



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Oscilaciones de neutrinos para el estudio del interior de la
Tierra

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

José Arnulfo Herrera Lara

TUTOR

Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Herrera
Lara
José Arnulfo
55 41 93 48 08
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
309289533

2. Datos del tutor

Dr.
Juan Carlos
D'Olivo
Saez

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Gabriela
Murguía
Romero

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Hermes
León
Vargas

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Alexis Armando
Aguilar
Arévalo

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Eric
Vázquez
Jauregui

7. Datos del trabajo escrito

Oscilaciones de neutrinos para el estudio
del interior de la Tierra
91 p.
2017

Resumen

En este trabajo se propone el uso del fenómeno de oscilaciones de neutrinos como herramienta auxiliar en el estudio de la composición del interior de la Tierra. Primeramente se detalla la importancia del conocimiento del interior de la Tierra, en especial del núcleo externo. El primer capítulo está dedicado a la historia de los neutrinos y contiene una breve descripción cualitativa del modelo estándar de partículas elementales. En el segundo capítulo se aborda de manera formal el fenómeno de oscilaciones de neutrinos. En este capítulo se desarrolla de la forma más explícita posible la teoría de oscilaciones y se hace la conexión con el tipo de experimento que se está proponiendo en este trabajo. El tercer capítulo habla del interior de la Tierra, sus principales regiones y propiedades mecánicas y químicas. El cuarto capítulo contiene una recopilación de gráficos en donde se muestran los cambios en las probabilidades de oscilación variando la composición química del núcleo externo y considerando también diferentes combinaciones de parámetros aún desconocidos como la jerarquía de masas Δm_{31}^2 y el octante del ángulo de mezcla θ_{23} . Posteriormente, se hace una discusión sobre los resultados obtenidos y se proponen los escenarios ideales para realizar un estudio de esta índole. Finalmente, el último capítulo resume los resultados obtenidos y aborda de manera muy breve algunos complejos experimentales que podrían servir para corroborar o descartar composiciones extremas del núcleo terrestre.

Índice general

Resumen	I
Introducción	1
1. Neutrinos	5
1.1. Breve historia del neutrino	5
1.1.1. Descubrimiento del neutrino	6
1.1.2. Descubrimiento del neutrino del muón	7
1.1.3. El neutrino del tau	8
1.2. Fuentes de Neutrinos	9
1.2.1. Neutrinos atmosféricos	9
1.3. Modelo estándar	12
1.3.1. Leptones	14
1.3.2. Quarks	15
1.3.3. Teoría electrodébil	15
2. Oscilaciones de neutrinos	19
2.1. Oscilaciones en el vacío	19
2.1.1. Dos neutrinos	23
2.1.2. Tres neutrinos	24
2.1.3. Resumen fenomenológico de oscilaciones	28
2.2. Oscilaciones en materia	29
2.2.1. La trayectoria en la Tierra	36
2.2.2. Oscilaciones en materia para dos neutrinos	39
3. El interior de la Tierra	43
3.1. Métodos para determinar la estructura interna de la Tierra	43
3.2. Modelos actuales de la composición y estructura terrestre	46
3.3. Descripción de las capas interiores	47
3.3.1. Corteza terrestre	48
3.3.2. Manto superior	49
3.3.3. Manto inferior	50
3.3.4. Núcleo	50

3.4. Composición y restricciones del núcleo externo	51
3.5. Modelo propuesto	53
4. Resultados	55
4.1. Neutrinos	56
4.1.1. Jerarquía normal y $\theta_{23} < 45^\circ$	56
4.1.2. Jerarquía normal y $\theta_{23} > 45^\circ$	62
4.1.3. Jerarquía invertida y $\theta_{23} < 45^\circ$	68
4.2. Antineutrinos	71
4.2.1. Jerarquía normal y $\theta_{23} < 45^\circ$	71
4.2.2. Jerarquía invertida y $\theta_{23} < 45^\circ$	74
4.2.3. Jerarquía invertida y $\theta_{23} > 45^\circ$	77
4.3. Probabilidades como función del ángulo nadir	79
4.4. Discusión	82
5. Conclusiones	87
Bibliografía	89

Introducción

El conocimiento de la composición y estructura interna de la Tierra es esencial para la comprensión de los fenómenos geológicos básicos como el vulcanismo, los terremotos y la formación de montañas [1, pág. 19]. Otras aplicaciones del conocimiento del interior de la Tierra consisten en la determinación de yacimientos de petróleo y minerales para que sean aprovechados por el ser humano. Con los años se han ido desarrollando métodos y modelos que tratan de describir el interior de la Tierra basados en la información que se tiene disponible. Dicha información proviene de diversas fuentes, como pueden ser la observación de la propagación de las ondas sísmicas y la extracción directa de rocas y minerales de la superficie. De hecho, el análisis de las ondas sísmicas ha resultado en el entendimiento de la estructura de capas de la Tierra, las cuales son la corteza terrestre, el manto superior, el manto inferior, el núcleo externo y el núcleo interno. La composición de la corteza se puede medir directamente con el análisis del material que se encuentra en la superficie. Además, se han encontrado muestras en la superficie que contienen diamantes y que, según los estudios de laboratorio, sólo pudieron haberse formado a presiones y temperaturas muy elevadas. El análisis de estas muestras ha ayudado establecer las composiciones del manto superior e inferior. Sin embargo, debido a su gran profundidad, no existen muestras que proporcionen evidencia directa del estado y composición del núcleo terrestre. La información que se tiene de la composición del núcleo proviene del estudio de las ondas sísmicas y del estudio de meteoritos.

Parte importante en el estudio del interior de la Tierra es el conocimiento del núcleo. Éste tiene un rol fundamental en las corrientes de convección que se originan en el manto y en la tectónica de placas. Esto es debido a que se cree que el veinte por ciento de la pérdida de calor de la superficie de la Tierra se origina en el núcleo [2, pág. 371]. Parte del problema en el estudio del núcleo consiste en determinar la existencia de otros elementos, además del hierro, en el núcleo externo. La determinación de estas impurezas junto con el conocimiento del diagrama de fases del hierro es esencial, debido a que controlan la geoquímica y geofísica del núcleo, así como la evolución de la Tierra como un todo [2, pág. 372].

Para tratar de modelar el flujo de calor que existe hacia el manto desde el núcleo es necesario calcular la temperatura de este último. La temperatura del núcleo se determina a partir de los puntos de fusión del hierro en su diagrama de fases. Sin embargo, nuestro desconocimiento de las propiedades físicas a muy altas temperaturas y presiones del hierro, junto con las diferentes aleaciones de hierro con otros elementos, dificultan el poder hacer una estimación precisa de la temperatura del núcleo.

Experimentos a altas presiones para distintas aleaciones de hierro muestran que la presencia

de sulfuros bajan la temperatura de fusión, mientras que la presencia de oxígeno la levanta. La presencia de níquel también contribuye a disminuir el punto de fusión. Por lo tanto, los detalles de los elementos que constituyen el núcleo también afectan el poder determinar su temperatura [2, pág. 371].

Otra de las razones para estudiar el interior de la Tierra, en especial el núcleo externo, es la explicación del campo magnético terrestre. La idea de que el núcleo y el manto están permanentemente magnetizados queda descartada debido a que las temperaturas del interior exceden a las de Curie¹ para materiales y minerales magnéticos [2, pág. 374]. Todavía no se conocen bien los detalles de cómo se produce el campo magnético de la Tierra. Sin embargo, la mayoría de los investigadores están de acuerdo en que el flujo gradual del hierro fundido en el núcleo externo es una parte importante del proceso. Actualmente, la idea más aceptada es que el núcleo se comporta como un dinamo que se autoalimenta [1, pág. 354]. Conforme el hierro se va moviendo en el núcleo externo, va interactuando con el campo magnético de la Tierra. Esta interacción genera una corriente eléctrica, la cual produce un campo magnético que refuerza el campo magnético terrestre. Mientras continúe el flujo en el interior del núcleo externo de hierro fundido, se producirán corrientes eléctricas y se mantendrá el campo magnético de la Tierra. La determinación de los elementos ligeros presentes en el núcleo externo también es fundamental para explicar las teorías del campo magnético terrestre, puesto que también se dan otros fenómenos como la inversión y disminución de la intensidad del campo magnético [1, pág. 354] y [2, pág. 374].

Como hemos visto, la mayor parte de la información sobre la composición y estructura interna de la Tierra proviene del estudio de las ondas sísmicas y el análisis directo de algunas muestras de rocas y meteoritos. Sin embargo, el estado y composición del núcleo, el cual constituye el 32 por ciento de la masa total de la Tierra y un 16 por ciento de su volumen, permanecen todavía inciertos [4]. El núcleo consiste de una mezcla de hierro y níquel y se divide en una región interna y otra externa. Estas regiones se pueden distinguir debido a que existe una diferencia considerable en las densidades que constituyen ambas zonas. El núcleo interno es sólido y se intuye que el núcleo exterior es líquido debido a la falta de propagación de las ondas secundarias (ondas S) y por el hecho de poseer una densidad menor a la del núcleo interno. Sin embargo, el déficit en la densidad del núcleo externo no puede ser simplemente descrito por una diferencia de estado entre ambas regiones, sino que además requiere la presencia de otros elementos ligeros. Existe un gran interés en las ciencias de la Tierra para determinar cuáles son estos elementos ligeros con el fin comprender la evolución de nuestro planeta y para determinar el origen del campo geomagnético, los cuales son dos de los mayores problemas en las ciencias de la Tierra [4].

Una manera de determinar la presencia de los elementos que constituyen el interior de la Tierra es utilizar el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos. Los neutrinos son partículas

¹La temperatura de Curie para el hierro es aproximadamente 1044 K a presión atmosférica. Aleaciones de hierro con níquel, donde la concentración porcentual en peso del hierro es mayor a la de níquel, tienden a bajar la temperatura de Curie. También se sabe que el aumento de presión tiende a disminuir el punto de Curie para el hierro. Más información al respecto se puede encontrar en Leger, J. M. et al. *Pressure effect on the Curie temperatures of transition metals and alloys*, Phys. Rev. B **6**, 4250-4261 (1972) [3].

sorprendentes que han jugado un rol muy importante en la física de partículas. Existen tres tipos de neutrinos (sabores) ν_e , ν_μ y ν_τ asociados con los tres leptones cargados (electrón, muón y tau) y que acompañan a éstos en los procesos debidos a la interacción débil. Sin embargo, el sabor de un neutrino puede cambiar, de tal forma que, por ejemplo, un neutrino producido como un ν_μ puede ser detectado como un ν_e . Este fenómeno es conocido como oscilaciones de neutrinos y es una consecuencia de la mecánica cuántica debida al hecho de que las masas de los neutrinos son no nulas y entre ellos existe una mezcla similar a la de los quarks. Una característica interesante de las oscilaciones de neutrinos es que la conversión de un sabor a otro es afectada por la densidad de electrones que existen en el medio donde se propagan [5, pág. 2369]. Lo que se busca con este trabajo es tratar de mostrar que el fenómeno de oscilaciones de neutrinos en materia puede auxiliar a determinar la composición estructural de la Tierra, en particular aquella del núcleo exterior.

La forma de abordar el problema de emplear las oscilaciones de neutrinos para el estudio de la composición de la materia terrestre consiste en examinar con detalle la evolución de las amplitudes de los neutrinos producidos en la atmósfera a lo largo de su trayectoria en el interior de la Tierra. Se empleará un tratamiento analítico, involucrando los tres sabores, en el cálculo de las probabilidades de transición y supervivencia y la manera en que dichas cantidades son afectadas por cambios en la composición.

Capítulo 1

Neutrinos

1.1. Breve historia del neutrino

Los neutrinos son los únicos fermiones elementales que no poseen carga eléctrica [6]. Debido a esto, los neutrinos no experimentan una interacción electromagnética directa y sólo a energías relativamente pequeñas pueden participar en procesos débiles con los bosones virtuales W^\pm y Z^0 (p. ej. decaimiento beta). Las masas de los neutrinos son muchos órdenes de magnitud más pequeñas que las masas de los leptones cargados y quarks. Estas circunstancias hacen a los neutrinos partículas únicas y extraordinarias. La historia de los neutrinos es bastante interesante e instructiva. A saber, han pasado más de 85 años desde que Wolfgang Ernst Pauli escribió su famosa carta a los participantes de la conferencia de física en Tübingen con la propuesta de que pudiese existir en el núcleo una partícula eléctricamente neutra. La idea de esta carta, que termina diciendo el porqué de la ausencia de Pauli a la conferencia, es proponer un remedio “desesperado” al teorema de la estadística del espín y a la conservación de la energía. Lo que Pauli menciona es que debiese existir una partícula de carga neutra en el núcleo, con espín $1/2$ y que, por lo tanto, obedezca el principio de exclusión. Dicha partícula fue nombrada por el mismo Pauli como *neutrón*. Este neutrón de Pauli debiese tener una masa distinta de cero, del mismo orden de magnitud de la masa del electrón, pero no más grande que el 1 por ciento de la masa del protón.

En 1932, James Chadwick descubrió una partícula con una masa aproximadamente igual a la del protón, el neutrón. Esta partícula ayudó a resolver varias incógnitas que había en la época sobre la composición del núcleo atómico y también puso en evidencia la necesidad de explicar el fenómeno de la radiación beta.

La siguiente contribución importante en el desarrollo de la idea del neutrino fue hecha por Enrico Fermi en 1934. Fermi construyó la primera teoría del decaimiento beta del núcleo. La teoría de Fermi fue hecha bajo las hipótesis de la partícula que propuso Pauli. Fermi llamó a esta partícula *neutrino* y propuso que era una partícula sin masa [7].

El siguiente paso en la historia de los neutrinos fue el de tratar de confirmar su existencia experimentalmente. Los primeros en dar una estimación de la sección eficaz para un proceso de

la forma

$$\bar{\nu} + (A, Z) \rightarrow e^+ + (A, Z - 1) \quad (1.1)$$

fueron Hans Bethe y Rudolf Peierls en 1934, justo después de que la teoría de Fermi había sido propuesta [8]. Lo que Bethe y Peierls encontraron fue una cota para esta interacción,

$$\sigma < 10^{-44} \text{cm}^2 \quad (1.2)$$

Esta cota corresponde a una longitud de absorción en materia sólida de más de 10^{14} km. Lo que Bethe y Peierls concluyen en su artículo es que no existe manera práctica de observar al neutrino. Sin embargo, el primer físico en desafiar esta conclusión fue Bruno Pontecorvo [9]. En 1946, propuso un método radioquímico para la detección de neutrinos. En particular, la reacción que él consideró más prometedora fue¹

$$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}, \quad (1.3)$$

la cual posteriormente se conocería como reacción de Davis-Pontecorvo [9]. Lo que Pontecorvo propuso era irradiar con neutrinos una gran cantidad de cloruro de carbono por aproximadamente un mes y posteriormente extraer el ${}^{37}\text{Ar}$ radioactivo del volumen. Dicha idea de Pontecorvo fue llevada a cabo por Raymond Davis en su experimento para la detección de neutrinos solares.

1.1.1. Descubrimiento del neutrino

La primera evidencia de la existencia de los neutrinos fue obtenida en los experimentos de los físicos Frederick Reines y Clyde Cowan en los años 1953-59 [6]. En estos experimentos, antineutrinos del reactor de Savannah River fueron detectados a través de la observación del proceso

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (1.4)$$

Los antineutrinos son producidos como uno de los productos de la fisión de uranio y plutonio. Las energías de los antineutrinos de un reactor son $\lesssim 10$ MeV. Alrededor de 2.3×10^{20} antineutrinos por segundo eran producidos en el reactor de Savannah River [6]. El flujo de antineutrinos del electrón en los experimentos de Cowan y Reines era del orden de $10^{13} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ [10].

Básicamente, este experimento consistió en utilizar como blanco un centelleador líquido de un volumen aproximado de 1.4 metros cúbicos dopado con cloruro de cadmio (CdCl_2). El positrón producido en el proceso (1.4) era detenido en el centelleador y se aniquilaba con un electrón, produciendo dos fotones γ con energías de alrededor de 0.51 MeV y momentos opuestos. El neutrón producido en (1.4) era ralentizado en el blanco y capturado por un núcleo de cadmio entre 3-10 microsegundos después de sucedida la aniquilación entre el positrón y el electrón, lo que producía un fotón gamma en el proceso [10]. Estos fotones energéticos eran detectados por 110 fotomultiplicadores. Así, se tuvieron una serie de eventos característicos cuantificables que

¹Cabe aclarar que en esa época no se conocían los tres tipos de sabores de neutrinos, por lo que la reacción dada (1.3) contiene más información de la que se tenía en ese entonces.

dieron pie al descubrimiento del (anti) neutrino. En junio de 1956, Cowan y Reines enviaron un telegrama a Pauli anunciándole que el neutrino había sido descubierto.

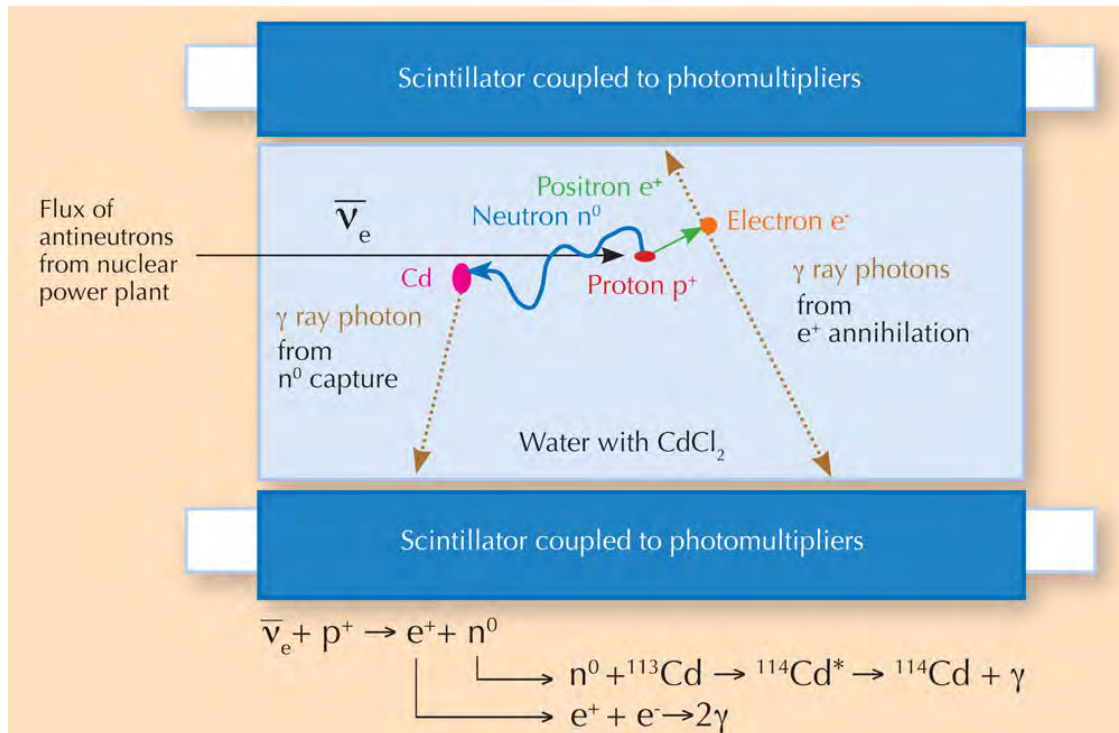


Figura 1.1: Representación esquemática del experimento de Cowan y Reines. La captura del neutrón n por un núcleo era identificada en un intervalo de tiempo entre 3 y 10 microsegundos después de que era detectada la aniquilación positrón-electrón. (Imagen tomada de <http://www.scienceinschool.org/2011/issue19/neutrinos>)

1.1.2. Descubrimiento del neutrino del muón

El descubrimiento del neutrino del muón fue un gran acontecimiento en la historia de la física moderna. Dicho evento probó que dos diferentes tipos de neutrinos ν_e y ν_μ corresponden a distintos leptones: el electrón e y el muón μ [6].

Cuando un neutrino del muón ν_μ interactúa con un núcleo, se puede producir un muón que recorre una distancia muy pequeña emitiendo un cono pronunciado de radiación Cherenkov, la cual puede ser detectada por fotomultiplicadores. De la misma manera, al interactuar con un núcleo, un neutrino del electrón ν_e puede producir un electrón energético, pero cuyo cono de radiación Cherenkov difiere de manera significativa de aquel que se produce por un neutrino del muón ν_μ .

La primera prueba experimental de la hipótesis de dos diferentes tipos de neutrinos fue obtenida en Brookhaven en 1962 por Danby G. y colaboradores. La idea básica del experimento fue utilizar un haz de protones con energías de alrededor de 15 GeV y hacerlos chocar con un blanco de berilio [11]. El flujo resultante de partículas moviéndose en la dirección del detector golpea un escudo de hierro cuyo espesor era de 13.5 metros. El objetivo de dicho escudo era

filtrar a los muones y kaones de tal manera que se obtuviese un haz casi puro de neutrinos. Posteriormente, las interacciones de los neutrinos fueron observadas en una cámara de chispas de diez toneladas de aluminio colocada detrás del escudo de acero.

El resultado de dicho experimento fue que se identificaron 29 casos para la reacción



y ningún evento para la reacción (prohibida)



Si sólo existiese un tipo de neutrino, la reacción dada en (1.6) debiese haber sido igual de probable que la primera. Por ende, se concluye que el neutrino del electrón ν_e y el neutrino del muón ν_{μ} son partículas diferentes.

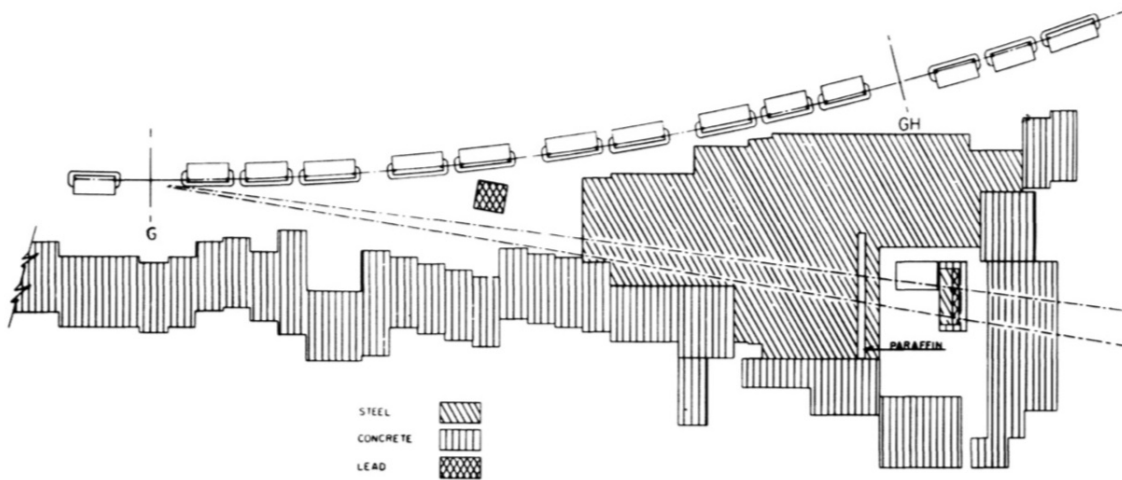


Figura 1.2: Forma del experimento de Lederman y colaboradores para la identificación del neutrino del muón ν_{μ} . La línea de vuelo del haz desde el objetivo hacia el detector forma un ángulo de 7.5 grados con respecto al punto G. Se eligió una energía operativa de 15 GeV para mantener a los muones penetrando el escudo de acero a un nivel tolerable. (Imagen tomada de Danby G. et al. *Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos*, vol. 9, ejemplar 1, pág. 37, 1962.)

1.1.3. El neutrino del tau

El tau τ es una partícula elemental, que al igual que electrón y el muón, posee una carga eléctrica igual a -1 y espín 1/2. Este leptón fue detectado por primera vez en una serie de experimentos realizados en los años 1974 y 1977 por Martin Lewis Perl y colaboradores en el Laboratorio Nacional de Aceleradores SLAC² [6]. El descubrimiento de este leptón dio la pauta para predecir la existencia de un tercer tipo de neutrino: el neutrino del tau ν_{τ} .

²Originalmente, este complejo experimental fue llamado *Stanford Linear Accelerator Center* y posteriormente adoptó el nombre que tiene hoy en día *SLAC National Accelerator Laboratory*.

El experimento para la búsqueda del neutrino del tau ν_τ se llevó a cabo en Fermilab bajo el nombre de *Direct Observation of the Nu Tau* (DONUT). Fue hasta julio del año 2000 que la colaboración del experimento DONUT anunció la existencia de este neutrino.

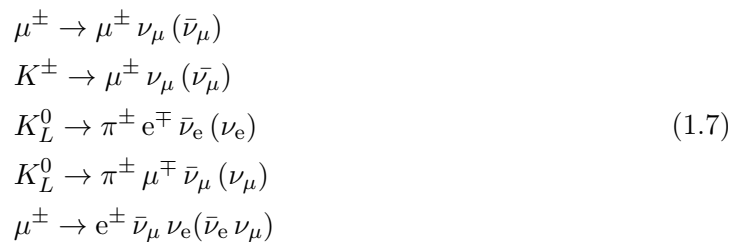
1.2. Fuentes de Neutrinos

La mayoría de los neutrinos presentes en el universo actual fueron originados alrededor de 14 mil millones de años atrás, poco después de la Gran Explosión (“Big Bang”). Desde entonces, el universo se está expandiendo y enfriando y la enorme cantidad de neutrinos que surgieron después de esa explosión forman parte del fondo de radiación cósmica [7]. El Sol es la fuente más importante de producción de neutrinos cercana a la Tierra. Los neutrinos solares se originan en el interior del Sol por fusión nuclear y les toma cerca de dos segundos para emerger de él [12, pág. 29]. Además del Sol, existen otras fuentes importantes de neutrinos como son los reactores nucleares, los aceleradores de partículas, el decaimiento de elementos radioactivos en el interior de la Tierra y el choque de los rayos cósmicos con la atmósfera terrestre. Esta última forma de producción da lugar a los que se conocen como los neutrinos atmosféricos, de los cuales haremos un estudio detallado de su producción y sus principales características.

1.2.1. Neutrinos atmosféricos

Los rayos cósmicos son partículas de muy alta energía que llegan a la Tierra desde el universo. En la región de energía del orden de los GeV por nucleón las partículas que forman los rayos cósmicos son, en su mayoría, protones ($\approx 87\%$), núcleos de helio ($\approx 11\%$) y, en menor proporción, otros núcleos pesados ($\approx 2\%$) [13, pág. 229]. Los electrones y los fotones también son parte de los rayos cósmicos, pero no contribuyen a la producción de neutrinos [14].

Cuando los rayos cósmicos entran a la Tierra chocan con los núcleos que se encuentran en la parte superior de la atmósfera. El resultado de estas colisiones da, principalmente, la producción de piones π^\pm y kaones K^\pm . Como estas partículas son inestables, decaen para eventualmente producir neutrinos del muón ν_μ y neutrinos del electrón ν_e , así como sus respectivos antineutrinos. Las principales fuentes de neutrinos (antineutrinos) son las reacciones [15, pág 517]:



En promedio se producen el doble de neutrinos del muón que del electrón en un rango de energías de 0.2 a 2 GeV [16, pág. 59]. Haciendo un conteo simple, esta relación, expresada como el cociente de los flujos de los neutrinos y antineutrinos atmosféricos de muones y electrones, nos da

$$r = \frac{\Phi^{\nu_e + \bar{\nu}_e}}{\Phi^{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}} \equiv \left(\frac{e}{\mu} \right) = \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

En realidad, haciendo una evaluación más detallada, para dicho intervalo de energías, se tiene que $r \approx 0.44$ [15, pág. 519]. A energías mayores a los 3 GeV, el flujo de neutrinos comienza decaer muy rápidamente [17], debido a que la fracción de muones que pueden llegar a la Tierra se incrementa.

Los neutrinos atmosféricos observados a diferentes ángulos con respecto al zenit recorren trayectorias que van entre los 10 y 30 kilómetros hasta llegar a trayectorias del orden de 10^4 kilómetros [16, pág. 59], ver figura 1.3.

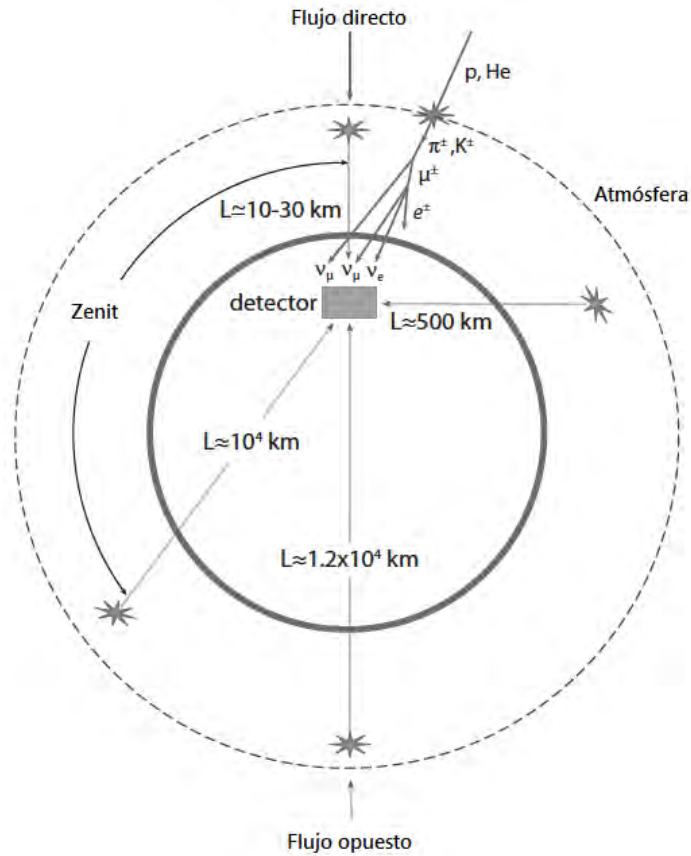


Figura 1.3: Representación esquemática de los diferentes ángulos con respecto al zenit de los neutrinos atmosféricos y la distancias que recorren para llegar al detector. (Imagen tomada de Barger, V. et al, *The Physics of Neutrinos*, Princeton University Press, New Jersey, pág. 60, 2012.)

Las primeras investigaciones sobre los neutrinos atmosféricos se realizaron en las minas de oro de East Rend, en Johannesburgo, y Kolar Gold Fields, en la India. Inicialmente, dichos experimentos se enfocaron en la búsqueda de la desintegración del protón. Sin embargo, el principal trasfondo de esta reacción eran los neutrinos atmosféricos y de esta manera surgió su estudio.

Básicamente, la detección de neutrinos se realiza por medio de interacciones débiles de corriente cargada

$$\nu_e (\nu_\mu) + N \rightarrow e^- (\mu^-) + \dots$$

donde N es el núcleo usado como blanco. Para definir la sensibilidad del experimento es

importante conocer la respuesta del detector al impacto de muones y electrones. Como regla general, sólo se usan los eventos que ocurren en un volumen aislado dentro del detector. En los detectores de radiación Cherenkov en agua, la diferencia entre un neutrino del electrón y uno del muón se despliega en forma de anillos de radiación Cherenkov con ciertas características particulares, las cuales permiten identificar a la partícula que ocasionó la interacción.

Para excluir la dependencia de los errores en la determinación de los flujos absolutos de neutrinos, se introduce el cociente de los eventos observados con los eventos esperados teóricamente como

$$R = \frac{r_{\text{obs}}}{r_{\text{teo}}} \quad (1.9)$$

En ausencia de cualquier mecanismo de conversión de neutrinos, se tiene que $R = 1$. Además de las cantidades anteriores, la asimetría entre los eventos detectados para muones y electrones es de gran interés para los físicos experimentales. Consideremos que se tiene un flujo de neutrinos, el cual es producido entre los 10 y 30 kilómetros sobre el nivel del mar. Si uno ignora la influencia del campo magnético terrestre, se tiene entonces que el flujo de rayos cósmicos es isotrópico. De esta manera, se tiene que la intensidad de la producción en el flujo de los neutrinos atmosféricos es la misma para todos los puntos en la atmósfera. Las incertidumbres en el cálculo de los flujos atmosféricos alcanzan el 20 por ciento, mientras que las incertidumbres del cociente $\Phi^{\nu_\mu}/\Phi^{\nu_e}$ son del orden del 5 por ciento. Sin embargo, si uno compara dos flujos de neutrinos provenientes de lugares diametralmente opuestos en la atmósfera terrestre, uno puede proceder sin el conocimiento de estas cantidades. Supongamos entonces que tenemos dos flujos de neutrinos del muón, los cuales provienen de puntos opuestos en la Tierra y llegan hasta un detector, como en la figura 1.3. Denotemos al flujo de neutrinos producido justo por encima del detector como $\Phi_u^{\nu_\mu}$, mientras que al flujo opuesto lo etiquetaremos como $\Phi_d^{\nu_\mu}$. Notemos que en esta situación, los neutrinos producidos a una altura h de la superficie terrestre, recorrerán esa distancia (aproximadamente) para llegar al detector, mientras que los neutrinos producidos del otro lado de la Tierra recorrerán una distancia de $2R_E + h$, con R_E el radio de la Tierra, para ser detectados. Si uno supone que no existe un mecanismo que cambie el flujo de neutrinos en su camino hacia el detector, entonces $\Phi_u^{\nu_\mu} = \Phi_d^{\nu_\mu}$.

En el cuadro 1.1 se muestran los valores de R en los primeros experimentos con neutrinos atmosféricos. De los resultados de las colaboraciones de NUSEX y Frejus se observa que los cocientes de los eventos esperados y teóricos coinciden con los límites de los errores experimentales. Sin embargo, los datos obtenidos por Kamiokande, IMB y soudan-2 mostraron que el valor de μ/e era mucho menor que el teórico. Además, los resultados de Kamiokande mostraron que el déficit en los eventos del muón tiene dependencia en el ángulo zenit y que el número de eventos para esta partícula provenientes de lugares diametralmente opuestos en la atmósfera no coincidían, es decir $\Phi_u^{\nu_\mu} \neq \Phi_d^{\nu_\mu}$. Todas las anomalías antes mencionadas son referidas como el problema de los neutrinos atmosféricos.

Después de que entró en operación el experimento de Super-Kamiokande (Super-K) en 1996, se consiguieron resultados más confiables en la detección de los flujos de los neutrinos atmosféricos. El diseño de Super-K hace posible la detección con energías de los 100 MeV hasta

Primeros experimentos con neutrinos atmosféricos			
Experimento	Tipo de detector	Exposición (kt-año)	$R = (\mu/e)_{\text{obs}} : (\mu/e)_{\text{teo}}$
NUSEX	Calorímetro de hierro	0.74	$0.96^{+0.32}_{-0.28}$
Frejus	Calorímetro de hierro	1.56	$1.00 \pm 0.15 \pm 0.08$
Kamiokande	Agua	7.7	$0.60^{+0.06}_{-0.05} \pm 0.05$
Kamiokande	Agua	8.2	$0.57^{+0.08}_{-0.07} \pm 0.07$
IMB-3	Agua	7.7	$0.54 \pm 0.05 \pm 0.012$
IMB-3	Agua	2.1	$1.4^{+0.4}_{-0.3} \pm 0.3$
Soudan-2	Calorímetro de hierro	5.1	$0.68 \pm 0.11 \pm 0.06$

Cuadro 1.1: Información de Boyarkin, O. *Advanced Particle Physics: The Standard Model and Beyond*, vol. 2, Taylor & Francis, pág. 520, 2011.

los 1000 GeV. El análisis de datos de Super-K dio los siguientes valores para R [15, pág. 521]:

$$R = 0.651^{+0.019}_{-0.018} \pm 0.05$$

$$R = 0.711 \pm 0.06 \pm 0.085$$

Las mediciones también mostraron que la distribución del flujo de neutrinos del muón con el ángulo zenit difieren significativamente de los cálculos teóricos, mientras que el flujo de los neutrinos del electrón no presentan esta anomalía. El cociente en los flujos de neutrinos $\Phi_u^{\nu\mu}$ y $\Phi_d^{\nu\mu}$ fue

$$\left[\frac{\Phi_u^{\nu\mu}(-1.0 < \cos \theta_z < -0.2)}{\Phi_d^{\nu\mu}(+0.2 < \cos \theta_z < 1.0)} \right]_{\text{obs}} = 0.52 \pm 0.05$$

La ausencia de una simetría similar para el flujo de los neutrinos del electrón demostró que existía un mecanismo que modificase al flujo en su camino hacia el detector. Esta serie de detalles son evidencia del fenómeno de oscilación de neutrinos.

1.3. Modelo estándar

El modelo estándar de partículas elementales es una teoría de carácter matemático que describe las interacciones débiles, electromagnéticas y fuertes junto con las partículas que constituyen este modelo. El modelo estándar supone que toda la materia en el universo está constituida por fermiones elementales que interactúan con los campos a través de partículas mediadoras llamadas bosones de norma [18, pág 1].

Para comprender las propiedades de las partículas elementales es necesario poder describir las fuerzas entre ellas. Las partículas en la naturaleza están sometidas a cuatro fuerzas fundamentales; en orden de intensidad decreciente, son: la fuerza fuerte, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza gravitacional. En la escala de la física de partículas las fuerzas gravitacionales son insignificantes. El modelo estándar excluye de consideración al campo gravitacional.

La fuerza fuerte es responsable de unir a los quarks estrechamente entre sí para formar protones, neutrones y otras partículas pesadas. Su alcance es extremadamente corto y es despreciable para separaciones mayores que aproximadamente 10^{-15} m. La fuerza nuclear que une a los neutrones y protones en los núcleos suele considerarse como un efecto residual de la más básica fuerza fuerte entre los quarks.

La fuerza electromagnética, que une a los electrones y a los protones en el interior de los átomos y moléculas para formar materia normal, es aproximadamente dos órdenes de magnitud más débil que la fuerza fuerte. Es una fuerza de largo alcance que decrece en intensidad como el inverso del cuadrado de la separación entre las partículas interactuantes.

La fuerza débil es una fuerza de corto alcance que explica el decaimiento beta de los núcleos y el decaimiento de los quarks y leptones más pesados. Su intensidad es de sólo aproximadamente 10^{-6} veces la de la fuerza fuerte.

Por último, la fuerza gravitacional es una fuerza de largo alcance cuya intensidad es sólo 10^{-43} veces la de la fuerza fuerte. A pesar de que esta fuerza es la responsable de mantener unidos a los planetas, las estrellas y las galaxias, su efecto sobre las partículas elementales es despreciable.

Interacciones de partículas					
Interacción (Fuerza)	Partículas sobre las que actúa	Intensidad relativa	Duraciones típicas para desintegraciones vía una interacción dada	Alcance de fuerza	Partícula intercambiada portadora de fuerza
Fuerte	Quarks y hadrones	1	$\leq 10^{-20}$ s	Corto (≈ 1 fm)	Gluón
Electromagnética	Partículas cargadas	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-16}$ s	Largo (∞)	Fotón
Débil	Quarks y leptones	$\approx 10^{-6}$	$\geq 10^{-10}$ s	Corto ($\approx 10^{-3}$ fm)	Bosones W^\pm y Z^0
Gravitacional	Todas las partículas	$\approx 10^{-43}$?	Largo (∞)	Gravitón

Cuadro 1.2: Resumen de las principales características de las interacciones fundamentales. El apartado de intensidad relativa tiene como referencia a dos quarks u a 3×10^{-17} m. (Información de Serway R. et al. *Física moderna*, Cengage Learning, tercera edición, Cengage Learning, México, pág.549, 2005)

Desde un punto de vista clásico, la entidad responsable de transmitir una fuerza de una partícula a otra es el campo. El campo puede transportar energía y cantidad de movimiento de una partícula a otra. Según las teorías de campo cuánticas, la energía y la cantidad de movimiento de todos los campos están cuantizadas, y el cuanto que transporta un “gránulo” de cantidad de movimiento y energía de un tipo de partícula a otra se denomina partícula de campo. En física de partículas, las interacciones entre éstas se describen en términos del intercambio de campo, o cuantos, todos ellos bosones. En el caso de la interacción electromagnética, por ejemplo, puede decirse que la fuerza electromagnética es mediada, o transportada, por fotones y que éstos son los cuantos del campo electromagnético. De manera semejante, la fuerza fuerte es mediada por partículas de campo denominadas gluones. La fuerza débil es mediada por partículas conocidas como bosones W^\pm y Z^0 . Finalmente, la fuerza gravitacional es transportada por cuantos llamados gravitones [19, pág. 549]. Todas estas interacciones, las partículas sobre las que actúan, sus alcances, sus intensidades relativas y las partículas de campo correspondientes se resumen en el cuadro 1.2.

La cuarta columna de esta tabla presenta otra forma de clasificar las interacciones: por medio del tiempo de vida observado de una partícula que decae. En realidad, con sólo unas cuantas

excepciones, el tiempo de vida de las partículas en desintegración constituye un excelente indicador sobre cuál interacción ha provocado el decaimiento; tiempos de vida más breves están asociados a fuerzas más intensas. Como se muestra en la tabla 1.2, las partículas que decaen vía esta fuerza fuerte suelen ser las de tiempo de vida más corto, luego vienen las que decaen por las fuerzas electromagnéticas; y por último, las partículas que decaen debido a la interacción débil, las cuales tienen los tiempos de vida más largos observados [19, pág 550].

1.3.1. Leptones

Los leptones (del griego *leptos*, que significa “pequeño” o “ligero”) son un grupo de partículas que participan en las interacciones débil y electromagnética. Todos los leptones poseen un espín de $1/2$, en unidades de \hbar . Existen seis leptones, clasificados de acuerdo a su carga eléctrica Q , su número electrónico L_e , su número muónico L_μ y su número tauónico L_τ . Estos leptones se acomodan en tres familias o generaciones:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

El cuadro 1.3 muestra que el leptón tau en realidad es bastante masivo y que su masa es alrededor del doble de la masa del protón. También es de apreciarse que cada leptón tiene una antipartícula. Es bastante inesperado e interesante que los neutrinos y los antineutrinos tengan, cada uno, una helicidad distinta, o relación entre la cantidad de movimiento lineal y las direcciones del espín. El espín de un neutrino es opuesto a su dirección de desplazamiento, en tanto que el espín de un antineutrino es paralelo a su dirección de desplazamiento. Como se verá, conocer bien la masa del neutrino posee gran importancia en los modelos físicos para consolidar las teorías de unificación de partículas elementales.

Leptones							
Nombre de la partícula	Símbolo	Antipartícula	Masa (MeV/c ²)	Q	$L_{e\mp}$	$L_{\mu\mp}$	$L_{\tau\mp}$
Electrón	e^-	e^+	0.511	-1	± 1	0	0
Neutrino del electrón	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< 2.8 \times 10^{-6}$	0	± 1	0	0
Muón	μ^-	μ^+	105.7	-1	0	± 1	0
Neutrino del muón	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	$< 3.5 \times 10^{-6}$	0	0	± 1	0
Tau	τ^-	τ^+	1784	-1	0	0	± 1
Neutrino del tau	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	$< 8.4 \times 10^{-6}$	0	0	0	± 1

Cuadro 1.3: Incluyendo a los antileptones, la familia de los leptones está constituida de 12 elementos en total.

1.3.2. Quarks

En 1963, Murray Gell-Mann y George Zweig propusieron cada uno por separado que los hadrones³ poseen una subestructura más elemental. Según su modelo todos los hadrones son sistemas compuestos por dos o tres constituyentes fundamentales denominados quarks⁴. En el modelo original había tres tipos de quarks designados por los símbolos u , d y s , derivados de los nombres arbitrarios arriba (up), abajo (down) y laterales (sideways) o, ahora más comúnmente, extraño (strange) [19, pág. 574]. Con el paso de los años, principalmente en la década de los años 70, se fueron encontrando los quarks (charm, c), (top, t) y (bottom, b).

Una propiedad poco común de los quarks es que fue necesario asignarles cargas electrónicas fraccionarias. Las cargas de los quarks u , d y s son $+2/3$, $-1/3$ y $-1/3$, respectivamente. Cada quark tiene un número bariónico de $1/3$ y un espín de $1/2$. La extrañeza de los quarks u y d es 0, mientras que la del quark s es -1. Con cada quark está asociado un antiquark de carga, número bariónico y extrañeza opuestas. En el cuadro 1.4 se proporcionan otras propiedades de los quarks.

Quarks								
Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónico	Extrañeza	Encanto	Bottomness	Topness
Arriba	u	$1/2$	$+2/3$	$+1/3$	0	0	0	0
Abajo	d	$1/2$	$-1/3$	$+1/3$	0	0	0	0
Extraño	s	$1/2$	$-1/3$	$+1/3$	-1	0	0	0
Encantado	c	$1/2$	$+1/3$	$+1/3$	0	+1	0	0
Inferior	b	$1/2$	$-1/3$	$+1/3$	0	0	-1	0
Superior	t	$1/2$	$+1/3$	$+1/3$	0	0	0	+1

Cuadro 1.4: Para obtener las propiedades de los antiquarks basta con intercambiar los signos en cada una de las propiedades correspondientes.

1.3.3. Teoría electrodébil

De la tabla 1.2 se aprecia que la interacción débil es una fuerza de alcance extremadamente corto, puesto que su distancia de interacción es aproximadamente igual a 10^{-18} m. Esta interacción de corto alcance implica que las partículas cuantizadas que transportan el campo débil (los bosones W^+ , W^- y Z^0) son bastante masivas. Las particularidades de estos bosones de norma es que carecen de estructura interna, semejan ser puntuales y son tan masivos como un átomo de kriptón⁵. Como ya se ha mencionado, la interacción débil es la responsable del decaimiento del neutrón y del decaimiento beta de otros bariones más pesados. Más importante que lo anterior, la interacción débil es responsable de la desintegración de los quarks c , s , b y t en los más ligeros y estables quarks u y d , así como de la desintegración de los leptones masivos μ y

³Las partículas que interactúan a través de la fuerza fuerte se les denomina hadrones. Las dos clases de hadrones, los mesones y los bariones, se distinguen por sus masas y espines.

⁴Zweig los denominó “ases”. Gell-Mann tomó prestado el término *quarks* del pasaje “Three quarks for Muster Mark” en la obra *Finnegan’s Wake* de James Joyce.

⁵La masa de un átomo de Kr es aproximadamente $78 \text{ GeV}/c^2$.

τ en electrones (más ligeros). Por todas estas razones, la interacción de campo débil es muy importante debido a que rige la estabilidad de las partículas básicas de la materia [19, pág. 580].

Otro rasgo interesante de la interacción débil es su falta de simetría, en especial cuando se le compara con el elevado grado de simetría mostrado por las otras tres interacciones fundamentales. Por ejemplo, la interacción débil, a diferencia de la interacción fuerte no es simétrica bajo reflexión especular⁶ o intercambio de carga⁷. Cuando se habla de que la interacción débil no es simétrica significa que la reacción con todos los cambios de cantidades ocurre con menos frecuencia que la reacción directa.

En el año de 1979, los físicos Sheldon Glashow, Steven Weinberg y Abdus Salam ganaron el premio Nobel de física por haber desarrollado una teoría que unifica las interacciones electromagnética y débil. Esta teoría electrodébil postula que las interacciones débil y electromagnética tienen la misma intensidad para partículas de energías muy elevadas. Así, las dos interacciones son consideradas como dos manifestaciones diferentes de una sola interacción electrodébil unificadora. El fotón y los tres bosones masivos (W^\pm y Z^0) juegan un rol fundamental en la teoría electrodébil. Uno de los grandes éxitos de esta teoría fue el concerniente a las masas de las partículas W y Z de alrededor de $80 \text{ GeV}/c^2$ y $91 \text{ GeV}/c^2$, respectivamente. El premio Nobel de 1984 fue otorgado a Carlo Rubia y Simon van der Meer por su trabajo que condujo al descubrimiento de estas partículas justo con esas masas en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN).

En física de altas energías, la combinación de la teoría electrodébil y la electrodinámica cuántica para la interacción de campo fuerte se denomina modelo estándar [19, pág. 580]. El modelo estándar no contesta todas las preguntas. Requiere como parámetros de entrada más de una docena de números medidos, como las masas de los leptones y los quarks. Además, no explica el porqué de la existencia de seis tipos de leptones como también de quarks. Una cuestión específica concerniente a las partículas de campo es por qué el fotón carece de una masa mientras que los bosones W y Z sí cuentan con ella. Debido a esta diferencia, las fuerzas electromagnética y débil son tan distintas a bajas energías, pero se hacen semejantes, o simétricas, a energías muy elevadas. Este comportamiento en la transición de energías altas a bajas se denomina ruptura de simetría. En 1964, el físico escocés Peter Higgs introdujo un mecanismo para el rompimiento de simetría electrodébil al proponer un nuevo campo, denominado campo de Higgs, que permea todo el espacio y proporciona masa a las partículas. Así como todos los campos clásicos, la cuantización del campo de Higgs conduce a una partícula que transporta fuerza denominada bosón de Higgs. El modelo estándar, incluyendo el mecanismo de Higgs, proporciona una explicación lógica y consistente de la naturaleza masiva de los bosones W y Z . En la figura 1.4 hace un resumen de todas las partículas básicas del modelo estándar, la cual, además, contiene la información principal de cada una de éstas.

⁶La reflexión especular significa que todas las cantidades en una reacción de una partícula dada se intercambian como en una reflexión especular: izquierda por derecha, un movimiento en dirección al espejo por un movimiento hacia fuera.

⁷El intercambio de carga es intercambiar los signos de las cargas eléctricas en una reacción de partículas por sus opuestas.

mass →	$\approx 2.3 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.275 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.07 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 126 \text{ GeV}/c^2$
charge →	2/3	2/3	2/3	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H Higgs boson
QUARKS	$\approx 4.8 \text{ MeV}/c^2$ -1/3 1/2 d down	$\approx 95 \text{ MeV}/c^2$ -1/3 1/2 s strange	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$ -1/3 1/2 b bottom	0 0 1 γ photon	
	$0.511 \text{ MeV}/c^2$ -1 1/2 e electron	$105.7 \text{ MeV}/c^2$ -1 1/2 μ muon	$1.777 \text{ GeV}/c^2$ -1 1/2 τ tau	91.2 GeV/c ² 0 1 Z Z boson	GAUGE BOSONS
LEPTONS	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$ 0 1/2 ν_e electron neutrino	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$ 0 1/2 ν_μ muon neutrino	$< 15.5 \text{ MeV}/c^2$ 0 1/2 ν_τ tau neutrino	80.4 GeV/c ² ±1 1 W W boson	

Figura 1.4: Modelo estándar de partículas elementales. En color violeta se muestran los seis tipos de quarks con sus respectivas masas, cargas eléctricas y espines. De igual manera, se tienen a los seis leptones conocidos en color verde y los bosones de norma en rojo claro. El bosón de Higgs aparece en color amarillo y es el bosón de norma que compone el fenómeno del rompimiento de simetría. (Imagen tomada de https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model)

Capítulo 2

Oscilaciones de neutrinos

Entre los años de 1957 y 1958 Bruno Pontecorvo formuló la primera idea de que los neutrinos podrían transformarse entre uno y otro. En ese tiempo, la teoría de Murray Gell-Mann y Abraham Pais de oscilaciones para los mesones $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ había sido ya comprobada por los experimentos. Pontecorvo estaba fascinado con la idea de las oscilaciones entre partículas y pensó en aplicar estos resultados para los leptones. La idea inicial era que un neutrino podría transformarse en un antineutrino y viceversa. Después del descubrimiento del neutrino del muón, Pontecorvo aplicó su idea de oscilaciones de neutrinos al caso de los dos diferentes tipos de neutrinos ν_e y ν_μ . En los años siguientes se fueron desarrollando teorías y experimentos para tratar de pulir las ideas de Pontecorvo y encontrar la manera de corroborar sus hipótesis. Sin embargo, a pesar de ciertos indicios en experimentos con neutrinos solares, no fue hasta 1998 (casi 40 años después) que el experimento de Super-Kamiokande en Japón dio la primer muestra de evidencia contundente del fenómeno de oscilaciones. Posteriormente, en el año 2002, el observatorio de neutrinos de Sudbury, SNO¹ por sus siglas en inglés, en Ontario Canadá publicó los resultados de sus experimentos, los cuales terminaron de probar la existencia del fenómeno de oscilaciones al resolver el problema del rompecabezas de los neutrinos solares².

2.1. Oscilaciones en el vacío

Consideremos el caso unidimensional en el que al tiempo $t = t_0$ producimos un neutrino de sabor definido $|\nu_\alpha\rangle$. Si este estado evoluciona a lo largo del tiempo, después de un tiempo t , tendremos

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\nu(t_0)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

donde $\hat{U}(t, t_0)$ es el operador de evolución, el cual debe satisfacer las condiciones siguientes

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad \text{y} \quad \hat{U}(t, t_0)^\dagger = \hat{U}(t, t_0)^{-1}, \quad (2.2)$$

¹Sudbury Neutrino Observatory.

²El problema de los neutrinos solares surgió de la discrepancia entre el número de neutrinos que llegaban a la Tierra y los modelos teóricos del interior del Sol. Este problema persistió desde mediados de la década de los 60 hasta el año 2002. Fue gracias al experimento del SNO que se pudo resolver esta incógnita.

con \mathbb{I} la matriz identidad. Empleando la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

podemos encontrar una relación para poder determinar al operador de evolución $\hat{U}(t, t_0)$. Sustituyendo la expresión (2.1) en (2.3) obtenemos

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (2.4)$$

Por tanto, del resultado anterior, vemos que el operador de evolución está determinado cuando el hamiltoniano $\hat{H}(t)$ del sistema es dado. En particular, si \hat{H} no depende explícitamente del tiempo, podemos resolver fácilmente la ecuación (2.4) para obtener

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)}, \quad (2.5)$$

donde vemos que $\hat{U}(t, t_0)$ cumple con las condiciones dadas en (2.2).

Ahora nos gustaría conocer la amplitud de probabilidad de que al tiempo t el sistema se encuentre en un estado $|\nu_\beta\rangle$. Por lo tanto, necesitamos calcular

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \langle \nu_\beta | \psi(t) \rangle = \langle \nu_\beta | \hat{U}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle. \quad (2.6)$$

Para calcular (2.6) de manera explícita, es conveniente trabajar en una base donde el operador hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0$ sea diagonal. En particular, dicha base es conocida como la base de los eigenestados de masa $\{|\nu_l\rangle\}$. Para hacer el cambio de base, reescribamos la ecuación (2.6) como

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \sum_{k,j} \langle \nu_\beta | \nu_k \rangle \langle \nu_k | \hat{U}(t, t_0) | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle, \quad (2.7)$$

con

$$\sum_l |\nu_l\rangle \langle \nu_l| = \mathbb{I}$$

Los eigenestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ se relacionan con los eigenestados de masa $|\nu_j\rangle$ mediante una matriz unitaria $U_{\alpha j}$, mejor conocida como matriz de mezcla³, de la siguiente manera

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha j} |\nu_j\rangle \quad (2.8)$$

De igual forma, los eigenestados de masa se pueden escribir en términos de los eigenestados de sabor como

$$|\nu_j\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha j}^* |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.9)$$

donde $U_{j\alpha}^\dagger = U_{\alpha j}^*$.

De las ecuaciones (2.8) y (2.9) tenemos que

$$\langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = U_{\alpha j} \quad \text{y} \quad \langle \nu_\beta | \nu_k \rangle = U_{\beta k}^*, \quad (2.10)$$

³En la literatura también se le puede encontrar como matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata).

donde hemos usado las propiedades de unitariedad de la matriz de mezcla, las cuales son

$$\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha} U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} = \delta_{jk}$$

Sustituyendo los resultados de (2.10) en la ecuación (2.7) se obtiene

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \sum_{k,j} U_{\beta k}^* \langle \nu_k | \hat{U}(t, t_0) | \nu_j \rangle U_{\alpha j} \quad (2.11)$$

Por otro lado, usando la ecuación de Schrödinger (2.3), vemos que

$$\hat{U}(t, t_0) | \nu_j \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t-t_0)} | \nu_j \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_j(t-t_0)} | \nu_j \rangle \quad (2.12)$$

Para escribir el último resultado se interpretó al operador $\hat{U}(t, t_0)$ en términos de su serie de potencias:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t-t_0)} | \nu_j \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^m \hat{H}_0^m | \nu_j \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\right)^m E_j^m | \nu_j \rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} E_j(t-t_0)} | \nu_j \rangle \end{aligned}$$

Usando el resultado anterior, la expresión (2.11) quedaría como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0) &= \sum_{k,j} U_{\beta k}^* \left\langle \nu_k \left| e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_j} \right| \nu_j \right\rangle U_{\alpha j} = \sum_{k,j} U_{\beta k}^* U_{\alpha j} e^{-\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)} \langle \nu_k | \nu_j \rangle \\ &= \sum_{k,j} U_{\beta k}^* U_{\alpha j} e^{-\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)} \delta_{kj} = \sum_j U_{\beta j}^* U_{\alpha j} e^{-\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)} \end{aligned}$$

De esta manera, la amplitud de probabilidad de que el estado $|\nu_{\alpha}\rangle$ decaiga al estado $|\nu_{\beta}\rangle$ al tiempo t es:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \sum_j U_{\beta j}^* U_{\alpha j} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_j}} \quad (2.13)$$

Una vez que conocemos la amplitud de probabilidad de manera explícita, podemos entonces calcular la probabilidad de que al tiempo t un estado $|\nu_{\alpha}\rangle$ vaya al estado $|\nu_{\beta}\rangle$ como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(t) &= |\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 \\ &= \left(\sum_k U_{\beta k}^* U_{\alpha k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k(t-t_0)} \right) \left(\sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{\frac{i}{\hbar}E_j(t-t_0)} \right) \\ &= \sum_{k,j} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_j)(t-t_0)} \\ &= \sum_{k,j} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar}E_{kj}\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde hemos introducido $\Delta t = t - t_0$ y $E_{kj} = E_k - E_j$ para simplificar las expresiones.

La expresión dada por (2.14) todavía se puede trabajar un poco más con la finalidad de que resulte una relación más sencilla. La manera de hacer este cálculo es desarrollar la suma sobre los índices j y k en tres casos posibles: una primera suma que corresponda al caso $j = k$; una segunda, a $j < k$; y una tercera, a $j > k$. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \sum_j U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* + \sum_{j < k} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} + \sum_{j > k} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-i E_{kj} \Delta t} \\ &= \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + \sum_{j < k} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} + \sum_{j > k} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} \end{aligned}$$

De la expresión anterior, tomemos el tercer sumando y hagamos el cambio k por j :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + \sum_{j < k} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} + \sum_{j < k} U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{jk} \Delta t} \\ &= \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + \sum_{j < k} \left(U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} + U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{jk} \Delta t} \right), \end{aligned}$$

pero $E_{jk} = E_j - E_k = -(E_k - E_j) = -E_{kj}$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + \sum_{j < k} \left(U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} + U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} \right) \\ &= \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} \left(U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un estado $|\nu_\alpha\rangle$ decaiga a $|\nu_\beta\rangle$ viene dada por,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} \left(U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar} E_{kj} \Delta t} \right)} \quad (2.15)$$

La expresión anterior muestra la probabilidad como la suma de un término constante y otro oscilatorio. En la literatura se suele modelar a los neutrinos como partículas ultrarrelativistas, lo cual significa que la magnitud de su momento lineal $|\mathbf{p}|$ es muchísimo más grande que la masa del neutrino. En particular, recordemos que nosotros tenemos dos neutrinos de energías E_k y E_j respectivamente. Suponiendo que ambos neutrinos tienen el mismo momento lineal, podemos hacer uso de la aproximación ultrarrelativista de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_{kj} &= E_k - E_j = c \left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_k^2 c^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_j^2 c^2} \right) \\ &= |\mathbf{p}| c \left(\sqrt{1 + \frac{m_k^2}{|\mathbf{p}|^2}} - \sqrt{1 + \frac{m_j^2}{|\mathbf{p}|^2}} \right) \\ &\approx |\mathbf{p}| c \left[\left(1 + \frac{m_k^2 c^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) - \left(1 + \frac{m_j^2 c^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) \right] \\ &= \frac{(m_k^2 - m_j^2) c^3}{2|\mathbf{p}|} \approx \frac{(m_k^2 - m_j^2) c^4}{2E} \equiv \Delta_{kj}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De esta forma, podemos escribir a la probabilidad de transición como:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \text{Re} \left(U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\Delta_{kj}} \right) \quad (2.17)$$

El tratamiento realizado hasta el momento asume que los diferentes eigenestados de masa tienen el mismo momento lineal, lo cual es técnicamente incorrecto. Un tratamiento más adecuado para considerar neutrinos con diferente momento lineal es usar el formalismo de paquetes de onda. Sin embargo, para fines prácticos, ambos tratamientos conducen a las mismas fórmulas para oscilaciones de neutrinos.

Antes de continuar con el uso de la ecuación (2.17), es conveniente mostrar que la suma sobre todas las probabilidades es igual a uno. Esto se puede observar desde la ecuación (2.6). Notemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 &= \mathcal{A}_{\beta\alpha}^*(t, t_0) \mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0) \\ &= \langle \nu_\alpha | \hat{U}^\dagger(t, t_0) | \nu_\beta \rangle \langle \nu_\beta | \hat{U}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \sum_\beta |\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 &= \sum_\beta \langle \nu_\alpha | \hat{U}^\dagger(t, t_0) | \nu_\beta \rangle \langle \nu_\beta | \hat{U}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle \\ &= \langle \nu_\alpha | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \left(\sum_\beta |\nu_\beta\rangle \langle \nu_\beta| \right) \hat{U}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle \\ &= \langle \nu_\alpha | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle = \langle \nu_\alpha | \nu_\alpha \rangle = 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la probabilidad total es igual a la unidad.

Para hacer uso de la ecuación (2.17), estudiaremos dos casos importantes. Primero supondremos que sólo tenemos dos generaciones de fermiones y calcularemos de manera explícita la forma de las probabilidades. Luego, haremos el caso para tres neutrinos y veremos como cambian las expresiones dadas en el caso de dos sabores.

2.1.1. Dos neutrinos

Supongamos que sólo existen dos tipos de neutrinos de sabores α y β . En este caso, las matrices de mezcla tienen la forma

$$U = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1} & U_{\alpha 2} \\ U_{\beta 1} & U_{\beta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1}^* & U_{\alpha 2}^* \\ U_{\beta 1}^* & U_{\beta 2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Debido a que los elementos de las matrices de mezcla son reales, podemos escribir la probabilidad de transición como

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_j |U_{\beta j}|^2 |U_{\alpha j}|^2 + 2 \sum_{j < k} U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \cos \left(\frac{\Delta_{kj}}{\hbar}(t - t_0) \right) \quad (2.19)$$

La probabilidad de que un neutrino en el estado $|\nu_\alpha\rangle$ permanezca en ese mismo estado después de un tiempo t se conoce como probabilidad de supervivencia. Luego, de (2.19) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(t) &= \sum_j |U_{\alpha j}|^4 + 2 \sum_{j < k} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \cos\left(\frac{\Delta_{kj}}{\hbar}(t - t_0)\right) \\
&= |U_{\alpha 1}|^4 + |U_{\alpha 2}|^4 + 2|U_{\alpha 2}|^2 |U_{\alpha 1}|^2 \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{\hbar}(t - t_0)\right) \\
&= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{\hbar}(t - t_0)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{\hbar}(t - t_0)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{\hbar}(t - t_0)\right)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta 2 \sin^2\left(\frac{\Delta_{21}}{2\hbar}(t - t_0)\right) \\
&= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta_{21}}{2\hbar}(t - t_0)\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el caso de dos neutrinos, la probabilidad de supervivencia es

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{(m_2^2 - m_1^2) c^4}{4E} \frac{c}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

o bien, en términos de distancia, usando que $r - r_0 \simeq c(t - t_0)$, tenemos

$$\boxed{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(r) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{(m_2^2 - m_1^2) c^3}{4E} \frac{c}{\hbar} (r - r_0) \right]} \quad (2.20)$$

Por otro lado, la probabilidad de transición entre dos estados de sabor diferente se puede obtener directamente de la ecuación (2.20) empleando el hecho de que la probabilidad total es igual a la unidad. Es decir,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(r) = 1 - \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(r) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{(m_2^2 - m_1^2) c^3}{4E} \frac{c}{\hbar} (r - r_0) \right]} \quad (2.21)$$

Las fórmulas (2.20) y (2.21) son importantes porque, bajo ciertas aproximaciones, el estudio para oscilaciones en el caso de tres neutrinos se termina a reduciendo a expresiones que son muy similares a estas dos ecuaciones.

2.1.2. Tres neutrinos

Si asumimos ahora que existen tres neutrinos masivos, la matriz de mezcla U puede ser expresada en términos de tres ángulos de mezcla, θ_{12} , θ_{23} y θ_{13} , y una fase δ de acuerdo con

$$U = \mathcal{O}_{23}(\theta_{23}) \Gamma(\delta) \mathcal{O}_{13}(\theta_{13}) \Gamma^\dagger(\delta) \mathcal{O}_{12}(\theta_{12}), \quad (2.22)$$

donde $\mathcal{O}_{jk}(\theta_{jk})$ representa una rotación de Euler por θ_{jk} en el plano jk y

$$\Gamma(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

En componentes, la matriz de mezcla se expresa como

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde se acostumbra abreviar $c_{jk} = \cos \theta_{jk}$ y $s_{jk} = \sin \theta_{jk}$.

Veamos cómo es la probabilidad de supervivencia en este caso. Si en (2.17) cambiamos β por α , y además que $r - r_0 \simeq c(t - t_0)$, obtendremos la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(r) &= \sum_j |U_{\alpha j}|^4 + 2 \sum_{j < k} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \cos \left(\frac{\Delta_{kj}}{\hbar c} (r - r_0) \right) \\ &= \sum_j |U_{\alpha j}|^4 + 2 \sum_{j < k} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \cos \left[\frac{(m_k^2 - m_j^2) c^3}{2E} \frac{1}{\hbar} (r - r_0) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Definiendo los argumentos de oscilación para los fenómenos atmosféricos y solares como

$$\phi_{31} = \frac{(m_3^2 - m_1^2) c^3}{4E} \frac{1}{\hbar} (r - r_0) \quad \text{y} \quad \phi_{21} = \frac{(m_2^2 - m_1^2) c^3}{4E} \frac{1}{\hbar} (r - r_0) \quad (2.26)$$

respectivamente, tenemos entonces que las probabilidades de supervivencia son:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(r) &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \phi_{31} - \sin^2 \phi_{21} (c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{12} + s_{12}^2 \sin^2 2\theta_{13}) \\ &\quad + K' s_{12}^2 \sin^2 2\theta_{13} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(r) &= 1 - \sin^2 \phi_{31} (c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} + s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}) \\ &\quad + K' [c_{13}^2 (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{12}^2) \sin^2 2\theta_{23} + s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} - 8K s_{23}^2] \\ &\quad - [\sin^2 2\theta_{12} (c_{23}^2 - s_{13}^2 s_{23}^2)^2 + s_{13}^2 \sin^2 2\theta_{23} (1 - c_\delta^2 \sin^2 2\theta_{12}) \\ &\quad + \frac{1}{2} s_{13} c_\delta \sin 4\theta_{12} \sin 4\theta_{23} + s_{12}^2 s_{23}^2 (\sin^2 2\theta_{13} - 16K) \\ &\quad + \sin^2 2\theta_{23} c_{13}^2 (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{12}^2)] \sin^2 \phi_{21}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde se han definido, por simplicidad, los parámetros K y K' como

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{8} c_{13} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} c_\delta \\ K' &= \frac{1}{2} \sin 2\phi_{21} \sin 2\phi_{31} + 2 \sin^2 \phi_{31} \sin^2 \phi_{21} \end{aligned}$$

Por otro lado, las probabilidades de transición relevantes son:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(r) &= s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \phi_{31} + 4JB - K'(s_{23}^2 s_{12}^2 \sin^2 2\theta_{13}) \\ &\quad + \sin^2 \phi_{21} [c_{13}^2 (c_{23}^2 - s_{13}^2 s_{23}^2) \sin^2 2\theta_{12} + s_{23}^2 s_{12}^2 \sin^2 2\theta_{13} - 8K s_{12}^2] \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau}(r) &= c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \phi_{31} + 4JB - K'[c_{13}^2 \sin^2 2\theta_{23} (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{12}^2) \\ &\quad + 4K \cos 2\theta_{23}] + \sin^2 \phi_{21} [\sin^2 2\theta_{13} (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{23}^2)^2 + 4K \cos 2\theta_{23} \\ &\quad + s_{13}^2 \sin^2 2\theta_{12} (1 - \sin^2 2\theta_{23} c_\delta^2) + \frac{1}{4} s_{13} \sin 4\theta_{12} \sin 4\theta_{23} (1 + s_{13}^2) c_\delta], \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde el invariante de Jarlskog J , el cual viola CP^4 , es

$$J = \frac{1}{8} c_{13} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} s_\delta, \quad (2.31)$$

mientras que se ha incorporado un término común B para simplificar un poco las expresiones anteriores. A saber,

$$B = \sin 2\phi_{21} \sin^2 \phi_{31} - \sin 2\phi_{31} \sin^2 \phi_{21}$$

Para oscilaciones cuya línea base sea muy grande, como lo es en el caso de los neutrinos atmosféricos, el argumento dominante es ϕ_{31} , y en tal caso las probabilidades de oscilación en el vacío (donde sólo son apreciables las oscilaciones con el término $m_3^2 - m_1^2$) son:

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(r) \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \phi_{31} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(r) \simeq 1 - (c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} + s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}) \sin^2 \phi_{31} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(r) \simeq s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \phi_{31} \quad (2.34)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau}(r) \simeq c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \phi_{31} \quad (2.35)$$

Notemos que las expresiones (2.32) - (2.35) son bastante parecidas a las obtenidas en el caso de dos neutrinos. Además, ya que las cuatro ecuaciones anteriores sólo dependen del parámetro de oscilación ϕ_{31} y el periodo de la función seno cuadrado es π , podemos definir la longitud de oscilación para los neutrinos atmosféricos con ayuda de las ecuaciones dadas en (2.26) como

$$|l_{31}| = \frac{4\pi E}{|m_3^2 - m_1^2|} \frac{\hbar}{c^3} \quad (2.36)$$

La longitud de oscilación característica dada por (2.36) es de vital importancia para el desarrollo de los experimentos de detección de neutrinos. Por ejemplo, si tenemos una fuente que produce neutrinos de determinado sabor en un intervalo de energías bien definido, con ayuda de la ecuación (2.36) podemos hacer una estimación de la distancia a la que debemos colocar el detector de la fuente para observar el fenómeno que estamos buscando, ya sea un experimento

⁴Salvo en el caso donde $\delta = 0$.

de aparición o desaparición⁵. En el caso de los neutrinos atmosféricos, las energías que se utilizan son del orden de GeV. Usando esta escala de energías y el valor de la diferencia de los cuadrados de las masas, tenemos que la longitud de oscilación característica por unidad de energía para los neutrinos atmosféricos es

$$\frac{l_{31}}{E} \approx 991.821 \frac{\text{km}}{\text{GeV}} \quad (2.37)$$

En otras palabras, lo que el número dado por (2.37) significa es que los neutrinos con una energía del orden de 1 GeV requieren aproximadamente una distancia de 992 kilómetros para completar una oscilación desde el punto en el que sean producidos. La figura 2.1 muestra las probabilidades de oscilación producidas por las ecuaciones (2.32) - (2.35) como funciones del cociente de la distancia y la energía.

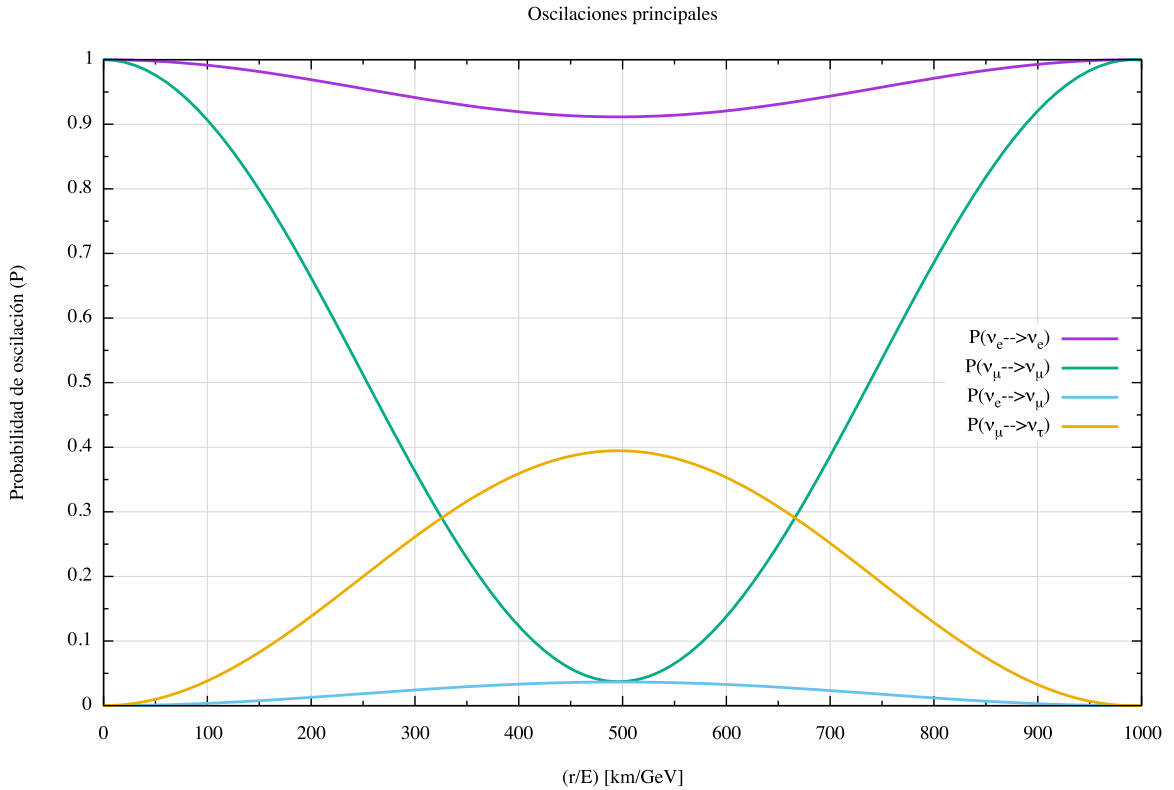


Figura 2.1: Probabilidades principales de transición para los neutrinos atmosféricos que dependen del cociente r/E . La probabilidad de supervivencia del neutrino del muón ν_μ junto con la probabilidad de conversión del neutrino del muón ν_μ al neutrino del tau ν_τ son las dos oscilaciones que presentan los cambios más apreciables en sus distancias de oscilación características.

Los neutrinos atmosféricos son producidos entre 10 y 30 kilómetros de altura con respecto

⁵En la práctica es imposible medir la probabilidad de oscilación para valores precisos de la distancia y la energía de los neutrinos. En cualquier experimento, tanto la fuente como el proceso de detección tienen una incertidumbre espacial. Por esta razón, lo que se suele hacer es promediar las expresiones de las probabilidades de transición para distribuciones apropiadas de la distancia y la energía.

a la superficie terrestre. Suponiendo que la distancia de producción sea el promedio, 20 kilómetros, podemos entonces ver cómo varían las probabilidades de conversión como funciones de la energía únicamente. La figura 2.2 muestra la situación descrita anteriormente. Debido a que los neutrinos atmosféricos tienen energías superiores a 1 GeV, las probabilidades de supervivencia son prácticamente iguales a la unidad, mientras que las conversiones entre un sabor y otro son nulas. El suponer que los neutrinos atmosféricos no oscilan desde su punto de producción hasta que llegan a la superficie constituye una muy buena aproximación para el estudio de la propagación de éstos a través del interior de la Tierra.

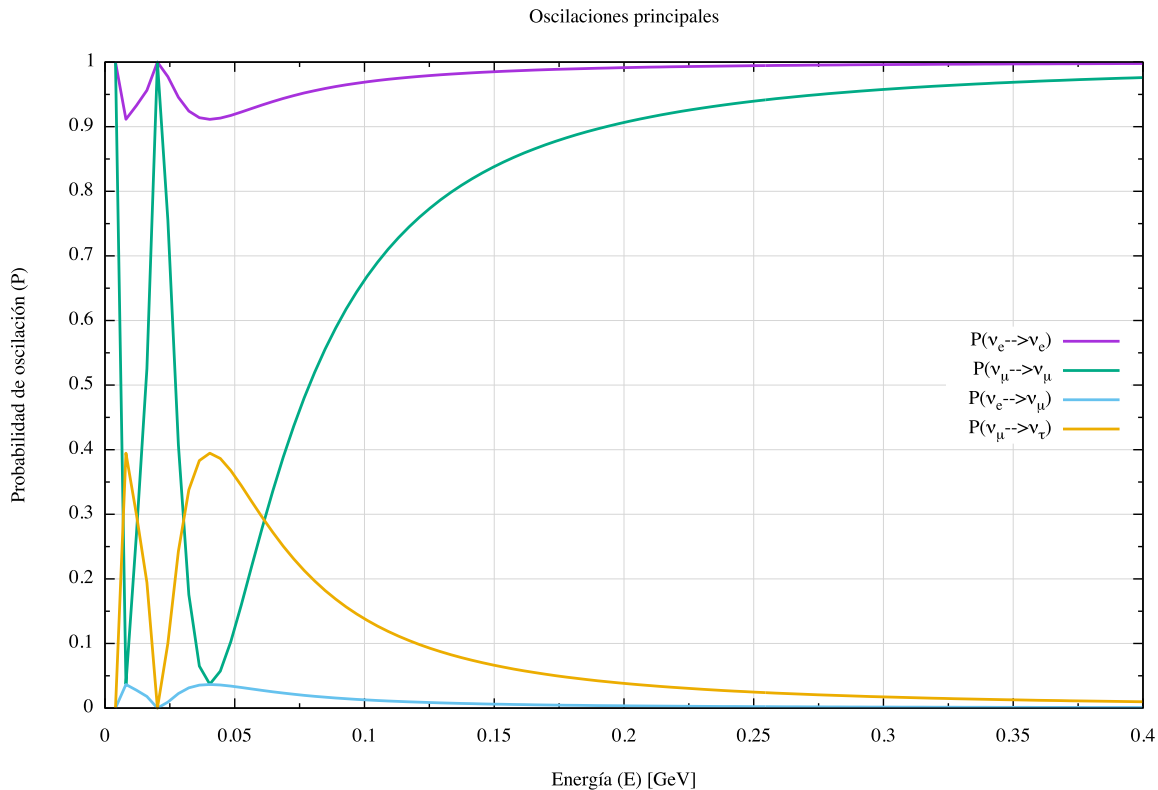


Figura 2.2: Probabilidades de transición como funciones de la energía para una distancia fija de producción a 20 kilómetros de la superficie terrestre. Es prácticamente improbable observar un fenómeno de oscilación de los neutrinos atmosféricos desde el punto en donde sean producidos hasta su llegada a la superficie de la Tierra.

2.1.3. Resumen fenomenológico de oscilaciones

Las masas de los neutrinos y las matrices de mezcla poseen las siguientes características:

1. Las diferencias de los cuadrados de las masas de los neutrinos tienen un carácter jerárquico. La diferencia de masas Δm_{21}^2 , responsable de las oscilaciones de los neutrinos solares, es al menos un orden de magnitud más pequeña que la diferencia de masas Δm_{31}^2 .
2. La diferencia del cuadrado de masas Δm_{31}^2 se mide con los neutrinos atmosféricos y tiene

un valor

$$\Delta m_{\text{atm}}^2 \simeq \Delta m_{32}^2 \simeq \Delta m_{31}^2 \simeq 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

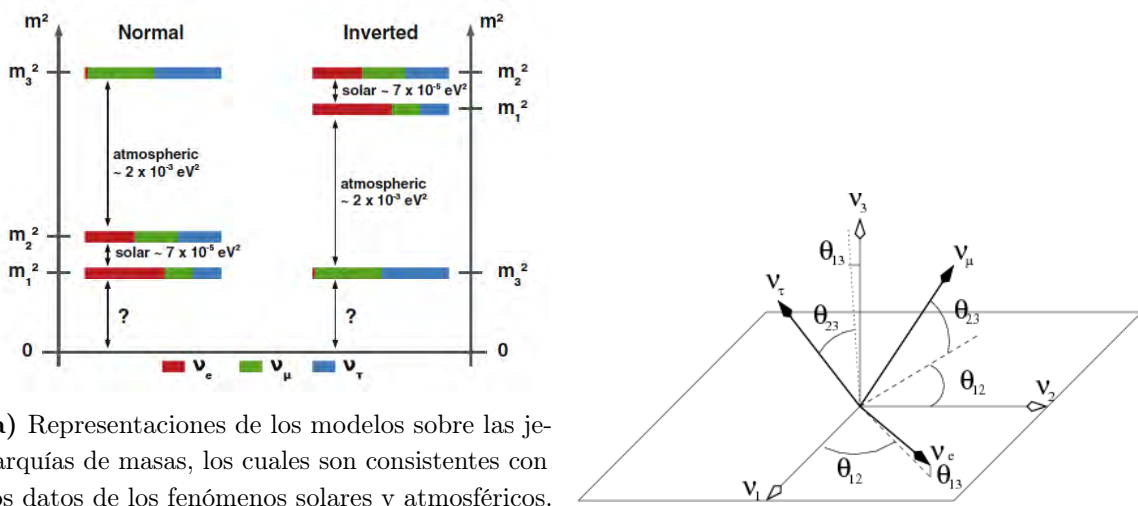
La ambigüedad en el signo de Δm_{atm}^2 no nos permite saber si el neutrino ν_3 es el más pesado o el más ligero de los tres neutrinos [20].

- Los valores de Δm_{21}^2 y del ángulo de mezcla θ_{12} son determinados con los experimentos de los neutrinos solares

$$\Delta m_{21}^2 = 7.59 \pm 0.20 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$$

$$\theta_{12} = 29.5^\circ$$

- En la actualidad no se sabe cuál es el octante del ángulo θ_{23} , es decir, si es mayor o menor a 45° [21].



(a) Representaciones de los modelos sobre las jerarquías de masas, los cuales son consistentes con los datos de los fenómenos solares y atmosféricos. El modelo de la izquierda se le conoce como jerarquía normal, mientras que el derecho es jerarquía invertida. Las bandas de colores representan la probabilidad de encontrar un eigenestado particular en la base de sabor dado un estado particular de la base de los eigenestados de masa.

(b) Relaciones entre los eigenestados de sabor ν_e , ν_μ y ν_τ y los eigenestados de masa ν_1 , ν_2 y ν_3 en términos de los ángulos de mezcla θ_{12} , θ_{13} y θ_{23} . Ignorando las fases, estos son los ángulos de Euler representando la rotación entre una base ortogonal a otra.

Figura 2.3: Jerarquías de masas y ángulos de mezcla. (Imágenes tomadas de King, Stephen F., *Neutrino Mass Models: Impact of Non-Zero Reactor Angle*, Proceedings, 14th International Workshop, Venice, Italy, 2011 [22])

2.2. Oscilaciones en materia

En la sección anterior se calculó la probabilidad de oscilación para neutrinos que se propagaban en el vacío. Sin embargo, es necesario el estudio del caso cuando los neutrinos viajan en un medio material, puesto que necesitamos saber su comportamiento cuando pasan a través de la Tierra.

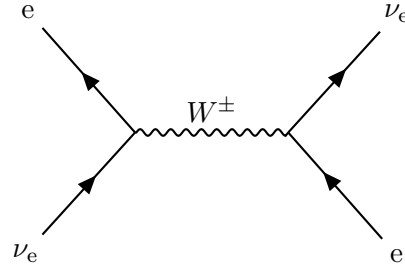


Figura 2.4: Interacción del bosón W^\pm con un electrón e . El electrón es el único leptón cargado presente en la materia terrestre.

La presencia de materia en la trayectoria de los neutrinos puede afectar las probabilidades de las oscilaciones. Los neutrinos sufren de dispersión elástica cuando interactúan con las partículas del medio en el cual se propagan. El resultado de esta interacción es la adición de un potencial al hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger. De acuerdo al modelo estándar, este fenómeno puede ocurrir de dos diferentes maneras:

1. Un neutrino ν_α puede intercambiar un bosón W con el leptón cargado l_α correspondiente. El único leptón cargado que se encuentra en la materia terrestre es el electrón. Por consiguiente, este efecto sólo será observado en el neutrino del electrón ν_e ($\bar{\nu}_e$). Esta interacción es proporcional a la densidad de electrones N_e en el medio. El potencial resultante es proporcional a la constante de acoplamiento de Fermi G_F . Esto es

$$V_W(r) = \begin{cases} +\sqrt{2}G_F N_e(r) & \text{para } \nu_e \\ -\sqrt{2}G_F N_e(r) & \text{para } \bar{\nu}_e \end{cases} \quad (2.38)$$

2. Un neutrino de cualquier sabor ν_α puede intercambiar un bosón Z con un electrón, un protón o un neutrón del medio. Además, los acoplamientos del bosón Z con los electrones y los protones son iguales y opuestos. Como la materia terrestre es eléctricamente neutra, las contribuciones de los electrones y los protones mediante el intercambio de un bosón Z son canceladas unas con otras. Finalmente, un potencial independiente de sabor V_Z aparecerá y es proporcional al número de neutrones por unidad de volumen, N_n . El resultado es

$$V_Z(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n(r) & \text{para } \nu \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n(r) & \text{para } \bar{\nu} \end{cases} \quad (2.39)$$

Incluyendo las interacciones de corriente cargada y de corriente neutra, el hamiltoniano efectivo para neutrinos que se propagan en un medio material es

$$H_{\text{eff}}(r) = H_{\text{vac}} + V_m(r), \quad (2.40)$$

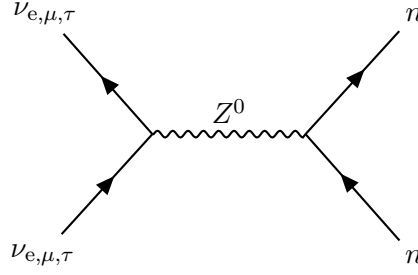


Figura 2.5: Interacción del bosón Z^0 con un neutrón n . Debido a la interacción de los neutrinos de cualquier sabor con los neutrones en la materia terrestre, surgirá un potencial de interacción proporcional al número de éstos en el medio.

donde el término del potencial $V_m(r)$ es de la forma

$$V_m(r) = \begin{pmatrix} V_e(r) & 0 & 0 \\ 0 & V_\mu(r) & 0 \\ 0 & 0 & V_\tau(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{CC}(r) + V_{CN}(r) & 0 & 0 \\ 0 & V_{CN}(r) & 0 \\ 0 & 0 & V_{CN}(r) \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

con $V_{CC} = V_W$ y $V_{CN} = V_Z$. Notemos que este potencial V_m , surgido de la interacción en materia, puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} V_{CC} + V_{CN} & 0 & 0 \\ 0 & V_{CN} & 0 \\ 0 & 0 & V_{CN} \end{pmatrix} = V_{CC} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + V_{CN} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V_{CC}\mathbb{Y} + V_{CN}\mathbb{I}, \quad (2.42)$$

donde \mathbb{Y} es la matriz que acompaña al potencial V_{CC} de corriente cargada y \mathbb{I} es la matriz identidad. Con esta nueva notación, podemos reescribir la ecuación (2.40) de una manera más conveniente

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(r) &= H_{\text{vac}} + V_{CC}(r)\mathbb{Y} + V_{CN}(r)\mathbb{I} \\ &= \mathbb{H}(r) + V_{CN}(r)\mathbb{I}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde hemos escrito

$$\mathbb{H}(r) = H_{\text{vac}} + V_{CC}(r)\mathbb{Y} \quad (2.44)$$

Las manipulaciones algebraicas realizadas hasta el momento del potencial V_m junto con el hamiltoniano efectivo H_{eff} nos permitirán deshacernos del término $V_{CN}\mathbb{I}$ en la ecuación (2.44) mediante una transformación de fase. Para hacer este cambio primero definamos una función $\varphi(r, r_0)$ como

$$\varphi(r, r_0) \equiv \left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{r_0}^r V_{CN}(r') dr' \right) \mathbb{I} \quad (2.45)$$

Con la función dada en (2.45), proponemos una función de onda de la siguiente forma

$$\tilde{\Psi}(r) = e^{\varphi(r, r_0)} \Psi(r) \quad (2.46)$$

Por un lado, sustituyendo (2.46) en la ecuación de Schrödinger se tiene que

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} &= i\hbar c \frac{d\varphi}{dr} \tilde{\Psi} + i\hbar c e^{\varphi} \frac{d\Psi}{dr} \\ &= V_{CN}\mathbb{I} \tilde{\Psi} + e^{\varphi} \left(i\hbar c \frac{d\Psi}{dr} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

mientras que por el otro,

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}}\tilde{\Psi} &= (\mathbb{H} + V_{\text{CN}}\mathbb{I})\tilde{\Psi} \\
&= \mathbb{H}\tilde{\Psi} + V_{\text{CN}}\mathbb{I}\tilde{\Psi} \\
&= \mathbb{H}e^{\varphi}\Psi + V_{\text{CN}}\mathbb{I}\tilde{\Psi} \\
&= e^{\varphi}\mathbb{H}\Psi + V_{\text{CN}}\mathbb{I}\tilde{\Psi}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

En el último paso de (2.48) utilizamos el hecho de que e^{φ} conmuta con \mathbb{H} . Comparando (2.47) con (2.48) obtenemos

$$i\hbar c \frac{d\Psi(r)}{dr} = \mathbb{H}(r)\Psi(r), \tag{2.49}$$

que es la ecuación de evolución en la base de sabor que debemos resolver para obtener la dinámica de un neutrino que se propaga en un medio material neutro como lo es el interior de la Tierra.

Recordemos que

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_e(r) \\ \psi_\mu(r) \\ \psi_\tau(r) \end{pmatrix},$$

es el vector de estado, con $\psi_\alpha(t)$ ($\alpha = e, \nu$ y τ) las amplitudes de los eigenestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$, y

$$\mathbb{H}(r) = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{\text{CC}}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

con Δ_{jk} y V_{CC} dados por (2.16) y (2.38) respectivamente.

Supongamos que el medio por el cual los neutrinos se propagan tiene una densidad electrónica constante. Esto significa que el potencial surgido de la interacción de corriente cargada $V_{\text{CC}} = \pm\sqrt{2}G_{\text{F}}N_e$ no dependa de la posición y por lo tanto, haciendo un análisis similar al que hicimos en el caso para los neutrinos propagándose en el vacío, tenemos

$$\Psi(r) = \hat{\mathcal{U}}(r, r_0)\Psi(r_0), \tag{2.51}$$

con

$$\hat{\mathcal{U}}(r, r_0) = e^{-\frac{i}{\hbar c}(r-r_0)\mathbb{H}} \tag{2.52}$$

el operador de evolución.

Para calcular $\hat{\mathcal{U}}(r, r_0)$ en este caso podemos hacer uso de la definición de la función exponencial como una serie infinita. De hecho, utilizamos esta definición para obtener la ecuación (2.12). Sin embargo, en este caso, nos encontramos en la base de sabor y por ende no es válido el procedimiento que hicimos anteriormente. Aún así, existe una manera muy ingeniosa de calcular (2.52) sin tener que usar una serie infinita.

Si tenemos una matriz A de $n \times n$ con coeficientes complejos, el polinomio característico de esta matriz está definido como

$$p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda\mathbb{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n,$$

donde los coeficientes a_j , con $j = 1, \dots, n$, están relacionados, de cierta manera, con la matriz A . Dos cosas importantes a notar de la definición anterior es que $a_n = (-1)^n$ y si $\lambda = 0$, entonces $\det(A) = a_0$. Las raíces del polinomio característico son los eigenvalores de la matriz A ⁶. El teorema de Caley-Hamilton establece que la matriz A satisface su propia ecuación característica:

$$p(A) = a_0 \mathbb{I} + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0$$

Por otro lado, dada una función analítica $f(\lambda)$ y el polinomio característico $p(\lambda)$ de una matriz A de $n \times n$, la función f puede ser expresada como

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda),$$

donde $q(\lambda)$ es un cociente polinomial y $r(\lambda)$ es un residuo polinomial tal que su grado es mayor o igual que cero, pero menor que n . Por el teorema de Caley-Hamilton, reemplazando λ por la matriz A , tenemos que $p(A) = 0$ y por consiguiente que $f(A) = r(A)$. Así, la función analítica de la matriz A puede ser expresada como un polinomio de orden menor que n .

Supongamos que al residuo polinomial de $f(\lambda)$ lo escribimos como

$$r(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1}$$

Si λ_j es un eigenvalor de la matriz A , y como $p(\lambda_j) = 0$, entonces

$$f(\lambda_j) = r(\lambda_j) = c_0 + c_1 \lambda_j + \dots + c_{n-1} \lambda_j^{n-1}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

La expresión anterior nos da un sistema de n ecuaciones lineales que puede ser resuelto para obtener los coeficientes c_j . Por lo tanto, uno tiene que

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k \tag{2.53}$$

Aplicando el resultado dado en (2.53) para nuestro problema particular, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}(r, r_0) &= e^{-\frac{i}{\hbar c}(r-r_0)\mathbb{H}} = c_0 \mathbb{I} - c_1 \frac{i}{\hbar c}(r-r_0)\mathbb{H} - c_2 \frac{1}{(\hbar c)^2}(r-r_0)^2 \mathbb{H}^2 \\ &= e^{z\mathbb{H}} = c_0 \mathbb{I} + c_1 z \mathbb{H} + c_2 z^2 \mathbb{H}^2, \quad \text{con } z = -\frac{i}{\hbar c}(r-r_0) \end{aligned} \tag{2.54}$$

y donde debemos determinar los coeficientes c_0 , c_1 y c_2 con el método descrito anteriormente. Sean ε_1 , ε_2 y ε_3 los eigenvalores del hamiltoniano \mathbb{H} . El sistema de ecuaciones lineales que debemos resolver para encontrar los coeficientes en (2.54) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & z\varepsilon_1 & z^2\varepsilon_1^2 \\ 1 & z\varepsilon_2 & z^2\varepsilon_2^2 \\ 1 & z\varepsilon_3 & z^2\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{z\varepsilon_1} \\ e^{z\varepsilon_2} \\ e^{z\varepsilon_3} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

⁶Se puede demostrar que un escalar λ es un eigenvalor de la matriz A si y sólo si $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$.

Resolviendo el sistema anterior, vemos que los coeficientes son de la forma:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} [e^{z\varepsilon_1} \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + e^{z\varepsilon_2} \varepsilon_3 \varepsilon_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + e^{z\varepsilon_3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] \\ c_1 &= \frac{1}{zT} [e^{z\varepsilon_1} (\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2) + e^{z\varepsilon_2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2) + e^{z\varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)] \\ c_3 &= \frac{1}{z^2 T} [e^{z\varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + e^{z\varepsilon_2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + e^{z\varepsilon_3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde hemos introducido el término T como

$$T = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad (2.57)$$

para simplificar las ecuaciones en (2.56).

Insertando el valor de los coeficientes en la expresión (2.54) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}(r, r_0) &= \frac{1}{T} \left\{ [e^{z\varepsilon_1} \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + e^{z\varepsilon_2} \varepsilon_3 \varepsilon_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + e^{z\varepsilon_3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] \mathbb{I} \right. \\ &\quad + [e^{z\varepsilon_1} (\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2) + e^{z\varepsilon_2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2) + e^{z\varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)] \mathbb{H} \\ &\quad \left. + [e^{z\varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + e^{z\varepsilon_2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + e^{z\varepsilon_3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] \mathbb{H}^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

La ecuación (2.58) da la forma explícita del operador de evolución en la base de sabor para neutrinos que se propagan en un medio de densidad electrónica constante. Nuestra tarea ahora es encontrar los eigenvalores asociados a la matriz hamiltoniana dada por (2.50).

Para obtener la forma de los eigenvalores, primero debemos encontrar el polinomio característico asociado al hamiltoniano. Es decir, debemos calcular

$$p(\varepsilon) = \det(\mathbb{H} - \varepsilon \mathbb{I}) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 \quad (2.59)$$

y posteriormente encontrar las tres raíces de $p(\varepsilon)$. Podemos hacer uso de la definición del polinomio característico para encontrar los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 y a_3 . Sin embargo, es más directo usar el hecho de que dichos coeficientes están relacionados con la matriz \mathbb{H} de cierta manera particular. El polinomio característico de una matriz de 3×3 , en nuestro caso el hamiltoniano (2.50), es

$$p(\varepsilon) = \det(\mathbb{H}) - \frac{1}{2} [\text{Tr}^2(\mathbb{H}) - \text{Tr}(\mathbb{H}^2)] \varepsilon + \text{Tr}(\mathbb{H}) \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \quad (2.60)$$

Efectuando las operaciones indicadas en (2.50) sobre \mathbb{H} , tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{H}) &= V_{\text{CC}} \Delta_{31} \Delta_{21} c_{12}^2 c_{13}^2 \\ \frac{1}{2} [\text{Tr}^2(\mathbb{H}) - \text{Tr}(\mathbb{H}^2)] &= V_{\text{CC}} [\Delta_{31} c_{13}^2 + \Delta_{21} (1 - c_{13}^2 s_{12}^2)] + \Delta_{21} \Delta_{31} \\ \text{Tr}(\mathbb{H}) &= V_{\text{CC}} + \Delta_{21} + \Delta_{31} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Insertando (2.61) en (2.60), se tiene que el polinomio característico es ahora

$$\begin{aligned} p(\varepsilon) &= V_{\text{CC}} \Delta_{31} \Delta_{21} c_{12}^2 c_{13}^2 - \{V_{\text{CC}} [\Delta_{31} c_{13}^2 + \Delta_{21} (1 - c_{13}^2 s_{12}^2)] + \Delta_{21} \Delta_{31}\} \varepsilon \\ &\quad + (V_{\text{CC}} + \Delta_{21} + \Delta_{31}) \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Existen varias maneras de encontrar las raíces de (2.62). Se puede emplear la fórmula de Cardano para resolver la ecuación cúbica, aunque, si hacemos esto, obtendríamos unas expresiones demasiado largas para este cálculo simbólico que estamos haciendo. Por otro lado, existen fórmulas aproximadas para los eigenvalores del hamiltoniano \mathbb{H} , las cuales dan muy buenos resultados aún cuando el potencial no sea constante. Para ello se definen los números:

$$\begin{aligned} V_l^R &= V(r_l) = \frac{\Delta_{21} \cos 2\theta_{12}}{c_{13}^2} \\ V_h^R &= V(r_h) = (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \cos 2\theta_{13} \end{aligned} \quad (2.63)$$

los cuales no dependen del potencial de interacción V_{CC} . Luego se introducen dos términos que son análogos a la expresión dada por (2.16), pero que incluyen al potencial y se denotan con un superíndice m para diferenciarlos de aquellos en el vacío

$$\begin{aligned} \Delta_{21}^m &= c_{13}^2 \sqrt{(V_{CC} - V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2} \\ \Delta_{32}^m &= \sqrt{(V_{CC} - V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Con ayuda de las ecuaciones (2.64), podemos dar las expresiones aproximadas para los eigenvalores

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\simeq \frac{1}{2} [(\Delta_{21} + V_{CC} c_{13}^2) - \Delta_{21}^m] \\ \varepsilon_2 &\simeq \frac{1}{2} [(\Delta_{31} + \Delta_{21} c_{12}^2 + V_{CC} s_{13}^2) + (\Delta_{21}^m - \Delta_{32}^m)] \\ \varepsilon_3 &\simeq \frac{1}{2} [(\Delta_{31} + \Delta_{21} s_{12}^2 + V_{CC}) + \Delta_{32}^m] \end{aligned} \quad (2.65)$$

los cuales dan una aproximación relativamente buena a los que se obtendrían utilizando la fórmula de la ecuación cúbica⁷.

En este punto, las ecuaciones (2.58) y (2.65) nos darán la forma explícita del operador de evolución en un medio de densidad constante. El conocimiento del operador de evolución nos permite saber cómo son las probabilidades de transición entre un sabor y otro, puesto que estas últimas están dadas en términos de los elementos de matriz de (2.58) por

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(r_2, r_1)|^2 \quad (2.66)$$

En este momento ya sabemos cómo tratar con un neutrino que viaja en un medio de densidad electrónica constante. Sin embargo, nos hace falta mostrar la conexión explícita del potencial de corriente cargada V_{CC} con la densidad de la Tierra dada por el PREM, figura 3.3.

La densidad electrónica $N_e(r)$ está relacionada con la densidad terrestre $\rho(r)$ mediante la expresión [23]

$$N_e(r) = \frac{Y_e}{m_N} \rho(r) = \frac{Z}{A} \frac{\rho(r)}{m_N} \quad (2.67)$$

donde Y_e se conoce como la fracción de electrones y es igual al cociente del número atómico Z entre el valor de su masa atómica A y m_N es la masa promedio de un nucleón⁸.

⁷Para el caso de un potencial constante, las aproximaciones dadas en (2.65) tienen un error porcentual inferior al cuatro por ciento con respecto a las fórmulas exactas de las raíces de un polinomio de orden 3.

⁸Esto es la semisuma de la masa del protón y la masa del neutrón, $m_N = \frac{1}{2}(m_p + m_n)$.

Sustituyendo $N_e(r)$ en la ecuación (2.38) obtenemos la relación directa entre la densidad del medio y la densidad electrónica

$$\begin{aligned} V_{\text{CC}}(r) &= \pm\sqrt{2}G_{\text{F}}\frac{Z}{A}\frac{\rho(r)}{m_{\text{N}}} \\ &\approx \pm 7.5721 \times 10^{-14} \frac{Z}{A} \rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right] (r) \text{ eV}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde la densidad debe tener las unidades que se indican entre corchetes para que el potencial tenga unidades de electronvolts.

Por otro lado, el operador de evolución final para un neutrino propagándose en la Tierra será el producto de los operadores de evolución individuales que resulten del número de escalones que utilicemos para aproximar la densidad de la Tierra. Esto significa que para un modelo de n escalones tendremos que el operador de evolución será

$$\begin{aligned} \hat{U}(r_n, r_0) &= \hat{U}(r_1, r_0) \hat{U}(r_2, r_1) \dots \hat{U}(r_{n-1}, r_{n-2}) \hat{U}(r_n, r_{n-1}) \\ &= \prod_{j=1}^n \hat{U}(r_j, r_{j-1}), \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde, posteriormente, se elegirá $r_0 = -6371$ km y $r_n = 6371$ km, lo que, en otras palabras, significa que el centro de la Tierra será el origen de coordenadas.

Notemos que si el ajuste de la densidad es simétrico, como lo será en nuestro caso, el operador de evolución sólo dependerá realmente de $n/2$ escalones y, por supuesto, también será simétrico. Es decir, operador de evolución que depende del escalón que va de r_0 a r_1 es igual al operador que corre de r_{n-1} a r_n , el operador que corre de r_1 a r_2 es igual a aquél que va de r_{n-2} a r_{n-1} , y así sucesivamente. En términos matemáticos, la situación anterior se traduce a la expresión (2.69) como

$$\begin{aligned} \hat{U}(r_n, r_0) &= \hat{U}(r_1, r_0) \hat{U}(r_2, r_1) \dots \hat{U}(r_{n-1}, r_{n-2}) \hat{U}(r_n, r_{n-1}) \\ &= \hat{U}(r_1, r_0) \hat{U}(r_2, r_1) \dots \hat{U}(r_m, r_{m-1}) \hat{U}(r_{m+1}, r_m) \dots \hat{U}(r_2, r_1) \hat{U}(r_1, r_0) \\ &= \left(\prod_{j=1}^m \hat{U}(r_j, r_{j-1}) \right) \left(\prod_{j=1}^m \hat{U}(r_j, r_{j-1}) \right)^T \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde r_m es el punto medio y T denota la matriz transpuesta.

Finalmente, para determinar completamente al potencial de corriente cargada V_{CC} en cada escalón, nos hace falta elegir el valor de la fracción de electrones en cada estrato terrestre. En el siguiente capítulo presentaremos las características de cada una de las principales capas de la Tierra y daremos los valores para el cociente Z/A en cada capa.

2.2.1. La trayectoria en la Tierra

Los neutrinos producidos en la atmósfera no necesariamente recorren una distancia igual a dos veces el radio de la Tierra para llegar al detector. En realidad, la longitud de su recorrido puede ser descrito en términos del ángulo nadir. El ángulo nadir es aquel que se forma de la

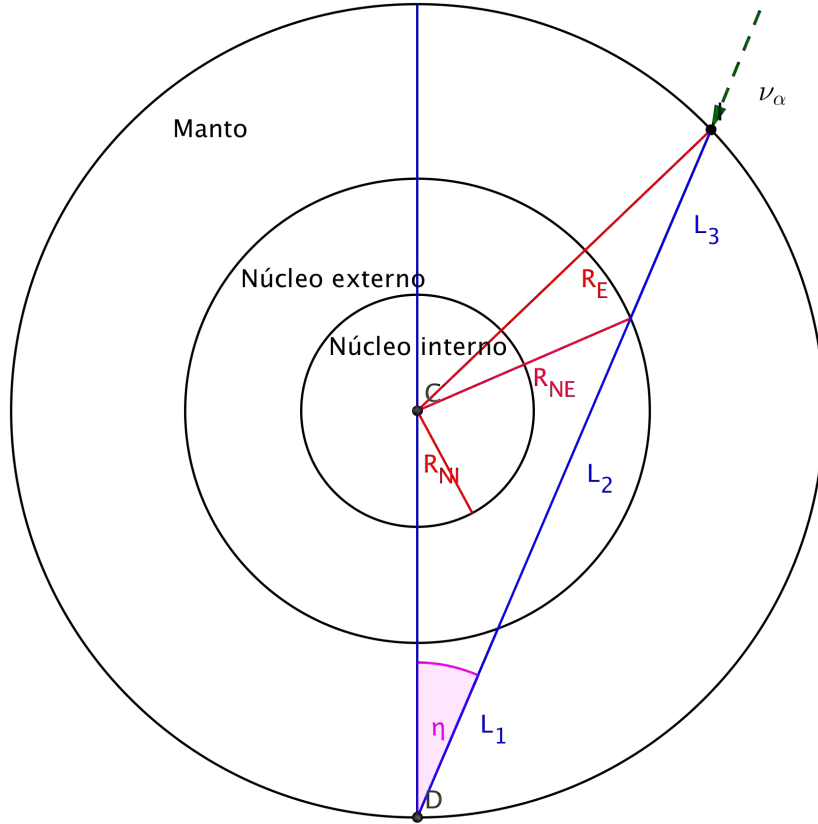


Figura 2.6: Representación esquemática del interior de la Tierra para mostrar el recorrido de los neutrinos en función del ángulo nadir η . Los puntos C y D denotan el centro de la Tierra y el detector, respectivamente. El vector ν_α indica el punto de incidencia de un neutrino atmosférico. R_E es el radio terrestre; R_{NE} , el radio del núcleo externo; y R_{NI} , el radio del núcleo interno.

intersección entre la vertical del observador (el punto D de la figura 2.6) y la esfera celeste. Esta situación se puede visualizar en la figura 2.6.

Lo que necesitamos calcular es la distancia que recorren los neutrinos en función del ángulo nadir η . A continuación haremos un desarrollo con la situación particular descrita por la figura 2.6 que, como veremos, se podrá extender al número de capas que necesitemos considerar en nuestro estudio posterior. De la figura 2.6, despreciando la profundidad a la que se encuentre el detector con respecto a la superficie, notemos que la distancia total recorrida de los neutrinos en el núcleo externo y manto está dada por

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \quad (2.71)$$

Por otro lado, notemos que los puntos C, I, D forman un triángulo con dos lados iguales de longitud R_E y un lado de longitud L . Usando la ley de cosenos, obtenemos la relación

$$R_E^2 = R_E^2 + L^2 - 2R_E L \cos \eta \quad (2.72)$$

la cual podemos resolver muy fácilmente para obtener

$$L = 2R_E \cos \eta. \quad (2.73)$$

Por otra parte, llamemos $L' = L_1 + L_2$ y consideremos ahora el triángulo con lados R_E , R_{NE} y L' . Si aplicamos ley de cosenos a este triángulo tendremos la expresión

$$R_{NE}^2 = R_E^2 + L'^2 - 2R_E L' \cos \eta, \quad (2.74)$$

la cual, al ser resuelta para L' , nos da

$$L'_\pm = R_E \cos \eta \pm \sqrt{R_{NE}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} \quad (2.75)$$

Notemos que la distancia L'_\pm en (2.75) tiene dos signos. Estos signos corresponden a las dos intersecciones que puede tener el círculo de radio R_{NE} con L' . De hecho, si uno observa detenidamente la figura 2.6, el mismo análisis es totalmente válido si hubiésemos elegido $L' = L_2 + L_3$, puesto que obtendríamos exactamente el mismo triángulo. Por consiguiente, de esta observación se tiene que cumplir que $L_1 = L_3$. Regresando a la ecuación (2.75), vemos que la primera intersección de L' con la circunferencia de radio R_{NE} es justamente L_1 . Por ende,

$$L_1 = L_3 = R_E \cos \eta - \sqrt{R_{NE}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} \quad (2.76)$$

y también que

$$L_2 = L'_+ - L'_- = L'_+ - L_1 = 2\sqrt{R_{NE}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} \quad (2.77)$$

La importancia del desarrollo anterior es que se puede extender para cada uno de las distintas capas terrestres siguiendo el mismo procedimiento. Supongamos ahora que tenemos la situación descrita por la figura 2.7.

Aplicando el razonamiento anterior, obtendremos que L_3 en este caso tendrá la misma forma dada por la ecuación (2.77), pero cambiando R_{NE} por R_{NI} . De igual manera, en el caso de la figura 2.7 obtendremos que $L_1 + L_2 = L_4 + L_5$, y que, por el desarrollo previo, $L_1 = L_5$ y $L_2 = L_4$. Si aplicamos la fórmula (2.75) con el signo positivo usando los radios del núcleo externo R_{NE} e interno R_{NI} , cada uno por separado, podemos obtener la longitud de los tramos L_2 y L_4 restando las dos expresiones resultantes. Esto es

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(R_E \cos \eta + \sqrt{R_{NE}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} \right) - \left(R_E \cos \eta + \sqrt{R_{NI}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} \right) \\ &= \sqrt{R_{NE}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} - \sqrt{R_{NI}^2 - R_E^2 \sin^2 \eta} = L_4. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Por último, la ecuación (2.75) nos permite saber el ángulo nadir máximo para después del cual ya no tendremos neutrinos viajando por el núcleo de la Tierra. Esta condición se da para la situación en la que $L_2 = 0$ (i.e. $L'_+ = L'_-$), lo cual implica que

$$\eta_{\text{máx}} = \arcsin \frac{R_{NE}}{R_E} \approx 33.11^\circ \quad (2.79)$$

El valor del ángulo nadir máximo en (2.79) nos permite establecer el intervalo de posibles ángulos donde podremos estudiar a los neutrinos que crucen por el núcleo.

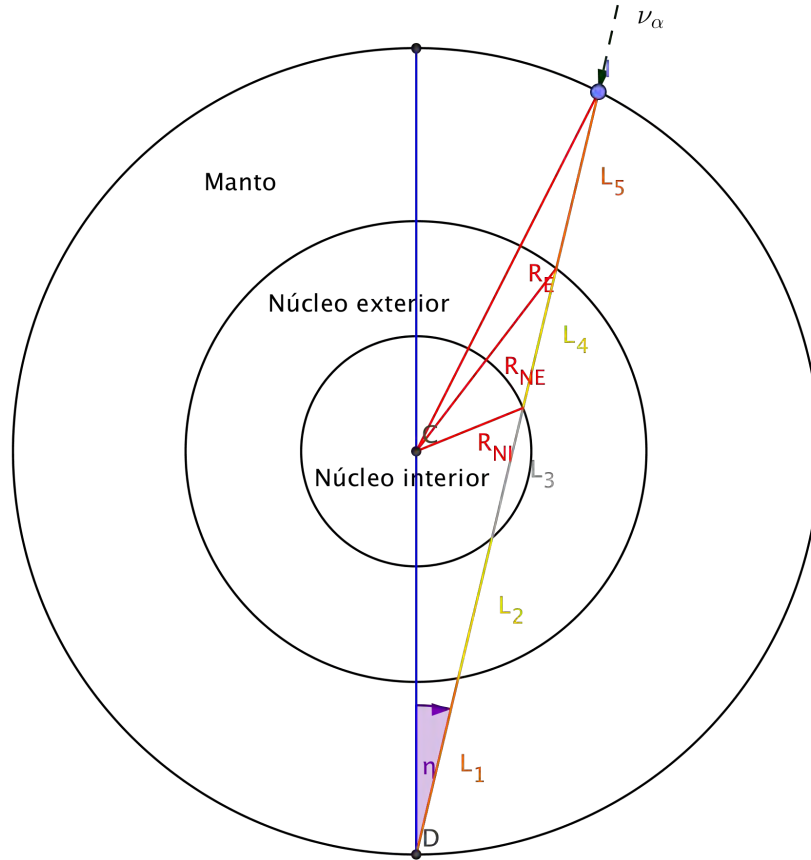


Figura 2.7: En este diagrama los neutrinos atraviesan tanto el núcleo exterior como el núcleo interior. Las distancias en color amarillo L_2 y L_4 son iguales, mientras que lo mismo sucede para L_1 y L_5 en color anaranjado.

2.2.2. Oscilaciones en materia para dos neutrinos

Al igual que para las oscilaciones en el vacío, a fin de tener un mejor entendimiento del fenómeno, es ilustrativo hacer el estudio de las oscilaciones en materia entre sólo dos neutrinos. Aunque el tratamiento realizado anteriormente es más completo, el caso particular de dos neutrinos nos permitirá describir de una manera más sencilla y pedagógica el efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW), el cual es el responsable de que podamos notar el efecto de la materia sobre las transiciones de sabor.

Para el estudio de oscilaciones en materia en el caso de dos neutrinos, lo primero que se hace es encontrar el hamiltoniano de interacción que gobierna la evolución de las amplitudes de sabor en materia y que ahora tiene la forma

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{vac}} + V_{\text{CC}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

el cual puede ser reescrito mediante una transformación de fase como⁹

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{vac}} + \frac{V_{\text{CC}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Al hamiltoniano en el vacío lo podemos encontrar de manera sencilla, con la expresión

$$\begin{aligned} H_{\text{vac}} &= U \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta & (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta \\ (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta & E_2 \cos^2 \theta + E_1 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{(E_2 - E_1)}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{(E_2 + E_1)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

De igual manera, podemos realizar una transformación de fase para que la expresión (2.82) se reduzca a una forma más sencilla. Haciendo dicha transformación y usando la aproximación ultrarrelativista, obtenemos el hamiltoniano para el vacío como

$$H_{\text{vac}} = \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Insertando la ecuación (2.83) en (2.81) tenemos que el hamiltoniano en materia es dado por

$$\begin{aligned} H_{\text{m}} &= \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} \begin{pmatrix} -\left(\cos 2\theta - \frac{V_{\text{CC}}/2}{\Delta m^2/4E}\right) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \left(\cos 2\theta - \frac{V_{\text{CC}}/2}{\Delta m^2/4E}\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} \begin{pmatrix} -(\cos 2\theta - A) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (\cos 2\theta - A) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde hemos definido

$$A = \frac{V_{\text{CC}}/2}{\Delta m^2/4E} = \frac{2\sqrt{2}G_{\text{F}}N_e E}{\Delta m_{21}^2}. \quad (2.85)$$

Por simplicidad, nos gustaría escribir a (2.84) en una forma similar a (2.83). Esto se puede hacer si encontramos alguna x para la cual se cumplan las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_{\text{m}} &= x(\cos 2\theta - A) \\ \sin 2\theta_{\text{m}} &= x \sin 2\theta \\ \Delta m_{\text{m}}^2 &= \frac{\Delta m_{21}^2}{x}. \end{aligned}$$

⁹Para conseguir que la ecuación (2.80) se transforme en (2.81) se emplea el mismo procedimiento que se usó para obtener la ecuación de evolución (2.49).

Resolviendo las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos^2 2\theta_m &= \frac{(\cos 2\theta - A)^2}{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - A)^2} \\ \sin^2 2\theta_m &= \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - A)^2} \\ \Delta m_m^2 &= \Delta m_{21}^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - A)^2}\end{aligned}\tag{2.86}$$

De esta forma tenemos al hamiltoniano en materia como

$$H_m = \frac{\Delta m_m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_m & \sin 2\theta_m \\ \sin 2\theta_m & \cos 2\theta_m \end{pmatrix}.\tag{2.87}$$

El hecho de que el hamiltoniano en materia dado por la ecuación (2.87) tenga prácticamente la misma forma que el hamiltoniano en el caso del vacío (2.83) nos permite ver que si V_{CC} es constante, entonces las fórmulas de oscilaciones obtenidas en el caso para dos neutrinos en el vacío, ecuaciones (2.20) y (2.21), serán iguales al caso en materia, pero realizando los cambios Δm_{21}^2 por Δm_m^2 y θ por θ_m :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^m(r) &= 1 - \sin^2 2\theta_m \sin^2 \left[\frac{\Delta m_m^2 c^3}{4E \hbar} (r - r_0) \right] \\ \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^m(r) &= \sin^2 2\theta_m \sin^2 \left[\frac{\Delta m_m^2 c^3}{4E \hbar} (r - r_0) \right]\end{aligned}\tag{2.88}$$

Es fácil notar que las probabilidades en materia (2.88) se acercan a las probabilidades en vacío conforme $A \rightarrow 0$. Por otro lado, vemos que la correspondiente amplitud en materia tiene un carácter resonante [24] cuando se satisface la condición

$$A = \cos 2\theta \quad \implies \quad \sin^2 2\theta_m = 1 \quad \text{y} \quad \Delta m_m^2 = \Delta m_{21}^2 \sin 2\theta.\tag{2.89}$$

Por tanto, la amplitud de oscilación es máxima independientemente del valor del ángulo de mezcla en el vacío. Además, es importante hacer las siguientes observaciones:

1. Al igual que en el caso del vacío, se define la longitud de oscilación en materia como

$$l_m = \frac{4\pi E \hbar}{\Delta m_m^2 c^3},\tag{2.90}$$

donde se puede apreciar que en el límite cuando $A \rightarrow 0$ se recupera la longitud de oscilación característica del vacío. Además, la longitud de oscilación en materia es menor a la del vacío. En otras palabras, la presencia de materia ocasiona que el fenómeno de oscilaciones de neutrinos se vuelva aún más notorio.

2. Bajo la condición de resonancia, las oscilaciones se desvanecen cuando $\theta = 0$ debido a que la longitud de oscilación en materia l_m se vuelve infinita.
3. Recordemos que el potencial V_{CC} es negativo para el caso de los antineutrinos. Si incluimos el caso de los antineutrinos en el parámetro A dado por la ecuación (2.85), vemos que la condición de resonancia sólo puede ocurrir para alguno de los dos casos, pero no ambos.

4. La condición de resonancia depende del signo de $\Delta m_{21}^2 \cos 2\theta$. Se tiene que para los neutrinos hay una resonancia si $\Delta m_{21}^2 \cos 2\theta > 0$ y para los antineutrinos si $\Delta m_{21}^2 \cos 2\theta < 0$.
5. La energía mínima que deben tener los neutrinos para pasar por la condición de resonancia es¹⁰

$$E_{\text{mín}} = \frac{\Delta m_{21}^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_{\text{F}}N_{\text{e}}} \approx 17 \frac{\cos 2\theta}{Y_{\text{e}} \rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]} \text{ GeV}. \quad (2.91)$$

En la ecuación (2.91) hay varias cosas a considerar. La fracción de electrones Y_{e} es un número menor a la unidad. Esto significa que la fracción de electrones tiende a subir la energía necesaria para que los neutrinos pasen por la condición de resonancia. Por otro lado, vemos que la energía mínima es inversamente proporcional a la densidad del medio. Para densidades muy altas requerimos energías menores para tener efectos considerables en materia. La función $\cos 2\theta$ es decreciente en el intervalo $(0, \pi/2]$, lo cual se traduce en una menor energía mínima para tener la condición de resonancia. En el caso del núcleo terrestre se tiene que la energía mínima está entre 1 y 4 GeV. Estas estimaciones se hacen con el uso de las densidades máximas y mínimas del núcleo.

¹⁰Usando $\Delta m_{\text{atm}}^2 = 2.575 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

Capítulo 3

El interior de la Tierra

La separación en capas de distinta composición se produjo probablemente por la estratificación por densidades que tuvo lugar durante el periodo de fusión parcial de las primeras etapas de la historia de la Tierra. Durante este periodo los elementos más pesados, principalmente el hierro y el níquel, se fueron hundiendo a medida que los componentes rocosos más ligeros flotaban hacia la superficie. Esta segregación de material sigue ocurriendo todavía, pero a un ritmo muchísimo más reducido. Debido a esta diferenciación química, el interior de la Tierra no es homogéneo. De manera general, el interior de la Tierra consiste en tres regiones principales que tienen composiciones químicas notablemente diferentes. Las principales capas que componen la Tierra son:

- la corteza, capa externa comparativamente fina cuyo grosor oscila entre 3 kilómetros, en las cordilleras oceánicas, y 70 kilómetros en algunos cinturones montañosos como los andes y el Himalaya;
- el manto, una capa de roca sólida (rica en sílice) que se extiende hasta una profundidad de unos 2900 kilómetros;
- el núcleo, una esfera rica en hierro con un radio de unos 3480 kilómetros.

3.1. Métodos para determinar la estructura interna de la Tierra

Se puede suponer que se han extraído muestras del interior de la Tierra. Sin embargo, la mina más profunda del mundo (la mina de oro Mponeng, al oeste de Johannesburgo en Sudáfrica) tiene una profundidad de tan sólo cuatro kilómetros, y la perforación más profunda del mundo (terminada en la península de Kola, en Rusia, en 1992) sólo penetra aproximadamente doce kilómetros hacia el interior de la Tierra¹. Esto significa, en esencia, que los seres humanos nunca han perforado un agujero en el manto (y jamás lo harán en el núcleo) con el fin de obtener evidencia directa de los materiales que abundan en esas regiones. Por ende, el conocimiento del interior de la Tierra está restringido a modelos de propagación de ondas sísmicas y de

¹El nombre de esta perforación se conoce como pozo superprofundo de Kola (KSDB) o SG-3. Su profundidad es de 12,262 metros y la finalidad del pozo fue la investigación, principalmente, de la corteza terrestre.

densidades. Como hemos visto, la restricción principal es la falta de evidencia directa que se tiene sobre esas regiones. Sin embargo, la geoquímica ha desarrollado algunas técnicas que consisten en usar la composición de algunas rocas en la superficie para modelar el interior de la Tierra [2, pág. 348]. Además, experimentos donde se usan altas presiones y temperaturas han ayudado a establecer el comportamiento de los minerales en el interior del planeta.

Las pruebas para estudiar los modelos del interior de la Tierra son muy variadas. Por ejemplo, se han recogido rocas en la superficie terrestre que se originaron en el manto. Dichas muestras contienen diamantes, que según los estudios de laboratorio, sólo pudieron haberse formado en ambientes con una presión muy elevada. Dado que estas rocas se debieron haber cristalizado a profundidades superiores a los 200 kilómetros, se deduce que son muestras del manto que sufrieron muy pocas alteraciones durante su ascenso a la superficie. Además se han podido examinar láminas del manto superior y de la corteza oceánica que lo recubre que han sido empujadas por encima del nivel del mar en lugares como Chipre, Terranova y Omán [1, pág. 19].

Por otro lado, establecer la composición del núcleo es una cuestión totalmente distinta. Debido a su gran profundidad y a su densidad elevada, ninguna muestra del núcleo ha llegado a la superficie. Sin embargo, se dispone de pruebas significativas para suponer que esta capa consta principalmente de hierro. Estas pruebas son los meteoritos. La mayoría de los meteoritos son fragmentos derivados de colisiones de cuerpos más grandes, principalmente del cinturón de asteroides situado entre las órbitas de Marte y Júpiter. Son importantes porque representan muestras del material del que se formaron los planetas interiores, incluida la Tierra. Los meteoritos están compuestos principalmente de una aleación de hierro y níquel (metálicos), minerales silicatados (rocosos) o una composición de ambos materiales (mixtos). La composición media de los meteoritos rocosos es muy parecida a la que se supone que tiene el manto. Por otro lado, los meteoritos metálicos poseen un porcentaje mucho más elevado de este material metálico del que se encuentra en la corteza terrestre o en el manto. Como la Tierra se formó a partir del mismo material en la nebulosa solar que generó los meteoritos y los demás planetas interiores, debe contener un porcentaje mucho más elevado de hierro del que se encuentra en las rocas de la corteza. Por consiguiente, es posible concluir que el núcleo debe ser enormemente rico en dicho elemento pesado [1, pág. 19].

Este punto de vista también está respaldado por los estudios de la composición del Sol, que indican que el hierro es la sustancia más abundante hallada en el sistema solar que posee la densidad calculada para el núcleo. Además, el campo magnético de la Tierra requiere que el núcleo esté compuesto de un material conductor de la electricidad, como es el hierro.

Se han obtenido muchas pistas de las condiciones físicas reinantes de la Tierra a través del estudio de las ondas sísmicas generadas por terremotos y explosiones nucleares. Cuando dichas ondas atraviesan la Tierra, llevan información a la superficie sobre los materiales que atraviesan. Por ende, los registros sísmicos proporcionan información del interior de la Tierra.

De manera muy general, la técnica del uso de ondas sísmicas para estudiar el interior consiste en la determinación precisa del tiempo que las ondas P (compresivas) y ondas S (cizalla) necesitan para desplazarse desde un terremoto, erupción volcánica o explosión nuclear hasta una estación sismográfica. Debido a que el tiempo necesario para que las ondas P y

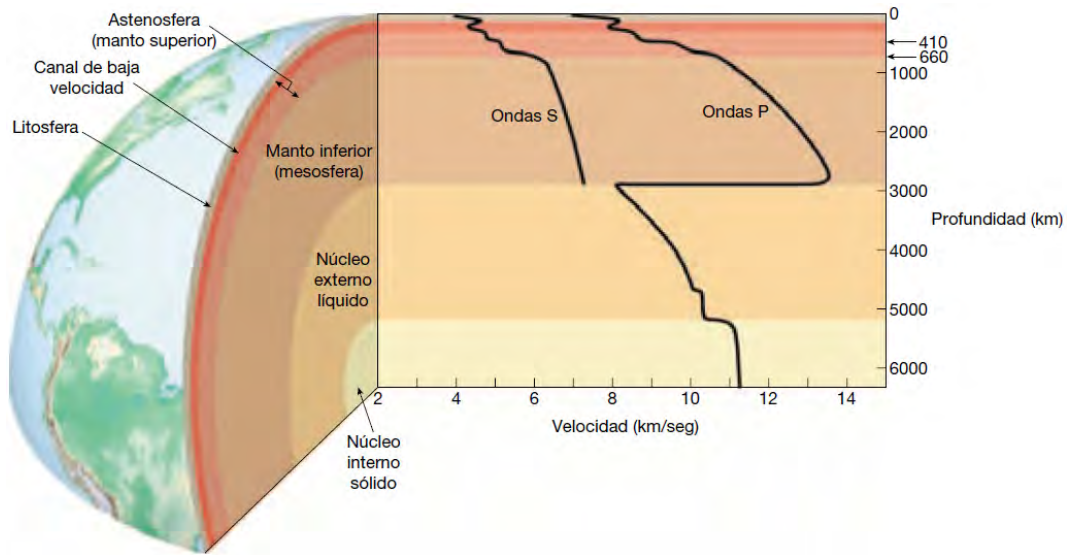


Figura 3.1: La figura muestra las variaciones en la velocidad para las ondas P y las ondas S con la profundidad. Las variaciones abruptas en la velocidad de propagación de las ondas sísmicas delimitan las principales capas de la Tierra. La velocidad de propagación es función de las características del medio que atraviesan. El cambio más abrupto se da en el límite del manto inferior con el núcleo externo debido, principalmente, al cambio de fase sólido-líquido. Porque los líquidos no se oponen a las fuerzas de cizalla, las ondas S no son capaces de propagarse a través del núcleo externo. (Imagen tomada de Tarbuck, Edward J. y Lutgens, Frederick K. *Ciencias de la Tierra*, octava edición, Pearson, Madrid, pág. 352, 2005)

Si viajan a través de la Tierra depende de los materiales que cruzan, los sismólogos buscan variaciones relacionadas con el tiempo de desplazamiento que no puedan explicarse únicamente por diferencias en las distancias recorridas. Esas variaciones corresponden a cambios en las propiedades de los materiales atravesados [1, pág. 342].

La velocidad de las ondas sísmicas depende de la densidad y elasticidad del medio en el cual se propaguen [25, pág. 87]. Por ejemplo, las ondas sísmicas viajan más rápidamente en un material rígido, que retorna elásticamente a su forma original cuando cesa el esfuerzo causado por la onda sísmica, a diferencia de un medio líquido, donde las distancias intermoleculares son mayores que en un material sólido. Las ondas compresivas P (ondas longitudinales) son capaces de propagarse a través de los líquidos, así como de sólidos porque, cuando están comprimidos, estos materiales se comportan elásticamente. Las ondas de cizalla S (ondas transversales) no pueden propagarse a través de los líquidos, porque a diferencia de los sólidos, los líquidos no se oponen a la cizalla. Es decir, cuando los líquidos son sometidos a fuerzas para cambiar sus formas, simplemente fluyen. Cuando las ondas sísmicas pasan de un material a otro ocurren fenómenos de difracción y reflexión en el límite entre dos materiales diferentes. Todas estas características de las ondas sísmicas, junto con el desarrollo de redes sismográficas alrededor de todo el mundo, han permitido llegar a la conclusión de que la Tierra está compuesta por distintas capas con propiedades mecánicas o composicionales, o ambas cosas, variables [1, pág. 344].

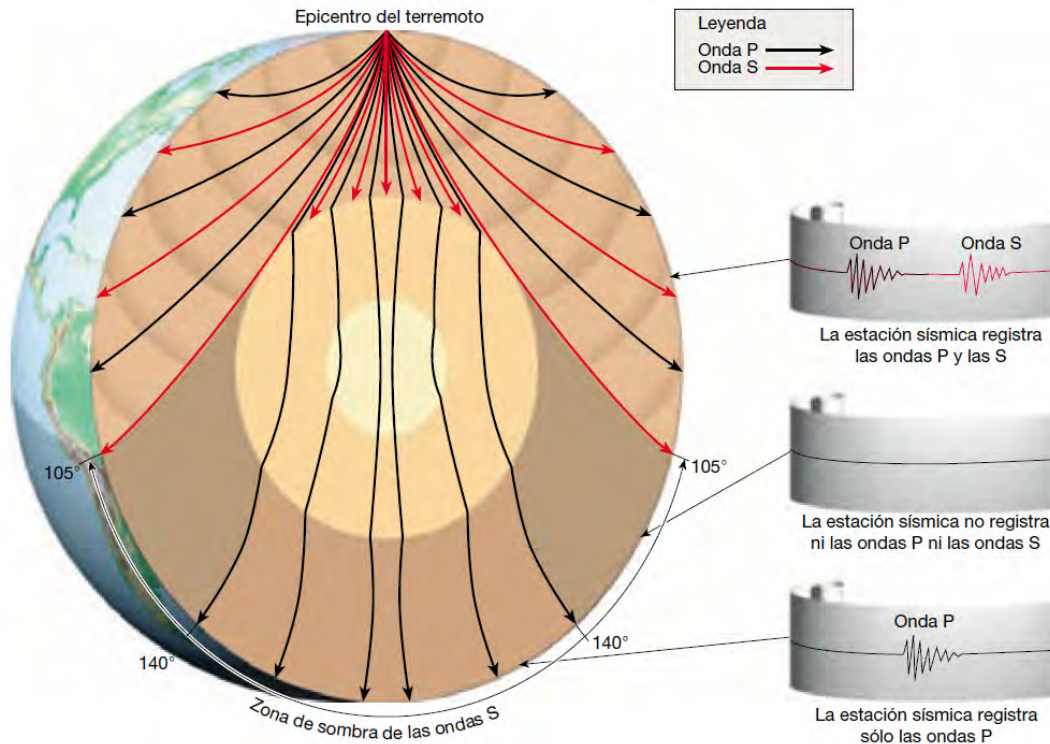


Figura 3.2: Vista del interior de la Tierra donde se pueden apreciar las trayectorias de las ondas P y S. De manera muy general, el estudio sobre la propagación de las ondas sísmicas es el que ha dado la mayor información de cómo es la Tierra por dentro. (op. cit., pág 349.)

3.2. Modelos actuales de la composición y estructura terrestre

Se han desarrollado teorías que describen la naturaleza del interior de la Tierra y que coinciden con la mayoría de los datos procedentes de las observaciones. Así, los modelos del interior de la Tierra representan las mejores deducciones posibles que se pueden hacer según la información disponible.

Uno de los mejores modelos que se tienen para representar las propiedades (promedio) de la Tierra es el Modelo Preliminar de Referencia de la Tierra (ver figura 3.3), PREM² por sus siglas en inglés. Este modelo es una abstracción matemática de las características principales de la Tierra [26, pág. 299], tales como las propiedades de elasticidad, atenuación, densidad, presión y gravedad, como función del radio planetario. El PREM fue desarrollado por A.M. Dziewonski y D.L. Anderson en 1981 y ha sido utilizado ampliamente como base para tomografías sísmicas y otros modelos geofísicos.

²Preliminary Reference Earth Model.

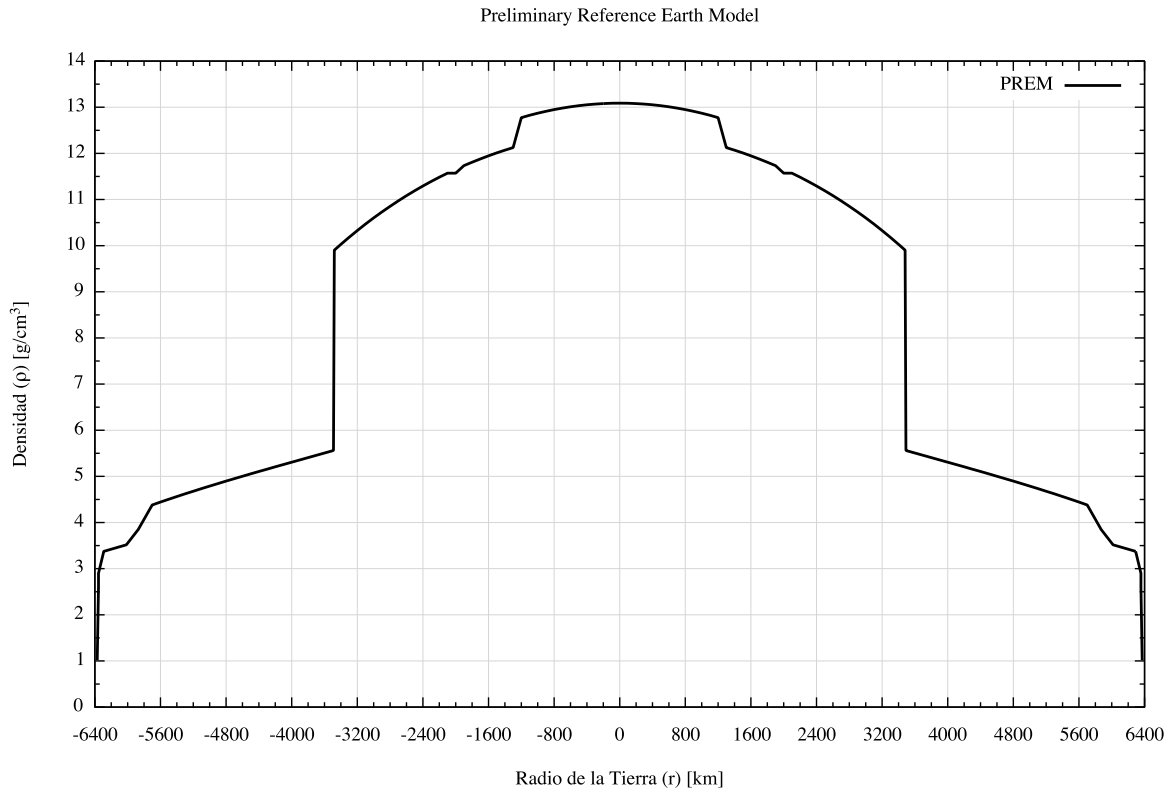


Figura 3.3: La densidad de la Tierra dada por el PREM. Las principales capas de la Tierra que se pueden apreciar en este modelo debido a su tamaño son el núcleo interno, el núcleo externo y el manto inferior. Estas tres capas en conjunto representan el 81.7% de la masa de la Tierra y un 71.7% del volumen total. Una cosa especial a notar en este modelo de la distribución de la densidad terrestre es que el núcleo externo representa el mayor intervalo de variación de la misma, pues va de los 9.90 a los 12.6 g/cm³. (Datos de Dziewonski, A. M. y Anderson, D. L. *Preliminary reference Earth model*, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **25**, 1981)

3.3. Descripción de las capas interiores

El interior de la Tierra se caracteriza por un aumento gradual de la temperatura, la presión y la densidad con la profundidad. Los cálculos sitúan la temperatura a una profundidad de 100 kilómetros entre los 1200 °C y los 1400 °C, mientras que la temperatura del centro de la Tierra supera los 6700 °C. El interior de la Tierra ha retenido gran parte de la energía adquirida durante los años en que se formó. El aumento de la presión con la profundidad provoca el correspondiente incremento de la densidad de las rocas. El aumento gradual de la temperatura y la presión con la profundidad afecta las propiedades físicas y, por tanto, el comportamiento mecánico de los materiales terrestres.

La Tierra puede dividirse en cinco capas principales según sus propiedades físicas y, por tanto, su resistencia mecánica: la corteza, el manto superior (litósfera y astenósfera), el manto inferior (mesósfera), el núcleo externo y el núcleo interno.

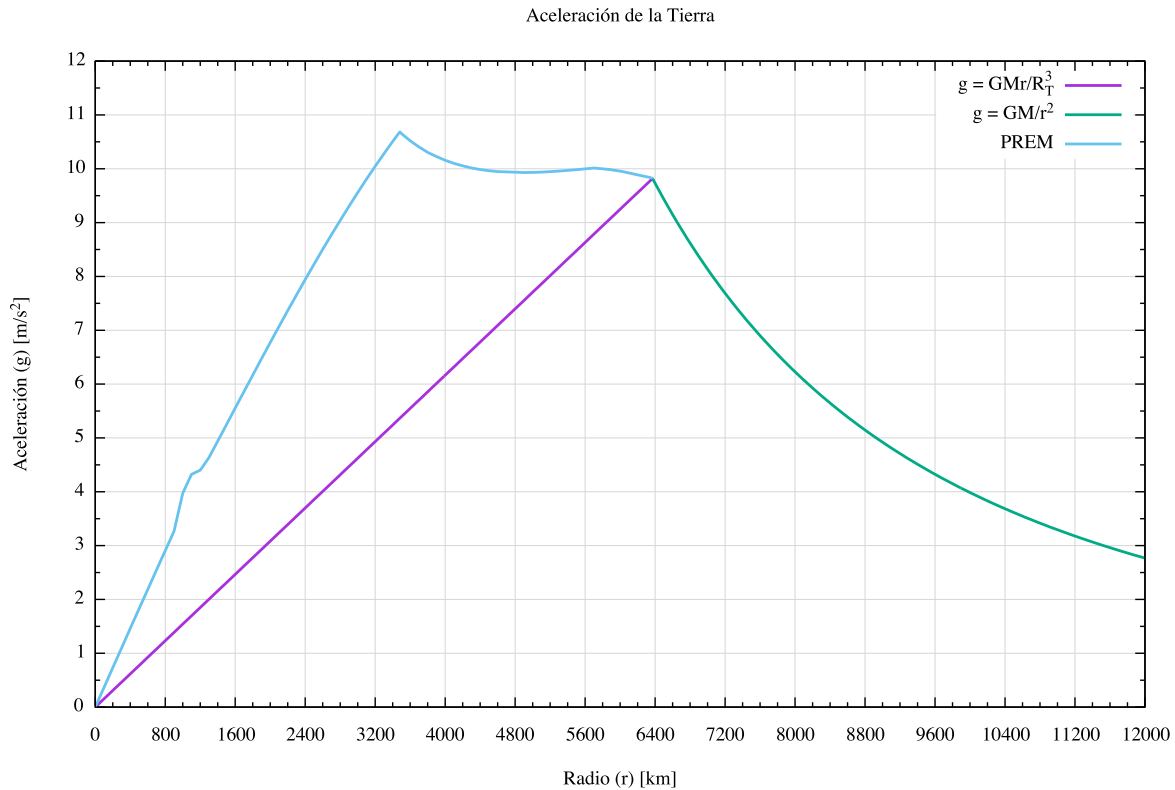


Figura 3.4: Otro de los resultados satisfactorios del PREM es la variación de la aceleración terrestre como función del radio. La línea azul representa los valores dados por el PREM, mientras que la línea púrpura representa a la aceleración usando un perfil de densidades promedio [27]. Para valores mayores al radio de la Tierra (6371 km) se usa la ley de gravitación universal para modelar la aceleración en función del radio. (Datos de op. cit.)

3.3.1. Corteza terrestre

La capa más externa de la Tierra está formada por la corteza y el manto superior y forma un caparazón relativamente frío y rígido. La corteza de la Tierra tiene un grosor medio inferior a los veinte kilómetros, lo que la convierte en la capa más fina de las divisiones terrestres. A lo largo de la corteza existen grandes variaciones de grosor. Las rocas en el interior estable de los continentes tienen un grosor de 35 a 40 kilómetros. Sin embargo, existen regiones montañosas donde la corteza alcanza un espesor de más de 70 kilómetros. La corteza oceánica es mucho más delgada, entre 3 y 15 kilómetros de grosor y un grosor medio de 7.5 kilómetros.

Las rocas continentales tienen una densidad media de alrededor de unos 2.7 g/cm^3 . La corteza continental es rica en los elementos sodio, potasio y silicio. Además se cree que la corteza inferior tiene una composición similar al basalto.

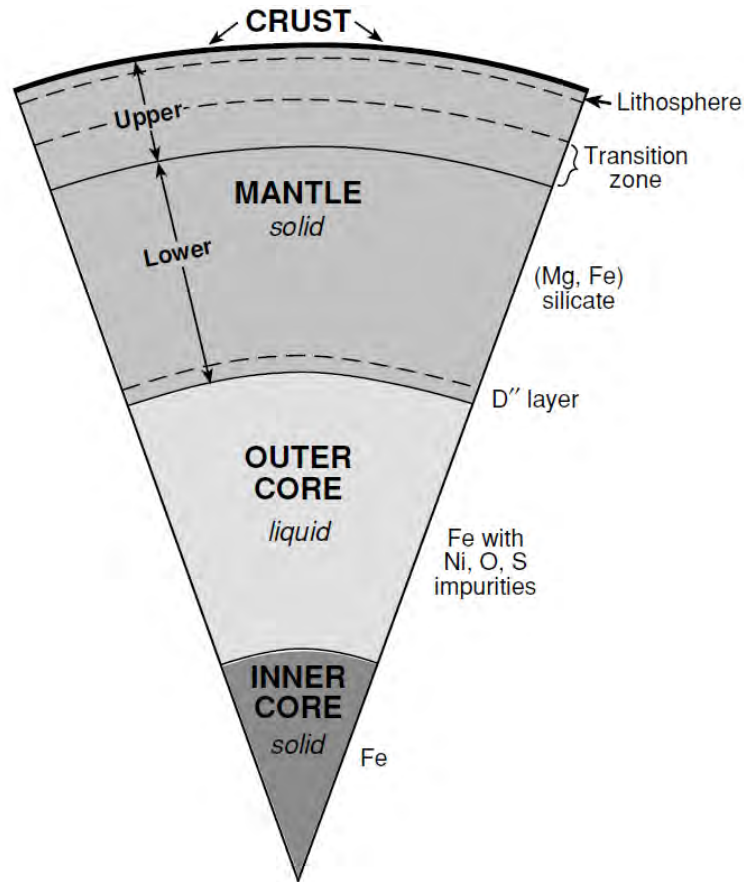


Figura 3.5: Representación gráfica de las principales capas y zonas más características de la Tierra. Los elementos ligeros que podrían estar en el núcleo externo son azufre, silicio, oxígeno, carbono e hidrógeno. (Imagen tomada de Fowler, C.M.R. *The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics*, segunda edición, Cambridge University Press, Reino Unido, pág. 2, 2004.)

3.3.2. Manto superior

Aproximadamente el 82 por ciento del volumen terrestre está contenido dentro del manto, una capa gruesa de casi 2900 kilómetros de espesor formada por rocas silicatadas que se extienden desde la corteza terrestre hasta el núcleo externo líquido. El conocimiento de la composición del manto proviene de datos experimentales y del análisis de material traído a la superficie por la actividad volcánica. El manto se divide en manto superior, donde se encuentran la litósfera y la astenósfera, y en manto inferior (mesósfera).

Después de la corteza terrestre viene una capa conocida como la litósfera, la cual tiene un grosor medio de 100 kilómetros, pero puede extenderse 250 kilómetros o más debajo de las porciones más antiguas de los continentes. En las cuencas oceánicas, la profundidad de la litósfera es de sólo unos pocos kilómetros y aumenta hasta casi 100 kilómetros en las partes de la corteza oceánica más antiguas y más frías.

Debajo de la litósfera, en la región del manto superior, a una profundidad de unos 660 kilómetros se extiende la astenósfera. En la parte superior de esta capa se dan ciertas condiciones

particulares de temperatura y presión que provocan una pequeña cantidad de fusión en la materia. Dentro de esta zona, la litósfera está mecánicamente despegada de la capa inferior. Como resultado, la litósfera puede desplazarse con independencia de la astenósfera.

3.3.3. Manto inferior

Entre las profundidades de los 660 kilómetros y los 2900 kilómetros se encuentra el manto inferior o mesósfera, la cual conforma el 55 por ciento del volumen de la Tierra. La mayoría de las rocas que conforman el manto, son de naturaleza silícea; las más comunes son olivino, piroxeno y granate. Otro tipo de roca con composición mayoritaria es el óxido de magnesio. Adicionalmente se encuentran elementos como hierro, aluminio, calcio, sodio y potasio. Todos estos elementos dan lugar a minerales como la perovskita ($(\text{Mg}, \text{Fe}) \text{SiO}_3$), periclasa, CaSiO_3 -perovskita y SiO_2 -stishovita. Se piensa que el aluminio constituye del 4 al 5 por ciento del manto inferior.

La temperatura de la mesósfera varía de 1000 °C a 3700 °C en la parte cercana al límite con el núcleo externo. El gradiente geotérmico es de 25 °C por cada kilómetro. La viscosidad del manto también presenta una importante variación, esto se asocia a los grandes valores de presión, que comienzan en 24 gigapascales y alcanzan 136 gigapascales en el límite entre el núcleo y manto. Debido a éstas propiedades, el manto inferior es mucho menos dúctil que el manto superior, la intensa presión se asocia al estado de agregación sólido. El estado de agregación se relaciona con cambios en la velocidad de las ondas sísmicas y se establece que a partir de los 670 km de profundidad la velocidad de las ondas sísmicas aumenta. Los análisis teóricos y experimentales muestran que los silicatos ultramáficos cambian de fase la espinela para convertirse en perovskita. Entre los 1500 y 2000 km de profundidad, desaparece el patrón heterogéneo en la velocidad de las ondas sísmicas. Al final del manto inferior se encuentra la zona D³, la cual está dominada por una disminución en la velocidad de las ondas sísmicas.

3.3.4. Núcleo

El núcleo es la esfera central densa de la Tierra con un radio de unos 3486 kilómetros. Extendiéndose desde el borde inferior del manto hasta el centro de la Tierra, el núcleo constituye alrededor de una sexta parte del volumen de la misma y casi una tercera parte de su masa total. La presión en el centro es millones de veces mayor que la presión del aire en la superficie terrestre, y las temperaturas pueden superar los 6700 °C³. El núcleo, que está compuesto principalmente por hierro y níquel, se divide en dos regiones que exhiben resistencias mecánicas muy diferentes. El núcleo externo es una capa líquida de aproximadamente 2270 kilómetros de espesor. El flujo convectivo del hierro metálico en el interior de esta zona es el que genera el campo magnético de la Tierra. Por otra parte, el núcleo interno es una esfera con un radio de 1221 kilómetros. A pesar de su elevada temperatura, el material del núcleo interno es más denso que el del núcleo externo y se comporta como un sólido.

³La temperatura promedio en el centro de la Tierra es de aproximadamente 6000 ± 500 K. La estimación de la temperatura en el centro de la Tierra se calcula con base en los diagramas de fase de aleaciones de hierro con otros elementos.

Volumen, masa y densidad de la Tierra							
	Profundidad	Radio	Volumen		Masa		Densidad
	(km)	(km)	10^{18} m^3	(%)	10^{21} kg	(%)	(g/cm^3)
Corteza	0 - Moho ⁴	Moho - 6371	10	0.9	28	0.5	2.60 - 2.90
Manto superior	Moho - 670	5701 - Moho	297	27.4	1064	17.8	3.38 - 3.99
Manto inferior	670 - 2891	3480 - 5701	600	55.4	2940	49.2	4.38 - 5.56
Núcleo externo	2891 - 5150	1221 - 3480	169	15.6	1841	30.8	9.90 - 12.16
Núcleo interno	5150 - 6371	0 - 1221	8	0.7	102	1.7	12.76 - 13.08
Tierra	0 - 6371	6371 - 0	1083	100	5975	100	

Cuadro 3.1: Resumen de los volúmenes, masas y densidades de cada una de las principales capas internas. Obsérvese que la mayor variación en la densidad se da en el núcleo externo.

3.4. Composición y restricciones del núcleo externo

Una de las características más interesantes del núcleo es su gran densidad. La densidad media es de aproximadamente $11 \text{ g}/\text{cm}^3$, y en el centro de la Tierra se aproxima a casi $14 \text{ g}/\text{cm}^3$. Ni siquiera bajo las presiones extremas dominantes a estas profundidades, los silicatos comunes en la corteza (con densidades superficiales de 2.6 a $3.5 \text{ g}/\text{cm}^3$) podrían estar lo suficientemente compactados como para ser responsables de la densidad calculada para el núcleo. Por consiguiente, se ha intentado determinar qué materiales podrían explicar estas densidades. Cálculos actuales sugieren que el núcleo es fundamentalmente hierro con un 5 a un 10 por ciento de níquel y otras cantidades de elementos más ligeros. Estudios de laboratorio han mostrado que aleaciones de hierro con hasta una concentración porcentual máxima del 20 por ciento de níquel son prácticamente indistinguibles de aquellos que no poseen este último elemento [28]. Estas situaciones se traducen en que, por ejemplo, si tuviésemos un núcleo externo compuesto de hierro con un 10 por ciento de níquel, la variación en la fracción de electrones apenas sería del 0.23 por ciento. Por este motivo es que solamente nos enfocaremos en estudiar los cambios ocasionados por la presencia de elementos ligeros que ocasionen una variación más significativa en la fracción de electrones.

Debido a que a la densidad del núcleo externo es aproximadamente un 20 por ciento menor a la del núcleo interno, se ha propuesto que en él deben estar presentes otros elementos más ligeros. Estudios geoquímicos y cosmológicos sugieren que los candidatos más probables son oxígeno, azufre, carbono, hidrógeno y silicio [2, pág. 351], [28]. Grosso modo, la cantidad máxima de estos elementos ligeros se estima con base en estudios composicionales de la Tierra y del sistema solar, junto con estudios geoquímicos de aleaciones de hierro que sean compatibles con las observaciones sismográficas. En la referencia [4] se presenta una tabla con las abundancias máximas de tales elementos, ver cuadro 3.2.

El cuadro 3.2 nos orienta sobre los modelos realistas que podemos proponer usando

⁴La discontinuidad de Mohorovicic, abreviada como Moho, es la zona de transición entre la corteza y el manto terrestre. Se sitúa a una profundidad media de unos 35 km, pudiendo encontrarse a 70 km de profundidad bajo los continentes o a tan sólo 10 km bajo los océanos.

Concentración porcentual máxima						
Nombre del modelo	Z/A	O (wt %)	C (wt %)	S (wt %)	H (wt %)	Si (wt %)
Modelos de un sólo elemento						
Fe + 11 wt % O	0.4693	11	-	-	-	-
Fe + 12 wt % C	0.4697	-	12	-	-	-
Fe + 13 wt % S	0.4699	-	-	13	-	-
Fe + 1 wt % H	0.4709	-	-	-	1	-
Fe + 18 wt % Si	0.4715	-	-	-	-	18
Modelos multielemento						
Huang2011	0.4678	0.1	-	5.7	-	-
McDonough2003	0.4682	0	0.2	1.9	0.06	6
Allegre2001	0.4699	5	-	1.21	-	7

Cuadro 3.2: Abundancia máxima de los elementos ligeros en el núcleo externo. Se muestran los valores del cociente Z/A para mezclas de hierro con un elemento adicional y para algunos modelos multielementos. (Información de Rott, C. et al. *Spectrometry of the Earth using Neutrino Oscillations*, Scientific Reports 5, 2015.)

neutrinos que crucen por el núcleo externo. Sin embargo, es necesario aclarar cómo se incorpora la fracción de electrones al potencial de corriente cargada dado por la ecuación (2.68) junto con la concentración porcentual en peso.

La fracción de electrones Y_e puede ser escrita como

$$Y_e = \frac{Z}{A} = \sum_{j=1}^n k_j \frac{Z_j}{A_j} \quad (3.1)$$

donde Z_j/A_j es el j -ésimo cociente del número atómico entre la masa atómica de un elemento cualquiera. Además, los coeficientes k_j cumplen la propiedad de que

$$\sum_{j=1}^n k_j = 1. \quad (3.2)$$

Tomemos como ejemplo una mezcla de hierro con diferentes concentraciones porcentuales de hidrógeno. El número atómico del hierro y el hidrógeno son $Z_{\text{Fe}} = 26$ y $Z_{\text{H}} = 1$; mientras que sus respectivas masas atómicas son $A_{\text{Fe}} = 55.845$ y $A_{\text{H}} = 1.00794$. Para un modelo de hierro con una concentración del 1 % de hidrógeno se tiene

$$\begin{aligned} \frac{Z}{A} &= 0.99 \frac{Z_{\text{Fe}}}{A_{\text{Fe}}} + 0.01 \frac{Z_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} \\ &= 0.99 \frac{26}{55.845} + 0.01 \frac{1}{1.00794} \approx 0.4709, \end{aligned}$$

lo cual reproduce el valor proporcionado en el cuadro 3.2 para el caso del hidrógeno. De manera similar al ejemplo anterior, se pueden calcular diferentes cocientes para Z/A con otros elementos. El cálculo anterior ilustra cómo se incorporan las diferentes variaciones en la composición

terrestre con la teoría de oscilaciones en materia. Esta última cuenta constituye el ingrediente final para que podamos incorporar la teoría a un caso práctico.

3.5. Modelo propuesto

Para tratar de estudiar la composición del núcleo externo se ha realizado un ajuste de la densidad terrestre con base al PREM mediante funciones escalón. Este ajuste se puede visualizar en la figura 3.6. A pesar de que se puede incorporar una función analítica que sea lo más fiel a los datos de la densidad, recordemos que la teoría desarrollada en el capítulo anterior sólo es válida para densidades constantes. Sin embargo, el uso de funciones escalón es un método muy socorrido debido a que no imponen la dificultad que ocasiona el introducir una función variable, además de que los resultados son bastante buenos.

Para la corteza terrestre y el manto superior usamos solamente un escalón por región, puesto que las longitudes de estas dos zonas son muy pequeñas en comparación con las que se tienen en el manto inferior, el núcleo externo y el núcleo interno. Para estas últimas zonas se utilizaron 8, 9 y 3 escalones respectivamente. En cuanto a los valores de la fracción de electrones en las regiones que no corresponden al núcleo externo, se usaron los valores de la referencia [29]. Para la corteza terrestre, el manto inferior y el manto superior se utiliza $Z/A = 0.4957$. En el caso del núcleo interno y como punto de partida para el núcleo externo se emplea la fracción de electrones que arrojaría un modelo para un núcleo de hierro puro, $Z_{\text{Fe}}/A_{\text{Fe}} = 0.4656$.

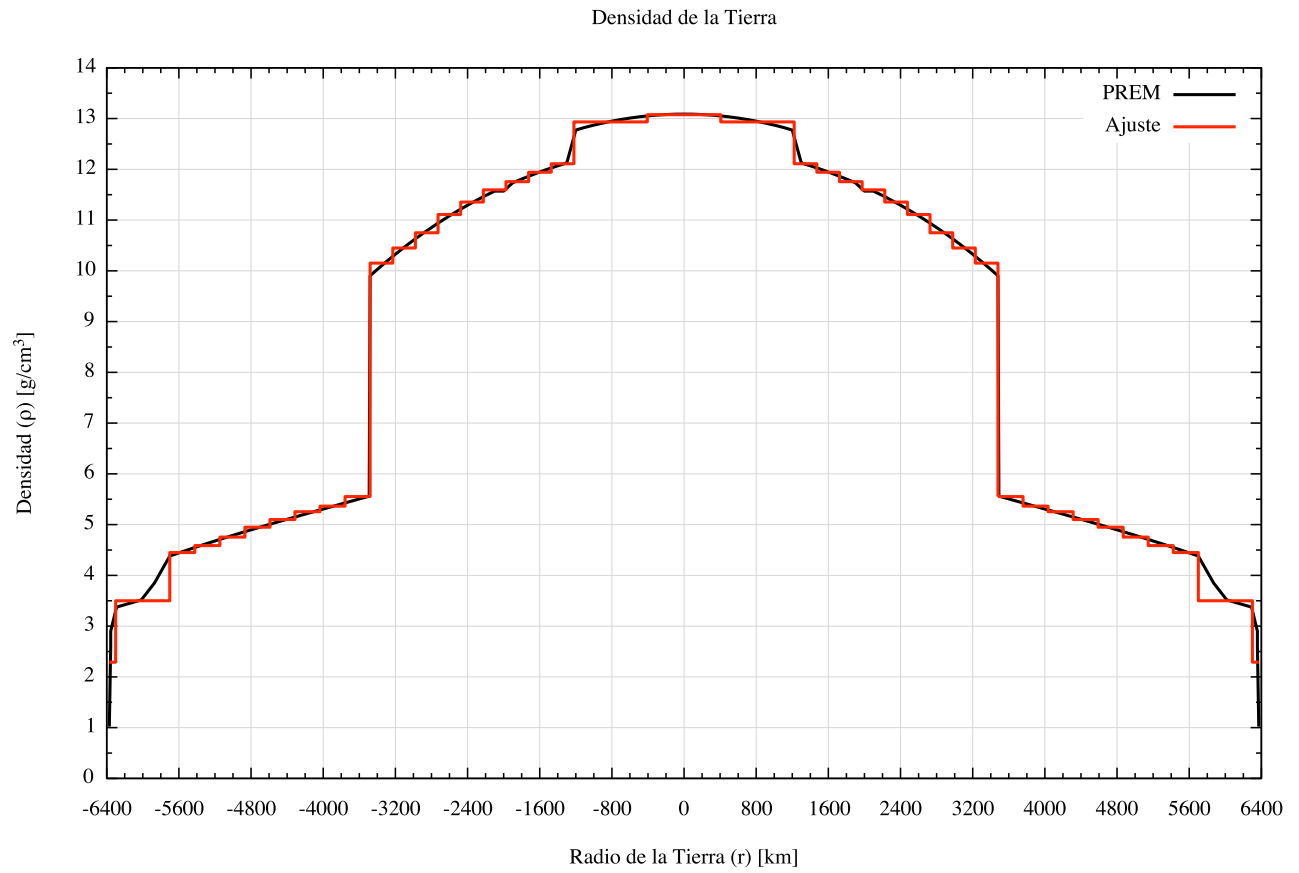


Figura 3.6: Se utilizaron un total de 41 escalones para ajustar de manera precisa la densidad terrestre.

Capítulo 4

Resultados

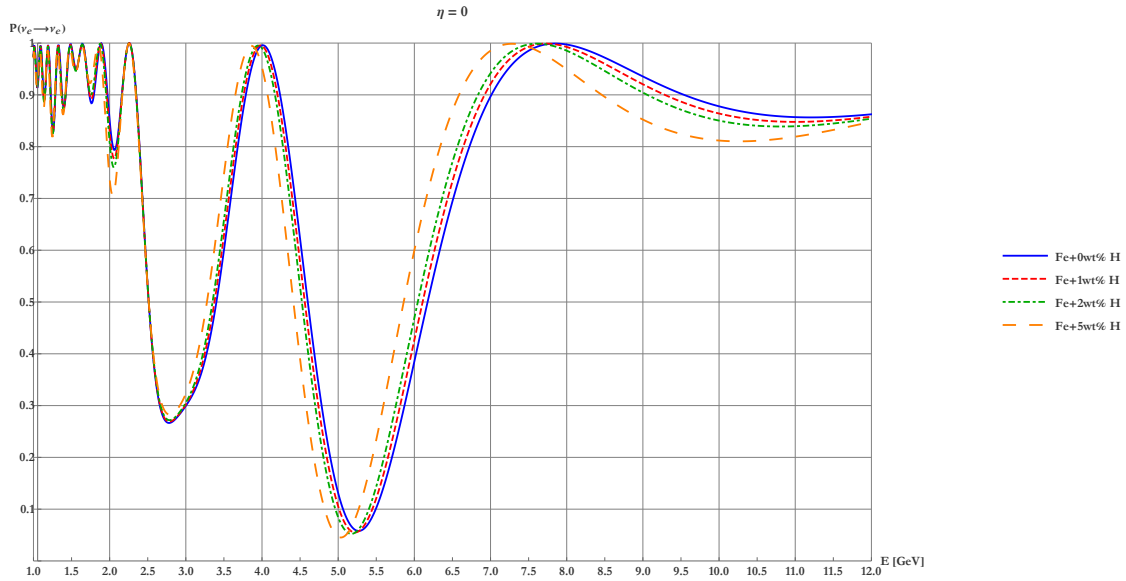
Debido a que aún existen varias interrogantes sobre los neutrinos, este trabajo no estuvo solamente limitado a estudiar la variación en la fracción de electrones en el núcleo externo, sino que también se tomaron en cuenta los efectos asociados con el ángulo nadir, la jerarquía invertida de masas, el estudio entre el primer y segundo octante para el ángulo de mezcla θ_{23} . Además, examinamos el caso de los antineutrinos. Los elementos que mejor ejemplifican la variación en las probabilidades de oscilación fueron el hidrógeno y el silicio. A continuación se presentarán los resultados obtenidos con el estudio de estos dos elementos con base en los parámetros mencionados anteriormente. Las probabilidades de supervivencia relevantes son para los neutrinos del muón y del electrón, mientras que la probabilidad de transición de interés es aquella en la que los neutrinos del muón (electrón) se transforman en neutrinos del electrón (muón).

Los datos principales que se usaron fueron $\Delta m_{31}^2 = 2.575 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, $\Delta m_{21}^2 = 7.7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, $\theta_{12} = 33.709^\circ$ y $\theta_{13} = 8.799^\circ$. En el caso del ángulo de mezcla θ_{23} se usó un valor de 41.380° para el primer octante y un valor de 51.380° en el segundo octante. Además, para el estudio del caso con jerarquía invertida, basta con agregar un signo menos a la diferencia de masas Δm_{31}^2 , ver figura 2.3a.

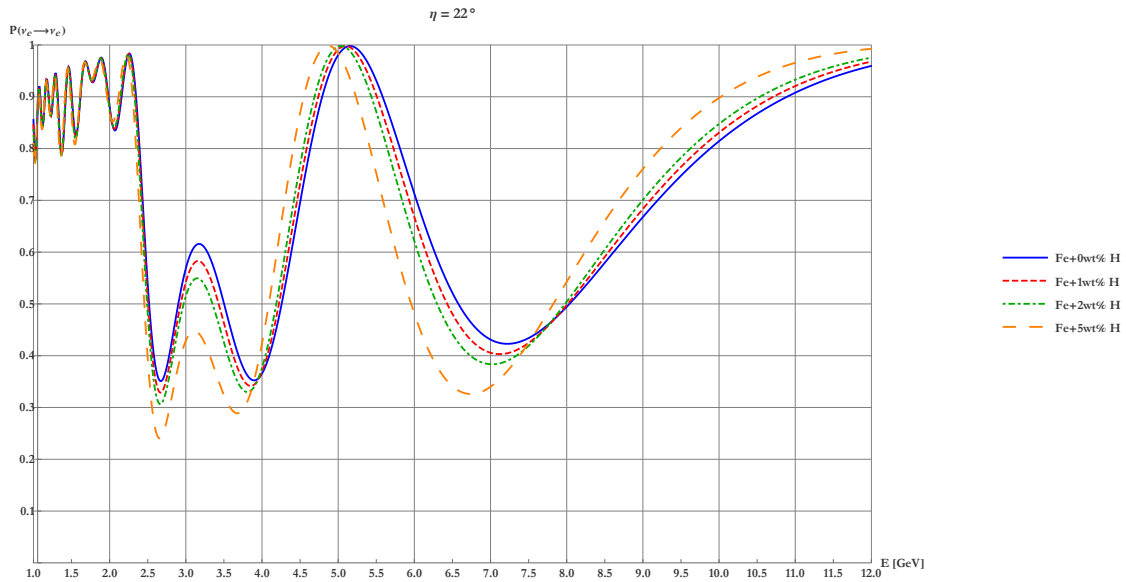
4.1. Neutrinos

4.1.1. Jerarquía normal y $\theta_{23} < 45^\circ$

Hidrógeno

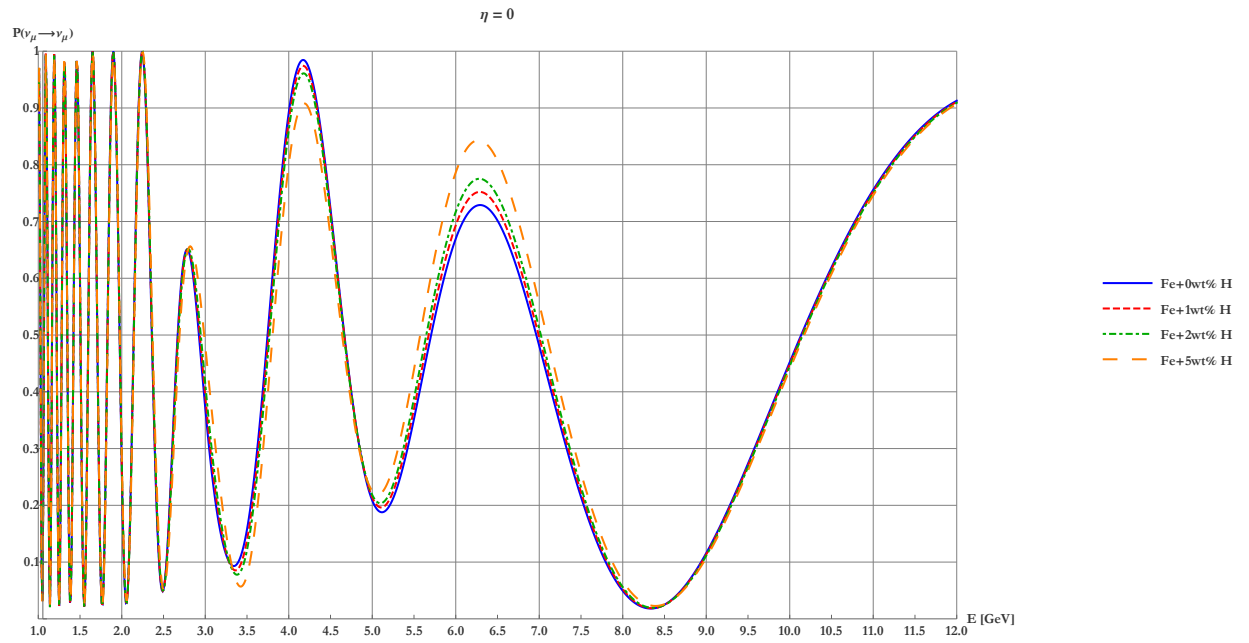


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

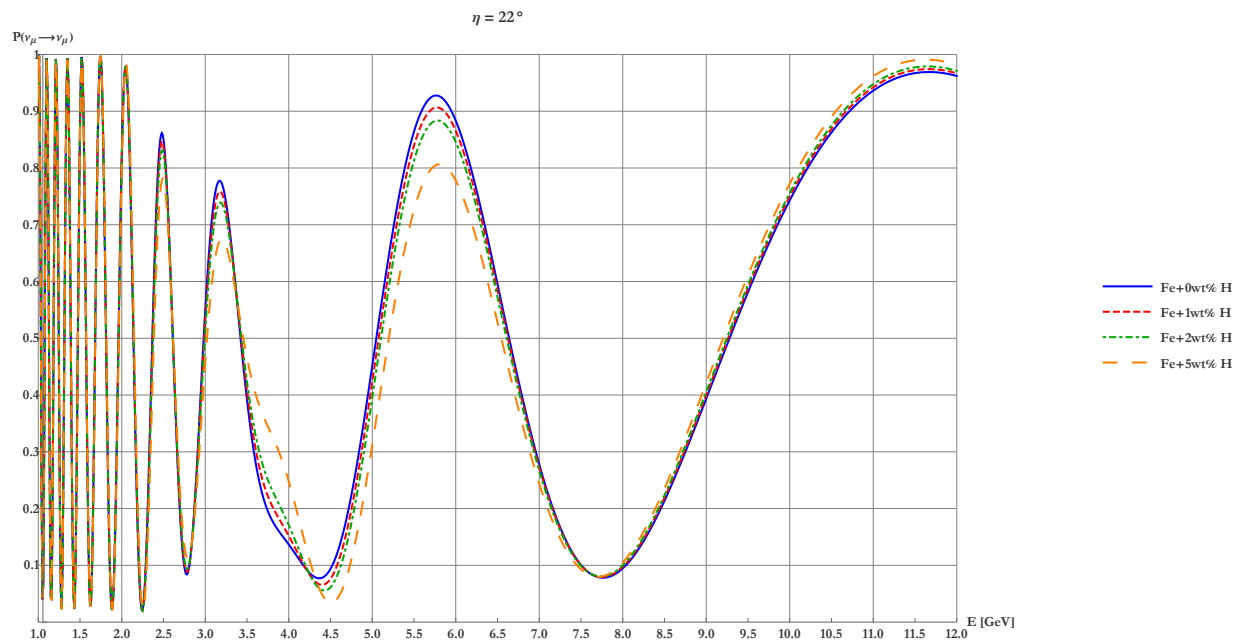


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.1: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

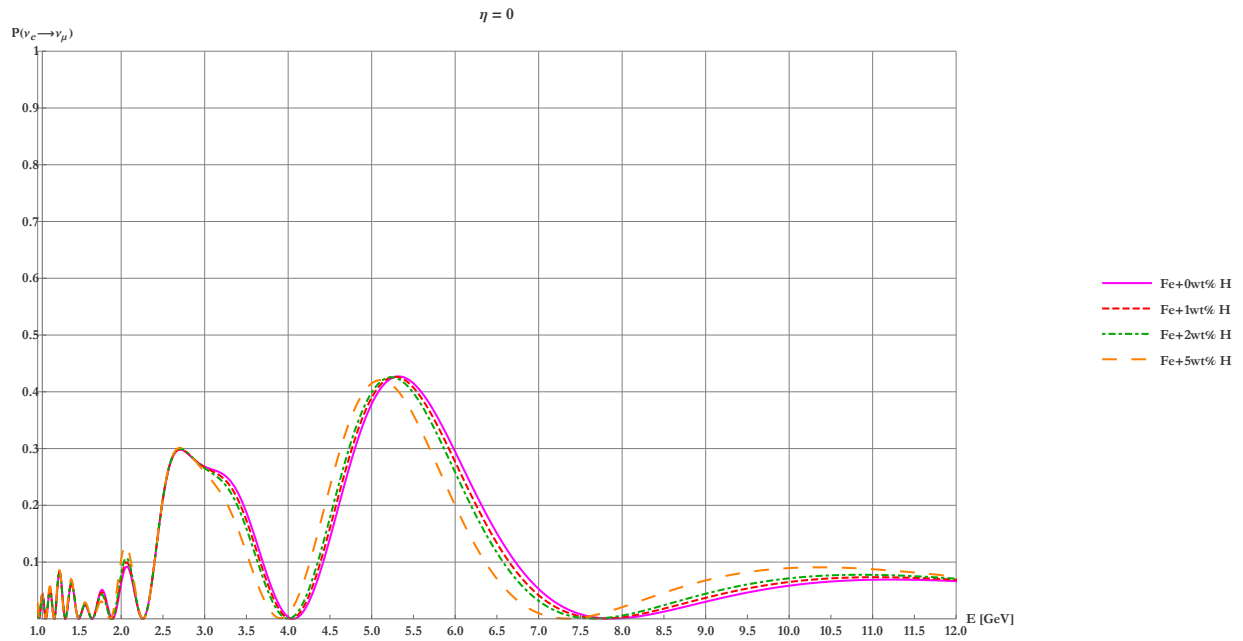


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

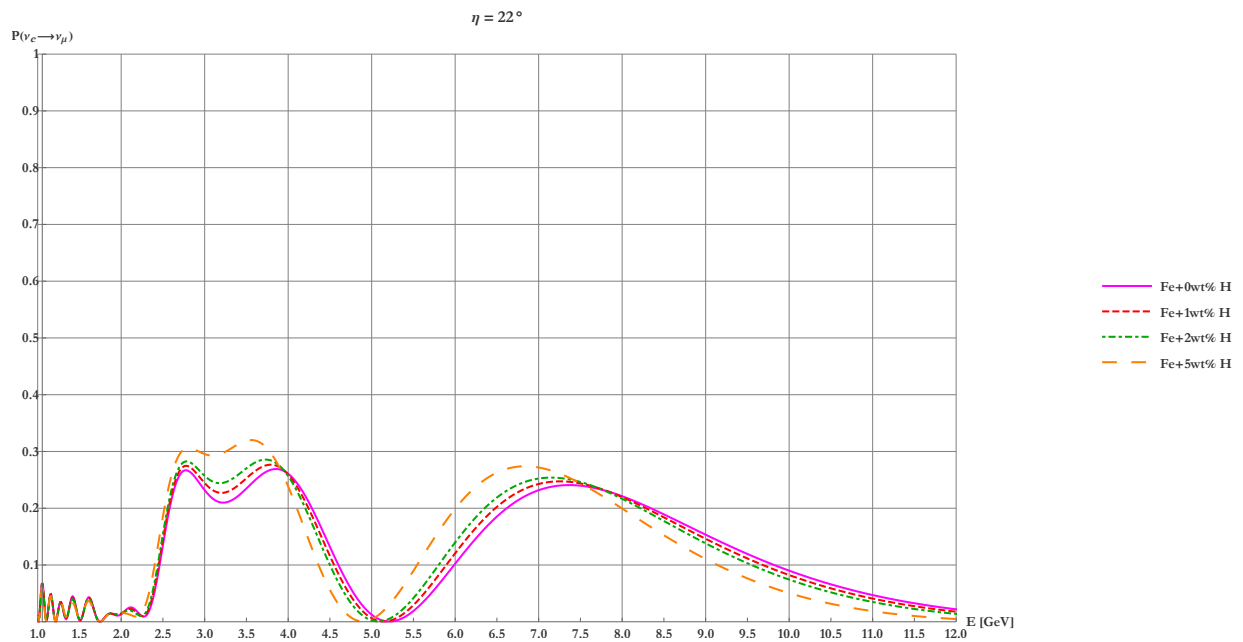


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.2: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



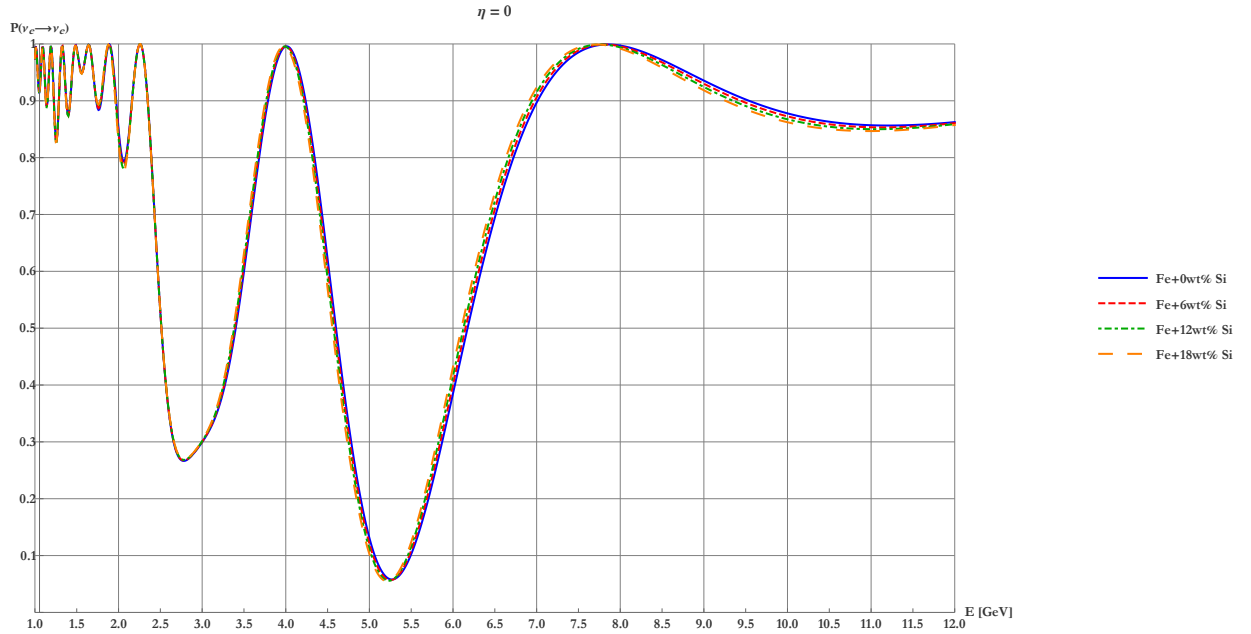
(a) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.



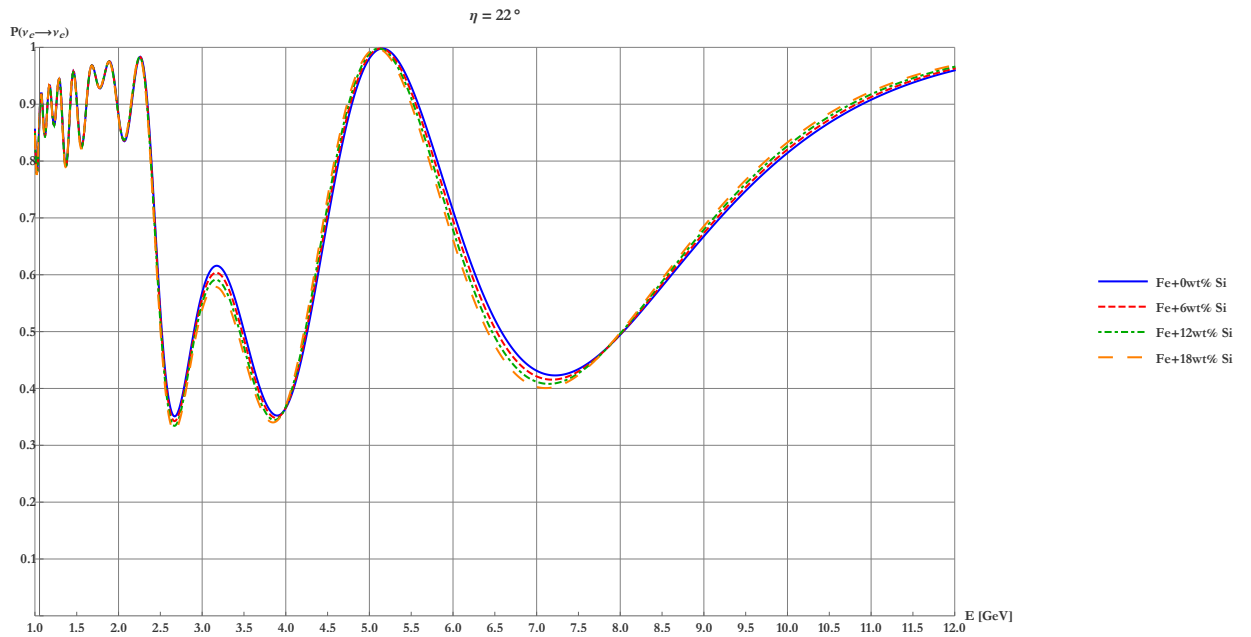
(b) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.3: Probabilidades de conversión para el neutrino del electrón yendo al neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

Silicio

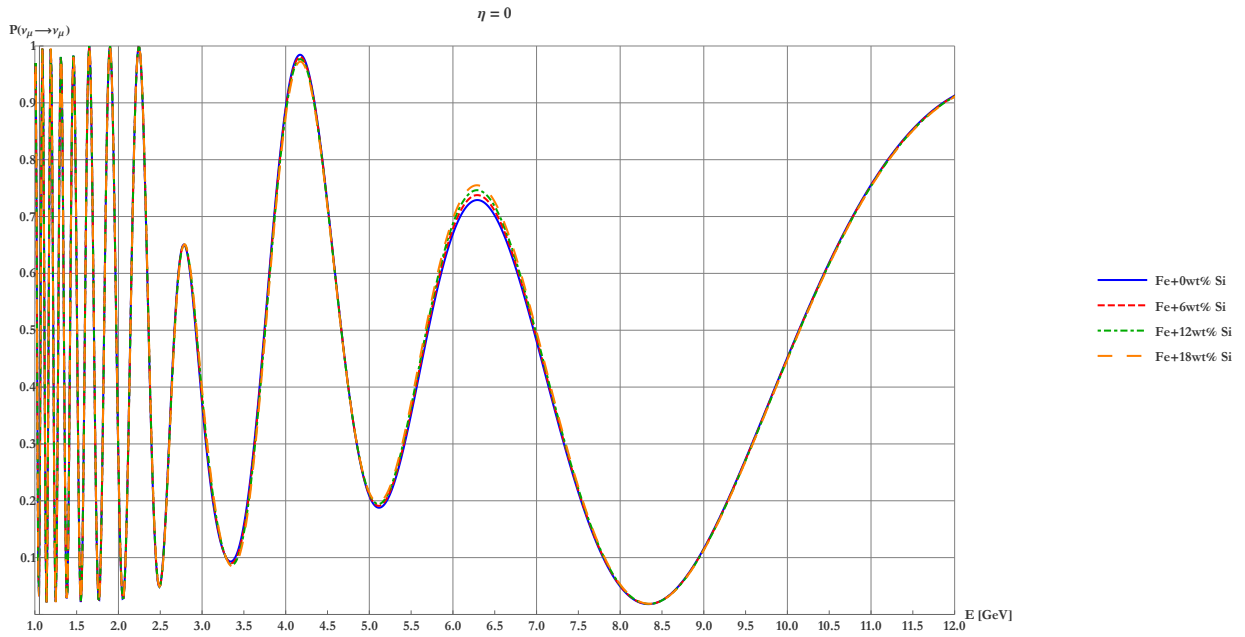


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

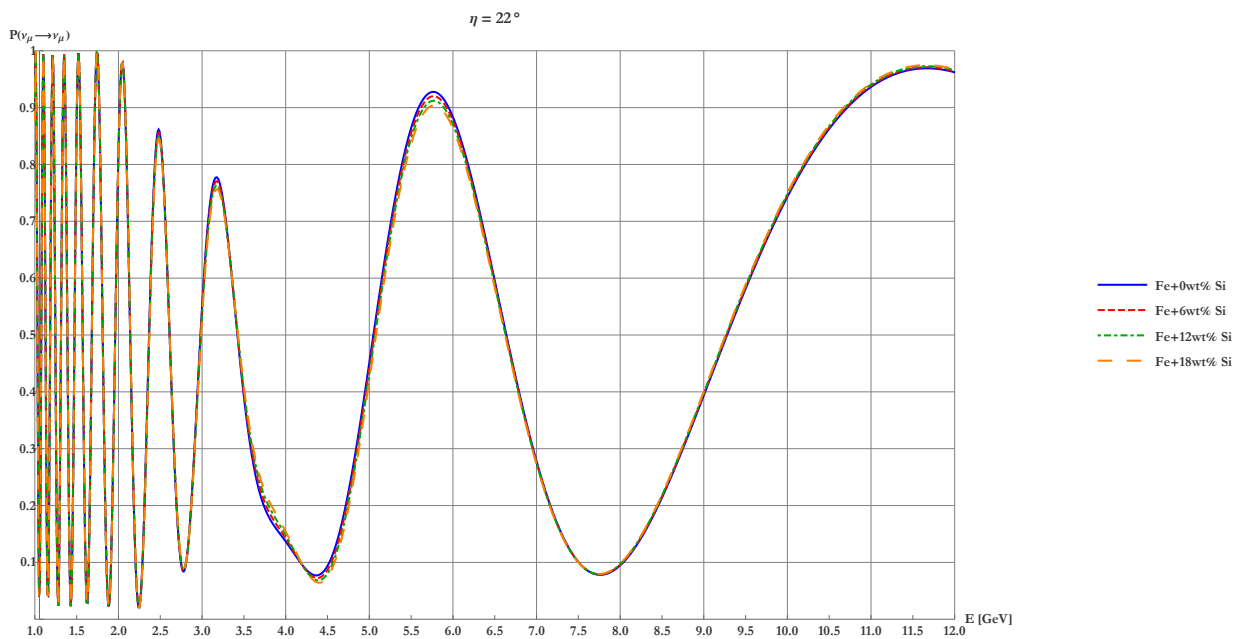


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.4: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

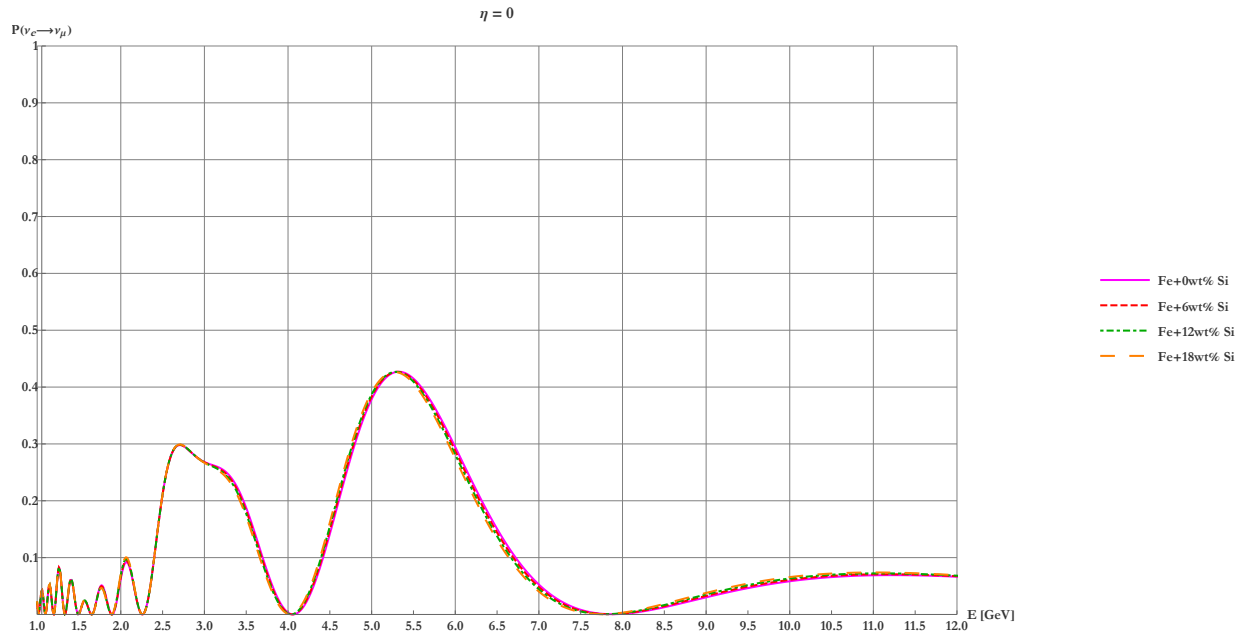


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

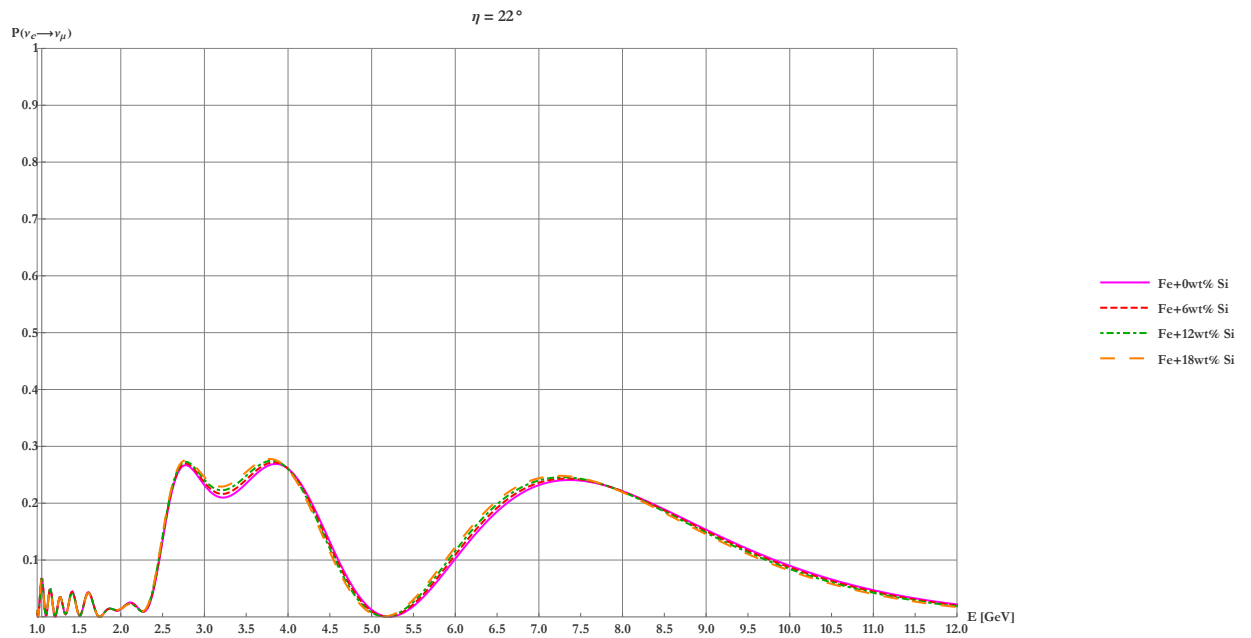


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.5: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



(a) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

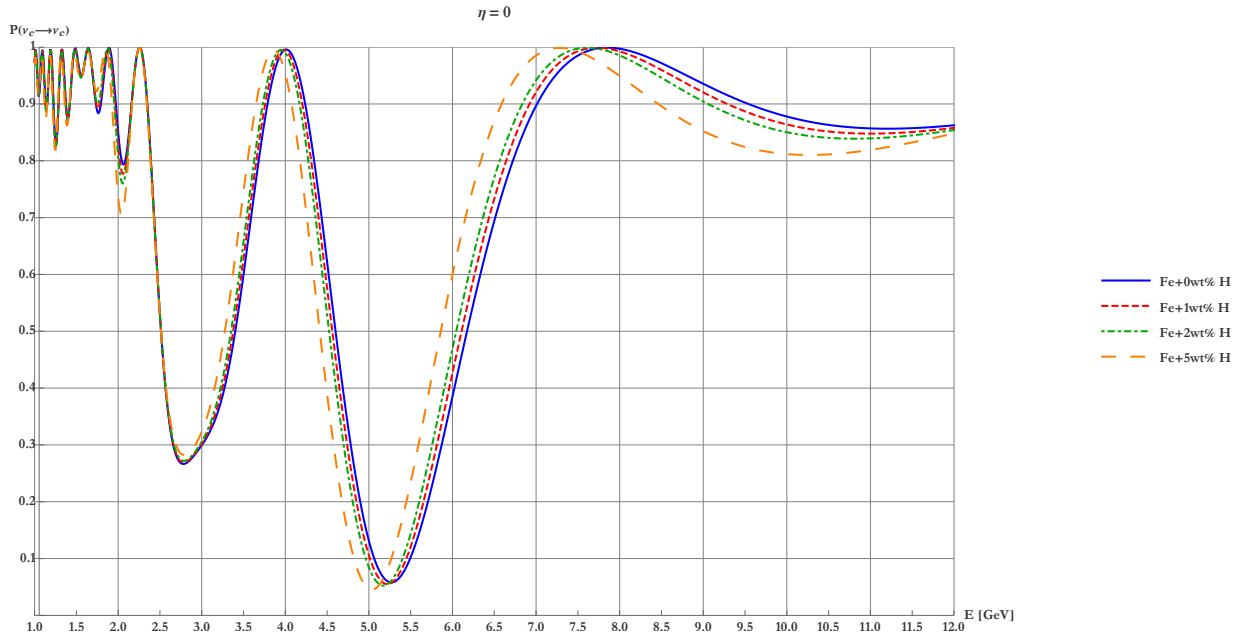


(b) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

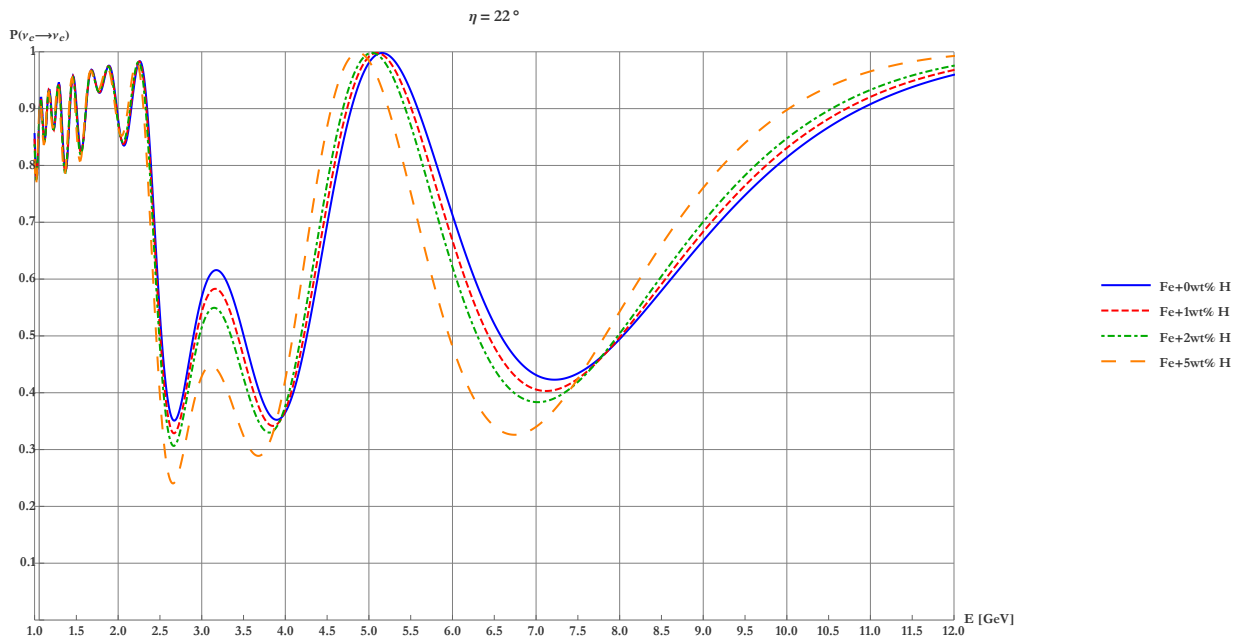
Figura 4.6: Probabilidades de conversión para el neutrino del electrón yendo al neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

4.1.2. Jerarquía normal y $\theta_{23} > 45^\circ$

Hidrógeno

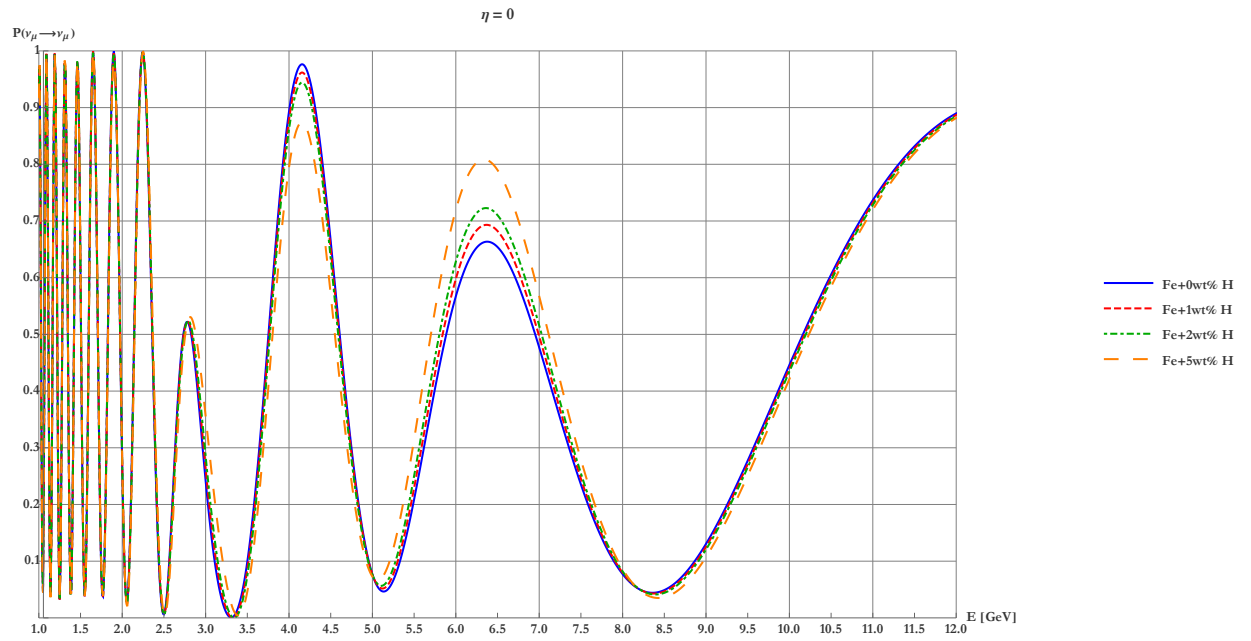


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

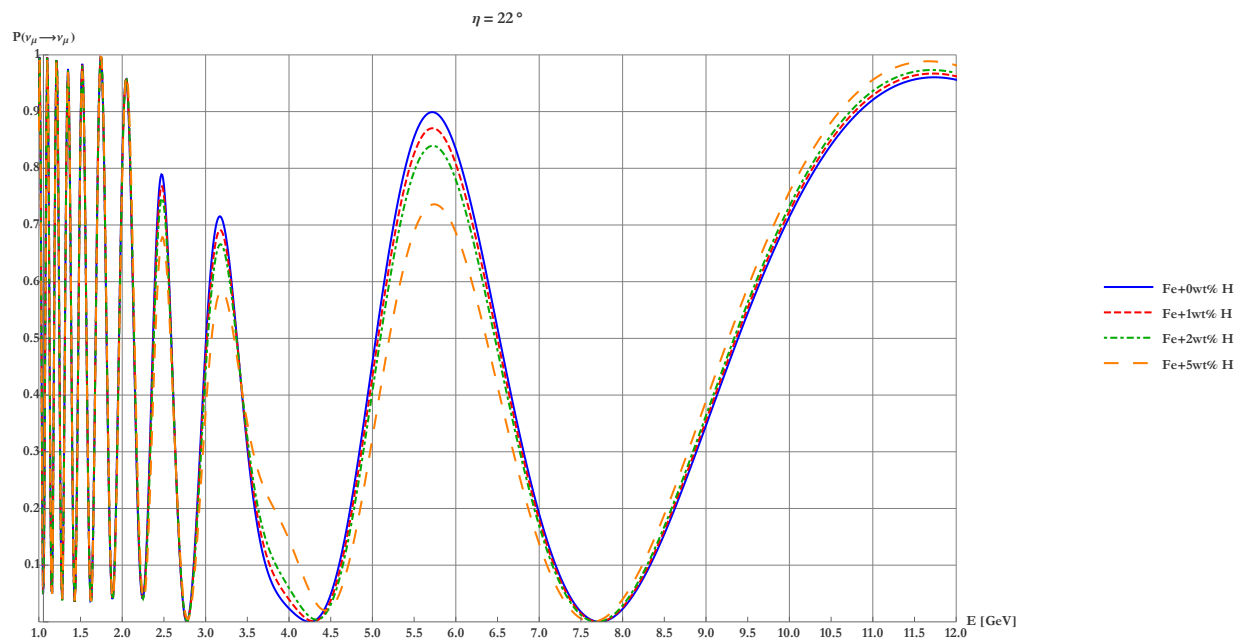


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.7: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

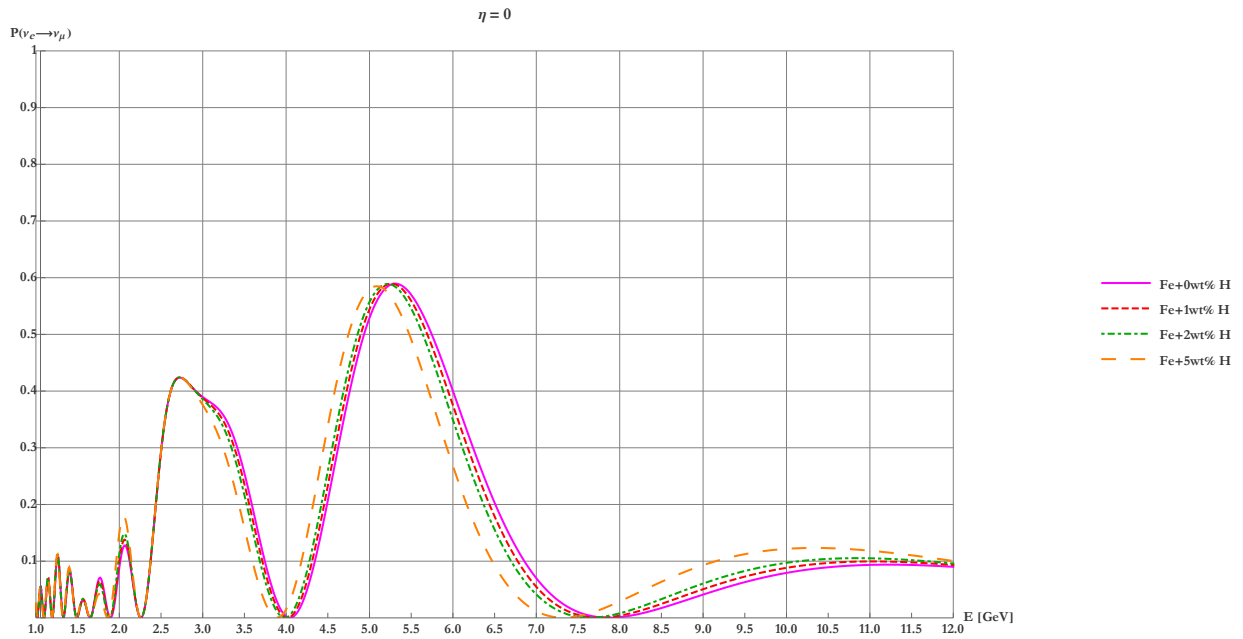


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

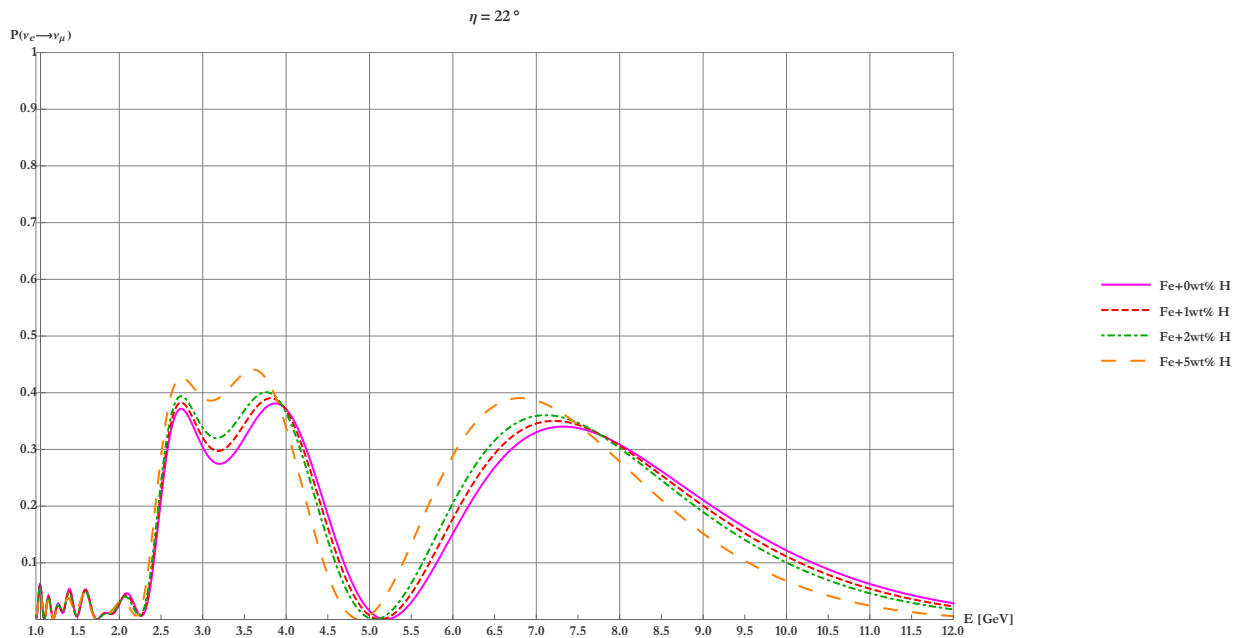


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.8: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



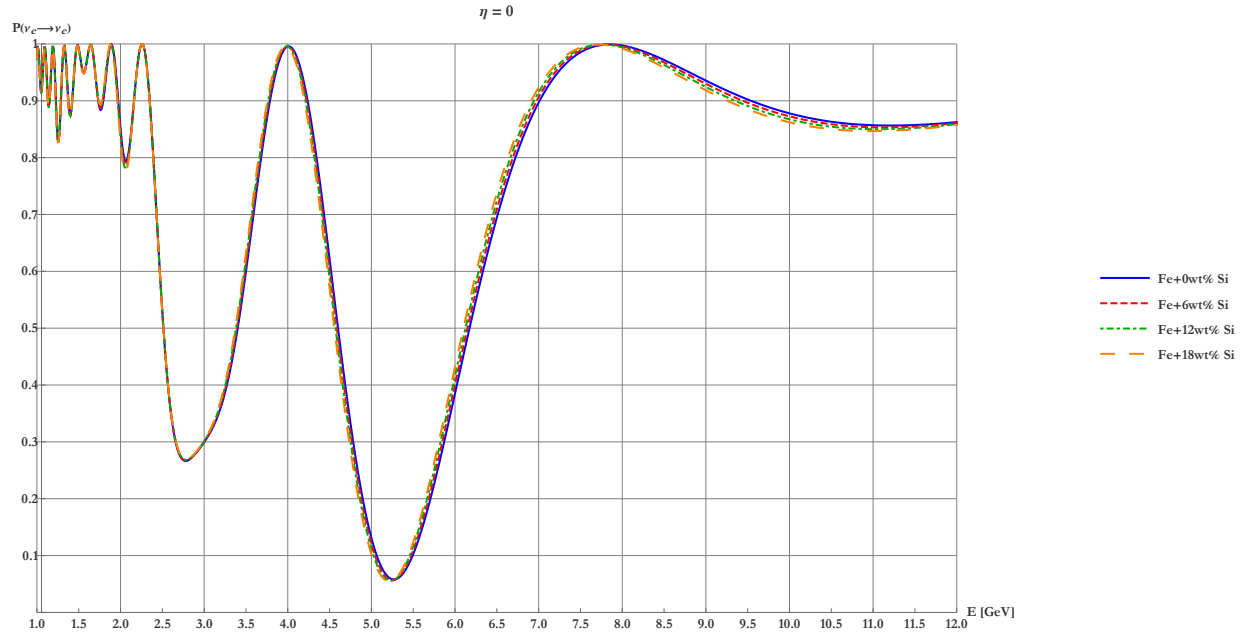
(a) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.



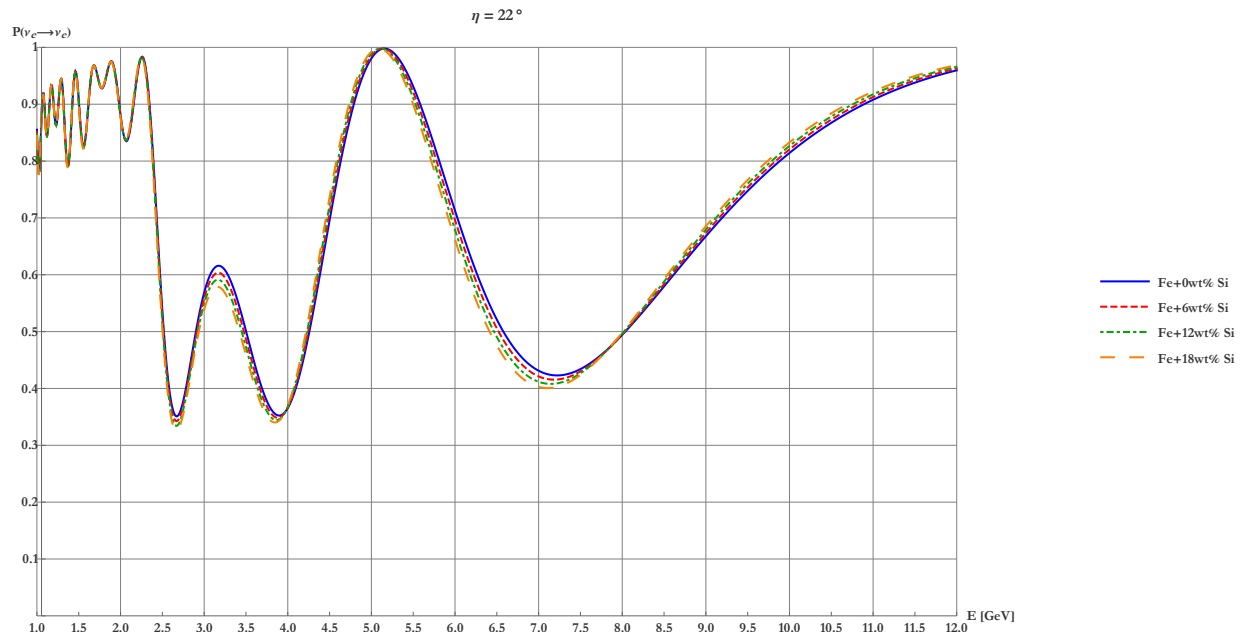
(b) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.9: Probabilidades de conversión para el neutrino del electrón yendo al neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

Silicio

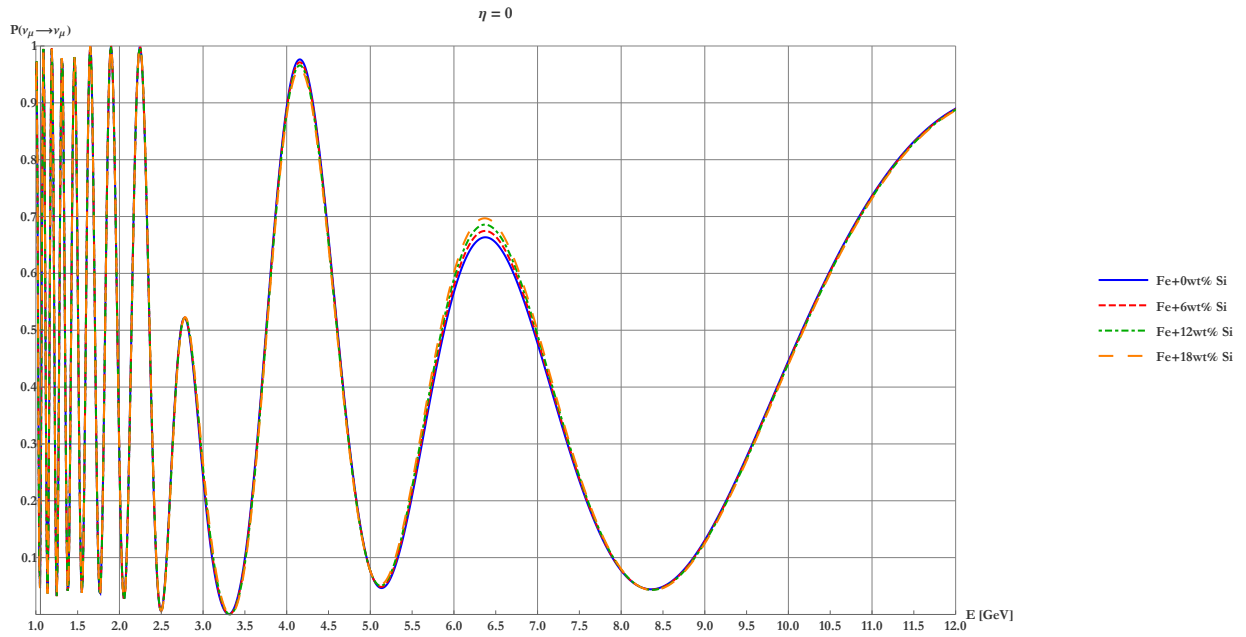


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

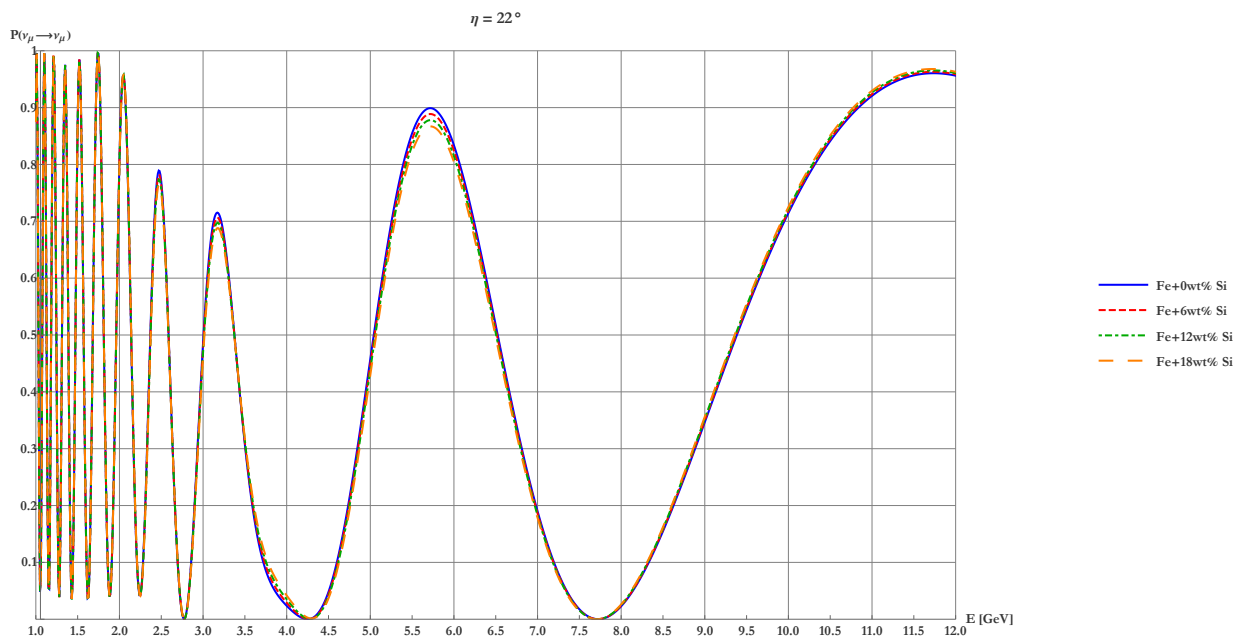


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.10: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

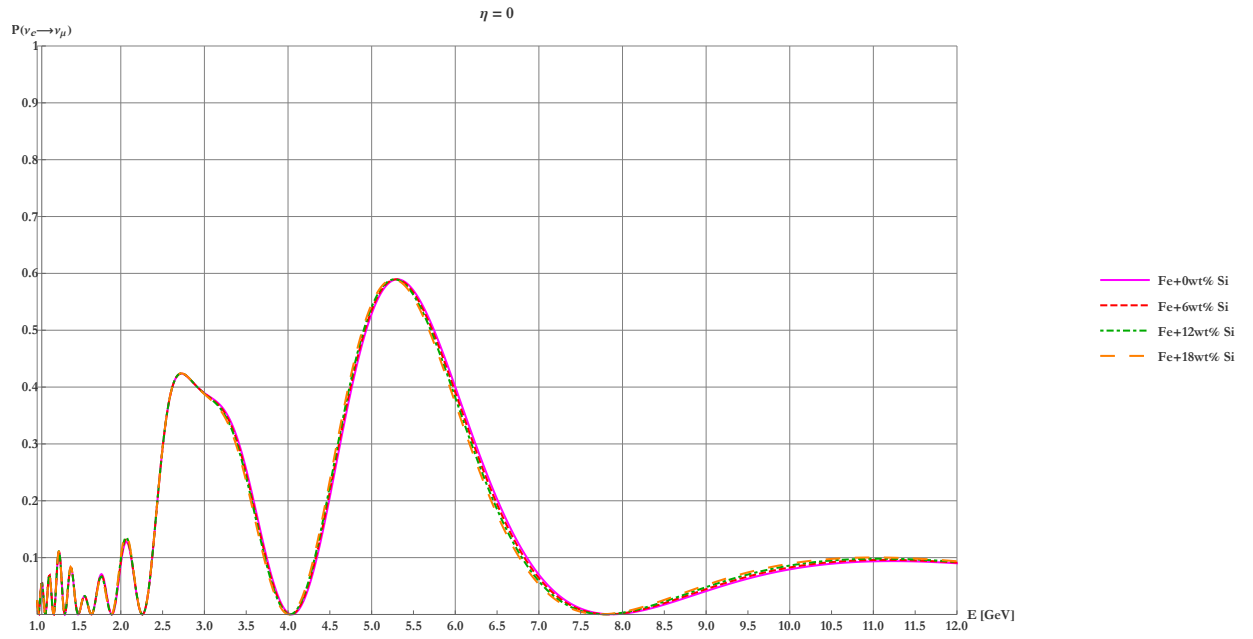


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

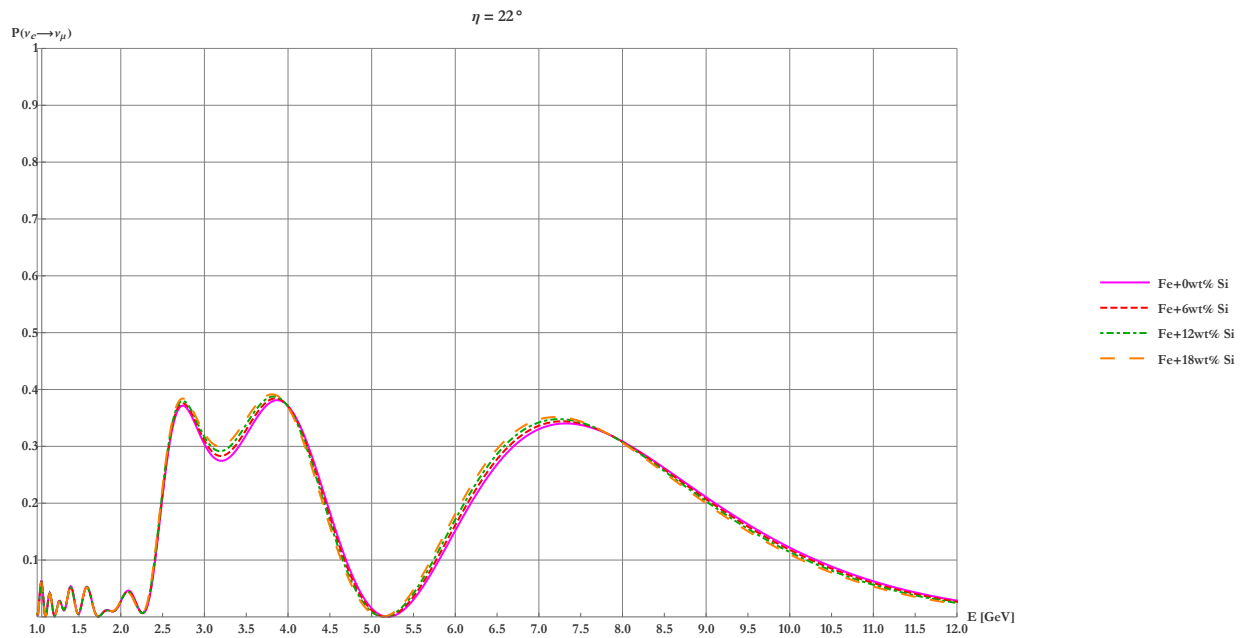


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.11: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



(a) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

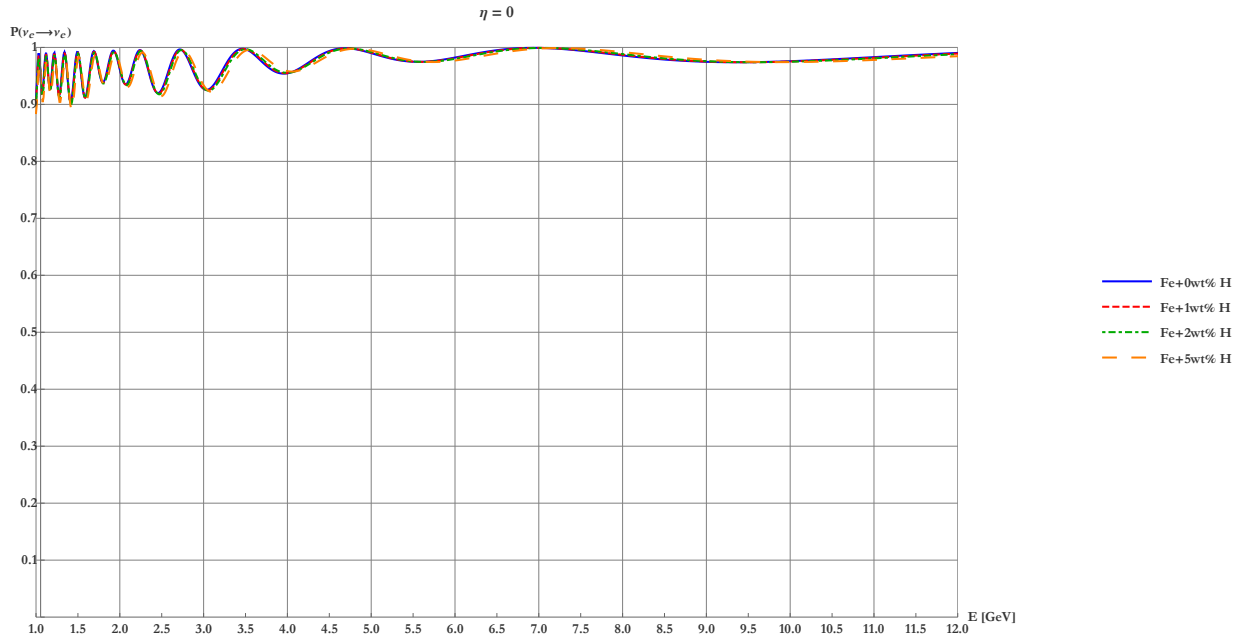


(b) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

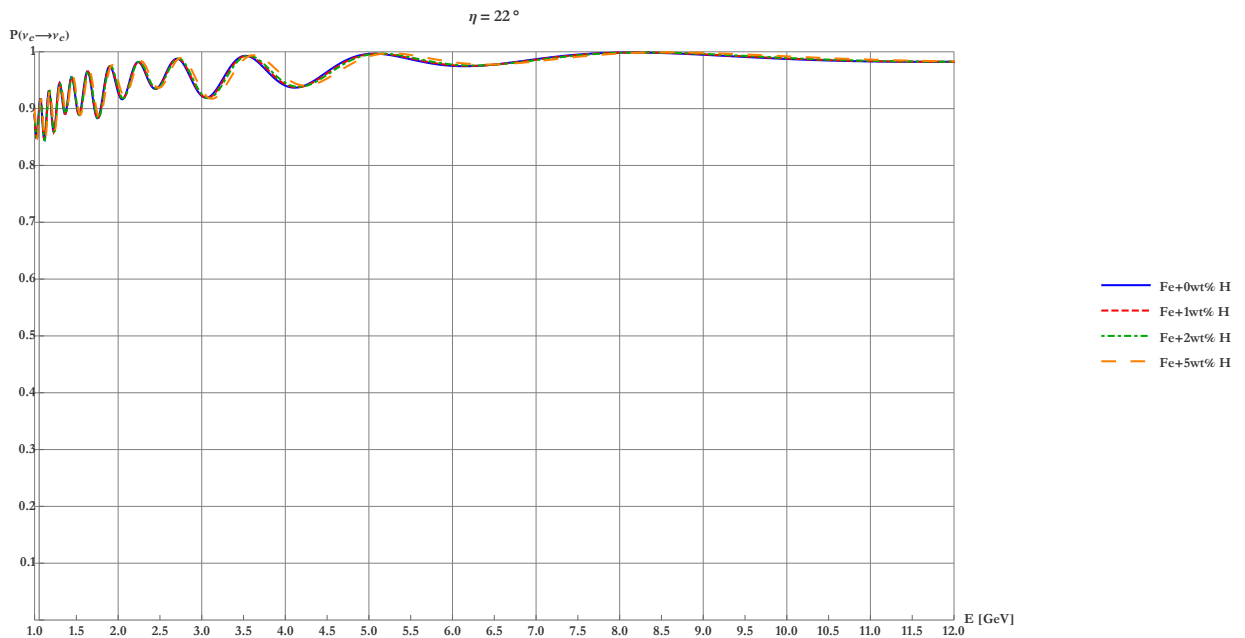
Figura 4.12: Probabilidades de conversión para el neutrino del electrón yendo al neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

4.1.3. Jerarquía invertida y $\theta_{23} < 45^\circ$

Hidrógeno

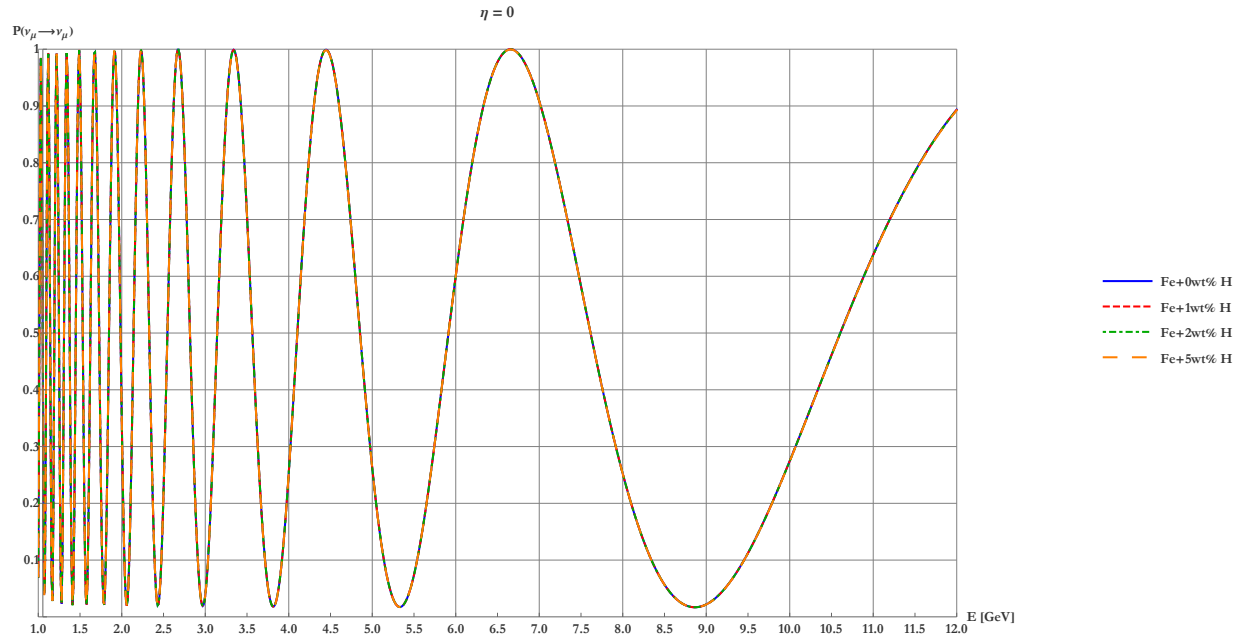


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

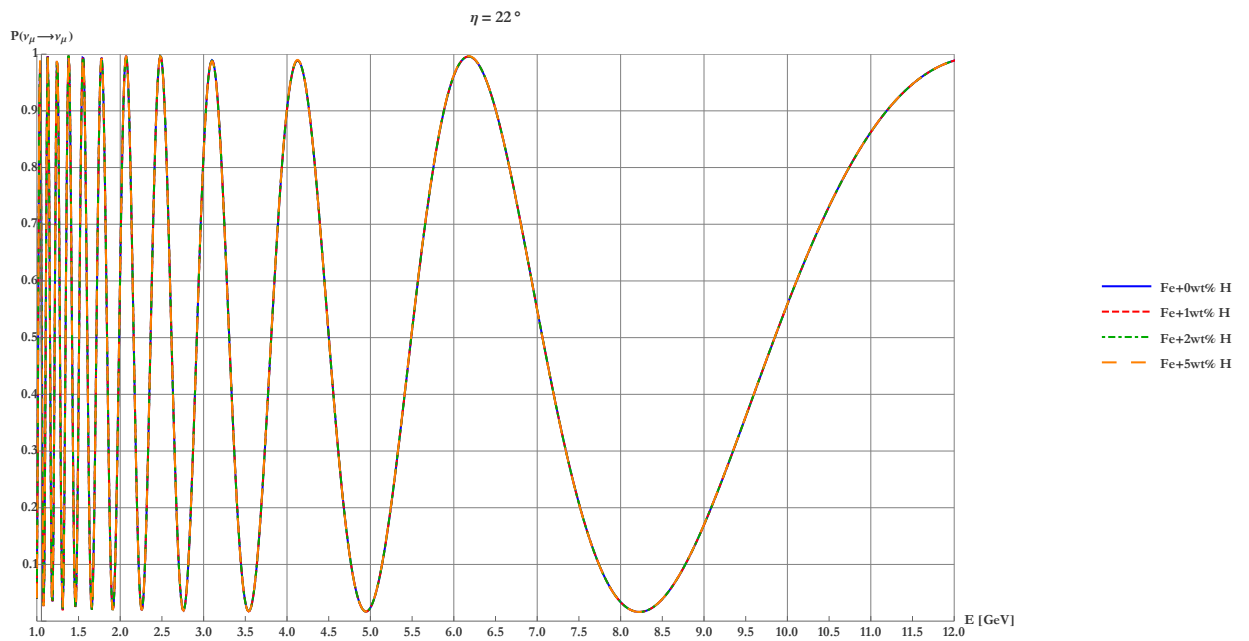


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.13: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

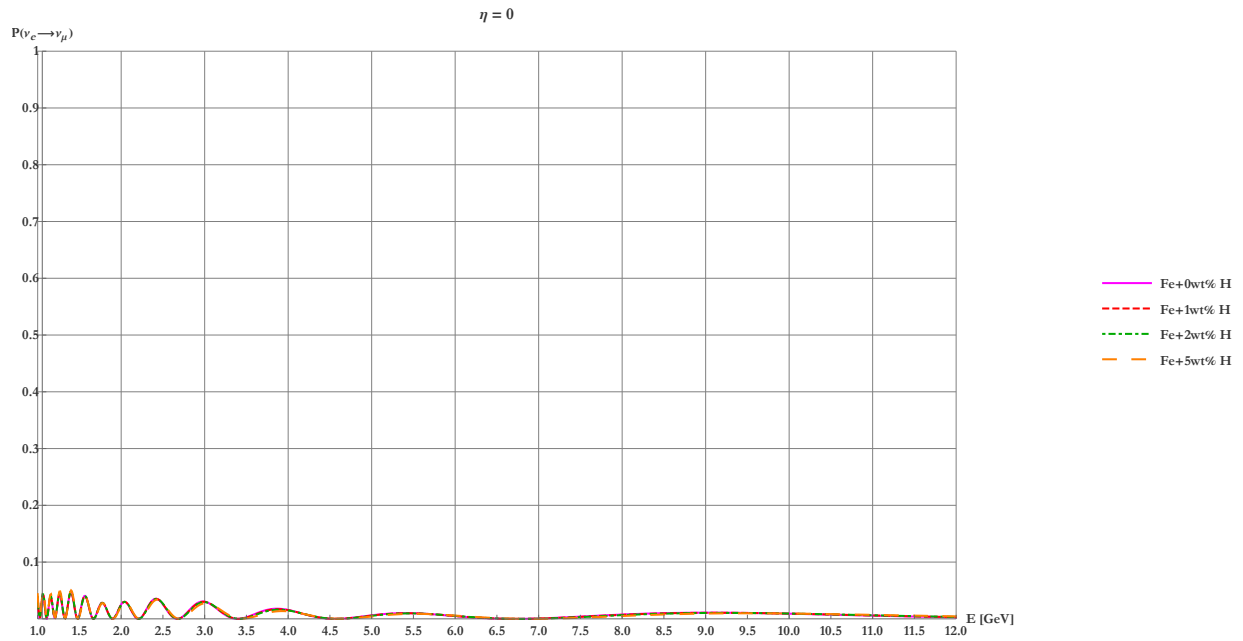


(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

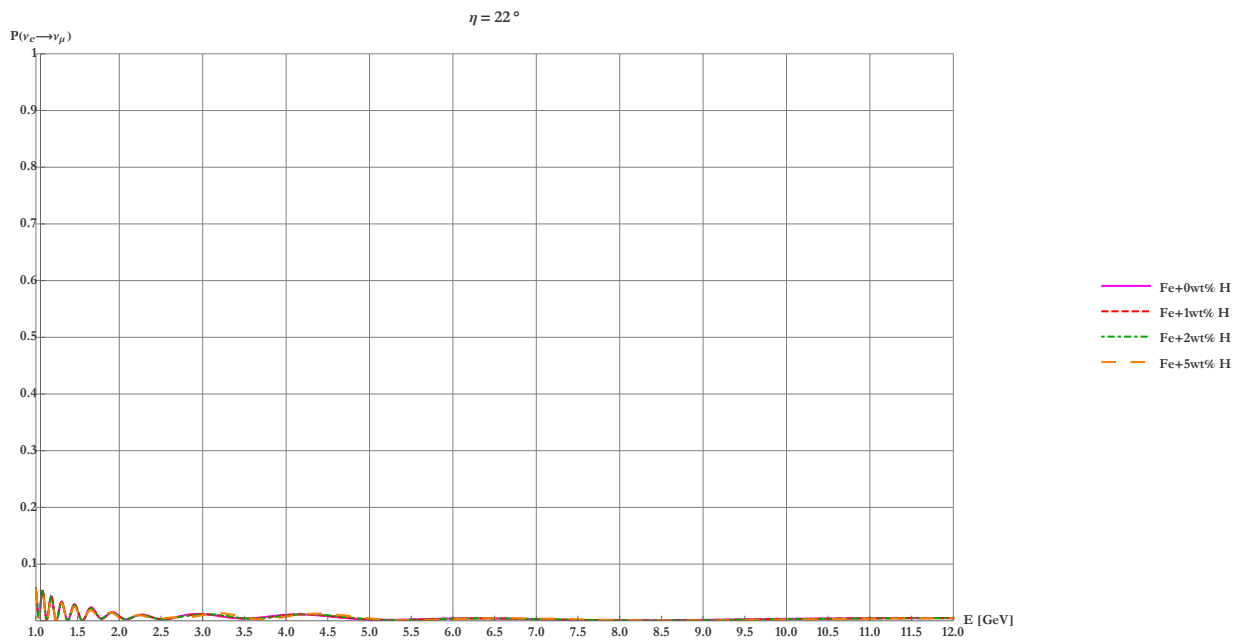


(b) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.14: Probabilidades de supervivencia para el neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



(a) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.



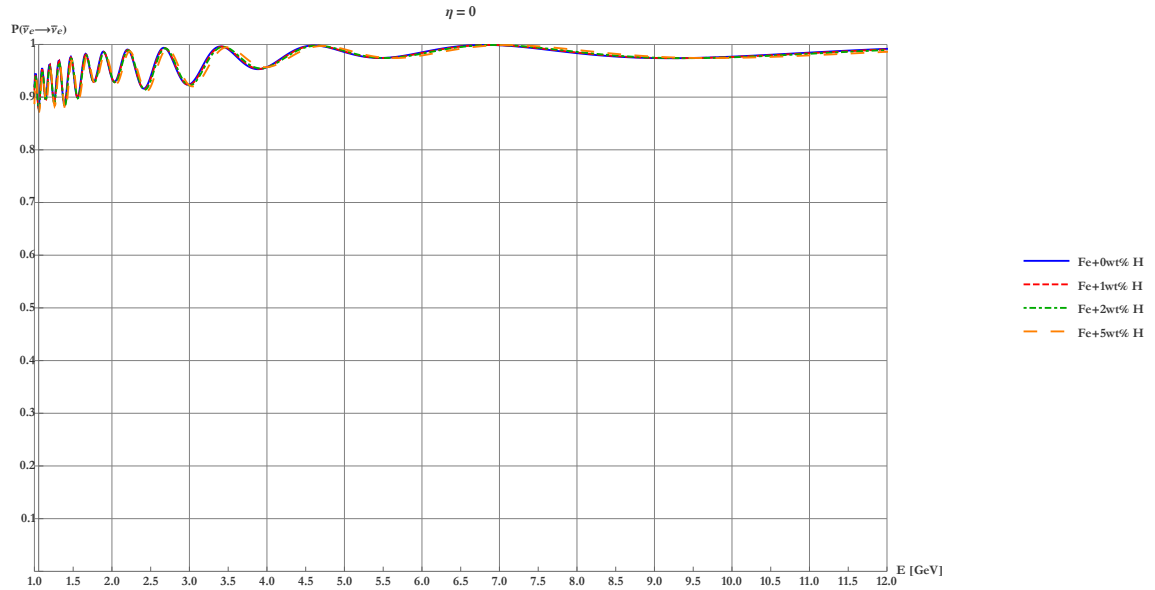
(b) Probabilidad de conversión del neutrino del electrón al neutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.15: Probabilidades de conversión para el neutrino del electrón yendo al neutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

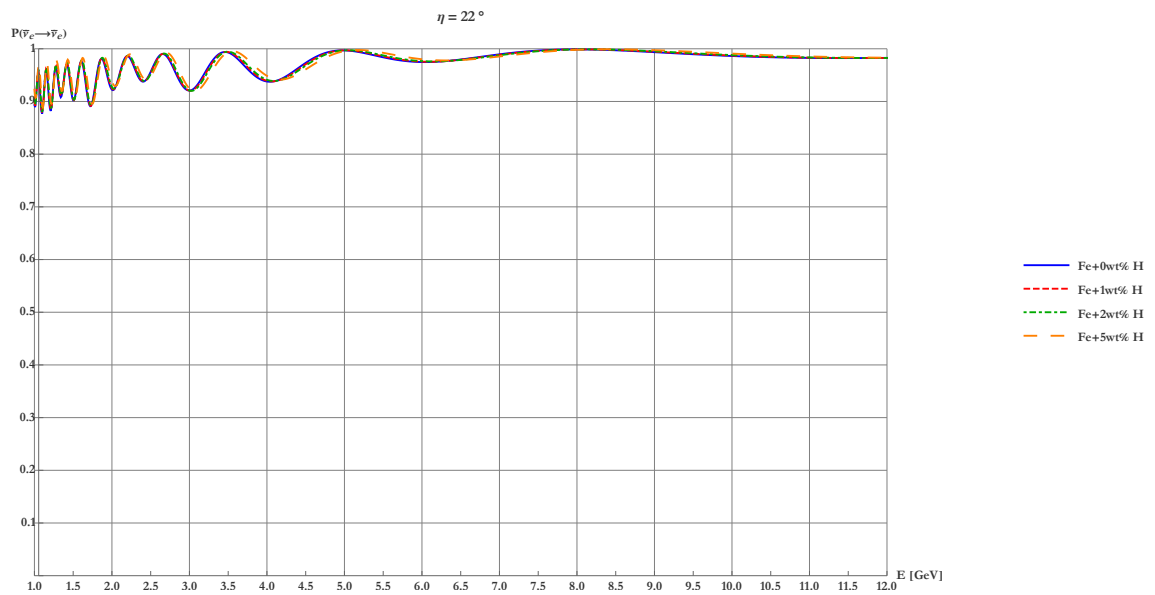
4.2. Antineutrinos

4.2.1. Jerarquía normal y $\theta_{23} < 45^\circ$

Hidrógeno

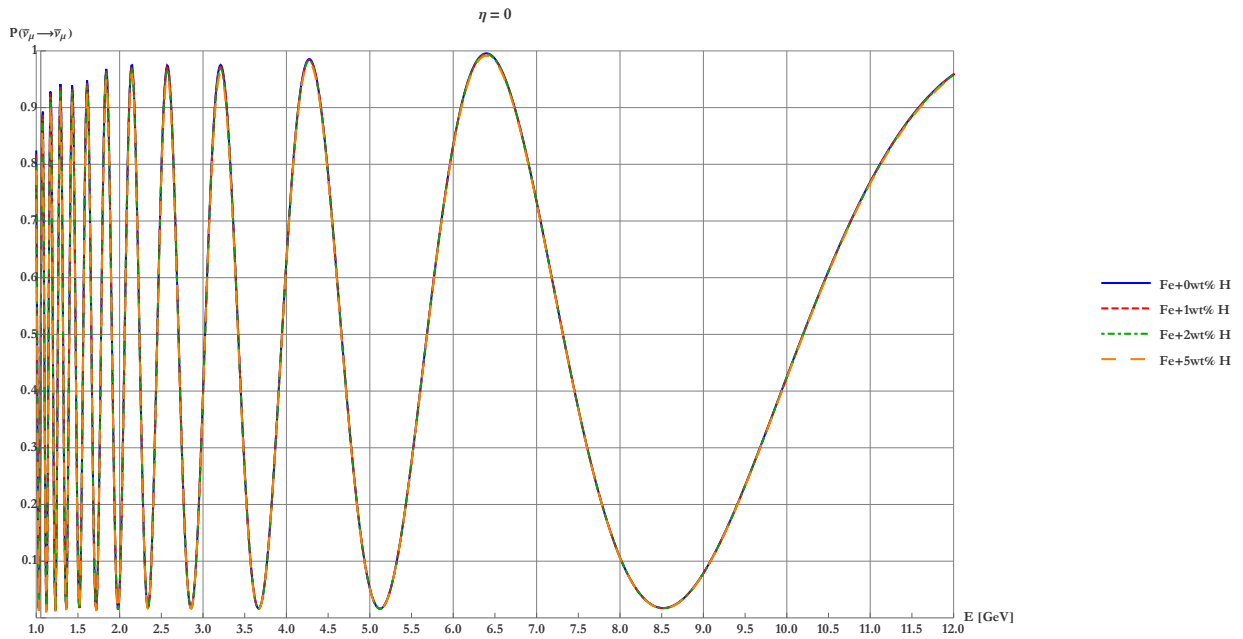


(a) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

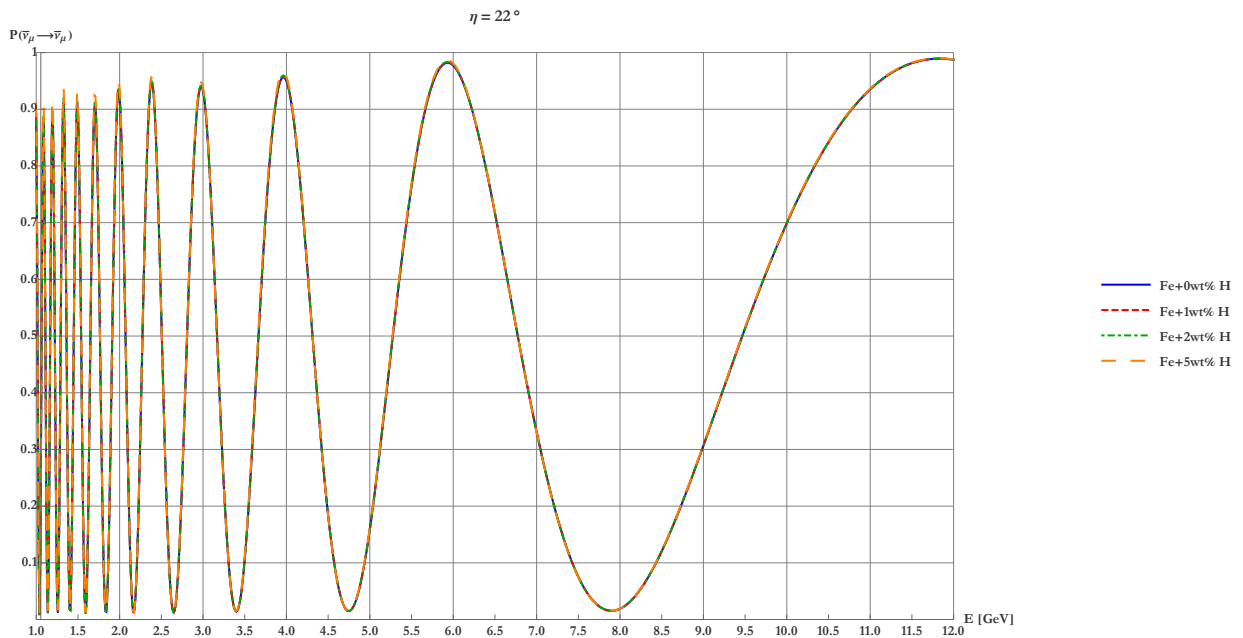


(b) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.16: Probabilidades de supervivencia para el antineutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

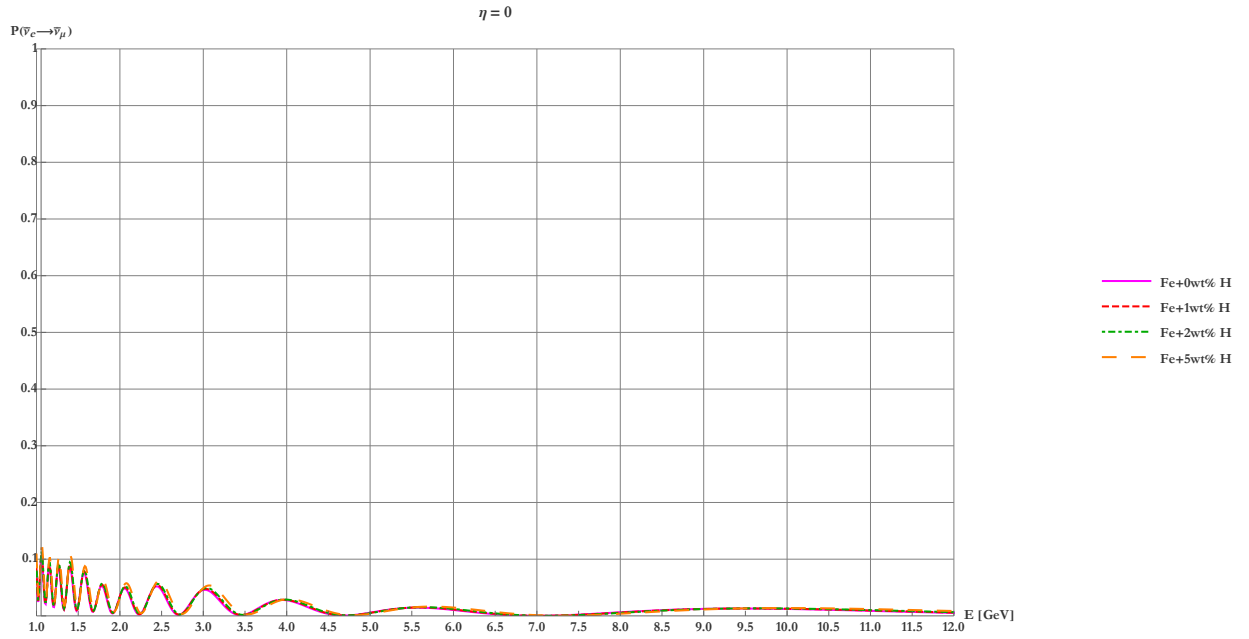


(a) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

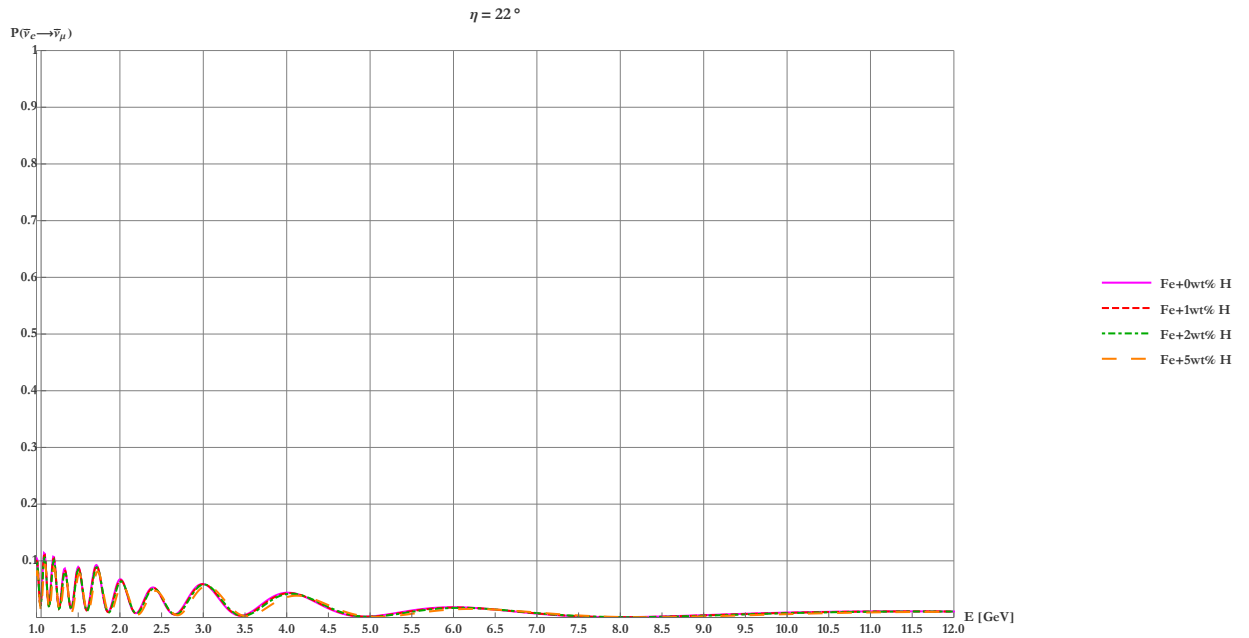


(b) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.17: Probabilidades de supervivencia para el antineutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



(a) Probabilidad de conversión del antineutrino del electrón al antineutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

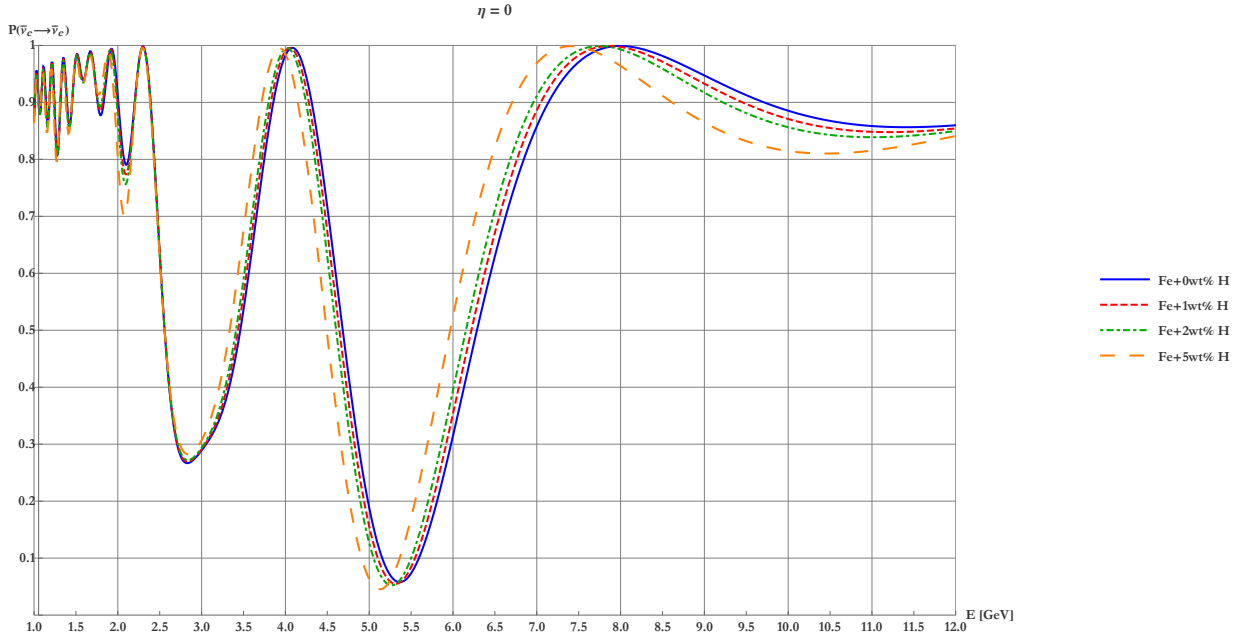


(b) Probabilidad de conversión del antineutrino del electrón al antineutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

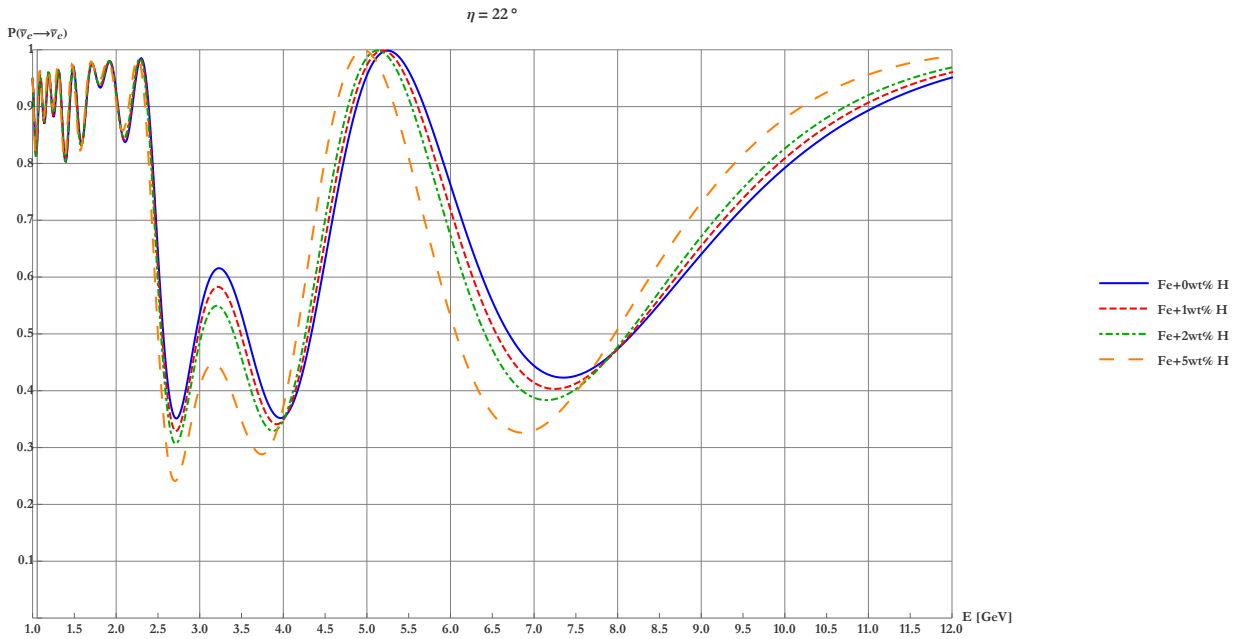
Figura 4.18: Probabilidades de conversión para el antineutrino del electrón yendo al antineutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

4.2.2. Jerarquía invertida y $\theta_{23} < 45^\circ$

Hidrógeno

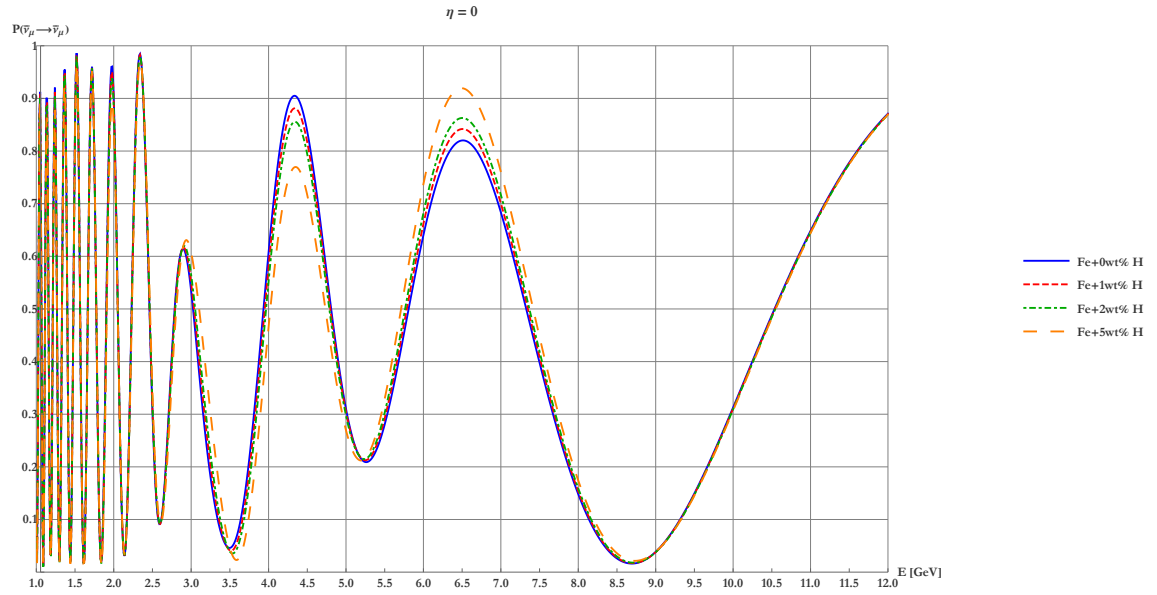


(a) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

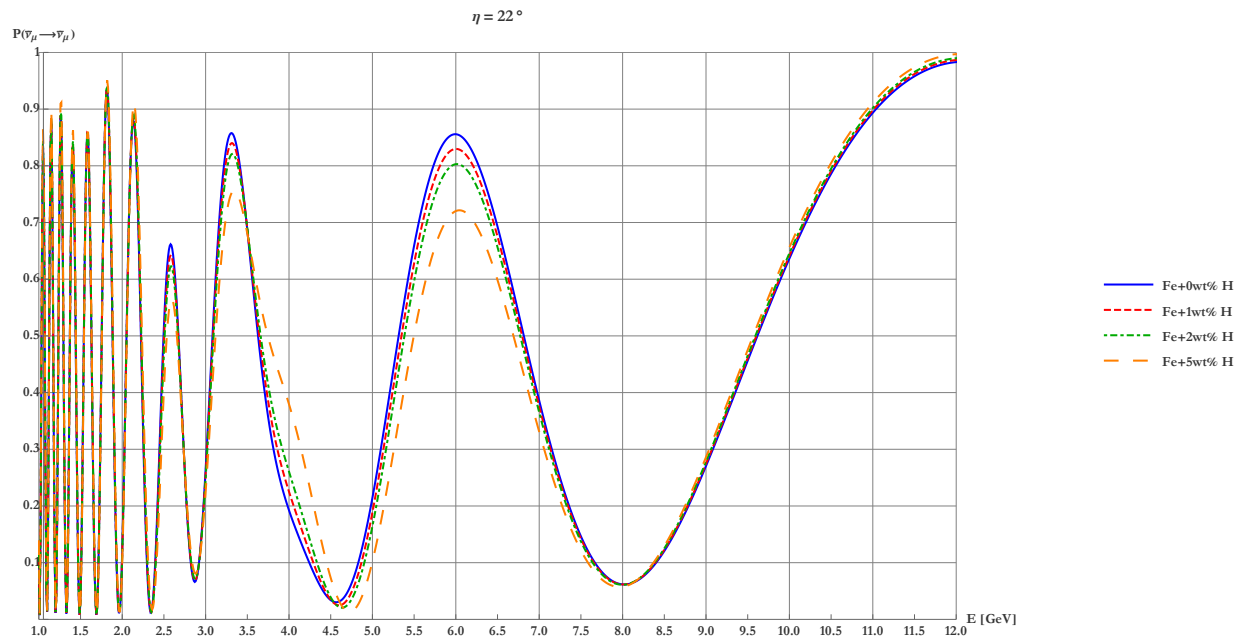


(b) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.19: Probabilidades de supervivencia para el antineutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

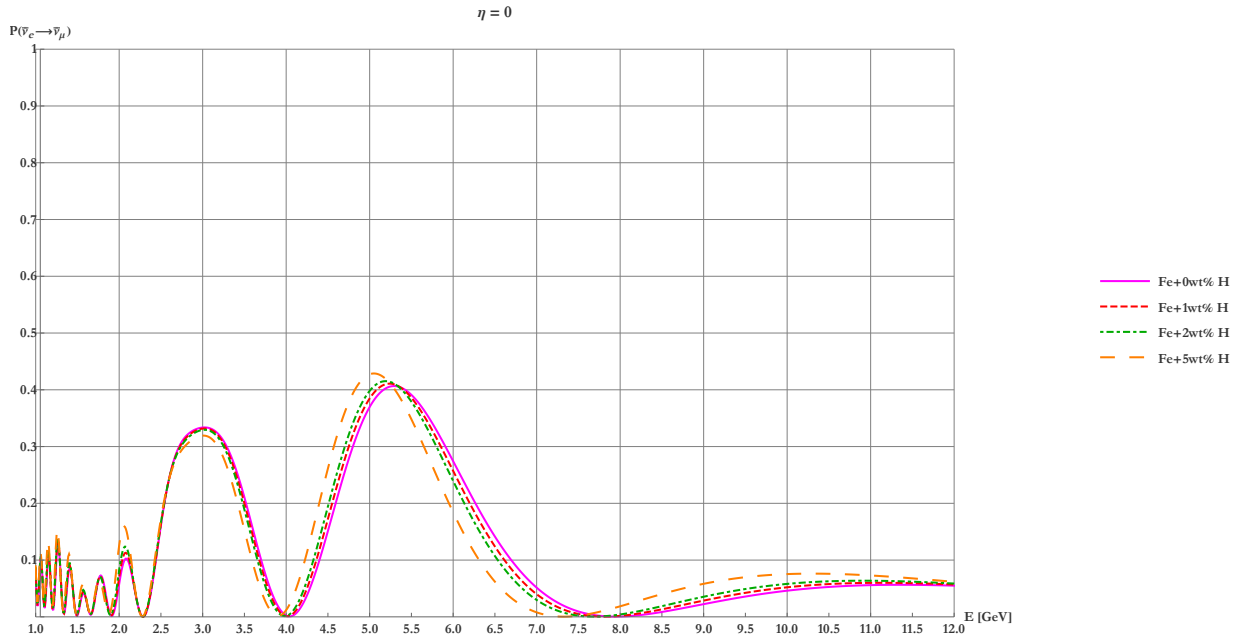


(a) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

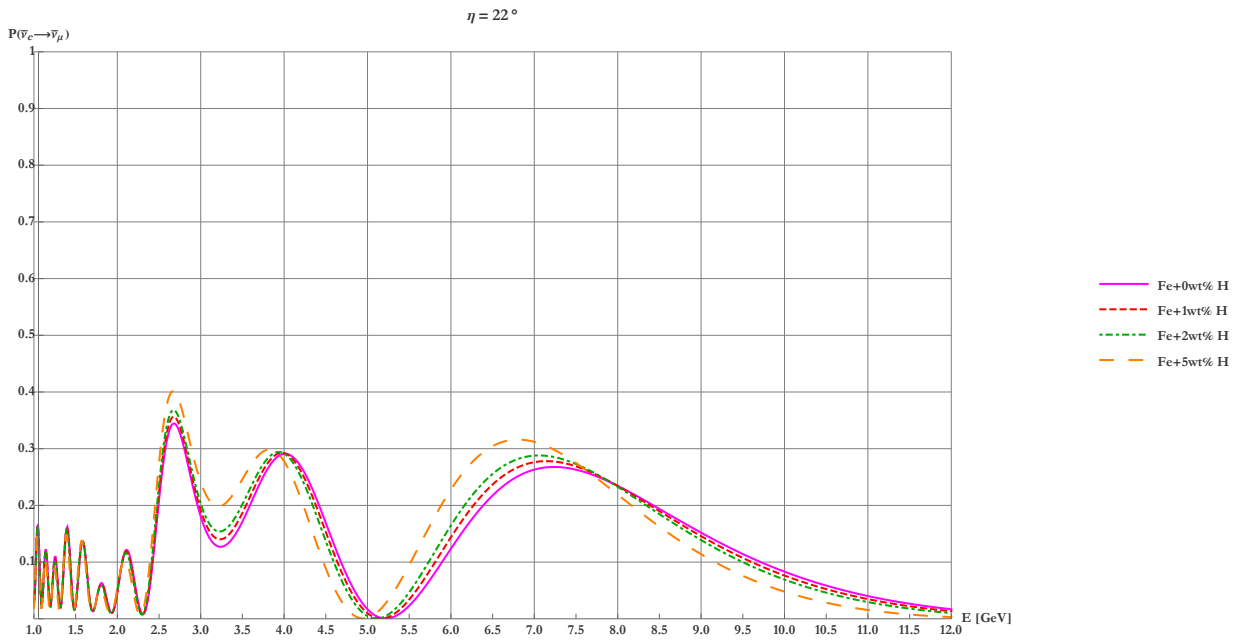


(b) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.20: Probabilidades de supervivencia para el antineutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



(a) Probabilidad de conversión del antineutrino del electrón al antineutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

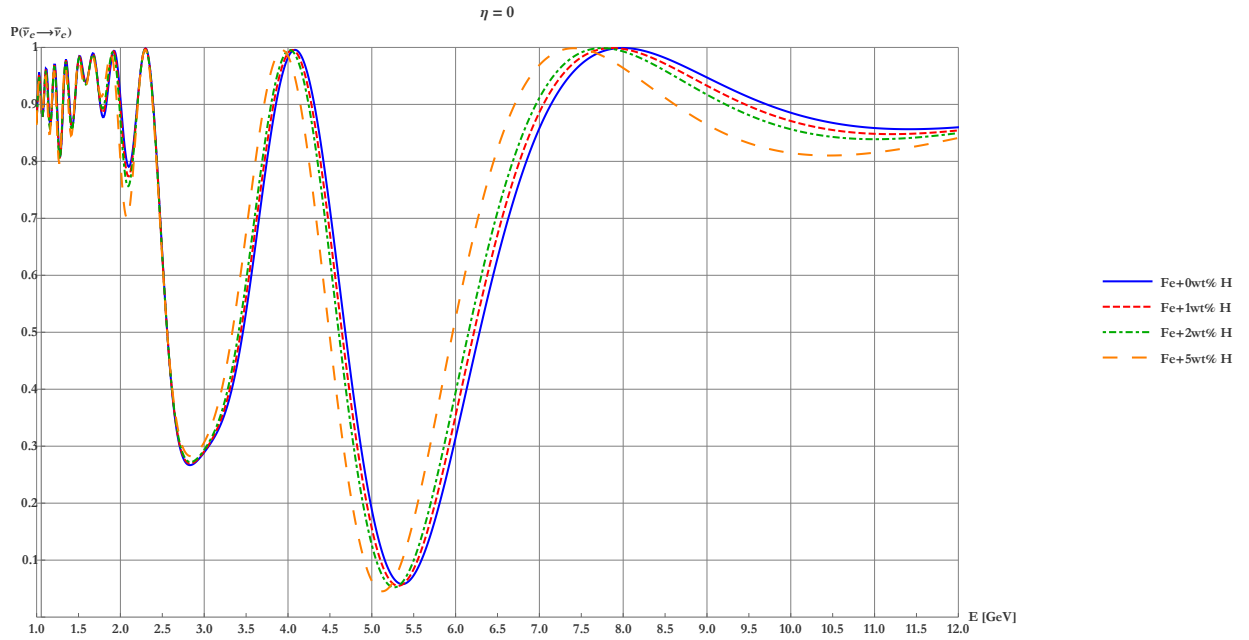


(b) Probabilidad de conversión del antineutrino del electrón al antineutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

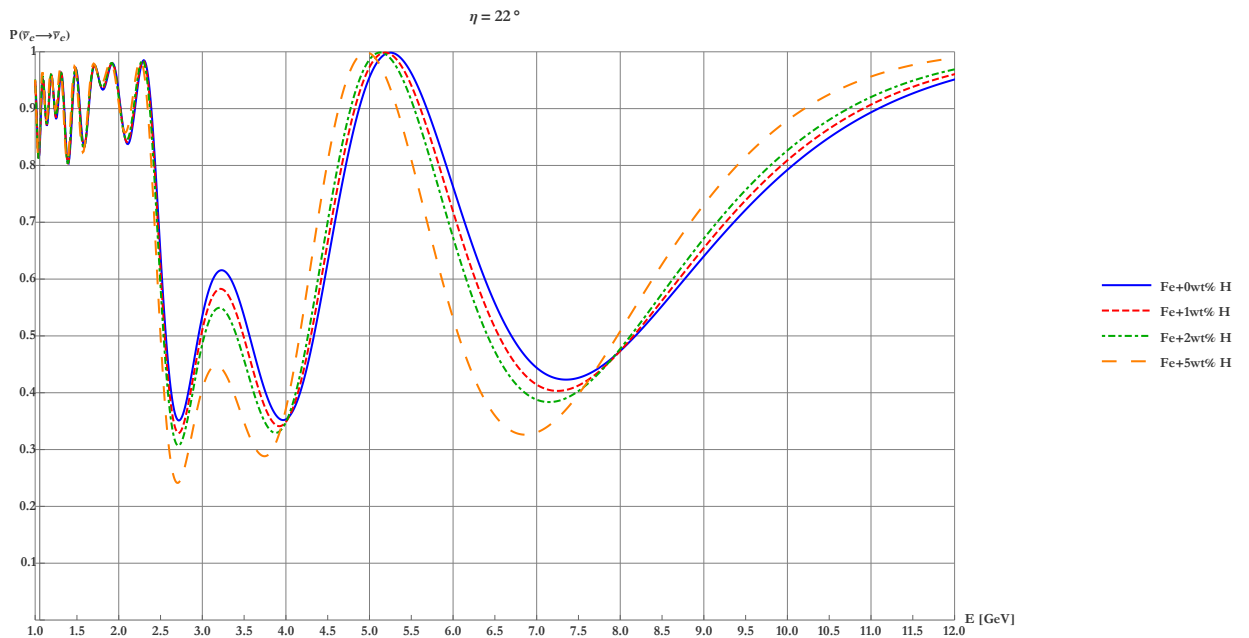
Figura 4.21: Probabilidades de conversión para el antineutrino del electrón yendo al antineutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

4.2.3. Jerarquía invertida y $\theta_{23} > 45^\circ$

Hidrógeno

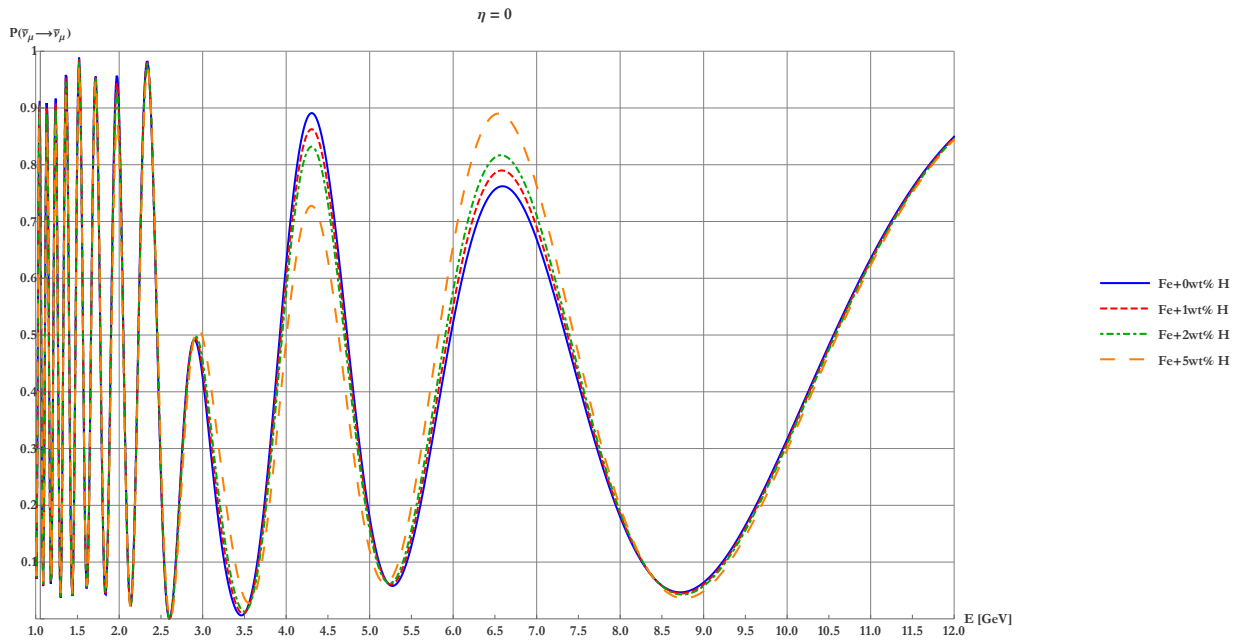


(a) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del electrón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

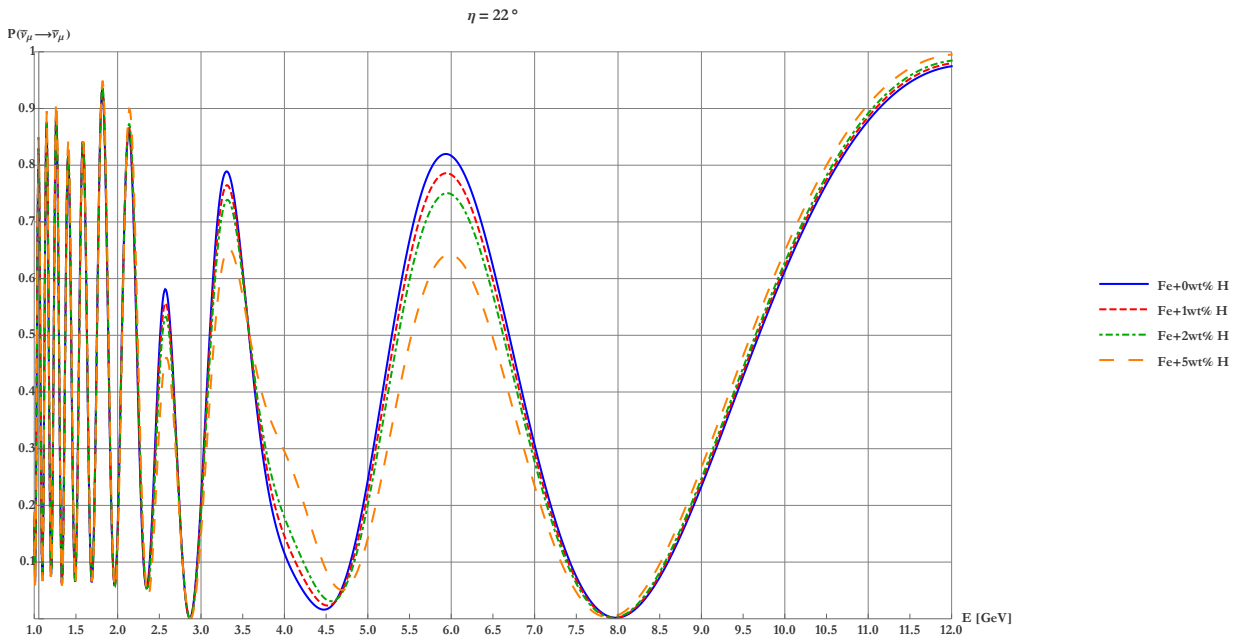


(b) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del electrón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.22: Probabilidades de supervivencia para el antineutrino del electrón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

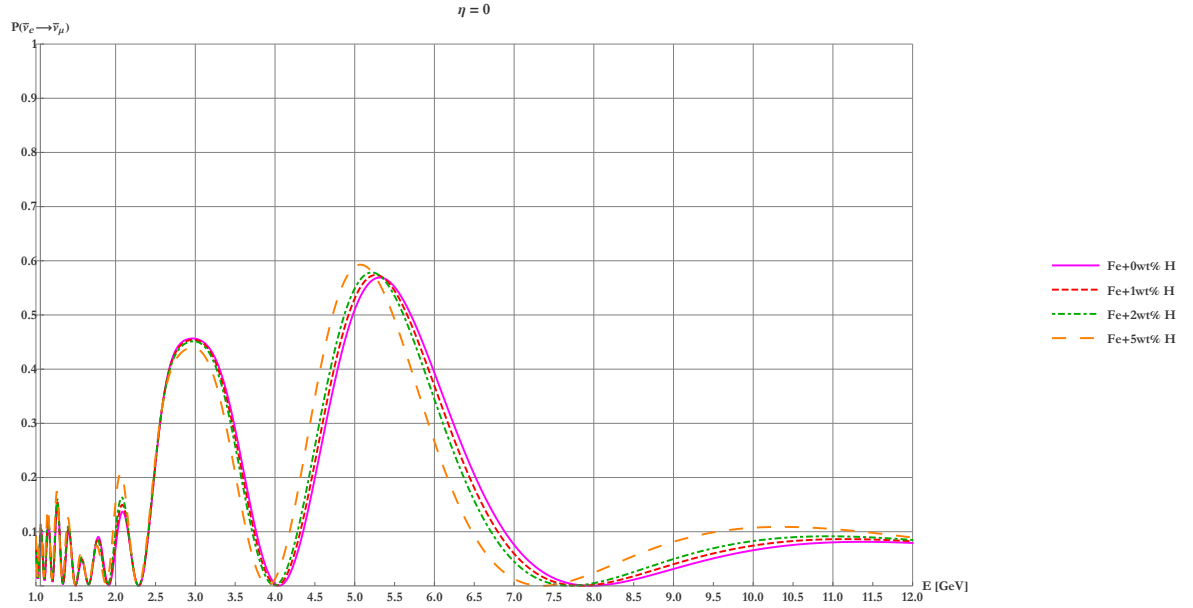


(a) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.

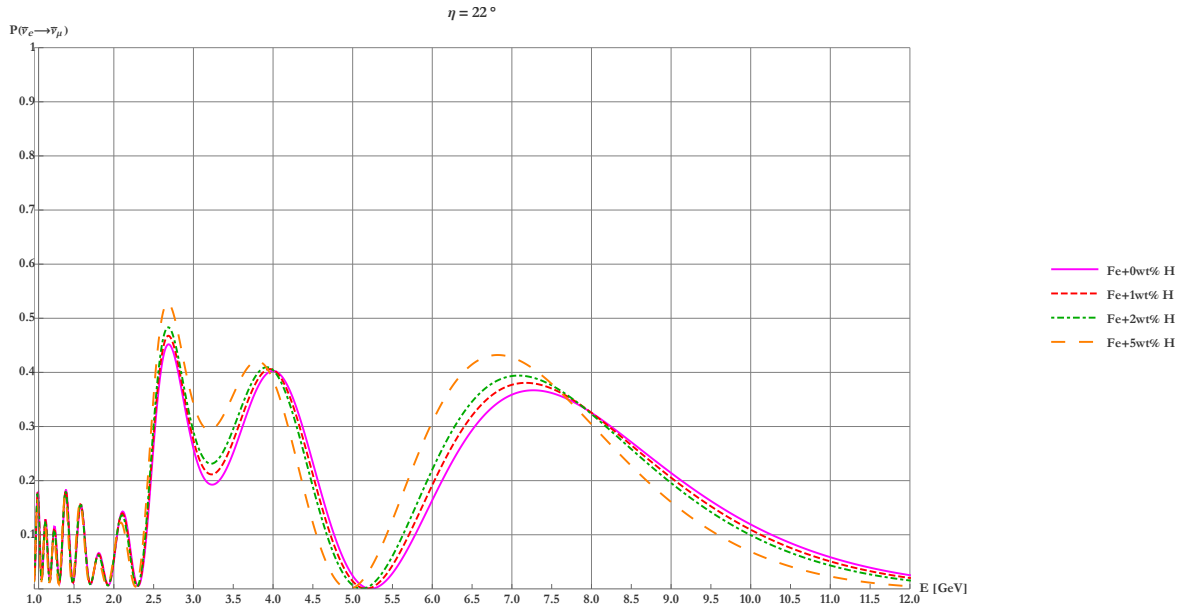


(b) Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.23: Probabilidades de supervivencia para el antineutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.



(a) Probabilidad de conversión del antineutrino del electrón al antineutrino muón como función de la energía a 0° con respecto al nadir.



(b) Probabilidad de conversión del antineutrino del electrón al antineutrino muón como función de la energía a 22° con respecto al nadir.

Figura 4.24: Probabilidades de conversión para el antineutrino del electrón yendo al antineutrino del muón para dos diferentes trayectorias dentro de la Tierra.

4.3. Probabilidades como función del ángulo nadir

Como se ha visto hasta el momento, las oscilaciones de neutrinos dentro de la Tierra dependen no solamente de la energía, sino también del ángulo nadir. Así como se ha mostrado el cambio en las probabilidades en función de la energía a diferentes ángulos, es posible hacer lo mismo si

ahora se dejan algún par de energías fijas y se estudia la variación en las transiciones como funciones del ángulo nadir. Con la finalidad de no volver a repetir todos los casos estudiados en la secciones anteriores, y además no realizar un tratamiento tan extenuante, sólo se presentan las oscilaciones para el caso de neutrinos en el primer octante con jerarquía normal. Eventualmente, la esencia de los resultados en este caso es la misma que en las gráficas anteriores.

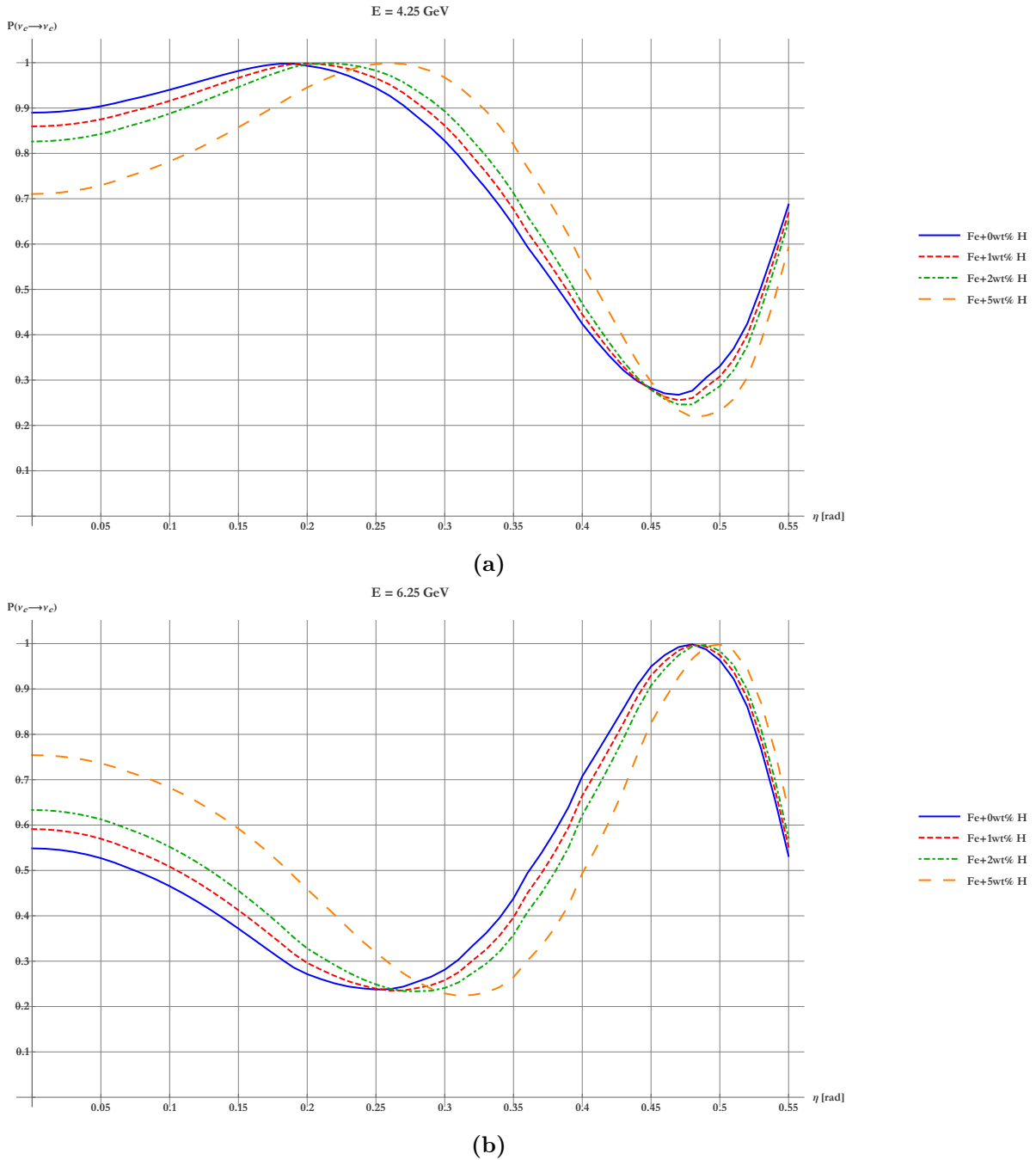


Figura 4.25: Probabilidades de supervivencia del neutrino del electrón como función del ángulo nadir, para dos diferentes energías: a) 4.25 GeV y b) 6.25 GeV.

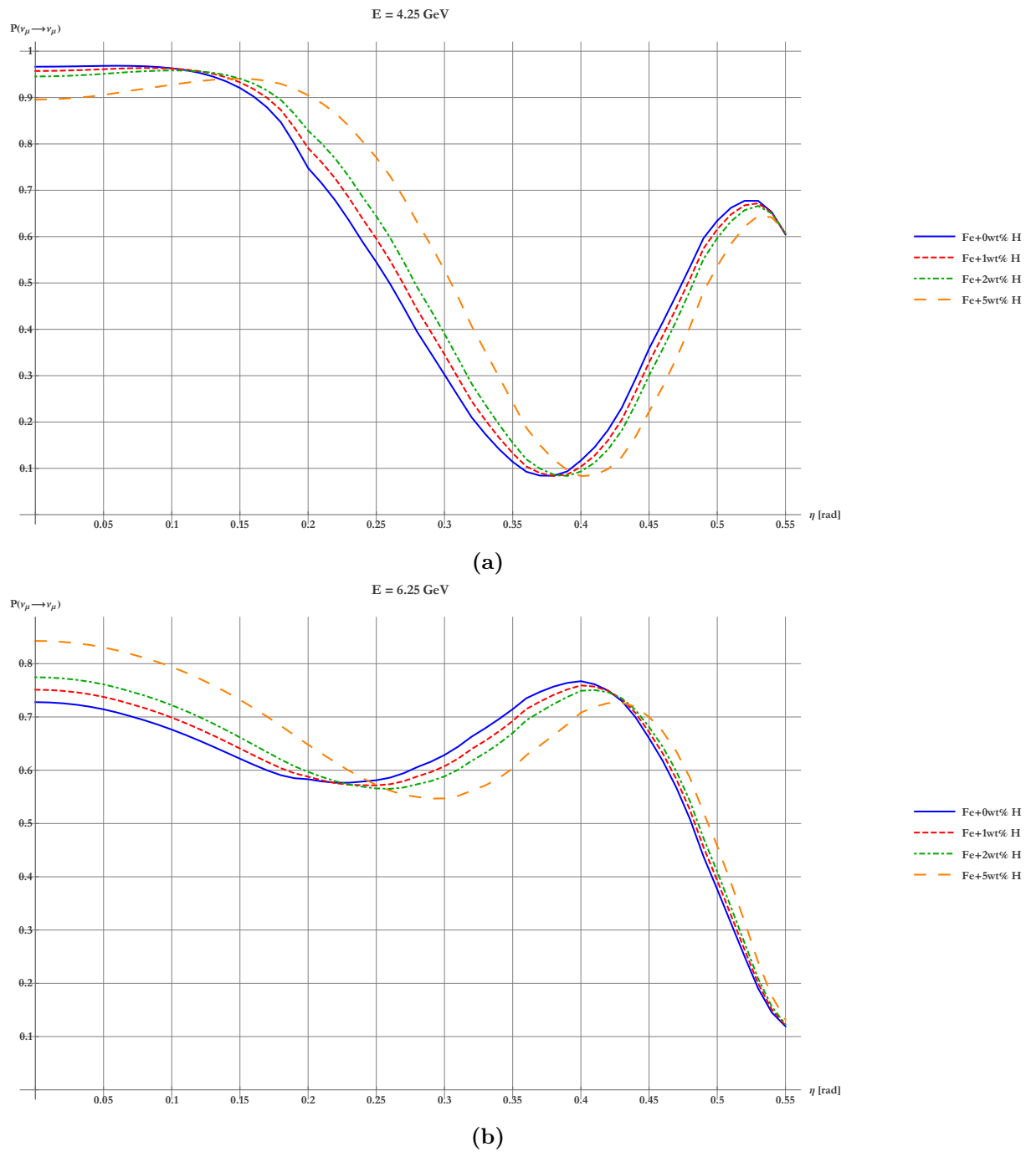


Figura 4.26: Probabilidades de supervivencia del neutrino del muón como función del ángulo nadir, para dos diferentes energías: a) 4.25 GeV y b) 6.25 GeV.

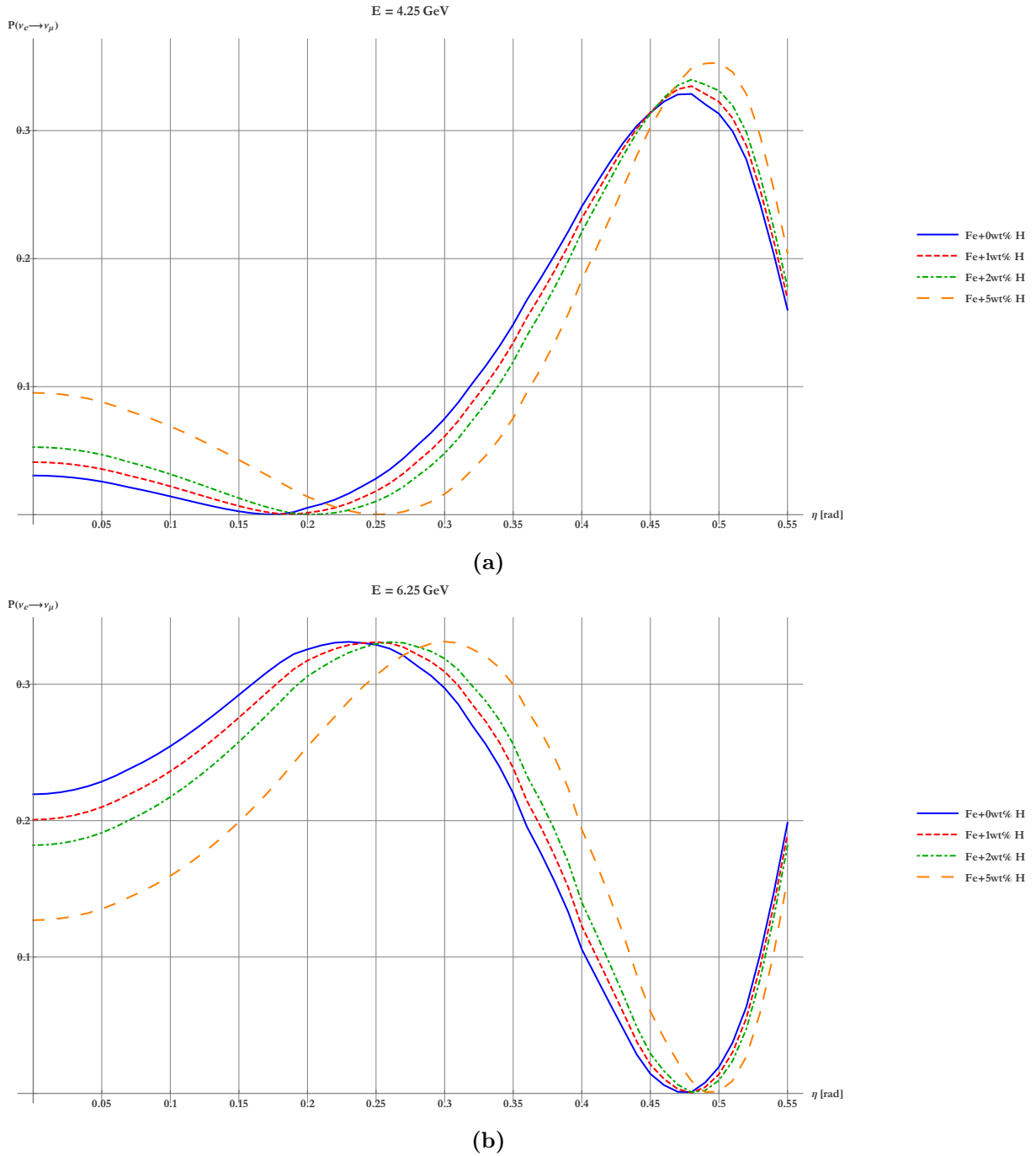


Figura 4.27: Probabilidades de conversión para el neutrino del electrón yendo al neutrino del muón como función del ángulo nadir, para dos diferentes energías: a) 4.25 GeV y b) 6.23 GeV.

4.4. Discusión

Como se ha podido apreciar en todos los gráficos anteriores, el estudio de las oscilaciones de los neutrinos es fundamental para limitar el número de escenarios posibles que se pueden obtener al variar ciertos parámetros como son la jerarquía de masas y el octante del ángulo de mezcla

θ_{23} . Tanto para los neutrinos como para los antineutrinos, la jerarquía de masas determina si es posible observar algún cambio significativo en las probabilidades. Para los neutrinos, si se tiene una jerarquía invertida, vemos que no es posible observar variaciones importantes en las probabilidades. Desde el punto de vista teórico, esto se debe a que la introducción de un signo negativo en el parámetro A , dado por la ecuación (2.85), hace que los neutrinos no pasen por la condición de resonancia y, por tanto, que el efecto de la materia se vea suprimido. La misma situación ocurre para los antineutrinos si la jerarquía de masas es normal. Sin embargo, el mejor escenario para estudiar el interior de la Tierra con neutrinos atmosféricos es aquel en donde se tenga una jerarquía de masas normal. El flujo de neutrinos atmosféricos es mayor que el de los antineutrinos y, además, la sección eficaz de los neutrinos es mayor comparada con la de los antineutrinos.

De manera general, lo que se puede apreciar en todas las gráficas es que los efectos del cambio de octante en el ángulo θ_{23} son bajar o subir los máximos o mínimos en las probabilidades y hacer más notorias las separaciones en las probabilidades para distintas concentraciones porcentuales. El caso más favorable se da cuando $\theta_{23} > 45^\circ$, puesto que se tiene una mayor separación en las probabilidades. Las gráficas 4.2 y 4.8 para la probabilidad de supervivencia del neutrino del muón ejemplifican de manera clara esta situación.

Las diferencias más pronunciadas en las probabilidades de conversión y supervivencia son para los neutrinos con energías entre 2 y 10 GeV. De las gráficas 4.25-4.27 se puede apreciar que los ángulos donde ocurre una mayor separación en las probabilidades son de 0 a 0.2 radianes, lo que en grados sería 0° a 11.5° aproximadamente. El ángulo nadir máximo para el cual los neutrinos dejan de pasar por el núcleo interno se puede calcular con la ecuación (2.79), cambiando el radio del núcleo externo por el radio del núcleo interno. Haciendo esta sustitución, vemos que este ángulo equivale a 11.05° . El efecto en materia de los neutrinos que pasan por el núcleo interno se pierde después de este ángulo y es por ello que se puede apreciar un decremento en la separación de las probabilidades de oscilación en los diferentes modelos. Por ende, la situación ideal sería utilizar una región angular comprendida entre entre 0 y 0.2 radianes para tener efectos más notorios.

La principal característica de la espectrometría de neutrinos es que determina el cociente Z/A del modelo propuesto. Basados en esta medición, los diferentes modelos composicionales terrestres pueden ser distinguidos unos de otros. Sin embargo, cabe aclarar que algunos modelos predicen valores muy similares para este cociente. El origen de esto se da en que, por ejemplo, elementos ligeros como el oxígeno, azufre, silicio y carbono poseen valores muy cercanos en sus respectivos cocientes de Z/A . De ahí que un modelo con una concentración del 90% de hierro y 10% de oxígeno, que tiene un valor de $Z/A = 0.4690$, puede ser distinguido de aquel que solamente contenga hierro ($Z/A = 0.4656$), pero a la vez será indistinguible de otro con 90% de hierro y 10% de azufre con fracción $Z/A = 0.4689$. Es por ello que el uso de neutrinos para estudiar el interior de la Tierra solamente puede considerarse una herramienta auxiliar a los métodos estudios geoquímicos y de propagación de las ondas sísmicas.

Los experimentos de neutrinos no miden probabilidades, sino que cuentan los números de eventos que surgen de la interacción de los neutrinos del muón y del electrón con el material que se use para su detección. En este punto cabe mencionar el porqué no se presentaron

las transiciones correspondientes al neutrino del tau. En primer lugar, el flujo de neutrinos atmosféricos está constituido solamente por neutrinos del muón y del electrón. Por otro lado, las interacciones del neutrino del tau son mucho más difíciles de observar, principalmente porque la vida media del tau es demasiado corta. Sin embargo, en el caso hipotético de que tuviésemos neutrinos del tau, se observaría que la separación en las probabilidades para diferentes valores de Z/A sería levemente mayor para aquellas observadas en el caso del neutrino muón. Además, la probabilidad de conversión del neutrino del muón al neutrino del tau es aún más vistosa del escenario donde los neutrinos del electrón se convierten a neutrinos del muón. Regresando al tema del número de eventos, se hizo un breve análisis de lo que sería el cociente entre la diferencia del número de eventos para un modelo composicional de hierro puro con uno de hierro con 5 por ciento de hidrógeno entre el modelo de hierro puro. En términos matemáticos, esto se traduce como

$$\frac{\Delta N_\mu}{N_\mu^{\text{Fe}}} = \frac{N_\mu^{\text{Fe}} - N_\mu^{\text{Fe+H}}}{N_\mu^{\text{Fe}}} = 1 - \frac{N_\mu^{\text{Fe+H}}}{N_\mu^{\text{Fe}}}, \quad (4.1)$$

lo cual nos da de manera indirecta una idea de la resolución global que debe tener el detector para notar un cambio en el número de eventos con las variaciones de Z/A . La idea detrás de la ecuación (4.1) es que en el cociente nos quitamos de factores como son el número de blancos en el detector y el tiempo de exposición.

Para el cálculo de la variación en el número de eventos con diferentes composiciones del núcleo interno se parte de la ecuación [30]

$$N_\mu = 2\pi n_T T \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \sin \eta \, d\eta \, dE \left(\sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}}(E) \Phi_{\nu_\mu}(E, \eta) + \sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}}(E) \Phi_{\bar{\nu}_\mu}(E, \eta) \right), \quad (4.2)$$

donde n_T es el número de blancos efectivos en el volumen de detección, T es el tiempo de exposición, $\sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}}(E)$ ($\sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}}(E)$) la sección eficaz de corriente cargada y $\Phi_{\nu_\mu}(E, \eta)$ ($\Phi_{\bar{\nu}_\mu}(E, \eta)$) el flujo de neutrinos (antineutrinos). En presencia de las oscilaciones, en el sitio del detector, los flujos son dados por

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu_\mu}(E, \eta) &= \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(E, \eta) \Phi_{\nu_\mu}^0(E, \eta) + \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(E, \eta) \Phi_{\nu_e}^0(E, \eta), \\ \Phi_{\bar{\nu}_\mu}(E, \eta) &= \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(E, \eta) \Phi_{\bar{\nu}_\mu}^0(E, \eta) + \mathcal{P}_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(E, \eta) \Phi_{\bar{\nu}_e}^0(E, \eta), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\Phi_{\nu_\alpha}^0$ y $\Phi_{\bar{\nu}_\alpha}^0$, con $\alpha = \mu, e$, son los correspondientes flujos a nivel del mar. En esta tesis se usaron los datos de Honda, M. et al. [31] y se ajustaron funciones para modelar cada serie de datos en las regiones de interés.

Por otro lado, las secciones eficaces son funciones dependientes de la energía. Sin embargo, en el intervalo de energías de 2 a 10 GeV se les puede considerar constantes [32]. Los valores utilizados para estas secciones fueron

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}} &\cong 0.75 \times 10^{-38} \frac{\text{cm}^2}{\text{GeV}} \\ \sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}} &\cong 0.35 \times 10^{-38} \frac{\text{cm}^2}{\text{GeV}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Usando todas las ecuaciones anteriores, se tiene que el cociente de la ecuación (4.1) se calcula como

$$\frac{N_{\mu}^{\text{Fe+H}}}{N_{\mu}^{\text{Fe}}} = \frac{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \sin \eta \, d\eta \, dE \left(\Phi_{\nu_{\mu}}^{\text{Fe+H}}(E, \eta) + 0.45 \Phi_{\bar{\nu}_{\mu}}^{\text{Fe+H}}(E, \eta) \right)}{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \sin \eta \, d\eta \, dE \left(\Phi_{\nu_{\mu}}^{\text{Fe}}(E, \eta) + 0.45 \Phi_{\bar{\nu}_{\mu}}^{\text{Fe}}(E, \eta) \right)} \quad (4.5)$$

Los límites de integración en (4.5) son $\eta_1 = 0$ y $\eta_2 = 0.57$ para la parte angular, mientras que los límites en la parte energética son $E_1 = 2$ GeV y $E_2 = 10$ GeV.

Para poder un estimado de la diferencia porcentual en la variación de los eventos esperados, en este trabajo se utilizaron los datos de [31] para modelar el flujo de neutrinos atmosféricos. En el caso del primer octante tenemos que la diferencia es de tan sólo 0.067 por ciento. Esto quiere decir que si $\theta_{23} < 45^\circ$, la diferencia neta entre ambos modelos es casi imperceptible. Sin embargo, si $\theta_{23} > 45^\circ$ se tiene entonces que la diferencia alcanza 1.17 por ciento. A pesar de que este número por sí sólo es aún muy pequeño, si le compara con aquel obtenido en el caso del primero octante, se tiene que la variación en el número de eventos es 17 veces mayor. Esto reafirma que el mejor escenario para este tipo de estudio se da cuando $\theta_{23} > 45^\circ$.

El problema con el cálculo del número de eventos radica en conocer de manera precisa el flujo de neutrinos atmosféricos. Tan sólo determinar el flujo de los neutrinos a partir de los rayos cósmicos constituye un compendio de información donde se ven involucrados varios factores como la determinación del flujo primario de rayos cósmicos, los procesos mediante los cuales son formadas las partículas secundarias resultantes, etcétera [15, pág. 517]. Además, para el cálculo que se ha realizado mediante la ecuación (4.1) se ha supuesto que la variación angular en el dominio de interés para el flujo de neutrinos atmosféricos es constante. Esto se hizo por la falta de datos que se pueden encontrar disponibles en los artículos de investigación. Probablemente, el incorporar la correcta dependencia angular en el flujo aumente la diferencia en el número de eventos.

Capítulo 5

Conclusiones

Las oscilaciones de neutrinos proveen una herramienta para poder identificar distintos cocientes para la fracción Z/A . Este método por sí sólo sería capaz de descartar y acotar el intervalo de posibles valores de Z/A en el núcleo externo. Mejores mediciones para la composición del núcleo externo son esenciales para poder explicar fenómenos geológicos que dependen directamente de los elementos químicos involucrados. La temperatura del interior de la Tierra y los flujos convectivos que surgen en el manto podrían ser mejor entendidos si se contase con un rango mucho menor de elementos ligeros que pudiesen ser candidatos a estar presentes en el núcleo externo.

El esclarecimiento de otras interrogantes en las propiedades de los neutrinos puede mejorar esta técnica de espectroscopia. El escenario más favorable es cuando se tiene una jerarquía de masas normal y $\theta_{23} > 45^\circ$. Esto es debido a que el flujo de neutrinos atmosféricos es mayor que el de los antineutrinos y porque la presencia de θ_{23} en el segundo octante aumenta considerablemente la separación entre las diferentes probabilidades para distintos valores de Z/A y la diferencia entre el número de eventos entre un modelo y otro. Además, si se consigue que los neutrinos pasen por la mayor cantidad de materia terrestre posible se tendrán efectos aún más notorios en las probabilidades de oscilación.

Este trabajo se concentró en el estudio de neutrinos del muón y del electrón debido a que son los leptones ligeros mejor registrados por la mayoría de los experimentos, además de que el flujo de neutrinos atmosféricos está compuesto exclusivamente de neutrinos (antineutrinos) del muón y del electrón. En el futuro, el uso de otras fuentes de neutrinos y la elaboración de detectores más sofisticados podrían ayudar a realizar un mejor estudio del interior de la Tierra, ya no sólo en el núcleo externo, sino también en otras capas de la Tierra. Las oscilaciones de neutrinos también pueden ser usadas para estudiar la cantidad de agua presente en el manto inferior usando las mismas técnicas desarrolladas en esta tesis.

El intervalo de energías de interés se encuentra entre 2 y 10 GeV, en conjunto con una variación angular de 0 a 30 grados con respecto al nadir. Experimentos que podrían empezar con estas mediciones serían las colaboraciones de Hyper-Kamiokande, PINGU (dentro de IceCube) y ORCA (Oscillation Research with Cosmics in the Abyss). Todos estos detectores podrían ser capaces de al menos descartar casos extremos de altas composiciones de hidrógeno, agua y

plomo en el interior del núcleo externo [4].

Bibliografía

- [1] Tarbuck, E. J. & Lutgens, F. K. *Ciencias de la Tierra* (Pearson, 2005), 8 edn.
- [2] Fowler, C. M. R. *The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics* (Cambridge University Press, 2004), 2 edn.
- [3] Leger, J. M., Loriers-Susse, C. & Vodar, B. Pressure Effect on the Curie Temperatures of Transition Metals and Alloys. *Phys. Rev. B* **6**, 4250–4261 (1972).
- [4] Rott, C., Taketa, A. & Bose, D. Spectrometry of the Earth using Neutrino Oscillations. *Scientific Reports* **5**, 15225 EP – (2015).
- [5] Wolfenstein, L. Neutrino oscillations in matter. *Phys. Rev. D* **17**, 2369–2374 (1978).
- [6] Bilenky, S. M. Neutrino. History of a unique particle. *Eur. Phys. J.* **H38**, 345–404 (2013). 1210.3065.
- [7] Aguilar-Arevalo, A. & Bietenholz, W. Neutrinos: Mysterious Particles with Fascinating Features, which led to the Physics Nobel Prize 2015 (2016). 1601.04747.
- [8] Bethe, H. & Peierls, R. The “Neutrino”. *Nature* **133** (1934).
- [9] Bilenky, S. M. Bruno Pontecorvo: Mister Neutrino. In *Third NO-VE International Workshop on Neutrino Oscillations in Venice: Fifty years after the neutrino experimental discovery: Venezia, February 7-10, 2006, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Campo Santo Stefano*, 599–609 (2006). physics/0603039.
- [10] Reines, F. & Cowan, C. L. The Neutrino. *Nature* **178**, 446–449 (1956).
- [11] Danby, G. *et al.* Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36–44 (1962).
- [12] Rojas Ramos, R. *Asimetría día-noche en los neutrinos solares*. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México (2004).
- [13] Zuber, Kai. *Neutrino Physics* (CRC Press, 2012), 2 edn.
- [14] Kajita, T. Atmospheric neutrinos and discovery of neutrino oscillations. *Proceedings of the Japan Academy. Series B, Physical and Biological Sciences* **86**, 303–321 (2010).

- [15] Boyarkin, O. *Advanced Particle Physics: The Standard Model and Beyond*, vol. 2 (Taylor & Francis, 2011).
- [16] Barger, V., Marfatia, D. & Whisnant, K. *The Physics of Neutrinos* (Princeton University Press, 2012).
- [17] Agrawal, V., Gaisser, T. K., Lipari, P. & Stanev, T. Atmospheric neutrino flux above 1 GeV. *Phys. Rev. D* **53**, 1314–1323 (1996).
- [18] Cottingham, W. N. & A., G. D. *An Introduction to The Standard Model of Particle Physics* (Cambridge University Press, 2007), 2 edn.
- [19] Serway, R. A., Moses, C. J. & Moyer, C. A. *Física moderna* (Cengage Learning, 2005), 3 edn.
- [20] Lipari, P. Introduction to neutrino physics. In *2001 CERN-CLAF School of high-energy physics, Itacuruca, Brazil, 6-19 May, 2001: Proceedings*, 115–199 (2001).
- [21] Agarwalla, S. K., Chatterjee, S. S. & Palazzo, A. Degeneracy between θ_{23} octant and neutrino non-standard interactions at DUNE. *Phys. Lett.* **B762**, 64–71 (2016). 1607.01745.
- [22] King, Stephen F. Neutrino Mass Models: Impact of Non-Zero Reactor Angle. In *Neutrino telescopes. Proceedings, 14th International Workshop, Venice, Italy, March 15-18, 2011*, 163–172 (2011). 1106.4239.
- [23] Winter, W. Probing the absolute density of the Earth’s core using a vertical neutrino beam. *Phys. Rev. D* **72**, 037302 (2005).
- [24] Hernandez, P. Neutrino physics. In *High-energy physics. Proceedings, 5th CERN-Latin-American School, Recinto Quirama, Colombia, March 15-28, 2009* (2010). 1010.4131.
- [25] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *Theory of Elasticity*, vol. 7 (Pergamon Press Oxford, 1986), 3 edn.
- [26] Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L. Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **25**, 297–356 (1981).
- [27] Typinski, D. Earth Gravity. <http://www.typnet.net/Essays/EarthGravGraphics/EarthGrav.pdf> (2008). [En línea; consultado el 15 de octubre de 2016].
- [28] Li, J., Fei, Y. & Turekian, K. K. *2.14 - Experimental Constraints on Core Composition A2 - Holland, Heinrich D.*, 1–31 (Pergamon, Oxford, 2007).
- [29] Wallraff, M. & Wiebusch, C. Calculation of oscillation probabilities of atmospheric neutrinos using NuCraft. *Comput. Phys. Commun.* **197**, 185–189 (2015). 1409.1387.
- [30] Romero, I. & Sampayo, O. A. About the earth density and the neutrino interaction. *The European Physical Journal C* **71**, 1696 (2011).

- [31] Honda, M., Kajita, T., Kasahara, K., Midorikawa, S. & Sanuki, T. Calculation of atmospheric neutrino flux using the interaction model calibrated with atmospheric muon data. *Phys. Rev. D* **75**, 043006 (2007).
- [32] Formaggio, J. A. & Zeller, G. P. From ν_e to $\bar{\nu}_e$: Neutrino cross sections across energy scales. *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1307–1341 (2012).