert, es decir, hay que bien definir un producto interior.

El espacio de estados cinemáticos se cuantiza de la forma usual, es decir, corresponde a un sistema sin constricciones (simplemente las ignoramos) y para hacerlo un espacio de Hilbert le asignamos el producto interior dado, por ejemplo, como un mapeo de ciertas funciones reales sobre el espacio fase sin constricciones a operadores Hermitianos sobre \mathcal{H}_{kin}

Una vez con el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} , se aplica el método de group averaging para “resolver” las constricciones y definir un producto interior sobre \mathcal{H}_{phys} .

Para detallar este método consideremos que las constricciones son reales y que forman un álgebra de Lie con su grupo unimodular G , entonces las constricciones por ser reales las implementamos como operadores Hermitianos en \mathcal{H}_{kin} ¹ que generan una representación unitaria $U (g \rightarrow U(g))$ del grupo de norma G , entonces, debido a la condición (B.11) los operadores unitarios $U(g)$ dejan invariantes a los estados físicos, es decir,

$$U(g)|\Psi_{phys}\rangle = |\Psi_{phys}\rangle \quad (\text{B.12})$$

Como (B.12) no necesariamente se encuentra en el espectro discreto de $U(g)$, entonces \mathcal{H}_{kin} podría no tener algunas soluciones, por lo que hay que

¹Cuando las constantes de estructura son funciones esto no es posible, como sucede en la teoría de gravedad canónica.

considerar un espacio Φ^* donde si estén y que \mathcal{H}_{kin} esté contenido en éste.² Para obtener este espacio, consideremos primero un subespacio Φ de \mathcal{H}_{kin} de “estados prueba”, entonces construimos Φ^* como el espacio de funcionales lineales sobre Φ que sean continuos respecto a la topología inducida por \mathcal{H}_{kin} .

Φ se escoge de tal manera que los operadores $U(g)$ sea un automorfismo, entonces la acción dual de $U(g)$ estará bien definida sobre $f \in \Phi^*$ dada por

$$U(g)f(\phi) = f(U(g^{-1})\phi) \quad (\text{B.13})$$

$\forall \phi \in \Phi$.

Entonces las soluciones de las constricciones son $f \in \Phi^*$ tales que:

$$U(g)(f) = f \quad (\text{B.14})$$

$\forall g \in G$.

Notamos que los estados físicos no necesariamente están en \mathcal{H}_{kin} , entonces $\int_G dgU(g)$ no es un operador de proyección, pero con el método de group averaging podemos “proyectar” estos estados sobre Φ^* que sí son soluciones a las constricciones. Luego consideramos el mapeo $\eta : \Phi \rightarrow \Phi^*$ dado por

$$|\phi_{kin}\rangle \rightarrow \langle \phi_{kin}| \int_G dgU(g) = \langle \phi_{phys}| \quad (\text{B.15})$$

el cual está bien definido si y solo si la integral $\int_G dg \langle \phi_{kin}|U(g)|\psi_{kin}\rangle$ converge $\forall \phi_{kin}, \psi_{kin} \in \Phi$.

Assumiendo que esto ocurre, tenemos que η es un mapeo antilineal (o semilineal) entre Φ y su dual Φ^* . Debido a la invarianza traslacional de la medida de Haar ³ nos asegura que son soluciones a las constricciones.

Falta definir sólomente el producto interior en \mathcal{H}_{phys} .⁴

$$\langle \eta(\psi_{kin})|\eta(\phi_{kin})\rangle = \eta(\phi_{kin})(\psi_{kin}) \quad (\text{B.16})$$

Este producto interior tiene una propiedad especial:

Operadores Hermitianos invariantes bajo transformaciones de norma en el espacio \mathcal{H}_{kin} serán operadores Hermitianos sobre el espacio \mathcal{H}_{phys} .

²Los elementos de Φ^* son estados generalizados.

³La medida de Haar está dada por dg , en un grupo unimodular de Lie las dos medidas dadas por la traslación derecha e izquierda, son las mismas.

⁴es el mismo producto interior visto con anterioridad solo que escrito de manera más general.

Bibliografía

- [1] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Nueva York-Londres, 2ed. edition, 1970.
- [2] A. Ashtekar, M. Campiglia, and A. Henderson. Path integrals and the WKB approximation in loop quantum cosmology. *Physical Review D*, 82:124043, 2010.
- [3] J. Austrich, A. Garcia-Chung, and J.D. Vergara. Instanton solutions on the polymer harmonic oscillator. 2016. arXiv:1604.07288v2.
- [4] M. Bojowald. *Canonical Gravity and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [5] S. Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [6] G. Dunne. Functional determinants in quantum field theory. page 56, 2009.
- [7] V.A. Novikov et. al. ABC of Instantons. *Usp. Phys. Nauk*, 136:553, 1982.
- [8] G. B. Folland. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [9] F. Grosche, C. Steiner. *Handbook of Feynmann Path Integrals*. Springer, Berlin, 1998.
- [10] J. M. Jauch. *Foundations of Quantum Mechanics*. Addison Wesley, Genova, 1968.

- [11] A.J. McKane K. Kirsten. Functional determinants for general sturm-liouville problems. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, 37:4649–4670, 2004.
- [12] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. World Scientific, Singapore, 5ed. edition, 2009.
- [13] N.P. Landsam. Lectures notes on c^* -algebras, hilbert c^* -modules, and quantum mechanics. page 90, 1998. arXiv: math-ph/987030v1.
- [14] L.Parra and J.D. Vergara. Polymer quantum mechanics some examples using path integrals. AIP Conference Proceedings 1577, 269 (2014).
- [15] Y. Makeenko. *Methods of Contemporary Gauge Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [16] D. Marolf. Group averaging and refined algebraic quantization: Where are we now? *World Scientific*, 2008. arXiv: gr-qc/0011112v1.
- [17] J.P. Peter, P. Uzan. *Primordial Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [18] J. Sakurai, J. J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2ed. edition, 2011.
- [19] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [20] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago-Londres, 1984.
- [21] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1972.
- [22] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [23] A.G. Zenteno, L.F Urrutia, and J.D. Vergara. Introducción a la cuantización de teoría de norma empleando el método BRST-BFV. *Revista Mexicana de Física*, 40:476–498, 1994.