



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

POLÍGONOS VACÍOS EN CONJUNTOS DE PUNTOS COLOREADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias de la Computación

PRESENTA:

Juan Manuel Rosas Gutiérrez

TUTORES

Adriana Ramírez Viguera
Jorge Urrutia Galicia



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer en especial a mis abuelos Manuel y Martha por todo el apoyo y cariño que me han dado durante todo este tiempo y no perder la fe en mi.

También quiero agradecer a mis padres Juan y Adriana por su apoyo y haberme soportado todo este tiempo. A mis hermanos, a mis tíos, primos y toda mi familia.

A mis asesores Adriana y Jorge por la guía a lo largo de este trabajo de tesis, sus sugerencias, correcciones

Agradezco a mis sinodales Carlos Velarde, Canek Peláez y Mucuy-Kak Guevara por todos sus comentarios y correcciones para que este sea un mejor trabajo.

A mis amigos por platicas, apoyo y haber escuchado sobre la tesis o alguna otra locura.

A Conacyt por la beca brindada durante la realización de este trabajo

Índice general

Índice de figuras	VII
1 Introducción	1
1.1 Estructura de la tesis	2
2 Definiciones	3
3 k-ágonos y k-hoyos	7
3.1 k -ágonos	7
3.2 k -hoyos convexos	11
3.3 k -hoyos generales	17
4 k-hoyos coloreados	21
4.1 k -hoyos monocromáticos	21
4.2 k -hoyos balanceados	23
5 3-1-hoyos	29
5.1 Cotas inferiores	29
5.1.1 Cota Mínima 3-1-hoyos generales	34
5.2 Maximizando 3-1-hoyos convexos y generales	42
6 Conclusiones	49
Bibliografía	51

Índice de figuras

2.1.	Ejemplos de polígonos simples y no simples.	3
2.2.	Ejemplos de m -ágonos convexos y no convexos.	4
2.3.	Conjunto de puntos bicoloreados con 3-1-hoyos.	4
2.4.	Rayo del punto p al punto q	5
2.5.	Cuña $\wedge(pqr)$	5
3.1.	5 puntos siempre contienen un cuadrilátero convexo.	8
3.2.	Ejemplos de k -cap y l -cup.	9
3.3.	Formación de l -cap o k -cup en el Teorema Erdős-Szekeres.	10
3.4.	7-hoyo convexo dentro de un 9-hoyo convexo.	12
3.5.	Conjunto de Horton H_4 que no contiene 7-hoyos convexos.	13
3.6.	14
3.7.	Cualquier 7-ágono con 4 vértices en H_k^+ no puede ser 7-hoyo convexo.	15
3.8.	Conjunto con 8-ágono pero sin 6-hoyo [33].	16
3.9.	4 puntos pueden dar lugar a 3-hoyos no convexos.	18
3.10.	Cada pareja de triángulos (uno de cada lado de \overline{pq}) forma un 4-hoyo.	19
3.11.	Diagonales interiores de 4-hoyos.	19
4.1.	8 puntos bicromáticos sin 3-hoyo monocromático	22
4.2.	Conjunto de puntos que sólo contiene cinco 4-hoyos balanceados, formados por los puntos azules, y una de las aristas de puntos rojos marcadas.	23
4.3.	La arista bicromática formada por p y q es roja ya que no es parte de un 4-hoyo balanceado y además $T(p, q)$ está formado por dos puntos rojos.	24
4.4.	Dos puntos consecutivos rojos y dos azules de la Doble Cadena generan un 4-hoyo balanceado.	25
5.1.	Puntos en posición convexa y los 3-1-hoyos que se forman con 3 puntos azules fijados y cada uno de los puntos rojos.	30
5.2.	3-1-hoyo dentro de un cuadrilátero con arista bicromática intersectada con una arista roja.	31
5.3.	Ninguna arista bicromática (verdes) intersecta una arista del triángulo $p_0p_1p_2$	32
5.4.	Construcción de la doble cadena.	33
5.5.	No hay un punto rojo en las cuñas formadas por b_1, b_3 y b_5	34

5.6. Tres 3-1-hoyos para un triángulo monocromático con un punto dentro de otro color.	35
5.7. Dos puntos son necesarios para bloquear los tres 3-1-hoyos. . .	35
5.8. Bloque de 5 puntos.	36
5.9. Bloque de 1 punto.	36
5.10. Bloque de 1 punto sin 3-1-hoyo.	37
5.11. Bloque de 2 puntos.	37
5.12. Bloque de 2 puntos sin 3-1-hoyo en la cuña $\wedge(pb_1b_2)$	38
5.13. Bloque de 5 puntos.	38
5.14. Bloque de 3 aristas bicromáticas con un único 3-1-hoyo.	39
5.15. Bloque de puntos del mismo color.	39
5.16. 3-1-hoyo repetido respecto a p y b_1	40
5.17. Sobre cuenta cuando el bloque tiene 1 punto.	40
5.18. El tercer caso cuando tres o más puntos en el bloque respecto a p	41
5.19. Fijando las aristas $\overline{p_1p_2}$ y $\overline{p_2p_3}$, sólo puede formarse un 3-1-hoyo.	42
5.20. Puntos exteriores a T	44
5.21. 4-tupla roja no vacía.	45

1 Introducción

Las Ciencias de la Computación son una rama del saber relativamente joven, aunque a lo largo de la historia han aparecido ya ideas y mecanismos que pueden considerarse como parte de las Ciencias de la Computación, por ejemplo, en libros como *Los Elementos* de Euclides y mecanismos como el *ábaco*. No fue hasta años recientes que comenzó a formalizarse su estudio como una ciencia, en 1931 Kurt Gödel [36] con su teorema de incompletitud dio los fundamentos matemáticos de las Ciencias de la Computación, y en 1936 Alan Turing y Alonzo Church presentaron la formalización de un algoritmo, con límites en lo que puede ser calculado, y un modelo “puramente mecánico” para la computación [20, 21].

La Geometría Computacional es una rama de las Ciencias de la Computación cuyo objeto de estudio son algoritmos para resolver problemas del tipo geométrico. Una de sus ramas, y en la cual reside el problema tratado en esta tesis, es la *Geometría Computacional Combinatoria* la cual, como su nombre lo indica, está íntimamente relacionada con la Geometría Combinatoria; ambas tienen un enfoque diferente de un mismo problema. La Geometría Combinatoria es una rama de las Matemáticas Discretas que estudia las propiedades combinatorias de objetos geométricos discretos.

Por un lado la Geometría Combinatoria se pregunta sobre las propiedades y diferentes configuraciones que puedan tener ciertos objetos geométricos, y la Geometría Computacional se pregunta sobre la eficiencia tanto en tiempo y espacio del algoritmo que contabiliza dichas configuraciones, o la construcción de los mismos objetos. La relación que tienen ambas disciplinas es que la complejidad de un algoritmo puede depender de las propiedades combinatorias que tienen los objetos geométricos y a la vez un algoritmo puede darnos una noción de qué propiedades pueden tener ciertos objetos geométricos [55].

1.1. Estructura de la tesis

El objeto de estudio de esta tesis radica en las variantes del problema de Erdős-Szekeres [27] sobre la existencia y cantidad de m -ágonos vacíos convexos en un conjunto de puntos en el plano. A lo largo de toda la tesis supondremos que trabajamos con familias de puntos están en posición general a menos que se diga explícitamente lo contrario.

En el capítulo 3 se exponen los resultados sobre m -ágonos vacíos o m -hoyos, como el famoso "*Happy end problem*" así como las ideas que se usaron para resolver los problemas de este estilo.

En el capítulo 4 se tratará la variante donde los conjuntos de puntos en el plano están coloreados, y definimos m - n -hoyos donde los hoyos están formados por m puntos de una clase cromática y n de la otra clase.

El capítulo 5 nos enfocamos en la variante de m - n -hoyos donde $m = 3$ y $n = 1$. Aquí se expondrán los resultados, entre los cuales está la existencia y cota mínima $O(n^2)$, así como cotas máximas en las variantes de 3-1-hoyos convexos, no convexos y generales.

En el resto del presente capítulo se darán las definiciones básicas para el entendimiento de la tesis.

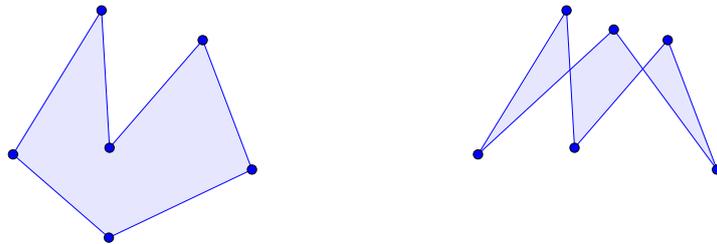
2 Definiciones

Casi todas las definiciones fueron obtenidas de [54] que a su vez la mayoría fueron obtenidas de [53]. Sea S un conjunto de puntos en el plano.

Definición 1 El conjunto S está en posición general si no hay 3 puntos colineales de S , es decir, si no existe una línea recta que pase por 3 puntos de S .

Definición 2 Un polígono en S es la región del plano cerrada y conexa, cuyo contorno consiste en segmentos de recta consecutivos, formando una curva cerrada. A los extremos de estos segmentos se les conoce como vértices del polígono y a los segmentos como aristas, la arista que hay entre dos vértices p y q , de S , se representará como \overline{pq} .

Un polígono es simple si no existen 2 aristas que se intersecten salvo en el vértice que comparten si son consecutivos. Un polígono con m vértices se representará como un m -ágono (figura 2.1a).



(a) Polígono simple.

(b) Polígono no simple.

Figura 2.1: Ejemplos de polígonos simples y no simples.

Definición 3 Un polígono P es convexo si para cualesquiera dos vértices $p_1, p_2 \in P$ el segmento de recta $\overline{p_1p_2}$ está completamente contenido en P (figura 2.2).

Definición 4 Un m -hoyo es un m -ágono cuyos puntos son vértices de S y no contiene en su interior puntos de S .

Definición 5 Decimos que S está k -coloreado si S está dividido en $k \geq 1$ partes no vacías y ajenas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ llamadas clases cromáticas de S . A los puntos



(a) 6-ágono convexo. (b) 7-ágono no convexo.

Figura 2.2: Ejemplos de m -ágonos convexos y no convexos.

de la clase S_i los llamaremos puntos de color i . Si S sólo tiene puntos de una clase cromática diremos que es monocromático y si tiene puntos de dos clases cromáticas distintas diremos que es bicoloreado.

Definición 6 Sea $S = S_1 \cup S_2$ un conjunto de puntos bicoloreados, un m - n -hoyo de S es un k -hoyo de S tal que tiene exactamente m vértices de una clase cromática y n de la otra y además $m + n = k$ (figura 2.3).

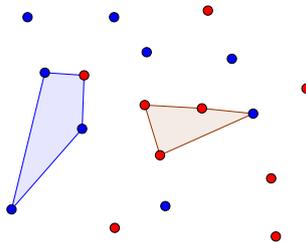


Figura 2.3: Conjunto de puntos bicoloreados con 3-1-hoyos.

Definición 7 Un rayo de p a q denotado por \vec{pq} es el segmento de recta que empieza en p y se extiende al infinito pasando por q (figura 2.4).

Definición 8 Sean p, q y r tres puntos no colineales. Definimos la cuña $\wedge(pqr)$ como el espacio entre los rayos \vec{pq} y \vec{pr} . A p se le conoce como ápice (figura 2.5).

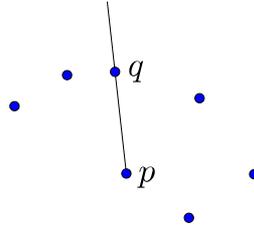


Figura 2.4: Rayo del punto p al punto q .

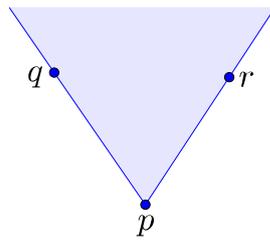


Figura 2.5: Cuña $\wedge(pqr)$.

3

k -ágonos y k -hoyos

Este capítulo está basado en [1, 17, 46, 57], en donde se trata el Teorema Erdős-Szekeres que dice “para todo número natural k existe un número $g(k)$ tal que cualquier conjunto con al menos $g(k)$ puntos en posición general contiene un k -ágono convexo”. Además se darán resultados sobre k -ágonos y k -hoyos.

3.1. k -ágonos

En 1933 Esther Klein planteó la siguiente pregunta: “¿Es verdad que para cualquier número k hay un mínimo entero $g(k)$ tal que para cualquier conjunto de $g(k)$ puntos siempre contiene un k -ágono convexo?” Klein observó que $g(4) = 5$ ya que, para cinco puntos, sólo hay 3 configuraciones de puntos (figura 3.1). Aquí fue donde se despertó el interés de Erdős y Szekeres en el problema siendo parcialmente respondido en 1935 [27]. El problema es conocido dentro de la literatura como *Happy end problem* (El problema del final feliz) ya que Szekeres y Klein se comprometieron mientras colaboraban, casándose al poco tiempo después [16, 38].

Kalbfleisch y otros probaron que $g(5) = 9$ en 1970 [42]. El problema es realmente complicado, pues no fue hasta el año 2006 que el caso $k = 6$ fue resuelto por una búsqueda exhaustiva por computadora donde se prueba que $g(6) = 17$ [55]. Esta forma de búsqueda por computadora fue introducida por Goodman y Pollack [35] en 1983 en la cual se asigna una orientación a cada terna de puntos en el plano. Usando varias observaciones de Szekeres y Peters se pudieron reducir significativamente la cantidad de configuraciones, haciendo el problema tratable desde una computadora al buscar soluciones para conjuntos pequeños y así tratar de encontrar un patrón que se pueda generalizar [12].

El famoso Teorema Erdős–Szekeres [27] muestra que $g(k)$ es finito para toda k .

Teorema 3.1.1 Para todo número natural k existe un número $g(k)$ tal que cualquier conjunto con al menos $g(k)$ puntos en posición general contiene un k -ágono convexo.

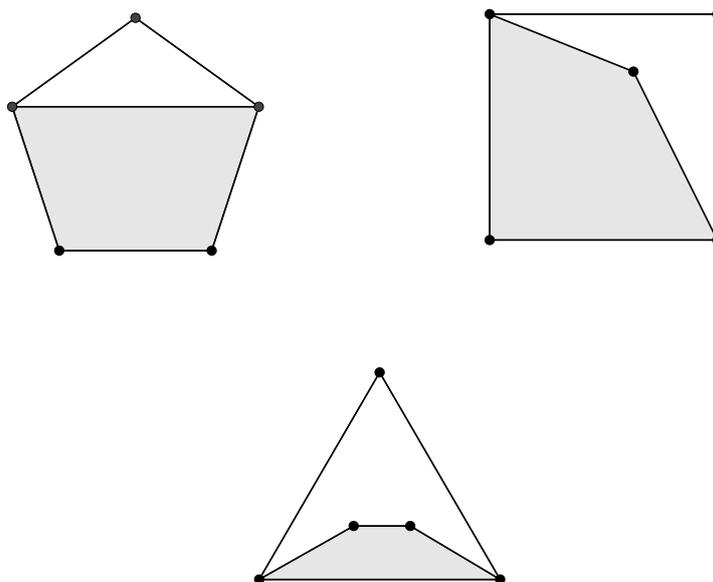


Figura 3.1: 5 puntos siempre contienen un cuadrilátero convexo.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que todos los puntos tienen una coordenada x diferente, en caso de que no fuera así, bastaría con hacer una pequeña rotación.

Sea X un conjunto de puntos en posición convexa; diremos que X es un *cup*, si su cierre convexo tiene una arista, tal que deja todos los puntos por debajo, es decir, si los vértices de X se encuentran en la gráfica de una función convexa, por lo cual al tomar las pendientes de las rectas de los vértices tomados de izquierda a derecha éstos aumentarán (figura 3.2a).

Análogamente, X es un *cap* si su cierre convexo tiene una arista que deja todos los puntos arriba, o podemos ver a los vértices de X como gráfica de una función cóncava (figura 3.2b). En español *cap* es gorra y *cup* es copa, pero por su prevalencia en la literatura se usan los términos en inglés.

Un k -*cap* es un *cap* con k vértices y un l -*cup* es un *cup* con l vértices.

Definimos $f(k, l)$ como el menor número tal que para cualquier conjunto de $f(k, l)$ puntos tiene un k -*cap* o un l -*cup*, como están en posición convexa, se cumple que:

$$g(k) \leq f(k, k),$$

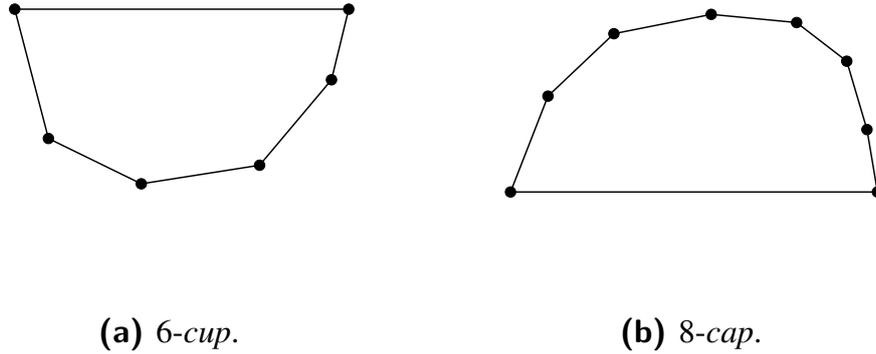


Figura 3.2: Ejemplos de k -cap y l -cup.

por lo que bastará dar una cota superior de $f(k, k)$ para probar el teorema 3.1.1.

A continuación probaremos por inducción la siguiente desigualdad;

$$f(k, l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1. \quad (3.1)$$

Caso Base: Si $k \leq 2$ o $l \leq 2$ entonces se cumple claramente la igualdad, pues $f(2, l) = f(k, 2) = 2 = 1 + 1 = \binom{l-2}{0} + 1 = \binom{k-2}{k-2} + 1$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que $k, l \geq 3$ y tanto $f(k-1, l)$ como $f(k, l-1)$ cumplen la ecuación 3.1.

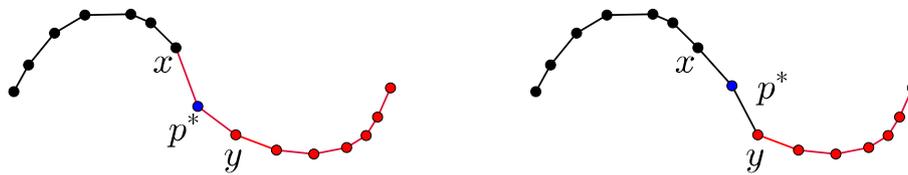
Sea P un conjunto con $f(k-1, l) + f(k, l-1) + 1$ puntos, a continuación probaremos que P tiene un k -cup o un l -cup. Por contradicción, supongamos que P no contiene un k -cup ni un l -cup. Sea X el conjunto de los primeros $f(k-1, l)$ puntos de P de izquierda a derecha, es decir, tiene una coordenada x menor y sea $Y = \emptyset$. X no puede tener un l -cup porque entonces P tendría un l -cup y estamos suponiendo que no contiene uno, en consecuencia tiene un $(k-1)$ -cup.

El algoritmo procederá de la siguiente forma: tomaremos el elemento p más a la derecha de X y lo agregaremos a Y , es decir, $Y = Y \cup \{p\}$. A su vez eliminaremos a p de X , $X = X \setminus \{p\}$. Repetiremos este proceso hasta que no haya más elementos en P por lo que Y tendrá $f(k, l-1)$ elementos. Nuevamente, Y no puede tener un l -cup pues estaría en P y sería una contradicción, en consecuencia Y tiene un $(l-1)$ -cup. Por construcción Y está formado por puntos que son parte de un $(k-1)$ -cup. Sea p^* el punto mas a la izquierda del $(l-1)$ -cup de

Y y sea x el penúltimo elemento del $(k - 1)$ -*cap* del que tomamos a p^* y sea y el segundo elemento del $(l - 1)$ -*cup* de Y . Como los puntos están en posición general, entonces p^* , x , y forman un 3-*cup* o un 3-*cap*.

Si p^* , x y y forman un 3-*cup* entonces podemos agregar a y al $(k - 1)$ -*cap* del que forma parte p^* con lo que tendríamos un k -*cap* lo cual sería una contradicción (figura 3.3a).

Si es un 3-*cap* entonces podemos agregar a x al $(l - 1)$ -*cup* de Y , formando así un l -*cup* lo cual es una contradicción (figura 3.3b).



(a) Formación l -*cap*.

(b) Formación k -*cup*.

Figura 3.3: Formación de l -*cap* o k -*cup* en el Teorema Erdős-Szekeres.

Por lo tanto se cumple la ecuación 3.1 y en consecuencia se cumple que

$$g(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1.$$

□

Las mejores cotas para el problema son $2^{k-2} + 1 \leq g(k) \leq \binom{2k-5}{k-2} + 1$ para $k > 5$. La cota inferior es de Erdős y Szekeres [28], la cual se sabe que es justa para $n = 2, 3, 4$ y 5 . Se conjetura que es justa.

La cota superior ha sido mejorada a lo largo de los años. La cota de Erdős-Szekeres fue $g(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1$ la cual mostramos en el Teorema 3.1.1. Posteriormente el $+1$ sería eliminado por Chung y Graham [19], para esto tuvieron que pasar 63 años lo cual, como habíamos mencionado, nos da una idea de la dificultad del problema.

Después Kleitman y Pachter [44] mejoraron la cota a $g(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 7 - 2k$. Finalmente G. Tóth y P. Valtr mejoraron la cota primeramente a $g(k) \leq \binom{2k-5}{k-2} + 2$ [56] en 1988 y después en 2005 reduciendo el $+2$ por $+1$ siendo actualmente la mejor cota obtenida por estos autores [57].

En 1973, Erdős y Guy plantearon en [26] la siguiente generalización: “¿Cuál es el menor número de k -ágonos convexos que contiene cualquier conjunto S con n puntos?” La solución trivial para el caso $k = 3$ es $\binom{n}{3}$ puesto que, como los puntos están en posición general, cada terna de puntos forma un triángulo y entonces al menos tenemos $\binom{n}{3}$, que de hecho también es el máximo.

Para $k = 4$ la pregunta resulta particularmente difícil, ya que está relacionada con el problema de búsqueda del número de cruces rectilíneos de S , denotado normalmente por $\overline{cr}(S)$. Si tomamos la gráfica completa de S entonces $\overline{cr}(S)$ es el mínimo número de intersecciones propias (entre aristas) que ocurren para cualquier conjunto S de cardinalidad n . Determinar $\overline{cr}(S)$ es un problema bien conocido de la Geometría Discreta; pueden consultarse referencias generales del problema en [5, 16, 26] y para conjuntos pequeños la referencia es [2].

Para finalizar la sección de k -ágonos, en la tabla 3.1 se muestran las mejores cotas para k -ágonos convexos, no convexos y generales [5].

	convexo	no convexo	general	
	mínimo	máximo	mínimo	máximo
$k = 4$	$\overline{cr}(n)$ $\Theta(n^4)$	$3\binom{n}{4} - 3\overline{cr}(n)$ $\Theta(n^2)$ [11]	$\binom{n}{4}$ $\Theta(n^2)$ [11]	$3\binom{n}{4} - 2\overline{cr}(n)$ $\Theta(n^2)$ [11]
$k = 5$	$\Theta(n^5)$ [16]	$10\binom{n}{5} - 2(n-4)\overline{cr}(n)$ $\Theta(n^5)$ [11]	$\binom{n}{5}$ $\Theta(n^5)$ [11]	$\Theta(n^5)$ [5]
$k \geq 6$	$\Theta(n^k)$ [5]	$\Theta(n^k)$ [5]	$\binom{n}{k}$ $\Theta(n^k)$ [5]	$\Theta(n^k)$ [5]

Tabla 3.1: Cotitas para el número de k -ágono convexos, no convexos y generales, obtenida de [5].

3.2. k -hoyos convexos

Los k -hoyos son una variante del problema Erdős-Szekeres donde pedimos que el k -ágono esté vacío, es decir, no tenga puntos en su interior. Fue en el año 1978

en que Erdős planteó la siguiente pregunta relacionada a k -hoyos: “¿Cuál es el menor entero $h(k)$ tal que para cualquier conjunto S con $h(k)$ puntos en el plano contiene al menos un k -hoyo convexo?” La respuesta trivial para $h(3)$ es 3 pues 3 puntos en posición general siempre definen un triángulo y $h(4)$ es 5 pues todas las configuraciones de 5 puntos tienen un 4-hoyo (figura 3.1) y con 4 puntos podemos tener un triángulo con un punto adentro. Por su parte Harborth mostró que 10 puntos siempre contienen un 5-hoyo convexo [37], es decir, $h(5) = 10$. Cinco años después Horton mostró que hay conjuntos arbitrariamente grandes que no contienen 7-hoyos convexos; a esta construcción se le conoce como el conjunto de Horton [39] (figura 3.5).

Como el conjunto de Horton puede ser arbitrariamente grande y no tiene 7-hoyos convexos, en consecuencia para toda $k \geq 7$ tampoco tendrá un k -hoyo puesto que entonces tendría un 7-hoyo (figura 3.4). A continuación mostraremos la construcción de dicho conjunto, así como las razones por las que no puede tener un 7-hoyo.

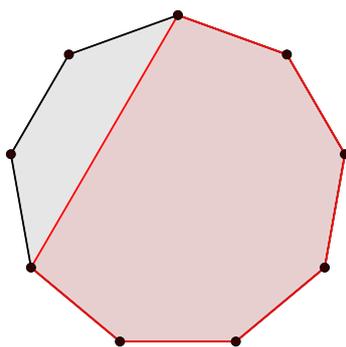


Figura 3.4: 7-hoyo convexo dentro de un 9-hoyo convexo.

Definición 9 Sea H un conjunto finito de puntos en el plano. H es un conjunto de Horton si $|H| \leq 1$ o se cumple que existen dos subconjuntos H^- , H^+ tales que:

- $H = H^+ \cup H^-$.
- H^+ y H^- son conjuntos de Horton.
- Dados $p, q \in H^+$, $p \neq q$ la recta que pasa por p y q deja todos los puntos de H^- por debajo, y dados $r, s \in H^-$, $r \neq s$ la recta que pasa por r y s deja todos los puntos de H^+ por encima.

A continuación mostraremos la construcción recursiva mostrada en [39]. Sea k un entero positivo; el conjunto de Horton H_k con 2^k puntos se define como:

1. $H_1 = \{(0,0), (1,0)\}$
2. H_k consiste de dos conjuntos H_{k-1}^- y H_{k-1}^+ definidos a partir de H_{k-1} , si $p = (i, j) \in H_{k-1}$ entonces $p' = (2i, j) \in H_{k-1}^-$ y $p'' = (2i + 1, j + d_k) \in H_{k-1}^+$, donde d_k es un número lo suficientemente grande para que la recta que pase por cualquiera dos puntos de H_{k-1}^+ deje por debajo a todos los puntos de H_{k-1}^-

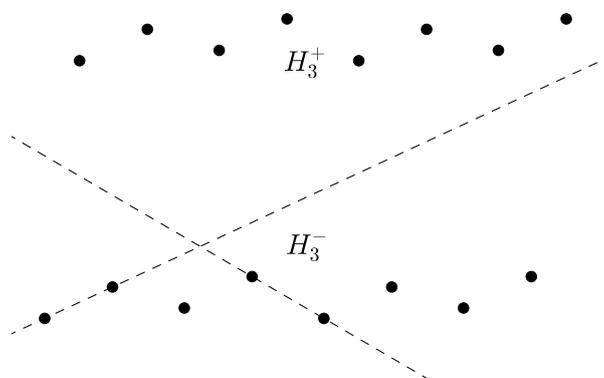


Figura 3.5: Conjunto de Horton H_4 que no contiene 7-hoyos convexos.

Ahora bien, visto de una manera mucho más simple, cada iteración de Horton toma la anterior, la mueve un poco a la derecha y la sube lo suficiente. Si ordenamos los puntos con respecto a la coordenada x , observaremos que alternará entre H_{k-1}^- y H_{k-1}^+ . Antes de probar que el conjunto de Horton no contiene k -hoyos convexos para $k \geq 7$ probaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.1 Para todo 4-cap de H_k existe un punto debajo de él.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre k .

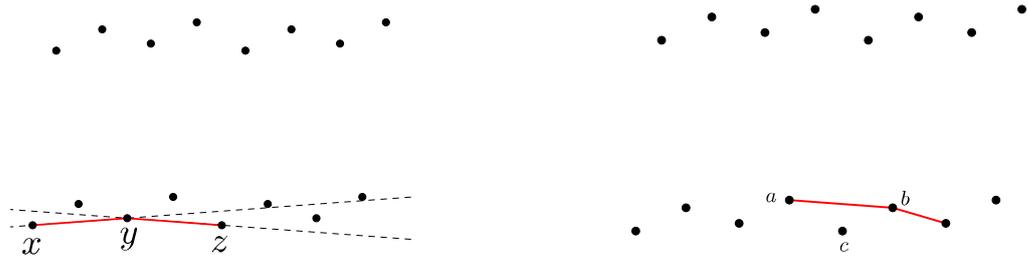
Caso base: $k = 2$ tendremos 4 puntos en zigzag y entonces por vacuidad se cumple la propiedad.

Hipótesis de inducción: Para 4-cap $\in H_{k-1}$ existe un punto de H_{k-1} que está por debajo del 4-cap.

Por contradicción supongamos que H_k tiene un 4-cap C tal que no tiene un punto de H_k debajo de él. Como H_{k-1}^+ y H_{k-1}^- son un conjunto de Horton H_{k-1} , C no puede estar completamente contenido en H_{k-1}^+ ni en H_{k-1}^- pues por hipótesis de inducción tendría un punto debajo de él. En consecuencia debe tener puntos tanto en H_{k-1}^+ como en H_{k-1}^- .

C no puede tener 3 puntos en H_{k-1}^- , digamos x, y, z ordenados de izquierda a derecha, ya que para todo $p \in H_{k-1}^+$ las rectas generadas por x, y, z pasan por debajo de p impidiendo así la formación de un 4-cap (figura 3.6a).

Por lo tanto deben haber dos puntos de C en H_{k-1}^+ digamos a, b . Si vemos los puntos de izquierda a derecha debe haber un punto en $c \in H_{k-1}^-$ tal que está entre a, b como quedaría debajo de C entonces $c \in C$, pero ésta configuración no puede formar un cap pues tendríamos pendientes aumentando, por lo tanto, para todo 4-cap en H_k existe un punto debajo de él (figura 3.6b).



(a) Si hay 3 puntos x, y, z en H_{k-1}^- entonces las rectas generadas por estos puntos dejan por encima todos los puntos de H_{k-1}^+ impidiendo formar un 4-cap.

(b) Si a y $b \in H_{k-1}^+$ entonces $\exists c \in H_{k-1}^-$ debajo del cap y no puede ser parte del 4-cap.

Figura 3.6

□

Análogamente se prueba que para todo 4-cup de H_k existe un punto por encima de él. Ahora probaremos que todo conjunto de Horton no puede contener un 7-hoyo convexo.

Teorema 3.2.1 H_k no contiene un 7-hoyo convexo.

Demostración. La prueba se hará por inducción en k .

Caso Base: Para $k = 1$ no existen 7 puntos, por lo que la propiedad se cumple por vacuidad.

Hipótesis de inducción: Para toda $k' < k$, $H_{k'}$ no tiene 7-hoyos convexos

Por contradicción supongamos que H_k tiene un 7-hoyo convexo, llamado h . Como por hipótesis de inducción H_{k-1}^+ y H_{k-1}^- no tienen 7-hoyos convexos, en consecuencia h debe tener puntos en H_{k-1}^+ y H_{k-1}^- teniendo en alguno de los dos al menos 4 puntos, si dichos puntos están en H_{k-1}^+ entonces formarán un 4-*cap* por ser h convexo, si están en H_{k-1}^- entonces formarán un 4-*cup*. Si tenemos un 4-*cap* entonces por el lema 3.2.1 hay un punto en H_{k-1}^+ que está por debajo del 4-*cap*, por lo que estará dentro de h , y entonces h no sería un hoyo convexo (figura 3.7). Análogamente si tenemos un 4-*cup*, de donde concluimos que H no tiene 7-hoyos convexos.

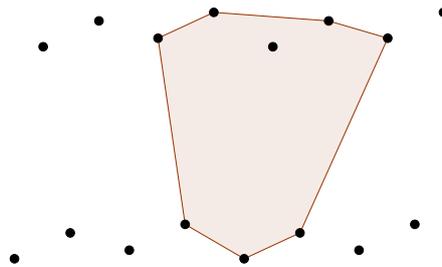


Figura 3.7: Cualquier 7-ágono con 4 vértices en H_k^+ no puede ser 7-hoyo convexo.

□

La respuesta para $k = 6$ fue en extremo difícil, hubo muchos intentos de resolverla. Horton en su artículo donde muestra que no siempre hay 7-hoyos convexos, menciona su creencia de que $h(6)$ existe [39], Overmars y otros muestran que de existir debe cumplir que $h(6) \geq 27$ [49]. No fue sino hasta el año 2007/08 que Nicolás [47] e independientemente por Gerken [33, 34] que conjuntos de puntos suficientemente grandes siempre tienen al menos un 6-hoyo. La idea de ambas pruebas es observar que para una cierta k , dentro de un k -ágono hay un 6-hoyo. Nicolás probó que $h(6) \leq g(25)$ mientras que Gerken probó de manera exhaustiva que si en un conjunto hay un 9-ágono convexo, entonces hay un 6-hoyo, permitiendo así mejorar la cota a $h(6) \leq g(9)$. No es posible obtener una mejor cota aproximando por k -ágonos puesto que hay conjuntos de puntos que no contienen 6-hoyos pero sí 8-ágonos [33, 48] (figura 3.8).

La mejor cota mínima para $h(6)$ es 30, ya que hay conjuntos con 29 puntos que

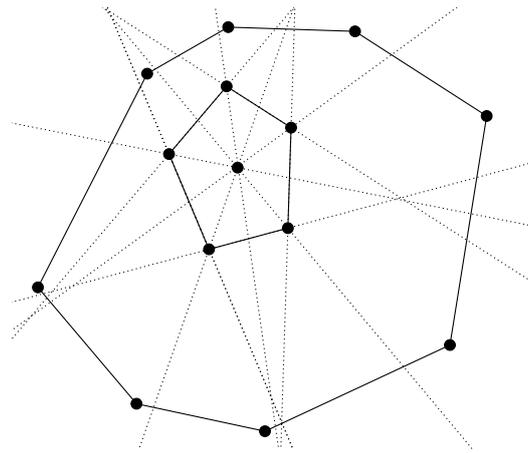


Figura 3.8: Conjunto con 8-ágono pero sin 6-hoyo [33].

no contienen 6-hoyos convexos. El conjunto fue encontrado por una búsqueda exhaustiva por computadora por Overmars en 2002 [48]. La cota superior está acotada por $h(6) \leq g(6) \leq 1,717$. Cabe resaltar que de ser cierta la conjetura de Erdős $g(k) = 2^{k-2} + 1$ la cota baja a 129 puntos.

La generalización natural a la pregunta de Erdős sobre k -hoyos es: “¿Cuál es el menor número $h_k(n)$ de k -hoyos convexos determinado por cualquier conjunto de n puntos en el plano?” La Tabla 3.2 muestra las mejores cotas para $k = 3, \dots, 6$ [5].

$$\begin{aligned}
 n^2 - \frac{32}{7}n + \frac{22}{7} &\leq h_3(n) \leq 1.6196n^2 + o(n^2) \\
 \frac{n^2}{2} - \frac{9}{4}n - o(n) &\leq h_4(n) \leq 1.9397n^2 + o(n^2) \\
 \frac{3}{4}n - o(n) &\leq h_5(n) \leq 1.0207n^2 + o(n^2) \\
 \frac{n}{229} - 4 &\leq h_6(n) \leq 0.2006n^2 + o(n^2)
 \end{aligned}$$

Tabla 3.2: Cotas para $h_k(n)$ para $k = 3, 4, 5, 6$ [7, 18, 58].

Las cotas superiores de la Tabla 3.2 son de Bárány y Valtr [18], las cuales fueron mejoras de las construcciones de Dumitrescu del año 2000 [25], que a su vez fue mejora de lo publicado por Valtr en el año 1992 [59].

Respecto a las cotas inferiores para $k \leq 5$, Dehnhardt mostró en su tesis de doctorado [22] que $n \geq 13$, $h_3(n) \geq n^2 - 4n + 10$, $h_4(n) \geq \binom{n-3}{2} + 6$ y $h_5(n) \geq 3 \lfloor \frac{n}{12} \rfloor$ en el año de 1987 y posteriormente se publicaron cotas mas débiles para dichos casos, la razón de ello, es que la tesis fue publicada en alemán y además era de difícil acceso. Sólo hasta el año 2011 fue posible mejorar el resultado [7, 10, 11, 30, 31, 58], la mejor cota fue dada por Aichholzer y otros en 2014 [7] usando un resultado de García [31].

Una pregunta que surge es si hay una relación entre $h_k(n)$, $h_j(n)$ donde $k \neq j$, y la respuesta es afirmativa. En el año 2006 [52] Pinchasi mostró que $h_4(n) \geq h_3(n) - \frac{n^2}{2} - O(n)$ y $h_5(n) \geq h_3(n) - n^2 - O(n)$. La consecuencia directa de esto es que si se mejora el factor cuadrático de la cota inferior en $h_3(n)$ implica una mejor cota inferior para $h_4(n)$ y $h_5(n)$.

La cota inferior para 6-hoyos actual fue dada por Valtr[58] basándose en el resultado de Koshelev de $h_6(463) \geq 1$ [45]. Cabe resaltar que la idea de usar $h_6(n)$ de un n en particular fue primeramente usada en el año 2011 [4] donde basándose en que $h_6(1,717) \geq 1$ de Gerken [34], dando por resultado que $h_6(n) \geq \lfloor \frac{n-1}{858} \rfloor - 2$ de usarse el resultado de Koshelev se llega a que $h_6(n) \geq \frac{n}{231} - O(1)$.

3.3. k -hoyos generales

La siguiente variación es cuando empezamos a contar k -hoyos no convexos. Dado un conjunto S de n puntos en el plano, ¿hay más k -hoyos convexos o k -hoyos no convexos? Recordemos que por k -hoyo general nos referimos a un k -ágono vacío donde no nos importa si es convexo o no. ¿Cuáles son las cotas mínimas y máximas para k -hoyos no convexos y generales? A partir de este momento cuando se digamos k -hoyo nos referiremos a un k -hoyo general.

Es claro que para k -hoyos convexos los conjuntos que maximizan son de puntos en posición convexa, sin embargo no necesariamente es así cuando consideramos k -hoyos generales pues k puntos en posición convexa dan lugar a un hoyo convexo, pero si tomamos una configuración diferente, puede haber más de un hoyo no convexo (figura 3.9).

Las respuestas para 4-hoyos han sido respondidas en [6] donde se muestra que para $n \geq 9$ el conjunto que maximiza el número de 4-hoyos son puntos en posición convexa; dicha prueba dio la idea para probar el teorema 5.2.1, la cual

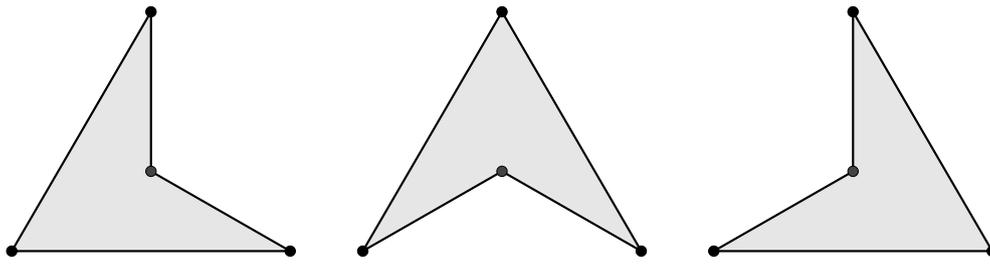


Figura 3.9: 4 puntos pueden dar lugar a 3-hoyos no convexos.

consiste en partir de una cota superior de un conjunto S con triángulos no vacíos e ir reduciendo la cota, observando que el mínimo número de 4-hoyos es al menos $\frac{5}{2}n^2 - \Theta(n)$ y que el máximo número de 4-hoyos no convexos es al menos $\frac{n^3}{2} - \Theta(n^2 \log(n))$.

Los resultados de 5-hoyos se pueden consultar en [11] donde se muestra que para $n \geq 86$, el conjunto que maximiza el número de 5-hoyos es de puntos en posición convexa; que el mínimo número de 5-hoyos es al menos $17n^2 - O(n)$; y que el máximo número de 5-hoyos no convexos es al menos $\frac{n^3}{2} - \Theta(n^2 \log(n))$.

Claramente hay similitudes entre las pruebas de 4-hoyos y 5-hoyos, por lo que en 2014 se probaron los resultados correspondientes a k -hoyos [5]. El máximo número de k -hoyos se alcanza con conjuntos en posición convexa para toda $k \geq 4$ y $n \geq 2(k-1) \binom{k}{4} + k - 1$ [5]; el máximo número de k -hoyos no convexos está acotado por $O(n^{k-1})$, siendo una cota justa pues hay conjuntos con $\Omega(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos.

Una conjetura sobre 3-hoyos es que cualquier conjunto S de puntos contiene un segmento tal que pertenece a un número superconstante de 3-hoyos, dicha conjetura es de Bárány-Károlyi, y fue de especial interés al ver la relación del problema de 3-1-hoyos con la conjetura, puesto que una cota supercuadrática de 4-hoyos (un 3-1-hoyo es un 4-hoyo en conjunto de puntos sin colorear) probaría la conjetura en lo afirmativo [6]; desafortunadamente no fue posible superar la cota.

Conjetura 1 (Bárány-Károlyi) Dado un conjunto de n puntos en el plano existen un par de puntos incidentes en un número superconstante de triángulos vacíos de puntos de dicho conjunto.

Proposición 3.3.1 Supongamos que S tiene un número supercuadrático de 4-hoyos, entonces contiene un par puntos que son incidentes en un número superconstante de 3-hoyos [6].

Demostración. Sean $p, q \in S$ y $f(p, q)$ el número de 4-hoyos de los que la arista \overline{pq} es una diagonal. Observemos que cada 4-hoyo de la arista nos da dos 3-hoyos. Definamos como $\Delta_1(p, q)$, $\Delta_2(p, q)$ como los triángulos vacíos de cada lado de la arista \overline{pq} , entonces como el triángulo de cada lado determina un 4-hoyo (figura 3.10), tenemos que $f(p, q) = \Delta_1(p, q) \cdot \Delta_2(p, q)$.

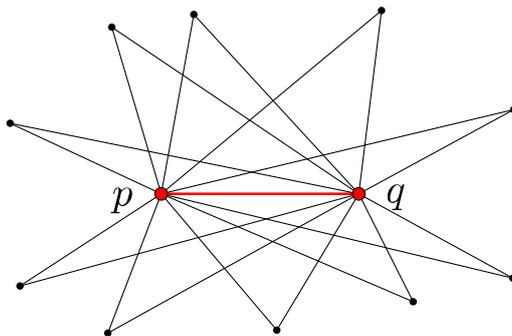


Figura 3.10: Cada pareja de triángulos (uno de cada lado de \overline{pq}) forma un 4-hoyo.

Un 4-hoyo convexo tiene dos diagonales y un 4-hoyo no convexo tiene solamente una diagonal (figura 3.11), por lo que si hacemos la suma $\sum_{p, q \in S} f(p, q)$ nos debe dar 2 veces el número de 4-hoyos convexos más una vez los 4-hoyos no convexos; como por hipótesis tenemos un número supercuadrático de 4-hoyos y un número cuadrático de aristas \overline{pq} entonces debe haber al menos un par de puntos p^*, q^* tal que $f(p, q)$ es superconstante, lo cual implica que la arista \overline{pq} es incidente a un número superconstante de 3-hoyos.

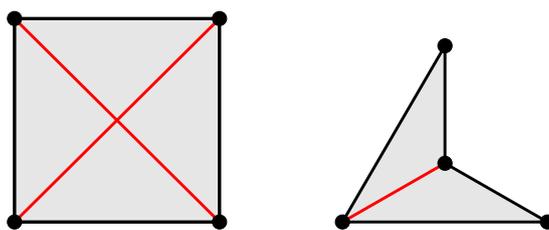


Figura 3.11: Diagonales interiores de 4-hoyos.

□

4 k -hoyos coloreados

En éste capítulo nos enfocaremos en las versiones coloreadas o cromáticas de k -hoyos, donde los n puntos que tiene el conjunto S serán divididos en clases. El término coloreado, viene de que normalmente a cada clase cromática se le asigna un color, entonces surgen las mismas preguntas que estudiamos en el capítulo 3 pero con restricciones respecto a por ejemplo que un k -hoyo sólo puede tener m vértices de un cierto color y también qué tanto varían las cotas al variar m ; cuando $k = m$ diremos que es un k -hoyo monocromático. Se usó la siguiente referencia como base para el capítulo [1].

Comenzaremos el capítulo estudiando el problema que empezó esta variante.

4.1. k -hoyos monocromáticos

La variante de k -hoyos cromáticos fue introducida en el año 2003 por Devillers y otros [23], ellos mostraron que el número de 3-hoyos monocromáticos disjuntos (que no comparten aristas) en cualquier conjunto bicromático de n puntos determina al menos $\lceil \frac{n}{4} \rceil - 2$, la cota resulto justa.

Otra pregunta es, cuál es el mínimo número de puntos para el cual siempre hay un 3-hoyo monocromático. Aquí vemos la importancia de saber acerca de k -hoyos para aplicar a k -hoyos cromáticos (como era de esperarse). Sabemos que 10 puntos siempre contienen un 5-hoyo convexo [37] y al menos 3 de ellos son de un solo color por lo que forman un 3-hoyo monocromático. Actualmente se sabe que hay conjuntos con 8 puntos que no contienen 3-hoyos monocromáticos (Figura 4.1), y que 9 es el mínimo número necesario, de hecho hay conjuntos de puntos de 9 y 10 puntos con solo un 3-hoyo monocromático. Como podemos dividir un conjunto de n puntos en subconjuntos de 9, esto daría una cota lineal, sin embargo, ¿cuál es el mínimo número de 3-hoyos monocromáticos?

La pregunta permanece abierta, sin embargo se han dado cotas superlineales, siendo la primera de $\Theta(n^{5/4})$ [3], cuya prueba reside en el lema de discrepancia,

el cual asegura que si hay una gran diferencia entre las cardinalidades de las clases cromáticas, entonces el número de 3-hoyos monocromáticos aumenta por un factor cuadrático de la diferencia de cardinalidades, haciendo uso de una triangulación especial obtenida mediante el teorema de Dilworth [24].

La mejor cota actual, se basa en un refinamiento del resultado anterior [3], mejorando la cota a $\Omega(n^{4/3})$ [51]. Se conjetura que la cota mínima es $\Theta(n^2)$ ya que los mejores conjuntos minimizantes tienen $O(n^2)$ 3-hoyos monocromáticos. Las construcciones son de Katchalski y Meir [43].

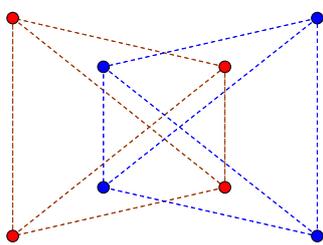


Figura 4.1: 8 puntos bicromáticos sin 3-hoyo monocromático

Conjetura 2 (Triángulos monocromáticos) Cualquier conjunto de n puntos en el plano, tiene $\Omega(n^2)$ 3-hoyos monocromáticos.

El siguiente paso es la existencia de 4-hoyos monocromáticos convexos en conjuntos de puntos bicolorados. Actualmente se conocen conjuntos que no contienen 4-hoyos monocromáticos con 18 [23], 20 [15], 30[29], 32 [60] y 36 puntos [40]. Notemos que si existiera un resultado de existencia de k -hoyos sobre puntos monocromáticos, tendríamos de inmediato que siempre hay 4-hoyos monocromáticos sobre n puntos coloreados para alguna n , pero como ha sido mencionado en el Capítulo 3, para 7-hoyos la respuesta es negativa, como ejemplo están los conjuntos de Horton (figura 3.5). Sin embargo, ha sido probado que todo conjunto de Horton coloreado con más de 64 puntos contiene un 4-hoyo monocromático convexo [23], este hecho llevó a conjeturar la existencia de 4-hoyos monocromáticos para conjuntos suficientemente grandes.

Conjetura 3 Todo conjunto de n puntos bicolorados suficientemente grande contiene un 4-hoyo monocromático.

Como no había progreso respecto a la conjetura se comenzó a tratar el problema

sin la necesidad de que el 4-hoyo monocromático fuera convexo [41, 50], la variante fue respondida en lo afirmativo [9]; cualquier conjunto S de puntos con al menos $n \geq 5,044$ tiene un 4-hoyo monocromático, para la prueba se usa el hecho de que para cualquier conjunto de puntos existe una triangulación con al menos la mitad de los puntos con grado impar, por lo que cualquier incremento que garantice puntos de paridad impar en su grado, disminuye la cota. Usando los resultados de paridad en triangulaciones [8] ha sido posible bajar la cota a 2760.

4.2. k -hoyos balanceados

Uno también se puede preguntar qué sucede cuando nuestro k -hoyo tiene vértices de diferente color o clases cromáticas, digamos que tiene m vértices de una clase cromática y n de la otra ($m + n = k$), además, si sucede que $m = n$, diremos que el k -hoyo es balanceado.

Recientemente Bereg y otros [14] probaron que cualquier conjunto S con al menos 2 puntos rojos y 2 azules siempre contiene un 4-hoyo balanceado. Si S tiene exactamente dos puntos de una clase cromática y n de la otra, puede ocurrir que S tenga un número constante de 3-1-hoyos (figura 4.2).

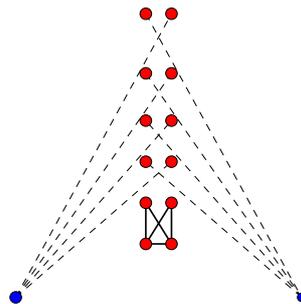


Figura 4.2: Conjunto de puntos que sólo contiene cinco 4-hoyos balanceados, formados por los puntos azules, y una de las aristas de puntos rojos marcadas.

A partir de este momento consideraremos que el conjunto S de puntos está dividido en dos subconjuntos R, B que representan los puntos rojos y azules respectivamente, y a menos que digamos lo contrario supondremos que tienen la misma cardinalidad, es decir $S = R \cup B$ y $|R| = |B|$, los resultados en específico sobre 4-hoyos balanceados pueden consultarse en [14], donde se muestra que S siempre tiene al menos $\frac{n^2-4n}{12}$ 4-hoyos balanceados.

La manera en que se probó la existencia de un número cuadrático de 4-hoyos balanceados es a través de la clasificación de las aristas bicromáticas de S . Sean $p, q \in S$ de clases cromáticas distintas; se define $T(p, q)$ como el conjunto de a lo más cuatro puntos que se obtienen al tomar el primer punto que encontramos al rotar el rayo \vec{pq} a la izquierda y derecha, de igual manera con el rayo \vec{qp} . Una arista es verde si es parte de un 4-hoyo balanceado o es la diagonal de un 4-hoyo balanceado. Es negra si no es verde y forma parte del cierre convexo de S . Las aristas restantes son de color azul o rojo si los puntos de $T(p, q)$ son azules o rojos respectivamente (figura 4.3).

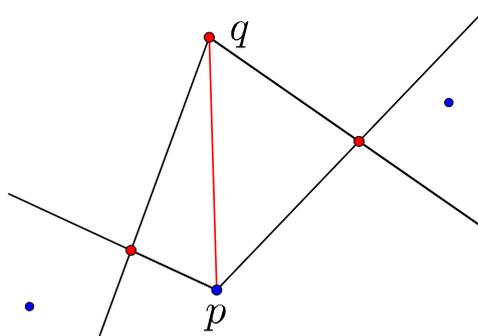


Figura 4.3: La arista bicromática formada por p y q es roja ya que no es parte de un 4-hoyo balanceado y además $T(p, q)$ está formado por dos puntos rojos.

Con la clasificación anterior, se prueba que el número de aristas rojas es a lo más $n \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$, donde dado un punto p suponemos que es rojo y tomando un orden radial de los puntos azules b_1, b_2, \dots, b_n , los índices son módulo n , se observa que entre cada arista roja y azul siempre hay al menos una arista verde, que para que b_i sea roja se necesita que entre b_{i-1} y b_i haya al menos tres puntos rojos, lo cual implica que a lo más haya $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$ aristas rojas. Como hay n puntos entonces en S hay a lo más $n \cdot \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$ aristas rojas. Análogamente sucederá lo mismo para las aristas azules

Como a lo más hay $2n$ aristas negras entonces la mínima cantidad de aristas

verdes es $n^2 - 2n \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 2n \geq \frac{n^2-4n}{3}$. Como cada 4-hoyo balanceado define cuatro aristas verdes el número de 4-hoyos balanceados es al menos $\frac{n^2-4n}{12}$.

Otro caso más particular se tiene si añadimos la hipótesis de que R y B son linealmente separables, con lo cual la cuenta sube a $\frac{2n^2+3n-8}{12}$.

Esta cota es asintóticamente justa: la doble cadena [32], la cual podemos ver como una cadena de puntos cóncava (puntos rojos) y una convexa (puntos azules), lo suficientemente lejos de tal forma que cualquier recta entre dos puntos de una cadena, no intersecta el cierre convexo de la otra. La doble cadena contiene $(n-1)(n-1)$ 4-hoyos balanceados, los cuales son formados por parejas de puntos consecutivos rojos y azules (figura 4.4). Más adelante seguiremos hablando de la doble cadena ya que nos dará un ejemplo de un conjunto que no contiene 3-1-hoyos convexos 5.1.1.

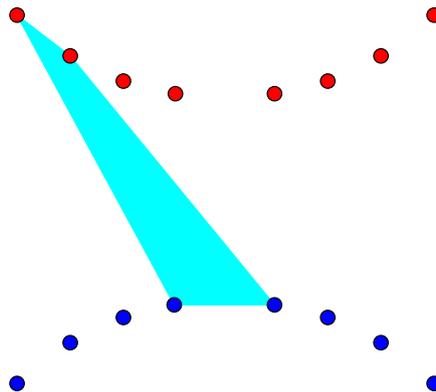


Figura 4.4: Dos puntos consecutivos rojos y dos azules de la Doble Cadena generan un 4-hoyo balanceado.

El resultado para 6-hoyos balanceados donde R y B es linealmente separable también fue dado recientemente en [13].

El resultado se obtiene nuevamente a partir de la coloración de las aristas, en este caso con 5 colores. Se considera un punto $p \in S$ y se ordenan los puntos angularmente alrededor de él y se toman las aristas bicromáticas de p . Supongamos que $p \in B$ y $q \in R$ y que giramos el rayo \vec{pq} tomando el primer y segundo punto hacia la derecha e izquierda, a dicho conjunto lo llamaremos el de los vecinos de p con respecto a q , y denotaremos con $r_p(q)$ y $b_p(q)$ al número

$r_p(q)$	$b_p(q)$	$r_q(p)$	$b_q(p)$	Color de \overline{pq}	$r_p(q)$	$b_p(q)$	$r_q(p)$	$b_q(p)$	Color de \overline{pq}
4	0	4	0	verde o roja	1	3	2	2	verde
3	1	4	0	verde o roja	1	3	1	3	verde o negra
3	1	3	1	verde o negra	0	4	4	0	verde
2	2	4	0	verde	0	4	3	1	verde
2	2	3	1	verde	0	4	3	2	verde
2	2	2	2	verde	0	4	2	2	verde o azul
1	3	4	0	verde	0	4	1	3	verde o azul
1	3	3	1	verde o negra					

Tabla 4.1: Relación de $r_p(q)$, $b_p(q)$, $r_q(p)$ y $b_q(p)$ con el color de \overline{pq} .

de vecinos rojos y azules de p respecto a q , respectivamente. Se denota como $w_p(q)$ a la cuña que está formada por p y los rayos que pasan por los vecinos de p , todas estas definiciones se hacen también para q con respecto de p ; Tabla 4.1.

La coloración de una arista bicromática es la siguiente:

- Gris si una de las cuñas es no convexa (el ángulo de la cuña es mayor a π).
- Verde si p y q forman parte de una 6-hoyo balanceado.
- Rojos si $r_p(q) + r_q(p) \geq 7$.
- Azul si azules si $b_p(q) + b_q(p) \geq 7$.
- Las aristas restantes son negras.

A partir de $r_p(q)$, $b_p(q)$, $r_q(p)$ y $b_q(p)$ se hace una clasificación del color de la arista \overline{pq} .

Nuevamente la idea es acotar el número de aristas que no son verdes, se concluye lo siguiente:

- El número de aristas grises es a lo más $8n$.
- El número de aristas negras es $4n$.
- El número de aristas rojas es $\frac{1}{5}n^2 + \Theta(n)$ y de igual manera el número de aristas azules.

- Si $r_p(q) = 2$ o $b_q(p) = 2$ entonces \overline{pq} es verde.

Con lo cual obtienen que el número de aristas verdes es al menos $\frac{3}{5}n^2 - \Theta(n)$ y en consecuencia el número de 6-hoyos balanceados es al menos $\frac{1}{15}n^2 - \Theta(n)$. Finalmente se conjetura que el caso general también mantiene una cota cuadrática.

5

3-1-hoyos

El estudio de hoyos en conjuntos de puntos coloreados fue llevado a cabo inicialmente por [6, 9]; la idea es que dado un k -hoyo se fijan m y n puntos de distintas clases cromáticas y entonces el k -hoyo estará formado por m puntos de una clase cromática y n de la otra de tal manera que $k = m + n$.

A continuación trabajaremos con la variante de 4-hoyos sobre conjuntos de puntos de dos clases cromáticas, los cuales consisten de tres puntos de una clase cromática y uno de la otra clase. A este caso particular le llamaremos un 3-1-hoyo.

Dado cualquier conjunto S formado por n puntos de una clase cromática y n de la otra clase, las preguntas que se tratarán son: ¿cuál es la mínima cantidad de 3-1-hoyos que S puede tener? ¿cuál es la máxima cantidad de 3-1-hoyos que puede haber? Para ambas preguntas existe la variante cuando el 3-1-hoyo es convexo, no convexo o general. Algunas de estas preguntas correspondientes a 4-hoyos balanceados han sido resueltas en [14], la variante de 4-hoyos monocromáticos convexos permanece abierta, haciéndose mención de ella en [51].

5.1. Cotas inferiores

Sean R y B dos conjuntos de puntos rojos y azules respectivamente, tales que $|R| = |B| = n \geq 6$ y sea $S = R \cup B$ en posición general. Diremos que una arista es bicromática si uno de sus extremos pertenece a R y el otro a B , una arista es azul si sus extremos pertenecen a B y finalmente una arista es roja si sus extremos pertenecen a R . Consideraremos que una 4-tupla es un subconjunto de S que está formado por tres puntos rojos y uno azul o tres puntos azules y uno rojo, salvo que se diga otra cosa.

Primero responderemos la siguientes preguntas: ¿Cuál es la mínima cantidad de 3-1-hoyos convexos que puede tener S ? ¿Cuál es la mínima cantidad de 3-1-hoyos no convexos que puede tener S ?

En ambos casos la respuesta es cero. Primero mostraremos un conjunto que no contiene 3-1-hoyos no convexos.

Coloquemos todos los puntos en posición convexa, entonces cualesquiera 3 puntos de una clase cromática y 1 punto de la otra clase formarán un 3-1-hoyo convexo haciendo que no haya posibilidad de formar un 3-1-hoyo no convexo, notemos que la cantidad de 3-1-hoyos que tiene este conjunto es $2n\binom{n}{3}$, cualesquiera 3 puntos rojos con uno azul forman un 3-1-hoyo, e igualmente cualesquiera 3 azules con uno rojo (figura 5.1).

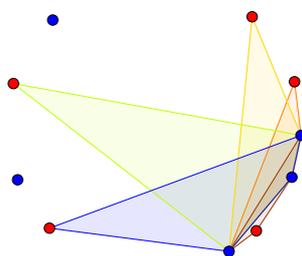


Figura 5.1: Puntos en posición convexa y los 3-1-hoyos que se forman con 3 puntos azules fijados y cada uno de los puntos rojos.

Este conjunto maximiza la cantidad de 3-1-hoyos convexos pues una 4-tupla de puntos a lo más puede formar un 3-1-hoyo convexo, dado que necesitan estar en posición convexa. Como cada cuaterna forma un 3-1-hoyo convexo cualquier otro conjunto tiene a lo más la misma cantidad de 3-1-hoyos convexos.

A continuación construiremos un conjunto que no tiene 3-1-hoyos convexos así como algunas caracterizaciones de un 3-1-hoyo convexo

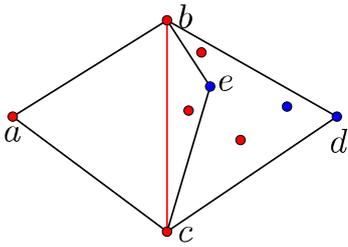
Lema 5.1.1 *S* tiene una arista de una clase cromática y una bicromática que se intersectan y además el triángulo monocromático que se forma está vacío, si y sólo si existe un 3-1-hoyo convexo en *S*.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que la arista monocromática es roja. Sean a, b, c puntos rojos y d un punto azul tales que los segmentos \overline{ad} y \overline{bc} se intersectan y el triángulo rojo es vacío.

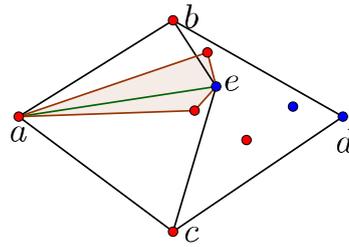
Si el cuadrilátero Q formado por a, b, c, d es vacío el resultado se mantiene; por lo tanto supongamos que no lo es.

Si hay puntos azules dentro, escogemos el más cercano al segmento \overline{bc} como nuestro nuevo punto azul llámémosle e (figura 5.2a).

Como tomamos el punto azul más cercano, el nuevo cuadrilátero no contiene puntos azules y sigue siendo convexo; si contiene puntos rojos escogemos los más cercanos al segmento \overline{ae} uno de cada lado. Con esta construcción hemos formado un 3-1-hoyo convexo dentro de Q (figura 5.2b).



(a) Tomar el punto azul más cercano.



(b) Tomar los puntos rojos más cercanos.

Figura 5.2: 3-1-hoyo dentro de un cuadrilátero con arista bicromática intersectada con una arista roja.

Si desde el primer momento el cuadrilátero no contiene puntos azules de igual manera sólo tomamos los puntos rojos más cercanos por encima y por debajo de la arista bicromática.

El regreso es bastante simple; supongamos que el 3-1-hoyo convexo está formado por tres puntos rojos y uno azul (el otro caso es análogo). Sean b, r_1, r_2, r_3 los puntos de un 3-1-hoyo convexo Q , como es convexo entonces tiene 2 diagonales que se intersectan, una de dichas aristas tiene a b . Sin pérdida de generalidad supongamos que es $\overline{br_1}$, entonces la otra arista es $\overline{r_2r_3}$. Por lo tanto tenemos una arista bicromática y una roja.

□

Lema 5.1.2 Sea $S = \{p_0, p_1, p_2\}$ un conjunto de puntos de una clase cromática.

Si dichos puntos forman parte de un 3-1-hoyo convexo, entonces en una de las tres cuñas formadas por $\{p_0, p_1, p_2\}$ (def. 8) existe un punto q de la otra clase cromática

Demostración. Sean $S = \{p_0, p_1, p_2\}$ puntos de una clase cromática y suponga-

mos que no existe un punto q tal que tenga una clase cromática distinta a la de S y que esté en las cuñas formadas por los puntos de S , entonces ninguna arista bicromática formada por los puntos de S y q se intersectan con alguna arista de S . Por el lema 5.1.1 no existe un 3-1-hoyo convexo que tenga a los tres puntos de S al mismo tiempo.

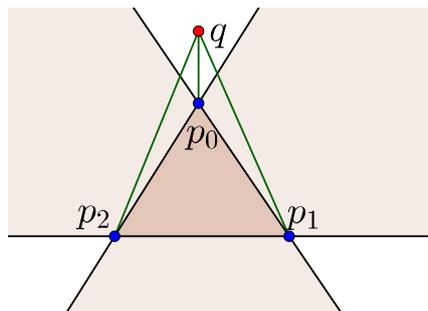


Figura 5.3: Ninguna arista bicromática (verdes) intersecta una arista del triángulo $p_0p_1p_2$.

□

Ahora construiremos un conjunto con $2n$ puntos que no contiene 3-1-hoyos convexos, el cual también es conocido como doble cadena o $DC(n)$, es un conjunto linealmente separable y supondremos que los puntos azules están en la sección inferior. La doble cadena fue construida por García y otros, [32], como un conjunto con $\Omega(4.64^n)$ poligonizaciones. Una poligonización es un k -ágono de tamaño máximo $k = n$; actualmente la doble cadena es el mejor ejemplo minimizante para poligonizaciones. En 2014 se probó que la doble cadena contiene al menos $\binom{\frac{n-4}{2}}{\frac{n-k}{2}} \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot \Omega(4.64^k)$ k -hoyos [5].

Haremos la construcción por iteraciones agregando 2 puntos rojos y 2 puntos azules en cada iteración. Los primeros 4 puntos los colocaremos en las esquinas de un rectángulo (figura 5.4a); los siguientes 4 puntos se colocarán en un rectángulo interno de tal forma que cada recta que pasa por dos puntos azules deje por arriba a todos los puntos rojos. Análogamente cualquier recta que pase por 2 puntos rojos dejará por debajo a los puntos azules (figura 5.4b).

Para las iteraciones siguientes de igual forma colocamos los 4 puntos dentro del rectángulo agregado en la iteración anterior; supongamos que sean b_0, b_1 y b_2 los puntos azules inferiores izquierdos, de la iteración 0 1 y 2 respectivamente, la pendiente de la recta $\overline{b_0b_1}$ debe ser mayor a la pendiente de la recta $\overline{b_1b_2}$

análogamente se hace con los otros 3 cuadrantes para cada iteración. Visualmente se observa que los puntos se acercan asintóticamente a una recta horizontal (figura 5.4c).

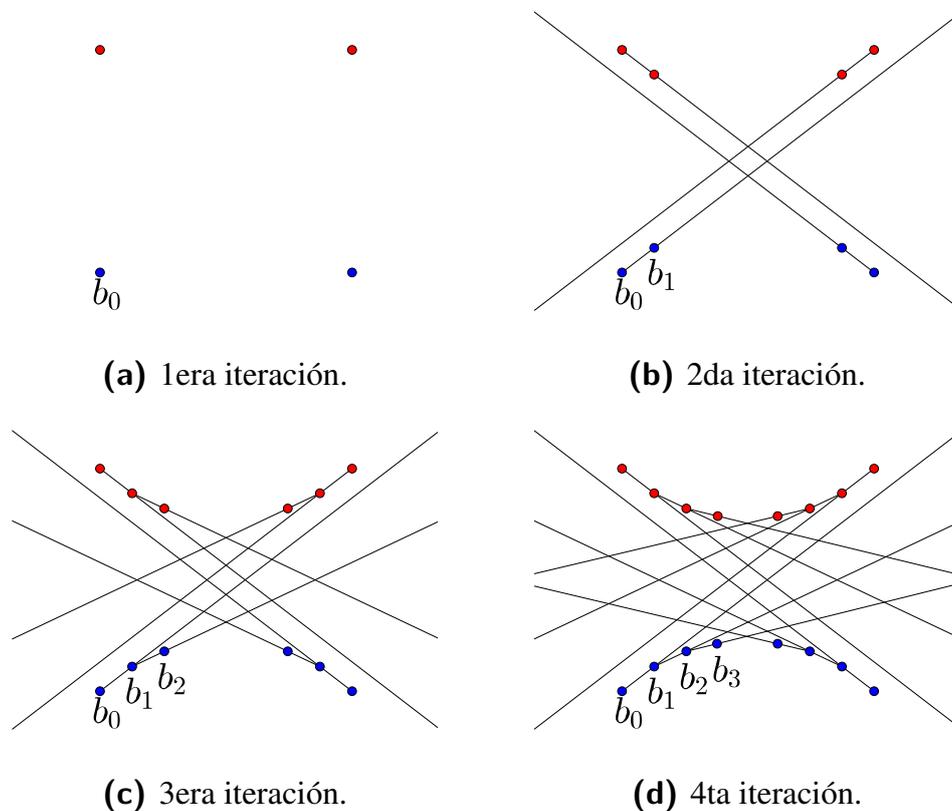


Figura 5.4: Construcción de la doble cadena.

Teorema 5.1.1 La doble cadena no contiene 3-1-hoyos convexos

Demostración. Probaremos que la doble cadena no contiene 3-1-hoyos azules, es decir, que estén formados por 3 puntos azules y 1 rojo (el caso para 3-1-hoyos rojos es totalmente análogo: basta considerar los puntos rojos abajo y los azules arriba). Numeramos los puntos azules de izquierda a derecha como b_0, b_1, \dots, b_{n-1} . Sean b_i, b_j y b_k 3 puntos tales que $i < j < k$, probaremos que no forman parte de un 3-1-hoyo convexo.

La cuña $\wedge(b_i b_j b_k)$ está por debajo del rayo $\overrightarrow{b_0 b_1}$ pues por construcción el rayo $\overrightarrow{b_i b_j}$ está por debajo, en consecuencia la cuña $\wedge(b_i, b_j, b_k)$ no contiene ningún punto rojo y no puede formar un 3-1-hoyo convexo. De manera similar la cuña $\wedge(b_k, b_i, b_j)$ está por debajo del rayo $\overrightarrow{b_{n-1} b_{n-2}}$ por lo que no forma un 3-1-hoyo convexo (figura 5.5).

Finalmente la cuña $\wedge(b_j b_k b_i)$ apunta hacia abajo por lo que tampoco puede contener un 3-1-hoyo convexo.

Por lo tanto, y por el lema 5.1.2 la doble cadena no contiene 3-1-hoyos convexos.

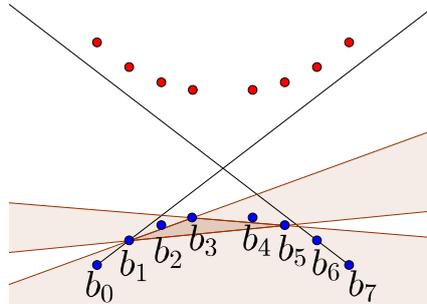


Figura 5.5: No hay un punto rojo en las cuñas formadas por b_1, b_3 y b_5 .

□

5.1.1. Cota Mínima 3-1-hoyos generales

La siguiente pregunta a responder es ¿cuántos 3-1-hoyos generales tiene S como mínimo?, es decir, contaremos tanto convexos como no convexos.

Lema 5.1.3 Sea $A = \{p, q, r, z\}$ un subconjunto de puntos de S tal que tres puntos de A son de una clase cromática y el punto restante es de la otra clase cromática. Si el cierre convexo de A es un triángulo, entonces S contiene tres 3-1-hoyos y para bloquearlos se necesitan al menos dos puntos.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que los puntos p, q, r son azules y z rojo. Como el cierre convexo de A sólo contiene en su interior a z , entonces los tres polígonos que se forman son 3-1-hoyos cada uno (figura 5.6).

Si triangulamos a A , una pareja de dichos triángulos corresponde un 3-1-hoyo (tenemos 3 parejas de triángulos). Al colocar un punto adicional en A , sólo puede estar en uno de los tres triángulos, por lo que habrá una pareja de triángulos vacía. Entonces, un punto adicional a lo más puede bloquear dos 3-1-hoyos, por lo que al menos se necesitan dos puntos para bloquear los tres 3-1-hoyos (figura 5.7).

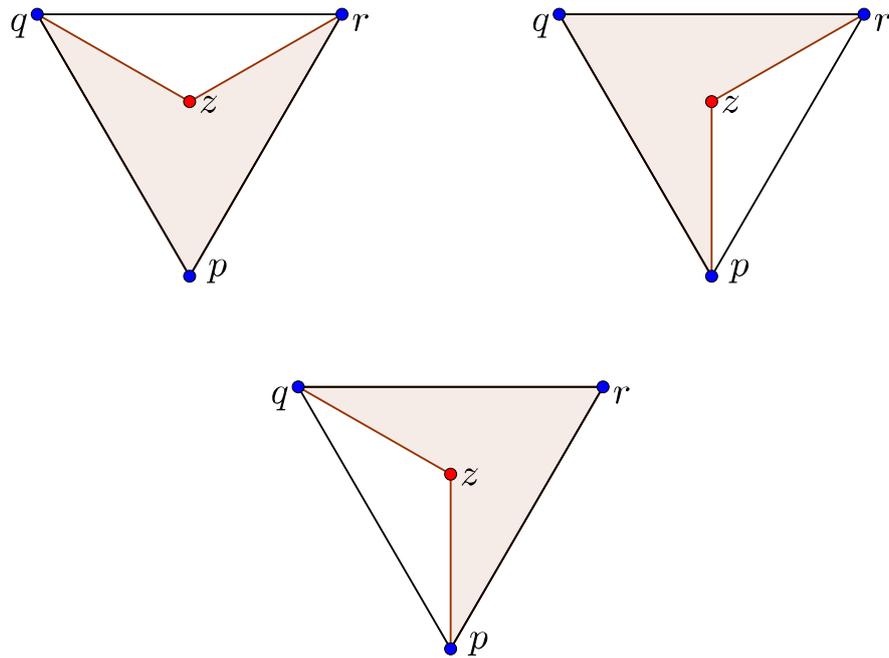


Figura 5.6: Tres 3-1-hoyos para un triángulo monocromático con un punto dentro de otro color.

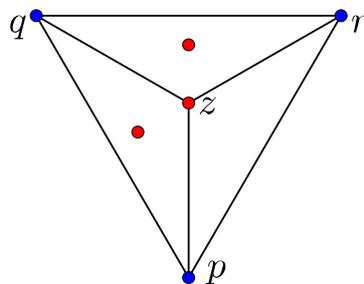


Figura 5.7: Dos puntos son necesarios para bloquear los tres 3-1-hoyos.

□

Observación: Dada una 4-tupla de $S \{p, q, r, z\}$ (recordemos que 3 puntos son de una clase cromática y 1 de la otra), si su cierre convexo es un cuadrilátero, entonces S contiene un 3-1-hoyo.

Sean $p, b_1, b_2 \in B$. Si en la cuña definida por $\wedge(pb_1b_2)$ hay k puntos rojos y cero

puntos azules, llamaremos a los puntos rojos un bloque de k puntos respecto a p , y los enumeraremos r_1, \dots, r_k en el sentido de las manecillas del reloj.

A continuación haremos el análisis de cuántos 3-1-hoyos hay en un bloque de 1 punto, 2 puntos y $k \geq 3$ puntos.

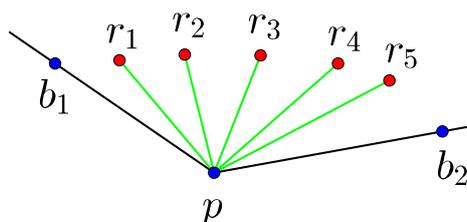


Figura 5.8: Bloque de 5 puntos.

Primero veamos qué pasa si el ángulo de la cuña $\angle(p b_1 b_2)$ es menor que π . Si el bloque está formado por sólo un punto y los puntos están en posición convexa, entonces tenemos un 3-1-hoyo (figura 5.9). Si no están en posición convexa, entonces por el Lema 5.1.3 hay tres 3-1-hoyos. Por lo tanto tenemos como mínimo un 3-1-hoyo y como máximo tres.

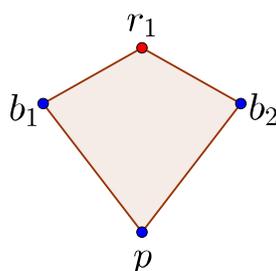


Figura 5.9: Bloque de 1 punto.

Si el ángulo es mayor a π puede ocurrir que no se genere un 3-1-hoyo. En este caso tomamos las rectas pasan por b_1 y p y por b_2 y p , y viendo de izquierda a derecha la cuña queda dividida en tres secciones; si r_1 está en la primera o tercera sección no necesariamente se tiene un 3-1-hoyo, pues puede haber puntos dentro del triángulo azul formado por p, b_1, b_2 (figura 5.10). Este caso sólo puede ocurrir una vez, pues solamente puede haber una cuña con ángulo mayor a π respecto a p .

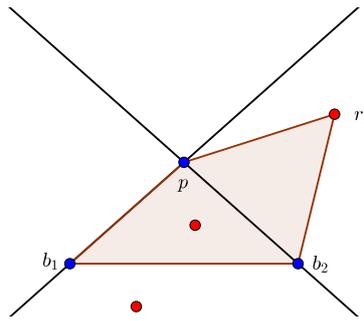


Figura 5.10: Bloque de 1 punto sin 3-1-hoyo.

Si el bloque está formado por 2 puntos, consideraremos primero el caso donde la cuña es menor a π . Si únicamente uno de los puntos rojos está en el triángulo azul entonces por el lema 5.1.3 tenemos tres 3-1-hoyos.

Si r_1, r_2 están fuera del triángulo formado por p, b_1, b_2 se toma el punto más cercano al segmento $\overline{b_1 b_2}$ y con él se forma un 3-1-hoyo (figura 5.11b). Aun así es posible tener dos 3-1-hoyos, por ejemplo si r_1 y r_2 están a la misma distancia de p , entonces cada uno forma un 3-1-hoyo.

Si ambos están dentro del triángulo por el lema 5.1.3 el triángulo p, b_1, b_2 , forma un 3-1-hoyo con r_1 y otro con r_2 (figura 5.11a).



(a) Dos 3-1-hoyos con puntos dentro del triángulo.

(b) Puntos rojos arriba del triángulo formado por p, b_1, b_2 .

Figura 5.11: Bloque de 2 puntos.

Si la cuña es mayor a π puede ocurrir, como en el caso de un punto, que no necesariamente se genera un 3-1-hoyo. Dividimos la cuña nuevamente en tres secciones, y si los puntos están en la primera o en la tercera sección pueden no generar 3-1-hoyos (figura 5.12).

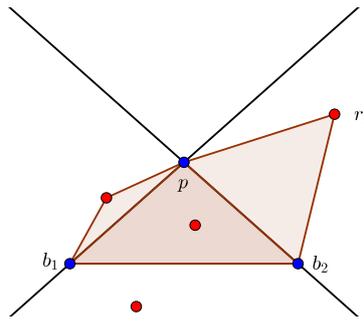


Figura 5.12: Bloque de 2 puntos sin 3-1-hoyo en la cuña $\wedge(pb_1b_2)$.

Si tenemos $k \geq 3$ puntos en el bloque, tres puntos rojos consecutivos forman un 3-1-hoyo (aquí no importa si el ángulo de la cuña es mayor a π), observamos que el k bloque tiene $k - 2$ de estos subconjuntos de tres aristas consecutivas, en consecuencia el número de 3-1-hoyos del bloque es al menos $k - 2$ (figura 5.13).

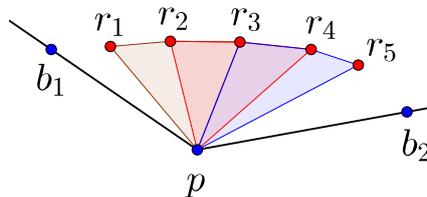


Figura 5.13: Bloque de 5 puntos.

Al agregar un punto rojo al bloque agregamos un 3-1-hoyo, por lo que si queremos minimizar la cantidad tendremos que generar bloques de 3 aristas bicromáticas. Con tres puntos dentro del triángulo se pueden bloquear los 3-1-hoyos formados por p, b_1, b_2 y un punto rojo, pues al triangular p, b_1, b_2 con un punto rojo se pueden bloquear dos de los subtriángulos y entonces no generan otro 3-1-hoyo (figura 5.14).

Cuando tenemos bloques de dos o más puntos consecutivos tendremos al menos un bloque con $k \geq 2$ puntos azules (otra forma de verlo es como bloques de cero puntos rojos), dicho bloque formará al menos dos 3-1-hoyos al tomar los dos puntos azules más cercanos a uno de los puntos rojo que delimitan el bloque, hay un 3-1-hoyo (hay dos puntos rojos delimitadores) (figura 5.15). De hecho

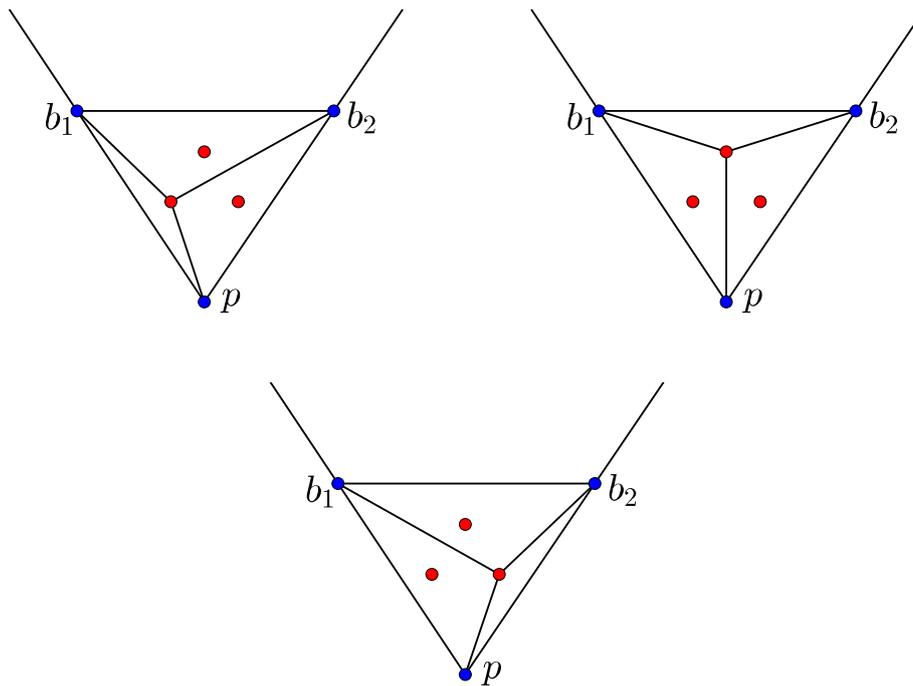


Figura 5.14: Bloque de 3 aristas bicromáticas con un único 3-1-hoyo.

siempre que rotemos un rayo al rededor de p y tengamos dos puntos azules seguidos de una rojo tendremos un 3-1-hoyo.

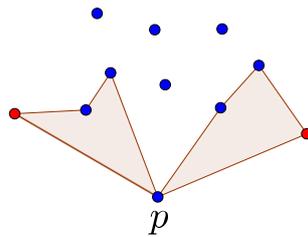


Figura 5.15: Bloque de puntos del mismo color.

Si queremos hacer la cuenta para cada punto $p \in B$ puede ocurrirnos que repetamos 3-1-hoyos respecto a otro punto azul (figura 5.16); al considerar un 3-1-hoyo respecto a p , la forma de repetirse en nuestra cuenta es cuando está formado por tres puntos azules y uno rojo, por lo cual haremos el análisis a través de dichos puntos azules.

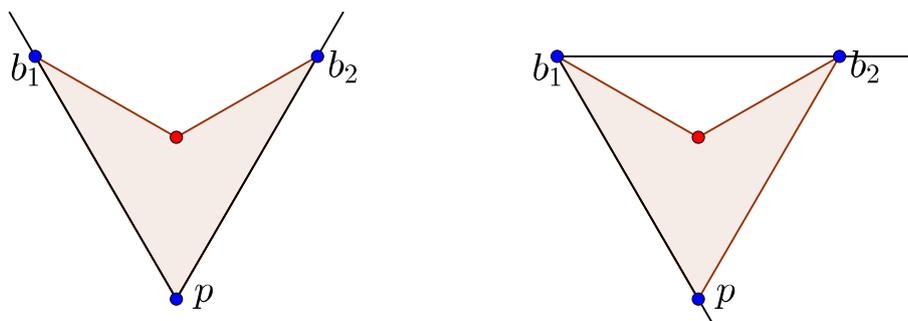


Figura 5.16: 3-1-hoyo repetido respecto a p y b_1 .

Analicemos el bloque de un punto. Si los cuatro puntos están en posición convexa al considerar el bloque respecto a b_1 , el punto r_1 quedará fuera de la cuña $\wedge(b_1 b_2 p)$ por lo que el 3-1-hoyo generado es único respecto a p (el caso cuando consideramos los bloques respecto a b_2 es análogo). Si sólo hubiera bloques de este tipo tendríamos $n(n - 1)$ 3-1-hoyos (figura 5.17a). Si consideramos el caso en que r_1 está dentro del triángulo podríamos contarlos hasta tres veces, por esta razón nuestra cuenta queda como $3 \frac{n}{3n(n-1)} = n(n - 1)$ (figura 5.17b). Puede ocurrirnos una vez el caso de que la cuña tenga ángulo mayor a π así que la cuenta final es $n(n - 2)$.



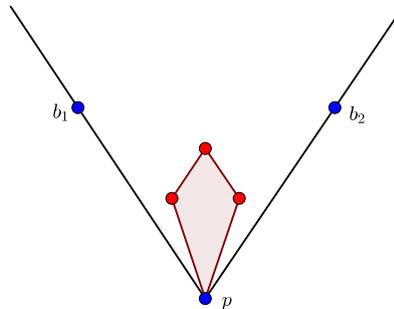
- (a) Al tener r_1 fuera del triángulo el 3-1-hoyo es único respecto a p .
- (b) Al tener r_1 dentro del triángulo así que puede repetir hasta tres veces.

Figura 5.17: Sobre cuenta cuando el bloque tiene 1 punto.

Análogamente para el caso de bloques de dos puntos obtendremos que si los

puntos están fuera del triángulo $\{p, b_1, b_2\}$, el 3-1-hoyo es único, por lo que tenemos $n(\frac{n}{2} + 2)$ 3-1-hoyos, si hay un punto dentro del triángulo, los 3-1-hoyos podemos repetirlos por lo que tenemos $n(\frac{n}{2} + 2)$ 3-1-hoyos. Finalmente si hay dos puntos dentro, tenemos $n(\frac{2n}{3} + 2)$ 3-1-hoyos. En todas las cuentas el 2 se obtiene al considerar que para cada punto azul p , habrá al menos un bloque de puntos azules, el cual genera al menos dos 3-1-hoyos. Nuevamente, como puede ocurrir que tengamos una cuña con ángulo mayor a π , la cual no generará un 3-1-hoyo, nuestra cuenta mínima es $n(\frac{n}{2} + 1)$.

Para el caso de tres aristas bicromáticas, como el 3-1-hoyo está formado por tres puntos rojos y uno azul, el 3-1-hoyo es único respecto a p , por lo que no podemos repetirlo al realizar una vez más el procedimiento con los puntos azules (figura 5.18a). La cuenta resultante es $n \cdot \frac{n}{3} + 2n$.



(a) El 3-1-hoyo es único respecto a p .

Figura 5.18: El tercer caso cuando tres o más puntos en el bloque respecto a p .

Por lo tanto el peor caso es con bloques de tres aristas bicromáticas

De lo anterior se sigue el siguiente teorema:

Teorema 5.1.2 Sea $S = R \cup B$ un conjunto de $2n > 6$ puntos, n puntos rojos y n puntos azules. El número de 3-1-hoyos en S es al menos $\frac{n^2}{3} + 2n$.

Conjetura 4 Al contar 2^m puntos fuera del k -bloque podrán considerarse s 3-1-hoyos adicionales, donde s está determinado por una función de orden mayor a constante.

5.2. Maximizando 3-1-hoyos convexos y generales

En esta sección mostraremos las cotas superiores correspondientes a el máximo número de 3-1-hoyos convexos, no convexos y generales (cuentan tanto convexos como no convexos) mostrando que para n puntos, con n suficientemente grande, el conjunto que maximiza la cantidad de 3-1-hoyos generales y convexos es de puntos en posición convexa.

Observación 5.2.1 En la sección anterior se mostró que puntos en posición convexa maximizan la cantidad de 3-1-hoyos convexos.

Lema 5.2.1 Sea T un triángulo no vacío de S . A lo más existen tres 3-1-hoyos no convexos que usen los tres vértices del triángulo y uno de S en su interior.

Demostración. Sean p_1, p_2 y p_3 los vértices de T . Cualquier 3-1-hoyo que use los tres vértices de T , debe usar dos de sus aristas, fijándolas quedará una arista sin usar la cual formará un pequeño triángulo con el punto interior del 3-1-hoyo. Sea p dicho punto; no podemos formar un nuevo 3-1-hoyo con las mismas dos aristas del triángulo pues el cuadrilátero formado contendría al punto p (figura 5.19).

Como sólo hay 3 pares de aristas y cada par forma a lo más un 3-1-hoyo, entonces T forma a lo más tres 3-1-hoyos.

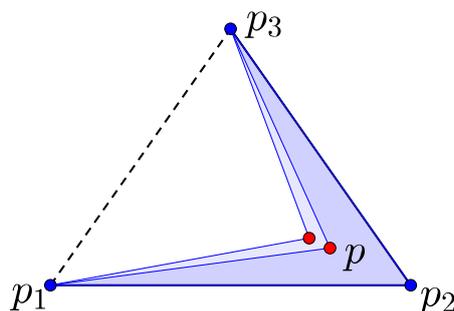


Figura 5.19: Fijando las aristas $\overline{p_1p_2}$ y $\overline{p_2p_3}$, sólo puede formarse un 3-1-hoyo.

□

Observación 5.2.2 El conjunto de puntos en el interior del triángulo T debe ser adecuado para formar 3-1-hoyos. Por ejemplo, si los vértices de T son rojos,

en su interior debe haber al menos un punto azul para tener la posibilidad de generar un 3-1-hoyo.

Teorema 5.2.1 Para $n \geq c$, $c > 3$ constante, el número de 3-1-hoyos se maximiza con un conjunto de $2n$ puntos en posición convexa

Demostración. De aquí en adelante consideramos una 4-tupla como el conjunto con 3 puntos rojos y 1 azul o 3 azules y 1 rojo (4-tupla roja y 4-tupla azul respectivamente). Asignaremos a una 4-tupla no convexa los 3 puntos de su cierre convexo (triángulo) para observar cuántos 3-1-hoyos posiblemente genera. Por el lema 5.2.1 dicho triángulo genera hasta tres 3-1-hoyos, mientras que una 4-tupla en posición convexa sólo genera uno.

Sea $T(S)$ el número de triángulos no vacíos de S con al menos 3 puntos de una clase cromática y uno de otra. Cada triángulo no vacío induce al menos una 4-tupla no convexa, nuestra primera cota superior toma cualquier 4-tupla y considera que forma un 3-1-hoyo por lo que tenemos $2n \binom{n}{3}$ 3-1-hoyos. Además cada triángulo de $T(S)$ puede generar a lo más tres 3-1-hoyos, es decir, el número de 3-1-hoyos que genera $T(S)$ es $3T(S)$, pero uno de los posibles 3-1-hoyos que generan los triángulos no vacíos ya ha sido contado en $2n \binom{n}{3}$ (éste número cuenta una vez cada 4-tupla en S), por lo que tenemos nuestra primera cota superior.

$$2n \binom{n}{3} + 2T(S) \quad (5.1)$$

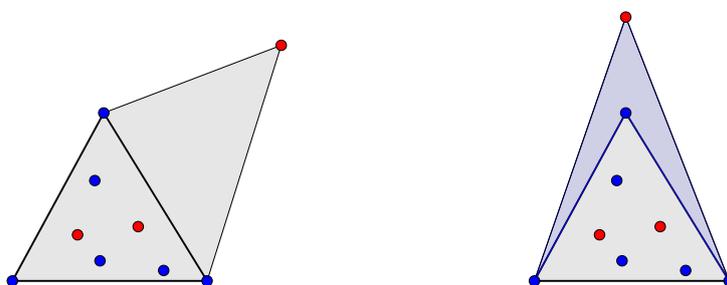
Ahora contaremos los 3-1-hoyos repetidos en la ecuación 5.1, para hacerlo asignaremos marcadores a las 4-tuplas sobrecontadas, así como a las 4-tuplas que no forman un 3-1-hoyo y de esta manera llevar un conteo de la cantidad que podemos quitar de la ecuación 5.1 (los marcadores pueden verse como un contador).

Sea T un triángulo en S con $k \geq 1$ puntos en su interior del color adecuado, por ejemplo, si el triángulo es rojo entonces hay k puntos azules en su interior; podría haber puntos rojos en su interior, pero como esas 4-tuplas no forman 3-1-hoyos, no las consideramos en la cuenta. Tomemos las 4-tuplas formadas por los vértices de T más un punto extra $p \in S$, esto nos lleva a dos casos:

Caso 1: Si T es monocromático, p es uno de los $n - k$ puntos fuera de T . Si T no es monocromático, p es uno de los $n - k - 2$ puntos fuera de T

Si la 4-tupla es convexa (figura 5.20a), entonces no es vacía porque T no es vacío, y en consecuencia no es un 3-1-hoyo por lo que agregamos un marcador a T . Si la 4-tupla es no convexa (figura 5.20b), entonces es potencialmente uno de los 3-1-hoyos de dicha 4-tupla, por lo que marcamos el triángulo una vez, pues al tomar el triángulo mayor (que incluye a p) también contaremos dicha 4-tupla.

Si T es un triángulo monocromático, entonces en el exterior tendremos $n - k$ puntos a considerar; en cambio si no es monocromático tendremos $n - k - 2$ ya que tenemos dos puntos del color deseado en T ; como podemos agregar un marcador por cada punto exterior en total tenemos al menos $n - k - 2$ marcadores.



(a) 4-tupla convexa.

(b) 4-tupla no convexa.

Figura 5.20: Puntos exteriores a T .

Caso 2: p está contenido en T

Consideremos los k puntos dentro de T , en la ecuación 5.1 tenemos contado a T k veces en $2n \binom{n}{3}$ por cada punto en su interior y 2 veces en $2T$, es decir, T ha sido sobrecontado $k + 2$ veces. Por el Lema 5.2.1 a lo más hay tres 3-1-hoyos generados por T y sus k puntos interiores, en consecuencia asignamos $k - 1$ marcadores a T .

Sumando ambos casos y si los triángulos son monocromáticos, podemos asignar $n - k - 2 + k - 1 = n - 3$ marcadores a T , si T no fuera monocromático serían $n - 1$, repitiendo este proceso para cada triángulo en $T(S)$ en total asignaremos $(n - 3)T(S)$ marcadores a S . Como podemos estar repitiendo marcadores al considerar todos los triángulos no vacíos, entonces contaremos la máxima cantidad de marcadores que tenemos asignado a un triángulo no vacío T .

Consideremos una 4-tupla convexa no vacía (si fuera vacía no tendría marcadores); sin pérdida de generalidad supongamos que es roja, la 4-tupla recibió al

menos 2 marcadores y como máximo 4, pues si consideramos los subtriángulos de la 4-tupla, por cada subtriángulo con un punto dentro, el caso 1 agrega 1 marcador a la 4-tupla; como la 4-tupla es no vacía, al menos contiene un punto, por lo que al menos 2 subtriángulos son no vacíos dándonos al menos dos marcadores y como tenemos cuatro subtriángulos tenemos a lo más 4 marcadores por cada 4-tupla (figura 5.21).

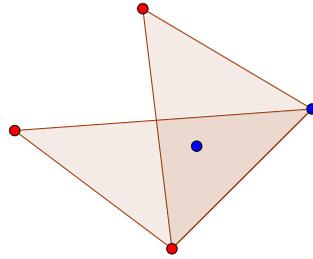


Figura 5.21: 4-tupla roja no vacía.

Consideremos un triángulo $T \in T(S)$ con $k \geq 1$ puntos dentro. Para contar los marcadores del caso 1, del cual sabemos que tienen de entrada $k - 1$ marcadores, consideremos 2 vértices p_1 y p_2 de T y uno de su interior; estos puntos forman un triángulo, que en caso de tener puntos del color adecuado, aportará un marcador más a T . Como el punto más cercano al segmento $\overline{p_1 p_2}$ es vacío no podrá aportar un marcador, por lo que tenemos $k - 1$ marcadores y esto lo podemos hacer por cada segmento de T , es decir, tenemos $3(k - 1)$ marcadores, más los $k - 1$ marcadores iniciales, nos da un total de $4(k - 1)$ marcadores, por lo que a lo más estamos cuadruplicando la sobrecuenta.

Si T no es monocromático entonces tendremos una arista monocromática, donde sabemos que hay k puntos del color adecuado, pero no sabemos exactamente cuántos puntos del otro color hay; sin pérdida de generalidad supongamos que los vértices del triángulo son dos puntos azules y uno rojo, entonces en su interior tenemos k puntos azules y $k_0 \geq 0$ puntos rojos; lo que haremos ahora es acotar k_0 .

Si $k_0 = 0$ entonces los triángulos con la arista azul nunca tienen puntos rojos, por lo que no se pueden formar 3-1-hoyos y en consecuencia no estamos sobrecontándolos y entonces tenemos $3(k - 1)$ marcadores; es decir, a lo mucho triplicamos la sobrecuenta.

Si $k_0 = 1$ entonces tenemos a lo más un marcador extra, por lo que en total

tendríamos $3(k-1) + 1$ marcadores, es decir, tenemos poco más del triple de la sobrecuenta.

En general $k_0 < n$, entonces, en el peor de los casos $k_0 = n - 1$; por lo tanto tenemos que el número de marcadores es:

$$\begin{aligned} 3(k-1) + n - 1 &= (k-1)\left(3 + \frac{n-1}{k-1}\right) \\ &= (k-1)\frac{3k-3+n-1}{k-1} \\ &= (k-1)\frac{3k+n-4}{k-1} \end{aligned}$$

Es decir, la sobrecuenta de un triángulo T es a lo más sobrecontada $\frac{3k+n-4}{k-1}$ veces. En otras palabras, tendríamos que dividir nuestra sobre cuenta respecto a los puntos dentro de T por dicho factor, así que tendremos que ver cuál es su máximo respecto a k .

Primero probemos que $\frac{3k+n-4}{k-1}$ define una sucesión decreciente; sea $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$, tal que $a_0 < a_1$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{3a_0+n-4}{a_0-1} &> \frac{3a_1+n-4}{a_1-1} \\ (3a_0+n-4)(a_1-1) &> (3a_1+n-4)(a_0-1) \\ 3a_0a_1 - 3a_0 + na_1 - n - 4a_1 + 4 &> 3a_0a_1 - 3a_1 + na_0 - n - 4a_0 + 4 \\ na_1 - 3a_0 - 4a_1 &> na_0 - 3a_1 - 4a_0 \\ na_1 - a_1 &> na_0 - a_0 \\ a_1(n-1) &> a_0(n-1) \end{aligned}$$

Recordemos que nuestra suposición es $n \geq 3$.

$$a_1 > a_0$$

Ahora bien, si $k = 1$ nuestra expresión se indetermina, y sucede que el número de 3-1-hoyos sobrecontados de S para los puntos dentro de S (caso 2) es 0, pero

nos queda la sobrecuenta de puntos fuera del triángulo T (caso 2), la cual es $n - k - 2 = n - 3$. Esta cuenta la habíamos sobrecontado 4 veces, por esta razón lo que podemos quitar a la ecuación 5.1 es $\frac{n-3}{4}$.

Si $k = 2$ teníamos que el número por el que tenemos que dividir la sobrecuenta del Caso 1 es:

$$\frac{3k + n - 4}{k - 1} = \frac{6 + n - 4}{2 - 1} = n - 2$$

Por lo que al tomar la sobrecuenta de puntos fuera de T nos queda:

$$\frac{n - k - 2}{4} + \frac{k - 1}{n - 2} = \frac{n - 4}{4} + \frac{1}{n - 2} = \frac{n^2 - 6n + 9}{4(n - 2)}$$

Finalmente tenemos expresiones de sobrecuenta, las cuales podemos quitar a $2n \cdot \binom{n}{3} + 2T(S)$.

Si tenemos triángulos monocromáticos podemos quitar una cuarta parte de $(n - 1)T(S)$ por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} 2n \cdot \binom{n}{3} + 2T(S) - \frac{n-1}{4} \cdot T(S) &= \\ = 2n \cdot \binom{n}{3} + \frac{8-n+1}{4} \cdot T(S) &= \\ = 2n \cdot \binom{n}{3} + \frac{9-n}{4} \cdot T(S) & \end{aligned}$$

Por lo que para $n > 9$ sucede que $\frac{9-n}{4}$ es negativo y entonces la cuenta disminuye.

Si no son triángulos monocromáticos y $k = 1$:

$$\begin{aligned} 2n \cdot \binom{n}{3} + 2T(S) - \left(\frac{n-3}{4}\right) \cdot T(S) &= \\ = 2n \cdot \binom{n}{3} + \frac{8-n+3}{12} \cdot T(S) &= \end{aligned}$$

$$= 2n \cdot \binom{n}{3} + \frac{11-n}{12} \cdot T(S)$$

Por lo que para $n > 11$ sucede que $\frac{11-n}{12}$ es negativo y entonces la cuenta disminuye.

Si $k = 2$:

$$\begin{aligned} & 2n \cdot \binom{n}{3} + 2T(S) - \left(\frac{n^2 - 6n + 9}{4(n-2)} \right) \cdot T(S) = \\ & = 2n \cdot \binom{n}{3} + \frac{8n - 16 - n^2 - 6n + -9}{4(n-2)} \cdot T(S) = \\ & = 2n \cdot \binom{n}{3} - \frac{-n^2 + 2n - 25}{4(n-1)} \cdot T(S) \end{aligned}$$

Y sucede que $\frac{-n^2 + 2n - 25}{4(n-1)}$ es negativo para toda $n > 1$ y entonces la cuenta disminuye.

En consecuencia se concluye que para $n > 11$ el conjunto maximizante de 3-1-hoyos es un conjunto en posición convexa. \square

6

Conclusiones

Se obtuvieron resultados sobre las cotas inferiores de 3-1-hoyos: que hay conjuntos de puntos que no contienen 3-1-hoyos convexos (doble cadena), que hay conjunto de puntos que no tienen 3-1-hoyos no convexos (puntos en posición convexa) y que la cantidad mínima de 3-1-hoyos generales para un conjunto de n puntos rojos y n puntos azules es $\frac{n^2}{3} + 2n$ si $n > 6$.

El resultado obtenido sobre la cota superior es el siguiente: el conjunto que maximiza la cantidad 3-1-hoyos es un conjunto de puntos en posición convexa si hay más de 11 puntos rojos y 11 azules.

Aún queda más por estudiar sobre 3-1-hoyos ya que no se sabe si la cota inferior encontrada de 3-1-hoyos generales es asintóticamente justa, para probarlo se necesitaría un conjunto de puntos que tenga un número cuadrático de 3-1-hoyos. La otra posibilidad es que la cota inferior no sea de orden cuadrático sino mayor, lo cual implicaría que la conjetura de Bárány-Károlyi es correcta.

Bibliografía

- [1] Aichholzer, O. [2009], k -gons - Recent results on some Erdős-Szekeres type problems, in 'Proc. XIII Encuentros de Geometría Computacional', Zaragoza, España, pp. 43–52.
- [2] Aichholzer, O. [2015], 'On the rectilinear crossing number.'.
URL:<http://www.ist.tugraz.at/aichholzer/research/rp/triangulations/crossing/>
- [3] Aichholzer, O., Fabila-Monroy, R., Flores-Peñaloza, D., Hackl, T., Huemer, C. and Urrutia, J. [2009], 'Empty monochromatic triangles', *Computational Geometry* **42**(9), pp. 934–938.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772109000650>
- [4] Aichholzer, O., Fabila-Monroy, R., Gonzalez-Aguilar, H., Hackl, T., Heredia, M. A., Huemer, C., Urrutia, J., Valtr, P. and Vogtenhuber, B. [2011], On k -Gons and k -Holes in Point Sets, in 'Proc. 23rd Annual Canadian Conference on Computational Geometry CCCG 2011', Toronto, Canada, pp. 21–26.
- [5] Aichholzer, O., Fabila-Monroy, R., González-Aguilar, H., Hackl, T., Heredia, M. A., Huemer, C., Urrutia, J., Valtr, P. and Vogtenhuber, B. [2015], 'On k -gons and k -holes in point sets', *Computational Geometry* **48**(7), pp. 528 – 537.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772114001321>
- [6] Aichholzer, O., Fabila-Monroy, R., González-Aguilar, H., Hackl, T., Heredia, M. A., Huemer, C., Urrutia, J. and Vogtenhuber, B. [2014], '4-Holes in point sets ', *Computational Geometry* **47**(6), pp. 644 – 650. 27th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2011).
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772113001727>
- [7] Aichholzer, O., Fabila-Monroy, R., Hackl, T., Huemer, C., Pilz, A. and Vogtenhuber, B. [2014], 'Lower bounds for the number of small convex k -holes ', *Computational Geometry* **47**(5), pp. 605 – 613.

- URL:**<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772113001703>
- [8] Aichholzer, O., Hackl, T., Hoffmann, M., Pilz, A., Rote, G., Speckmann, B. and Vogtenhuber, B. [2014], ‘Plane Graphs with Parity Constraints’, *Graphs and Combinatorics* **30**(1), pp. 47–69.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/s00373-012-1247-y>
- [9] Aichholzer, O., Hackl, T., Huemer, C., Hurtado, F. and Vogtenhuber, B. [2010], ‘Large Bichromatic Point Sets Admit Empty Monochromatic 4-Gons’, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **23**(4), pp. 2147–2155.
URL:<http://dx.doi.org/10.1137/090767947>
- [10] Aichholzer, O., Hackl, T. and Vogtenhuber, B. [2011], On 5-gons and 5-holes, in ‘Proc. XIV Encuentros de Geometría Computacional’, Alcalá, España, pp. 7–10.
- [11] Aichholzer, O., Hackl, T. and Vogtenhuber, B. [2012], On 5-Gons and 5-Holes, in A. Márquez, P. Ramos and J. Urrutia, eds, ‘Computational Geometry’, Vol. 7579 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–13.
URL:http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-34191-5_1
- [12] Aichholzer, O. and Krasser, H. [2001], The Point Set Order Type Data Base: A Collection of Applications and Results, in ‘Proc. 13th Annual Canadian Conference on Computational Geometry CCCG 2001’, Waterloo, Ontario, Canada, pp. 17–20.
- [13] Aichholzer, O., Urrutia, J. and Vogtenhuber, B. [2013], ‘Balanced 6-holes in linearly separable bichromatic point sets’, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **44**, pp. 181 – 186.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065313002448>
- [14] Bereg, S., Díaz-Báñez, J., Fabila-Monroy, R., Pérez-Lantero, P., Ramírez-Vigueras, A., Sakai, T., Urrutia, J. and Ventura, I. [2015], ‘On balanced 4-holes in bichromatic point sets’, *Computational Geometry* **48**(3), pp. 169 – 179.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772114001047>

- [15] Brass, P. [2004], ‘Empty monochromatic fourgons in two-colored point sets’, *Geombinatorics* **14**(2), pp. 5–7.
- [16] Brass, P., Moser, W. O. and Pach, J. [2005], *Research problems in discrete geometry*, Springer Science & Business Media.
- [17] Bárány, I. and Károlyi, G. [2001], Problems and Results around the Erdős-Szekeres Convex Polygon Theorem, in J. Akiyama, M. Kano and M. Ura-be, eds, ‘Discrete and Computational Geometry’, Vol. 2098 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 91–105.
URL:http://dx.doi.org/10.1007/3-540-47738-1_7
- [18] Bárány, I. and Valtr, P. [2004], ‘Planar point sets with a small number of empty convex polygons’, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **41**(2), pp. 243–269.
URL:<http://dx.doi.org/10.1556/SScMath.41.2004.2.4>
- [19] Chung, F. R. K. and Graham, R. L. [1998], ‘Forced Convex n-Gons in the Plane’, *Discrete & Computational Geometry* **19**(3), pp. 367–371.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/PL00009353>
- [20] Church, A. [1936], ‘A note on the Entscheidungsproblem’, *Journal of Symbolic Logic* **1**, pp. 40–41.
URL:http://journals.cambridge.org/article_S0022481200038664
- [21] Church, A. [1937], ‘Turing A. M.. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proceedings of the London Mathematical Society, 2 s. vol. 42 (1936–1937), pp. 230–265.’, *Journal of Symbolic Logic* **2**, pp. 42–43.
URL:http://journals.cambridge.org/article_S002248120003958X
- [22] Dehnhardt, K. [1987], *Leere konvexe Vielecke in ebenen Punktmengen*, PhD thesis, Technische Universität Braunschweig, Alemania.
- [23] Devillers, O., Hurtado, F., Károlyi, G. and Seara, C. [2003], ‘Chromatic variants of the Erdős–Szekeres theorem on points in convex position’, *Computational Geometry* **26**(3), pp. 193 – 208.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772103000130>

- [24] Dilworth, R. P. [1950], ‘A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets’, *Annals of Mathematics* **51**(1), pp. 161–166.
URL:<http://www.jstor.org/stable/1969503>
- [25] Dumitrescu, A. [2000], ‘Planar sets with few empty convex polygons’, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **36**(1-2), pp. 93–110.
URL:<http://dx.doi.org/10.1556/SScMath.36.2000.1-2.9>
- [26] Erdős, P. and Guy, R. K. [1973], ‘Crossing Number Problems’, *The American Mathematical Monthly* **80**(1), pp. 52–58.
URL:<http://www.jstor.org/stable/2319261>
- [27] Erdős, P. and Szekeres, G. [1935], ‘A combinatorial problem in geometry’, *Compositio Mathematica* **2**, pp. 463–470.
URL:<http://eudml.org/doc/88611>
- [28] Erdős, P. and Szekeres, G. [1960], On some extremum problems in elementary geometry, in ‘Annales Univ. Sci. Budapest’, pp. 3–4.
- [29] Friedman, E. [2004], ‘30 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons’, *Geombinatorics* **14**, pp. 53–54.
- [30] García, A. [2011], A note on the number of empty triangles, in ‘XIV Encuentros de Geometría Computacional ECG2011’, Alcalá de Henares, España, pp. 101–104.
- [31] García, A. [2012], A Note on the Number of Empty Triangles, in A. Márquez, P. Ramos and J. Urrutia, eds, ‘Computational Geometry’, Vol. 7579 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. pp. 249–257.
URL:http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-34191-5_24
- [32] García, A., Noy, M. and Tejel, J. [2000], ‘Lower bounds on the number of crossing-free subgraphs of $\{KN\}$ ’, *Computational Geometry* **16**(4), pp. 211 – 221.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772100000109>
- [33] Gerken, T. [2006], On a Problem of Erdős in Combinatorial Geometry, Dissertation, Technische Universität München, München.

- [34] Gerken, T. [2008], ‘Empty Convex Hexagons in Planar Point Sets’, *Discrete & Computational Geometry* **39**(1-3), pp. 239–272.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/s00454-007-9018-x>
- [35] Goodman, J. E. and Pollack, R. [1983], ‘Multidimensional Sorting’, *SIAM Journal on Computing* **12**(3), pp. 484–507.
URL:<http://dx.doi.org/10.1137/0212032>
- [36] Gödel, K. [1931], ‘Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I’, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**(1), pp. 173–198.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/BF01700692>
- [37] Harborth, H. [1978], ‘Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen.’, *Elemente der Mathematik* **33**, pp. 116–118.
- [38] Hoffmann, P. [1998], *The man who loved only numbers*, Fourth Estate, London.
URL:<http://www.alibris.com/search/detail.cfm?chunk=25&mtype=&qisbn=0786884061&S=R&bid=8792261428&pbest=&pqtynew=&page=1&matches=43&qsort=r>
- [39] Horton, J. [1983], ‘Sets with no empty convex 7-gons’, *Canadian Mathematical Bulletin* **26**(4), pp. 482–484.
- [40] Huemer, C. and Seara, C. [2009], ‘36 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons’, *Geombinatorics* **19**(1), pp. 5–6.
- [41] Hurtado, F. [2005], Open Problem Session, in ‘21st European Workshop on Computational Geometry’, Eindhoven, The Netherlands.
- [42] Kalbfleisch, J., Kalbfleisch, J. and Stanton, R. [1970], A combinatorial problem on convex n-gons, in ‘Proceedings of the Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, LA, 1970)(RC Mullin, KB Reid, and DP Roselle, eds.), Louisiana State Univ., Baton Rouge, LA’, pp. 180–188.
- [43] Katchalski, M. and Meir, A. [1988], ‘On empty triangles determined by points in the plane’, *Acta Mathematica Hungarica* **51**(3-4), pp. 323–328.

- [44] Kleitman, D. and Pachter, L. [1998], ‘Finding convex sets among points in the plane’, *Discrete & Computational Geometry* **19**(3), pp. 405–410.
- [45] Koshelev, V. A. [2009], ‘On Erdős–Szekeres problem for empty hexagons in the plane’, *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem [Modeling and Analysis of Information Systems]* **16**(2), pp. 22–74.
- [46] Morris, W. and Soltan, V. [2000], ‘The Erdos-Szekeres problem on points in convex position—a survey’, *Bulletin of the American Mathematical Society* **37**(4), pp. 437–458.
- [47] Nicolás, C. M. [2007], ‘The Empty Hexagon Theorem’, *Discrete & Computational Geometry* **38**(2), pp. 389–397.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/s00454-007-1343-6>
- [48] Overmars, M. [2002], ‘Finding Sets of Points without Empty Convex 6-Gons’, *Discrete & Computational Geometry* **29**(1), pp. 153–158.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/s00454-002-2829-x>
- [49] Overmars, M., Scholten, B. and Vincent, I. [1989], ‘Sets without empty convex 6-gons’, *Bulletin European Association for Theoretical Computer Science* **37**, pp. 160–168.
- [50] Pach, J. [2008], ‘On Simplices Embracing a Point’, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **31**(0), pp. 97. The International Conference on Topological and Geometric Graph Theory.
URL:<http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2008.06.019>
- [51] Pach, J. and Tóth, G. [2013], ‘Monochromatic empty triangles in two-colored point sets’, *Discrete Applied Mathematics* **161**(9), pp. 1259 – 1261. Jubilee Conference on Discrete Mathematics.
URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X11003362>
- [52] Pinchasi, R., Radoicic, R. and Sharir, M. [2004], On Empty Convex Polygons in a Planar Point Set, in ‘Proceedings of the Twentieth Annual Symposium on Computational Geometry’, SCG ’04, ACM, New York, NY, USA, pp. 391–400.
URL:<http://doi.acm.org/10.1145/997817.997876>

- [53] Preparata, F. P. and Shamos, M. I. [1985], ‘Computational geometry. Texts and monographs in computer science’.
- [54] Ramírez-Vigueras, A. [2013], Aspectos combinatorios y algorítmicos sobre m -ágonos en conjuntos de puntos coloreados, PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.
- [55] Szekeres, G. and Peters, L. [2006], ‘Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem’, *The ANZIAM Journal* **48**, pp. 151–164.
URL:http://journals.cambridge.org/article_S144618110000300X
- [56] Tóth, G. and Valtr, P. [1998], ‘Note on the Erdős–Szekeres Theorem’, *Discrete & Computational Geometry* **19**(3), pp. 457–459.
URL:<http://dx.doi.org/10.1007/PL00009363>
- [57] Tóth, G. and Valtr, P. [2005], The Erdős–Szekeres theorem: upper bounds and related results, in J. E. Goodman, J. Pach and E. Welzl, eds, ‘in Combinatorial and Computational Geometry’, Vol. 52, pp. 557–568.
- [58] Valtr, P. [2012], On Empty Pentagons and Hexagons in Planar Point Sets, in ‘Proceedings of the Eighteenth Computing: The Australasian Theory Symposium - Volume 128’, CATS ’12, Australian Computer Society, Inc., Darlinghurst, Australia, Australia, pp. 47–48.
URL:<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2523693.2523699>
- [59] Valtr, P. et al. [1995], ‘On the minimum number of empty polygons in planar point sets’, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **30**, pp. 155–163.
- [60] Van Gulik, R. [2005], ‘32 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons’, *Geombinatorics* **15**(1), pp. 32–33.