



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Detección de un Estado Enredado con Cuatro Mediciones

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTADA POR:

Alicia Dorantes Bravo

TUTOR

Dr Edna Magdalena Hernández González



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno. Apellido Paterno Apellido Materno Nombre(s) Teléfono Universidad Facultad Carrera Número de Cuenta	Dorantes Bravo Alicia 55 39 17 31 77 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 307088237
2. Datos del tutor. Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno	Doctora Edna Magdalena Hernández González
3. Datos del sinodal 1. Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno	Doctor José Ignacio Jiménez Mier y Teán
4. Datos del sinodal 2. Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno	Doctora Laura Natalia Serkovic Loli
5. Datos del sinodal 3. Grado Nombres(s) Apellido Paterno Apellido Materno	Doctor Alfred Barry U'ren Cortés
6. Datos del sinodal 4. Grado Nombres(s) Apellido Materno	Doctor Naser Qureshi

*Agradecimientos*

*En esta tesis quiero agradecer a varias personas que me apoyaron en la realización de esta. Quiero comenzar agradeciendo a una amiga y una excelente persona la cual me enseñó muchas cosas a lo largo del trayecto de estas tesis la Dra Edna Magdalena Hernández González a su vez aprovecho para agradecer a una persona muy admirable y noble el Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar el cual me ayudo en la realización del experimento y me permitió trabajar en su laboratorio junto con un buen amigo de nombre Raúl Caudillo Viurquez el cual me apoyo. A su vez agradezco a los sinodales por su apoyo en la revisión.*

*A otra persona que quiero agradecer y quizá la más importante ya que si no fuera por el quizá no se hubiera realizado estas tesis es o concluido la carrera, el es un amigo que admiro mucho ya que es una persona brillante y genial de nombre Rodrigo Felipe Elizarraras el cual me ayudo no solo en la tesis si no a lo largo de la carrera a solucionar las dudas que fui teniendo. Para finalizar quiero agradecer a mi padre por toda su comprensión, apoyo y amor.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Cuantización del campo electromagnético</b>	<b>1</b>
1.1. Ondas estacionarias . . . . .	1
1.2. Cuantización y estados de Fock . . . . .	3
1.3. Expansión multimodal . . . . .	5
<b>2. Polarización de fotones</b>	<b>9</b>
2.1. Polarización clásica . . . . .	9
2.2. Ley de Malus . . . . .	11
2.3. Estados cuánticos de polarización . . . . .	12
<b>3. Elementos ópticos no lineales</b>	<b>16</b>
3.1. Conversión Espontánea Paramétrica Descendente . . . . .	16
3.2. Cristal $\beta$ -BBO tipo I . . . . .	17
3.3. Cristal $\beta$ -BBO tipo II . . . . .	18
3.4. Lámina de media onda . . . . .	20
<b>4. Desigualdad de Bell</b>	<b>21</b>
4.1. La Paradoja de "Einstein,Podolsky y Rosen" (EPR) . . . . .	21
4.2. Un estado enredado de Polarización . . . . .	24
4.3. Una teoría local realista de variables ocultas . . . . .	25
4.4. Prueba de la desigualdad de Bell CHSH . . . . .	27
4.5. Detección del estado enredado con cuatro mediciones . . . . .	28
<b>5. Experimento</b>	<b>32</b>
5.1. Violación de la desigualdad de Bell . . . . .	32
5.2. Montaje experimental . . . . .	34
5.3. Ajustado el estado . . . . .	37
5.4. Medición cuántica y partículas entrelazadas . . . . .	38
5.5. Desigualdad de Bell . . . . .	38
5.6. Deteccion del enredamiento usando cuatro mediciones . . . . .	39
<b>6. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>A. Desarrollo Matemático de Probabilidades</b>	<b>44</b>



# Introducción

El enredamiento de partículas es una idea introducida dentro de la física por el famoso experimento planteado por Einstein–Podolsky–Rosen [1]. Es una de las más interesantes características no clásicas de la teoría cuántica. En la mecánica cuántica, se dice que dos partículas están enredadas si sus estados no pueden ser descritos individualmente. Las partículas son por lo menos en su descripción cuántica, inseparables, lo que se puede observar en su comportamiento, por ejemplo, un par de fotones entrelazados puede mostrar una fuerte correlación en la polarización aun cuando cada uno por sí mismo parezca no polarizado.

La propiedad del enredamiento se puede observar más claramente cuando se separan las dos partículas una gran distancia, por ejemplo si una se queda en la Ciudad de México y otra en Beijín. Cuando se mide una propiedad particular en una de las partículas (e.g. el espín, la polarización, etc) y posteriormente se mide la misma propiedad en la otra partícula, el resultado obtenido en la segunda partícula dependerá del resultado obtenido en la primer partícula. Comúnmente tendrán valores complementarios.

Los estados cuánticos se pueden enredar a través de varios tipos de interacción, usualmente por interacciones directas entre partículas subatómicas e.g. conversión espontánea paramétrica descendente [36] , el Honng-Ou-Mandel [37], el uso de un acoplador de fibra óptica para confinar [38] y mezclar los fotones y de puntos cuánticos para atrapar los electrones hasta que ocurre el decaimiento [38], entre otros. El enredamiento se rompe cuando se produce una decoherencia en el enredamiento de las partículas..

El enredamiento cuántico es un recurso físico asociado con correlaciones peculiares no clásicas que es posible obtener en varios sistemas cuánticos. El enredamiento se puede transformar y convertir en un estado puro. Los estados enredados se pueden usar como canales de información cuántica para construir programas computacionales y de criptografía que hagan tareas imposibles de realizar por sistemas clásicos. Por esta razón el objetivo de esta tesis es encontrar un método más rápido que el convencional para determinar si un estado está enredado. En este nuevo método se tomarán únicamente cuatro mediciones lo cual contrasta con las dieciséis mediciones que se necesitan para calcular la desigualdad de Bell [3] . Esta desigualdad es importante en la mecánica cuántica ya que descartó la teoría de variables ocultas la cual supone la existencia de ciertos parámetros desconocidos que serían los responsables de las características estadísticas de la mecánica cuántica. Dichas formulaciones suponen restablecer el determinismo eliminado. Suponen una crítica a la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica, la cual conciben como una descripción incompleta del mundo físico. En el primer capítulo se dan las bases teóricas para la cuanización del campo, se presenta la cuanización, los estados de Fock y la expansión multimodal.

En el capítulo dos se explica brevemente qué es la polarización clásica y cuántica así como la ley de Malus.

Posteriormente el capítulo tres se describen varios elementos ópticos no lineales como son los cristales que presentan conversión espontánea paramétrica descendente, haciendo énfasis en los cristales de borato de bario beta y finalmente se describen las láminas de media onda.

En el cuarto capítulo se habla de la paradoja de Eintein Podolsky y Rosen [1], una teoría de variables ocultas [23] [3], se describe matemáticamente la prueba de la desigualdad de Bell CHSH [23] y la prueba con cuatro mediciones así como el estado enredado de polarización.

Para finalizar, en el capítulo cinco se plantean los experimentos realizados para la elaboración de esta tesis así como los resultados obtenidos y las conclusiones a las que se llegaron.



# Capítulo 1

## Cuantización del campo electromagnético

Las ideas del concepto de fotón fue presentado por los trabajos de Einstein concernientes al efecto fotoeléctrico en 1905, y desde ese entonces ha formado una parte esencial para la comprensión de los fenómenos cuánticos de la luz. Para poder manejar este concepto desde el punto de vista cuántico es necesario cuantizar el campo electromagnético. En este primer capítulo se discute brevemente la cuantización del campo electromagnético.

### 1.1. Ondas estacionarias

Para comenzar el estudio de la cuantización del campo electromagnético consideraremos el problema unidimensional de una región del espacio sin carga eléctrica ni corrientes libres, delimitada por una cavidad rectangular de paredes conductoras y lado  $L$ . De esta forma, las ecuaciones de Maxwell en el vacío, en unidades SI se escriben como [2]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Si desacoplamos sacando el rotacional de las ecuaciones (1.4) y (1.3) y usando la relación  $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ , en este sistema de ecuaciones se obtiene que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  cumplen:

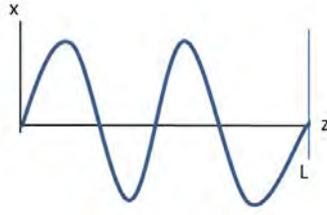
$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

e.i., cada componente cartesiana de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  satisface la ecuación de onda en tres dimensiones  $\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ , con velocidad de propagación  $c$ , con  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

En estas condiciones, una posible solución para la ecuación diferencial del campo eléctrico ecuación (1.5), es una onda monocromática, polarizada en la dirección  $x$ , propagándose en la dirección  $z$ :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{i} E_x(z, t)$ , donde  $\hat{i}$  es el vector unitario en la dirección  $x$  (ver figura 1.1). Donde, debido a las paredes conductoras, tendremos como condiciones en la frontera:  $E_x(0, t) = E_x(L, t) = 0$  para todo  $t$ .

Una solución es

Figura 1.1: Onda estacionaria para  $\vec{E}$ .

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{i}a(t)\text{sen}(kz) \quad (1.6)$$

con  $k = \omega/c$  y  $\omega$  la frecuencia angular de la onda, que por las condiciones de frontera, sólo puede tomar los valores de  $\omega_n = cn\pi/L$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Más adelante se demuestra que requerimos que  $a(t)$  satisfaga la ecuación del oscilador armónico  $\ddot{a} + \omega^2 a = 0$ . La solución mostrada en la ecuación (1.6) representa una familia de ondas estacionarias dentro de la cavidad conductora, una para cada valor de  $k$ , que son los *modos normales* de la ecuación de onda, i.e, soluciones obtenidas gracias al método de separación de variables.

Ahora para obtener el campo magnético que corresponde a la solución (1.6), utilizamos la ecuación de Maxwell (1.4) y se observa que se cumple

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

donde implica que

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{j} \frac{\dot{a}(t)\cos(kz)}{\omega c} \quad (1.7)$$

$\hat{j}$  es el vector unitario en la dirección  $y$ .

Lo que sigue es encontrar el hamiltoniano de la solución estacionaria dada por (1.6) y (1.7), para lo cual requerimos la densidad de energía  $U$  del campo electromagnético, que en general es [8]

$$U = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \|\vec{B}\|^2 \right) \quad (1.8)$$

con  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente. Al sustituir las expresiones para  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en (1.6) y (1.7) obtenemos:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left( a^2 \text{sen}^2(kz) + \frac{\dot{a}^2 \cos^2(kz)}{\omega^2} \right)$$

Integrando la expresión anterior dentro del volumen total  $V$  delimitado por una cavidad, obtenemos el hamiltoniano del sistema

$$H = \frac{\epsilon_0 V}{4} \left( \frac{\dot{a}^2}{\omega^2} + a^2 \right) \quad (1.9)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable en la ecuación (1.9)

$$\begin{aligned} q(t) &= a(t) \sqrt{\frac{V\epsilon_0}{2\omega^2}} \\ p(t) &= \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

obteniendo que:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (1.11)$$

donde la ecuación (1.11) es el hamiltoniano para un oscilador armónico simple con masa  $m = 1$ , con  $q(t)$  y  $p(t)$  jugando el papel de la coordenada y momento generalizados respectivamente. Notamos que se cumplen las ecuaciones de Hamilton [8] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= p = \dot{q} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} &= -\omega^2 q = \ddot{q} = \dot{p} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Con esto hemos visto que el problema de una onda estacionaria es formalmente equivalente al de un oscilador armónico con  $m = 1$ , con coordenada y momento generalizados dados por (1.10). Ahora lo que sigue de la cuantización del campo electromagnético es llevar a cabo la ‘cuantización canónica’ para después utilizar los resultados del oscilador armónico cuántico, que es lo que se realizara en el siguiente subcapítulo.

## 1.2. Cuantización y estados de Fock

Ahora cuantizaremos el modo normal del campo en coordenadas canónicas a operadores:  $(q(t), p(t)) \rightarrow (\hat{q}(t), \hat{p}(t))$  y afirmaremos que se cumple la relación conmutativa canónica entre ellas [5, 6]

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.13)$$

El Hamiltoniano mostrado en la ecuación (1.11) se puede escribir en terminos de  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (1.14)$$

En este caso, los operadores correspondientes para  $E_x$  y  $B_y$  serán

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \text{sen}(kz) \hat{q}(t) \\ \hat{B}_y(z, t) &= \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\text{cos}(kz)}{\omega c} \hat{p}(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

En estas últimas expresiones usaremos el esquema de Heisenberg [7] [6] para la mecánica cuántica en donde unicamente los operadores dependen del tiempo <sup>1</sup>. Este problema se puede resolver de manera idéntica al de un oscilador armónico [7] [6] cuántico, los eigenvalores de la energía, están dados por

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.16)$$

En particular, para  $n = 0$  tenemos la energía base  $E_0 = \hbar\omega/2$ .

Los eigenestados con valor de energía  $E_n$ , que escribimos como  $|n\rangle$ , son llamados *estados de Fock* [7] [6] [5] y cumplen la relación:

---

<sup>1</sup>En este planteamiento, la ecuación que deben de cumplir los operadores que ahora dependen del tiempo que corresponde a las variables observables de un sistema, es:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) - \frac{i}{\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}(t)]$$

con  $\hat{H}(t)$  el hamiltoniano [7] [6] del sistema y  $\hat{A}(t)$  el operador en cuestión.

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (1.17)$$

Estos estados de Fock no sólo son eigenestados de  $\hat{H}$ , sino que también lo son del *operador de número*  $\hat{n}$ , el cual se define a través de los operadores  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  como  $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ; para ver esto, definimos  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ , conocidos también como operadores de creación y aniquilación o de asenso y descenso [5] con esto:

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (1.18)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (1.19)$$

Donde observamos que:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2 - \hbar\omega)$$

De modo que podemos escribir al hamiltoniano (1.14) en términos de  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  como:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.20)$$

utilizando (1.16) se tiene que

$$\left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (1.21)$$

Si utilizamos que  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , obtenemos que:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.22)$$

i.e., los estados de Fock son eigenestados de  $\hat{n}$  con eigenvalor  $n$ .

Regresando a los operadores  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ , vemos que si a la ecuación (1.21) le aplicamos  $\hat{a}$  obtendremos:

$$\hbar\omega \left( \hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle = E_n \hat{a} |n\rangle$$

utilizando el conmutador  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  el cual sale de la ecuación 1.13 y de que  $[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$ , obtenemos [7]:

$$\hat{H}(\hat{a} |n\rangle) = (E_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle \quad (1.23)$$

i.e.  $\hat{a} |n\rangle$  es también un eigenestado de  $\hat{H}$  pero con eigenvalor  $E_{n-1} = E_n - \hbar\omega$ . Análogamente es posible encontrar que  $\hat{a}^\dagger |n\rangle$  es un eigenestado con eigenvalor  $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ . Con estos resultados se puede ver que en general tendremos [6, 7]  $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$  y que  $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ , donde  $\sqrt{n}$  y  $\sqrt{n+1}$  son constantes de normalización; entonces, si a partir del estado base  $|0\rangle$  aplicamos repetidamente  $\hat{a}^\dagger$  podremos escribir cualquier estado de Fock como:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{(n)}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (1.24)$$

Con  $1/\sqrt{n!}$  una constante de normalización [6, 7].

Una característica importante de los estados  $|n\rangle$ , es que al ser eigenestados de un operador hermitiano podemos asegurar que forman un conjunto vectorial completo, al cual lo podemos expresar como [5, 6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (1.25)$$

esto quiere decir que cualquier estado de excitación de un campo puede ser escrito como una combinación lineal de los estados de Fock.

Si utilizamos los operadores de asenso y descenso podemos reescribir a  $\hat{E}_x$  y  $\hat{B}_y$  así

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(z, t) &= E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\text{sen}(kz) \\ \hat{B}_y(z, t) &= iB_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\text{cos}(kz)\end{aligned}\tag{1.26}$$

donde  $E_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0V)^{1/2}$  y  $B_0 = (\mu_0^2\epsilon_0\hbar\omega^3/k^2V)^{1/2}$ ; con la ayuda de esta nueva expresión para los campos, se puede comprobar que su valor esperado para los estados  $|n\rangle$  es igual a cero

$$\begin{aligned}\langle n | \hat{E}_x | n \rangle &= E_0\text{sen}(kz)(\langle n | \hat{a} | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle) = 0 \\ \langle n | \hat{B}_y | n \rangle &= iB_0\text{cos}(kz)(\langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle - \langle n | \hat{a} | n \rangle) = 0\end{aligned}\tag{1.27}$$

en donde utilizamos la propiedad de ortogonalidad de los estados  $|n\rangle$ . Usando este resultado podemos encontrar la incertidumbre, i.e. la desviación estándar, para  $|n\rangle$

$$\begin{aligned}\sigma_E &= (\langle n | E_x^2 | n \rangle)^{1/2} = \sqrt{2E_0}\text{sen}(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \\ \sigma_B &= (\langle n | B_y^2 | n \rangle)^{1/2} = \sqrt{2B_0}\text{cos}(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{1.28}$$

Donde sí la incertidumbre es distinta de cero, para todo  $n$ , quiere decir que el campo *fluctúa*, i.e. que distintas mediciones arrojarán en general distintos valores, notamos que esto es verdad incluso para el caso de  $n = 0$ , lo que se conoce como *fluctuaciones del vacío*.

### 1.3. Expansión multimodal

Lo que nos interesa en esta sección, es llevar a cabo la cuantización del campo multimodal[8] en una cavidad cúbica de lado  $L$  dónde  $L$  es mucho mas grande que la longitud de onda  $\lambda$  y las paredes son totalmente reflejantes; para ello necesitaremos utilizar el potencial vectorial  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  sujeto a la condición de Coulomb:  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . El potencial escalar  $\Phi(\vec{r}, t)$  no nos importa ya que estamos considerando una región libre de fuentes de radiación, lo cual implica que  $\Phi = 0$  [8, 10]. Bajo estas condiciones el potencial vectorial debe cumplir la ecuación de onda homogénea [2, 8, 9]

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\tag{1.29}$$

con esto obtenemos los campos a través de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}\tag{1.30}$$

Impondremos condiciones periódicas a la frontera, lo cual implica que una onda ‘viajera’ deberá cumplir, en la dirección  $x$  que:

$$e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)}$$

lo cual se cumple si  $k_x = 2\pi m_x/L$ , con  $m_x$  entero, lo mismo será también en las otras direcciones, por lo que el vector de onda sólo tomará los siguientes valores

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(m_x, m_y, m_z)\tag{1.31}$$

con  $m_y$  y  $m_z$  enteros.

Ahora podemos hacer una expansión en términos de ondas planas para el potencial vectorial [5, 9]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{k,s} \hat{e}_{ks} \left( A_{ks}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + A_{ks}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \quad (1.32)$$

donde el subíndice  $s = 1, 2$  hace referencia explícita a la posibilidad de dos polarizaciones para las ondas planas y la suma sobre  $k$  es una suma sobre todos los posibles enteros ( $m_x, m_y, m_z$ ). Los vectores  $\hat{e}_{ks}$  son los vectores unitarios en la dirección de polarización de las ondas planas y están restringidos por la condición de Coulomb a cumplir  $\hat{e}_{ks} \cdot \vec{k} = 0$ .

Cada una de las componentes  $A_{ks}(t)$  en (1.32) debe cumplir la ecuación armónica

$$\frac{d^2 A_{ks}}{dt^2} + \omega_k^2 A_{ks} = 0 \quad (1.33)$$

con  $\omega_k = kc$ . La solución a (1.33) es

$$A_{ks}(t) = A_{ks} e^{-i\omega_k t} \quad (1.34)$$

donde definimos  $A_{ks} \equiv A_{ks}(0)$ .

Sustituyendo (1.34) en (1.32) obtenemos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{k,s} \hat{e}_{ks} \left( A_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + A_{ks}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.35)$$

y utilizando (1.30) tenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{k,s} \omega_k \hat{e}_{ks} \left( A_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - A_{ks}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.36)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{k,s} \omega_k (\hat{k} \times \hat{e}_{ks}) \left( A_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - A_{ks}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.37)$$

con  $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ .

Lo que necesitamos ahora es conocer la energía del sistema, para lo que emplearemos de nuevo la ecuación (1.8) y tomamos la integral en el interior de una cavidad de volumen  $V = L^3$ :

$$H = 2\epsilon_0 V \sum_{k,s} \omega_k^2 A_{ks}(t) A_{ks}^*(t) = 2\epsilon_0 V \sum_{k,s} \omega_k^2 A_{ks} A_{ks}^* \quad (1.38)$$

Definimos las nuevas variables  $q_{ks}$  y  $p_{ks}$  a través de las siguientes relaciones

$$A_{ks} = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{1/2}} (\omega_k q_{ks} + i p_{ks}) \quad (1.39)$$

$$A_{ks}^* = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{1/2}} (\omega_k q_{ks} - i p_{ks}) \quad (1.40)$$

y al sustituir en (1.38) obtenemos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,s} (p_{ks}^2 + \omega_k^2 q_{ks}^2) \quad (1.41)$$

Donde  $H$  es la energía para un conjunto de osciladores armónicos simples con frecuencia angular  $\omega_k$  y masa unitaria, de forma que hemos llegado al mismo resultado que cuando solamente consideramos una onda

estacionaria para un campo, así que el camino a seguir será completamente análogo al de las secciones anteriores.

Primero sustituimos las variables  $(q_{ks}, p_{ks}) \rightarrow (\hat{q}_{ks}, \hat{p}_{ks})$  y postulamos las relaciones conmutativas canónicas entre ellas

$$[\hat{q}_{ks}, \hat{p}_{k's'}] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{ss'} \quad (1.42)$$

donde  $\delta_{mn}$  es la delta de Kronecker.

Introducimos los operadores de ascenso y descenso para cada uno de los modos normales (ahora ondas 'viajeras'), definidos de forma análoga a lo anterior

$$\hat{a}_{ks} = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}}(\omega_k\hat{q}_{ks} + i\hat{p}_{ks}) \quad (1.43)$$

$$\hat{a}_{ks}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}}(\omega_k\hat{q}_{ks} - i\hat{p}_{ks}) \quad (1.44)$$

Con lo cual se cumple que:

$$[\hat{a}_{k's'}, \hat{a}_{ks}^\dagger] = \delta_{k'k}\delta_{s's} \quad (1.45)$$

Definiremos al nuevo operador de número para cada uno de los modos normales como  $\hat{n}_{ks} = \hat{a}_{ks}^\dagger\hat{a}_{ks}$ , así que podemos expresar a un hamiltoniano, ya que esta convertido en operador, como

$$\hat{H} = \sum_{k,s} \hbar\omega_k \left( \hat{a}_{ks}^\dagger\hat{a}_{ks} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{k,s} \hbar\omega_k \left( \hat{n}_{ks} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.46)$$

Por simplicidad escribimos para el j-ésimo modo normal  $\hat{n}_j \equiv \hat{n}_{ks}$  y análogamente  $\hat{a}_j^\dagger \equiv \hat{a}_{ks}^\dagger$ ,  $\hat{a}_j \equiv \hat{a}_{ks}$ , esto nos permite escribir (1.46) como

$$\hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \left( \hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (1.47)$$

Para obtener los eigenvalores de (1.46) falta considerar el estado compuesto por los eigenestados de cada modo normal

$$|n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle \dots \equiv |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle \quad (1.48)$$

donde cada  $|n_j\rangle$  cumple

$$\hat{H}_j |n_j\rangle = \hbar\omega_j \left( \hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) |n_j\rangle = E_j |n_j\rangle \quad (1.49)$$

si escribimos (1.48) como  $|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = |\{n_j\}\rangle$ , tendremos que se cumple:

$$\hat{H} |\{n_j\}\rangle = E |\{n_j\}\rangle \quad (1.50)$$

i.e. que (1.48) es un nuevo eigenestado con energía  $E = \sum_j \hbar\omega_j (n_j + \frac{1}{2})$ .

Ahora podemos escribir cualquier estado de Fock a partir del estado base  $|0, 0, 0, \dots\rangle \equiv |\{0\}\rangle$  utilizando al operador de ascenso así

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\{0\}\rangle \quad (1.51)$$

y como cumplen la condición de ortonormalidad

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle = \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots \quad (1.52)$$

también podemos describir un estado cualquiera del campo a través de una combinación lineal de ellos [6]

$$|\varphi\rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots c_{n_1, n_2, \dots} |n_1, n_2, \dots\rangle \equiv \sum_{\{n_j\}} c_{\{n_j\}} |\{n_j\}\rangle \quad (1.53)$$

Para finalizar con la cuantización del campo electromagnético, escribimos las expresiones finales para los operadores correspondientes a  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en términos de los operadores de ascenso y descenso.

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{ks} \left( \frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{e}_{ks} \left( \hat{a}_{ks} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{ks}^\dagger e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.54)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{ks} (\hat{k} \times \hat{e}_{ks}) \left( \frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \left( \hat{a}_{ks} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{ks}^\dagger e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (1.55)$$

Esta es la teoría esencial para poder comprender los conceptos de que se mencionarán en los siguientes capítulos.

## Capítulo 2

# Polarización de fotones

En este capítulo estudiaremos la polarización de la luz con una revisión de la teoría clásica de la misma. Comentaremos posteriormente la contraparte cuántica de la ley de Malus, ya que es la propiedad que utilizaremos para estudiar el estado enredado.

### 2.1. Polarización clásica

Se dice que la luz se encuentra en algún estado de polarización cuando el campo eléctrico que le conforma presenta alguna regularidad o restricción, por ejemplo, la luz con polarización elíptica, en donde el campo eléctrico, se propaga formando una elipse. Otro ejemplo es la luz linealmente polarizada, tiene la particularidad de que su campo eléctrico se encuentra confinado dentro de un plano, llamado *plano de vibración* [12].

En la luz polarizada linealmente el campo eléctrico se encuentra confinado a un plano a lo largo del vector de propagación (ver figura 3.1). I.e.  $\vec{E}$  solamente cambiará su magnitud pero no su dirección, lo cual implica, que si tenemos que la luz se propaga, por ejemplo, en la dirección  $z$ , con un número de onda  $k$ , frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $E_0$ , podrá escribirse como

$$\vec{E}(z, t) = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (2.1)$$

donde la dirección del campo eléctrico es constante en el tiempo, que es en este caso la dirección  $x$ , dada por el vector unitario  $\hat{i}$ . La consecuencia geométrica de esta restricción es que  $\vec{E}$  trazará un segmento de línea recta durante la propagación de la onda, motivo por el cual es llamada *polarización lineal*. A la luz en este estado la llamaremos **P**.

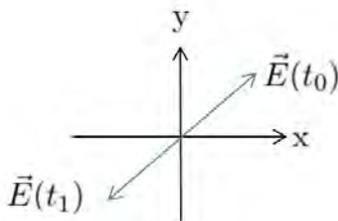


Figura 2.1: Figura 2.1 Polarización lineal. Se muestra a  $\vec{E}$ , en dos tiempos distintos.

Otro ejemplo es la luz elípticamente, que es el caso en que el campo  $\vec{E}$  traza una elipse cuando se le observa desde la dirección de propagación. Para comprender esto, consideramos dos ondas **P**, propagándose en la dirección  $z$  de la forma siguiente:

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (2.2)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = \hat{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \quad (2.3)$$

con  $\hat{j}$  el vector unitario en la dirección  $y$  y  $\epsilon$  la *desfase* entre ambas ondas. De la ecuación (2.2) tenemos que

$$\sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} = \text{sen}(kz - \omega t)$$

y también tenemos que

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \epsilon = -\text{sen}(kz - \omega t) \text{sen}(\epsilon)$$

Sustituyendo y elevando al cuadrado, obtenemos

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \epsilon\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right] \text{sen}^2(\epsilon)$$

Redondeando tenemos

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right) \cos \epsilon = \text{sen}^2(\epsilon) \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) es una elipse, en el plano  $(E_x, E_y)$  y cuyos ejes principales forman un ángulo  $\alpha$  con respecto a los ejes coordenados  $(E_x, E_y)$ , donde

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos(\epsilon)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (2.5)$$

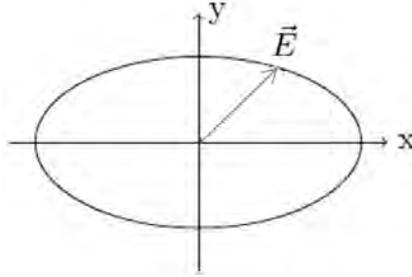


Figura 2.2: Polarización elíptica, con  $\alpha = 0$ .

Consideremos que las dos ondas originales poseen la misma amplitud, i.e.  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  y que el ángulo de inclinación es cero,  $\alpha = 0$ , o de forma equivalente, que  $\epsilon = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2 \dots$ , tenemos:

$$E_y^2 + E_x^2 = E_0^2$$

donde esta ecuación es la ecuación de un círculo, en el mismo plano  $(E_x, E_y)$ . I.e. que como caso particular de la luz con polarización elíptica, se tiene a la luz polarizada circularmente, que se refiere al hecho de que  $\vec{E}$  trazará un círculo durante la propagación de la onda. Más aún, haremos una distinción entre las dos direcciones de giro del campo en este tipo de polarización, denotando a la luz circular dextrógira (i.e. girando en el sentido de las agujas del reloj) y a la levógira (girando contra las manecillas). A estos dos tipos de polarización también se les suele llamar, luz circular derecha **R** e izquierda **L**. También tenemos como caso particular a la luz en estado **P**, cuando  $\epsilon = n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), ya que en este caso, de la ecuación (2.4) implica que:

$$E_y = \pm \frac{E_{0y}E_x}{E_{0x}}$$

Donde esta es la ecuación de una recta (el signo negativo corresponde a  $m$  impar y el signo positivo corresponde a  $m$  par, ).

## 2.2. Ley de Malus

En esta sección nos enfocaremos en cómo se puede producir luz polarización. Existen dispositivos que estan hechos de un material que transmite de forma selectiva una determinada dirección de oscilación del campo eléctrico de una onda electromagnética y tienen la capacidad de transmitir luz polarizada a partir de la incidencia de luz natural, estos son llamados *polarizadores*<sup>1</sup>.

Existen polarizadores de materiales distintos y pueden ser categorizados de acuerdo a cuatro tipos: la *birrefringencia*, la *dispersión*, la *reflexión*, y la *absorción selectiva*[12]. En esta parte de la tesis analizaremos el funcionamiento de acuerdo al mecanismo de la absorción selectiva, el cual se presenta en algunos minerales, como por ejemplos algunos compuestos orgánicos y la turmalina [13]. Sabiendo que la luz natural es una combinación de cualesquiera dos estados  $\mathbf{P}$ , ortogonales, de igual amplitud e incoherentes entre sí i.e ondas cuya diferencia de fase relativa varía en el tiempo [14], se llamara *polarizador lineal* a el dispositivo que permita la transmisión de uno de estos dos estados  $\mathbf{P}$  que conforman a la luz natural. También existen polarizadores *elípticos* y *circulares* que permiten la transmisión de luz con polarización elíptica o circular [12].

Una malla de hebras paralelas entre sí, hechas de algún material conductor es dispositivo que nos puede servir para ilustrar cómo funciona un polarizador lineal. Si sobre dicho dispositivo hacemos incidir luz natural que se propaga en la dirección  $z$  y que escribimos como una combinación de dos estados  $\mathbf{P}$  ortogonales, escogiendo la dirección de uno de éstos como la dirección de las hebras de una malla, la dirección  $y$ , i.e., tendremos los estados  $\mathbf{P}_x$  y  $\mathbf{P}_y$  [12]. Si este haz incide sobre la malla conductora, la componente  $\mathbf{P}_y$ , que será paralela a las hebras, hará que los electrones de ésta comiencen a moverse, generando una corriente y obteniendo así energía del campo eléctrico incidente. Ya que los electrones conductores de la malla sean acelerados por el campo eléctrico, se irradiarán una nueva onda en la dirección  $-z$  y otra en la dirección  $z$ . Con esto la nueva onda irradiada hacia  $z$  tenderá a cancelar la propagación de la onda original en esta dirección, inhibiendo la transmisión en la dirección de las hebras conductoras. Por otra parte, ya que los electrones no pueden moverse más que en la dirección  $y$ , la componente  $\mathbf{P}_x$ , no cambiara, transmitiéndose de manera íntegra. Lo que hemos visto es que al incidir la luz natural sobre una malla conductora el resultado ha sido la transmisión de uno de sus componentes, en este caso,  $\mathbf{P}_x$ , mientras que el otro componente, en la dirección  $y$ , se ha cancelado por completo, i.e. la luz transmitida se encuentra polarizada linealmente.

Ahora analizaremos con más detalle qué ocurre con la onda transmitida por un polarizador. Imaginemos que sobre un polarizador lineal hacemos incidir luz no polarizada. Como ya sabemos que la luz transmitida por dicho polarizador se encontrará en un estado  $\mathbf{P}$ , con una amplitud, digamos,  $E_{01}$ . Si enfrente colocamos otro polarizador lineal, llamado *analizador*, cuyo eje de transmisión forme un ángulo  $\theta$  con el del primero, la luz que transmitirá este analizador estará de nuevo en un estado  $\mathbf{P}$ , pero en la dirección del nuevo eje de transmisión y con una amplitud  $E_{01} \cos \theta$ . Como la irradiancia de un haz con polarización lineal está dada por  $I = \frac{c\epsilon_0}{2} E^2$ , sabiendo esto podemos escribir la irradiancia de la luz transmitida por el analizador como:

---

<sup>1</sup>Si se tiene una fuente luminosa natural, como una vela encendida o una bombilla; dicha fuente está constituida por muchos átomos excitados, los cuales irradian una onda electromagnética polarizada [12]. Las ondas producidas por estas fuentes, no podrán combinarse para dar lugar a una polarización de larga duración ya que su proceso de emisión será altamente irregular, dando lugar, a una polarización 'aleatoria', y haciendo así imposible una descripción detallada de la luz emitida. Es a emisión de una fuente luminosa le llamamos *luz natural*.

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (2.6)$$

con  $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} E_{01}^2$ , la irradiancia máxima posible cuando  $\theta = 0$  [12].

A esta ecuación (2.6) se le conoce como la ley de Malus, la cual nos dice que la irradiancia transmitida por un analizador <sup>2</sup> depende de la alineación entre los ejes de transmisión de éste y el primer polarizador. Si ambos ejes son paralelos i.e.  $\theta = 0$ , la irradiancia original no se verá afectada, pero si están perpendiculares  $\theta = \pi/2$ , la nueva irradiancia será cero.

### 2.3. Estados cuánticos de polarización

En las secciones anteriores tratamos la teoría básica de la polarización desde el punto de vista del electromagnetismo clásico. Ahora reformularemos dicha teoría desde el marco de la mecánica cuántica. Comenzamos introduciendo a el fotón, ya que, un haz de luz polarizada (circular, lineal o elípticamente), está conformado por fotones, que se encuentran en el mismo estado de polarización cuántico [15]. Analizaremos la relación entre la asignación de dichos estados cuánticos de polarización para los fotones y la teoría clásica desarrollada anteriormente, veremos cómo dar interpretación probabilística gracias al principio de superposición cuántica, a cada uno de los fotones polarizados.

Para lograr esto debemos entender la conexión entre el punto de vista cuántico y algunos resultados experimentales de la teoría clásica. Un ejemplo es cuando la luz polarizada linealmente en la dirección  $y$ , perpendicular a la del eje de transmisión de un polarizador lineal, llamémosle  $x$ , incide sobre el polarizador, lo cual ocasiona que la onda sea absorbida totalmente. Si imaginamos a este haz constituido por fotones en un estado cuántico de polarización ‘vertical’, que llamaremos  $|V\rangle$  <sup>3</sup>, donde cada uno de estos fotones será absorbido por el polarizador, por lo cual obtendremos el resultado antes visto. Si el haz está polarizado paralelamente al eje de transmisión, los fotones se encuentran en un estado de polarización ‘horizontal’, llamado  $|H\rangle$ , donde cada uno de ellos atravesará al polarizador, manteniéndose en su estado cuántico original de  $|H\rangle$  <sup>4</sup>, lo cual es lo mismo a que se transmita la onda en su totalidad, como ocurre. Ahora es más interesante considerar el caso de una onda polarizada oblicuamente. Si supongamos que tenemos una onda en un estado  $\mathbf{P}_\theta$ , i.e., formando un ángulo  $\theta$  con respecto al eje del polarizador, pero ¿Qué ocurrirá cuando uno de los fotones de esta onda incida sobre el polarizador? Sabemos que podemos tener un haz polarizado circularmente, hacia la derecha  $|R\rangle$  o la izquierda  $|L\rangle$  pero podemos preguntarnos qué ocurrirá con los fotones que lo conforman al incidir sobre un polarizador lineal. Para entender lo que ocurrirá, es necesario tener en cuenta que los posibles resultados para cualquiera que sea la polarización de uno de los fotones, son solamente dos, ser absorbido o atravesar. Nunca se observa que atraviese una fracción del fotón en un polarizador, independientemente del tipo de polarizador que se utilice y de la polarización que los fotones puedan tener [15, 17].

Cuando se coloca un polarizador lineal de forma que el 100 % de los fotones en el estado  $|V\rangle$  son absorbidos, y el 100 % de los fotones en el estado  $|H\rangle$  atraviesan al polarizador; se dice que dichos estados observables son ortogonales entre sí. Al operador del cual son eigenestados  $|H\rangle$  y  $|V\rangle$ , se le llama *operador de polarización*, denotado por  $\hat{P}_{HV}$  y los eigenvalores correspondientes pueden escogerse como +1 para  $|H\rangle$  y -1 para  $|V\rangle$ , lo cual nos permite escribir al operador de polarización en esta eigenbase como una matriz [4]

$$\hat{P}_{HV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Un analizador es un sistema que polariza la luz de forma circular, lineal o elíptica

<sup>3</sup>Dichos estados son elementos de un espacio de Hilbert de dos dimensiones.

<sup>4</sup>El fotón permanece en este estado ya que al colocar otro polarizador, delante del primero, pasar por el segundo polarizador el 100 % de las veces [16].

Como los estados cuánticos de la luz polarizada son elementos de un espacio de Hilbert [18], podemos expresar la condición de ortogonalidad de estos eigenestados mediante su usual producto punto:  $\langle V|H\rangle = \langle H|V\rangle = 0$ . También, les pediremos a los dos que estén normalizados, i.e.,  $\langle V|V\rangle = \langle H|H\rangle = 1$ . Como los grados de libertad para los estados  $\mathbf{P}$ , son solo dos, vertical y horizontal, se tiene que el espacio de Hilbert es bidimensional. Y como los dos eigenestados son ortonormales entre sí, son candidatos perfectos para conformar una base de un espacio al igual que los estados clásicos de polarización lineal; Lo cual quiere decir que cualquier otro estado de polarización  $|P\rangle$  puede escribirse como una combinación lineal de ellos:

$$|P\rangle = u_1 |H\rangle + u_2 |V\rangle \quad (2.7)$$

Con  $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ , permitiéndolo escribir un estado cualquiera como un vector de dos dimensiones [18]

$$|P\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Podemos escribir cualquier estado de polarización como una superposición de eigenestados la probabilidad de hallar a un fotón en el estado  $|H\rangle$  está dada por

$$P_H = |\langle H|P\rangle|^2 = |u_1|^2 \quad (2.9)$$

y de encontrarlo en el estado  $|V\rangle$

$$P_V = |\langle V|P\rangle|^2 = |u_2|^2 \quad (2.10)$$

Además se debe de cumplir que  $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$ , ya que  $|H\rangle$  y  $|V\rangle$  forman un espacio completo y el fotón debe de encontrarse en *algún* estado. De acuerdo a la representación matricial de  $\hat{P}_{HV}$ , tendremos que el valor esperado para un estado arbitrario es:  $\langle P|\hat{P}_{HV}|P\rangle = |u_1|^2 - |u_2|^2$ .

Un ejemplo es el caso de la luz polarizada diagonalmente e.i., luz linealmente polarizada en una dirección tal que  $\theta = \pm 45^\circ$ , con respecto al eje de transmisión de un polarizador, cuyos fotones están en un estado cuántico denotado por  $|D\rangle$ , y estado ‘antidiagonal’  $|A\rangle$  e.i., aquél estado con  $\theta = -45^\circ$ . Si los fotones en alguno de los dos estados  $|D\rangle$  o  $|A\rangle$ , incide sobre un polarizador a  $0$  o  $90^\circ$ , tendremos una probabilidad de que 50 % sean absorbidos y 50 % sean transmitidos [16]. Lo cual implican que

$$\begin{aligned} \langle D|A\rangle &= \langle A|D\rangle = 0 \\ |\langle D|H\rangle|^2 &= |\langle D|V\rangle|^2 = 1/2 \\ |\langle A|H\rangle|^2 &= |\langle A|V\rangle|^2 = 1/2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ahora  $|D\rangle$  y  $|A\rangle$  se pueden escribir como una combinación lineal de  $|H\rangle$  y  $|V\rangle$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \\ |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde se cumple  $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$ .

Con los coeficientes de los estados  $\mathbf{P}$  de la luz determinados por la dirección de polarización de la onda electromagnética que les corresponde. Si una onda se puede escribir como  $\vec{E}(z, t) = E_o(z, t)\hat{e}_\theta$ , donde el vector director  $\hat{e}_\theta = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$  (ver figura 3.3), entonces tendremos que el estado cuántico correspondiente para los fotones de la onda será:

$$|P_\theta\rangle = \alpha \cos\theta |H\rangle + \beta \sin\theta |V\rangle \quad (2.13)$$

Con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes complejas unitarias.

De  $|P\rangle$  se sigue que la probabilidad de que un fotón sea transmitido por un polarizador horizontal es  $\cos^2 \theta$  y la probabilidad de que sea absorbido es  $\sin^2 \theta$ . Ahora si se incide una cantidad  $N$  de fotones hacia un polarizador, dadas las probabilidades individuales que se mencionaron de cada fotón, se obtendrá que  $N \cos^2 \theta$  fotones sería transmitidas y  $N \sin^2 \theta$  fotones serían absorbidos. Esto nos lleva a la ecuación clásica de Malus, consideramos que  $N$  es proporcional a la irradiación  $[F_\alpha]$ .

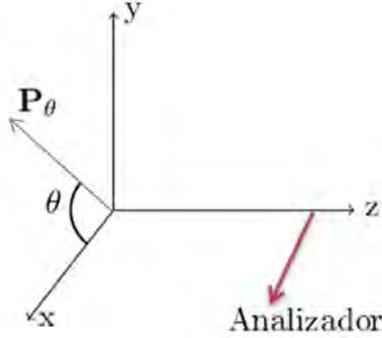


Figura 2.3: Esquema de la ley de Malus.

También existe el caso de los estados  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  de polarización circular. Consideramos en lugar de un polarizador lineal, uno de selección de polarización circular ( $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{L}$ ), ahora sabemos cualquier polarización elíptica, circular o lineal, vista desde la teoría clásica, puede escribirse como una combinación lineal de estados  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{L}$  [12], lo cual nos permite repetir los argumentos hechos para el polarizador lineal y concluir que los estados cuánticos  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  cumplen la condición de ortonormalidad

$$\begin{aligned}\langle R|L\rangle &= \langle L|R\rangle = 0 \\ \langle R|R\rangle &= \langle L|L\rangle = 1\end{aligned}\tag{2.14}$$

Ígualmente que para un polarizador lineal, un polarizador circular al mandadas un fotón en alguno de los estados  $|R\rangle$  o  $|L\rangle$ , 50 % de las veces el fotón será absorbido y el otro 50 % logrará atravesar [16], i.e. para un polarizador cuyos ejes estén alineados en la dirección  $\theta = 45^\circ$  y  $\theta = -45^\circ$  [4]; se cumple:

$$\begin{aligned}|\langle R|H\rangle|^2 &= |\langle R|V\rangle|^2 = 1/2 \\ |\langle L|H\rangle|^2 &= |\langle L|V\rangle|^2 = 1/2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}|\langle R|D\rangle|^2 &= |\langle R|A\rangle|^2 = 1/2 \\ |\langle L|D\rangle|^2 &= |\langle L|A\rangle|^2 = 1/2\end{aligned}$$

Esto nos permite encontrar expresiones para  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$ . Escribiendo  $|L\rangle$  en la base  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  de la siguiente forma:

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\theta} |H\rangle + e^{i\phi} |V\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \left( |H\rangle + e^{i(\phi-\theta)} |V\rangle \right)$$

Como  $|L\rangle$  así, el coeficiente  $e^{i\theta}$  es una fase global del estado, por lo que podemos asignarle cualquier valor a  $\theta$ , en particular  $\theta = 0$ , lo cual nos lleva a obtener:

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle + e^{i\phi} |V\rangle \right)\tag{2.15}$$

Si utilizamos la expresión en la base horizontal-vertical para  $|D\rangle$  obtenemos:

$$|\langle L|D\rangle|^2 = \frac{1}{4} |(\langle H| + e^{i\phi} \langle V|)(|H\rangle + |V\rangle)|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi)$$

Por que  $|\langle L|D\rangle|^2 = 1/2$ , se sigue que  $\phi = \pm\pi/2$ . Y bien, de que  $\langle R|L\rangle = 0$  se puede mostrar que, si escribimos  $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + e^{i\phi'} |V\rangle)$ , se cumplirá  $\phi' - \phi = \pi$ . Por lo tanto, si escogemos  $\phi = \pi/2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i |V\rangle) \\ |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i |V\rangle) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Este tipo de estados los vamos a usar para estudiar la desigualdad de Bell que presentaremos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Elementos ópticos no lineales

En este capítulo se hablará del fenómeno conocido como conversión paramétrica espontánea descendente, o por sus siglas en inglés: SPDC (*Spontaneous Parametric Downw conversion*) el cual fue usado inicialmente para probar la desigualdad de Bell en 1988. Describe cómo funciona el cristal BBO-II o comunmente llamado cristal de Borato de Bario. También se describirá brevemente el funcionamiento de la lámina de media onda.

### 3.1. Conversión Espontánea Paramétrica Descendente

La SPDC se refiere a la creación de un par de fotones a partir de otro fotón, lo cual se logra a través de un mecanismo óptico no lineal. Decimos que este proceso es no lineal debido a que se modifica la frecuencia y esta no puede afectarse mediante procesos ópticos lineales [4]. El proceso de la SPDC inicia con un fotón, llamado fotón fuente, con una frecuencia angular  $\omega_f$ , el cual es absorbido al hacerlo incidir sobre un cristal no lineal y da como resultado la emisión de dos fotones nuevos, los que son llamaremos *señal* y *testigo*. Estos dos nuevos fotones se crean casi simultáneamente [26, 27]. Véase la figura 3.1

Al utilizar los estados de Fock y los operadores de asenso y descenso, podemos representar la SPDC de un fotón fuente de la siguiente manera [5]

$$|1\rangle_f |0\rangle_s |0\rangle_t \rightarrow \hat{a}_f \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_t^\dagger |1\rangle_f |0\rangle_s |0\rangle_t = |0\rangle_f |1\rangle_s |1\rangle_t \quad (3.1)$$

Con los subíndices  $s$ ,  $f$  y  $t$  la representación de los fotones fuente, señal y testigo.

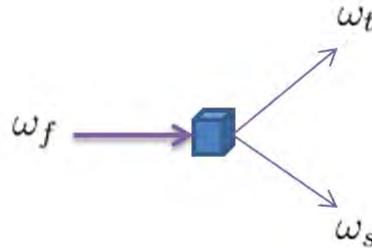


Figura 3.1: La creación de los fotones señal y testigo.

La energía está determinada por la frecuencia de los fotones  $E = \hbar\omega$ . Por la ley de conservación de la energía se debe cumplir que :[28, 29]

$$\begin{aligned} \hbar\omega_f &= \hbar\omega_s + \hbar\omega_t \\ \omega_f &= \omega_s + \omega_t \end{aligned} \quad (3.2)$$

Con  $\omega_s$  y  $\omega_t$  las frecuencias de los fotones señal y testigo. Esto se muestra en la figura 3.2 mediante uno de los *diagramas de energía*. En estos diagramas la línea horizontal ininterrumpida representa un nivel atómico basal, mientras que las líneas punteadas representan una combinación energética de los fotones del campo incidente y estos estados [30].

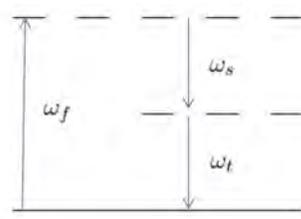


Figura 3.2: Diagrama de energía para la SPDC .

El momento  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  también deberá de conservarse, por lo que como segunda restricción se tiene que los vectores de onda ( $k$ ) deben cumplir:

$$\begin{aligned}\hbar\vec{k}_f &= \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_t \\ \vec{k}_f &= \vec{k}_s + \vec{k}_t\end{aligned}\quad (3.3)$$

Recordamos que la relación entre el vector de onda y el índice de refracción del medio no lineal, para un fotón fuente, está dada por  $k_i = n_i\omega_i/c$ , donde  $i$  puede ser sustituida por  $f, s$  ó  $t$

La conversión paramétrica descendente (SPDC) puede ser entendida como el proceso temporal inverso de la generación de suma de frecuencias (SFG)[1] . En la SFG, dos rayos de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se juntan en un cristal no lineal que carece de simetría de inversión. El cristal actúa como una colección de iones en potenciales anarmónicos. Cuando se dirigen  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , los iones oscilan con varias componentes de frecuencia incluyendo la suma de frecuencias  $\omega_1 + \omega_2$ . Cada ion radía a esta frecuencia (entre otras). La adición coherente de la luz de cada ion en el cristal conduce a la interferencia constructiva solo para ciertas direcciones del rayo y ciertas polarizaciones. La condición para que la interferencia sea constructiva es llamada: el requerimiento de "emparejamiento de fases", dentro del cristal los vectores de onda, de los rayos de entrada se deben sumar y dar como resultado los vectores de los rayos de salida. En la SPD, el láser violeta introduce al cristal la suma de frecuencias y luz convertida por conversión parametricamente descendente tendrá como frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  cuya suma es igual a  $\omega_0$  .

Dentro de los cristales que presentan conversión espontánea paramétrica descendente se encuentran los cristales de Borato de Bario Beta ( $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> ). Existen dos tipos de cristales  $\beta$ -BBO dependiendo de la coincidencia de fase (phase matching), la cual puede ser tipo I o tipo II.

### 3.2. Cristal $\beta$ -BBO tipo I

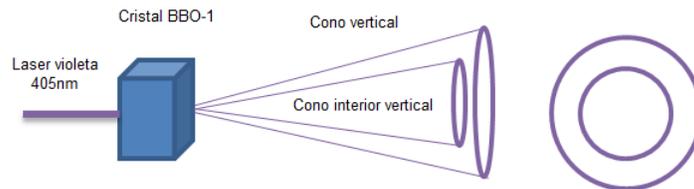


Figura 3.3: Esquema de conversión espontánea paramétrica descendente en cristales no lineales tipo I

En el cristal tipo 1 la dirección de polarización de los fotones señal y testigo es la misma y ésta depende de la orientación del cristal en donde éstos se generan, además cuando se tiene una eficiencia máxima, la polarización de éstos será perpendicular a la de los fotones fuente. Notemos que dada la forma de las restricciones (3.2) y (3.3), las frecuencias y los vectores de onda de la señal y el testigo no están restringidas de manera individual, sino sólo su suma; esto quiere decir que los ángulos de salida de los fotones señal y testigo pueden variar, al igual que su longitud de onda, aunque la variación es en realidad pequeña y podemos suponer que los fotones son emitidos en un cono de luz [4, 27].

### 3.3. Cristal $\beta$ -BBO tipo II

El cristal tipo 2 se distingue del tipo 1 ya que los fotones señal y testigo presentan una polarización ortogonal, esto sucede principalmente en materiales altamente birrefringentes [31]. Los fotones generados son emitidos a lo largo de dos conos debido a efectos birefringentes. La birrefringencia también conocida como doble refracción es una propiedad óptica de ciertos cristales, que consiste en desdoblarse un rayo de luz incidente en dos rayos linealmente polarizados de manera perpendicular entre sí, como si el material tuviera dos índices de refracción distintos. La primera de las dos direcciones sigue las leyes normales de la refracción y se llama rayo ordinario; la otra tiene una velocidad y un índice de refracción variables y se llama rayo extraordinario. Ambas ondas están polarizadas perpendicularmente entre sí. Este fenómeno sólo puede ocurrir si la estructura del material es anisótropa. Si el material tiene un solo eje de anisotropía, la birrefringencia puede describirse asignando dos índices de refracción diferentes al material para las distintas polarizaciones.

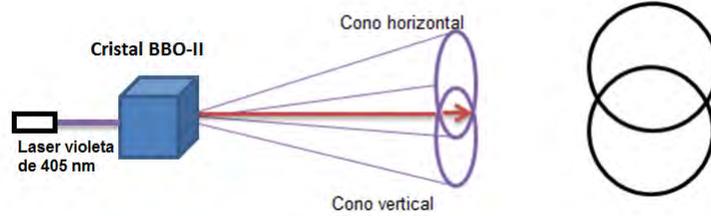


Figura 3.4: Esquema de conversión espontánea paramétrica descendente en cristales no lineales tipo II

$$|V\rangle_p \rightarrow |H\rangle_s |H\rangle_i \quad (3.4)$$

$$|H\rangle_p \rightarrow e^{i\Delta} |V\rangle_s |V\rangle_i$$

Donde  $\Delta$  es una fase debida a la dispersión y a la birefringencia en los cristales. Un cono está formado por la onda ordinaria y el otro por la onda extraordinaria, como se ve en la figura 3.4. Los estados entrelazados se encuentran en la intersección de los conos.

Para crear un estado entrelazado, primero polarizamos linealmente el rayo laser a un ángulo  $\theta_l$  respecto a la vertical y después cambiamos la fase de una de las componentes de polarización por  $\phi_l$  con una lámina de cuarzo birefringente. Los fotones del laser (fotones bombados) están entonces en el estado:

$$|\psi_{pump}\rangle = \cos \theta_l |V\rangle_p + e^{i\phi_l} \sin \theta_l |H\rangle_p \quad (3.5)$$

Cuando alcanzan el cristal los fotones paraméricamente convertidos salen en el estado:

$$|\psi_{DC}\rangle = \cos \theta_l |H\rangle_s |H\rangle_i + e^{i\phi} \sin \theta_l |V\rangle_s |V\rangle_i \quad (3.6)$$

donde  $\phi = \phi_l + \Delta$  es la diferencia de fase total de las dos componentes de polarización.

Colocando polarizadores rotados en ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  en los caminos señal y testigo, respectivamente, medimos

la polarización de los fotones paraméricamente convertidos. Para un par producido en el estado  $|\psi_{DC}\rangle$ , la probabilidad de detección de coincidencia es:

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = |\langle V_\alpha |_s \langle V_\beta |_i |\psi_{DC}\rangle|^2 \quad (3.7)$$

El subíndice  $VV$  en  $P$  indica que la medición resulte en  $V_\alpha V_\beta$ , ambos fotones verticales en las bases de sus respectivos polarizadores. Más general, para cualquier par de ángulos de polarizadores  $\alpha, \beta$ , hay cuatro posibles resultados,  $V_\alpha V_\beta, V_\alpha H_\beta, H_\alpha V_\beta$ , y  $H_\alpha H_\beta$ , indicados por  $VV, VH, HV$  y  $HH$ , respectivamente. Usando las bases de la ecuación 2, encontramos:

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = |\sin \alpha \sin \beta \cos \theta_l + e^{i\phi} \cos \alpha \cos \beta \sin \theta_l|^2 \quad (3.8)$$

ó:

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \theta_l + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \theta_l + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\theta_l \cos \phi \quad (3.9)$$

Un caso especial ocurre cuando  $\theta_l = \pi/4$  y  $\phi = 0$ . En este caso:

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cos^2(\beta - \alpha) \quad (3.10)$$

La cual solo depende del ángulo relativo  $\beta - \alpha$ .

El último término en la ecuación 3.9 es un término cruzado que ocurre debido a la interferencia entre las partes  $H, H$  y  $V, V$  del estado. La  $\phi$  en este término es una función que depende de la longitud de onda del fotón bombeado, del ángulo y la longitud de onda del fotón señal, así como también de las características del cristal. Debido a que el laser tiene un ancho de banda y recolectamos fotones sobre un ángulo sólido finito y un rango de longitud de onda, solo recolectamos sobre un rango de  $\phi$ . Para tomar en cuenta esto, reemplazamos  $\cos \phi$  por su valor promedio  $\langle \cos \phi \rangle = \cos \phi_m$  y escribimos:

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \theta_l + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \theta_l + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\theta_l \cos \phi_m \quad (3.11)$$

En nuestro experimento, escogemos un intervalo fijo de toma de datos  $T$  (típicamente en el rango de 0.5-15 s) y registramos el número de coincidencias  $N(\alpha, \beta)$  durante ese intervalo. Asumiendo un flujo constante de pares de fotones, el número recolectado sera:

$$N(\alpha, \beta) = A(\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \theta_l + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \theta_l + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\theta_l \cos \phi_m) + C \quad (3.12)$$

Donde  $A$  es el número total de pares entrelazados producidos, y  $C$  es una compensación debido a las imperfecciones en los polarizadores y el alineamiento de los cristales. Esta compensación es necesaria tomarla en cuenta por el hecho de que algunas coincidencias son observadas incluso cuando los polarizadores son colocados en  $\alpha = 0, \beta = 90$ .

Las características ópticamente no lineales de este tipo de materiales son un reflejo de reaccionan a la polarización eléctrica creada por el campo incidente, por lo que la polarización, o el momento dipolar por unidad de volumen  $P(t)$  dentro del material, depende de la intensidad del campo incidente  $E(t)$  como [30]

$$P(t) = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) \dots \right) \quad (3.13)$$

$\chi^{(1)}$  es el factor de susceptibilidad lineal y es el único término presente en los medios ópticamente lineales; el resto de los factores  $\chi^{(2)}, \chi^{(3)} \dots$ , son los factores de susceptibilidad no lineal de segundo orden, tercer orden.... Por simplicidad consideraremos escalares a  $P(t)$  y al campo eléctrico, pero cuando se toma en cuenta su naturaleza vectorial, en la ecuación (3.13) se deberá tomar a  $\chi^{(1)}$  como un tensor de segundo rango, a  $\chi^{(2)}$  como uno de tercer rango, etc. [30]. Para el caso de la SPDC, el término de susceptibilidad que caracteriza a este fenómeno en los medios no lineales es el de segundo orden  $\chi^{(2)}$  [32].

### 3.4. Lámina de media onda

En esta sección describiremos el funcionamiento un elemento experimental usado en el montaje, las *láminas de media onda*, así como el efecto que éstas tienen sobre los estados de polarización de la luz. Las láminas de media onda son instrumentos ópticos llamados *retardadores*, que por lo general son cristales birrefringentes que permiten cambiar el estado de polarización de alguna onda incidente sobre ellos. Como por ejemplo, son capaces de modificar el estado de polarización de elíptico a circular, o uno lineal a uno elíptico, entre otras. El funcionamiento de las láminas de media onda consiste en introducir un cambio relativo de fase entre las ondas generadas de la onda original, haciendo que el tipo de polarización de la onda final emitida sea diferente.

Ahora si suponemos que tenemos una onda incidente sobre un retardador, lo que dara la separación de esta primera onda en dos ondas secundarias [12], llamadas ondas ordinaria y extraordinaria, o simplemente onda-*o* y onda-*e*; estas dos nuevas ondas se verán afectadas por diferentes índices de refracción dentro del material:  $n_e$  y  $n_o$ . Esto probocara un desfaseamiento entre ellas ya que se propagarán a distintas velocidades dentro del material, de tal forma que la onda final emitida a través del retardador, conformada por la superposición de estas ondas secundarias, tendrá una polarización distinta. La diferencia de fase  $\Delta\varphi$  es [12]

$$\Delta\varphi = \frac{d2\pi}{\lambda_0} (|n_o - n_e|) \quad (3.14)$$

con  $d$  la distancia que recorre la onda dentro del material, i.e. su grosor y  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío.

Para nuestro caso, la diferencia de fase entre las ondas secundarias es  $\Delta\varphi = \pi$ . Si supongamos que una onda monocromática linealmente polarizada incide sobre una lámina de media onda y que el plano de vibración de la onda forma un ángulo  $\theta$  con respecto al *eje rápido*<sup>1</sup> de la lámina. La dirección de polarización se verá rotada por un ángulo de  $2\theta$  [12]; figura 4.3. Por lo tanto el efecto neto de la lámina de media onda es rotar la dirección de polarización, manteniendo el estado de polarización lineal de onda incidente [12].

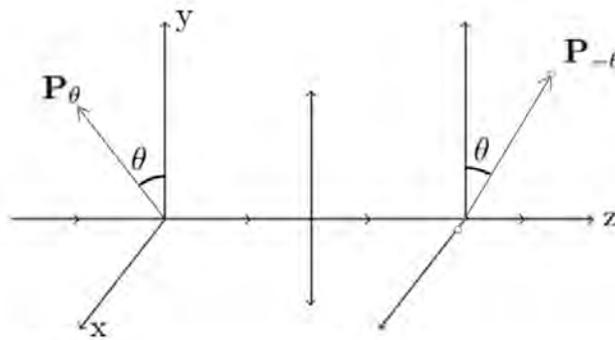


Figura 3.5: Lámina de media onda con eje rápido paralelo a la dirección OY .

<sup>1</sup>El eje rápido es la dirección del eje óptico en un retardador uniaxial negativo [12].

# Capítulo 4

## Desigualdad de Bell

En este capítulo se dará una breve descripción la desigualdad de Bell [3] comenzando por la paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen [1] que es la madre de las ideas que rodean esta tesis. Después se habla brevemente de las ideas más relevantes de esta, como son los estados enredados de polarización: la teoría de variable ocultas. Para finalizar se describirá brevemente el método con cuatro mediciones.

### 4.1. La Paradoja de "Einstein, Podolsky y Rosen" (EPR)

Para explicar la paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen plantearemos el siguiente experimento "pensado" propuesto por Bohm [24] en 1952 basado en la idea de Einstein, Podolsky y Rosen para mostrar que la interpretación ortodoxa de Copenhague de la mecánica cuántica era una descripción incompleta, el cual consiste en lo siguiente: suponga que tenemos una partícula  $\pi^0$  (la cual no tiene Spin alguno), dicha partícula se desintegra en un par positrón-electrón, donde debido a la conservación de momento lineal y momento angular el par producido viaja en direcciones opuestas y con un estado de spin nulo, dicho estado según la teoría del momento angular cuántico para dos partículas debe ser un estado de la forma:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e+\rangle |p-\rangle - |e-\rangle |p+\rangle) \quad (4.1)$$

Donde  $|e+\rangle$ ,  $|e-\rangle$  es el estado en el cual el electrón tiene una componente de spin  $+1/2$ ,  $-1/2$  a lo largo del eje  $z$ , similarmente para los demás términos refiriéndonos a  $p$  por positrón. Ahora supongamos que tenemos a dos observadores, Alice y Bob separados una gran distancia, Alice es encargada de medir la componente de spin del electrón a lo largo de una dirección  $\mathbf{a}$  (esto se puede hacer con un aparato Stern-Gerlach), mientras que Bob es encargado de medir la componente de spin del positrón a lo largo de una dirección  $\mathbf{b}$ , como sabemos en la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, si Alice realiza una medición a lo largo del eje  $z$  y obtiene un valor de  $+1$  el nuevo sistema de ambas partículas pasa a ser  $|\psi\rangle = |e+\rangle |p-\rangle$ , esto afecta las probabilidades de que Bob obtenga un valor  $+1$  (en unidades de  $\hbar/2$ ) a lo largo de  $\mathbf{b}$  de la siguiente manera (imagen 4.1) (estos resultados provienen de la teoría de spin, siendo diferentes para el caso de polarización como se mostrará más adelante):

$$P(\text{Bob mide } +1) = 1/2 \quad (4.2)$$

$$P(\text{Bob mide } +1 | \text{Alice mide } +1) = \text{sen}^2(\theta/2) \quad (4.3)$$

Donde la primera probabilidad corresponde a la probabilidad de que Bob mida  $+1$  si Alice no midiera y la segunda probabilidad es la probabilidad condicional del mismo evento dado que Alice obtuvo un valor de  $+1$  y donde  $\theta$  es el ángulo que forman las direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Este resultado conlleva una idea importante de la mecánica cuántica, en este experimento, la medición de Alice afectó el resultado de la medición de Bob, incluso cuando Alice y Bob se encuentren separados una distancia tan grande que la luz no pudiera haber llegado de Alice a Bob para que las partículas intercambiaran información (a esto se le conoce como la

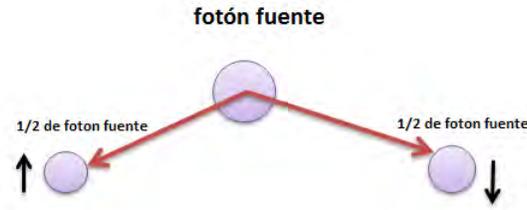


Figura 4.1: Imagen ilustrativa de partículas entrelazadas

paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen, abreviado EPR), esto implica que de alguna manera, el positrón "sabía" la medición que Alice obtendría, y que dicha información estaba presente desde el momento de la desintegración de la partícula  $\pi^0$  y que debía haber alguna variable (llamada por esta razón variable oculta) que describiera el resultado del experimento de forma que sea posible predecir dicho resultado experimental, violando así el fundamento probabilístico intrínseco de la mecánica cuántica.

Como el estado de las partículas no se puede describir independientemente al afectar el estado de una partícula se modifica el estado de ambas. Einstein se opuso a la idea de Bohr ya que esta implica que al hacer una medición sobre una partícula la otra se modificaría instantáneamente, permitiendo así intercambiar información más rápido que la velocidad de la luz.

Dos años después del diálogo con Bohr, Einstein, Podolsky, y Rosen (EPR) publican una versión matemática de la misma idea [19]. El documento no sugiere la paradójica acción a distancia, de hecho, supone que tal cosa es imposible. El artículo tenía por objetivo exponer una imperfección esencial de la teoría cuántica. "Cualquier atributo de un sistema físico puede determinarse con precisión sin afectar al sistema, es un elemento de la realidad física y una descripción del sistema únicamente puede considerarse completa si incorpora todos los elementos de la realidad que pueden atribuirsele [1].

Debido a que la teoría cuántica no permite contener ambos aspectos en la descripción del estado de la partícula, tal descripción es incompleta.

EPR concluyeron su artículo con la afirmación de que han demostrado que la función de onda no proporciona una descripción completa de la realidad física y dejan abierta la cuestión de si existe o no tal descripción. [1]

Ha habido intentos de probar que incluso sin requisito de separabilidad o localidad no es posible ninguna interpretación de variables ocultas [22]. Se han examinado estos intentos en otros lugares y han sido encontrados defectuosos [23]. Más aún, ha sido explícitamente construida una interpretación de variable ocultas de la teoría cuántica elemental [24]. Esta interpretación particular tiene ciertamente una marcada estructura no local. De acuerdo con el resultado que se probará en esta tesis, esto es característico de cualquier teoría de este tipo que reproduzca con exactitud las predicciones de la teoría cuántica.

Regresando al ejemplo de un par de partículas de espín  $1/2$  en el estado del singlete de espín y que se mueven libremente en direcciones opuestas estando entrelazadas, estas tienen proyecciones escogidas de los espines  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Si midiendo la proyección  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$ , se obtiene el valor  $+1$ , entonces, según la mecánica cuántica, la medida de  $\sigma_2 \cdot \mathbf{a}$  debe arrojar el valor  $-1$ , y viceversa (esto es fácilmente comprobable bajo la teoría de espines). Ahora haremos la suposición propuesta unos párrafos arriba en la cual supondremos que ya que el estado de las partículas parece modificarse independientemente de la distancia de separación, existen ciertos parámetros o variables desconocidas desde la creación de las partículas que si las conociéramos podríamos determinar las medidas esperadas por Alice y Bob.

Sean  $\lambda$  los parámetros ocultos que efectúan la mencionada especificación como los desconocemos los consideraremos aleatorios ya que pueden cambiar de una circunstancia a otra. Resulta indiferente para lo que sigue que  $\lambda$  denote una sola variable o un conjunto de variables, o incluso un conjunto de funciones, y que las variables sean discretas o continuas. No obstante, escribimos  $\lambda$  como si fuera un solo parámetro continuo. Denotaremos el resultado obtenido por Alice de medir  $\sigma_1 \cdot a$  como  $A$  la cual viene entonces determinado por  $a$  y  $\lambda$  y el resultado obtenido por Bob de medir  $\sigma_2 \cdot b$  como  $B$  y  $\lambda$  cumpliendo que:

$$A(a, \lambda) = \pm 1, \quad B(b, \lambda) = \pm 1. \quad (4.4)$$

La hipótesis esencial es que el resultado  $B$  para la partícula 2 no depende del dispositivo  $a$ , i.e del iman para la partícula 1, ni el  $A$  de  $b$ , ya que todos estos están especificados completamente por  $\lambda$  que a pesar de considerarla aleatoria por ser desconocida, a partir de estas, se puede especificar el valor de las mediciones. Si  $\rho(\lambda)$  es la distribución de probabilidad de  $\lambda$ , entonces los valores esperados del producto de las componentes  $\sigma_1 \cdot a$  y  $\sigma_2 \cdot b$  es:

$$\langle (\sigma_1 \cdot a)(\sigma_2 \cdot b) \rangle = \langle A(a, \lambda)B(b, \lambda) \rangle = P(a, b) = \int \rho(\lambda)A(a, \lambda)B(b, \lambda)d\lambda \quad (4.5)$$

Siendo esta cantidad medible a partir de la recolección de los datos de Alice y Bob sacando simplemente el promedio de la multiplicación de sus resultados.

Puesto que  $\rho$  es una distribución de probabilidad normalizada,

$$\int \rho(\lambda)d\lambda = 1 \quad (4.6)$$

y por estar en el singlete, cuando Alice mide en la misma dirección  $\mathbf{b}$  que Bob se cumple que ambas medidas son opuestas, es decir:

$$A(b, \lambda) = -B(b, \lambda) \quad (4.7)$$

Sustituyendo esto en  $P(a, b)$  obtenemos: [23]

$$P(a, b) = - \int \rho(\lambda)A(a, \lambda)A(b, \lambda)d\lambda \quad (4.8)$$

Como la dirección  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son escogidas por Alice y Bob, podemos hacer lo mismo para una tercera orientación  $\mathbf{c}$  y obtener  $P(a, c)$ , restandolos y usando que  $A(b, \lambda)^2 = 1$  obtenemos :

$$P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda)[A(a, \lambda)A(b, \lambda) - A(a, \lambda)A(c, \lambda)]d\lambda = - \int \rho(\lambda)A(a, \lambda)A(b, \lambda)[1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)]d\lambda \quad (4.9)$$

[23]

ademas notemos que  $1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda) \geq 0$  y que  $A(a, \lambda)A(b, \lambda) = \pm 1$ , usando esto y sacando el valor absoluto de ambos lados obtenemos:

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq \int d\lambda \rho(\lambda)[1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)]. \quad (4.10)$$

Distribuyendo la integral, notamos que el primer término es 1, por ser  $\rho(\lambda)$  distribución de probabilidad y el segundo término de la derecha es  $P(b, c)$ , por lo que:

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c) \quad (4.11)$$

La ecuación 4.11 es conocida como la Desigualdad de Bell. No esta de más recapitular las hipótesis usadas para llegar a esta ecuación, se supuso que las variables  $A$  y  $B$  tienen valores de  $\pm 1$ , que cuando se

medían en mismas direcciones se obtenían valores opuestos, y por último, la existencia de unas variables  $\lambda$  desconocidas la cual, dados los  $\lambda$ ,  $A$  y  $B$  quedan definidos.

En este punto nos regresamos a la teoría cuántica de espines la cual nos da como resultado <sup>1</sup>:

$$\langle (\sigma_1 \cdot a)(\sigma_2 \cdot b) \rangle = \langle A(a, \lambda)B(b, \lambda) \rangle = -a \cdot b = -\cos(\theta) \quad (4.12)$$

[23] Donde  $\theta$  es el ángulo que forman las direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

Supongamos ahora con esta idea en mente que indicamos a Alice que ponga su detector en la dirección  $\mathbf{a}$ , 90 grados respecto a la vertical y a Bob en la dirección  $\mathbf{b}$  paralela a la vertical (i.e 90 grados respecto a la de Alice) y que midan (i.e. que obtengan el valor experimental de  $P(a, b)$ ). Posteriormente le pedimos a Bob que gire el detector 45 grados respecto a la horizontal y que mida nuevamente, obteniendo el valor experimental de  $P(a, c)$ . Por último cambiamos las direcciones  $\mathbf{b}$  para Alice y  $\mathbf{c}$  para Bob obteniendo así su valor experimental de  $P(b, c)$ .

Como se expresó arriba, los valores esperados predichos por la teoría cuántica de espines para este experimento sería:

$$P(a, b) = -\cos(90) = 0$$

$$P(a, c) = -\cos(45) = P(b, c) = -0.707$$

Donde se ve que:

$$0.707 = |P(a, b) - P(a, c)| > 1 + P(b, c) = 0.293$$

[23]

Si al realizar sus mediciones y promedios, Alice y Bob encontraran los valores predichos por la mecánica cuántica se violaría la desigualdad de Bell siendo esto indicativo de que una de las hipótesis usadas para llegar a dicha desigualdad es errónea. La única incertidumbre en la teoría planteada es la existencia de las variables  $\lambda$  que determinan el sistema por completo, concluyendo así que dicha hipótesis tiene que ser descartada.

En una teoría en la que se añaden parámetros a la mecánica cuántica para determinar los resultados de medidas individuales, sin cambiar las predicciones estadísticas, debe existir un mecanismo por el que la colocación de un aparato de medida puede influir en el resultado proporcionado por otro instrumento no importa lo remoto que se encuentre. Además la señal involucrada ha de propagarse instantáneamente, de modo que tal teoría no podría ser invariante Lorentz.

## 4.2. Un estado enredado de Polarización

Considere un sistema mecánico-cuántico que consiste de dos fotones correlacionados, llamados , el fotón “señal ” y el fotón “testigo”. Los fotones se dirigen en direcciones diferentes, y por lo tanto pueden ser tratados como partículas distinguibles. Asumimos que los fotones tienen el estado de polarización:

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle_s |V\rangle_i + |H\rangle_s |H\rangle_i) \quad (4.13)$$

Donde  $|V\rangle$  y  $|H\rangle$  indican la polarización vertical y horizontal respectivamente y los subíndices indican señal o testigo. Este estado no puede ser descompuesto en un simple producto de estados de señal y testigo:  $|\psi_{EPR}\rangle \neq |A\rangle_s |B\rangle_i$  para cualquier elección de  $|A\rangle_s$  y  $|B\rangle_i$ . Esta no-descomposición significa que el estado de una partícula no se puede especificar sin hacer referencia a la otra partícula. Tales partículas se dice que están ‘enredadas’ y  $|\psi_{EPR}\rangle$  es un estado enredado [3].

<sup>1</sup>recordemos que este resultado es producto de las propiedades particulares del espín y del estado inicial de singlete

Si medimos la polarización de los fotones señal y testigo en la base  $H, V$  hay dos resultados posibles: ambos verticales o ambos horizontales. Cada uno ocurre la mitad de las veces. En vez de esto, podríamos medir las polarizaciones con polarizadores rotados a un ángulo  $\alpha$ . Usamos la base rotada de polarización:

$$|V_\alpha\rangle = \cos \alpha |V\rangle - \sin \alpha |H\rangle \quad (4.14)$$

$$|H_\alpha\rangle = \sin \alpha |V\rangle + \cos \alpha |H\rangle$$

Aquí  $|V_\alpha\rangle$  describe un estado con polarización rotado un ángulo  $\alpha$  respecto a la vertical, mientras que  $|H_\alpha\rangle$  es  $\alpha$  respecto a la horizontal, en esta base, el estado es:

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V_\alpha\rangle_s |V_\alpha\rangle_i + |H_\alpha\rangle_s |H_\alpha\rangle_i) \quad (4.15)$$

Si medimos en la base rotada, obtenemos los mismos resultados: Existe un 50 % de probabilidad de encontrar ambas en el estado  $|V_\alpha\rangle$  y un 50 % de encontrarlas en el estado  $|H_\alpha\rangle$ . Sabiendo esto, podemos medir la polarización señal e inferir con certeza la polarización testigo.

### 4.3. Una teoría local realista de variables ocultas

Einstein creyó que una teoría podría ser encontrada para remplazar a la mecánica cuántica, la cual fuera completa y solo tuviera interacciones locales. Aquí describimos dicha teoría, una "teoría local realista de variables ocultas" (HVT) del inglés Hidden Variable Theory. Esto fue originalmente considerado por Bell [27]. Hacemos énfasis en que esta teoría no es una modificación de la mecánica cuántica (de hecho, está mas cerca a la mecánica clásica). Solo las predicciones de las dos teorías serán similares.

En esta HVT, cada fotón tiene un ángulo de polarización  $\lambda$ , pero esta polarización no se comporta como la polarización en la mecánica cuántica. Cuando un fotón se encuentra con un polarizador colocado a un ángulo  $\gamma$ , siempre se registrará como  $V_\gamma$  si  $\lambda$  esta más cercano a  $\gamma$  que a  $\gamma + \pi/2$ , esto es:

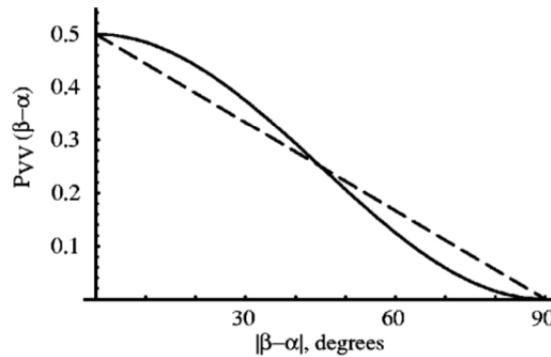


Figura 4.2: Correlaciones de polarización predichas para un estado entrelazado mecánico-cuántico (gráfica sólida)[34] y para una teoría de variables ocultas (gráfica punteada).

$$P_V^{HVT}(\gamma, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\gamma - \lambda| \leq \pi/4 \\ 1 & \text{si } |\gamma - \lambda| > 3\pi/4 \\ 0 & \text{(de otra forma)} \end{cases} \quad (4.16)$$

En cada par, el fotón señal y el testigo tienen la misma polarización  $\lambda_s = \lambda_i = \lambda$ . Como se van produciendo pares,  $\lambda$  cambia en una manera impredecible que uniformemente cubre todo el estado de posibles

polarizaciones.

La cantidad  $\lambda$  es la "variable oculta", un trozo de información que está ausente en la mecánica cuántica. HVT no contienen las características misteriosas de la mecánica cuántica. La teoría es local: los resultados de las mediciones son determinadas por características de objetos presentes en el sitio de la medición. Cualquier medición en el fotón señal (testigo) a determinado por  $\lambda_s$  y  $\alpha$  ( $\lambda_i$  y  $\beta$ ) recordemos  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos de polarización del estado. La teoría es también realista: Todas las cantidades medibles tienen valores definidos, independientemente de nuestro conocimiento de ellas. Además, la teoría especifica todos estos valores (para un  $\lambda$  dado), así que es completa en el sentido del mundo de Einstein. Finalmente, no hay requerimiento que  $\lambda$  sea aleatoria, puede que  $\lambda$  este cambiando en una manera determinista que está por ser descubierta.

Para comparar esta teoría con la mecánica cuántica, necesitamos una predicción para la probabilidad de coincidencia  $P_{VV}^{HVT}(\alpha, \beta)$ . Una coincidencia ocurre cuando  $\lambda$  esta en el estado de tal forma que tanto  $\alpha$  y  $\beta$  están cerca de  $\lambda$ . La probabilidad de esta coincidencia es:

$$P_{VV}^{HVT}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_V^{HVT}(\alpha, \lambda) P_V^{HVT}(\beta, \lambda) d\lambda$$

$$P_{VV}^{HVT}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} - \frac{|\beta - \alpha|}{\pi} \quad (4.17)$$

La ecuación 4.17 y la correspondiente probabilidad de la mecánica cuántica de la ecuación 3.10 son graficadas en la Figura 4.1. Las predicciones son bastante similares, Donde discrepan, la mecánica cuántica predice correlaciones mas fuertes (o anticorrelaciones mas fuertes) que la HVT. En 1964 Bell mostró que es imposible hacerle modificaciones a la HVT para llevarla a una concordancia perfecta con la mecánica cuántica. Obtuvo una desigualdad que todas las HVT obedecen, pero que la mecánica cuántica viola. Usaremos una desigualdad ligeramente diferente predecida por Clauser, Horne Shimony y Holt [34], sin embargo es llamada desigualdad de Bell.

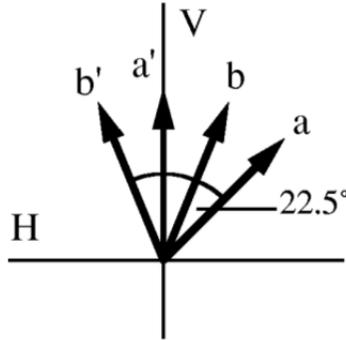


Figura 4.3: Ángulos de polarizador para  $S^{QM}$  máxima [34]

La desigualdad de Bell restringe el grado de correlación de polarización bajo mediciones en diferentes ángulos de polarizadores. La prueba involucra dos mediciones de correlación. La primera es:

$$E(\alpha, \beta) = P_{VV}(\alpha, \beta) + P_{HH}(\alpha, \beta) - P_{VH}(\alpha, \beta) - P_{HV}(\alpha, \beta) \quad (4.18)$$

La medición de  $E(\alpha, \beta)$  incorpora todos los posibles resultados de medición y varia de +1 cuando la polarización siempre concuerda a -1 cuando siempre discrepa. La segunda medición es:

$$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \quad (4.19)$$

Donde  $a, a', b, b'$  son cuatro ángulos diferentes de polarizadores.  $S$  no tiene un significado físico claro, Su importancia proviene de que:

$$|S| \leq 2 \quad (4.20)$$

para cualquier HVT y  $a, a', b, b'$  arbitrarios. esto es probado en el apéndice, y fue originalmente mostrado por Clauser, Hoerne, Shimony y Holt. La mecánica cuántica puede, para ciertas configuraciones, violar esta desigualdad. Si escogemos los ángulos de los polarizadores,  $a = -45, a' = 0, b = 22.5$  y  $b' = 22.5$  como se muestra en la Figura 4.5 , entonces, usando las ecuaciones (3.10, 4.18 y 4.19), encontramos:

$$S^{QM} = 2\sqrt{2} \quad (4.21)$$

Este resultado es específico para el estado  $|\psi_{EPR}\rangle$ . Otros estados dan valores de  $S$  menores. Es interesante notar que para estos ángulos una simple HVT da:

$$S^{HVT} = 2 \quad (4.22)$$

Esta simple HVT imita tan bien como es posible a la luz en la mecánica cuántica.

La desigualdad de Bell muestra que ninguna teoría la cual sea local y realista (o completa en el sentido de EPR) podrá estar de acuerdo con la mecánica cuántica. Ahí permanece la pregunta si la naturaleza concuerda con la mecánica cuántica o con la desigualdad de Bell. Debido a que tenemos una fuente que produce fotones en el estado  $|\psi_{EPR}\rangle$ , podemos medir  $S$ . Si encontramos  $S > 2$ , violaríamos la la desigualdad de Bell y entonces desaprobáramos todas las HVTs. Si encontramos  $S \leq 2$  no podemos concluir nada, ambas, mecánica cuántica y las HVTs son consistentes con este resultado.

#### 4.4. Prueba de la desigualdad de Bell CHSH

Para cualquier HVT, la distribución de una variable oculta  $\lambda$  está descrita por una función  $\rho(\lambda)$ , donde:

$$\rho(\lambda) \geq 0 \quad (4.23)$$

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1 \quad (4.24)$$

Las suposiciones de localidad y realismo están incorporadas en lo siguiente: para el fotón señal, el resultado de la medición está completamente determinado por  $\lambda$  y la mediciones del ángulo  $\alpha$ . Estos resultado son especificados por la función  $A(\lambda, \alpha)$ , la cual puede tomar valores de +1 para la detección de  $V_\alpha$  y -1 para la detección de  $H_\alpha$ . Similarmente, una función  $B(\lambda, \beta)$  describe los resultados para el fotón testigo como +1 para  $V_\beta$  y -1 para  $H_\beta$ . Una HVT podría especificar las funciones  $\rho, A$  y  $B$ .

La probabilidad de un resultado en particular, promediado sobre un ensamble de pares de fotones, esta dada por una integral, En particular:

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \int \frac{1 + A(\lambda, \alpha)}{2} \frac{1 + B(\lambda, \beta)}{2} \rho(\lambda) d\lambda \quad (4.25)$$

$$P_{VH}(\alpha, \beta) = \int \frac{1 + A(\lambda, \alpha)}{2} \frac{1 - B(\lambda, \beta)}{2} \rho(\lambda) d\lambda \quad (4.26)$$

$$P_{HV}(\alpha, \beta) = \int \frac{1 - A(\lambda, \alpha)}{2} \frac{1 + B(\lambda, \beta)}{2} \rho(\lambda) d\lambda \quad (4.27)$$

$$P_{HH}(\alpha, \beta) = \int \frac{1 - A(\lambda, \alpha)}{2} \frac{1 - B(\lambda, \beta)}{2} \rho(\lambda) d\lambda \quad (4.28)$$

Son las probabilidades de encontrar  $V_\alpha V_\beta$ ,  $V_\alpha H_\beta$ ,  $H_\alpha V_\beta$  y  $H_\alpha H_\beta$  respectivamente. Es fácil mostrar que  $E$ , dado por la Ecuación (4.18) es:

$$E(\alpha, \beta) = \int A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \beta)\rho(\lambda)d\lambda \quad (4.29)$$

Definimos la cantidad  $s$ . la cual describe la correlación de polarización en un par simple de partículas:

$$s = A(\lambda, a)B(\lambda, b) - A(\lambda, a)B(\lambda, b') + A(\lambda, a')B(\lambda, b) + A(\lambda, a')B(\lambda, b') \quad (4.30)$$

$$s = A(\lambda, a)[B(\lambda, b) - B(\lambda, b')] + A(\lambda, a')[B(\lambda, b) + B(\lambda, b')] \quad (4.31)$$

Donde  $a, a', b, b'$  son cuatro ángulos como en la ecuación (4.19). Nótese que  $s$  solo puede tomar valores de  $\pm 2$ . El valor promedio de  $s$  sobre un ensamble de pares es:

$$\langle s \rangle = \int s(\lambda, a, a', b, b')\rho(\lambda)d\lambda \quad (4.32)$$

$$\langle s \rangle = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \quad (4.33)$$

$$\langle s \rangle = S(a, a', b, b') \quad (4.34)$$

Y como  $s$  solo puede tomar valores en  $\pm 2$ , su promedio  $S$  debe satisfacer  $-2 \leq S \leq +2$ , la cual es la desigualdad de Bell dada en la Ecuación (4.20).

## 4.5. Detección del estado enredado con cuatro mediciones

En esta sección planteamos un nuevo método para determinar si el estado está enredado el cual puede ser obtenido tomando cuatro mediciones experimentales en pares de fotones entrelazados por polarización.

La polarización de los fotones puede ser escrita en el espacio  $\varepsilon = \{|V\rangle, |H\rangle\}$ , con  $|V\rangle$  y  $|H\rangle$  las polarizaciones vertical y horizontal respectivamente. Otra base útil para  $\varepsilon$  puede ser generada por las rotaciones de  $|V\rangle$  y  $|H\rangle$  :

$$|+\alpha\rangle = \cos\alpha |V\rangle + \sin\alpha |H\rangle \quad (4.35)$$

$$|-\alpha\rangle = -\sin\alpha |V\rangle + \cos\alpha |H\rangle \quad (4.36)$$

donde  $|+\alpha\rangle$  ( $|-\alpha\rangle$ ) representan una polarización a lo largo de el angulo  $\alpha$  ( $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ) con la vertical. En esta base el operador de medición puede ser definido como  $\hat{A}(\alpha) = |+\alpha\rangle\langle+\alpha| - |-\alpha\rangle\langle-\alpha|$ . El estado de polarización para un par de fotones (señal y testigo) puede ser descrito en el espacio  $\varepsilon = \varepsilon_s \otimes \varepsilon_i = \{|VV\rangle, |VH\rangle, |HV\rangle, |HH\rangle\}$ , nos referimos a esta base como la base canónica. Una base equivalente a  $|+\alpha\rangle$  y  $|-\alpha\rangle$  puede ser definida como  $\{|+\alpha+\beta\rangle, |+\alpha-\beta\rangle, |-\alpha+\beta\rangle, |-\alpha-\beta\rangle\}$ , llamamos a esta la base de polarizaciones mixta y la ocupamos para representar el efecto de dos polarizadores, uno para el señal y otro para el foton testigo. En esta base el operador de medición mixto puede ser definido como:

$$\hat{A}(\alpha)\hat{B}(\beta) = |+\alpha+\beta\rangle\langle+\alpha+\beta| - |+\alpha-\beta\rangle\langle+\alpha-\beta| - |-\alpha+\beta\rangle\langle-\alpha+\beta| + |-\alpha-\beta\rangle\langle-\alpha-\beta| \quad (4.37)$$

lo cual da como resultado  $\{(+1, +1)(+1, -1)(-1, +1)(-1, -1)\}$  con probabilidades dadas con  $P_{\pm\pm}(\alpha, \beta) = |\langle \pm_\alpha \pm_\beta | \varphi \rangle|^2$  y  $P_{\pm\mp}(\alpha, \beta) = |\langle \pm_\alpha \mp_\beta | \varphi \rangle|^2$ . Aquí  $|\varphi\rangle$  representa el estado de polarización del par de fotones. En particular estamos interesados en los estados EPR:

$$|\psi^\pm\rangle [ |VH\rangle \pm |HV\rangle ] / \sqrt{2} \quad (4.38)$$

$$|\phi^\pm\rangle [ |VV\rangle \pm |HH\rangle ] / \sqrt{2} \quad (4.39)$$

La desigualdad Bell-CHSH  $|S| \leq 2$  determina si las correlaciones de un sistema entrelazado pueden ser explicados en términos de una teoría de variables locales ocultas o estrictamente como una teoría cuántica. Para ese tipos de desigualdades de Bell el parámetro de Bell

$$S(\alpha, \beta, \alpha' \beta') \equiv E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta') \quad (4.40)$$

nos permite conocer el grado de entrelazamiento de un sistema. Es común definir el coeficiente de correlación como

$$E(\alpha, \beta) = P_{++}(\alpha, \beta) + P_{--}(\alpha, \beta) - P_{+-}(\alpha, \beta) - P_{-+}(\alpha, \beta) \quad (4.41)$$

Para el estado  $|\psi^\pm\rangle$  el coeficiente de correlación es  $E(\alpha, \beta) = -\cos 2(\alpha \pm \beta)$ , por lo tanto el parámetro de Bell esta dado por

$$S_{\psi^\pm} = -[\cos 2(\alpha \pm \beta) - \cos 2(\alpha \pm \beta) + \cos 2(\alpha \pm \beta) + \cos 2(\alpha \pm \beta)]$$

Nótese que el parámetro de Bell solo depende de los ángulos de los polarizadores de prueba  $(\alpha, \beta, \alpha' \beta')$ .  $(\alpha, \alpha')$  son los ángulos de prueba del polarizador del fotón señal, mientras que  $(\beta, \beta')$  son los ángulos de prueba del polarizador del fotón testigo. Los ángulos de prueba pueden ser escogidos de tal forma que la desigualdad Bel-CHSH fuera máximamente violada, así  $|S| = 2\sqrt{2}$ . Es fácil mostrar que para los estados  $|\phi^\pm\rangle$ ,  $S_{\phi^\pm} = -S_{\psi^\pm}$ . El estado entrelazado de fotones de conversión paramétrica descendente generados en un cristal no lineal tipo-II son de la forma

$$|\psi_{DC}^\gamma\rangle = \cos \gamma |VH\rangle + e^{i\Theta} \sin \gamma |HV\rangle \quad (4.42)$$

El procedimiento típico para determinar el parámetro de Bell para estos estados se basa en obtener los coeficientes de correlación mediante la cuenta de coincidencias con un modulo de conteo de fotones. De la ecuación

$$E(\alpha, \beta) = P_{++}(\alpha, \beta) + P_{--}(\alpha, \beta) - P_{+-}(\alpha, \beta) - P_{-+}(\alpha, \beta) \quad (4.43)$$

vemos que son requeridas cuatro mediciones para determinar el coeficiente de correlación. Entonces para obtener el parámetro de Bell es necesario realizar dieciséis mediciones. Una definición alternativa del coeficiente de correlación es <sup>2</sup>

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle \hat{A}(\alpha) \hat{B}(\beta) \rangle - \langle \hat{A}(\alpha) \rangle \langle \hat{B}(\beta) \rangle}{[\hat{A}(\alpha) \hat{B}(\beta)]^{1/2}} \quad (4.44)$$

Para los estados EPR tenemos que  $\langle \hat{A} \rangle = 0$  y  $\langle \hat{A}^2 \rangle = 1$  Ahora definimos el parámetro de polarización diagonal como

$$EB = \frac{P_{++}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + P_{++}(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})}{P_{++}(0, \frac{\pi}{2}) + P_{++}(\frac{\pi}{2}, 0)} \quad (4.45)$$

Para el estado  $|\psi_{DC}^\gamma\rangle$  resulta ser

---

<sup>2</sup>Ecuación propuesta por el Dr Víctor Manuel Velázquez Aguilar

$$EB(\gamma, \theta) = [1 + \text{sen}2\gamma\text{cos}\theta]/2 \quad (4.46)$$

Y definiendo  $\overline{EB} = 1 - EB$  tenemos

$$S_{\psi\gamma DC} = EBS_{\psi+} + \overline{EB}S_{\psi-} \quad (4.47)$$

$\overline{EB}$  debe ser llamado el parámetro de polarización diagonal y puede ser obtenido mediante el intercambio de  $P_{++}(\pi/4, -\pi/4)$  con  $P_{++}(-\pi/4, \pi/4)$  en la ecuación

$$EB = \frac{P_{++}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + P_{++}(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})}{P_{++}(0, \frac{\pi}{2}) + P_{++}(\frac{\pi}{2}, 0)} \quad (4.48)$$

Nótese que EB puede ser determinado experimentalmente realizando tres mediciones con el conjunto de ángulos  $\{(\pi/4, \pi/4), (0, \pi/2), (\pi/2, 0)\}$ . Por otro lado si escogemos la prueba de ángulos  $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$  de tal forma que  $S_{\psi+} = 2\sqrt{2}$  y  $S_{\psi-} = 0$ , y si  $EB = 1/\sqrt{2}$ , entonces tenemos de nuevo  $S_{\psi\gamma DC} = 2$ . Por lo tanto por su relación directa con la desigualdad Bell-CHSH, la desigualdad

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq EB \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.49)$$

es completamente equivalente. Para  $EB < 1 - 1/\sqrt{2}$  ( $1/\sqrt{2} < EB$ ) tenemos que  $|\psi_{DC}^{\gamma}\rangle$  es más cercano a  $|\psi^{-}\rangle$  ( $|\psi^{+}\rangle$ ), y viola la respectiva desigualdad también como la desigualdad Bell-CHSH. El análogo parámetro de polarización diagonal para el estado  $|\phi_{DC}^{\gamma}\rangle$  puede ser obtenido intercambiado  $P_{++}(0, \pi/2) + P_{++}(\pi/2, 0)$  con  $P_{++}(0, 0) + P_{++}(\pi/2, \pi/2)$

Para ver de forma más clara EB usaremos la función SPDC

$$|\psi_{DC}\rangle = \cos\theta_l |H\rangle_s |H\rangle_i + e^{i\phi} \sin\theta_l |V\rangle_s |V\rangle_i \quad (4.50)$$

Donde existe un único caso donde  $\cos\theta_l$  y  $\sin\theta_l$  son iguales ie cuando  $\theta = \pi/4$

$$|\psi_{DC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (4.51)$$

Usando compensadores eliminamos el estado  $e^{i\theta}$  haciendo  $e^{i\theta} = 1$ . Calculamos las probabilidades  $P(0,90)$ ,  $P(90,0)$ ,  $P(45,-45)$ ,  $P(-45,45)$

$$P(0,90) = |\langle H|_s \langle V|_i \psi\rangle|^2$$

Desarrollando los términos dentro del valor absoluto obtenemos

$$\langle H|_s \langle V|_i \psi\rangle = \langle H|_s \langle V|_i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (4.52)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle H|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle H|_s \langle V|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (4.53)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s |V\rangle_i \langle V|_i |H\rangle_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.54)$$

Entonces la probabilidad es

$$P(0,90) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (4.55)$$

Analogamente al paso anterior podemos obtener  $P(90,0)$  Para

$$P(90,0) = |\langle V|_s \langle H|_i \psi\rangle|^2$$

$$\langle V|_s \langle H|_i |\psi\rangle = \langle V|_s \langle H|_i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (4.56)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \quad (4.57)$$

La probabilidad de  $P(90,0)$  es

$$P(90,0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \right| = \frac{1}{2} \quad (4.58)$$

Donde se puede ver que  $P(90,0)=P(0,90)$ . Ahora hacemos lo mismo de forma analoga para  $P(45,-45)$  y  $P(-45,45)$

$$P(45,-45) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s + \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i - \langle V|_i) |\psi\rangle \right|^2 \quad (4.59)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-i\theta} - \frac{1}{8} e^{i\theta} + \frac{1}{8}$$

Como  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$  y  $\text{cos}(-\theta) = \text{cos}(\theta)$

$$= \frac{2}{8} + \frac{1}{8} (-2\text{cos}\theta) = \frac{1}{4} (1 - \text{cos}\theta)$$

Analogamente para  $P(-45,45)$

$$P(-45,45) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s - \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i + \langle V|_i) |\psi\rangle \right|^2 \quad (4.60)$$

$$= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta} \right|^2 = \frac{1}{4} (1 - \text{cos}\theta)$$

Si graficamos  $\frac{1}{4}(1 - \text{cos}\theta)$  nos damos cuenta que en  $\pi$  y  $-\pi$  toma valores de  $1/2$  donde se observa pcm=1 ya que al sustituir en la ecuación (4.48) obtenemos:

$$EB = \frac{P_{++}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + P_{++}(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})}{P_{++}(0, \frac{\pi}{2}) + P_{++}(\frac{\pi}{2}, 0)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

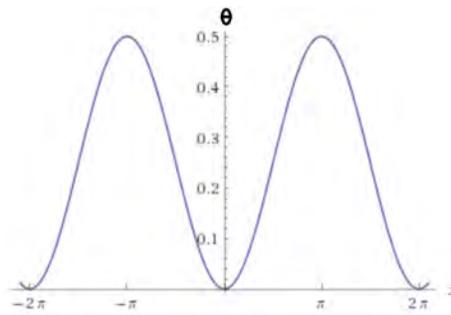


Figura 4.4: Grafica de la función  $\frac{1}{4}(1 - \text{cos}\theta)$

# Capítulo 5

## Experimento

Como vimos en el capítulo 4 se puede determinar que dos fotones están entrelazados si violan la desigualdad de Bell, la cual consta de 16 mediciones. En un esfuerzo por disminuir el tiempo para calcular el parámetro de Bell, se propuso utilizar un método con únicamente cuatro mediciones.

En este capítulo, se explicara a detalle el montaje y la alineación del dispositivo experimental que se realizó para medir el enredamiento de dos fotones entrelazados por medio de la desigualdad de Bell y con el nuevo método con cuatro mediciones. Al final del capítulo se comparan estos dos métodos para determinar la eficacia del método con cuatro mediciones.

### 5.1. Violación de la desigualdad de Bell

Para encontrar las probabilidades  $P$  que componen  $E$ , necesitamos cuatro valores de  $N$  número de coincidencias, específicamente  $P_{VV}(\alpha, \beta) = N(\alpha, \beta)/N_{tot}$ ,  $P_{VH}(\alpha, \beta) = N(\alpha, \beta_{\perp})/N_{tot}$ ,  $P_{HV}(\alpha, \beta) = N(\alpha_{\perp}, \beta)/N_{tot}$  y  $P_{HH}(\alpha, \beta) = N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})/N_{tot}$ , donde  $N_{tot} = N(\alpha, \beta) + N(\alpha_{\perp}, \beta) + N(\alpha, \beta_{\perp}) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})$  es el número total de pares detectados y  $\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}$  son las configuraciones de polarizadores  $\alpha+90$  y  $\beta+90$  respectivamente. En consecuencia para calcular  $E$  requiere medir el número de coincidencias para intervalos iguales de tiempo con los polarizadores colocados en cuatro ángulos diferentes. Midiendo las probabilidades de esta manera hacemos la suposición que el flujo de pares de fotones es el mismo en cada intervalo y no depende de la configuración de los polarizadores. Estas suposiciones son razonables, pero crean una ambigüedad en una prueba experimental. Una HVT, junto con la hipótesis de que la configuración del polarizador influencia la proporción de conversión, podría explicar cualquiera de los resultados que observamos. Sin embargo, para alguien convencido de la localidad y el realismo, una hipótesis de este tipo puede ser más plausible que la alternativa.

$\alpha$	-45	-45	-45	-45	0	0	0	0	45	45	45	45	90	90	90	90
$\beta$	-22.5	22.5	67.5	113	-22.5	22.5	67.5	113	-22.5	22.5	67.5	113	-22.5	22.5	67.5	113

Figura 5.1: Ángulos de los polarizadores  $\alpha, \beta$  que se usan para encontrar la desigualdad de Bell [27]

En la figura 5.1 se muestra los ángulos en los cuales se tomara el número de coincidencias, i.e. el número promedio de veces que fotones de dos diferentes eventos de conversión paramétrica llegarán, puramente por casualidad, dentro del intervalo de coincidencia de cada uno. este ruido de fondo es pequeño, casi constante, y actua de manera que disminuye  $|S|$ . En consecuencia, un valor  $|S| > 2$  no puede ser un artificio del ruido de fondo accidental.

La cantidad  $E(\alpha, \beta)$  requiere cuatro mediciones de  $N$ :

$$E(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta) - N(\alpha_{\perp}, \beta) - N(\alpha, \beta_{\perp}) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})}{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_{\perp}, \beta) + N(\alpha, \beta_{\perp}) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})} \quad (5.1)$$

Como  $S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$  se requiere hacer 16 mediciones. De estos encontramos  $S = 2.307 > 2$ . Hemos violado la desigualdad de Bell. Para estar seguros de este resultado, podemos calcular su incertidumbre estadística. La incertidumbre de la  $i$ th medición  $N_i$  es  $\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i}$  y la incertidumbre en la cantidad  $S$  es [3]

$$\sigma_S = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} \left( \sigma_{N_i} \frac{\partial S}{\partial N_i} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} N_i \left( \frac{\partial S}{\partial N_i} \right)^2} \quad (5.2)$$

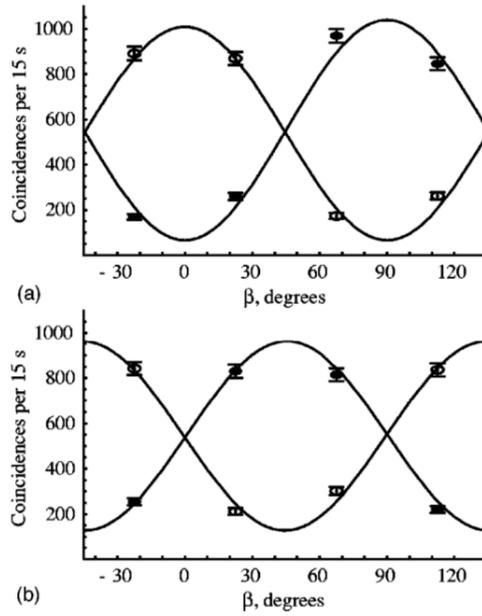


Figura 5.2: Cuentas de coincidencia típicas para una prueba de desigualdad de Bell. (a) círculos abiertos y cerrados muestran  $\alpha = 0, 90$  respectivamente. (b) círculos abiertos y cerrados muestran  $\alpha = 45, 135$  respectivamente. Las barras de error indican mas o menos una desviación estándar estadística de incertidumbre [34]. las curvas son ajustadas a la Ecuación 3.12

Esta suma contiene una gran cantidad de términos y puede ser evaluada por computadora dándonos el valor  $\sigma_S = 0.035$ . Por lo tanto:

$$S = 2.307 \pm 0.035 \quad (5.3)$$

Un violación de la desigualdad de Bell por mas de 18 desviaciones estándar. Este resultado concluyentemente elimina las HVTs, y es consistente con la mecánica cuántica. La Figura 5.1 muestra una comparación de estos datos con la Ecuación 3.12

El significado de una violación de la desigualdad de Bell es un tópico para la filosofía, no para la física experimental. Un buen punto de partida en lecturas sobre filosofía del entrelazamiento [33]. Aun así, haremos algunos comentarios. Estos tienen que ser entendidos como una (quizás idiosincrática) interpretación, mas que cualquier consenso por parte de los filósofos o físicos.

En las HVTs cada resultado de medición puede ser explicado en términos de una realidad fundamental en la cual todas las interacciones son locales. En un ejemplo, todos los posibles resultados son explicados por las polarizaciones de los fotones  $\lambda_s$  y  $\lambda_i$ , y la medición de una no cambia la otra. En luz de la desigualdad

de Bell y sus hallazgos experimentales, esta clase de explicación (no solo un ejemplo en particular) es imposible.

Quizás seamos capaces de conservar unas suposiciones, realismo o localidad, pero no ambas. Cualquier explicación realista debe entonces incluir interacciones no locales, por ejemplo,  $\lambda_s$  puede cambiar en respuesta a una medición realizada en el fotón testigo. Esta explicación parece ser preferida por la mayoría de los investigadores, y una violación experimental de la desigualdad de Bell es descrita algunas veces como "una refutación del principio de localidad". Existe otra posibilidad, uno puede renunciar a la suposición del realismo y decir que no hay una realidad fundamental para explicar las observaciones, solo regularidades estadísticas relacionando resultados medidos, Si una de las metas de los físicos es explicar los mecanismos ocultos de la naturaleza, aceptar esta posición es profundamente decepcionante.

Es interesante notar que un dilema similar concierne la interpretación del vector de estado en la mecánica cuántica. En la interpretación de Copenhague, el vector de estado de un par de partículas entrelazadas cambia instantáneamente sobre mediciones, más aun, puede cambiar en respuesta de una medida hecha en cualquiera de las partículas, esto es, a medidas hechas en lugares diferentes. Si el vector de estado es considerado ser algo real, entonces el colapso del vector de estado es un ejemplo de acción instantánea a distancia. Pero el vector de estado puede ser visto diferente, no más que un aparato para cálculos. Después de todo, no hay manera de medir el vector de estado, solo probabilidades se derivan de él. Como se muestra en la Ecuación (4.35), la probabilidad para cualquier resultado de una sola partícula se comporta localmente. Desde este punto de vista, no hay acción a distancia, pero tampoco hay respuesta a la pregunta de que esta pasando realmente.

## 5.2. Montaje experimental

El montaje experimental consiste en un haz de luz violeta ( $\lambda = 405$  nm, 495 mw, crystalaser IIIb), que se hace incidir sobre una lámina de media onda y posteriormente sobre un cristal BBO-II como vimos en el capítulo anterior. El cristal BBO-II genera dos conos de luz infrarroja ( $\lambda = 810$  nm) por conversión paramétrica descendente, los cuales se intersectan en dos puntos donde suponemos que se encuentran los estados enredados. En las intersecciones se colocaron dos cristales compensadores que son cristales de  $\beta$ -BBO tipo II que por la poca luz que pasa en los conos funciona como retardadores de fase, seguidos de un par de polarizadores. Al final se colocaron un par de diafragmas (iris) para filtrar la luz espacialmente y los fotones se colectaron con un par de lentes acopladas (Thorlab s, F220FCB) a dos fibras ópticas las cuales guían la luz a un detector conocido como fotodiodo de avalancha (APD, del inglés "Avalanche Photodiode"), como se muestra en la imagen 5.3 y 5.4. La señal de los APD es detectada y analizada por una tarjeta<sup>1</sup> controlada por un programa de LabVIEW.

Para alinear este montaje, lo primero que se hace es colocar el láser paralelo a la mesa óptica (NEWPORT RS4000), usando dos pinholes de aproximadamente 1.5 mm. Este atraviesa el cristal BBO-II por el centro de forma ortogonal con el eje rápido en la dirección vertical. Dos conos de 810 nm son producidos por conversión espontánea paramétrica descendente (ver sección 3.4), uno de los conos tiene polarización vertical ( $|V\rangle$ ) y el otro tiene polarización horizontal ( $|H\rangle$ ). Al colocar el cristal con el eje rápido en la dirección vertical aseguramos que las intersecciones entre los dos conos forman un plano paralelo a la mesa y a la altura del láser<sup>2</sup>. Con el fin de buscar la intersección de estos conos para encontrar un estado  $\psi = |V\rangle + e^{i\theta}|H\rangle$  se montaron dos lentes acopladoras sobre dos rieles cuyo eje de rotación se encuentra por debajo del cristal.

Una vez montado en el riel la altura de la lente acopladora se ajusta usando el laser como referencia. Para esto buscamos que la luz del láser atraviese la lente y que su reflejo regrese por el mismo camino del láser. Posteriormente se conecta una fibra óptica a la lente acopladora se alinea dejando

<sup>1</sup>La tarjeta fue creada en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de BUAP (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla) por Sergio Vergara y Aurora Vargas.

<sup>2</sup>Esto fue comprobado por José de Jesús Gutiérrez Castaneda como parte de su tesis de licenciatura [35].

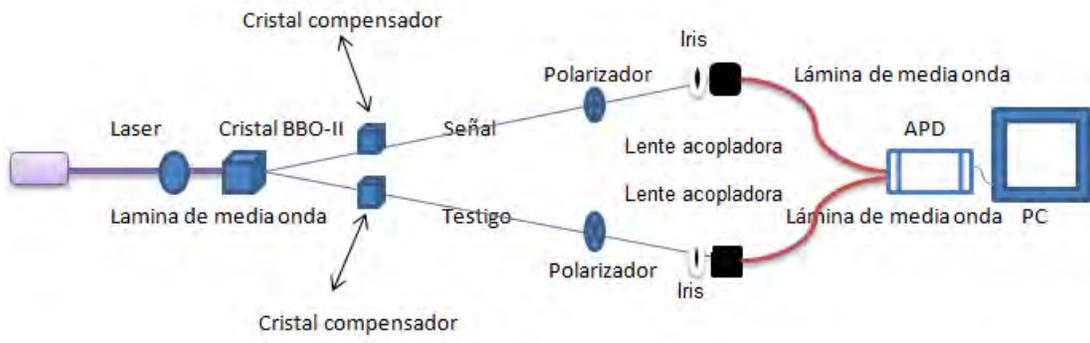


Figura 5.3: Esquema del montaje experimental en el cual un láser de 405 nm, incide sobre una lámina de media onda y un cristal BBO-II, el cual crea un cono de luz, en cada orilla se encuentran los cristales compensadores, los polarizadores, los iris y adelante las lentes acopladoras conectados a los APD por medio de las fibras ópticas y estos a su vez conectados a la PC.

que la luz que pasa por ella sea intensa y concentrada en la menor área posible. Para esto los detectores tienen unos tornillos que al girarlos cambian su inclinación, esto hace que al rotar los tornillos el círculo de luz gire hacia la derecha y la izquierda, al encontrar el punto donde cambia de dirección (izquierda a derecha o derecha a izquierda) se encuentra el punto donde hay una mayor concentración de luz.

Se elimina el ruido luminoso (se apagan las luces y se disminuye el contraste de los monitores), las fibras ópticas se conectan a los APD y estos a la computadora usando una tarjeta contadora que analiza los datos. La tarjeta se controla con un programa de LabVIEW.

Se busca en el canal testigo el mayor número de cuentas de 810 nm que se produzcan aproximadamente a  $5^\circ$  del haz del láser violeta, es decir se busca el lugar donde se intersectan los dos conos. Esto es como medida de seguridad se pone un tornillo en la mesa óptica justo debajo del haz de luz violeta. Al mover el riel con la lente acopladora el número de cuentas va cambiando hasta que se llega a un máximo de cuentas, es ahí donde se encuentra la intersección de los conos. Para perfeccionar se vuelven a mover los tornillos de las lentes acopladoras muy sutilmente para ver si se puede encontrar un número mayor de cuentas.

Después de forma análoga a como se hizo con el canal testigo se busca el máximo del canal señal y que a su vez el número de coincidencias entre el canal señal y el canal testigo se maximice. Esto se logra usando el mismo procedimiento que se usó para hallar el mayor número de cuentas en el canal testigo pero esta vez moviendo el riel correspondiente al canal señal. Con eso logramos encontrar la intersección de los conos en ambos canales.

Lo que sigue es eliminar el desfase entre los dos conos, es decir hacer  $i\theta = 0$  para obtener el estado  $\psi = |V\rangle + |H\rangle$ , los pasos necesarios para lograr este objetivo son los siguientes:

1. Se colocan enfrente de las lentes acopladoras dos iris para disminuir la luz que entra y poder alinear los láseres rojos que se usaran para alinear el resto de los elementos ópticos. Estos se colocan buscando el máximo del número de coincidencias. Cabe mencionar que estos orificios disminuyen mucho el número de cuentas por lo tanto también el número de coincidencias.
2. Se marca el camino que toman los fotones que se encuentran en la intersección de los dos conos infrarrojos, esto se realiza con dos láseres rojos (crystalaser IIIb) que inciden en un divisor de haz,

estos se alinean de tal forma que pasen por el centro del cristal BBO-II, por los iris y que se refleje en el centro de las lentes acopladoras señal y testigo.

3. Se introducen dos cristales no lineales, estos sirven para compensar el desfase entre los conos infrarrojos, uno atrasa a los fotones y el otro los adelanta según como estén colocados. Los cristales compensadores son alineados de forma que el láser rojo los atraviese por el centro de forma ortogonal. Para mejorar este ajuste los cristales compensadores tienen unos tornillos que mueven sutilmente la inclinación, para mejorar la alineación. Se busca el punto donde los dos cristales den un número mayor de coincidencias.
4. Después se colocan los dos polarizadores de forma análoga a los cristales compensadores i.e buscando el camino que sigue la luz de la intersección de los conos.
5. Ya habiendo colocado los polarizadores y los cristales compensadores se comienza a buscar el estado  $i\theta = 0$ , esto se hace girando a los cristales compensadores, de tal forma que el número de coincidencias sea muy parecido a cuando los polarizadores están colocados en los ángulos en  $0, \pi/2$  ó  $\pi/2, 0$  a  $-\pi/4, \pi/4$  ó  $\pi/4, -\pi/4$ . Una vez que se logra esto se efectúa una prueba de la desigualdad de Bell. La prueba se repite hasta encontrar el punto donde se viola la desigualdad de Bell.
6. Después se coloca la lámina de media onda antes del cristal BBO-II, se busca que la luz del láser quede en el centro de forma ortogonal a la lámina. Esta lamina gira el estado de polarización de la luz del láser violeta i.e esta puede crear enredamiento de partículas dependiendo el ángulo en el que esté colocada sin el peligro de desalinear el montaje experimental. Antes de comenzar las mediciones se giró la lámina de media onda hasta encontrar la violación de la desigualdad de Bell de forma similar al paso anterior.



Figura 5.4: Fotografía del experimento en el cual un láser de 405 nm, incidiendo sobre una lámina de media onda y un cristal BBO-II, el cual crea un cono de luz, en cada orilla se encuentran los cristales compensadores, los polarizadores, los orificios y adelante las lentes compensadoras

### 5.3. Ajustado el estado

Para crear el estado  $|\psi_{EPR}\rangle$  necesitamos ajustar los parámetros que determinan la polarización del láser. Primero necesitamos ajustar  $\theta_l$  para igualar las cuentas de coincidencias de  $N(0,0)$  y  $N(90,90)$ . Después colocamos  $\phi_l$  rotando las láminas de cuarzo respecto un eje vertical para maximizar  $N(45,45)$ . Cuando realizamos estas optimizaciones, típicamente recolectamos unos cuantos cientos de fotones por punto, lo que requiere una adquisición en la ventana de tiempo de unos cuantos segundos. Una idea aproximada de la pureza del estado entrelazado puede ser encontrada midiendo  $N(0,0)$ ,  $N(90,90)$ ,  $N(45,45)$  y  $N(0,90)$ . Usando el modelo de la ecuación (3.12), encontramos:

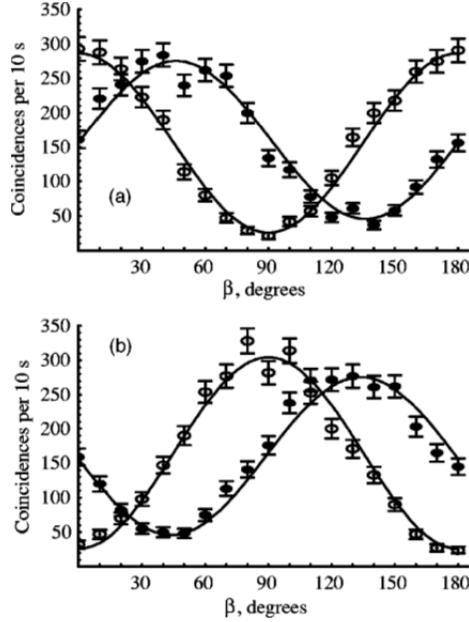


Figura 5.5: Correlaciones de Polarización experimentales. (a)  $\alpha = 0$  (círculos abiertos) y  $\alpha = 45$  (círculos cerrados). (b)  $\alpha = 90$  (círculos abiertos) y  $\alpha = 135$  (círculos cerrados). Las barras de error indican mas o menos una desviación estándar estadística de incertidumbre. Las curvas son ajustadas a la Ecuación 3.12

$$C = N(0, 90) \quad (5.4)$$

$$A = N(0, 0) + N(90, 90) - 2C \quad (5.5)$$

$$\tan^2 \theta_l = \frac{N(90, 90) - C}{N(0, 0) - C} \quad (5.6)$$

$$\cos \phi_m = \frac{1}{\sin 2\theta_l} \left( 4 \frac{N(45, 45) - C}{A} - 1 \right) \quad (5.7)$$

Después de optimizar  $\theta_l$  y  $\phi_l$  encontramos en una típica toma de datos con  $T = 10$  s que  $N(0,0) = 293$ ,  $N(90,90) = 307$ ,  $N(0,90) = 22$ , y  $N(45,45) = 286$ . Estos resultados dan  $C = 22$ ,  $A = 556$ ,  $\theta_l = 46$  y  $\phi_m = 26$ . Datos mas extensivos son mostrados en la Figura 5.5 junto con el ajuste a la Ecuación (3.12). Los mejores parámetros de ajuste son  $C = 31$ ,  $A = 539$ ,  $\theta_l = 46$  y  $\phi_m = 26$  los cuales están en concordancia con los estimados aproximados hechos con solo cuatro puntos.

Una inspección detallada de la Figura 5.5 muestra que la curva teórica se ajustaría mejor si fuera movida

un poco a la izquierda. En otras palabras, parece como si un polarizador en ángulo  $\beta$  estuviera consistentemente desfasado unos cuantos grados. Esto puede ser debido al posicionamiento imperfecto de los cristales, polarizadores o los rieles de los detectores. En el reacomodo de las lentes y los rieles este desfase varío de 3 grados (mostrado) a 8 grados, pero no pudo ser completamente eliminado. Sin embargo, no encontramos necesario hacerlo, un desfaseamiento de este estilo puede ser compensado mediante un desfaseamiento apropiado en el conteo de la configuración de  $\beta$  en el cual las medidas son tomadas. Esta compensación no tiene efecto alguno en los procedimientos descritos abajo.

## 5.4. Medición cuántica y partículas entrelazadas

En sus comentarios sobre las lecturas de Bohr, Einstein [19] notó que la mecánica cuántica permite que la medición de una partícula influencie el estado de otra. Para ilustrar esta influencia en el caso de dos estados polarizados, consideremos de nuevo el estado  $|\psi_{EPR}\rangle$  de la ecuación (3.16). Si el fotón señal es medido con un polarizador colocado en un ángulo  $\alpha$ , el resultado sera  $H_\alpha$  o  $V_\alpha$ , cada uno ocurriendo en el 50 por ciento de las mediciones. En la interpretación usual de Copenhagen, el estado ha colapsado en el momento de la medición de  $|\psi_{EPR}\rangle$  a alguno de los siguientes estados  $|V_\alpha\rangle_s |V_\alpha\rangle_i$  ó  $|H_\alpha\rangle_s |H_\alpha\rangle_i$ . Pero la mera elección de  $\alpha$  no determina al que va a colapsar el estado del fotón testigo despues de la medición; Es el resultado probabilistico de la medición en el fotón señal el que decide si el testigo termina en  $|V_\alpha\rangle_i$  ó  $|H_\alpha\rangle_i$ . A pesar de la aleatoriedad, la elección de  $\alpha$  tiene un efecto en la probabilidad de obtener  $|V_\alpha\rangle_i$  ó  $|H_\alpha\rangle_i$ : le da una polarización definida en la base  $|V_\alpha\rangle_i, |H_\alpha\rangle_i$ , la cual no tenía antes de la medición. El proceso descrito arriba es no-local: el estado cambia instantáneamente incluso si las partículas pudieran ser separadas por una gran distancia. La relatividad prohíbe una acción a distancia instantánea, o que conduce a paradojas sobre mandar mensajes para tiempo anteriores. En este caso, sin embargo, la aleatoriedad de la mecánica cuántica previene cualquier paradoja. La medición en el fotón señal, cualquiera que sea el efecto en el estado del fotón testigo, no puede ser observado solo en mediciones sobre el fotón testigo. Después de que el fotón señal es medido, el testigo es igualmente probable de estar en  $V_\alpha$  ó  $H_\alpha$ . Una medición de su polarización, a cualquier ángulo  $\beta$ , encontramos a  $V_\beta$  con probabilidad:

$$P_V(\beta) = \frac{1}{2} |\langle V_\beta | V_\alpha \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle V_\beta | H_\alpha \rangle|^2 \quad (5.8)$$

$$P_V(\beta) = \frac{1}{2} [\cos^2(\beta - \alpha) + \sin^2(\beta - \alpha)]$$

$$P_V(\beta) = \frac{1}{2}$$

Esta medición no da información acerca de la elección de  $\alpha$ . Es también la probabilidad que encontraríamos si el fotón señal no hubiera sido medido.

Así, la mecánica cuántica ( en la interpretación de Copenhagen) es consistente con la causalidad relativista. Se logra esa consistencia balanceando dos hechos improbables: la influencia de partículas una de otra no-localmente y la naturaleza aleatoria nos impiden de mandar mensajes de esa manera. Un comentario de Ensitein captura la rareza de esta situación. En una carta de 1947 a Max Born el objetaba que la mecánica cuántica conlleva "acción misteriosa a distancia".

## 5.5. Desigualdad de Bell

Los valores obtenidos en el experimento de la desigualdad de Bell con 16 mediciones se observan en la tabla 5.1. Estos se tomaron colocando los polarizadores como se indica en la tabla( Figura 5.1) de la desigualdad de Bell . Para cada uno de los ángulos se tomaron 20 mediciones, cada una en un tiempo de 5 segundos, estas 20 mediciones se promediaron. Después se prosigue a hacer el cálculo de la desigualdad

de Bell usando la ecuación (5.1). Girando la lámina de media onda de  $5^\circ$  en  $5^\circ$  comenzando en  $245^\circ$  (que es donde se encuentra la desigualdad de Bell) y terminando en  $45^\circ$ . Únicamente se tomaron datos entre estos ángulos ya que girar la lámina de media onda  $\theta$  es igual que girarla  $\theta + \pi$ .

En la tabla 5.1 se exponen los distintos parámetros de la desigualdad de Bell en función del ángulo del que fue tomado con sus respectivas incertidumbres, para ver más claramente los ángulos en los cuales se viola la desigualdad de Bell se graficó el parámetro de Bell contra el ángulo de la lámina de media onda como se muestra en la figura 5.6:<sup>3</sup>

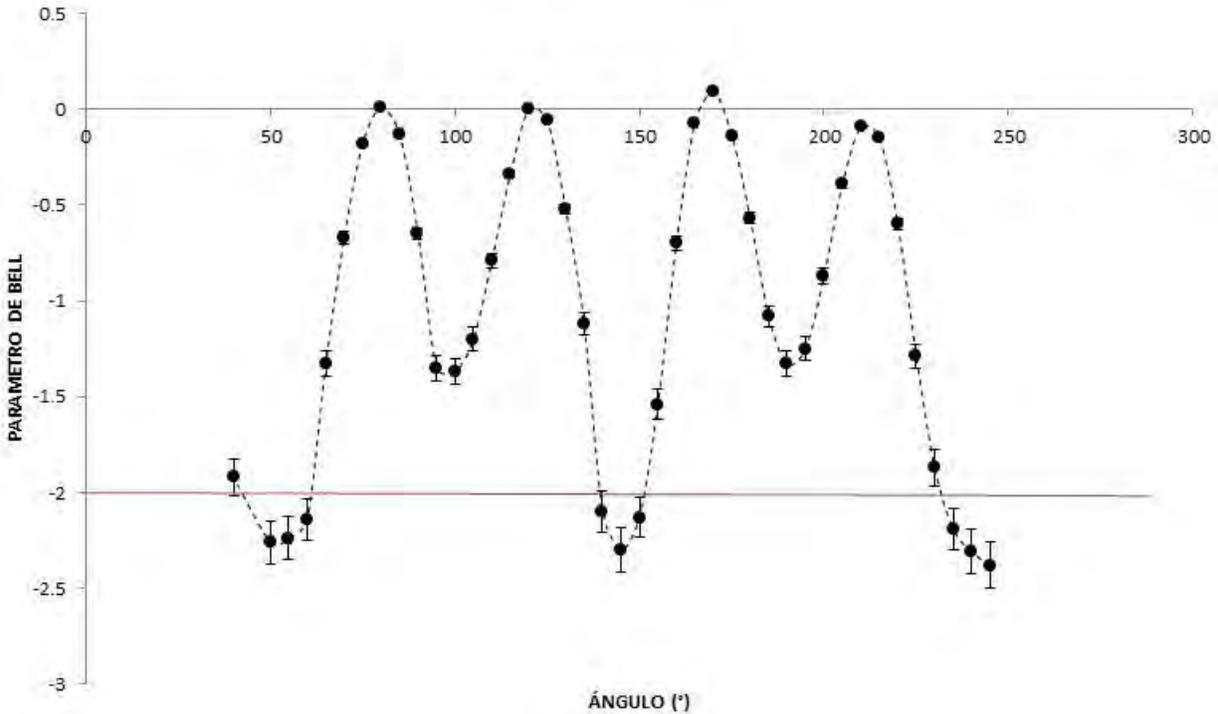


Figura 5.6: Gráfica de los valores de la desigualdad de Bell, los puntos donde hay enredamiento de partículas se encuentran por debajo de la línea roja.

La desigualdad de Bell se viola para valores inferiores a -2 o mayor a 2 si hay un estado enredado de partículas como vimos en el capítulo 3. En la gráfica 5.6 se puede ver que se obtuvieron 9 datos que cumplen con la violación de la desigualdad de Bell. Los ángulos en los cuales se puede encontrar el estado enredado son de  $(235^\circ \pm 2.5$  a  $245^\circ \pm 2.5)$ ,  $(150^\circ \pm 2.5$  a  $140^\circ \pm 2.5)$ ,  $(45^\circ \pm 2.5$  a  $55^\circ \pm 2.5)$

## 5.6. Detección del enredamiento usando cuatro mediciones

A continuación se exponen los valores que se obtuvieron del nuevo método que consiste en cuatro mediciones. Estos se tomaron colocando los polarizadores  $(0^\circ, 90^\circ)$ ,  $(90^\circ, 0^\circ)$ ,  $(45^\circ, -45^\circ)$  y  $(45^\circ, 45^\circ)$  (capítulo 3). Para cada uno de los ángulos se tomaron 20 mediciones, cada una en un tiempo de 5 segundos, estas 20 mediciones se promediaron. Después se prosiguió a hacer el cálculo para el parámetro con cuatro mediciones. Esto se repitió girando la lámina de media onda de  $5^\circ$  en  $5^\circ$  comenzando en  $245^\circ$  y terminando en  $45^\circ$ .

<sup>3</sup>datos.

Águlo $\pm 0.05^\circ$	Bell	Incertidumbre
245	-2.38	$\pm 0.03$
240	-2.31	$\pm 0.04$
235	-2.19	$\pm 0.04$
230	-1.87	$\pm 0.03$
225	-1.29	$\pm 0.03$
220	-0.60	$\pm 0.04$
215	-0.15	$\pm 0.04$
210	-0.09	$\pm 0.04$
205	-0.39	$\pm 0.04$
200	-0.87	$\pm 0.04$
195	-1.25	$\pm 0.04$
190	-1.33	$\pm 0.03$
185	-1.08	$\pm 0.04$
180	-0.57	$\pm 0.04$
175	-0.14	$\pm 0.04$
170	0.093	$\pm 0.04$
165	-0.07	$\pm 0.04$
160	-0.70	$\pm 0.04$
155	-1.54	$\pm 0.03$
150	-2.13	$\pm 0.03$
145	-2.30	$\pm 0.03$
140	-2.10	$\pm 0.03$
135	-1.12	$\pm 0.04$
130	-0.52	$\pm 0.03$
125	-0.06	$\pm 0.04$
120	0.00	$\pm 0.04$
115	-0.34	$\pm 0.04$
110	-0.79	$\pm 0.04$
105	-1.21	$\pm 0.03$
100	-1.37	$\pm 0.03$
95	-1.35	$\pm 0.03$
90	-0.65	$\pm 0.04$
85	-0.14	$\pm 0.04$
80	0.013	$\pm 0.04$
75	-0.18	$\pm 0.04$
70	-0.67	$\pm 0.04$
65	-1.33	$\pm 0.03$
60	-2.14	$\pm 0.03$
55	-2.24	$\pm 0.03$
50	-2.26	$\pm 0.03$
45	-1.92	$\pm 0.03$

Cuadro 5.1: Valores de la desigualdad de Bell en función del ángulo con sus respectivas incertidumbres

Águlo $\pm 0.05^\circ$	4 mediciones	Incertidumbre
245	0.83	$\pm 0.02$
240	0.83	$\pm 0.02$
235	0.80	$\pm 0.02$
230	0.88	$\pm 0.02$
225	1.07	$\pm 0.03$
220	1.43	$\pm 0.05$
215	1.69	$\pm 0.08$
210	1.51	$\pm 0.07$
205	1.08	$\pm 0.04$
200	0.73	$\pm 0.02$
195	0.59	$\pm 0.02$
190	0.54	$\pm 0.01$
185	0.57	$\pm 0.02$
180	0.71	$\pm 0.03$
175	0.97	$\pm 0.04$
170	1.16	$\pm 0.05$
165	1.18	$\pm 0.05$
160	0.96	$\pm 0.03$
155	0.87	$\pm 0.02$
150	0.81	$\pm 0.02$
145	0.83	$\pm 0.02$
140	0.82	$\pm 0.02$
135	1	$\pm 0.03$
130	1.35	$\pm 0.03$
125	1.59	$\pm 0.08$
120	1.44	$\pm 0.07$
115	1.03	$\pm 0.04$
110	0.72	$\pm 0.02$
105	0.57	$\pm 0.02$
100	0.53	$\pm 0.02$
95	0.57	$\pm 0.02$
90	0.70	$\pm 0.02$
85	0.97	$\pm 0.04$
80	1.21	$\pm 0.05$
75	1.22	$\pm 0.05$
70	0.99	$\pm 0.03$
65	0.86	$\pm 0.02$
60	0.82	$\pm 0.02$
55	0.82	$\pm 0.02$
50	0.82	$\pm 0.02$
45	0.92	$\pm 0.02$

Cuadro 5.2: Valores de la prueba de enredamiento con cuatro mediciones en función del ángulo con sus respectivas incertidumbres

En la tabla 5.2 se exponen los valores obtenidos por el nuevo método para detectar el estado enredado con cuatro mediciones con sus respectivas incertidumbres, para poder comparar estos datos con los obtenidos de la desigualdad de Bell con 16 mediciones se graficó el parametro con cuatro mediciones contra el ángulo de la lámina de media onda (ver figura 5.7)

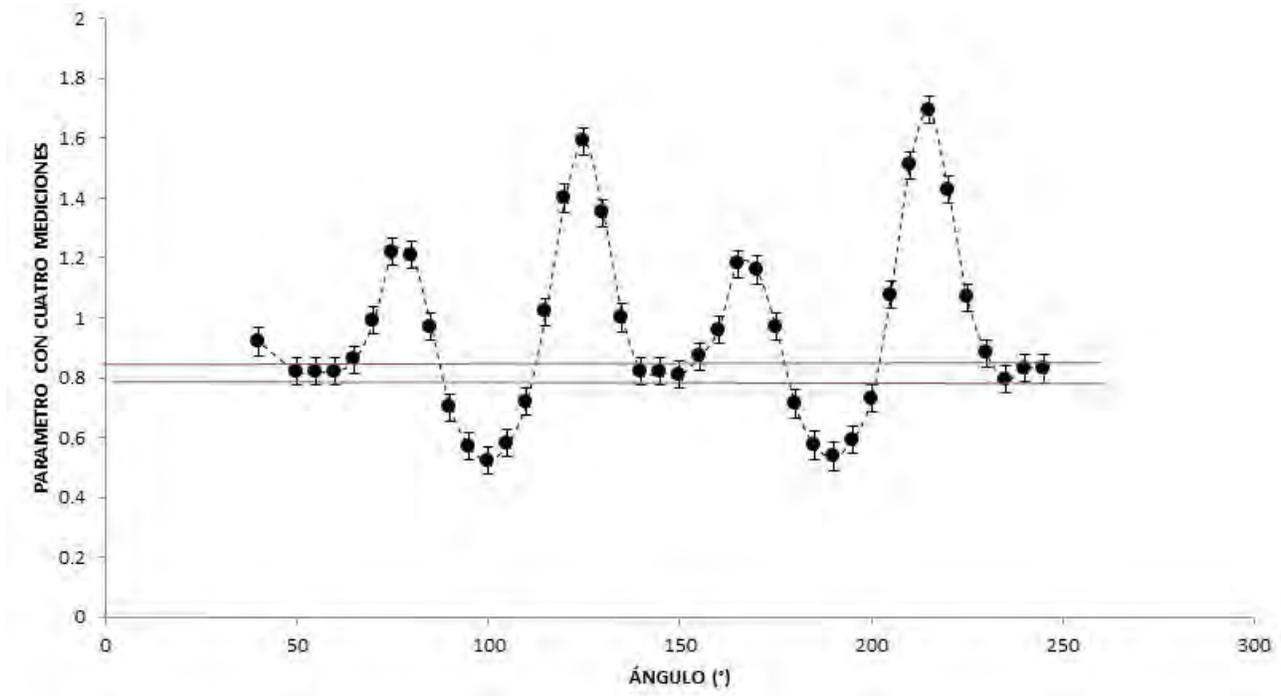


Figura 5.7: Grafica de los valores de la prueba con cuatro mediciones, los puntos donde hay estado enredado son los que estan entre las dos lineas rojas .

Al comparar esta gráfica con la gráfica 5.6 obtenemos que hay enredamiento en los ángulos que están entre  $(235^{\circ} \pm 2.5$  a  $245^{\circ} \pm 2.5)$  ,  $(150^{\circ} \pm 2.5$  a  $140^{\circ} \pm 2.5)$  y  $(45^{\circ} \pm 2.5$  a  $55^{\circ} \pm 2.5)$ , i.e en los puntos que se encuentran entre las dos lineas rojas. La desigualdad de Bell se viola si el valor obtenido con el nuevo método se encuentra entre 0.79 y 0.84. Cabe mencionar que es probable que existan puntos que no corresponda a estados enredados, sin embargo basta moverse  $5^{\circ}$  a favor y en contra de las manecillas del reloj para asegurarse que si se encuentra en un estado enredado o no. Por lo tanto se puede determinar si el estado está enredado usando como mínimo ocho mediciones y máximo doce mediciones. A pesar de esto este método sigue siendo mejor para determinar si el estado esta enredado o no ya que se requieren menos mediciones que por el método convencional

Se puede concluir que tenemos estado enredado en el cristal BBO-II con el metodo de Bell y con el nuevo método.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se preparó un estado enredado por conversión espontánea paramétrica descendente, usando un cristal de borato de bario tipo II. Se probó que el estado se encontraba enredado por medio de la desigualdad de Bell. Adicionalmente se creó y probó un método más rápido en el cual solo se necesitan cuatro mediciones en lugar de las dieciseis necesarias para saber si el estado está enredado.

Mostramos experimentalmente que los fotones enredados cumplen la desigualdad de Bell, lo cual indica que el comportamiento de los fotones es no local y el estado entre el fotón señal y el fotón testigo está enredado. Se determinó que hay una relación contundente de la prueba de la desigualdad de Bell con la prueba con cuatro mediciones. Cuando el estado está enredado la prueba de la desigualdad de Bell nos da como resultado un valor menor a  $-2.0$ . En la prueba con cuatro mediciones obtenemos valores entre  $0.79$  y  $0.84$  cuando el estado esta enredado. Cabe recalcar que la probabilidad de que el estado esté enredado cuando se obtienen valores entre  $0.79$  y  $0.84$  es alta. Sin embargo, este nuevo método es útil durante el alineamiento del montaje experimental para buscar los estados enredados. Cabe recalcar que será necesario corroborar que el sistema produce fotones enredados usando la desigualdad de Bell. Posteriormente este nuevo método es de utilidad para corroborar que el sistema sigue produciendo estados enredados tiempo después de haber montado el experimento. De forma que el experimento en su conjunto desde la alineación hasta la toma de datos es más rápido.

El máximo enredamiento que obtuvimos en este trabajo fué el parámetro  $S$  es igual a  $-2.38$  usando la desigualdad de Bell. Este máximo valor corresponde con el valor de  $0.83$  obtenido para la prueba con cuatro mediciones.

Adicionalmente se pudo determinar que los primeros  $180^\circ$  de la lámina de media onda son simétricos con los otros  $180^\circ$ .

Es importante indicar que el método aquí desarrollado no indica el nivel de enredamiento de los fotones como lo hace la desigualdad de Bell. Mientras menor sea el parámetro  $S$ , mayor es el nivel de enredamiento del sistema. El nuevo método únicamente nos permite determinar más rápidamente si los fotones se encuentran enredados o no.

Con todo esto se demostró que hay una relación entre la prueba de la desigualdad de Bell con la prueba con cuatro mediciones.

## Apéndice A

# Desarrollo Matemático de Probabilidades

**Capítulo 4.5** Usando compensadores eliminamos el estado  $e^{i\theta}$  haciendo  $e^{i\theta} = 1$ . Calculamos las probabilidades  $P(0,90)$ ,  $P(90,0)$ ,  $P(45,-45)$ ,  $P(-45,45)$

$$P(0, 90) = |\langle H|_s \langle V|_i \psi \rangle|^2$$

Desarrollando los términos dentro del valor absoluto obtenemos

$$\langle H|_s \langle V|_i \psi \rangle = \langle H|_s \langle V|_i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle H|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle H|_s \langle V|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s |V\rangle_i \langle V|_i |H\rangle_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.3})$$

Entonces la probabilidad es

$$P(0, 90) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{A.4})$$

Análogamente al paso anterior podemos obtener  $P(90, 0)$  Para

$$P(90, 0) = |\langle V|_s \langle H|_i \psi \rangle|^2$$

$$\langle V|_s \langle H|_i \psi \rangle = \langle V|_s \langle H|_i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle V|_s \langle H|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \quad (\text{A.7})$$

La probabilidad de  $P(90, 0)$  es

$$P(90, 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \right| = \frac{1}{2} \quad (\text{A.8})$$

Donde se puede ver que  $P(90,0)=P(0,90)$ . Ahora hacemos lo mismo de forma analoga para  $P(45,-45)$  y  $P(-45,45)$

$$P(45, -45) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s + \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i - \langle V|_i) \psi \right|^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s + \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i - \langle V|_i) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s + \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i - \langle V|_i) \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i) \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s \langle H|_i - \langle H|_s \langle V|_i + \langle V|_s \langle H|_i - \langle V|_s \langle V|_i) (|H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s \langle H|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle H|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i - \langle H|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i - e^{i\theta} \langle H|_s \langle V|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \\ + \langle V|_s \langle H|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i - \langle V|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i - e^{i\theta} \langle V|_s \langle V|_i |V\rangle_s |H\rangle_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (-\langle H|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (-1 + e^{i\theta}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta}$$

$$P(45, -45) = \left| -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta} \right|^2 = \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta} \right) \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-i\theta} - \frac{1}{8} e^{i\theta} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} (-\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta) - \cos(-\theta) - i\text{sen}(-\theta))$$

Como  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$  y  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$$= \frac{2}{8} + \frac{1}{8} (-2\cos\theta) = \frac{1}{4} (1 - \cos\theta)$$

Ahora para  $P(-45, 45)$

$$P(-45, 45) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s - \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i + \langle V|_i) |\psi\rangle \right|^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s - \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i + \langle V|_i) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s - \langle V|_s) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_i + \langle V|_i) \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i) \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s \langle H|_i + \langle H|_s \langle V|_i - \langle V|_s \langle H|_i - \langle V|_s \langle V|_i) (|H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} |V\rangle_s |H\rangle_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s \langle H|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle H|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i + \langle H|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i + e^{i\theta} \langle H|_s \langle V|_i |V\rangle_s |H\rangle_i \\ - \langle V|_s \langle H|_i |H\rangle_s |V\rangle_i - e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i - \langle V|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i - e^{i\theta} \langle V|_s \langle V|_i |V\rangle_s |H\rangle_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H|_s \langle V|_i |H\rangle_s |V\rangle_i - e^{i\theta} \langle V|_s \langle H|_i |V\rangle_s |H\rangle_i) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - e^{i\theta}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta}$$

$$P(-45, 45) = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta} \right|^2 = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta} \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-i\theta} - \frac{1}{8} e^{i\theta} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} (-\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta) - \cos(-\theta) - i\text{sen}(-\theta))$$

Como  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$  y  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$$= \frac{2}{8} + \frac{1}{8} (-2\cos\theta) = \frac{1}{4} (1 - \cos\theta)$$

# Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.* 47, 777– 780 1935.
- [2] D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Addison Wesley, 3ra ed. (1999), pp.375, 421.
- [3] Dietrich Dehlinger and M. W. Mitchell. Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory. Physics Department, Reed College, 3203 SE Woodstock Boulevard, Portland, Oregon 97202 Received 3 December 2001; accepted 13 June 2002!
- [4] M. Beck. *Quantum Mechanics: Theory and Experiment*. Oxford University Press (2012), pp.66-67, 56-57, 137-138, 383-392, 435-438.
- [5] C. Gerry, P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press (2005), pp.10-25, 214-216.
- [6] M.O. Scully, M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press (1997), pp.1-13.
- [7] M. Fox. *Quantum Optics*. Oxford University Press (2006), pp. 75-103,115-116,126-135, 155-156.
- [8] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 3ra ed. (1999), pp.241-242.
- [9] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 3ra ed. (2000), pp.126-144, 271-278.
- [10] W.P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH (2001), pp.256-272.
- [11] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 2da ed. (2005), p.130.
- [12] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 4ta ed. (2002), pp. 325-333, 353.
- [13] F.A. Jenkins, H.E. White. *Foundamentals of Optics*. McGraw-Hill, 4ta ed. (2001), p.504.
- [14] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon, 6ta ed. (1986), p.716.
- [15] P.A.M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 4ta ed. (1967), pp. 4-7.
- [16] Hans-A. Bachor, T.C. Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Wiley VCH, 2da ed. (2004), p.46-51.
- [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. *Quantum Mechanics*. Wiley and Sons, pp.15-17.
- [18] J.R. Klauder, E.C.G. Sudarshan. *Fundamentals of Quantum Optics*. W.A. Benjamin (1968), pp. 71-73.
- [19] L. Rosenfeld, “Niels Bohr in the thirties: consolidation and extension of the conception of complementarity,” in *Niels Bohr: His Life and Work as Seen by his Friends and Colleagues*, edited by S. Rozental North- Holland, Amsterdam, 1967.

- [20] N. Bohr, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.* **48**, 696–702 (1935).
- [21] A. Aspect and P. Grangier, “Experiments on Einstein–Podolsky–Rosen type correlations with pairs of visible photons,” edited by R. Penrose and C. J. Isham, *Quantum Concepts in Space and Time* Oxford U.P., 1986!, pp. 1–44.
- [22] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quanten-mechanik*, Julius Springer, Berlin (1932). (Traducción al inglés: Princeton University Press, 1955)
- [23] J. S Bell, *Rev. Mod Phys.*, **38**, p.447 (1996)
- [24] D. Bohm, *Phys Rev.*, **85**, pp. 166 y 180 (1952)
- [25] On the Einstein Podolsky Rosen Paradox, *Physics*, **1** (1964), pp, 195-200 incluido en J. S Bell lo decible y lo indecible en la mecánica cuántica, Alianza, Madrid 1990, pp. 41-50.
- [26] D. C. Burnham, D. L. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **25** (1970), 84.
- [27] D. Dehlinger, M. W. Mitchell, “Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory,” *Am. J. Phys.* **70**, 903 (2002).
- [28] Y.R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. John Wiley and Sons (1984), pp.134-135.
- [29] P. Hariharan, B. C. Sanders, “Quantum phenomena in optical interferometry,” *Prog. Opt.* **36**, 60, 1996.
- [30] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 3ra. ed. (2008), pp. 1,2,6.
- [31] Feng-Kuo Hsu, Chih-Wei Lai, “Absolute instrument spectral response measurements using angle-resolved parametric fluorescence,” *Optics Express*, Vol. 21, número 15, pp. 18538-18552 (2013)
- [32] D.N. Klyshko. *Photons and Nonlinear Optics*. Gordon and Breach Science Publishers (1988), pp. 2-3.
- [33] M. Redhead, *Incompleteness, Nonlocality, and Realism: A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics* Oxford U.P., Oxford, 1987.
- [34] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Phys. Rev. Lett.* **23** 15, 880–884 (1969).
- [35] José de Jesus Gutierrez Castañeda, Fuente de estados enredados de fotones con polarización ortogonal, Tesis de licenciatura 2015, Facultad de ciencias, UNAM.
- [36] Arkhipov, Ievgen I.; Perina, Jan, Jr.; Haderka, Ondrej; et ál. Entanglement and nonclassicality in four-mode Gaussian states generated via parametric down-conversion and frequency up-conversion. *SCIENTIFIC REPORTS* Volumen: 6 Número de artículo: 33802 Fecha de publicación: SEP 23 2016
- [37] Kobayashi, Toshiki; Ikuta, Rikizo; Yasui, Shuto; et ál. Frequency-domain Hong-Ou-Mandel interference. *NATURE PHOTONICS* Volumen: 10 Número: 7 Páginas: 441+ Fecha de publicación: JUL 2016
- [38] Ch. Silberhorn, P. K. Lam, O. Weiß, F. König, N. Korolkova, and G. Leuchs *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4267 – Published 7 May