



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
Ingeniería Eléctrica - Campo: Control

*Manipulación diestra de objetos por medio  
de un esquema de teleoperación*

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JAVIER PLIEGO JIMÉNEZ

TUTOR:  
DR. MARCO A. ARTEAGA PÉREZ (FACULTAD DE INGENIERÍA)

COMITÉ TUTOR:  
DR. TANG XU YU (FACULTAD DE INGENIERÍA)  
DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ ÁNGELES (CINVESTAV, IPN)

Ciudad Universitaria, Cd de México, Enero 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Luis Agustín Alvarez Icaza Longoria

Secretario: Dr. Tang Xu Yu

Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

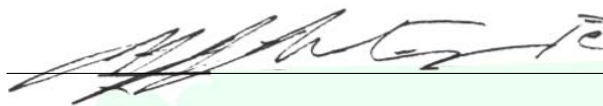
1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Alejandro Rodríguez Angeles

2<sup>do</sup> Suplente: Dr. Emmanuel Ortega Nuño

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería, UNAM

**Tutor de Tesis:**

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'M. A. Arteaga Pérez', is written over a light green horizontal line.

Firma



*Dedico esta tesis a mis padres Javier y  
María Elena y mi a hermana Yunue por su  
apoyo incondicional en esta etapa de mi vida.*



# Agradecimientos

*Quiero agradecer en primer lugar a mi asesor Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez por su apoyo y enseñanzas que me ha brindado durante mis estudios de posgrado.*

*A los profesores del Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería campo Control y en especial a mi comité tutor: Dr. Tang Xu Yu y Dr. Alejandro Rodríguez Ángeles.*

*Finalmente quiero agradecer al CONACyT (CVU 377564) y a la DGAPGA-UNAM proyecto IN116314 por el apoyo económico que me otorgó durante mis estudios de posgrado y en el desarrollo de este trabajo de tesis.*





## Abstract

Teleoperation robotic systems allow human operators to carry out hazardous tasks from a remote and safety environment. Most of the work reported in the literature is focused on a single-master and single-slave teleoperation schemes. However, a teleoperation system with multiple master and slave robots can perform complex tasks, for instance, assembly and welding tasks or even robotic assisted surgeries.

The problem of dexterous remote manipulation of rigid objects by means of a teleoperation scheme composed of single master and two slave nonlinear manipulators with revolute joints is addressed in this work. The slave robots are analyzed as a cooperative robotic system.

In order to achieve a dexterous telemanipulation the slave end-effector positions and the interaction forces must be properly controlled. To overcome the aforementioned control problem a centralized force/position adaptive control algorithm and a decentralized nonlinear controller based on the Orthogonalization Principle are proposed. The former guarantees that the position and force errors converge asymptotically to zero but it requires communication between the slave robots. On the other hand, the latter control algorithm does not require communication between the slave robots and it guarantees that the position and force errors converge exponentially to zero. Both controllers do not require the knowledge of the dynamic parameters of the slave manipulators and the manipulated object.

Finally, in order to achieve that the human operators can feel the remote object (*telepresence*), a second master robot is added to the teleoperation scheme and a master controller is proposed that recreates the slaves contact forces.

## Resumen

En este trabajo de investigación se aborda el problema de control de posición y orientación (manipulación diestra) de un objeto de forma remota mediante un esquema de teleoperación formado por un manipulador maestro y dos esclavos, los cuales, se analizaron como un sistema robótico cooperativo.

Para realizar una tarea de telemanipulación se requiere controlar la posición y la fuerza ejercida por los robots de forma precisa. Para lograr el objetivo de control planteado se propuso en primera instancia un control adaptable centralizado de posición y fuerza basado en el Principio de Ortogonalización, el cual garantiza un seguimiento de trayectorias en posición y fuerza de forma asintótica. Como segunda solución al problema de control, se diseñó un esquema de control descentralizado por modos deslizantes de segundo orden que garantiza un seguimiento de trayectorias de forma exponencial. Se realizó un conjunto de experimentos con diferentes operadores para evaluar el desempeño de ambos controladores. Los resultados obtenidos en cada caso fueron satisfactorios.

Finalmente, para lograr que el operador pueda sentir el objeto a manipular (*telepresencia*) se añadió un segundo manipulador maestro al esquema de teleoperación y se propuso un algoritmo de control para los maestros que recrean la fuerza de contacto ejercida por los esclavos hacia el objeto.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.1.1. Teleoperación . . . . .	2
1.1.2. Hápticos . . . . .	3
1.1.3. Robots cooperativos . . . . .	4
1.1.4. Telemanipulación y teleoperación cooperativa . . . . .	5
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	7
1.3. Objetivo . . . . .	8
1.4. Metodología . . . . .	8
1.5. Organización de la tesis . . . . .	8
<b>2. Esquema de teleoperación</b>	<b>9</b>
2.1. Conceptos básicos . . . . .	9
2.1.1. Transparencia y telepresencia . . . . .	9
2.1.2. Clasificación de los esquemas de teleoperación . . . . .	9
2.1.3. Esquema de Telemanipulación . . . . .	10
2.2. Modelo matemático . . . . .	11
2.2.1. Robots cooperativos . . . . .	11
2.2.2. Agarre rígido . . . . .	16
2.2.3. Robot maestro . . . . .	16
2.3. Propiedades del modelo . . . . .	16
<b>3. Algoritmo de control centralizado</b>	<b>19</b>
3.1. Algoritmo de control robot maestro . . . . .	19
3.1.1. Observador de velocidad . . . . .	20
3.2. Planeación de trayectorias . . . . .	22
3.3. Algoritmo de control robot esclavos . . . . .	24
3.4. Reflexión de fuerza . . . . .	30
3.4.1. Modelado del operador . . . . .	31
<b>4. Algoritmo de control descentralizado</b>	<b>35</b>
4.1. Función tangente hiperbólica . . . . .	35
4.2. Algoritmo de control . . . . .	36
4.3. Trayectoria deseada . . . . .	46
<b>5. Resultados experimentales y de simulación</b>	<b>49</b>
5.1. Plataforma experimental . . . . .	49

*Índice general*

5.2. Experimentos control centralizado . . . . .	50
5.3. Simulaciones reflexión de fuerza . . . . .	55
5.4. Experimentos control descentralizado . . . . .	58
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>63</b>
<b>A. Teoremas auxiliares</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Introducción

La teleoperación es la extensión de las capacidades de un operador a una localización remota. El origen de la teleoperación surgió con los mecanismos diseñados para manipular material radiactivo. En 1948, Raymond Goertz construyó el primer sistema de teleoperación, el cuál consistía en dos pantógrafos. Estos mecanismos permitían al operador situado en un lugar seguro transmitir movimientos a un manipulador. En un principio dichos movimientos se transmitían mecánicamente. Posteriormente, se emplearon actuadores eléctricos que permitieron transmitir movimiento a una mayor distancia.

El sistema de teleoperación maestro-esclavo está constituido por un manipulador controlado por el humano llamado robot maestro y un segundo o varios manipuladores que siguen el movimiento del robot maestro conocidos como robots esclavos. De manera general, este esquema opera de la siguiente forma: el humano aplica una fuerza al efector final del robot maestro llevándolo por una trayectoria deseada, la posición del efector final del maestro se transmite al robot esclavo, el cual trata de seguir la trayectoria generada por el humano. El empleo de sensores de fuerza en los robots teleoperados sirven para diseñar algoritmos de control con reflexión de fuerza. Esto le permite al operador sentir el ambiente remoto y ampliar sus capacidades para realizar tareas.

La aplicación principal de un sistema de teleoperación es lograr que el operador tenga acceso a lugares remotos o que impliquen un riesgo para el humano, tales como el espacio, manipulación de sustancias peligrosas y tareas en profundidades marinas. Recientemente se han utilizado esquemas de teleoperación para realizar procedimientos quirúrgicos.

Por otro lado, los humanos poseemos una gran habilidad para sujetar y manipular una gran variedad de objetos de distinta geometría y masa. Empleando información visual y táctil el humano es capaz de modular la fuerza de contacto y de esta forma evitar el deslizamiento del objeto o posicionarlo de forma precisa. Además, los humanos somos capaces de lidiar con incertidumbres en la geometría del objeto y el ambiente. Considere por ejemplo colocar una bombilla; esta simple tarea requiere un control de posición y fuerza muy preciso para colocarla en el conector sin romperla o tirarla. Debido a las limitaciones físicas del humano se han empleado los manipuladores para realizar labores repetitivas, tareas en donde se requiere aplicar fuerzas muy grandes o trabajar en ambientes peligrosos y de difícil acceso.

El humano puede interactuar con los robots de distintas formas. Ya sea realizando una tarea cooperativa con el manipulador para levantar y trasladar un objeto (Tsumugiwa et al., 2004) o bien generando una trayectoria deseada para el robot mediante un sistema de teleoperación (Salcudean, 1998). Dado que es el operador el que realiza la tarea, dicho

esquema se beneficia de las capacidades del humano para realizar tareas complejas como son: planeación de trayectorias, toma de decisiones y adaptación a incertidumbres.

### 1.1. Antecedentes

#### 1.1.1. Teleoperación

A finales de los años ochenta se diseñaron esquemas de control para sistemas maestro-esclavo basados en el análisis por Lyapunov (Miyazaki et al., 1986) y en el principio del modelo interno virtual (Furuta et al., 1987). Con el desarrollo de la teoría de redes surgieron los esquemas de control por impedancia y admitancia, ampliamente utilizados en los sistemas de teleoperación maestro-esclavo cuando el objeto o entorno presenta cierta rigidez (Buzan & Sheridan, 1989; Strassberg et al., 1992; Tzafestas et al., 2008; Ren et al., 2016).

Yokokohji & Yoshikawa (1994) incorporaron el concepto de transparencia al sistema de teleoperación como nuevo objetivo de control, haciendo énfasis en la necesidad de tener dos canales de comunicación para que el robot esclavo transmita información de posición y fuerza al operador.

Los retardos en los sistemas de teleoperación son de gran importancia, en especial cuando se tiene reflexión de fuerza en el robot maestro ya que pueden ocasionar que el sistema sea inestable. Niemeyer & Slotine (1997) propusieron un esquema de control considerando retardos de tiempo constantes, mientras que Chopra et al. (2003) y Ortega et al. (2009) consideran retardos variantes en el tiempo.

Park & Khatib (2006) proponen un nuevo enfoque para controlar la posición y fuerza en un sistema maestro-esclavo en contacto con una superficie, que consiste en introducir un resorte virtual que conecta el efector final de cada manipulador. Dicho resorte genera una fuerza proporcional al error de posición entre el esclavo y el maestro y al mismo tiempo esta fuerza es utilizada como la magnitud deseada para el robot esclavo. Se muestran resultados experimentales que validan el esquema propuesto.

Puesto que en muchas ocasiones se tiene incertidumbre en los parámetros del sistema, un esquema adaptable para sistemas teleoperados no lineales con retardos se propone en Nuño et al. (2010). En este trabajo solo se considera el problema de seguimiento de trayectorias en posición pero no de fuerza. La validación del algoritmo de control se realiza mediante simulaciones. Otro tipo de incertidumbre que se presenta en una tarea de teleoperación es el ambiente. Mobasser & Hashtrudi-Zaad (2007) proponen un esquema de control para estimar la impedancia del ambiente remoto empleando sensores de fuerza. Este esquema tiene la ventaja de que minimiza el efecto del ruido en dicho sensor. El análisis de estabilidad se realiza en el dominio de la frecuencia.

Rodríguez-Seda et al. (2009) presenta un estudio comparativo de algoritmos de control de posición y fuerza para sistemas de teleoperación bilateral que utilizan Internet como medio de comunicación. Por otro lado, una revisión de los algoritmos de control basados en pasividad para sistemas de teleoperación maestro-esclavo cuya dinámica es no lineal es reportado en Nuño et al. (2011).



Un factor importante a considerar en los esquemas de teleoperación maestro-esclavo es el operador. Hannaford (1989) señala la importancia de incluir en el diseño del esquema de control la dinámica del operador y no solo la dinámica de los manipuladores y el entorno. Debido a su complejidad, la mayoría de los esquemas de control emplean modelos simples para modelar la dinámica del humano. En Manrique (2013) se presenta un modelo matemático del operador. Se asume que el operador se puede modelar como un robot serial de siete grados de libertad. Por simplicidad, el modelo se presenta en las coordenadas del espacio trabajo. Un esquema de control del tipo PID basando en el principio de Ortogonalización se presenta en Rodríguez-Angeles et al. (2015). En este esquema se propone una superficie virtual para recrear el entorno remoto y generar una fuerza virtual que emula la fuerza de contacto del esclavo. Además, se asume que el operador se puede comportar en lazo cerrado como un controlador PID.

### 1.1.2. Hápticos

Los dispositivos hápticos son la interfaz entre el operador y el entorno remoto, sus funciones son capturar la posición comandada por el operador y recrear las fuerzas de contacto. Dichos dispositivos pueden tener un mecanismo serial o paralelo. Los hápticos seriales son más compactos y el efector final se puede mover de forma más rápida con respecto a un mecanismo paralelo, pero sus eslabones se encuentran unidos uno respecto al otro, por lo tanto, la inercia total y la fricción se incrementan. Esto representa una desventaja para realizar tareas de teleoperación donde se requiera transparencia. Además, se pueden presentar singularidades durante el movimiento. Los hápticos con mecanismo paralelo no presentan estos problemas; sin embargo, se tienen velocidades menores y su análisis cinemático y dinámico se complica. Como ejemplo de hápticos paralelos se pueden citar los robots Delta y Phantom. La Tabla 1.1 muestra el desarrollo histórico de los dispositivos hápticos.

Háptico	Desarrollador	Año	Grados de libertad
SPIDAR	Tokyo Institute of Technology	1990	3
Pantograph	McGill University	1993	2
Phantom	SensAble Technologies	1993	3
Haptic Master	University of Tsukuba	1994	6
Freedom-7	McGill University	1998	7
Impulse Engine 2000	Immersion Corp	1999	2
Excalibur	Haptic Technologies	1999	3
Delta	Institut de Systèmes Robotiques	2001	6

Tabla 1.1: Desarrollo de los dispositivos hápticos

Los guantes sensoriales con retroalimentación de fuerza han abierto la posibilidad de manipular y sentir objetos de una manera más natural. Otro dispositivo háptico es el exoesqueleto, el cual es un mecanismo cuyos eslabones y articulaciones corresponden con las del cuerpo humano (estructura antropomórfica). Estos dispositivos se acoplan al brazo del operador aumentando el espacio de trabajo además de proporcionar una

experiencia más realista y una total inmersión en tareas de teleoperación. Los guantes sensoriales y exoesqueletos más relevantes se muestran en la Tabla 1.2.

Háptico	Desarrollador	Año	Grados de libertad
Sarcos Dextrous Arm Master	Sarcos	1991	10
Hand Master	University of Tsukuba	1992	2 por dedo
Sensor Glove	University of Tokyo	1994	11
Sensor Glove 2	University of Tokyo	1998	20
Sensor Arm	University of Tokyo	1998	7
RMII-ND	Rutgers University	2000	4
CyberForce	Immersion Corporation	2004	6

Tabla 1.2: Desarrollo de los guantes sensoriales y exoesqueletos

### 1.1.3. Robots cooperativos

La coordinación de varios manipuladores para realizar una tarea ha sido objeto de estudio en décadas recientes, debido a la gran versatilidad de tareas que pueden ejecutar, aumentando la productividad y la reducción de costos en muchas tareas industriales. Por ejemplo, dos o más manipuladores pueden levantar objetos pesados que un solo robot no podría manipular o realizar ensamblajes de forma más rápida y precisa. Los esquemas de control propuestos en la literatura para robots cooperativos se clasifican en algoritmos de control centralizados y descentralizados. En el primer caso, los manipuladores comparten información de posición y fuerza, además se requiere de la dinámica de todo el sistema (Wen & Kreutz-Delgado, 1992). En el enfoque de control descentralizado no se requiere comunicación entre los robots; cada robot es tratado como un subsistema cuyas entradas son las fuerzas de interacción (Liu et al., 1997).

Cuando dos manipuladores sujetan un objeto de forma rígida se forma una cadena cinemática cerrada (Yeo et al., 1999). Uno de los problemas fundamentales cuando se manipula un objeto con múltiples robots es mantener estable la sujeción, es decir, que el objeto no se caiga. Este problema se puede abordar desde dos enfoques distintos. El primer enfoque se basa en un balance de fuerzas (Shimoga, 1996), *i.e* aplicar la fuerza y par necesario para mantener en equilibrio el objeto. El segundo enfoque se basa en la estabilidad en el sentido de Lyapunov (Svinin et al., 2000).

En tareas cooperativas que involucran manipulación diestra, se requiere controlar tanto la posición como la fuerza de contacto. Los algoritmos de control de posición y fuerza en tareas cooperativas se pueden clasificar en control de impedancia (Schneider & Cannon, 1992; Bonitz & Hsia, 1996), linealización por retroalimentación (Khatib et al., 1996) y control híbrido de posición y fuerza (Yoshikawa & Zheng, 1993; Liu & Arimoto, 1996).

En Parra-Vega et al. (2001) se presenta un esquema de control adaptable basado en el principio de Ortogonalización. Los resultados en simulación muestran que el algoritmo puede ser utilizado para restricciones holonómicas variantes en el tiempo, si la velocidad de cambio de la restricción es relativamente baja. Posteriormente Gudiño-Lau

Arteaga-Pérez (2005) desarrollaron un modelo dinámico para un sistema cooperativo formado por dos manipuladores sujetando un objeto rígido basado en restricciones holonómicas invariantes en el tiempo. Sin embargo, el modelo no toma en cuenta las ecuaciones de movimiento angular del objeto.

Un control descentralizado que no requiere medición de velocidad y fuerza se presenta en Martínez-Rosas et al. (2006). Se presentan resultados experimentales que validan la teoría propuesta. Sin embargo, se requiere conocer los parámetros del sistema. El control por redes neuronales presentado en Panwar et al. (2012) no requiere conocer la dinámica del objeto, pero se asume que los robots sujetan firmemente el objeto.

La mayoría de los esquemas de control para robots cooperativos se enfocan en el control de posición del objeto. Sin embargo, muchas tareas requieren controlar su orientación. Para resolver este problema, Gueaieb et al. (2007) presentan un esquema híbrido de posición y fuerza por modos deslizantes para controlar la posición y orientación de un objeto mediante dos manipuladores. Los autores sólo se enfocan en el problema de regulación en orientación del objeto y asumen que los robots lo sujetan de forma rígida.

Caccavale et al. (2008) proponen un controlador por impedancia donde se emplea el cuaternión unitario para resolver el problema de orientación. Puesto que en el control por impedancia se tiene un compromiso entre los errores de posición y fuerza, los errores obtenidos en las pruebas experimentales son relativamente grandes. El problema de control de robots cooperativos donde la geometría del objeto a manipular es desconocida se aborda en (Monfaredi et al., 2014). Una alternativa es analizar los robots cooperativos como un problema de sincronización. En Abdelhedi et al. (2016) se propone un algoritmo de control por modos deslizantes que logra la sincronización de un sistema robótico cooperativo.

Las manos mecánicas son otro ejemplo de robots cooperativos que debido a su similitud en grados de libertad con la mano son ideales para realizar tareas de manipulación (Hirzinger et al., 2000; Palli et al., 2015). Yoshikawa (2010) presenta una revisión histórica de los algoritmos de control existentes en la literatura para manos mecánicas compuestas por dos o más dedos, donde cada efector final está cubierto por un material deformable. Los efectores finales deformables no requieren que la superficie del objeto sea suave para lograr una sujeción estable; por ejemplo pueden sujetar objetos en sus esquinas. Su desventaja principal es que la deformación introduce una dinámica no lineal al sistema.

### 1.1.4. Telemanipulación y teleoperación cooperativa

La mayoría de los esquemas de control para sistemas teleoperados están diseñados considerando que se tiene solamente un robot maestro y un robot esclavo. Sin embargo, algunas tareas requieren la coordinación de varios manipuladores. Un sistema de teleoperación cooperativo permite a varios operadores que se encuentran en localizaciones remotas realizar múltiples tareas. A pesar de las ventajas que presentan los sistemas de teleoperación con múltiples maestros y esclavos realizando una tarea cooperativa, son pocos los esquemas de control presentados en la literatura.

Malysz & Sirouspour (2010) presentan un esquema de control para un sistema compuesto por dos manipuladores maestros y un esclavo. Se propone un método para ma-

pear las fuerza de contacto hacia los maestros. Se muestran resultados experimentales, además se utiliza un robot virtual como robot esclavo. El mismo grupo de investigación propone un algoritmo de control adaptable para un sistema de teleoperación formado por dos robots maestros y un manipulador esclavo redundante (Malysz. & Sirouspour, 2011). En el trabajo presentado en (Tavakoli & Huang, 2014) se propone un algoritmo de control en el dominio de la frecuencia para un esquema de teleoperación con múltiples manipuladores maestros y esclavos. El algoritmo propuesto es validado mediante pruebas experimentales.

La manipulación de objetos por medio de teleoperación requiere que tanto el robot maestro como el esclavo tenga múltiples puntos de contacto (Turki & Goiffet, 1995). En Lee et al. (1998) se presenta un dispositivo háptico similar en grados de libertad a los dedos del humano, se emplean actuadores neumáticos y el algoritmo de control utilizado es un PID. Por otro lado, Hu et al. (2005) proponen un esquema de control por impedancia para un sistema de teleoperación compuesto por el guante *CyberForce* que captura la posición del operador y recrea las fuerzas de contacto; por su parte el esclavo es una mano mecánica. Griffin et al. (2005) proponen una algoritmo de control por impedancia jerárquico para la manipulación diestra de objetos por medio de un esquema de teleoperación. El algoritmo de control propuesto le permite al operador enviar la fuerza necesaria para sujetar el objeto.

Howe & Kontarinis (1993) presentan un análisis de las fuerzas de interacción cuando se realizan tareas de ensamblaje empleando como dispositivo háptico una mano mecánica con dos dedos. En Carignan & Olsson (2004) se propone un esquema de control por impedancia para la manipulación de un objeto virtual por medio de dos robots maestros, además consideran retardos en la comunicación. En Lee & Spong (2005) se presenta un sistema de control para un sistema de teleoperación compuesto por un robot maestro y dos o más robots esclavos. Dicho esquema es robusto con respecto a los retardos en la comunicación.

La teoría de control óptimo también ha sido utilizada para resolver el problema de teleoperación cooperativa. Bacocco & Melchiorri (2009) plantean un control proporcional-derivativo cuyas ganancias se obtiene al minimizar una función de costo. Además, se emplea la teoría de *variables de onda* para resolver el problema de retardos en la comunicación (Sun et al., 2014). Sin embargo, el esquema propuesto sólo es válido para sistemas de teleoperación cuya dinámica es lineal.

Un algoritmo de control adaptable para un sistema de teleoperación bilateral para robots cooperativos que sujetan un objeto rígido se presenta en Aldana et al. (2012). Solo se considera un robot maestro y se asume que el objeto está acoplado de forma rígida al efector final de cada esclavo.

En el trabajo presentado por Polushin et al. (2013) se utiliza el teorema de pequeña señal para diseñar un algoritmo de control y analizar la estabilidad de los subsistemas interconectados (*maestro-esclavo-ambiente*) que forman el sistema de teleoperación cooperativa. La principal ventaja de este esquema es que no requiere propiedades de pasividad entre los robots esclavos, el operador y el ambiente.

## 1.2. Planteamiento del problema

Los humanos son expertos en manipulación de objetos, sin embargo existen muchas situaciones que no son seguras o factibles para que un operador pueda laborar o simplemente exceden sus capacidades físicas. Como se sabe la teleoperación le permite a los humanos realizar dichas tareas desde una estación de trabajo remota y segura. La mayoría de los esquemas de control para sistemas teleoperados consideran solo un robot maestro y esclavo; por lo tanto, las tareas que se pueden realizar se limitan a seguimiento de trayectorias en posición y fuerza. La telemanipulación es una extensión de la teleoperación y como su nombre lo indica permite al operador manipular objetos de forma diestra a distancia. Aplicaciones de telemanipulación se encuentran en la industria aeroespacial, médica, química y entretenimiento (realidad virtual). El problema de la telemanipulación es un problema complejo ya que se deben resolver problemas particulares como son:

- a) **Control de posición y fuerza.** Para manipular de forma diestra un objeto (rotación y traslación) se requiere controlar no solo la posición de los manipuladores sino también la fuerza de contacto.
- b) **Coordinación de múltiples robots.**
- c) **Telepresencia y transparencia.** El operador debe sentir el objeto a manipular y de esta forma aplicar la fuerza necesaria para sujetar la pieza y evitar el deslizamiento<sup>1</sup>.
- d) **Incertidumbre paramétrica.** Puesto que el operador solo tiene información visual del objeto el esquema de control debe ser robusto ante cambios en la masa del objeto y los parámetros del robot.
- e) **Retardos en la comunicación.**

Debido a la gran variedad de tareas que se pueden realizar mediante telemanipulación, esta área sigue siendo objeto de estudio. Son pocos los esquemas de control presentes en la literatura que abordan el problema de telemanipulación y dichos esquemas se enfocan principalmente en los retardos en la comunicación. Si bien los retardos pueden provocar que el sistema sea inestable, en tareas de telemanipulación los conceptos de telepresencia y transparencia así como el seguimiento de trayectorias en posición y fuerza toman mayor relevancia.

---

<sup>1</sup>Una explicación más detallada de los conceptos de Transparencia y Telepresencia se presentan en el Capítulo 2

### 1.3. Objetivo

Desarrollar esquemas de control que le permitan a un operador manipular objetos de forma diestra a distancia de una manera intuitiva y natural. Los esquemas de control deben garantizar:

1. Estabilidad.
2. Seguimiento de trayectorias en posición y fuerza.
3. Transparencia y Telepresencia.

### 1.4. Metodología

Para resolver el problema planteado en este trabajo de investigación, éste se dividió en dos problemas particulares. El primero consiste en analizar a los robots esclavos como un sistema cooperativo. En esta etapa el objetivo es diseñar algoritmos de control para la manipulación diestra (traslación y orientación) de diferentes objetos. Puesto que el objetivo final es lograr que el operador manipule el objeto de forma remota, el algoritmo propuesto debe garantizar que los errores de posición y fuerza tiendan a cero. Además, debe ser robusto ante cambios en los parámetros (masa e inercia) de la pieza a manipular.

El segundo problema consiste en analizar los esquemas de teleoperación. En primera instancia, se analizó un esquema de teleoperación unilateral formado por un manipulador maestro y dos esclavos. Dicho esquema le permite al operador mover y rotar el objeto manipulando el efector final del maestro. Para cumplir con el objetivo de *telepresencia* se añadió un segundo manipulador al esquema de teleoperación. En este caso, el objetivo consiste en proponer esquemas de control para los robots maestros que logren recrear las fuerzas de contacto, además de garantizar la estabilidad de todo el sistema en lazo cerrado.

### 1.5. Organización de la tesis

El presente documento está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la telerobótica así como el modelo matemático y propiedades del esquema de teleoperación. En el Capítulo 3 se aborda el problema de control de posición y fuerza para los esquemas de teleoperación unilateral y bilateral. Se propone un algoritmo de control adaptable centralizado para los robots esclavos y un observador de velocidad para el robot maestro. Además, se presenta el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. Un esquema de control centralizado para los manipuladores esclavos así como su correspondiente análisis de estabilidad de la dinámica en lazo cerrado se presentan en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se muestran resultados experimentales y de simulación que validan la teoría desarrollada en los Capítulos 3 y 4. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan conclusiones y el trabajo futuro.

# Esquema de teleoperación

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la telerobótica así como el modelo matemático y propiedades del esquema de teleoperación considerado en este trabajo de investigación.

## 2.1. Conceptos básicos

### 2.1.1. Transparencia y telepresencia

Cuando los humanos realizamos una tarea, siempre está asociada una *sensación* con dicha tarea. Por ejemplo, pulir una superficie de madera tiene una sensación distinta a tallar dicha superficie. Esta sensación depende en gran medida de como reacciona el ambiente ante las fuerzas que aplica el humano.

En una tarea de teleoperación dicha sensación se ve afectada o es nula. Esto se debe a que el robot maestro agrega una dinámica adicional. La *transparencia* indica como se ve afectada la sensación que percibe el humano al realizar una tarea de teleoperación. En un sistema de teleoperación completamente transparente el operador solo debe sentir la dinámica del entorno remoto.

El concepto de *telepresencia* se refiere a que un operador tenga la sensación de estar en contacto con el ambiente remoto. De este modo, la transparencia puede ser utilizada como una medida para cuantificar la telepresencia en un esquema de teleoperación.

### 2.1.2. Clasificación del los esquemas de teleoperación

Dependiendo de la información transmitida a cada robot, los esquemas de teleoperación maestro-esclavo se pueden clasificar en:

**Esquema de teleoperación unilateral:** En este esquema solo el robot maestro transmite información de posición o fuerza al manipulador esclavo.

**Esquema de teleoperación bilateral:** En este esquema tanto el robot esclavo como el maestro transmiten información de posición y/o fuerza. Este esquema presenta mayor flexibilidad ya que, dependiendo de la tarea, el robot esclavo puede ser utilizado como robot maestro.

Otra clasificación de los esquemas de teleoperación se basa en la estructura cinemática de los robots. Si los robots tienen la misma estructura cinemática se dice que es un

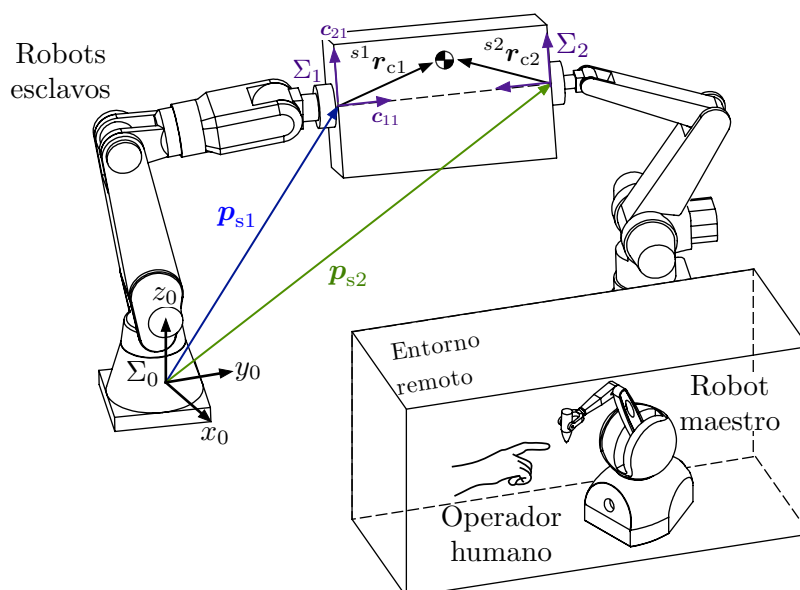


Figura 2.1: Esquema de telemanipulación

sistema de teleoperación *similar*. Un sistema de teleoperación *no similar* es aquel en el cual los robots tienen una estructura cinemática distinta.

### 2.1.3. Esquema de Telemanipulación

Las tareas que se pueden realizar con un esquema teleoperación convencional maestro-esclavo se limitan a tareas de seguimiento en posición y fuerza (*e.g* tareas de pulido, soldadura, exploración del entorno remoto). Para realizar una tarea de telemanipulación diestra se requiere un control preciso de las fuerzas aplicadas al objeto y de su movimiento. Puesto que una pinza robótica convencional no puede lograr esta tarea, se requiere que el robot esclavo tenga una mano mecánica (Yoshikawa, 2010). Sin embargo, si el objeto es muy pesado o excede las dimensiones del robot, se pueden tener múltiples robots esclavos. El esquema de telemanipulación considerado en este trabajo se muestra en la Figura 2.1. El sistema está compuesto por dos robots esclavos sujetando un objeto rígido y un robot maestro. Este esquema le permite a un operador manipular objetos de forma remota. Se asume lo siguiente:

- Los robots no tienen la misma estructura cinemática (esquema de teleoperación no similar).
- Los objetos a manipular son rígidos.
- El retardo en el canal de comunicación es despreciable.
- Los robots esclavos solo pueden ejercer fuerzas de compresión.
- Los robots están provistos únicamente de articulaciones de revolución.



## 2.2. Modelo matemático

### 2.2.1. Robots cooperativos

Los robots esclavos se analizan como un sistema cooperativo. Se asume que tienen el mismo número de grados de libertad cada uno ( $n_{s1} = n_{s2} = n_s$ ), por lo que el número de grados de libertad del sistema cooperativo es  $2n_s$ . De acuerdo con la Figura 2.1,  $\Sigma_0$  es un sistema de referencia inercial fijo en la base del primer robot,  $\Sigma_c$  es un sistema de referencia fijo al centro de masa del objeto y  $\Sigma_{si}$  es un sistema de referencia fijo al efector final de cada manipulador. Para obtener las relaciones cinemáticas del sistema cooperativo se asume que los manipuladores sujetan firmemente el objeto y que no existe deslizamiento. La posición del centro de masa del objeto está dada por

$${}^0\mathbf{p}_c = {}^0\mathbf{p}_{si} + {}^0\mathbf{R}_{si}{}^{si}\mathbf{r}_{ci}, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

donde  ${}^{si}\mathbf{r}_{ci} \in \mathfrak{R}^3$  es el vector constante que va del centro de masa del objeto al punto de contacto expresado con respecto al sistema  $\Sigma_i$ . Por otro lado, la orientación del sistema  $\Sigma_{si}$  se elige tal que coincida con la orientación del objeto  $\Sigma_c$ , *i.e.*,

$${}^0\mathbf{R}_{si} = \bar{\mathbf{R}}_i {}^0\mathbf{R}_c. \quad (2.2)$$

donde  $\bar{\mathbf{R}}_i \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de rotación constante y  $\mathbf{R}_c^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación del objeto. Al derivar la ecuación (2.1) se obtiene la velocidad lineal del objeto dada por

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{p}}_c &= {}^0\dot{\mathbf{p}}_{si} + {}^0\dot{\mathbf{R}}_{si}{}^{si}\mathbf{r}_{ci} \\ &= {}^0\dot{\mathbf{p}}_{si} + \mathbf{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{si}) [{}^0\mathbf{R}_{si}{}^{si}\mathbf{r}_{ci}] \\ &= {}^0\dot{\mathbf{p}}_{si} - \mathbf{S}({}^0\mathbf{R}_{si}{}^{si}\mathbf{r}_{ci}) {}^0\boldsymbol{\omega}_{si} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_{si}$  y  ${}^0\boldsymbol{\omega}_{si}$  son la velocidad lineal y angular del  $i$ -ésimo efector final, el producto cruz  $\mathbf{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{si}) [{}^0\mathbf{R}_{si}{}^{si}\mathbf{r}_{ci}] = {}^0\boldsymbol{\omega}_{si} \times {}^0\mathbf{R}_{si}{}^{si}\mathbf{r}_{ci}$  es la velocidad relativa entre el punto de contacto y el centro de masa. El operador  $\mathbf{S}(\cdot) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es una matriz antisimétrica.

Sea  $\boldsymbol{\nu}_s = [ \boldsymbol{\nu}_{s1}^T \quad \boldsymbol{\nu}_{s2}^T ]^T \in \mathfrak{R}^{12}$  el vector de velocidad del sistema cooperativo en coordenadas del espacio de trabajo con  $\boldsymbol{\nu}_{si} = [ \dot{\mathbf{p}}_{si}^T \quad \boldsymbol{\omega}_{si}^T ]^T \in \mathfrak{R}^6$ . Tomando en cuenta (2.3), el vector de velocidad lineal y angular del centro de masa del objeto denotado por  $\boldsymbol{\nu}_c = [ \dot{\mathbf{p}}_c^T \quad \boldsymbol{\omega}_c^T ]^T \in \mathfrak{R}^6$  se relaciona con  $\boldsymbol{\nu}_s \in \mathfrak{R}^6$  mediante

$$\boldsymbol{\nu}_s = \mathbf{J}_c^T \boldsymbol{\nu}_c \quad (2.4)$$

donde

$$\mathbf{J}_c = [ \mathbf{J}_{c1} \quad \mathbf{J}_{c2} ] = \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{S}(\mathbf{R}_{s1}{}^{s1}\mathbf{r}_{c1}) & \mathbf{I} & \mathbf{S}(\mathbf{R}_{s2}{}^{s2}\mathbf{r}_{c2}) & \mathbf{I} \end{array} \right] \in \mathfrak{R}^{6 \times 12}. \quad (2.5)$$

es la matriz de agarre (Erhart & Hirche, 2015).

De manera similar, la velocidad articular del sistema cooperativo denotado por  $\dot{\mathbf{q}}_s = [\dot{\mathbf{q}}_{s1}^T \quad \dot{\mathbf{q}}_{s2}^T]^T \in \mathfrak{R}^{2n_s}$  se relaciona con la velocidad lineal y angular  $\boldsymbol{\nu}_s$  mediante

$$\boldsymbol{\nu}_s = \mathbf{J}_s(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{s1}(\mathbf{q}_{s1}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_{s2}(\mathbf{q}_{s2}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{J}_{si}(\mathbf{q}_{si}) \in \mathfrak{R}^{6 \times n_s}$  es el Jacobiano geométrico del  $i$ -ésimo robot esclavo.

### Dinámica de los manipuladores

Cuando los robots esclavos sujetan de forma rígida al objeto, se forma una cadena cinemática cerrada, la cual puede ser caracterizada por la restricción holonómica

$$\varphi_s(\mathbf{q}_s) = \|\mathbf{p}_{s2}(\mathbf{q}_{s2}) - \mathbf{p}_{s1}(\mathbf{q}_{s1})\| - \ell = 0 \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{q}_s = [\mathbf{q}_{s1}^T \quad \mathbf{q}_{s2}^T]^T \in \mathfrak{R}^{2n_s}$  es el vector de coordenadas articulares del sistema cooperativo y  $\ell$  representa la longitud del objeto. El modelo dinámico de cada robot esclavo sujeto a la restricción (2.7) está dado por (Spong et al., 2006)

$$\mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si})\ddot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si})\dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{D}_{si}\dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{g}_{si}(\mathbf{q}_{si}) = \boldsymbol{\tau}_{si} + \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si})\lambda_s + \mathbf{J}_{si}^T(\mathbf{q}_{si})\mathbf{h}_{si} \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si}) \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_s}$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si})\dot{\mathbf{q}}_{si} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $\mathbf{D}_{si}\dot{\mathbf{q}}_{si} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  es el par debido a la fricción viscosa y  $\boldsymbol{\tau}_{si} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  es el vector de fuerzas y pares generalizados. El vector  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si})\lambda_s \in \mathfrak{R}^{n_s}$  representa la fuerza de sujeción o de contacto, donde  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}) = \partial\varphi_s/\partial\mathbf{q}_{si}$  es el gradiente y  $\lambda_s \in \mathfrak{R}$  es el multiplicador de Lagrange que representa la magnitud de la fuerza de sujeción. Finalmente,  $\mathbf{h}_{si} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  es el vector de fuerzas y pares de reacción en el punto de contacto.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema cooperativo se pueden escribir de forma compacta como

$$\overline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{q}_s)\ddot{\mathbf{q}}_s + \overline{\mathbf{C}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)\dot{\mathbf{q}}_s + \overline{\mathbf{D}}_s\dot{\mathbf{q}}_s + \overline{\mathbf{g}}_s(\mathbf{q}_s) = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s)\lambda_s + \mathbf{J}_s^T(\mathbf{q}_s)\mathbf{h}_s \quad (2.9)$$

donde las matrices son matrices diagonales por bloques, *e.g.*,

$$\overline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{q}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{s1}(\mathbf{q}_{s1}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H}_{s2}(\mathbf{q}_{s2}) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{s1}(\mathbf{q}_{s1}, \dot{\mathbf{q}}_{s1}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_{s2}(\mathbf{q}_{s2}, \dot{\mathbf{q}}_{s2}) \end{bmatrix},$$

los vectores se agrupan en vectores columna *e.g.*,

$$\overline{\mathbf{g}}_s(\mathbf{q}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{s1}(\mathbf{q}_{s1}) \\ \mathbf{g}_{s2}(\mathbf{q}_{s2}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{s1} \\ \boldsymbol{\tau}_{s2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{s1} \\ \mathbf{h}_{s2} \end{bmatrix},$$

el vector  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) = \nabla_{\mathbf{q}_s}\varphi(\mathbf{q}_s) \in \mathfrak{R}^{2n_s}$  es el gradiente en coordenadas articulares.

A continuación se expresa la fuerza de sujeción en coordenadas del espacio de trabajo. Para tal fin, sea  $\mathbf{x}_s = [\mathbf{x}_{s1}^T \quad \mathbf{x}_{s2}^T]^T$  el vector de posición en coordenadas del espacio

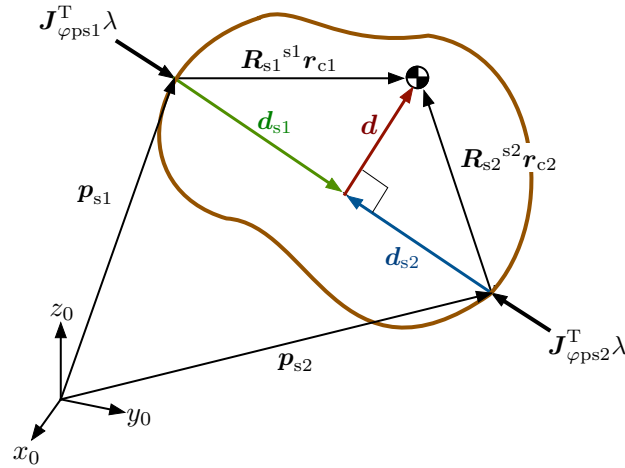


Figura 2.2: Diagrama de cuerpo libre del objeto

de trabajo, con  $\mathbf{x}_{si} = [\mathbf{p}_{si}^T \ \phi_{si}^T]^T$  donde  $\phi_{si}$  es una parametrización de la orientación. En dichas coordenadas, la fuerza de sujeción está dada por (Pliego-Jiménez & Arteaga-Pérez, 2015)

$$\mathbf{f}_s^T = \nabla_{\mathbf{x}_s} \varphi_s(\mathbf{x}_s) \lambda_s = \mathbf{J}_{\varphi_{xs}} \lambda_s. \quad (2.10)$$

Puesto que la restricción holonómica (2.7) no depende de  $\phi_{si}$  se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi_{xs}} = [\mathbf{J}_{\varphi_{ps1}} \ \mathbf{0}^T \mid \mathbf{J}_{\varphi_{ps2}} \ \mathbf{0}^T] \quad (2.11)$$

donde

$$\mathbf{J}_{\varphi_{psi}} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial \mathbf{p}_{si}} = (-1)^i \frac{(\mathbf{p}_{s2} - \mathbf{p}_{s1})^T}{\|\mathbf{p}_{s2} - \mathbf{p}_{s1}\|}. \quad (2.12)$$

### Dinámica del objeto

El diagrama de cuerpo libre del objeto se muestra en la Figura 2.2. La energía cinética del objeto está dada por

$$\mathcal{K}_c = \frac{1}{2} m_o \mathbf{0} \dot{\mathbf{p}}_c^T \mathbf{0} \dot{\mathbf{p}}_c + \frac{1}{2} \mathbf{0} \boldsymbol{\omega}_c^T \mathbf{0} \mathbf{R}_c \mathbf{I}_c \mathbf{0} \mathbf{R}_c^T \mathbf{0} \boldsymbol{\omega}_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}_c^T \mathbf{H}_c \boldsymbol{\nu}_c \quad (2.13)$$

donde  $m_o$  y  $\mathbf{I}_c \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son respectivamente la masa y el tensor de inercia del objeto y

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} m_o \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{0} \mathbf{R}_c \mathbf{I}_c \mathbf{0} \mathbf{R}_c^T \end{bmatrix}$$

es la matriz del objeto. La energía potencial del objeto está dada por

$$\mathcal{P}_c = m_o \mathbf{g}^T \mathbf{0} \mathbf{p}_c. \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{g} \in \mathfrak{R}^3$  es el vector de gravedad. Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento del objeto dadas por (Siciliano et al., 2009)

$$\mathbf{H}_c \dot{\boldsymbol{\nu}}_c + \mathbf{C}_c \boldsymbol{\nu}_c + \mathbf{g}_c = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_{ci}, \quad (2.15)$$

donde  $\mathbf{C}_c = \text{block diag} \{ \mathbf{O} \quad \mathbf{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_c) \mathbf{R}_c \mathbf{I}_c \mathbf{R}_c^T \} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ ,  $\mathbf{g}_c = [ m_o \mathbf{g}^T \quad \mathbf{0}^T ]^T \in \mathfrak{R}^6$ . El vector  $\sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_{ci}$  es la fuerza y par aplicado por los robots esclavos en el centro de masa del objeto y está dado por

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_{ci} = \mathbf{J}_c (\mathbf{h}_s + \mathbf{J}_{\varphi_{xs}}^T \lambda_s). \quad (2.16)$$

**Suposición 2.1.** *Los vectores  $\mathbf{J}_{\varphi_{ps1}}^T$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_{ps2}}^T$  son colineales en el punto de contacto.*  $\square$

A continuación se analiza el efecto de la fuerza de sujeción en el movimiento del objeto. Tomando en cuenta las ecuaciones (2.5) y (2.11) y se tiene

$$\mathbf{J}_c \mathbf{J}_{\varphi_{xs}}^T \lambda_s = \lambda_s \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T}{\mathbf{S}(\mathbf{r}_{ci}) \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T} \right] \in \mathfrak{R}^6 \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{r}_{ci} = {}^0 \mathbf{R}_{si} {}^{si} \mathbf{r}_{ci}$ . De acuerdo con la ecuación (2.12) el término superior de (2.17) está dado por

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s = \lambda_s \left( - \frac{\mathbf{p}_{s2} - \mathbf{p}_{s1}}{\|\mathbf{p}_{s2} - \mathbf{p}_{s1}\|} + \frac{\mathbf{p}_{s2} - \mathbf{p}_{s1}}{\|\mathbf{p}_{s2} - \mathbf{p}_{s1}\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

De acuerdo con la Suposición 2.1 el vector  $\mathbf{R}_{si} {}^{si} \mathbf{r}_{ci}$  se puede calcular de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}_{si} {}^{si} \mathbf{r}_{ci} = \mathbf{d}_{si} + \mathbf{d}, \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{d}_{si}$  y  $\mathbf{d}$  son vectores ortogonales como se muestra en la Figura 2.2. Tomando en cuenta la ecuación anterior, el par generado por las fuerzas de sujeción  $\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s$  está dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}(\mathbf{R}_{si} {}^{si} \mathbf{r}_{ci}) \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s &= \lambda_s \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}(\mathbf{d}_{si} + \mathbf{d}) \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \\ &= \lambda_s \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}(\mathbf{d}_{si}) \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T + \mathbf{S}(\mathbf{d}) \sum_{i=1}^2 \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s \end{aligned} \quad (2.20)$$

Puesto que  $\mathbf{d}_{si}$  es paralelo a  $\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T$  (ver Figura 2.2), el producto cruz entre dichos vectores es cero, *i.e.*,  $\mathbf{S}(\mathbf{d}_{si}) \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T = \mathbf{d}_{si} \times \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T = \mathbf{0}$ . Tomando en cuenta la ecuación (2.18) el segundo término del lado derecho de (2.20) también es cero,

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{S}(\mathbf{R}_{si} {}^{si} \mathbf{r}_{ci}) \mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Del análisis anterior se concluye que las fuerzas de sujeción  $\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s$  no contribuyen al movimiento del objeto. Por lo tanto, las únicas fuerzas y pares que contribuyen a su movimiento están dadas por

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_{ci} = \mathbf{J}_c \mathbf{h}_s. \quad (2.22)$$

Debido a que la matriz  $\mathbf{J}_c$  es de rango completo por fila, la solución de la ecuación anterior para  $\mathbf{h}_s$  está dada por

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{J}_c^\dagger \sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_{ci} \quad (2.23)$$

donde  $\mathbf{J}_c^\dagger = \mathbf{J}_c^T (\mathbf{J}_c \mathbf{J}_c^T)^{-1}$  es la pseudo inversa de Moore-Penrose. Tomando en cuenta la dinámica del objeto (2.15), el vector de fuerzas y pares  $\mathbf{h}_s$  se puede escribir como:

$$\mathbf{h}_s = -\mathbf{J}_c^\dagger (\mathbf{H}_c \dot{\boldsymbol{\nu}}_c + \mathbf{C}_c \boldsymbol{\nu}_c + \mathbf{g}_c). \quad (2.24)$$

Por otro lado, tomando en cuenta las ecuaciones (2.4) y (2.6), la velocidad y aceleración del objeto se pueden expresar en coordenadas articulares, *i.e.*,

$$\boldsymbol{\nu}_c = \mathbf{J}_{sc}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \quad (2.25)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_c = \mathbf{J}_{sc}(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{J}}_{sc}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{J}_{sc}(\mathbf{q}_s) \triangleq (\mathbf{J}_c^\dagger)^T \mathbf{J}_s(\mathbf{q}_s)$  y  $\dot{\mathbf{J}}_{sc} = \frac{d}{dt} \mathbf{J}_{sc}$ . Finalmente, sustituyendo la ecuación (2.24) en la dinámica de los robots esclavos (2.9) y tomando en cuenta las relaciones cinemáticas (2.25) y (2.26) se obtiene

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s) \lambda_s \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) &\triangleq \overline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{q}_s) + \mathbf{J}_{sc}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{H}_c \mathbf{J}_{sc}(\mathbf{q}_s) \\ \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) &\triangleq \overline{\mathbf{C}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) + \mathbf{J}_{sc}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{H}_c \dot{\mathbf{J}}_{sc}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{C}_c \mathbf{J}_{sc}(\mathbf{q}_s) \\ \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) &\triangleq \overline{\mathbf{g}}_c(\mathbf{q}_s) + \mathbf{J}_{sc}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{g}_c. \end{aligned}$$

La ecuación (2.27) representa la dinámica del sistema cooperativo cuando los robots sujetan de forma rígida el objeto.

### 2.2.2. Agarre rígido

En este trabajo, el término *agarre rígido* se refiere a que los robots esclavos manipulan el objeto sin que exista deslizamiento entre los efectores finales y el objeto. En la sección anterior se mostró que los vectores de fuerza  $\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s$  no contribuyen al movimiento del objeto. La función de dichas fuerzas es lograr un agarre rígido. Para que no exista deslizamiento ente los efectores finales y el objeto, se debe cumplir (Howe & Cutkosky, 1996)

$$\mathbf{f}_{rsi} \geq m_o \mathbf{g} \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{f}_{rsi} = \kappa_{si} \mathbf{n}_{si} \in \mathfrak{R}^3$  es la fuerza de fricción estática,  $\mathbf{n}_{si} \in \mathfrak{R}^3$  es la fuerza normal a la superficie y  $\kappa_s \in \mathfrak{R}$  es el coeficiente de fricción estático de las superficies de contacto. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que el vector  $\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s$  es normal a la superficie,

$$\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}^T \lambda_s = \mathbf{n}_{si}. \quad (2.29)$$

Tomando en cuenta la ecuación anterior y puesto que  $\|\mathbf{J}_{\varphi_{psi}}\| = 1$ , la condición (2.28) se simplifica de la siguiente manera

$$\kappa_s \lambda_s \geq m_o g_0 \quad (2.30)$$

donde  $g_0 = 9.8 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$  es la constante gravitatoria. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza sujeción deseada debe satisfacer

$$\lambda_{sd} \geq \frac{m_o g_0}{\kappa_s}. \quad (2.31)$$

### 2.2.3. Robot maestro

En tareas de teleoperación o telemanipulación es común utilizar dispositivos hápticos como robot maestro; esto se debe a que presentan baja inercia y peso, además de tener un diseño ergonómico. Las ecuaciones del robot maestro están dadas por

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m) \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_h \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{q}_m \in \mathfrak{R}^{n_m}$  es el vector de posición articular,  $\boldsymbol{\tau}_m \in \mathfrak{R}^{n_m}$  es el par de control y  $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathfrak{R}^{n_m}$  es el par aplicado por el humano.

## 2.3. Propiedades del modelo

Las ecuaciones (2.27) y (2.28) describen la dinámica del sistema de telemanipulación y presentan las siguientes propiedades ( $k = \{s, m\}$ ):

**Propiedad 2.1.** *La matriz de inercia  $\mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k)$  es simétrica positiva definida.* □

**Propiedad 2.2.** La matriz de inercia  $\mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k)$  satisface

$$\lambda_{\text{hk}} \|\mathbf{x}_k\|^2 \leq \mathbf{x}_k^T \mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k) \mathbf{x}_k \leq \lambda_{\text{Hk}} \|\mathbf{x}_k\|^2, \quad \forall \mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^{n_k}$$

donde

$$\lambda_{\text{hk}} \triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_k} \lambda_{\text{mín}}\{\mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k)\}, \quad \lambda_{\text{Hk}} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_k} \lambda_{\text{máx}}\{\mathbf{H}_k(\mathbf{q}_k)\} \quad \square$$

**Propiedad 2.3.** La matriz  $\dot{\mathbf{H}}_k(\mathbf{q}_k) - 2\mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k)$  es antisimétrica. □

**Propiedad 2.4.** El vector de Coriolis  $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{x}_k)\mathbf{y}_k$  satisface  $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{y}_k)\mathbf{x}_k$  para todo  $\mathbf{q}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathfrak{R}^{n_k}$ . □

**Propiedad 2.5.** La matriz  $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{x}_k)$  satisface  $\|\mathbf{C}_k(\mathbf{q}_k, \mathbf{x}_k)\| \leq k_{\text{Ck}}\|\mathbf{x}_k\|$ ,  $k_{\text{Ck}} > 0$  para todo  $\mathbf{q}_k, \mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^{n_k}$ . □

**Propiedad 2.6.** El modelo dinámico (2.27) es lineal con respecto a los parámetros dinámicos de los robots esclavos y el objeto i.e.,

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s)\ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{Y}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s)\boldsymbol{\theta}_s = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s)\boldsymbol{\lambda}_s$$

donde  $\mathbf{Y}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) \in \mathfrak{R}^{2n_s \times p_s}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\theta}_s \in \mathfrak{R}^{p_s}$  representa el vector de parámetros de los robots y el objeto. □

La derivada de la restricción (2.7) con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{d}{dt}\varphi_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s = 0. \quad (2.33)$$

Se observa que la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}_s$  pertenece al espacio nulo del vector  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)$ . Puesto que se tiene sólo una restricción, una interpretación geométrica de (2.33) es que la velocidad  $\dot{\mathbf{q}}_s$  es ortogonal a  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)$ .

**Propiedad 2.7.** El vector  $\dot{\mathbf{q}}_s$  satisface

$$\dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s \quad (2.34)$$

donde  $\mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s)\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_s}$ ,  $\mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s) (\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)\mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s))^{-1} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  es la pseudo inversa de Moore-Penrose y  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s) \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_s}$ . Las matrices de proyección  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  satisfacen

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{Q}_s(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s) = \mathbf{O} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s)\mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s). \quad \square$$

Dado que  $\dot{\mathbf{q}}_s^T \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s) = (\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s)^T = 0$  se tiene la siguiente propiedad

**Propiedad 2.8.** El modelo dinámico (2.27) define un mapeo pasivo  $\boldsymbol{\tau}_s \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_s$

$$\langle \boldsymbol{\tau}_s, \dot{\mathbf{q}}_s \rangle_T = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}_s^T \boldsymbol{\tau}_s dt \geq -\beta_s$$

para algún  $\beta_s > 0$  y para todo  $T > 0$ . □





# Algoritmo de control centralizado

En este capítulo se presentan los algoritmos de control de posición y fuerza para el sistema de telemanipulación presentado en el Capítulo 2. Como se mencionó anteriormente, un esquema de telemanipulación le permite a un operador manipular objetos de forma diestra desde un lugar remoto. Por lo tanto, el algoritmo de control debe garantizar no solo el seguimiento en posición, sino también debe controlar la fuerza de sujeción para garantizar un agarre rígido.

## 3.1. Algoritmo de control robot maestro

En un esquema de telemanipulación el algoritmo de control para el robot maestro, a diferencia de los esquemas de control para los esclavos, no se utiliza para lograr seguimiento de trayectorias. El esquema de control del maestro se puede utilizar para:

1. Cancelar fuerzas dinámicas que impiden al operador mover el efector del robot maestro libremente (*e.g.* fuerzas de gravedad, fuerzas debido a la fricción, fuerzas dinámicas).
2. Recrear fuerzas de contacto para dar la sensación de tocar la superficie del objeto remoto (*telepresencia*).
3. Impedir que el operador pueda mover el efector final del robot en ciertas direcciones. Esto con el fin de evitar posibles colisiones o singularidades.

El algoritmo de control para el robot maestro está dado por

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) \quad (3.1)$$

Las fuerzas centrífugas y de Coriolis dependen de la velocidad articular. Si el operador mueve lentamente el efector final del manipulador, dichas fuerzas se pueden despreciar. Por lo tanto, a bajas velocidades es razonable asumir que el controlador (3.1) garantiza que el operador puede mover con facilidad el efector final del maestro. Al sustituir el esquema de control (3.1) en (2.32) se obtiene

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m)\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m)\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_m = -\boldsymbol{\tau}_h \quad (3.2)$$

Dentro de los componentes principales del esquema de telemanipulación se encuentra el operador, cuya función principal es generar la trayectoria deseada para los manipuladores esclavos. Para analizar el sistema en lazo cerrado se considera lo siguiente:

**Suposición 3.1.** *El par aplicado por el humano es una función continua y acotada, i.e.  $\tau_h \in \mathcal{L}_\infty$ . Además, se asume que las trayectorias deseadas generadas por el humano están acotadas, i.e.,*

$$\|\mathbf{q}_m(t)\| \leq \zeta_{m1} < \infty, \quad \|\dot{\mathbf{q}}_m(t)\| \leq \zeta_{m2} < \infty. \quad \square$$

Tomando en cuenta la suposición anterior y la Propiedad 2.1, se concluye que el vector de aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}_m$  también está acotado,

$$\|\ddot{\mathbf{q}}_m(t)\| \leq \zeta_{m3} < \infty. \quad (3.3)$$

### 3.1.1. Observador de velocidad

En una tarea de telemanipulación, para generar la trayectoria deseada para los robots esclavos se requiere medir tanto la posición como la velocidad articular del robot maestro. La velocidad articular se puede medir utilizando un tacómetro, o bien, ésta puede ser calculada mediante diferenciación numérica. En ambos casos, la velocidad está contaminada con ruido, el cual, puede afectar el desempeño del esquema de telemanipulación. Para resolver este problema se utilizará un observador para estimar la velocidad articular del robot maestro. Se define el error de observación de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{q}}_m = \mathbf{q}_m - \hat{\mathbf{q}}_m \quad (3.4)$$

donde  $\hat{\mathbf{q}}_m \in \mathbb{R}^{n_m}$  es un estimado de  $\mathbf{q}_m$ . Basado en [Arteaga-Pérez & Kelly \(2004\)](#), el observador propuesto está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_m = (k_r + \alpha_r)\tilde{\mathbf{q}}_m + k_r\boldsymbol{\xi}_m \quad (3.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_m = \alpha_r\tilde{\mathbf{q}}_m \quad (3.6)$$

donde  $k_r, \alpha_r \in \mathbb{R}$  son constantes positivas. Se define la velocidad auxiliar

$$\dot{\mathbf{q}}_{mo} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_m - \alpha_r\tilde{\mathbf{q}}_m. \quad (3.7)$$

Considérese la variable de error

$$\mathbf{r}_m = \dot{\mathbf{q}}_m - \dot{\mathbf{q}}_{mo} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m + \alpha_r\tilde{\mathbf{q}}_m. \quad (3.8)$$

Nótese que la ecuación anterior representa un filtro estable de primer orden para  $\tilde{\mathbf{q}}_m$  con entrada  $\mathbf{r}_m$ . Por lo tanto, si  $\mathbf{r}_m$  está acotada implica que los errores de observación  $\tilde{\mathbf{q}}_m$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m$  están acotados. La derivada de (3.8) está dada por

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \ddot{\mathbf{q}}_m - \ddot{\mathbf{q}}_{mo}. \quad (3.9)$$

Tomando en cuenta (3.5)-(3.7), la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_m &= -\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_m + \alpha_r\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m + \ddot{\mathbf{q}}_m \\ &= -(k_r + \alpha_r)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m - k_r\alpha_r\tilde{\mathbf{q}}_m + \alpha_r\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m + \ddot{\mathbf{q}}_m \\ &= -k_r\mathbf{r}_m + \ddot{\mathbf{q}}_m. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La ecuación anterior caracteriza la dinámica de los errores de observación. A continuación se establece el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.** *Para el sistema descrito por (2.32) en lazo cerrado con (3.1), el observador de velocidad dado en (3.5) y (3.6) garantiza el acotamiento de los errores de observación,  $\tilde{\mathbf{q}}_m, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m \in \mathcal{L}_\infty$ . Además, si la ganancia de observación  $k_r$  es suficientemente grande, dichos errores se pueden hacer arbitrariamente pequeños, i.e.,*

$$\tilde{\mathbf{q}}_m(t) \approx \mathbf{0}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m(t) \approx \mathbf{0}. \quad \square$$

*Demostración.* Considérese la función positiva

$$V_r = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}_m\|^2 \quad (3.11)$$

cuya derivada a lo largo de (3.10) está dada por

$$\dot{V}_r = -k_r \|\mathbf{r}_m\|^2 + \mathbf{r}_m^T \ddot{\mathbf{q}}_m. \quad (3.12)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.3), la función  $\dot{V}_r$  satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &\leq -\frac{1}{2} k_r \|\mathbf{r}_m\|^2 - \frac{1}{2} k_r \|\mathbf{r}_m\|^2 + \zeta_{m3} \|\mathbf{r}_m\| \\ &= -\frac{1}{2} k_r \|\mathbf{r}_m\|^2 - \frac{1}{2} k_r \|\mathbf{r}_m\| (\|\mathbf{r}_m\| - \mu_m) \\ &\leq -\frac{1}{2} k_r \|\mathbf{r}_m\|^2, \quad \forall \|\mathbf{r}_m\| \geq \mu_m \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde

$$\mu_m \triangleq 2 \frac{\zeta_{m3}}{k_r}. \quad (3.14)$$

Considérese la región  $\Omega_m = \{\mathbf{r}_m \mid \|\mathbf{r}_m\| \leq \mu_m\} \subset \mathfrak{R}^{n_m}$  con centro en el origen. Puesto que la derivada de  $V_r$  es negativa afuera de  $\Omega_m$ , las trayectorias del sistema (3.10) convergerán a dicha región y permanecerán en ella para todo tiempo futuro. De este modo, para un tiempo  $T \geq 0$  se tiene

$$\|\mathbf{r}_m\| \leq \mu_m \quad (3.15)$$

Por otro lado, la solución de (3.8) está dada por

$$\tilde{\mathbf{q}}_m(t) = e^{-\alpha_r t} \tilde{\mathbf{q}}_m(0) + \int_0^t e^{-\alpha_r(t-\tau)} \mathbf{r}_m(\tau) d\tau \quad t \geq 0. \quad (3.16)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.15) una cota superior para  $\tilde{\mathbf{q}}_m(t)$  se puede calcular de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_m(t)\| &\leq \|\tilde{\mathbf{q}}_m(0)\| e^{-\alpha_r t} + \int_0^t \mu_m e^{-\alpha_r(t-\tau)} d\tau \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{q}}_m(0)\| e^{-\alpha_r t} + \frac{\mu_m}{\alpha_r}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

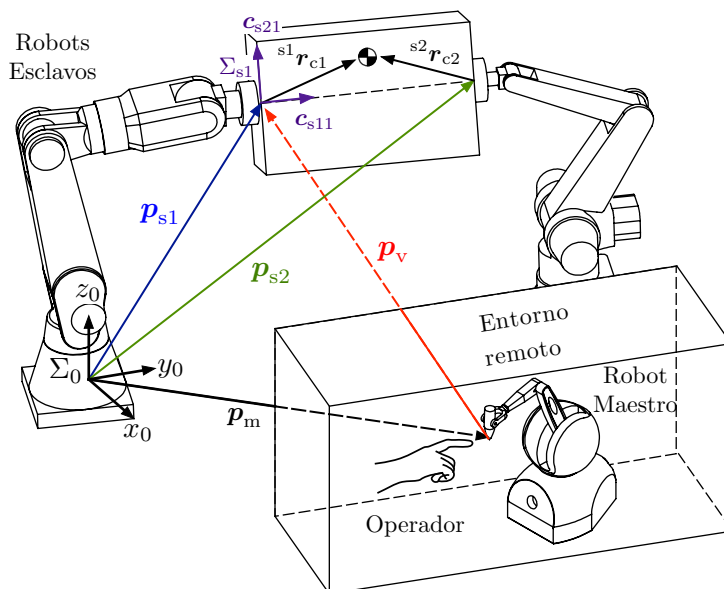


Figura 3.1: Planeación de trayectorias

De las ecuaciones (3.8), (3.15) y (3.17) se observa que una cota superior para el error de observación de la velocidad articular se puede calcular como

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m\| &\leq \alpha_r \|\tilde{\mathbf{q}}_m\| + \|\mathbf{r}_m\| \\ &\leq \alpha_r \|\tilde{\mathbf{q}}_m(0)\| e^{-\alpha_r t} + 2\mu_m. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para un tiempo  $T$  suficientemente grande, se tienen las siguientes aproximaciones

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_m\| \approx \frac{\mu_m}{\alpha_m}, \quad \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m\| \approx 2\mu_m. \quad (3.19)$$

El radio de la región  $\Omega_m$  se puede hacer arbitrariamente pequeño si se incrementa la ganancia de observación  $k_m$  (ver ecuación (3.14)). Por lo tanto, se puede concluir que los errores de observación se pueden hacer arbitrariamente pequeños, *i.e.*,

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_m\| \approx \mathbf{0}, \quad \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_m\| \approx \mathbf{0}$$

para un tiempo  $T \geq 0$ . □

## 3.2. Planeación de trayectorias

El esquema de teleoperación considerado en este trabajo se diferencia de los esquemas tradicionales en el número de robots esclavos. Puesto que se asume que los manipuladores tienen una estructura cinemática distinta, la trayectoria deseada se generará en

coordenadas del espacio de trabajo. De acuerdo con la Figura 3.1, la posición y orientación deseada para el primer robot esclavo se puede calcular de la siguiente manera

$$\mathbf{p}_{sd1} = \hat{\mathbf{p}}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) + \mathbf{p}_v, \quad \mathbf{R}_{sd1} = \mathbf{R}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) \quad (3.20)$$

donde  $\hat{\mathbf{p}}_m \in \mathfrak{R}^3$  es la posición estimada del maestro,  $\mathbf{p}_v \in \mathfrak{R}^3$  es un vector constante y  $\mathbf{R}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación del maestro. El vector  $\mathbf{p}_v$  puede ser interpretado como un eslabón virtual que une los efectores finales del maestro y esclavo. Para el segundo robot esclavo se tiene

$$\mathbf{p}_{sd2} = \mathbf{p}_{sd1} + \ell \mathbf{R}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) \mathbf{c}_{s11}, \quad \mathbf{R}_{sd2} = \mathbf{R} \mathbf{R}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) \quad (3.21)$$

donde  $\ell$  es la longitud del objeto,  $\mathbf{c}_{s11} \in \mathfrak{R}^3$  es un vector unitario del sistema de referencia  $\Sigma_{s1} = \{\mathbf{c}_{s11}, \mathbf{c}_{s21}, \mathbf{c}_{s31}\}$  y  $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de rotación constante, la cual se elige tal que los efectores finales de los esclavos sean colineales (ver Figure 3.1). Puesto que  $\|\mathbf{R}_m \mathbf{c}_{s11}\| = \|\mathbf{c}_{s11}\| = 1$ , se tiene que  $\|\mathbf{p}_{sd2} - \mathbf{p}_{sd1}\| = \ell$ . Por lo tanto, las trayectorias deseadas (3.20) y (3.21) satisfacen la restricción holonómica (2.7). La velocidad lineal deseada está dada por

$$\dot{\mathbf{p}}_{sd1} = \dot{\hat{\mathbf{p}}}_m(\hat{\mathbf{q}}_m), \quad \dot{\hat{\mathbf{p}}}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) + \ell (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m \times \mathbf{R}_m \mathbf{c}_{s11}) \quad (3.22)$$

donde  $\dot{\hat{\mathbf{p}}}_m \in \mathfrak{R}^3$  y  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_m \in \mathfrak{R}^3$  son la velocidad lineal y angular estimadas dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{p}}}_m \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_m \end{bmatrix} = \mathbf{J}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_m$$

donde  $\mathbf{J}_m(\hat{\mathbf{q}}_m) \in \mathfrak{R}^{6 \times n_m}$  es el Jacobiano geométrico del robot maestro. Finalmente, la posición articular deseada  $\mathbf{q}_{sdi}$  se obtiene al resolver la cinemática inversa de los manipuladores.

**Comentario 3.1.** *La trayectoria deseada está en función de la posición articular estimada  $\hat{\mathbf{q}}_m$ . Al derivar las ecuaciones (3.20) y (3.21) la velocidad deseada está en función de la velocidad articular estimada  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_m$  (ver ecuación (3.22)). De este modo, se evita utilizar la velocidad articular del maestro  $\dot{\mathbf{q}}_m$ .  $\square$*

### 3.3. Algoritmo de control robot esclavos

En esta sección se presenta un control centralizado para el sistema cooperativo descrito por la ecuación (2.27). Los errores de posición y fuerza se definen de la siguiente manera

$$\Delta \mathbf{q}_s = \mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}, \quad \Delta \lambda_s = \lambda_s - \lambda_{sd}$$

donde  $\mathbf{q}_{sd} = [ \mathbf{q}_{sd1}^T \quad \mathbf{q}_{sd2}^T ]^T \in \mathfrak{R}^{n_s} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  es la posición articular deseada, la cual, se obtiene al resolver la cinemática inversa de los manipuladores esclavos. Por otro lado,  $\lambda_{sd} \in \mathfrak{R}$  es la magnitud deseada de la fuerza de sujeción que satisface la condición (2.31). Se introduce la variable de estado  $\Delta F_s \in \mathfrak{R}$  como

$$\frac{d}{dt} \Delta F_s = \Delta \lambda_s. \quad (3.23)$$

Como se mostrará más adelante la variable  $\Delta F_s$  se utilizará para diseñar un algoritmo de control con acción integral en el subespacio de fuerza. Se define la velocidad de referencia  $\dot{\mathbf{q}}_{rs}$  como

$$\dot{\mathbf{q}}_{rs} \triangleq \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) (\dot{\mathbf{q}}_{sd} - k_{ps} \Delta \mathbf{q}_s) + \xi_s k_{Fs}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) \quad (3.24)$$

donde  $k_{ps}$ ,  $\xi_s$  y  $k_{Fs} \in \mathfrak{R}$  son constantes positivas. Nótese que la velocidad de referencia hace uso de las matrices de proyección. De esta manera, los errores de posición no afectan a los errores de fuerza y viceversa. Considérese la variable de error

$$\mathbf{s}_s = \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rs}. \quad (3.25)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (2.34) y (3.24) el vector  $\mathbf{s}_s$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_s &= \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{rs} \\ &= \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) (\Delta \dot{\mathbf{q}}_s + k_{ps} \Delta \mathbf{q}_s) - \xi_s k_{Fs}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) \\ &= \mathbf{s}_{ps} + \mathbf{s}_{Fs} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde

$$\mathbf{s}_{ps} \triangleq \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) (\Delta \dot{\mathbf{q}}_s + k_{ps} \Delta \mathbf{q}_s) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{s}_{Fs} \triangleq -\xi_s k_{Fs}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) \quad (3.28)$$

Los vectores  $\mathbf{s}_{ps} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  y  $\mathbf{s}_{Fs} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  caracterizan la dinámica de los errores de posición y fuerza. Además, dichos vectores son ortogonales, esto implica que si el vector  $\mathbf{s}_s$  tiende a cero, también los harán los vectores  $\mathbf{s}_{ps}$  y  $\mathbf{s}_{Fs}$ . Por lo tanto, el objetivo es lograr la convergencia a cero del vector  $\mathbf{s}_s$ . Para tal fin, se propone el siguiente algoritmo de control adaptable para los robots esclavos

$$\boldsymbol{\tau}_s = -\mathbf{K}_{vs} \mathbf{s}_s + \mathbf{Y}_{sa} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}) (\lambda_{sd} - k_{Fs} \Delta F_s) \quad (3.29)$$

donde  $\mathbf{K}_{vs} = \mathbf{K}_{vs}^\top \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_s}$  es una matriz positiva definida,  $\mathbf{Y}_{sa} = \mathbf{Y}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \dot{\mathbf{q}}_{rs}, \ddot{\mathbf{q}}_{rs}) \in \mathfrak{R}^{n_s \times p_s}$  es el *regresor*, el cual satisface  $\mathbf{Y}_{sa} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_s = \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_{rs} + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)$ ,

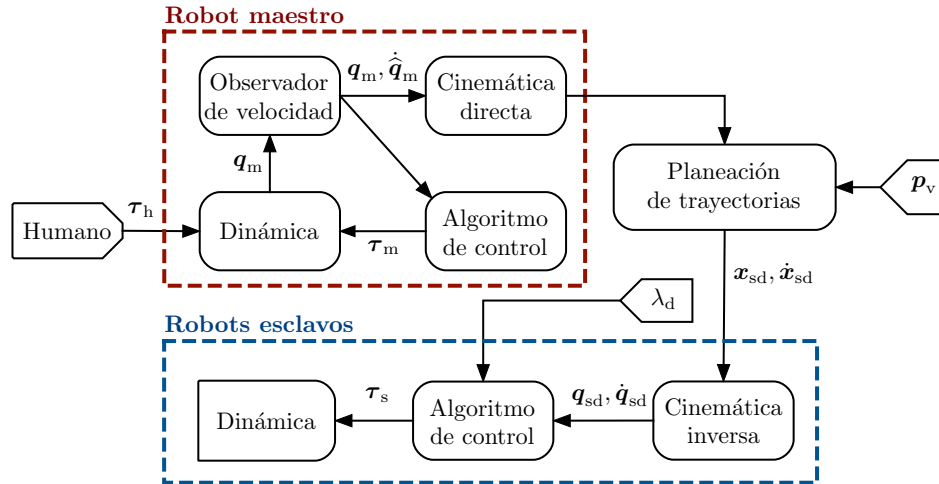


Figura 3.2: Diagrama de bloques del esquema de teleoperación

el vector  $\hat{\theta}_s \in \mathbb{R}^{p_s}$  es un estimado de  $\theta_s$ , el cual se actualiza de acuerdo con la ley de adaptación

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}_s = -\Gamma_s Y_{sa}^T s_s \quad (3.30)$$

donde  $\Gamma_s = \Gamma_s^T > \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{p_s \times p_s}$  es la ganancia de adaptación. Al restar el término  $H_s(q_s)\ddot{q}_{rs} + C_s(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_{rs} + D_s\dot{q}_{rs} + g_s(q_s)$  en ambos lados de la ecuación (2.27) se obtiene

$$H_s(q_s)\dot{s}_s + C_s(q_s, \dot{q}_s)s_s + D_s s_s = \tau_s + J_{\varphi_s}^T(q_s)\lambda_s - Y_{sa}\theta_s. \quad (3.31)$$

Finalmente al sustituir el algoritmo de control (3.29) en la ecuación anterior se obtiene la dinámica en lazo cerrado dada por

$$H_s(q_s)\dot{s}_s = -C_s(q_s, \dot{q}_s)s_s - K_{vDs}s_s + J_{\varphi_s}^T(q) (\Delta\lambda_s + k_{Fs}\Delta F_s) + Y_{sa}\Delta\theta_s \quad (3.32)$$

donde  $K_{vDs} \triangleq K_{vs} + D_s$  y  $\Delta\theta_s \triangleq \hat{\theta}_s - \theta_s$  es el error paramétrico.

El diagrama de bloques del esquema de teleoperación en conjunto con los algoritmos de control-observador se muestra en la Figura 3.2. Cabe resaltar que los robots esclavos no envían información al robot maestro, por lo tanto, se trata de un esquema de teleoperación unilateral. Esto permite analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado para los esclavos sin considerar la dinámica en lazo cerrado del maestro.

A continuación se establece el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.** *Considérese el sistema de robots esclavos cooperativos (2.27) en lazo cerrado con (3.29) donde las trayectorias deseadas generadas por el humano están dadas por (3.20)-(3.22), las cuales se asumen acotadas. Además, supóngase que las condiciones*

iniciales satisfacen  $\|\Delta \mathbf{q}_s(0)\| \leq \delta_s$ , donde  $\delta_s$  es una constante suficientemente pequeña para la cual se cumple

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\Delta \mathbf{q}_s = \Delta \mathbf{q}_s \quad \text{and} \quad \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\Delta \dot{\mathbf{q}}_s = \Delta \dot{\mathbf{q}}_s.$$

Si la ganancia  $k_{ps}$  definida en (3.24) se elige tal que  $k_{ps} \geq \zeta_s/\delta_s$ , donde  $\zeta_s$  está definida en (3.57), entonces el algoritmo de control adaptable (3.29) garantiza

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{q}_s = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \lambda_s = 0.$$

*Demostración.* La demostración del teorema se lleva a cabo en tres pasos. Además, se hará uso del Teorema A.2 mostrado en el Apéndice A. Considérese el vector de estado

$$\mathbf{y}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_s^T & \Delta F_s & \Delta \boldsymbol{\theta}_s^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{n_s+p_s+1}. \quad (3.33)$$

Tomando en cuenta la definición anterior, la dinámica en lazo cerrado de los robots esclavos descrita por (3.23), (3.30) y (3.32) se puede escribir de forma compacta como

$$\dot{\mathbf{y}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \{ \mathbf{J}_{\varphi_s}^T (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) - (\mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) + \mathbf{K}_{vDs}) \mathbf{s}_s + \mathbf{Y}_a \Delta \boldsymbol{\theta}_s \} \\ \Delta \lambda_s \\ -\boldsymbol{\Gamma}_s \mathbf{Y}_a^T \mathbf{s}_s \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

1) El primer paso consiste en mostrar que el vector de estado  $\mathbf{y}_s$  está acotado y que el vector  $\mathbf{s}_s$  definido en (3.25) tiende a cero asintóticamente. Para tal fin, considérese la función candidata de Lyapunov

$$V_s(t, \mathbf{y}_s) = \frac{1}{2} \mathbf{y}_s^T \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \mathbf{y}_s \quad (3.35)$$

donde  $\mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) = \text{block diag} \{ \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \quad 2\xi_s \quad \boldsymbol{\Gamma}_s^{-1} \}$  es una matriz diagonal a bloques. La función  $V_s(t, \mathbf{y}_s)$  satisface

$$\lambda_{sm} \|\mathbf{y}_s\|^2 \leq V_s(t, \mathbf{y}_s) \leq \lambda_{sM} \|\mathbf{y}_s\|^2$$

con  $\lambda_{sm} \triangleq \min_{\mathbf{q}_s} \lambda_{\min} \{ \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \}$ ,  $\lambda_{sM} \triangleq \max_{\mathbf{q}_s} \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \}$ . La derivada de  $V_s(t, \mathbf{y}_s)$  a lo largo de (3.34) está dada por

$$\dot{V}_s = -\mathbf{s}_s^T \mathbf{K}_{vDs} \mathbf{s}_s + (\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \mathbf{s}_s)^T (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) + 2\xi_s \Delta F_s \Delta \lambda_s \quad (3.36)$$

donde se ha utilizado la Propiedad 2.3. Tomando en cuenta la ecuación (3.26) y que  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) = \mathbf{I}$ , el producto interno  $\langle \mathbf{J}_{\varphi_s}^T(\mathbf{q}_s), \mathbf{s}_s \rangle$  está dado por

$$\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \mathbf{s}_s = -\xi_s k_{Fs}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s) = -\xi_s k_{Fs}^{-1} (\Delta \lambda_s + k_{Fs} \Delta F_s). \quad (3.37)$$

Al sustituir el resultado anterior en (3.36) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -\mathbf{s}_s^T \mathbf{K}_{vDs} \mathbf{s}_s - \xi_s k_{Fs} \Delta F_s^2 - \xi_s k_{Fs}^{-1} \Delta \lambda_s^2 \\ &\leq -\mathbf{s}_s^T \mathbf{K}_{vDs} \mathbf{s}_s - \xi_s k_{Fs} \Delta F_s^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$



Se observa que la función escalar  $V_s(t, \mathbf{y}_s)$  satisface las condiciones (A.7) y (A.8) del Teorema A.2 con

$$W_{s1}(\mathbf{y}_s) \triangleq \lambda_{sm} \|\mathbf{y}_s\|^2 \quad (3.39)$$

$$W_{s2}(\mathbf{y}_s) \triangleq \lambda_{sM} \|\mathbf{y}_s\|^2 \quad (3.40)$$

$$W_{s3}(\mathbf{y}_s) \triangleq -\mathbf{s}_s^T \mathbf{K}_{vDs} \mathbf{s}_s - \xi_s k_{Fs} \Delta F_s^2. \quad (3.41)$$

Puesto que  $W_{s1}(\mathbf{y}_s)$  es una función radialmente no acotada, las condiciones del Teorema A.2 se satisfacen globalmente. Se concluye lo siguiente:

- a) El vector  $\mathbf{y}_s$  está acotado, por lo tanto,  $\mathbf{s}_s, \Delta F_s, \Delta \boldsymbol{\theta}_s \in \mathcal{L}_\infty$ .
  - b) Puesto que  $\boldsymbol{\theta}_s$  es un vector constante y el error paramétrico  $\Delta \boldsymbol{\theta}_s$  está acotado, se concluye  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_s \in \mathcal{L}_\infty$ .
  - c) Dado que  $\lim_{t \rightarrow \infty} W_{s3}(\mathbf{y}_s) = 0$ , implica que las variables  $\mathbf{s}_s$  y  $\Delta F_s$  tienden a cero asintóticamente.
  - d) Puesto que  $\mathbf{s}_{ps}$  y  $\mathbf{s}_{Fs}$  son vectores ortogonales, la convergencia a cero de  $\mathbf{s}_s$  también implica  $\mathbf{s}_{ps}, \mathbf{s}_{Fs} \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- 2) El siguiente paso consiste en mostrar que el error de fuerza  $\Delta \lambda_s$  tiende a cero. Al multiplicar la ecuación (3.28) por  $\mathbf{J}_{\varphi_s}$  y reordenar términos se obtiene

$$\Delta \lambda_s = -k_{Fs} \Delta F_s - \xi_s^{-1} k_{Fs} \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \mathbf{s}_{Fs}. \quad (3.42)$$

Puesto que el gradiente  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)$  se asume de rango completo por fila y tomando en cuenta el inciso c) se concluye

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \lambda_s = 0.$$

3) En el último paso se mostrará la convergencia a cero de los errores de posición y velocidad. La matriz de proyección  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)$  no es de rango completo, por lo que la convergencia a cero del vector  $\mathbf{s}_{ps}$  no necesariamente implica  $\Delta \mathbf{q}_s, \Delta \dot{\mathbf{q}}_s \rightarrow \mathbf{0}$ . Tomando en cuenta la ecuación (3.27) el producto interno  $\langle \Delta \mathbf{q}_s, \mathbf{s}_{ps} \rangle$  está dado por

$$\Delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{s}_{ps} = \Delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \dot{\mathbf{q}}_s + k_{ps} \Delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q}_s. \quad (3.43)$$

A continuación se analizarán los términos  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \dot{\mathbf{q}}_s$  y  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q}_s$ . Al desarrollar el primer término se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \dot{\mathbf{q}}_s &= \Delta \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s) (\dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{q}}_{sd}) \\ &= \Delta \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_{sd}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por otro lado, la proyección del error de posición  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q}_s$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q}_s &= \Delta \mathbf{q}_s - \mathbf{P}_s(\mathbf{q}_s) (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}) \\ &= \Delta \mathbf{q}_s - \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

La serie de Taylor de la restricción alrededor de la trayectoria deseada está dada por

$$\varphi_s(\mathbf{q}_s) = \varphi_s(\mathbf{q}_{sd}) + \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd})(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}) + \text{t.o.s} = \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}) + \text{t.o.s}. \quad (3.46)$$

Puesto que la restricción  $\varphi_s(\mathbf{q}_s)$  es una función continua, existe una constante positiva  $\delta_s$ , la cual puede ser arbitrariamente pequeña, tal que si el error de posición satisface

$$\|\Delta \mathbf{q}_s\| \leq \delta_s, \quad (3.47)$$

entonces los términos de orden superior (t.o.s) en la serie de Taylor se pueden despreciar. Por lo tanto, una aproximación de la restricción está dada por

$$\varphi_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd})(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}) = 0. \quad (3.48)$$

Nótese que la ecuación anterior representa un plano tangente a la restricción en coordenadas del espacio articular. En este caso, los gradientes  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s)$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd})$  son paralelos y tiene la misma magnitud, *i.e.*,

$$\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s) \approx \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd}). \quad (3.49)$$

Puesto que la trayectoria deseada  $\mathbf{q}_{sd}$  satisface la restricción, *i.e.*  $\varphi_s(\mathbf{q}_{sd}) = 0$ , también se cumple

$$\dot{\varphi}_s(\mathbf{q}_{sd}) = \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd})\dot{\mathbf{q}}_{sd} = 0. \quad (3.50)$$

Si la desigualdad (3.47) se satisface y tomando en cuenta las ecuaciones (3.48)-(3.50) los términos  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\Delta\dot{\mathbf{q}}_s$  y  $\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\Delta\mathbf{q}_s$  en (3.44) y (3.45) se pueden escribir como

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\Delta\dot{\mathbf{q}}_s = \Delta\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s)\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd})\dot{\mathbf{q}}_{sd} = \Delta\dot{\mathbf{q}}_s \quad (3.51)$$

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{q}_s)\Delta\mathbf{q}_s = \Delta\mathbf{q}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^\dagger(\mathbf{q}_s)\mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_{sd})(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}) = \Delta\mathbf{q}_s. \quad (3.52)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones anteriores, el producto interno (3.43) está dado por

$$\Delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{s}_{ps} = \Delta \mathbf{q}_s^T \Delta \dot{\mathbf{q}}_s + k_{ps} \|\Delta \mathbf{q}_s\|^2. \quad (3.53)$$

Por otro lado, la derivada de la norma del error de posición  $\|\Delta \mathbf{q}_s\|$  está dada por

$$\frac{d}{dt} \|\Delta \mathbf{q}_s\| = \frac{\Delta \mathbf{q}_s^T \Delta \dot{\mathbf{q}}_s}{\|\Delta \mathbf{q}_s\|}. \quad (3.54)$$

Al despejar el término  $\Delta \mathbf{q}_s^T \Delta \dot{\mathbf{q}}_s$  en (3.53) y al sustituir el resultado en (3.54) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\Delta \mathbf{q}_s\| = -k_{ps} \|\Delta \mathbf{q}_s\| + \frac{\Delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{s}_{ps}}{\|\Delta \mathbf{q}_s\|}. \quad (3.55)$$

Puesto que la derivada de  $V_s(t, \mathbf{y}_s)$  es negativa semidefinida se satisface

$$\frac{1}{2} \lambda_{ms} \|\mathbf{s}_s\|^2 \leq V_s(t, \mathbf{y}_s) \leq \frac{1}{2} \lambda_{Ms} \|\mathbf{y}_s(0)\|^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.56)$$

Por lo tanto, un cota superior para el vector  $\mathbf{s}_s$  se puede calcular como

$$\|\mathbf{s}_s\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{Ms}}{\lambda_{ms}}} \|\mathbf{y}_s(0)\| \triangleq \zeta_s \quad (3.57)$$

Dado que  $\mathbf{s}_{ps}$  y  $\mathbf{s}_{Fs}$  son vectores ortogonales se tiene  $\|\mathbf{s}_s\|^2 = \|\mathbf{s}_{ps}\|^2 + \|\mathbf{s}_{Fs}\|^2 \geq \|\mathbf{s}_{ps}\|^2$ , por lo tanto, también se satisface

$$\|\mathbf{s}_{ps}\| \leq \zeta_s \quad \forall t \geq 0. \quad (3.58)$$

Tomando en cuenta la ecuación anterior, la derivada de la norma del error de posición dada en (3.55) satisface

$$\frac{d}{dt} \|\Delta \mathbf{q}_s\| \leq -k_{ps} \|\Delta \mathbf{q}_s\| + \zeta_s \quad (3.59)$$

Del lema de Comparación (Khalil, 2002) se tiene que la norma del error de posición está acotada superiormente por

$$\|\Delta \mathbf{q}_s(t)\| \leq \frac{\zeta_s}{k_{ps}} + e^{-k_{ps}t} \left( \|\Delta \mathbf{q}_s(0)\| - \frac{\zeta_s}{k_{ps}} \right), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.60)$$

Por lo tanto, para que la desigualdad (3.47) se cumpla, la ganancia  $k_{ps}$  y la condición inicial  $\Delta \mathbf{q}_s(0)$  deben satisfacer

$$\frac{\zeta_s}{k_{ps}} \leq \delta_s \implies k_{ps} \geq \frac{\zeta_s}{\delta_s} \quad \text{y} \quad \|\Delta \mathbf{q}_s(0)\| \leq \delta_s. \quad (3.61)$$

Si las condiciones anteriores se cumplen, entonces, el vector  $\mathbf{s}_{ps}$  definido en (3.27) se puede escribir como

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_s = -k_{ps} \Delta \mathbf{q}_s + \mathbf{s}_{ps} \quad (3.62)$$

La ecuación anterior representa un filtro estable de primer con entrada  $\mathbf{s}_{ps}$  que tiende a cero asintóticamente, por lo que se concluye

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{q}_s = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}. \quad \square$$

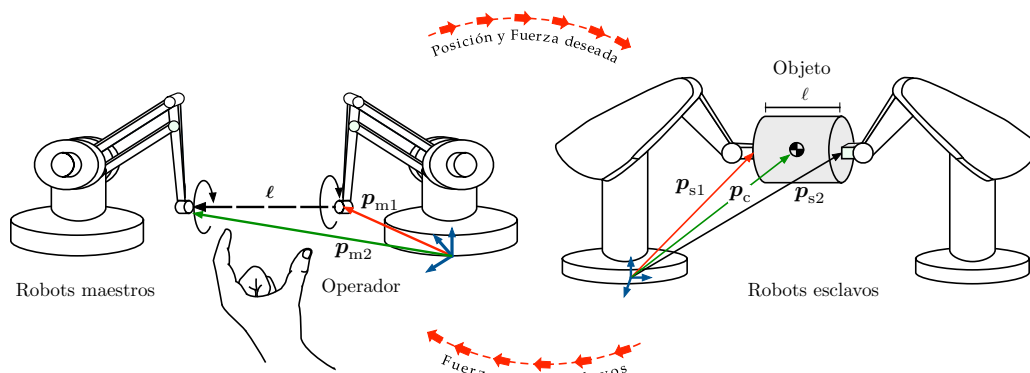


Figura 3.3: Esquema de teleoperación bilateral

### 3.4. Reflexión de fuerza

El controlador (3.1) solo cancela efectos dinámicos pero no logra telepresencia, es decir, el operador no puede sentir el objeto a manipular. Para lograr la reflexión de fuerza se incluye un segundo manipulador maestro al esquema de telemanipulación como se muestra en la Figura 3.3. Se asume que los robots maestros tienen el mismo número de grados de libertad ( $n_{m1} = n_{m2} = n_m$ ) y su espacio de trabajo es de la misma dimensión. De acuerdo con la Figura 3.3, el vector  $\ell$  es la distancia entre los efectores finales de los maestros, *i.e.*

$$\ell = \mathbf{p}_{m2}(\mathbf{q}_{m2}) - \mathbf{p}_{m1}(\mathbf{q}_{m1}). \quad (3.63)$$

La norma del vector  $\ell$  representa la longitud del objeto,  $\|\mathbf{p}_{m2} - \mathbf{p}_{m1}\| = \ell$ . Puesto que se asume que el objeto es rígido, la longitud  $\ell$  es constante. De manera similar a la restricción (2.7), se define la restricción holonómica virtual para los robots maestros de la siguiente manera

$$\varphi_m(\mathbf{x}_{m1}, \mathbf{x}_{m2}) = \|\mathbf{p}_{m2}(\mathbf{q}_{m2}) - \mathbf{p}_{m1}(\mathbf{q}_{m1})\| - \ell = 0. \quad (3.64)$$

cuya derivada está dada por

$$\frac{d}{dt}\varphi_m(\mathbf{x}_{m1}, \mathbf{x}_{m2}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}_{m1}} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{x}_{m2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{m1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{m2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\varphi_{mx}} \dot{\mathbf{x}}_m = 0. \quad (3.65)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}}_m = [\dot{\mathbf{x}}_{m1}^T \quad \dot{\mathbf{x}}_{m2}^T]^T \in \mathfrak{R}^{2n_m}$  es el vector de velocidad y  $\mathbf{J}_{\varphi_{mx}}(\mathbf{x}_m) \in \mathfrak{R}^{2n_m}$  es el gradiente de la restricción (3.64). Tomando en cuenta (3.65), el vector  $\dot{\mathbf{x}}_m$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{Q}_{xm}(\mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{x}}_m + \mathbf{P}_{xm}(\mathbf{x}_m) \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{Q}_{xm}(\mathbf{x}_m) \dot{\mathbf{x}}_m \quad (3.66)$$

donde  $\mathbf{Q}_{xm}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{xm}(\mathbf{x}_m) \in \mathfrak{R}^{2n_m \times 2n_m}$ ,  $\mathbf{P}_{xm}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_{xm}}^\dagger(\mathbf{x}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{xm}}(\mathbf{x}_m) \in \mathfrak{R}^{2n_m \times 2n_m}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_{xm}}^\dagger(\mathbf{x}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_{xm}}^T(\mathbf{x}_m) (\mathbf{J}_{\varphi_{xm}}(\mathbf{x}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{xm}}^T(\mathbf{x}_m))^{-1} \in \mathfrak{R}^{2n_m}$  es la pseudo-inversa de Moore-Penrose. De manera similar a la ecuación (2.9), la dinámica de los

maestros se puede escribir en forma compacta

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m)\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m)\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_h \quad (3.67)$$

las matrices son matrices diagonales a bloques,

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{m1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H}_{m2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m1}(\mathbf{q}_{m1}, \dot{\mathbf{q}}_{m1}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_{m2}(\mathbf{q}_{m2}, \dot{\mathbf{q}}_{m2}) \end{bmatrix}$$

y los vectores se agrupan en vectores columna

$$\bar{\mathbf{g}}_m(\mathbf{q}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{m1}(\mathbf{q}_{m1}) \\ \mathbf{g}_{m2}(\mathbf{q}_{m2}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{m1} \\ \boldsymbol{\tau}_{m2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{h1} \\ \boldsymbol{\tau}_{h2} \end{bmatrix}.$$

En este esquema de teleoperación, la ley de control para los robots maestros está dada por

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) + \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) (\mathbf{J}_{\varphi_{\text{xm}}}^T(\mathbf{x}_m)\rho_f\lambda_s - k_m\mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m)\Delta\mathbf{p}_m) \quad (3.68)$$

donde  $\rho_f \in (0, 1]$  es un factor de escala,  $k_m \in \mathfrak{R}$  es una constante positiva,  $\mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) = \text{blockdiag}\{\mathbf{J}_{\text{ma}1}(\mathbf{q}_{m1})\mathbf{J}_{\text{ma}2}(\mathbf{q}_{m2})\} \in \mathfrak{R}^{2n_m \times 2n_m}$ , con  $\mathbf{J}_{\text{mai}}(\mathbf{q}_{mi}) \in \mathfrak{R}^{n_m \times n_m}$  es el Jacobiano analítico. El error  $\Delta\mathbf{p}_m$  se define como

$$\Delta\mathbf{p}_m \triangleq [ (\mathbf{p}_{m1} - \mathbf{p}_{m2})^T \quad \mathbf{0}^T \quad (\mathbf{p}_{m2} - \mathbf{p}_{m1})^T \quad \mathbf{0}^T ]^T \in \mathfrak{R}^{2n_m}. \quad (3.69)$$

El primer término del algoritmo de control (3.67) se emplea para contrarrestar las fuerzas gravedad. Mientras que, el segundo término se encarga de recrear la fuerza de contacto, esto le permite al operador tener la sensación de tocar el objeto. Finalmente, el tercer término genera una fuerza de reacción cuando los efectores finales no son colineales. De esta forma el operador puede sentir cuando no se cumple esta condición. Es importante mencionar que el segundo y tercer término en (3.68) son vectores ortogonales. Por lo tanto, el operador puede identificar las fuerzas de reacción debidas al contacto con el objeto.

### 3.4.1. Modelado del operador

En una tarea de telemanipulación en la que se requiere no sólo controlar la posición sino también la fuerza aplicada hacia el objeto, el par aplicado por el humano  $\boldsymbol{\tau}_h$  tiene dos funciones principales: la primera consiste en mover el efector final del robot maestro para generar la trayectoria deseada y la segunda es generar la fuerza de agarre deseada para los robots esclavos.

**Suposición 3.2.** *El par ejercido por el humano se puede modelar como un control PD en posición más un término de adelanto que indica la fuerza deseada aplicada a la superficie del esclavo, i.e.*

$$\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{K}_{\text{vh}}\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_{\text{ph}}(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_{\text{md}}) + \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m)\mathbf{J}_{\varphi_{\text{xm}}}^T(\mathbf{q}_m)\rho_f\lambda_{\text{sd}}. \quad (3.70)$$

donde  $\mathbf{q}_{\text{md}} = [ \mathbf{q}_{\text{md1}}^T \quad \mathbf{q}_{\text{md2}}^T ]^T \in \mathbb{R}^{2n_m}$  es la posición deseada constante, las ganancias  $\mathbf{K}_{\text{vh}} = \text{diag block} \{ \mathbf{K}_{\text{vh1}} \quad \mathbf{K}_{\text{vh2}} \}$  y  $\mathbf{K}_{\text{ph}} = \text{diag block} \{ \mathbf{K}_{\text{ph1}} \quad \mathbf{K}_{\text{ph2}} \} \in \mathbb{R}^{2n_m \times 2n_m}$  son matrices diagonales positivas definidas y  $\lambda_{\text{sd}}$  es la fuerza de agarre deseada comandada por el operador. Se asume que los esclavos están en contacto con el objeto, por lo tanto, la trayectoria deseada satisface

$$\varphi_m(\mathbf{p}_{m1}(\mathbf{q}_{\text{md1}}), \mathbf{p}_{m2}(\mathbf{q}_{\text{md2}})) = \mathbf{0}. \quad \square$$

Al sustituir la ley de control (3.68) y el modelo del operador (3.70) en (3.67) se obtiene la dinámica en lazo cerrado para los maestros dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m) \ddot{\mathbf{q}}_m = & -\mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \dot{\mathbf{q}}_m - (\mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{\text{vh}}) \dot{\mathbf{q}}_m - \mathbf{K}_{\text{ph}} \Delta \mathbf{q}_m \\ & - \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{\text{xm}}}^T(\mathbf{q}_m) \Delta \lambda_m - k_m \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m) \Delta \mathbf{p}_m \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde  $\Delta \mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m - \mathbf{q}_{\text{md}}$  y  $\Delta \lambda_m = \rho_f \Delta \lambda_s$  son respectivamente, los errores de posición y fuerza de los maestros. Nótese que debido al término no lineal  $k_m \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m) \Delta \mathbf{p}_m$ , la ecuación (3.71) tiene múltiples puntos de equilibrio.

El diagrama de bloques del esquema de teleoperación con reflexión de fuerza se muestra en la Figura 3.4. En este esquema los robots maestros mandan información de posición mientras que los esclavos solo transmiten información de fuerza (esquema de teleoperación bilateral). Puesto que ahora se tienen dos manipuladores maestros ya no se utiliza el algoritmo de planeación de trayectorias (ecuaciones (3.20)-(3.22)). Cada robot maestro genera la trayectoria deseada para los esclavos. Puesto que el esquema de control de los robots maestros no depende de la posición de los esclavos, la dinámica en lazo cerrado de los maestros se pueden analizar de manera independiente a la de los esclavos.

Para probar la estabilidad del sistema descrito por (3.71) considérese la función candidata de Lyapunov

$$V_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_m + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}_m^T \mathbf{K}_{\text{ph}} \Delta \mathbf{q}_m + \frac{1}{4} k_m \Delta \mathbf{p}_m^T \Delta \mathbf{p}_m \quad (3.72)$$

cuya derivada a lo largo de (3.71) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_m = & -\dot{\mathbf{q}}_m^T (\mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{\text{vh}}) \dot{\mathbf{q}}_m - \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{K}_{\text{ph}} \Delta \mathbf{q}_m - \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{\text{xm}}}^T(\mathbf{q}_m) \Delta \lambda_m \\ & - k_m \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{J}_{\text{ma}}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m) \Delta \mathbf{p}_m + \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{K}_{\text{ph}} \Delta \mathbf{q}_m + \frac{1}{2} k_m \Delta \mathbf{p}_m^T \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{p}_m \\ = & -\dot{\mathbf{q}}_m^T (\mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{\text{vh}}) \dot{\mathbf{q}}_m - \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{K}_{\text{ph}} \Delta \mathbf{q}_m - \dot{\mathbf{x}}_m^T \mathbf{J}_{\varphi_{\text{xm}}}^T(\mathbf{q}_m) \Delta \lambda_m \\ & - k_m \dot{\mathbf{x}}_m^T \mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m) \Delta \mathbf{p}_m + \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{K}_{\text{ph}} \Delta \mathbf{q}_m + \frac{1}{2} k_m \Delta \mathbf{p}_m^T \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{p}_m \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde nuevamente se ha utilizado la Propiedad 2.3 y  $\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{J}_{\text{ma}}(\mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_m$ . Tomando en cuenta las ecuaciones (3.65) y (3.66) y dado que la matriz de proyección  $\mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m)$  satisface  $\mathbf{Q}_{\text{xm}}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{Q}_{\text{xm}}^T(\mathbf{x}_m)$  se tiene

$$\dot{V}_m = -\dot{\mathbf{q}}_m^T (\mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{\text{vh}}) \dot{\mathbf{q}}_m - k_m \dot{\mathbf{x}}_m^T \Delta \mathbf{p}_m + \frac{1}{2} k_m \Delta \mathbf{p}_m^T \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{p}_m. \quad (3.74)$$

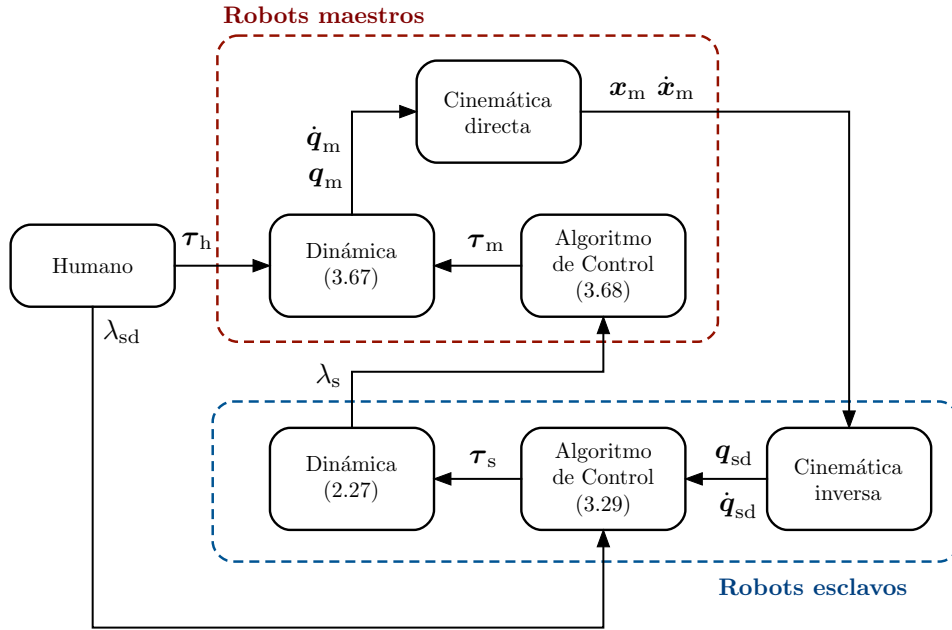


Figura 3.4: Diagrama de bloques del esquema de teleoperación con reflexión de fuerza

A continuación se analiza el término  $\Delta \mathbf{p}_m^T \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{p}_m$ , tomando en cuenta (3.69) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_m^T \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{p}_m &= (\mathbf{p}_{m1} - \mathbf{p}_{m2})^T (\dot{\mathbf{p}}_{m1} - \dot{\mathbf{p}}_{m2}) + (\mathbf{p}_{m2} - \mathbf{p}_{m1})^T (\dot{\mathbf{p}}_{m2} - \dot{\mathbf{p}}_{m1}) \\ &= 2\dot{\mathbf{p}}_{m1}^T (\mathbf{p}_{m1} - \mathbf{p}_{m2}) + 2\dot{\mathbf{p}}_{m2}^T (\mathbf{p}_{m2} - \mathbf{p}_{m1}) \\ &= 2\dot{\mathbf{x}}_m^T \Delta \mathbf{p}_m. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Tomando en cuenta la ecuación anterior, la derivada de  $V_m$  está dada por

$$\dot{V}_m = -\dot{\mathbf{q}}_m^T (\mathbf{D}_m + \mathbf{K}_{vh}) \dot{\mathbf{q}}_m \leq 0. \quad (3.76)$$

La función  $\dot{V}_m$  es negativa semidefinida y dado que el algoritmo de control (3.29) garantiza  $\Delta \lambda_s \rightarrow 0$  se tiene  $\Delta \lambda_m = \rho_f \Delta \lambda_s \rightarrow 0$  se concluye que las variables en lazo cerrado  $\dot{\mathbf{q}}_m$ ,  $\Delta \mathbf{q}_m$  y  $\Delta \mathbf{p}_m$  están acotadas. Puesto que  $\mathbf{q}_{md}$  está acotado, el vector de posición angular  $\mathbf{q}_m$  también lo está.

Ahora bien, si  $\dot{V}_m \equiv 0$  esto implica que  $\dot{\mathbf{q}}_m = \ddot{\mathbf{q}}_m = \mathbf{0}$ . Entonces de la ecuación (3.71) se tiene

$$-\mathbf{K}_{ph} \Delta \mathbf{q}_m - \mathbf{J}_{ma}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{xm}}^T(\mathbf{q}_m) \Delta \lambda_m - k_m \mathbf{J}_{ma}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{Q}_{xm}(\mathbf{x}_m) \Delta \mathbf{p}_m = \mathbf{0}. \quad (3.77)$$

Supóngase que el operador puede garantizar  $\Delta \mathbf{p}_m = \mathbf{0} \forall t \geq 0$  y puesto que  $\Delta \lambda_m = \rho_f \Delta \lambda_s$  tiende a cero, de la ecuación (3.77) se tiene  $\Delta \mathbf{q}_m = \mathbf{0}$ . Entonces del Teorema de LaSalle se puede concluir que las trayectorias  $(\Delta \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Comentario 3.2.** Si el operador no logra garantizar  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , entonces, el algoritmo de control (3.68) solo garantiza que las variables en lazo cerrado están acotadas.  $\square$





# Algoritmo de control descentralizado

En el Capítulo 3 se presentó un algoritmo de control centralizado para los robots esclavos que garantiza el seguimiento de posición y fuerza. Sin embargo, para su implementación se requiere la comunicación entre los manipuladores esclavos. En este capítulo se presenta un algoritmo de control descentralizado para el esquema de teleoperación unilateral mostrado en la Figura 3.1 que no requiere comunicación entre los manipuladores esclavos. Además, no se requiere conocer el modelo matemático de los esclavos y el objeto.

## 4.1. Función tangente hiperbólica

Antes de presentar el algoritmo de control es conveniente enunciar algunas propiedades de la función tangente hiperbólica definida como

$$\tanh(\vartheta) = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}, \quad \forall \vartheta \in \mathfrak{R}.$$

La función  $\tanh(\cdot)$  es una función continua y monótonamente creciente y satisface

$$|\tanh(\vartheta)| \leq |\vartheta| \quad (4.1)$$

$$|\tanh(\vartheta)| \leq 1. \quad (4.2)$$

Es importante resaltar que la función  $\vartheta \tanh(\vartheta)$  es una función positiva definida, *i.e.*  $\vartheta \tanh(\vartheta) > 0, \forall \vartheta \neq 0$  y  $\vartheta \tanh(\vartheta) = 0$  si  $\vartheta = 0$ . Se define la función tangente hiperbólica vectorial de la siguiente forma

$$\tanh(\boldsymbol{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \tanh(\vartheta_1) \\ \vdots \\ \tanh(\vartheta_n) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

para todo  $\boldsymbol{\vartheta} = [\vartheta_1 \ \cdots \ \vartheta_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ . Dicha función vectorial satisface (Kelly et al., 2005; Moreno-Valenzuela et al., 2008)

$$\|\tanh(\boldsymbol{\vartheta})\| \leq \|\boldsymbol{\vartheta}\| \quad (4.4)$$

$$\|\tanh(\boldsymbol{\vartheta})\| \leq \sqrt{n} \quad (4.5)$$

$$\|\tanh(\boldsymbol{\vartheta})\|^2 \leq \boldsymbol{\vartheta}^T \tanh(\boldsymbol{\vartheta}). \quad (4.6)$$

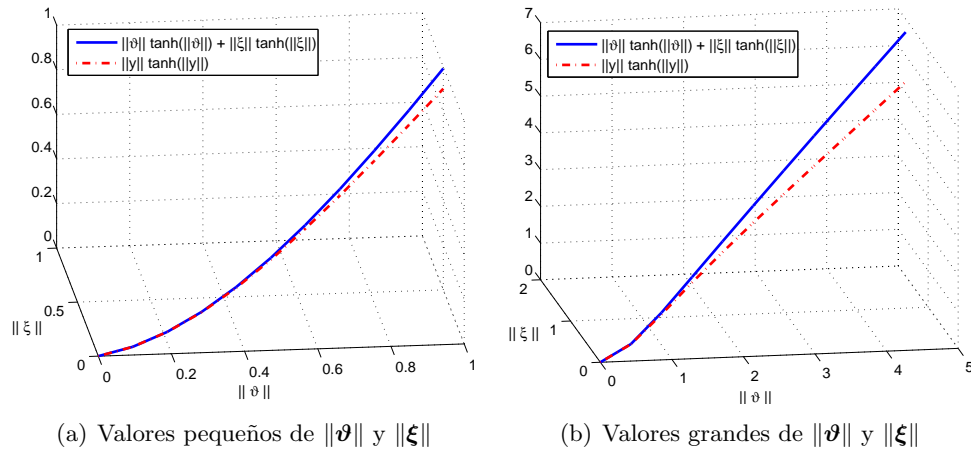


Figura 4.1: Gráfica de la funciones  $f_1 = \|\boldsymbol{v}\| \tanh(\|\boldsymbol{v}\|) + \|\boldsymbol{\xi}\| \tanh(\|\boldsymbol{\xi}\|)$  y  $f_2 = \|\boldsymbol{y}\| \tanh(\|\boldsymbol{y}\|)$

Tomando en cuenta las desigualdades (4.2), (4.5) y (4.6) también se satisface (Kelly et al., 2005)

$$\tanh(\|\boldsymbol{v}\|) \leq |\tanh(\|\boldsymbol{v}\|)| \leq \|\tanh(\boldsymbol{v})\| \quad (4.7)$$

$$\|\boldsymbol{v}\| \tanh(\|\boldsymbol{v}\|) \leq \boldsymbol{v}^T \tanh(\boldsymbol{v}). \quad (4.8)$$

Sea la función escalar  $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A} \tanh(\boldsymbol{v})$ , donde  $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida, entonces se cumple la siguiente desigualdad (Kelly et al., 2005)

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A} \tanh(\boldsymbol{v}) \geq \lambda_{\min}\{\boldsymbol{A}\} \|\boldsymbol{v}\| \tanh(\|\boldsymbol{v}\|) \geq \lambda_{\min}\{\boldsymbol{A}\} \|\tanh(\boldsymbol{v})\|^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathfrak{R}^n. \quad (4.9)$$

Considérese el vector compuesto  $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{v}^T \quad \boldsymbol{\xi}^T]^T \in \mathfrak{R}^n$ , donde  $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{R}^{n-m}$  y  $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2}$ . Sean las funciones continuas positivas

$$f_1 = \|\boldsymbol{v}\| \tanh(\|\boldsymbol{v}\|) + \|\boldsymbol{\xi}\| \tanh(\|\boldsymbol{\xi}\|)$$

$$f_2 = \|\boldsymbol{y}\| \tanh(\|\boldsymbol{y}\|)$$

cuyas gráficas se muestran en la Figura 4.1. Se observa que dichas funciones satisfacen

$$\|\boldsymbol{y}\| \tanh(\|\boldsymbol{y}\|) \leq \|\boldsymbol{v}\| \tanh(\|\boldsymbol{v}\|) + \|\boldsymbol{\xi}\| \tanh(\|\boldsymbol{\xi}\|) \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{R}^m, \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{R}^{n-m}. \quad (4.10)$$

## 4.2. Algoritmo de control

La cadena cinemática cerrada formada por los robots esclavos está descrita por la restricción (2.7). Puesto que se asume que los objetos a manipular son rígidos, una alternativa a la restricción (2.7) es modelar las superficies del objeto de la siguiente forma

$$\varphi_{si}(\boldsymbol{q}_{si}, \boldsymbol{q}_m) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

donde  $\varphi_{si} : \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se asume que la restricción (4.11) es una función continua con primera y segunda derivadas parciales continuas. Nótese que la restricción (4.11) también depende de la posición del robot maestro. Esto permite al operador mover y rotar el objeto sin violar la restricción. Además, en este caso, se tienen dos restricciones en lugar de una sola restricción. La derivada de (4.11) está dada por

$$\frac{d}{dt} \varphi_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{si} + \nu_{mi} = 0 \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) = \partial \varphi_{si} / \partial \mathbf{q}_{si} \in \mathbb{R}^{n_{si}}$  y

$$\nu_{mi} \triangleq \frac{\partial \varphi_{si}}{\partial \mathbf{q}_m} \dot{\mathbf{q}}_m \quad (4.13)$$

es la velocidad de cambio de la restricción comandada por el operador humano. Es importante mencionar que para el caso en el cual  $\nu_{mi} \neq 0$  el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}_{si}$  no es ortogonal al gradiente  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)$ , por lo que el principio de ortogonalización no se puede aplicar directamente.

**Comentario 4.1.** Cabe señalar que a pesar de que la restricción (4.11) es una restricción holonómica invariante en el tiempo, su derivada tiene una estructura similar a la derivada de una restricción holonómica variante en el tiempo (Liu & Arimoto, 1998; Pliego-Jiménez & Arteaga-Pérez, 2016).  $\square$

Considérese el vector de velocidad auxiliar (Liu & Arimoto, 1998)

$$\dot{\mathbf{q}}_{sai} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \nu_{mi}. \quad (4.14)$$

donde  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) [\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)]^{-1} \in \mathbb{R}^{n_{si}}$  es la pseudoinversa de Moore-Penrose. Tomando en cuenta (4.17), la derivada de  $\varphi_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)$  se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \varphi_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{sai} = 0. \quad (4.15)$$

Claramente, el vector  $\dot{\mathbf{q}}_{sai}$  es ortogonal a  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}$  y satisface

$$\dot{\mathbf{q}}_{sai} = \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{sai} + \mathbf{P}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{sai} = \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{sai}. \quad (4.16)$$

donde las matrices de proyección están dadas por  $\mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  y  $\mathbf{P}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) = \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ . Por otro lado, de la ecuación (4.14) los vectores  $\dot{\mathbf{q}}_{si}$  y  $\mathbf{q}_{sai}$  también satisfacen

$$\mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{sai} = \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{q}}_{si}. \quad (4.17)$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.11) la dinámica de los esclavos (2.8) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si}) \ddot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si}) \dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{D}_{si} \dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{g}_{si}(\mathbf{q}_{si}) = \boldsymbol{\tau}_{si} + \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \lambda_{si} + \boldsymbol{\tau}_o \quad (4.18)$$

donde el vector  $\boldsymbol{\tau}_o$  representa las dinámicas no modeladas del objeto (e.g. fuerzas inerciales y de gravedad debido al peso del objeto), el cual se asume acotado,  $\|\boldsymbol{\tau}_o\| \leq \delta_o$ .

**Comentario 4.2.** Puesto que en este caso  $\dot{\mathbf{q}}_{si}$  no es ortogonal al gradiente  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)$  la dinámica de los manipuladores esclavos descrita por (4.18) no define un mapeo pasivo con respecto a  $\boldsymbol{\tau}_{si}$  y  $\dot{\mathbf{q}}_{si}$  (ver Propiedad 2.8). Sin embargo, es posible diseñar un esquema de control utilizando un enfoque similar al algoritmo de control presentado en el Capítulo 3.  $\square$

Se introduce la variable de fuerza filtrada  $\hat{\lambda}_{si} \in \mathfrak{R}$  definida como

$$\epsilon_s \frac{d}{dt} \hat{\lambda}_{si} = -\hat{\lambda}_{si} + \lambda_{si} \quad (4.19)$$

donde  $\epsilon_s \in \mathfrak{R}$  es una constante positiva. En este caso, los errores de posición y fuerza se definen de la siguiente manera

$$\Delta \mathbf{q}_{si} \triangleq \mathbf{q}_{si} - \mathbf{q}_{sdi}, \quad \Delta \lambda_{si} \triangleq \hat{\lambda}_{si} - \lambda_{sd} \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{q}_{sdi} = \mathbf{q}_{sdi}(\mathbf{q}_m) \in \mathfrak{R}^{n_s}$  es la trayectoria deseada generada por el operador, nuevamente  $\lambda_{sd}$  es la fuerza de agarre deseada con  $\frac{d}{dt} \lambda_{sd} \in \mathcal{L}_\infty$ . De manera similar a (3.23) se introducen las variables de estado

$$\frac{d}{dt} \Delta F_{si} = \Delta \lambda_{si}. \quad (4.21)$$

A continuación se define la variable deslizante

$$\mathbf{s}_{qsi} = \mathbf{s}_{psi} + \mathbf{s}_{Fsi} \quad (4.22)$$

donde los vectores  $\mathbf{s}_{ps} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  y  $\mathbf{s}_{Fs} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  están definidos como

$$\mathbf{s}_{psi} \triangleq \mathbf{Q}_{psi}(\mathbf{q}_{si}) (\Delta \dot{\mathbf{q}}_{si} + k_{si} \Delta \mathbf{q}_{si}) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{s}_{Fsi} \triangleq -\xi_{si} \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si}) (\Delta \lambda_{si} + k_{Fsi} \Delta F_{si}) \quad (4.24)$$

donde  $k_{psi}$ ,  $\xi_{si}$  y  $k_{Fsi} \in \mathfrak{R}$  son constantes positivas. El vector  $\mathbf{s}_{qsi}$  está compuesto por la suma de vectores ortogonales. De tal manera que si  $\mathbf{s}_{qsi} = \mathbf{0}$ , implica  $\mathbf{s}_{psi} = \mathbf{s}_{Fsi} = \mathbf{0}$ . Como se vio en la demostración del Teorema 3.2, si la restricción es una función continua y suave existe una constante  $\delta_{si}$  tal que

$$\|\Delta \mathbf{q}_{si}\| \leq \delta_{si} \implies \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \Delta \mathbf{q}_{si} = \Delta \mathbf{q}_{si}, \quad \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \Delta \dot{\mathbf{q}}_{si} = \Delta \dot{\mathbf{q}}_{si}. \quad (4.25)$$

En este caso, la ecuación (4.23) se puede escribir como

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{si} + k_{psi} \Delta \mathbf{q}_{si} = \mathbf{s}_{psi}. \quad (4.26)$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (4.24) por  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)$  y tomando en cuenta (4.21) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \Delta F_{si} + k_{Fsi} \Delta F_{si} = \xi_{si}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) \mathbf{s}_{Fsi} \quad (4.27)$$

donde se ha utilizado  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si})\mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si}) = 1$ . Las ecuaciones (4.26) y (4.27) representan filtros estables de primer orden cuyas entradas son respectivamente  $\mathbf{s}_{psi}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_{si}}(\mathbf{q}_{si})\mathbf{s}_{Fsi}$ . De este modo, si  $\mathbf{s}_{qsi} = \mathbf{0}$  y  $\|\Delta\mathbf{q}_{si}\| \leq \delta_{si}$  los errores de posición y fuerza ( $\Delta\mathbf{q}_{si}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{q}}_{si}$ ,  $\Delta F_{si}$ ,  $\frac{d}{dt}\Delta F_{si} = \Delta\lambda_{si}$ ) convergerán a cero de forma exponencial. De este modo, el objetivo es diseñar un algoritmo de control que logre  $\mathbf{s}_{qsi} \rightarrow \mathbf{0}$ . Para ello, considérese la velocidad de referencia

$$\dot{\mathbf{q}}_{rsi} = \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si})(\dot{\mathbf{q}}_{sdi} - k_{psi}\Delta\mathbf{q}_{si}) - \mathbf{s}_{Fsi} - \boldsymbol{\sigma}_{si} - \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si})\boldsymbol{\nu}_{mi} \quad (4.28)$$

con

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{si} = \gamma_{si}(\text{sign}(\mathbf{s}_{qsi}) + \mathbf{s}_{qsi}), \quad \boldsymbol{\sigma}_{si}(0) = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

donde  $\text{sign}(\boldsymbol{\vartheta}) \triangleq [\text{sign}(\vartheta_1) \ \cdots \ \text{sign}(\vartheta_n)]^T \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\forall \boldsymbol{\vartheta} = [\vartheta_1 \ \cdots \ \vartheta_n]^T \in \mathfrak{R}^n$  y  $\gamma_{si} \in \mathfrak{R}$  es una ganancia positiva y  $\boldsymbol{\nu}_{mi}$  dada en (4.13). Nótese que el último término del lado derecho de la ecuación (4.28) compensa la velocidad de cambio de la restricción. A continuación se define la variable de error  $\mathbf{s}_{si} \in \mathfrak{R}^{n_s}$  como

$$\mathbf{s}_{si} = \dot{\mathbf{q}}_{si} - \dot{\mathbf{q}}_{rsi}. \quad (4.30)$$

La dinámica (4.18) se puede escribir en términos de  $\mathbf{s}_{si}$  y  $\dot{\mathbf{s}}_{si}$  como

$$\mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si})\dot{\mathbf{s}}_{si} + \mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si})\mathbf{s}_{si} + \mathbf{D}_{si}\mathbf{s}_{si} = \boldsymbol{\tau}_{si} + \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si})\boldsymbol{\lambda}_{si} - \boldsymbol{\tau}_o - \boldsymbol{\Theta}_{si} \quad (4.31)$$

donde  $\boldsymbol{\Theta}_{si} = \mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si})\ddot{\mathbf{q}}_{rsi} + \mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si})\dot{\mathbf{q}}_{rsi} + \mathbf{D}_{si}\dot{\mathbf{q}}_{rsi} + \mathbf{g}_{si}(\mathbf{q}_{si})$ . La ecuación anterior describe la dinámica en lazo abierto de la variable de error  $\mathbf{s}_{si}$ . Tomando en cuenta las ecuaciones (4.14), (4.16), (4.17) y (4.28) el vector  $\mathbf{s}_{si}$  se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{si} &= \dot{\mathbf{q}}_{si} - \dot{\mathbf{q}}_{rsi} \\ &= \dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^\dagger(\mathbf{q}_{si})\boldsymbol{\nu}_{mi} - \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si})(\dot{\mathbf{q}}_{sdi} - k_{psi}\Delta\mathbf{q}_{si}) + \mathbf{s}_{Fsi} + \boldsymbol{\sigma}_{si} \\ &= \dot{\mathbf{q}}_{sai} - \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si})(\dot{\mathbf{q}}_{sdi} - k_{psi}\Delta\mathbf{q}_{si}) + \mathbf{s}_{Fsi} + \boldsymbol{\sigma}_{si} \\ &= \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si})\dot{\mathbf{q}}_{sai} - \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si})(\dot{\mathbf{q}}_{sdi} - k_{psi}\Delta\mathbf{q}_{si}) + \mathbf{s}_{Fsi} + \boldsymbol{\sigma}_{si} \\ &= \mathbf{Q}_{si}(\mathbf{q}_{si})(\Delta\dot{\mathbf{q}}_{si} + k_{psi}\Delta\mathbf{q}_{si}) + \mathbf{s}_{Fsi} + \boldsymbol{\sigma}_{si} \\ &= \mathbf{s}_{qsi} + \boldsymbol{\sigma}_{si}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

El algoritmo de control descentralizado propuesto para los robots esclavos está dado por

$$\boldsymbol{\tau}_{si} = -\mathbf{K}_{vsi} \tanh(\mathbf{s}_{si}) - \mathbf{J}_{\varphi_{si}}^T(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)(\lambda_{sd} - k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si})) \quad (4.33)$$

donde  $\mathbf{K}_{vsi} \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_s}$  es una matriz diagonal positiva definida.

**Comentario 4.3.** Dado que  $\lambda_{sd}$  es una señal acotada y tomando en cuenta las propiedades de la función tangente hiperbólica, la ley de control (4.33) es una función continua y acotada para todo  $\mathbf{s}_{si} \in \mathfrak{R}^{n_s}$ ,  $\Delta F_{si} \in \mathfrak{R}$ . Además, no requiere del conocimiento del modelo dinámico de los manipuladores ni del objeto.  $\square$

Al sustituir la ley de control (4.33) en (4.31) se obtiene la dinámica en lazo cerrado dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si})\dot{\mathbf{s}}_{si} &\triangleq \boldsymbol{\mu}_{si} - (\mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si}) + \mathbf{D}_{si})\mathbf{s}_{si} - \mathbf{K}_{vsi} \tanh(\mathbf{s}_{si}) - \boldsymbol{\tau}_o \\ &\quad - \boldsymbol{\Theta}_{si} + \mathbf{J}_{\varphi si}^T(\mathbf{q}_{si})(\Delta\lambda_{si} + k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si})) + \mathbf{J}_{\varphi si}^T \Delta\hat{\lambda}_{si}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde  $\Delta\hat{\lambda}_{si} = \lambda_{si} - \hat{\lambda}_{si}$ . Se define el vector de estado

$$\mathbf{y}_{si} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{si}^T & \Delta F_{si} \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{n_s+1}. \quad (4.35)$$

La dinámica en lazo cerrado descrita por las ecuaciones (4.27) y (4.34) se puede escribir en forma compacta como

$$\dot{\mathbf{y}}_{si} = \mathbf{f}_{si}(t, \mathbf{y}_{si}) \quad (4.36)$$

donde

$$\mathbf{f}_{si} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{si}^{-1}(\mathbf{q}_{si})\boldsymbol{\mu}_{si} \\ \Delta F_{si} \end{bmatrix}$$

Se establece el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.** *Para el sistema dinámico en lazo cerrado descrito por (4.36) considérese la siguiente región*

$$\mathfrak{D}_{si} = \{\mathbf{y}_{si} \mid \|\mathbf{y}_{si}\| \leq y_{\text{máx } i}\} \quad (4.37)$$

donde  $y_{\text{máx}}$  es una constante positiva suficientemente pequeña tal que la condición (4.25) se cumple. Considérese además, que las trayectorias deseada generadas por el operador  $(\mathbf{q}_{sdi}, \dot{\mathbf{q}}_{sdi})$  y la fuerza de agarre deseada y su derivada  $(\lambda_{sd}, \frac{d}{dt}\lambda_{sd})$  son funciones acotadas. Entonces, es posible encontrar ganancias  $k_{psi}$ ,  $\gamma_{si}$ ,  $\xi_{si}$ ,  $k_{Fsi}$  y  $\mathbf{K}_{vsi}$  que garanticen  $\mathbf{y}_{si}(t) \in \mathfrak{D}_{si} \forall t$ . Además, las variables en lazo cerrado en (4.36) están acotadas y los errores de posición y fuerza  $(\Delta\mathbf{q}_{si}, \Delta\dot{\mathbf{q}}_{si}, \Delta F_{si}, \Delta\lambda_{si})$  tienden a cero.

*Demostración.* La demostración del Teorema 4.1 se divide en tres pasos:

1) En el primer paso se muestra que si el vector  $\mathbf{y}_{si}$  está acotado por  $0 < y_{\text{máx } i} < \infty$ , entonces, las variables en lazo cerrado están acotadas. Tomando en cuenta la ecuación (4.32), la ecuación diferencial no lineal descrita por (4.29) se puede escribir de la siguiente manera

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{si} = \gamma_{si}(-\boldsymbol{\sigma}_{si} + \mathbf{s}_{si} + \text{sign}(\mathbf{s}_{qsi})). \quad (4.38)$$

Para analizar la estabilidad de la ecuación diferencial anterior, considérese las función escalar  $V_{\sigma si} = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|^2$  cuya derivada a lo largo de (4.38) está dada por

$$\dot{V}_{\sigma si} = -\gamma_{si}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|^2 + \gamma_{si}\boldsymbol{\sigma}_{si}^T(\mathbf{s}_{si} + \text{sign}(\mathbf{s}_{qsi})) \quad (4.39)$$

Puesto que  $\|\mathbf{s}_{si}\| \leq y_{\max i}$  y  $\|\text{sign}(\mathbf{s}_{qsi})\| \leq \sqrt{n_s}$ , la función  $\dot{V}_{\sigma si}$  se puede acotar superiormente por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\sigma si} &\leq -\frac{1}{2}\gamma_{si}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}_{si}\| \left( \frac{1}{2}\gamma_{si}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\| - y_{\max i} - \sqrt{n_s} \right) \\ &\leq -\frac{1}{2}\gamma_{si}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|^2, \quad \forall \|\boldsymbol{\sigma}_{si}\| \geq \frac{2(y_{\max i} + \sqrt{n_s})}{\gamma_{si}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

La función  $V_{\sigma si}$  y su derivada satisfacen las condiciones del Teorema A.1 mostrado en el Apéndice A con

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|) \triangleq \alpha_2(\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|^2 \quad (4.41)$$

$$W_3(\boldsymbol{\sigma}_{si}) \triangleq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}_{si}\|^2 \quad (4.42)$$

$$\mu \triangleq \bar{\sigma}_{si} = \frac{2(y_{\max i} + \sqrt{n_s})}{\gamma_{si}}. \quad (4.43)$$

Se concluye que la variable  $\boldsymbol{\sigma}_{si}$  está acotada con cota final  $\mu = 2(y_{\max i} + \sqrt{n_s})/\gamma_{si}$ . Dado que  $\mathbf{s}_{si}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_{si}$  son vectores acotados, el vector  $\mathbf{s}_{qsi}$  también está acotado. Puesto que  $\mathbf{s}_{psi}$  y  $\mathbf{s}_{Fsi}$  en (4.23) y (4.24) son vectores ortogonales, el acotamiento de  $\mathbf{s}_{qsi}$  implica  $\mathbf{s}_{psi}, \mathbf{s}_{Fsi} \in \mathcal{L}_\infty$ . Recordando que la cota  $y_{\max i}$  es suficientemente pequeña tal que la condición (4.25) se cumpla, de las ecuaciones (4.26) y (4.27) se concluye que los errores de posición y fuerza  $\Delta\dot{\mathbf{q}}_{si}, \Delta\mathbf{q}_{si}, \Delta F_{si}, \frac{d}{dt}\Delta F_{si} = \Delta\lambda_{si}$  también están acotados. En vista de que las trayectorias generadas por el humano se asumen acotadas, la posición y velocidad articular  $\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si}$  deben ser vectores acotados.

De acuerdo con Rivera-Dueñas & Arteaga-Pérez (2012), el multiplicador de Lagrange se puede calcular como

$$\lambda_{si} = - \left( \mathbf{J}_{\varphi si} \mathbf{H}_{si}^{-1} \mathbf{J}_{\varphi si} \right)^{-1} \left( \mathbf{J}_{\varphi si} \mathbf{H}_{si}^{-1} (\boldsymbol{\tau}_{si} - \boldsymbol{\tau}_{si}^*) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi si} \dot{\mathbf{q}}_{si} + \dot{\nu}_m \right) \quad (4.44)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_{si}^* = \mathbf{C}_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si})\dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{D}_{si}\dot{\mathbf{q}}_{si} + \mathbf{g}_{si}(\mathbf{q}_{si})$ . Por simplicidad, se han omitido los argumentos de las matrices  $\mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si})$ ,  $\mathbf{J}_{\varphi si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)$  y  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si}, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m)$ . Tomando en cuenta la Suposición 3.1, la aceleración articular del maestro  $\ddot{\mathbf{q}}_m$  está acotada, esto implica que el término  $\dot{\nu}_m = \dot{\nu}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m)$  también está acotado ya que es función de variables acotadas. Puesto que la entrada de control  $\boldsymbol{\tau}_{si}$  está acotada (ver Comentario 4.3), se concluye que el multiplicador de Lagrange  $\lambda_{si} = \lambda_{si}(\mathbf{q}_{si}, \dot{\mathbf{q}}_{si}, \mathbf{s}_{si}, \lambda_{sd}, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m)$  es función únicamente de vectores acotados, por lo tanto,  $\lambda_{si} \in \mathcal{L}_\infty$ . Debido a que la ecuación (4.19) representa un filtro estable con entrada acotada, se tiene  $\hat{\lambda}_{si}, \frac{d}{dt}\hat{\lambda}_{si} \in \mathcal{L}_\infty$ . Solo falta mostrar que la velocidad de referencia  $\dot{\mathbf{q}}_{rsi}$  y su derivada están acotadas. De la ecuación (4.28) es claro que  $\dot{\mathbf{q}}_{rsi}$  es un vector acotado, ya que es función únicamente de variables acotadas. Por otro lado, la derivada de  $\dot{\mathbf{q}}_{rsi}$  está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{rsi} &= \mathbf{Q}_{si} (\ddot{\mathbf{q}}_{sdi} - k_{psi}\Delta\dot{\mathbf{q}}_{si}) - \xi_{si} \mathbf{J}_{\varphi si}^\dagger \left( \frac{d}{dt}\hat{\lambda}_{si} - \dot{\lambda}_{sd} + k_{Fsi}\Delta\lambda_{si} \right) - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{si} - \mathbf{J}_{\varphi si}^\dagger \dot{\nu}_m + \\ &\quad \dot{\mathbf{Q}}_{si} (\dot{\mathbf{q}}_{si} - k_{psi}\Delta\mathbf{q}_{si}) - \xi_{si} \dot{\mathbf{J}}_{\varphi si}^\dagger (\Delta\lambda_{si} + k_{Fsi}\Delta F_{si}) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi si}^\dagger \nu_{mi}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

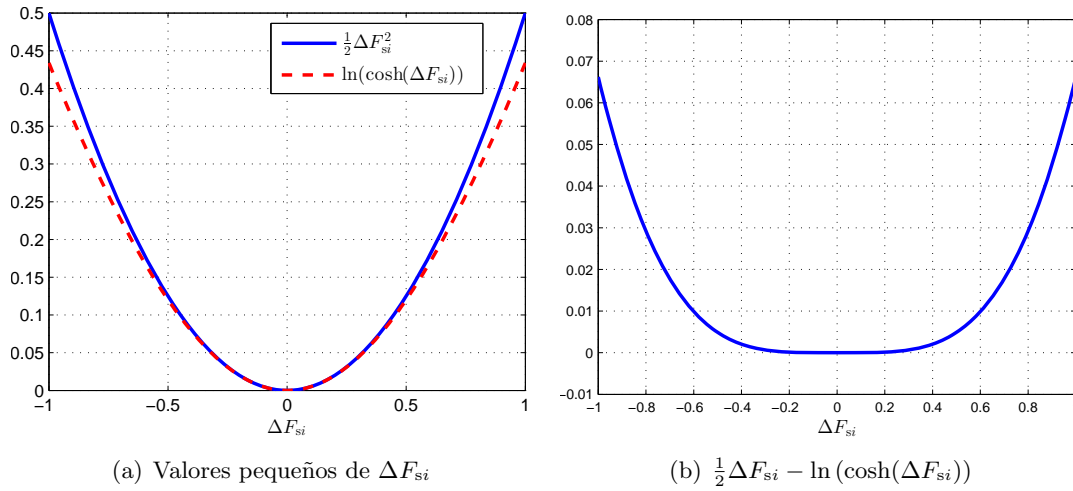


Figura 4.2: Gráfica de la funciones  $\frac{1}{2}\Delta F_{si}^2$  y  $\ln(\cosh(\Delta F_{si}))$

De la ecuación (4.38) se tiene que la derivada de  $\sigma_{si}$  está acotada. En vista de que cada variable en (4.45) está acotada, se concluye  $\ddot{\mathbf{q}}_{rsi} \in \mathcal{L}_\infty$ .

2) El siguiente paso consiste en mostrar que mediante una apropiada selección de las ganancias de control, el vector  $\mathbf{y}_{si}$  permanece en la región  $\mathcal{D}_{si}$  para todo  $t \geq 0$ . Para tal fin, considérese la función positiva definida

$$V_{si} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{H}_{si}(\mathbf{q}_{si}) \mathbf{s}_{si} + \xi_{si} k_{Fsi} \left( \frac{1}{2} \Delta F_{si}^2 + \ln(\cosh(\Delta F_{si})) \right). \quad (4.46)$$

La Figura 4.2 muestra las gráficas de las funciones escalares  $\frac{1}{2}\Delta F_{si}^2$  y  $\ln(\cosh(\Delta F_{si}))$  así como su diferencia. De la gráfica se observa que  $\ln(\cosh(\Delta F_{si})) \leq \frac{1}{2}\Delta F_{si}^2$ , por lo tanto, también se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2} \Delta F_{si}^2 \leq \frac{1}{2} \Delta F_{si}^2 + \ln(\cosh(\Delta F_{si})) \leq \Delta F_{si}^2. \quad (4.47)$$

Tomando en cuenta la desigualdad anterior, la función positiva  $V_{si}$  satisface

$$\lambda_{mi} \|\mathbf{y}_{si}\|^2 \leq V_{si} \leq \lambda_{Mi} \|\mathbf{y}_{si}\|^2 \quad (4.48)$$

con

$$\lambda_{mi} \triangleq \min \left\{ \lambda_{hsi}, \frac{1}{2} \xi_{si} k_{Fsi} \right\}, \quad \lambda_{Mi} \triangleq \max \left\{ \lambda_{Hsi}, \xi_{si} k_{Fsi} \right\}.$$

La derivada de  $V_{si}$  a lo largo de (4.36) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{si} = & -\mathbf{s}_{si}^T \mathbf{D}_{si} \mathbf{s}_{si} - \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{K}_{vsi} \tanh(\mathbf{s}_{si}) + \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{J}_{\varphi si}^T (\Delta \lambda_{si} + k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si})) \\ & + \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{J}_{\varphi si}^T \Delta \hat{\lambda}_{si} - \mathbf{s}_{si}^T (\boldsymbol{\Theta}_{si} + \boldsymbol{\tau}_o) + \xi_{si} k_{Fsi} \Delta F_{si} \Delta \lambda_{si} + \xi_{si} k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si}) \Delta \lambda_{si} \end{aligned} \quad (4.49)$$



donde se ha utilizado la Propiedad 2.3. A continuación se analiza el término  $\mathbf{s}_{si}^T \mathbf{J}_{\varphi si}^T$ . Tomando en cuenta las ecuaciones (4.22)-(4.24) y (4.32) se tiene

$$\mathbf{s}_{si}^T \mathbf{J}_{\varphi si}^T = \mathbf{J}_{\varphi si} \mathbf{s}_{si} = -\xi_{si} (\Delta \lambda_{si} + k_{Fsi} \Delta F_{si}) + \mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si}. \quad (4.50)$$

Al sustituir el resultado anterior en (4.49) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_{si} &= -\mathbf{s}_{si}^T \mathbf{D}_{si} \mathbf{s}_{si} - \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{K}_{vsi} \tanh(\mathbf{s}_{si}) - \xi_{si} \Delta \lambda_{si}^2 - \xi_{si} k_{Fsi}^2 \Delta F_{si} \tanh(\Delta F_{si}) \\ &\quad - \xi_{si} k_{Fsi} \Delta F_{si} \Delta \lambda_{si} - \xi_{si} k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si}) \Delta \lambda_{si} + k_{Fsi} \mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si} \tanh(\Delta F_{si}) \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si} \Delta \lambda_{si} + \xi_{si} k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si}) \Delta \lambda_{si} + \xi_{si} k_{Fsi} \Delta F_{si} \Delta \lambda_{si} \\ &\quad + \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{J}_{\varphi si}^T \Delta \hat{\lambda}_{si} - \mathbf{s}_{si}^T (\boldsymbol{\Theta}_{si} + \boldsymbol{\tau}_o) \\ &= - \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{s}_{si}^T & \Delta F_{si} \end{array} \right] \mathbf{K}_{vFsi} \left[ \begin{array}{cc} \tanh^T(\mathbf{s}_{si}) & \tanh(\Delta F_{si}) \end{array} \right]^T - \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{D}_{si} \mathbf{s}_{si} - \xi_{si} \Delta \lambda_{si}^2 \\ &\quad + k_{Fsi} \mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si} \tanh(\Delta F_{si}) + \mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si} \Delta \lambda_{si} + \mathbf{s}_{si}^T \mathbf{J}_{\varphi si}^T \Delta \hat{\lambda}_{si} - \mathbf{s}_{si}^T (\boldsymbol{\Theta}_{si} + \boldsymbol{\tau}_o). \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde  $\mathbf{K}_{vFsi} \triangleq \text{block diag}\{\mathbf{K}_{vsi} \xi_{si} k_{Fsi}^2\}$ . De acuerdo con el inciso 1), las variables en lazo cerrado están acotados si el vector de estado  $\mathbf{y}_{si} \in \mathcal{D}_{si}$  lo está. Por lo tanto, deben existir cotas tales que

$$\delta_{\lambda_i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{y}_{si}} \|\mathbf{J}_{\varphi si}^T \Delta \hat{\lambda}_{si}\| \quad (4.52)$$

$$\delta_{\Theta_i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{y}_{si}} \|\boldsymbol{\Theta}_{si}\|. \quad (4.53)$$

Sin pérdida de generalidad la restricción (4.11) se puede definir de tal manera que  $\|\mathbf{J}_{\varphi si}(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m)\| = 1$ . Entonces, de las propiedades de la tangente hiperbólica (ecuación (4.1)) y tomando en cuenta (4.43) se tiene

$$|k_{Fsi} \mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si} \tanh(\Delta F_{si})| \leq k_{Fsi} |\Delta F_{si}| \|\mathbf{J}_{\varphi si}\| \|\boldsymbol{\sigma}_{si}\| \leq k_{Fsi} \bar{\sigma}_{si} \|\mathbf{y}_{si}\| \quad (4.54)$$

$$|\mathbf{J}_{\varphi si} \boldsymbol{\sigma}_{si} \Delta \lambda_{si}| \leq |\Delta \lambda_{si}| \|\mathbf{J}_{\varphi si}\| \|\boldsymbol{\sigma}_{si}\| \leq \bar{\sigma}_{si} |\Delta \lambda_{si}|. \quad (4.55)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (4.52)-(4.55) y dado que  $\mathbf{D}_{si} \geq \mathbf{O}$  y  $\|\boldsymbol{\tau}_o\| \leq \delta_o$ , la derivada de  $V_{si}$  satisface

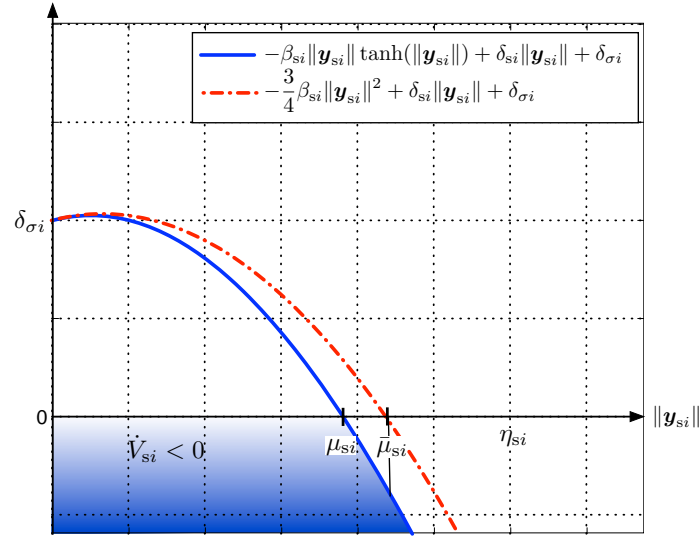
$$\dot{V}_{si} \leq -\mathbf{y}_{si}^T \mathbf{K}_{vFsi} \tanh(\mathbf{y}_{si}) + \delta_{si} \|\mathbf{y}_{si}\| - \xi_{si} |\Delta \lambda_{si}|^2 + \bar{\sigma}_{si} |\Delta \lambda_{si}| \quad (4.56)$$

donde  $\delta_{si} \triangleq k_{Fsi} \bar{\sigma}_{si} + \delta_{\lambda_i} + \delta_{\Theta_i} + \delta_o$ . Nótese que el máximo de la función  $-\xi_{si} |\Delta \lambda_{si}|^2 + \bar{\sigma}_{si} |\Delta \lambda_{si}|$  está dado por

$$-\xi_{si} \left( \frac{\bar{\sigma}_{si}}{2\xi_{si}} \right)^2 + \bar{\sigma}_{si} \left( \frac{\bar{\sigma}_{si}}{2\xi_{si}} \right) = \frac{\bar{\sigma}_{si}^2}{4\xi_{si}} \triangleq \delta_{\sigma_i}. \quad (4.57)$$

Dicho valor se puede hacer arbitrariamente pequeño si se incrementan el valor de las ganancias  $\xi_{si}$  y  $\gamma_{si}$  (ver ecuación (4.43)). Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (4.9), una cota inferior para el término  $\mathbf{y}_{si}^T \mathbf{K}_{vFsi} \tanh(\mathbf{y}_{si})$  está dado por

$$\mathbf{y}_{si}^T \mathbf{K}_{vsi} \tanh(\mathbf{y}_{si}) \geq \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_{vFsi}\} \|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|). \quad (4.58)$$


 Figura 4.3: Gráfica de la función  $\psi_{si}(\|\mathbf{y}_{si}\|)$  con  $\beta_{si} \gg \delta_{si}$ 

Después de considerar las ecuaciones (4.57) y (4.58) se obtiene

$$\dot{V}_{si} \leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_{vFsi}\}\|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|) + \delta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\| + \delta_{\sigma i} \quad (4.59)$$

Supóngase que las ganancias del algoritmo de control se eligen tal que

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_{vFsi}\} \geq 1 + \beta_{si} \quad (4.60)$$

donde  $\beta_{si}$  es una constante positiva. Entonces, tomando en cuenta la ecuación (4.60), la derivada de  $V_{si}$  satisface

$$\dot{V}_{si} \leq -\|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|) - \beta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|) + \delta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\| + \delta_{\sigma i}. \quad (4.61)$$

Si la ganancia  $\beta_{si}$  es suficientemente grande, es posible determinar una constante arbitrariamente pequeña denotada por  $\mu_{si}$  tal que

$$\dot{V}_{si} \leq -\|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|) < 0, \quad \forall \|\mathbf{y}_{si}\| \geq \mu_{si} > 0. \quad (4.62)$$

La constante  $\mu_{si}$  se puede calcular como la raíz de la siguiente ecuación (ver Figura 4.3)

$$\psi_{si}(\|\mathbf{y}_{si}\|) \triangleq -\beta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|) + \delta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\| + \delta_{\sigma i} = 0. \quad (4.63)$$

Debido a la naturaleza no lineal de dicha función, no es posible determinar una solución en forma cerrada para  $\mu_{si}$ . Como se muestra en la Figura 4.3, en una región suficientemente pequeña la función  $\psi_{si}(\|\mathbf{y}_{si}\|)$  puede ser acotada superiormente mediante

$$\psi_{si}(\|\mathbf{y}_{si}\|) \leq -\frac{3}{4}\beta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\|^2 + \delta_{si}\|\mathbf{y}_{si}\| + \delta_{\sigma i}, \quad \forall \|\mathbf{y}_{si}\| \leq \eta_{si} \quad (4.64)$$

Por lo tanto, un valor aproximado para  $\mu_{si}$  se puede calcular como

$$\mu_{si} \leq \bar{\mu}_{si} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta_{si} + \sqrt{\delta_{si}^2 + 3\beta_{si}\delta_{\sigma i}}}{\beta_{si}}. \quad (4.65)$$

Del análisis anterior, se concluye que la función  $V_{si}$  definida en (4.46) satisface las condiciones del Teorema A.1 con

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\mathbf{y}_{si}\|) &\triangleq \lambda_{mi}\|\mathbf{y}_{si}\|^2 \\ \alpha_2(\|\mathbf{y}_{si}\|) &\triangleq \lambda_{Mi}\|\mathbf{y}_{si}\|^2 \\ W_3(\mathbf{y}_{si}) &\triangleq -\|\mathbf{y}_{si}\| \tanh(\|\mathbf{y}_{si}\|). \end{aligned}$$

Ahora considérese  $r = y_{\max i}$ , de la ecuación (A.3) se debe cumplir

$$\mu_{si} \leq \sqrt{\frac{\lambda_{mi}}{\lambda_{Mi}}} y_{\max i} \quad (4.66)$$

Puesto que las constantes  $\delta_{\sigma i}$  y  $\mu_{si}$  se pueden hacer arbitrariamente pequeñas al incrementar las ganancias del controlador, la desigualdad (4.66) siempre se satisface. Si además, las condiciones iniciales satisfacen

$$\|\mathbf{y}_{si}(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{mi}}{\lambda_{Mi}}} y_{\max i}. \quad (4.67)$$

Entonces, se concluye que las soluciones de (4.36) están finalmente acotadas, *i.e.*

$$\|\mathbf{y}_{si}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{Mi}}{\lambda_{mi}}} \mu_{si} \triangleq b_{si} \quad (4.68)$$

donde  $b_{si}$  es la cota final. Por lo tanto, las trayectorias del sistema en lazo cerrado nunca abandonan la región  $\mathcal{D}_{si}$ , *i.e.*,  $\mathbf{y}_{si}(t) \in \mathcal{D}_{si} \forall t \geq 0$ .

3) Hasta ahora se ha mostrado que las variables en lazo cerrado están acotadas. El siguiente paso es mostrar la convergencia a cero de los errores de posición y fuerza. De las ecuaciones (4.29) y (4.32) la dinámica de la variable  $\mathbf{s}_{qsi}$  es descrita por la ecuación diferencial no lineal

$$\dot{\mathbf{s}}_{qsi} = -\gamma_{si} (\text{sign}(\mathbf{s}_{qsi}) + \mathbf{s}_{qsi}) + \dot{\mathbf{s}}_{si}. \quad (4.69)$$

Para analizar la estabilidad de la ecuación anterior considérese la función candidata de Lyapunov  $V_{qsi} = \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_{qsi}\|^2$  cuya derivada a lo largo de (4.69) está dada por

$$\dot{V}_{qsi} = \mathbf{s}_{qsi}^T \dot{\mathbf{s}}_{qsi} = \|\mathbf{s}_{qsi}\| \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_{qsi}\| = -\gamma_{si} \|\mathbf{s}_{qsi}\|^2 - \gamma_{si} \mathbf{s}_{qsi}^T \text{sign}(\mathbf{s}_{qsi}) + \mathbf{s}_{qsi}^T \dot{\mathbf{s}}_{si}. \quad (4.70)$$

De acuerdo con el análisis presentado en los puntos 1) y 2) y tomando en cuenta la Propiedad 2.1 el vector  $\dot{\mathbf{s}}_{si}$  en (4.34) está acotado, *i.e.*  $\|\dot{\mathbf{s}}_{si}\| \leq \zeta_{si}$ . Por lo tanto, una cota superior para (4.70) se puede calcular de la siguiente forma

$$\dot{V}_{qsi} = \|\mathbf{s}_{qsi}\| \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_{qsi}\| \leq -\gamma_{si} \|\mathbf{s}_{qsi}\| + \zeta_{si} \|\mathbf{s}_{qsi}\| \quad (4.71)$$

donde  $|\vartheta| \triangleq |\vartheta_1| + \dots + |\vartheta_n| \in \mathfrak{R}^n$ . Dado que  $\|\mathbf{s}_{qsi}\| \leq |\mathbf{s}_{qsi}|$  la derivada de  $V_{qsi}$  satisface

$$\dot{V}_{qsi} = \|\mathbf{s}_{qsi}\| \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_{qsi}\| \leq -\|\mathbf{s}_{qsi}\| (\gamma_{si} - \zeta_{si}). \quad (4.72)$$

Si la ganancia  $\gamma_{si}$  satisface  $\gamma_{si} > \zeta_{si}$ , entonces el vector  $\mathbf{s}_{qsi}$  tiende a cero en un tiempo finito  $t_{rsi}$  (Slotine & Li, 1991). Si la ganancia  $\gamma_{si}$  en (4.29) se define de la siguiente manera  $\gamma_{si} \triangleq \phi_{si} + \zeta_{si}$  donde  $\phi_{si}$  es una constante positiva, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_{qsi}\| \leq -\phi_{si} \implies t_{rsi} \leq \frac{\|\mathbf{s}_{qsi}(0)\|}{\phi_{si}}. \quad (4.73)$$

Para un tiempo  $t \geq t_{rsi}$  se tiene  $\mathbf{s}_{qsi}(t) = \mathbf{0}$ . Tomando en cuenta las ecuaciones (4.22), (4.26) y (4.27) se tiene

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{si} + k_{psi} \Delta \mathbf{q}_{si} = \mathbf{0} \quad (4.74)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta F_{si} + k_{Fsi} \Delta F_{si} = \mathbf{0}. \quad (4.75)$$

Las ecuaciones anteriores representan filtros estables de primer orden con entrada cero. Por lo tanto, se concluye que los errores  $\Delta \mathbf{q}_{si}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{q}}_{si}$ ,  $\Delta F_{si}$  y  $\frac{d}{dt} \Delta F_{si} = \Delta \lambda_{si}$  convergen a cero de forma exponencial.  $\square$

**Comentario 4.4.** *Es importante mencionar que la ley de control (4.33) solo garantiza  $\hat{\lambda}_{si} \rightarrow \lambda_{sd}$  y  $\lambda_{si} \in \mathcal{L}_\infty$ . Sin embargo, dado que la ecuación (4.19) representa un filtro estable con ganancia unitaria, la magnitud de la fuerza de agarre  $\lambda_{si}$  permanece cercana al valor deseado  $\lambda_{sd}$ . Mas aún, si  $\lambda_{sd}$  es un valor constante se tiene  $\lambda_{si} \rightarrow \lambda_{sd}$ .*  $\square$

### 4.3. Trayectoria deseada

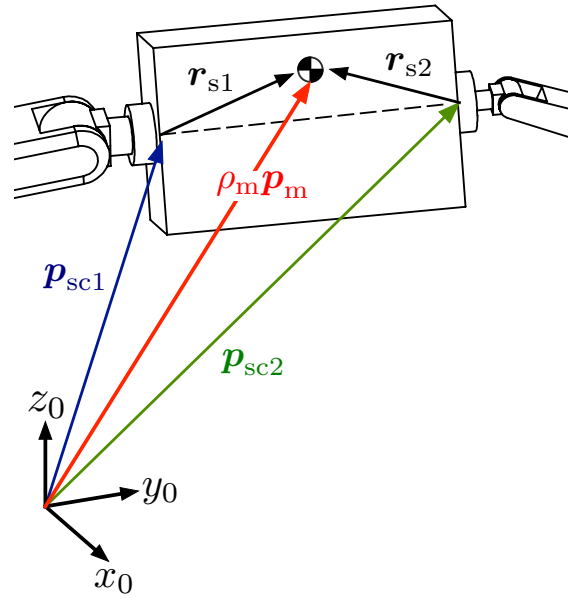
En el Capítulo 3 se presentó un algoritmo para generar la trayectoria deseada para los robots esclavos utilizando solo un maestro, el cual está basado en la restricción holonómica (2.7). De manera similar, en esta sección se presenta un método para generar la trayectoria deseada para los esclavos utilizando la restricción (4.11).

El objetivo es mover y rotar el objeto de forma remota. Para realizar esta tarea no es necesario conocer exactamente la superficie del objeto. Una aproximación lineal de la restricción (4.11) en coordenadas del espacio de trabajo está dada por (Pliego-Jiménez & Arteaga-Pérez, 2015)

$$\varphi_{si}(\mathbf{x}_{si}, \mathbf{x}_m) = (-1)^i \mathbf{n}_{si}(\phi_m) (\mathbf{p}_{si} - \mathbf{p}_{sci}) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.76)$$

donde  $\mathbf{n}_{si}(\phi_m) \in \mathfrak{R}^3$  es un vector unitario normal a la superficie que depende de la orientación del objeto y  $\mathbf{p}_{sci} \in \mathfrak{R}^3$  es el vector de posición en el punto de contacto. De acuerdo a la Figura 4.4 el vector  $\mathbf{p}_{sci}$  se puede calcular como

$$\mathbf{p}_{sci} = \rho_m \mathbf{p}_m(\mathbf{q}_m) + (-1)^i \mathbf{r}_{si} \quad (4.77)$$


 Figura 4.4: Cálculo del vector de contacto  $\mathbf{p}_{sci}$ 

donde  $\rho_m \in \mathfrak{R}$  es un factor de escala y  $\mathbf{r}_{si}$  es el vector de posición que va del centro de masa del objeto al punto de contacto. Tomando en cuenta las ecuaciones (4.76) y (4.77) la posición deseada en coordenadas del espacio de trabajo para los robots esclavos está dada por

$$\mathbf{p}_{sdi} = \rho_m \mathbf{p}_m(\mathbf{q}_m) + (-1)^i \mathbf{r}_{si} \quad (4.78)$$

Por su parte, la orientación deseada está dada por

$$\mathbf{R}_{sd1} = \mathbf{R}_m(\mathbf{q}_m), \quad \mathbf{R}_{sd2} = \mathbf{R} \mathbf{R}_m(\mathbf{q}_m) \quad (4.79)$$

donde  $\mathbf{R}_m(\mathbf{q}_m) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación del maestro y  $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de rotación constante la cual se elige tal que los efectores finales de los maestros sean colineales. La trayectoria deseada en coordenadas del espacio articular  $\mathbf{q}_{sdi}(\mathbf{q}_m)$  se obtiene al resolver la cinemática inversa de cada manipulador esclavo.

**Comentario 4.5.** *Es importante mencionar que en este caso no se utilizó el observador de velocidad para el robot maestro presentado en el Capítulo 3. Esto se hizo para simplificar el análisis de estabilidad, ya que en este caso, la restricción holonómica (4.11) también depende de la posición articular del maestro.*  $\square$



# Resultados experimentales y de simulación

En este capítulo se presentan resultados experimentales y de simulación que muestran el desempeño de los algoritmos de control propuestos en los Capítulos 3 y 4.

## 5.1. Plataforma experimental

El sistema cooperativo está compuesto por los robots industriales A465 y A255 de la compañía *CRS Robotics*<sup>®</sup> con seis y cinco grados de libertad respectivamente. Como robot maestro se utilizó el dispositivo háptico *Phantom Touch*<sup>®</sup> con seis grados de libertad, pero únicamente los tres primeros están actuados. El objeto a manipular es un bloque Nylamid de masa 0.75[Kg] y dimensiones  $0.084 \times 0.06 \times 0.082$  [m]. La fuerza de contacto es medida con los sensores de fuerza de seis ejes *JR3*. El sistema de adquisición está compuesto por el FPGA CompactRIO (*Real-time Industrial Controller*) de la compañía *National Instruments*<sup>®</sup>, el cual se encarga de leer la posición angular de los robots industriales así como de enviar el voltaje a sus respectivos motores y la tarjeta PCI de JRE Inc. la cual recibe las señales provenientes de los sensores de fuerza. Los algoritmos de control fueron implementados en una PC con el sistema operativo *Windows XP*<sup>®</sup> con un tiempo de muestreo de 5 milisegundos. La Figura 5.1 muestra los componentes del banco de pruebas.

En los experimentos se utilizaron únicamente las articulaciones 2, 3 y 4 del manipulador A4255 y las articulaciones 2, 3 y 5 del robot A465 renumerados 1, 2, 3 en ambos casos. Por lo tanto, el movimiento de los manipuladores y el objeto está contenido en el plano  $x_0 - y_0$  como se muestra en la Figura 5.1. El objeto puede girar alrededor del eje  $z_0$ . Por otro lado, para el maestro se utilizaron únicamente las tres primeras articulaciones, las cuales están provistas de decodificadores incrementales para medir su posición angular. La primera articulación se utilizó para controlar la orientación del objeto, mientras que la segunda y tercera se utilizaron para controlar su posición,

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} \ell_{m2} \cos(q_{m2}) + \ell_{m3} \cos(q_{m2} + q_{m3}) \\ \ell_{m2} \sin(q_{m2}) + \ell_{m3} \sin(q_{m2} + q_{m3}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} \cos(q_{m1}) & -\sin(q_{m1}) & 0 \\ \sin(q_{m1}) & \cos(q_{m1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

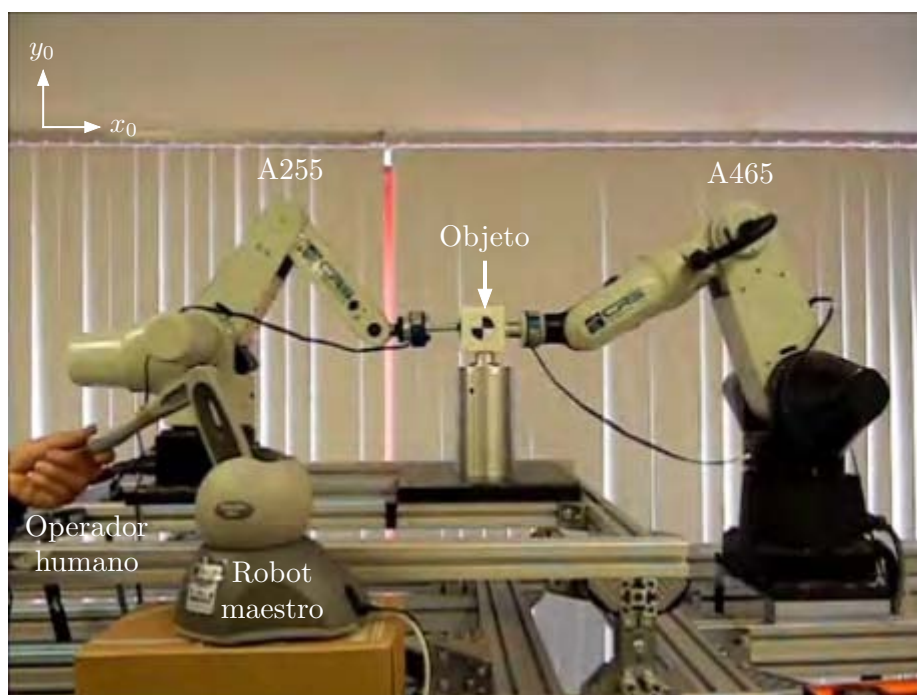


Figura 5.1: Plataforma experimental

donde  $\ell_{mi}$  son las longitudes de los eslabones con  $i = 2, 3$ . En este caso, la matriz de rotación  $\mathbf{R}$  dada en (3.21) y (4.79) está dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se optó por utilizar la primera articulación para la orientación del objeto en lugar de las articulaciones 4, 5 y 6 (correspondientes a la orientación del efector del robot *Phantom*) debido a que estas últimas están provistas de potenciómetros para medir su posición angular, además de que su rango de operación es menor. Un resumen de los algoritmos de control presentados en los Capítulos 3 y 4 para los robots esclavos se muestra en la Tabla 5.1. Por otro lado, la Tabla 5.2 muestra los algoritmos de control para los manipuladores maestros.

## 5.2. Experimentos control centralizado

Se realizaron dos experimentos con distintos operadores para evaluar el desempeño del algoritmo de control propuesto en (3.29). La magnitud de la fuerza de sujeción deseada en ambos casos está dada por

$$\lambda_{sd} = 45 (1 - e^{-t}) \text{ [Newtons]}. \quad (5.1)$$



Esquema	Algoritmo de control
Centralizado	$\boldsymbol{\tau}_s = \begin{bmatrix} \tau_{s1} \\ \tau_{s2} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_{vs} \mathbf{s}_s + \mathbf{Y}_{sa} \hat{\boldsymbol{\theta}}_s - \mathbf{J}_{\varphi s}^T(\mathbf{q})_s (\lambda_{sd} + k_{Fs} \Delta F_s)$ $\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}_s = -\boldsymbol{\Gamma}_s \mathbf{Y}_{sa}^T \mathbf{s}_s$
Descentralizado	$\tau_{si} = -\mathbf{K}_{vsi} \tanh(\mathbf{s}_{si}) - \mathbf{J}_{\varphi si}^T(\mathbf{q}_{si}, \mathbf{q}_m) (\lambda_{sd} - k_{Fsi} \tanh(\Delta F_{si}))$

Tabla 5.1: Estructura de los algoritmos de control para los robots esclavos

Esquema	Algoritmo de control
Unilateral	$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m)$
Bilateral	$\boldsymbol{\tau}_m = \begin{bmatrix} \tau_{m1} \\ \tau_{m2} \end{bmatrix} = \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) + \mathbf{J}_{ma}^T(\mathbf{q}_m) (\mathbf{J}_{\varphi xm}^T \rho_f \lambda_s - k_m \mathbf{Q}_m(\mathbf{q}_m) \Delta \mathbf{p}_m)$

Tabla 5.2: Estructura de los algoritmos de control para los robots maestros

Nótese que la magnitud de la fuerza deseada es suficientemente grande para evitar el deslizamiento, pero a su vez dicha fuerza no causa una deformación plástica en el objeto. El esquema de control centralizado requiere para su implementación de la derivada de  $\dot{\mathbf{q}}_{rs}$ , dicha variable se obtuvo mediante diferenciación numérica,

$$\ddot{\mathbf{q}}_{rs} \approx \frac{\dot{\mathbf{q}}_{rs}(kT) - \dot{\mathbf{q}}_{rs}(kT - T)}{T}$$

donde  $T = 5[\text{ms}]$  es el tiempo de muestreo.

La trayectoria del objeto generada por el primer operador se muestra en la Figura 5.2. La línea continua representa la posición del objeto, la cual es calculada de acuerdo con la ecuación (2.1), mientras que la línea punteada representa la trayectoria deseada. Como se observa se logra un buen seguimiento de trayectorias en el subespacio de posición.

La trayectoria en el subespacio de fuerza se muestra en la Figura 5.3. Puesto que para el esquema de control centralizado se tiene solo una restricción holonómica, solo se requiere un sensor de fuerza para su implementación.

Para fines de análisis, en la Figura 5.3 se muestran las dos señales de los sensores de fuerza, las líneas continua y punteada representan las señales de los sensores de fuerza fijos al los efectores finales de los robots A255 y A465 respectivamente, mientras que la línea segmentada representa la fuerza deseada. Como se observa después del transitorio las señales de los sensores de fuerza son prácticamente idénticas, es decir, se tiene un balance de fuerzas. Esto muestra que la fuerza de sujeción no contribuye con el movimiento del objeto. Después del transitorio el error de fuerza se mantiene en un margen de  $\pm 10[\text{Newtons}]$  (ver Figura 5.3(b)), con lo cual se logra un agarre rígido.

La norma del error de posición de los esclavos y la norma del error de observación del maestro se muestran en la Figura 5.4. Después del transitorio, los errores de posición son menores a 4 milímetros, mientras que la norma del error de observación es menor a 0.25 grados.

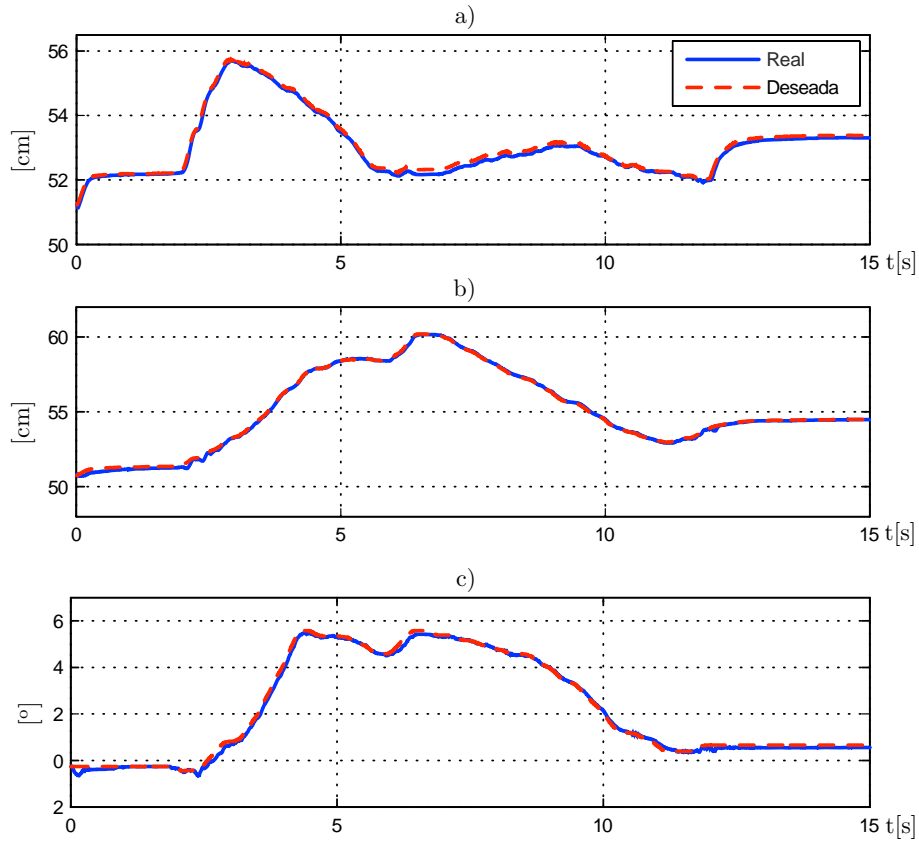


Figura 5.2: Control centralizado: trayectoria del objeto generada por el primer operador. a)  $x_c$ , b)  $y_c$  y c)  $\phi_c$

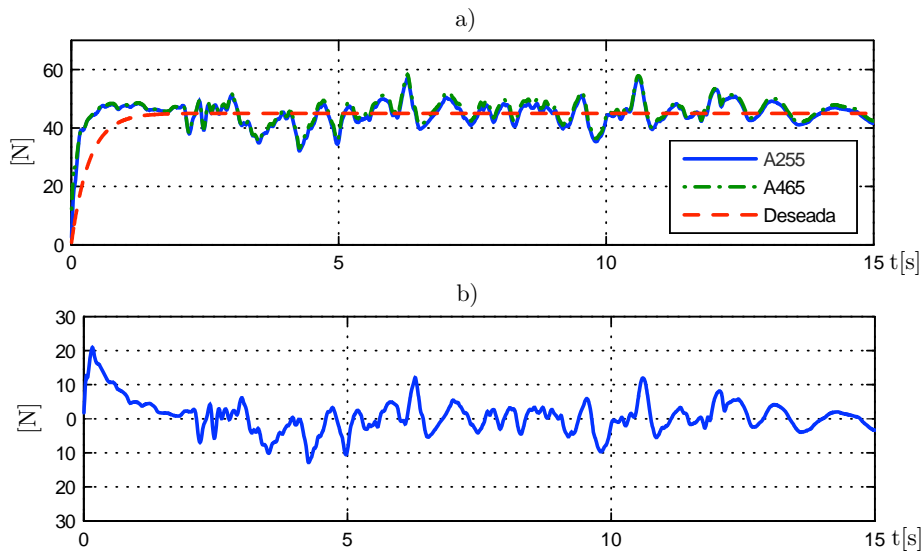


Figura 5.3: Control centralizado: trayectoria de fuerza con el primer operador. a)  $\lambda_s$ , b)  $\Delta\lambda_s$

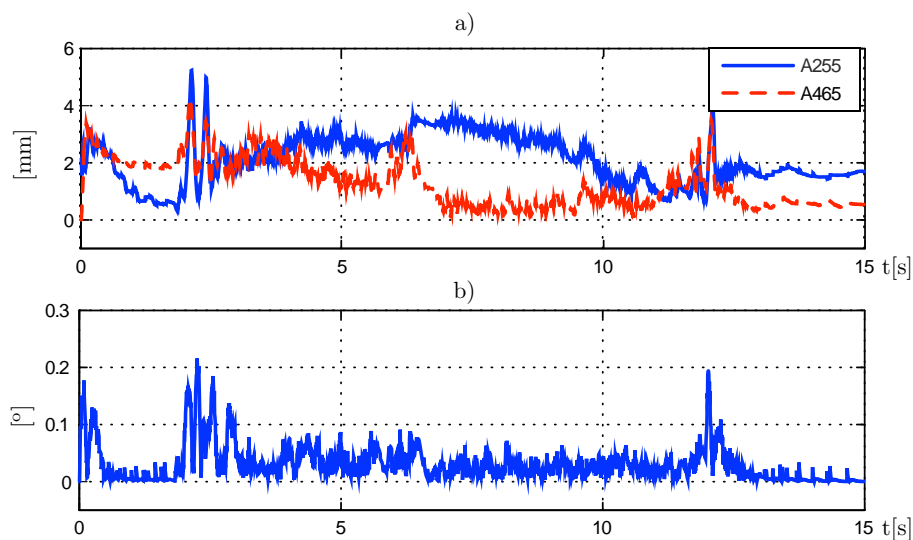


Figura 5.4: Control centralizado: norma del error cartesiano y de observación con el primer operador. a)  $\|\Delta \mathbf{p}_s\| = \|\mathbf{p}_{si} - \mathbf{p}_{sdi}\|$ , b)  $\|\tilde{\mathbf{q}}_m\|$

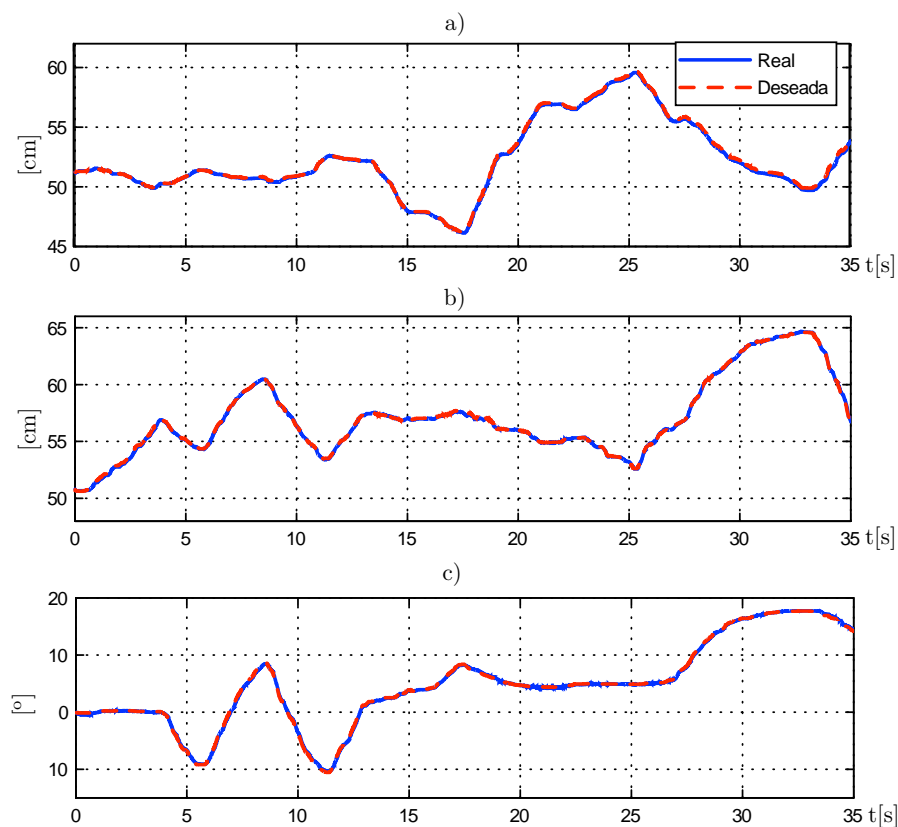


Figura 5.5: Control centralizado: trayectoria del objeto generada por el segundo operador. a)  $x_c$ , b)  $y_c$  y c)  $\phi_c$

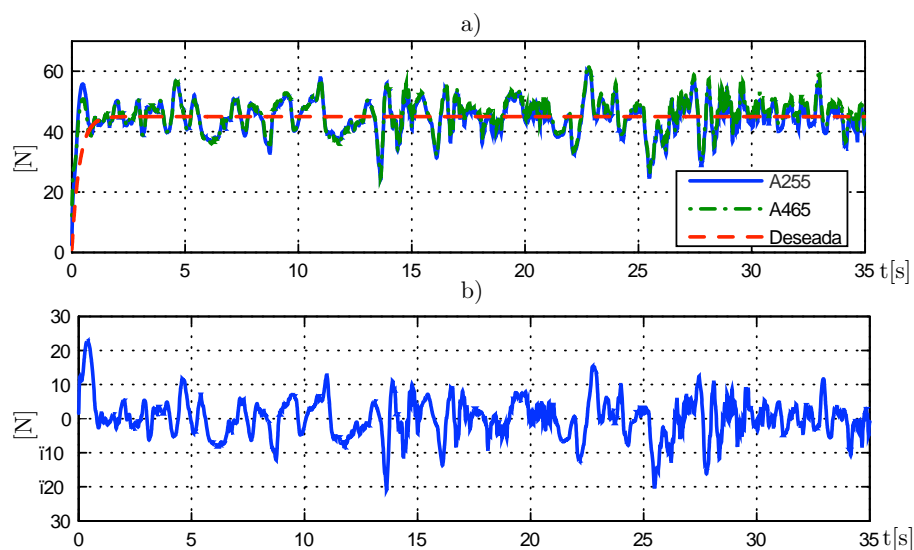


Figura 5.6: Control centralizado: trayectoria de fuerza con el segundo operador. a)  $\lambda_s$ , b)  $\Delta\lambda_s$

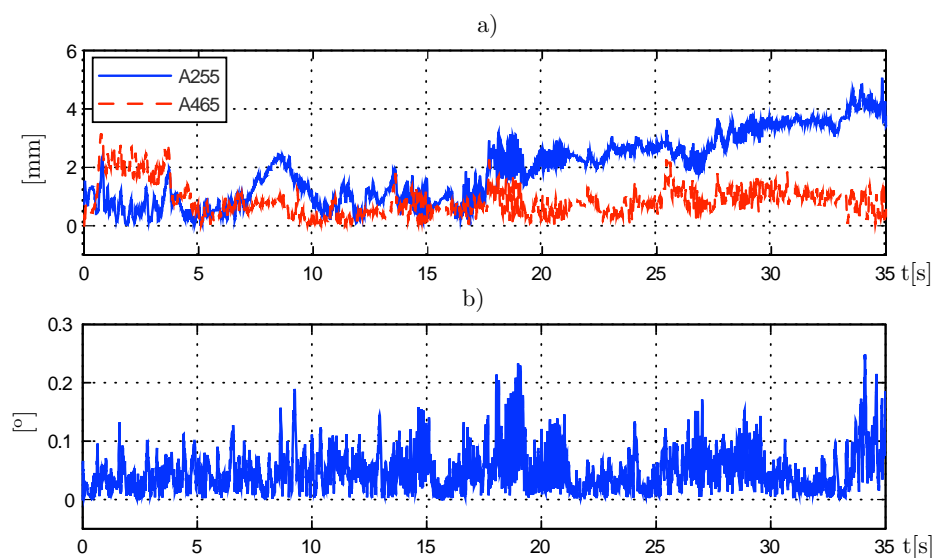


Figura 5.7: Control centralizado: norma del error cartesiano y de observación con el segundo operador. a)  $\|\Delta\mathbf{p}_s\|$ , b)  $\|\tilde{\mathbf{q}}_m\|$

La trayectoria del objeto generada por el segundo operador se muestra en la Figura 5.5. Cabe señalar que en este experimento, el operador movió más rápido el efector final del maestro. Por su parte, la Figura 5.6 muestra el seguimiento de trayectorias en el subespacio de fuerza. En este caso, el error máximo de fuerza fue de 16 [Newtons]. A pesar de este error relativamente grande, se logró un agarre rígido durante el movimiento del objeto. Al comparar las Figuras 5.2 y 5.6, se puede concluir que la velocidad del

operador influye en el desempeño del subespacio de fuerza. Además, también se tiene incertidumbre en los parámetros cinemáticos (*e.g.* longitud del efector final, posición inicial del objeto) que pueden ocasionar que la restricción (2.7) ya no se satisfaga. En este escenario, la velocidad ya no es ortogonal a la fuerza de sujeción, por lo que velocidades altas afectarán inevitablemente el desempeño del subespacio de fuerza.

La norma del error de posición de los robots esclavos y la norma del error de observación del maestro en el experimento con el segundo operador se muestran en la Figura 5.7. Se observa que el desempeño en el subespacio de posición es similar al primer experimento. Después del transitorio, la norma del error de posición fue menor a 5 milímetros mientras que el valor máximo de la norma del error de observación fue 0.26 grados. Las ganancias del observador y del esquema de control dados en (3.5)-(3.6) y (3.29)-(3.30) se eligieron como  $\alpha_r = 20$ ,  $k_r = 10$ ,  $k_{ps} = 300$ ,  $\mathbf{K}_{vs} = \text{block diag}\{25, 25, 15, 8.5, 8.5, 1.5\}$ ,  $k_{Fs} = 5$ ,  $\xi_s = 0.001$  y  $\mathbf{\Gamma} = \text{block diag}\{0.0015\mathbf{I}_{14 \times 14} \ 0.001\mathbf{I}_{12 \times 12} \ 0.25\mathbf{I}_{2 \times 2}\}$ .

### 5.3. Simulaciones reflexión de fuerza

El algoritmo de control con reflexión de fuerza presentado en el Capítulo 3, requiere de un sensor de fuerza adicional para los robots maestros. Debido a limitaciones en el equipo experimental, el desempeño del esquema de control con reflexión de fuerza se evalúa mediante simulaciones. Para los robots esclavos se consideraron nuevamente los robots industriales A465 y A255 cuyos parámetros cinemáticos y dinámicos pueden consultarse en (Gudiño-Lau & Arteaga-Pérez, 2005). Para los robots maestros se consideraron dos robots planares de dos grados de libertad con articulaciones de revolución. Por simplicidad, se utilizaron los parámetros cinemáticos del robot A465 para los maestros. Se asumió que la fuerza deseada aplicada por el operador está dada por

$$\lambda_{sd} = 30 (1 - e^{-1}) + 10 \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) \text{ [Newtons]}$$

El tiempo de muestreo utilizado en la simulación fue de  $T = 2[\text{ms}]$  y la duración de la simulación fue de 10 segundos.

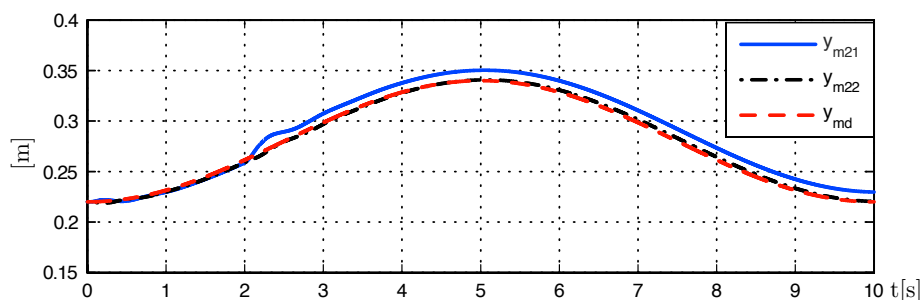


Figura 5.8: Simulación: trayectoria generada por el operador en el eje  $y_0$

Las ganancias del algoritmo de control para los robots maestros se seleccionaron como  $\mathbf{K}_{vh} = 16\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{k}_{ph} = 80\mathbf{I}$ ,  $k_m = 40$ ,  $\rho_f = 1$  donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es la matriz identidad.

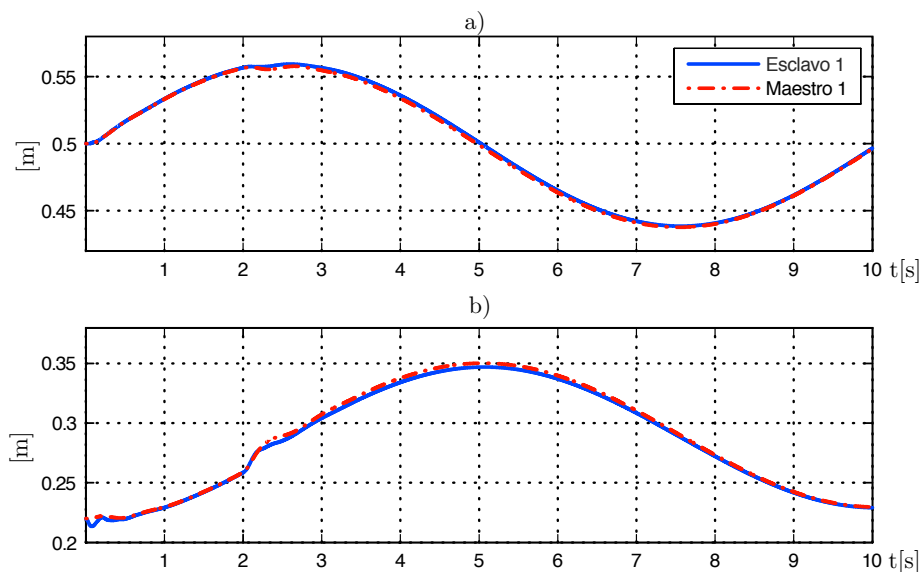


Figura 5.9: Simulación: trayectoria del primer robot esclavo. a)  $x_s$ , b)  $y_s$

Mientras que para el algoritmo de control para los esclavos dado en (3.29) se utilizaron las siguientes ganancias:  $\mathbf{K}_{vs} = \text{block diag}\{15\mathbf{I}_{3 \times 3} \ 25\mathbf{I}_{3 \times 3}\}$ ,  $k_{ps} = 350$ ,  $\xi_s = 0.001$ ,  $k_{Fs} = 40$ ,  $\mathbf{\Gamma}_s = \text{block diag}\{0.01\mathbf{I}_{14 \times 14} \ 0.001\mathbf{I}_{12 \times 12} \ 0.75\mathbf{I}_{2 \times 2}\}$ .

Durante la manipulación de los maestros, es posible que en ciertos intervalos de tiempo, el operador no logre que los efectores de los maestros sean colineales. Para simular este escenario se agregó una fuerza constante en la dirección positiva del eje  $y_0$  para el primer maestro en el instante  $t = 2$  segundos. Es decir, el operador ejerce una fuerza vertical adicional en el primer maestro. La Figura 5.8 muestra la trayectoria de los maestros generada por el operador en la dirección del eje  $y_0$ . La línea continua y punteada representan respectivamente las trayectorias del primer y segundo manipulador maestro, mientras que la línea segmentada representa la trayectoria ideal para mantener los efectores finales colineales. Como se observa en la Figura 5.8, el término  $-k_m \mathbf{J}_{ma}^T(\mathbf{q}_m) \mathbf{Q}_{xm} \Delta \mathbf{p}_m$  en (3.68) genera una fuerza de reacción para tratar de mantener los efectores finales colineales.

La trayectoria de los esclavos en coordenadas cartesianas se muestran en las Figuras 5.9 y 5.10. En ambos casos se obtuvo un buen desempeño en el seguimiento de trayectorias de posición. Por otro lado, el seguimiento de trayectorias en fuerza así como su respectivo error de seguimiento se muestran en la Figura 5.11. Como era de esperarse el desempeño en el subespacio de fuerza se ve afectado cuando los efectores no son colineales. A pesar de ello, el esquema de control presenta cierto grado de robustez cuando la distancia entre los efectores es relativamente pequeña (ver Figura 5.8).

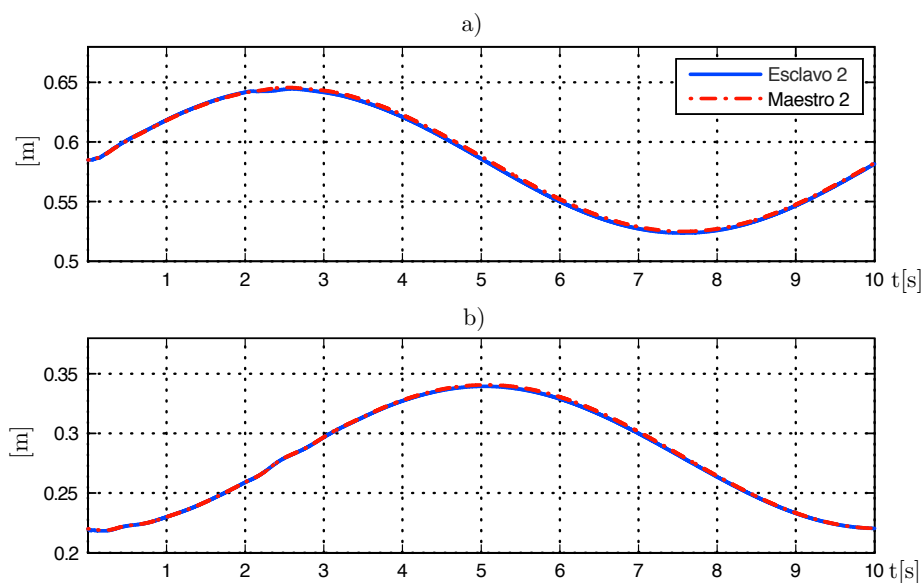


Figura 5.10: Simulación: trayectoria del segundo robot esclavo. a)  $x_s$ , b)  $y_s$

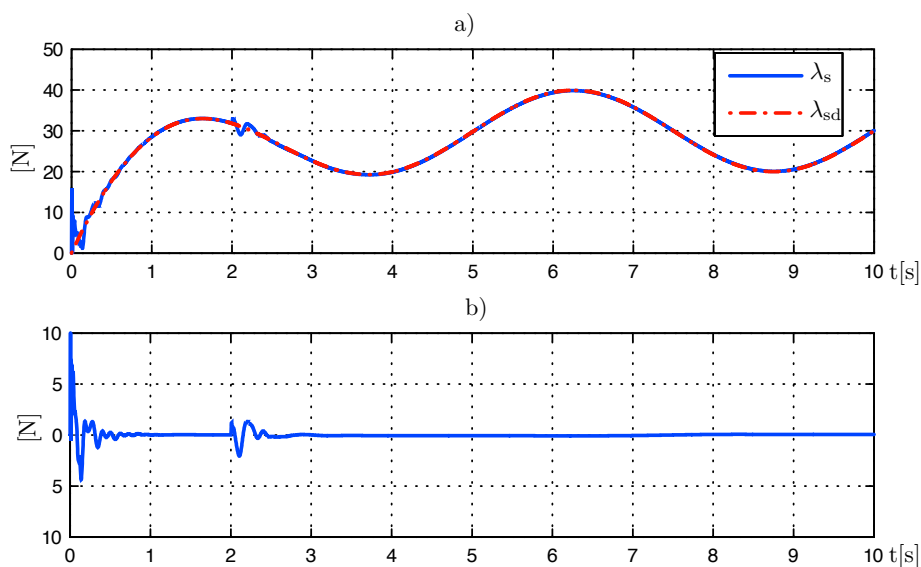


Figura 5.11: Simulación: trayectoria en fuerza. a)  $\lambda_s$ , b)  $\lambda_{sd}$

## 5.4. Experimentos control descentralizado

En esta sección se presentan resultados experimentales que evalúan el desempeño del algoritmo de control (4.33) presentado en el Capítulo 4. Se realizaron dos experimentos con distintos operadores. Los vectores de posición  $\mathbf{r}_{ci}$  en (4.78) están dados por

$$\mathbf{r}_{sc1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\ell \cos(\phi_m) \\ \ell \sin \phi_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{s2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ell \cos(\phi_m) \\ -\ell \sin \phi_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\phi_m = q_{m1}$  y  $\ell = 0.084[\text{m}]$  es la longitud del objeto. Las ganancias del algoritmo de control para el robot A255 se eligieron de la siguiente manera:  $k_{ps1} = 50.5$ ,  $\xi_{s1} = 0.001$ ,  $k_{Fs1} = 10.5$ ,  $\gamma_{s1} = 0.08$ ,  $\mathbf{K}_{vs1} = \text{block diag}\{22.5, , 22.5 \ 1.35\}$  y  $\epsilon_s = 15$ . Mientras que para el robot A465 se propusieron los siguientes valores:  $k_{ps2} = 300.0$ ,  $\xi_{s2} = 0.001$ ,  $k_{Fs2} = 10.5$ ,  $\gamma_{s2} = 0.15$ ,  $\mathbf{K}_{vs2} = \text{block diag}\{50.0, , 50.0, 20.0\}$ . En el experimento se utilizó un factor de escala  $\rho_m = 2$ .

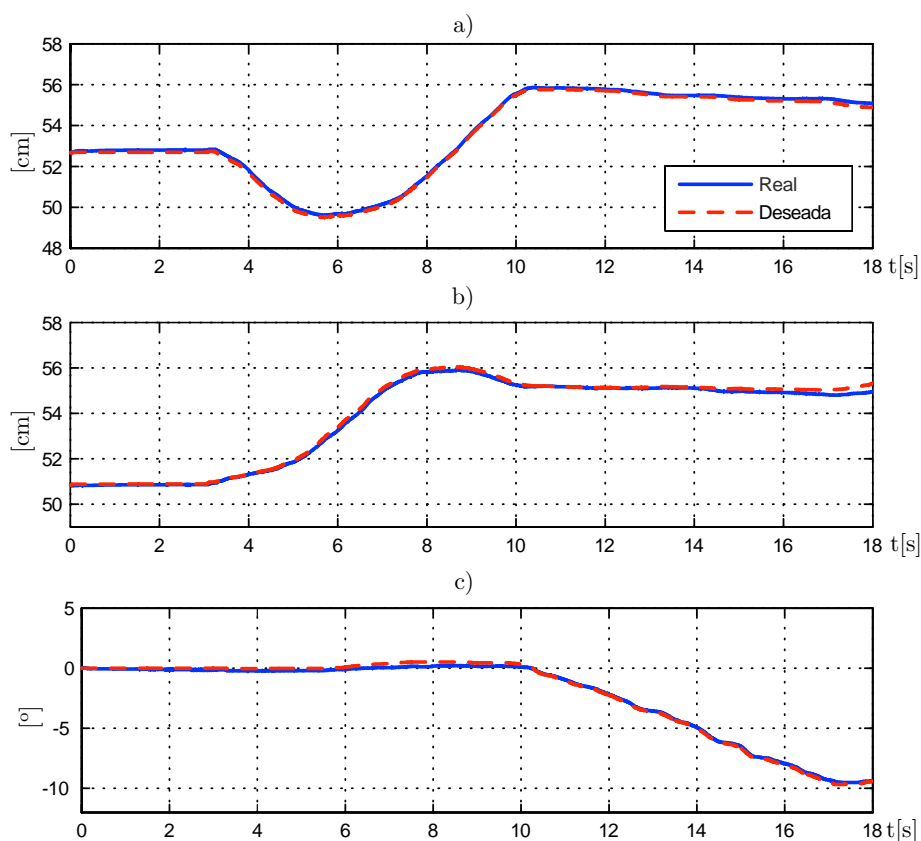


Figura 5.12: Control descentralizado: trayectoria del objeto generada por el primer operador. a)  $x_s$ , b)  $y_c$  y c)  $\phi_c$

La Figura 5.12 muestra la trayectoria generada por el primer operador, donde la línea continua representa la posición real del objeto mientras que la línea punteada representa



la trayectoria deseada. La trayectoria en fuerza de agarre así como su error de seguimiento se muestran en la Figura 5.13. Después del transitorio el error de fuerza se encuentra en un rango de  $\pm 6$  Newtons.

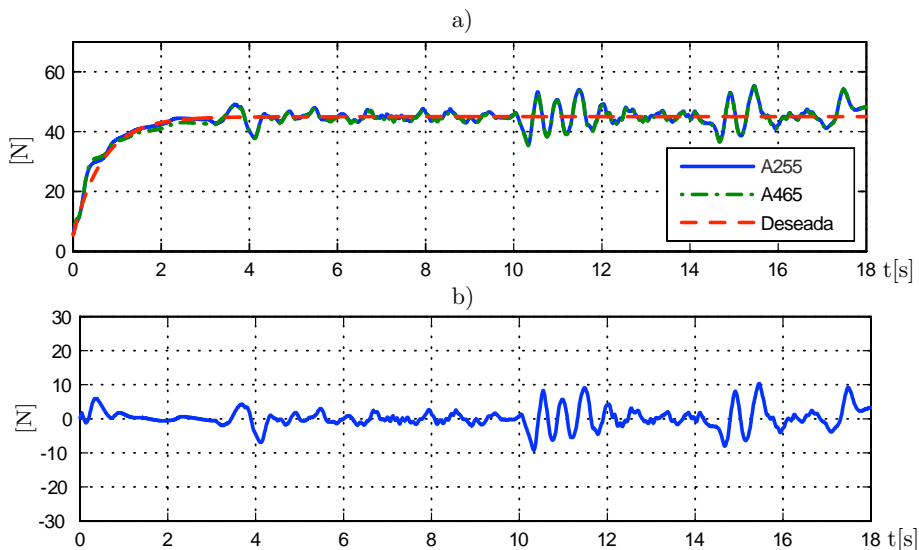


Figura 5.13: Control descentralizado: trayectoria de fuerza con el primer operador. a)  $\hat{\lambda}_s$ , b)  $\Delta\lambda_s$

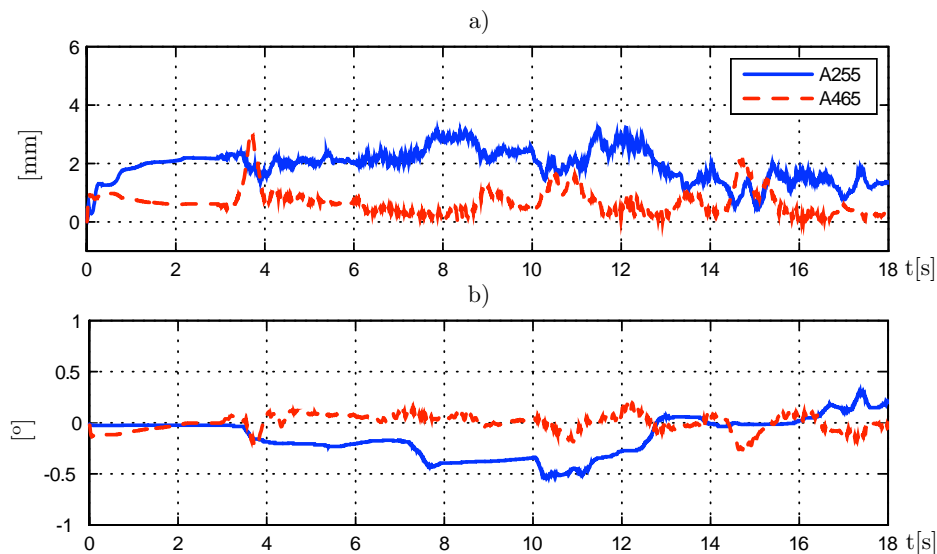


Figura 5.14: Control descentralizado: norma del error cartesiano y error de orientación con el primer operador. a)  $\|\mathbf{p}_{si}\|$ , b)  $\Delta\phi_{si}$

La norma del error de posición en coordenadas cartesianas así como el error de orientación se muestran en la Figura 5.14. La línea continua corresponde al robot A255, la

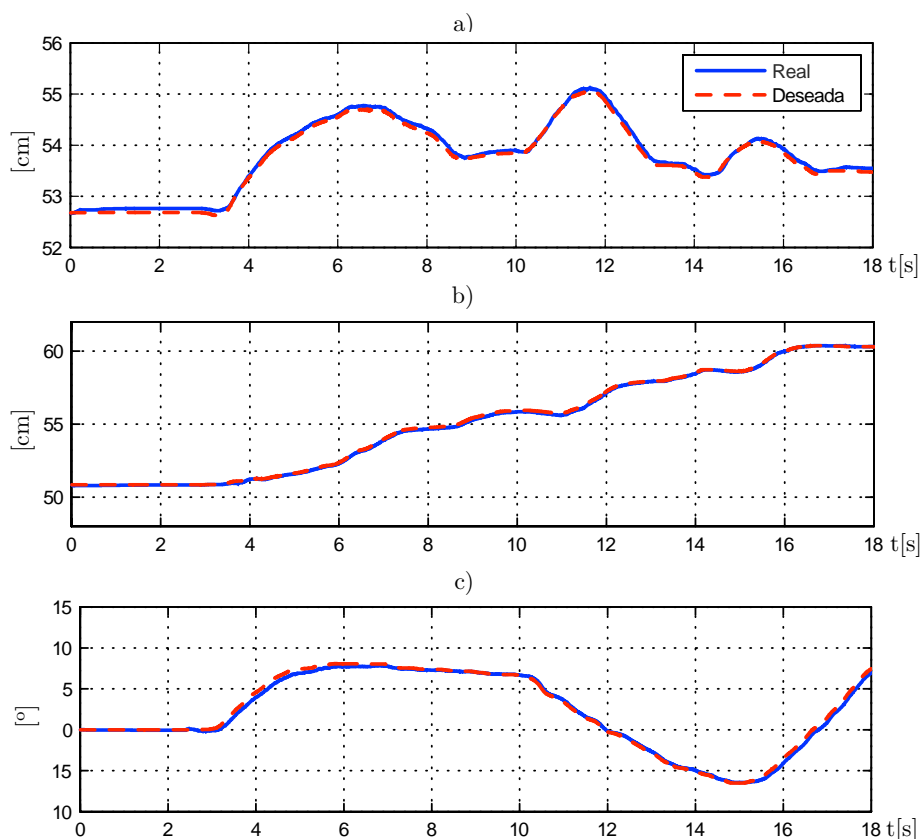


Figura 5.15: Control descentralizado: trayectoria del objeto generada por el segundo operador.  
a)  $x_s$ , b)  $y_c$  y c)  $\phi_c$

línea punteada corresponde al robot A465. El valor máximo de la norma del error fue de 5 milímetros mientras que el error máximo de la orientación fue 1.8 grados y se presentan al final del experimento.

La Figura 5.15 muestra la trayectoria generada por el segundo operador. Las trayectorias de las fuerzas de agarre y sus respectivos errores se muestran en la Figura 5.16. De manera similar al experimento con el primer operador, el error de fuerza se mantuvo en un rango de  $\pm 6$  Newtons. Con lo cual se logró un agarre rígido.

Finalmente, la norma del error de posición en coordenadas del espacio cartesiano así como el error de orientación se muestran en la Figura 5.17. El error máximo de la norma del error de posición fue de 5.8 milímetros y para la orientación el error máximo que se obtuvo fue de 1.9 grados.

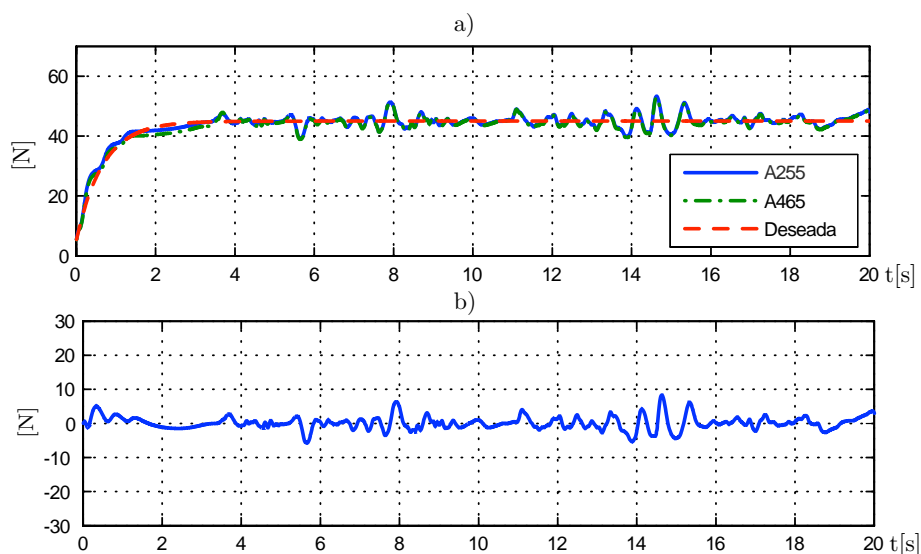


Figura 5.16: Control descentralizado: trayectoria de fuerza con el segundo operador. a)  $\hat{\lambda}_s$ , b)  $\Delta\lambda_s$

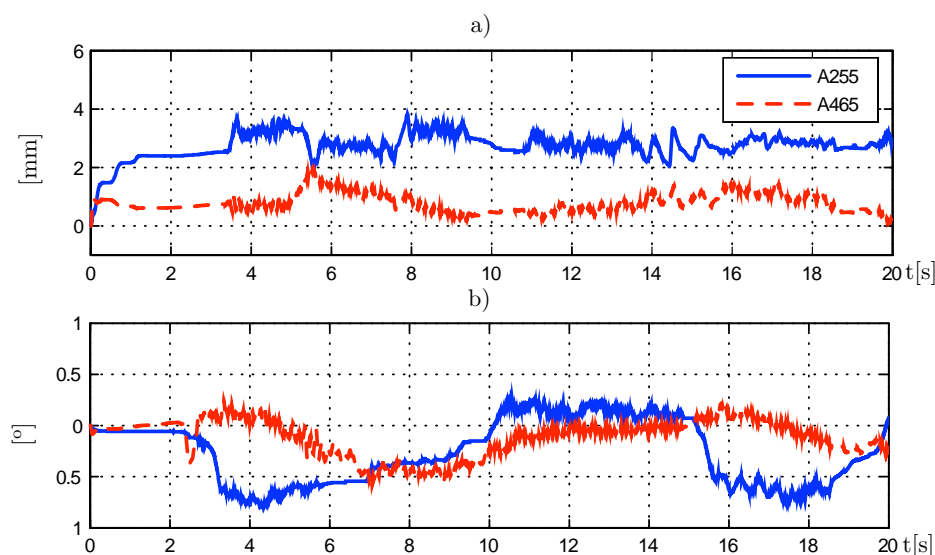


Figura 5.17: Control descentralizado: norma del error cartesiano y error de orientación con el segundo operador. a)  $\|p_{si}\|$ , b)  $\Delta\phi_{si}$

Al comparar las Figuras 5.4(a), 5.7(a), 5.14(a) y 5.17(a) se observa que el desempeño en el subsacio de posición del esquema de control centralizado y descentralizado fueron muy similares. Para compensar las dinámicas no modeladas y mejorar el desempeño del esquema de control descentralizado se requiere incrementar las ganancias  $\gamma_{si}$  y  $\mathbf{K}_{vsi}$ . Sin embargo, debido a la discretización del esquema de control para su implementación no fue posible utilizar valores más grandes para las ganancias antes mencionadas. Por otro

lado, al comparar las Figuras 5.3, 5.6, 5.13 y 5.16 se observa que el control descentralizado muestra un mejor desempeño en el subespacio de fuerza. Por lo tanto, se concluye que la inclusión de la función tangente hiperbólica en el algoritmo de control descentralizado mejora el desempeño en el subespacio de fuerza. Esto se debe a que para errores grandes de la variable  $\Delta F_{si}$ , el término  $\tanh(\Delta F_{si})$  en (4.33) permanece acotado y no crece en forma lineal como en el caso del control descentralizado (ver ecuación (3.29)). Como se observa en las Figuras 5.13 y 5.16 se obtuvo un pequeño error entre las fuerzas de agarre  $\lambda_{s1}$  y  $\lambda_{s2}$ , por lo que no se logró un equilibrio de fuerzas como en el caso del control centralizado. Este desequilibrio de fuerzas ocasionan movimientos no deseados en el objeto. Sin embargo, dichos movimientos fueron compensados por el algoritmo de control descentralizado.

## Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de investigación se estudio el problema de manipulación diestra de objetos de forma remota. Para resolver el problema planteado se propuso un esquema de teleoperación formado por un manipulador maestro y dos manipuladores esclavos, los cuales, se analizaron como un sistema robótico cooperativo. Además, se establecieron las condiciones que debe cumplir la fuerza de contacto para garantizar un agarre rígido.

Para lograr una manipulación diestra es necesario controlar de forma precisa la posición de los manipuladores así como la fuerza de contacto ejercida por los mismos. Para resolver el problema de control se propuso en primera instancia un control adaptable centralizado basado en el Principio de Ortogonalización cuyas ventajas se mencionan a continuación:

- i)* La fuerza ejercida por los manipuladores esclavos hacia el objeto se puede controlar de forma independiente a su posición. Esto permite trasladar y rotar el objeto y al mismo tiempo ejercer la fuerza necesaria para lograr un agarre rígido.
- ii)* Solo requiere la medición de un sensor de fuerza para su implementación.
- iii)* No requiere conocer los parámetros dinámicos de los manipuladores y el objeto.
- iv)* Los errores posición y fuerza convergen a cero de forma asintótica.

La desventaja principal es que el algoritmo de control no se puede implementar de forma independiente para cada robot, ya que el controlador requiere la medición de posición y velocidad angular de ambos manipuladores. Además, se propuso un observador de velocidad lineal de alta ganancia para el robot maestro, el cual no requiere conocimiento del modelo dinámico y logra que los errores de observación sean arbitrariamente pequeños. De este modo, se evitó utilizar diferenciación numérica para calcular la velocidad deseada para los manipuladores esclavos.

Como segunda solución se propuso un esquema de control descentralizado de posición y fuerza por modos deslizantes de segundo orden. De igual manera se utilizó el Principio de Ortogonalización en el diseño del controlador. Como resultado, los subespacios de posición y fuerza se pueden controlar de forma independiente. Las ventajas del esquema de control descentralizado son:

- i)* No requiere del conocimiento del modelo dinámico de los robots y el objeto.
- ii)* Los errores de posición y fuerza convergen a cero de forma exponencial.

- iii) No requiere comunicación entre los robots, por lo tanto, el esquema de control se puede implementar de forma independiente para cada manipulador.
- iv) El algoritmo de control es robusto ante perturbaciones acotadas.
- v) El par de control está acotado para cualquier valor del vector de estado. Esto evita pares y fuerzas excesivas en las articulaciones que podrían dañar los manipuladores y el objeto.

Su desventaja principal es que requiere dos sensores de fuerza para su implementación. El desempeño de ambos esquemas de control fueron validados mediante experimentos con distintos operadores. En cada caso, se obtuvo un mejor desempeño en el subespacio de posición con respecto al subespacio de fuerza. Esto se debe principalmente a ruido en la medición en los sensores de fuerza e incertidumbre en los parámetros cinemáticos de los manipuladores y el objeto.

Finalmente, para lograr el objetivo de telepresencia, es decir, que le operador pueda sentir el objeto a manipular, se añadió un segundo manipulador maestro al esquema de teleoperación. El algoritmo de control propuesto para los maestros recrean la fuerza de contacto ejercida por los esclavos hacia el objeto. Además, en esta configuración el operador puede generar la fuerza de agarre deseada (esquema de teleoperación bilateral).

El trabajo futuro comprende:

- Analizar los retardos en el canal de comunicación.
- Diseñar un algoritmo de estimación para determinar la masa del objeto y de esta forma aplicar la fuerza de sujeción mínima para lograr un agarre rígido.
- Diseñar algoritmos de control que sean robustos ante incertidumbres en los parámetros cinemáticos de los manipuladores y el objeto.
- Extender la teoría desarrollada para el caso de tres o más manipuladores maestros y esclavos.

Durante este trabajo de investigación se sometieron los siguientes artículos:

1. **Adaptive position/force control for robot manipulators in contact with a rigid surface with uncertain parameters**, Javier Pliego Jiménez & Marco Arteaga-Pérez, *European Journal of Control*, Vol. 22, pp. 1-12, 2015.
2. **On the adaptive control of cooperative robots with time-variant holonomic constraints**, Javier Pliego Jiménez & Marco Arteaga Pérez. Aceptado en *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*.
3. **Telemanipulation of cooperative robots: a case of study**. Javier Pliego Jiménez & Marco Arteaga Pérez. Sometido a *International Journal of Control*

## Teoremas auxiliares

**Teorema A.1.** (*Khalil, 2002, pp. 172*)

Sea  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$  una región que contiene el origen y sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{x})$  es una función positiva definida y  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es una función continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Considérese la región  $\mathfrak{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$  para algún  $r > 0$ . Supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{A.3})$$

Entonces, para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisfice

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{A.4})$$

existe un tiempo  $T \geq 0$  (que depende de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisface

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.5})$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \quad \forall t \leq t_0 + T. \quad (\text{A.6})$$

donde  $\beta$  es una función clase  $\mathcal{KL}$ . Mas aún, si  $\mathcal{D} = \mathfrak{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (A.5) y (A.6) se satisfacen para cualquier estado inicial  $\|\mathbf{x}(t_0)\|$  sin importar que tan grande sea  $\mu$ .

□

**Teorema A.2.** (*Khalil, 2002, pp. 323*)

Sea  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$  una región que contiene al origen  $\mathbf{x} = 0$ . Supóngase que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Además, supóngase que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0})$  es uniformemente acotada para toda  $t \geq 0$ . Sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq W_2(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$  donde  $W_1(\mathbf{x})$  y  $W_2(\mathbf{x})$  son funciones continuas positivas definidas y  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua positiva semidefinida en  $\mathcal{D}$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathfrak{B}_r \subset \mathcal{D}$  y sea  $r < \min_{\|\mathbf{x}\|=r} W_1(\mathbf{x})$ . Entonces todas las soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  con  $\mathbf{x}(t_0) \in \{\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_r | W_2(\mathbf{x}) \leq r\}$  están acotadas y se satisface

$$W_3(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Más aún, si todas las suposiciones son válidas globalmente y  $W_1(\mathbf{x})$  es radialmente no acotada la afirmación es válida para toda  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathfrak{R}^n$ .  $\square$



# Bibliografía

- F. Abdelhedi, Y. Bouteraa, & N. Derbel. Second order sliding mode based synchronization control for cooperative robot manipulators. *Advances and Applications in Nonlinear Control Systems*, pages 669–683, 2016.
- C. Aldana, E. Nuño, & L. Basañez. Bilateral teleoperation of cooperative manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4274–4279, 2012.
- M. A. Arteaga-Pérez & R. Kelly. Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2):297–308, 2004.
- R. Bacocco & C. Melchiorri. LQ control design of cooperative teleoperation systems. *International Conference on Advanced Robotics*, pages 1–6, 2009.
- R. G. Bonitz & T. C. Hsia. Internal Force-Based Impedance Control for Cooperating Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):78–79, February 1996.
- F. T. Buzan & T. B. Sheridan. A model-based predictive operator aid for telemanipulators with time delay. *Proceedings of the IEEE International conference on systems, man and cybernetics*, 1(138-143), 1989.
- F. Caccavale, P. Chiacchio, A. Marino, & L. Villani. Six-dof impedance control of dual-arm cooperative manipulators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 13(5), October 2008.
- C. Carignan & P. Olsson. Cooperative control of virtual objects over the internet using force-reflecting master arms. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2:1221–1226, April 2004.
- N. Chopra, M. W. Spong, S. Hirche, & M. Buss. Bilateral teleoperation over internet: the time varying delay problem. *Proceedings of the IEEE American control conference*, 1(155-160), 2003.
- S. Erhart & S. Hirche. Internal force analysis and load distribution for cooperative multi-robot manipulation. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(5):1238–1243, 2015.
- K. Furuta, K. Kosuge, Y. Shiote, & H. Hatano. Master-slave manipulator based on virtual internal model following control concept. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 567–572, 1987.

- W. Griffin, W. Provancher, & M. Cutkosky. Feedback strategies for telemanipulation with shared control of object handling forces. *Presence-Teleoperators and Virtual Environments*, 14(6):720–731, 2005.
- J. Gudiño-Lau & M. A. Arteaga-Pérez. Dynamic model and simulation of cooperative robots: a case study. *Robotica*, 23:615–624, 2005.
- W. Gueaieb, S. Al-Sharhan, & M. Bolic. Robust computationally efficient control of cooperative closed-chain manipulators with uncertain dynamics. *Automatica*, 43:842–851, 2007.
- B. Hannaford. Stability and performance tradeoffs in bilateral telemanipulation. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3:1764–1767, 1989.
- G. Hirzinger, J. Butterfass, M. Fischer, M. Grebenstein, M. Hahnle, H. Liu, I. Schaefer, & N. Sporer. A mechatronics approach to the design of light-weight arms and multifingered hands. *In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 46–54, 2000.
- R. Howe & M. Cutkosky. Practical force-motion models for sliding manipulation. *International Journal of Robotics Research*, 15(6):557–572, 1996.
- R. Howe & D. Kontarinis. Task performance with a dexterous teleoperated hand systems. *Proceedings of SPIE*, 1833:199–207, 1993.
- H. Hu, J. Li, Z. Xie, H. Liu, & G. Hirzinger. A robot arm/hand teleoperation system with telepresence and shared control. *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 1312–1217, 2005.
- R. Kelly, V. Santibañez, & A. Loría. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer, 2005.
- H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Third Edition edition, 2002.
- O. Khatib, K. Yokoi, K. Chang, D. C. Ruspini, R. Holmberg, & A. Casal. Coordination and decentralized cooperation of multiple mobile manipulators. *Journal of Robotics Systems*, 13(11):755–764, 1996.
- D. Lee & M. Spong. Bilateral teleoperation of multiple cooperative robots over delayed communication networks: Theory. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 360–365, 2005.
- S. Lee, S. Park, M. Kim, & C. W. Lee. Design of a force reflecting master arm and master hand using pneumatic actuators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2574–2579, 1998.
- L.H. Liu & S. Arimoto. Adaptive and nonadaptive hybrid controllers for rheonomically constrained manipulators. *Automatica*, 34(4):483–491, 1998.

- Y. Liu & S. Arimoto. Distributively controlling two robots handling an object in the task space without any communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(8):1193–1198, 1996.
- Y. H. Liu, S. Arimoto, V. Parra-Vega, & K. Kitagaki. Decentralized Adaptive Control of Multiple Manipulators in Cooperations. *International Journal of Control*, 67(5):649–673, 1997.
- P. Malysz & S. Sirouspour. Cooperative teleoperation control with projective force mappings. *IEEE Haptics Symposium*, pages 301–308, 2010.
- P. Malysz. & S. Sirouspour. Trilateral teleoperation control of kinematic redundant robotic manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 30:1643–1664, 2011.
- J. Manrique. Modelos dinámicos para la descripción de operadores humanos en el análisis de sistemas de telemanipulación. *Tesis de Maestría*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- J. C. Martínez-Rosas, M. A. Arteaga-Pérez, & A. M. Castillo-Sánchez. Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements. *Automatica*, 42(2):329–336, February 2006.
- F. Miyazaki, S. Matsubayashi, T. Yoshimi, & S. Arimoto. A new control methodology toward advanced teleoperation of master-slave robot systems. *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3:997–1002, 1986.
- F. Mobasser & K. Hashtrudi-Zaad. Transparent Rate Mode Bilateral Teleoperation. *The International Journal of Robotics Research*, 27(1):57–72, 2007.
- R. Monfaredi, S. Rezaei, & A. Talebi. A new observer-based adaptive controller for cooperative handling of an unknown object. *Robotica*, pages 1–27, 2014.
- J. Moreno-Valenzuela, V. Santibañez, & R. Campa. On output feedback tracking control of robot manipulators with bounded torque input. *International Journal of Control Automation and Systems*, 6(1):76–85, 2008.
- G. Niemeyer & Jean-Jacques E. Slotine. Designing force reflecting teleoperators with large time delays to appear as virtual tools. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3(2212-2218), 1997.
- E. Nuño, R. Ortega, & L. Basañez. An adaptive controller for nonlinear teleoperators. *Automatica*, 46(1):155–159, 2010.
- E. Nuño, L. Basañez, & R. Ortega. Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, 47:485–495, 2011.

- R. Ortega, M. W. Spong, E. Nuño, & L. Basañez. Position tracking for non-linear teleoperators with variable time delay. *The International Journal of Robotics Research*, 28(7):895–910, 2009.
- G. Palli, S. Pirozzi, C. Natale, G. de Maria, & C. Melchiorri. Experiments of fine manipulation tasks with dexterous robotic hands. *Meccanica*, 50(1):2767–2780, 2015.
- V. Panwar, N. Kumbar, & J. H. Borm. Adaptive Neural Controller for Cooperative Multiple Robot Manipulator System Manipulating a Single Rigid Object. *Applied Soft Computing*, 12:216–227, 2012.
- J. Park & O. Khatib. A Haptic Teleoperation Approach Based on Contact Force Control. *The International Journal of Robotics Research*, 25(5-6):575–591, 2006.
- V. Parra-Vega, A. Rodríguez-Angeles, S. Arimoto, & G. Hirzinger. High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 32:235–254, 2001.
- J. Pliego-Jiménez & M. A. Arteaga-Pérez. On the adaptive control of cooperative robots with time-variant holonomic constraints. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, pages 1–18, 2016.
- J. Pliego-Jiménez & M.A. Arteaga-Pérez. Adaptive position-force control for robot manipulators in contact with a rigid surface with uncertain parameters. *European Journal of Control*, 22:1–12, 2015.
- I. G. Polushin, S. N. Dashkovskiy, A. Takhmar, & R. V. Patel. A small gain framework for networked cooperative force-reflecting teleoperation. *Automatica*, 49:338–348, 2013.
- Y. Ren, Y. Liu, M. Jin, & H. Liu. Biomimetic object impedance control for dual-arm cooperative 7-dof manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, 75:273–287, 2016.
- J. C. Rivera-Dueñas & M. Arteaga-Pérez. Robot force control with dynamic model: theory and experiments. *Robotica*, 31(1):149–171, 2012.
- A. Rodríguez-Angeles, M. A. Arteaga-Pérez, R. Portillo-Velez, & C. Cruz-Villar. Transparent bilateral master-slave control based on virtual surfaces: stability analysis and experimental results. *International Journal of Robotics and Automation*, 30(2):128–139, 2015.
- J. Rodríguez-Seda, D. Lee, & M. W. Spong. Experimental comparison study of control architectures for bilateral teleoperators. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(6):1304–1318, 2009.
- S. E. Salcudean. Control for teleoperation and haptic interfaces. *Control Problems on Robotics and Automation*, 230:51–66, 1998.

- S. A. Schneider & R. H. Cannon. Object Impedance Control for Cooperative Manipulation: Theory and Experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(3):383–394, 1992.
- K. Shimoga. Robot grasp synthesis algorithms: A survey. *International Journal of Robotics Research*, 15(3):230–266, 1996.
- B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, & G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer-Verlang, 2009.
- J.J. Slotine & W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- M. Spong, W. Hutchinson, & M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley, 2006.
- Y. Strassberg, A. A. Goldenberg, & J. K. Mills. A new control scheme for bilateral teleoperating systems: Performance evaluation and comparison. *Proceedings of the IEEE International conference on intelligent robots and systems*, 2:866–872, 1992.
- D. Sun, F. Naghdy, & H. Du. Application of wave-variable control to bilateral teleoperation systems: A survey. *Annual Reviews in Control*, 38(1):12–31, 2014.
- M. Svinin, K. Ueda, & M. Kaneko. On the liapunov stability of multi-finger grasps. *Robotica*, 18:59–70, 2000.
- J. Li J. Li. Tavakoli & Q. Huang. Stability of cooperative teleoperation using haptic devices with complementary degrees of freedom. *IET Control Theory and Applications*, 8(12):1062–1070, 2014.
- T. Tsumugiwa, R. Yokogawa, & K. Yoshida. Stability analysis for impedance control of robot for human-robot cooperative task system. *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3883–3888, October 2004.
- L. Turki & P. Goiffet. On grasp synthesis and planing of multifingered robot hands for a telemanipulation task. *International Workshop on Robot and Human Communication*, pages 141–146, 1995.
- C. Tzafestas, S. Velanas, & G. Fakiridis. Adaptive impedance control in haptic teleoperation to improve transparency under time-delay. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 212–219, May 2008.
- J. T. Wen & K. Kreutz-Delgado. Motion and force control of multiple robotic manipulators. *Automatica*, 28(4):729–743, 1992.
- H. J. Yeo, B. J. Yi, & S. R. Oh. A single closed-loop kinematic chain approach for a hybrid control of two cooperating arms with a passive joint: An application to sawing task. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(1):141–151, February 1999.

- Y. Yokokohji & T. Yoshikawa. Bilateral control of master-slave manipulators for ideal kinesthetic coupling- formulation and experimet. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(5), 1994.
- T. Yoshikawa. Multifingered robot hands: Control for grasping and manipulation. *Annual Reviews in Control*, 34:199–208, 2010.
- T. Yoshikawa & X. Z. Zheng. Coordinated dynamic hybrid position/force control for multiple robot manipulators handling one constrained object. *The International Journal of Robotics Research*, 12(3):219–230, 1993.