



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
Posgrado en Ciencias Físicas

Análisis del efecto espín Seebeck por medio de la ecuación de Fokker-Planck

Tesis
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRIA EN CIENCIAS(FÍSICA)

PRESENTA:
Guillermo Reyes Valencia

TUTOR PRINCIPAL
Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes IF-UNAM

EN SU CASO, MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda IF-UNAM
Dr. Hector Domínguez Castro

Ciudad Universitaria Cd. Mx, enero 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción a la espintrónica	3
1.1. Corrientes de espín	3
1.2. Desarrollo de la espintrónica	3
1.3. Aplicaciones de la espintrónica y estado actual	5
1.4. Efecto Seebeck	6
1.5. Efecto espín Seebeck	7
2. Ecuación de Fokker-Planck	11
2.1. Procesos estocásticos	11
2.2. Movimiento Browniano	13
2.3. Procesos de difusión	14
2.3.1. Problema del caminante al azar	16
2.4. Ecuación de Fokker-Planck	19
2.5. Derivación general de la ecuación de Fokker Planck	23
2.5.1. Resolución de la ecuación de Fokker-Planck	24
2.6. Formalismo para describir ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales	26
2.6.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales	26
2.6.2. Caso no lineal	27
3. Descripción de sistemas magnéticos	31
3.1. Magnetización de ferromagnéticos y campos de desmagnetización	31
3.2. Ondas de espines	34
3.3. Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert	38
4. Planteamiento del sistema	39
4.1. Efecto espín Seebeck en uniones Ferromagnético/No magnético.	39
4.2. Ecuación de Landau Lifshitz Gilbert para el efecto espín Seebeck	40
4.3. Ecuación de Fokker-Planck para la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert	44
Conclusiones	52
A. Resolución de la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert	53
B. Cálculo de los coeficientes de la ecuación de Fokker-Planck	55
Bibliografía	57

Resumen

En este trabajo se realiza una descripción estocástica del efecto espín Seebeck a partir de la ecuación de Fokker Planck. Mediante este efecto se pueden generar corrientes de espín, mediante un gradiente de temperatura. Este efecto se ha observado en uniones entre un metal no magnético y un aislante ferromagnético, en esta muestra existe un gradiente de temperatura, la temperatura en la muestra crece en la dirección de un campo magnético externo, debido a este gradiente de temperatura, se genera una corriente de espines en la unión, que tiene la forma de ondas de espín en la dirección del campo magnético. Debido a la existencia de fluctuaciones térmicas en la muestra, es necesario un análisis estocástico, ya que que estas fluctuaciones afectan la forma en que la muestra se magnetiza.

Este fenómeno es una forma de generar corrientes de espines, con la finalidad de producir dispositivos que permitan mayor velocidad para realizar cálculos así como menor consumo de energía.

La ecuación de Fokker Planck permite analizar a este fenómeno como un proceso estocástico con una distribución de probabilidad que evoluciona en el tiempo. Dicha ecuación se obtiene a partir de la solución de la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert, que es la ecuación dinámica de la magnetización.

En el presente trabajo se habla de manera general del desarrollo de la espintrónica, así como las aplicaciones actuales de la espintrónica, esto es tema del capítulo 1. En el capítulo 2 se define el concepto de proceso estocástico, se profundiza en la definición de procesos estocásticos de Markov, como conceptos previos a los procesos de difusión, una forma de describir estos procesos es la ecuación de Fokker-Planck, que describe la evolución temporal de una función de distribución.

En el capítulo 3 se define el concepto de onda de espín, debido a que en el efecto espín Seebeck una de las componentes de las corrientes de espín, son las ya mencionadas ondas o magnones, finalmente se obtiene la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert, que es la ecuación dinámica que describe la magnetización en un ferromagnético.

En el capítulo 4 se obtiene la ecuación de Fokker-Planck asociada a la ecuación determinista de Landau-Lifshitz-Gilbert, se encuentra la solución a esta ecuación, a partir de la solución se obtiene la evolución temporal de los momentos estadísticos.

Capítulo 1

Introducción a la espintrónica

La electrónica ha impulsado a la humanidad hacia un desarrollo sin precedentes a lo largo del siglo XX, aparecieron dispositivos como el diodo y el transistor, que permitieron la existencia de dispositivos jamás imaginados, como las computadoras, telefonos celulares, etc. A pesar de este desarrollo, la electrónica ha encontrado algunas limitaciones para su avance, por ejemplo, la velocidad de transmisión de la información.

Con el descubrimiento de la Magnetoresistencia Gigante (GMR por sus siglas en inglés que denotan Giant Magnetoresistance) en 1988, surge una rama de la física que se encarga de estudiar los fenómenos en que la manipulación del spin de los electrones, influye en el comportamiento del sistema, por lo que se plantea el surgimiento de diodos y transistores que funcionen por medio del control del spin de los electrones que se encuentran en ellos. El surgimiento de tales dispositivos constituye una revolución tecnológica, ya que el spin puede manipularse a mayor velocidad y a menor costo que un electrón.

1.1. Corrientes de spin

Una corriente de espines consiste en electrones en movimiento, en los cuales se toma en cuenta el grado de libertad de spin de estos. El proceso por el cual una corriente de espines es producida, es llamado proceso de inyección de espines, en el cual se introduce un spin desequilibrante dentro de un conductor, este puede manipularse mediante un campo magnético externo, debido a la interacción entre el momento angular de spin y el momento angular orbital del conductor, la introducción del spin desequilibrante origina una polarización de spin, debido a que existe una cantidad distinta de espines orientados hacia arriba y hacia abajo, el sentido de la circulación de una corriente de espines depende de la polarización de espines[6].

1.2. Desarrollo de la espintrónica

Se considera que la spintrónica inicia con el descubrimiento del fenómeno de la magnetorresistencia gigante en 1988, de forma independiente por el grupo de Peter Grünberg en una tricapa cristalina de Fe/Cr/Fe y por el grupo de Albert Fert en capas de Fe/Cr, motivo por el cual ambos recibieron el premio Nobel de Física en 2007.

El fenómeno de magnetorresistencia gigante consiste en una resistencia extremadamente alta, debida al cruce de un electrón en una región de multicapas, con magnetizaciones opuestas alternadas como se muestra en la figura 1.1, para lograrlo debe cambiar continuamente su espín, lo cual se refleja en una disminución de su velocidad media, lo que aumenta drásticamente la resistencia de este material.

En las multicapas de Fe/Cr estudiadas por el grupo de Fert, existe acoplamiento antiferromagnético entre las películas de Fe debido a la presencia de las películas de Cr, por este motivo los momentos magnéticos de otras capas de Fe son antiparalelas entre si, cuando el campo magnético es cero. En la presencia de campo suficientemente fuerte, se puede superar el acoplamiento antiferromagnético, por lo tanto, todos los momentos magnéticos de las capas de Fe son forzados a apuntar en la misma dirección. Los electrones con una orientación dada de sus espines son más fuertemente dispersados, que cuando viajan en un ferromagnético con la orientación opuesta.[3]

Este aumento en la resistencia se mide por medio del parámetro

$$\delta_H = \frac{R(H) - R(0)}{R(0)} \times 100$$

donde $R(H)$ es la resistencia del material en presencia del campo magnético, y $R(0)$ es la resistencia cuando el campo es cero. En muestras de $Co_{95}Fe_5$ se ha observado un valor de δ_H de 110%. [19]

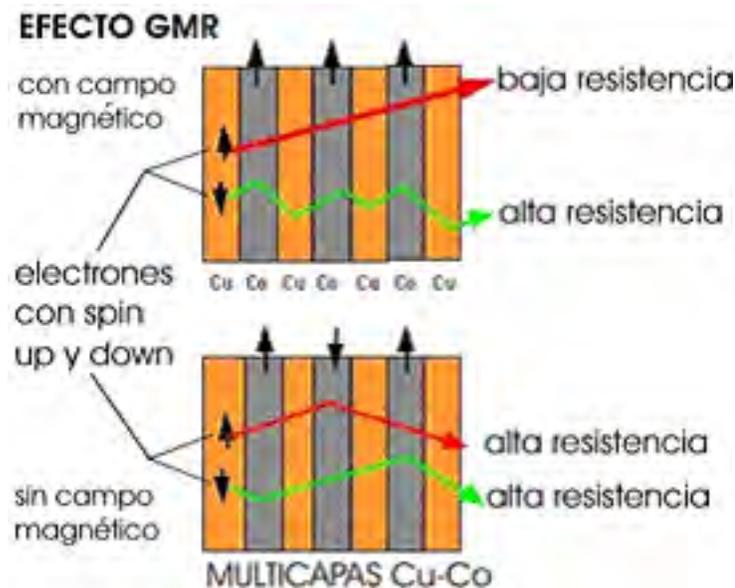


Figura 1.1: Fenómeno de magnetorresistencia gigante, se observa como la resistencia es mayor dependiendo del alineamiento de los momentos magnéticos de la muestra con un campo externo

En años recientes ha crecido el interés en dispositivos que toman en cuenta el grado de libertad de espín para manipular a los electrones mediante campos magnéticos, uno de los materiales más estudiados por sus propiedades para ser aplicado en la espintrónica es el óxido de Europio.[26]

Los grandes retos en este campo incluyen la optimización del tiempo de vida de los espines, detección de la coherencia del espín, transporte de portadores espín polarizados a través de longitudes relevantes, la manipulación del espín nuclear y electrónico.

1.3. Aplicaciones de las espintrónica y estado actual

El fenómeno de la magnetorresistencia gigante ha sido aplicado para el almacenamiento de información, en regiones muy estrechas. Se tiene contemplado el desarrollo de nuevos dispositivos como el transistor de Datta Das, así como dispositivos equivalentes a los diodos cuyo funcionamiento este basado en el uso de corrientes de espín, lo cual permitiría una mayor velocidad en la transmisión de la información a un menor costo energético, por lo que podrían desarrollarse calculos a una velocidad mucho mayor a la actual.[15]

Como se mencionó el fenómeno de la magnetorresistencia se ha aplicado para el almacenamiento de información, se han desarrollado dispositivos llamados válvulas de espín, que son generalmente aleaciones de níquel hierro y cobalto, en los cuales se coloca un material no magnético, que es relativamente insensible a campos magnéticos de intensidad moderada, a este fenómeno se le llama fijación. La otra capa ferromagnética se llama capa libre, en esta capa la magnetización puede variar en la presencia de un campo magnético.

En estos dispositivos, cuando una capa magnética se polariza, los portadores de carga alinean sus espines con el campo magnético externo. Cuando un potencial excita, a través de una válvula de espín, los electrones espín polarizados conservan su alineación mientras se mueven a través del dispositivo. Si estos electrones se encuentran un material con un campo magnético apuntando en la dirección opuesta, como se muestra en la figura 1.2, estos deben cambiar sus espines para encontrar un nivel de energía vacío en el nuevo material. Este cambio requiere energía adicional que causa que el dispositivo tenga una resistencia más alta que cuando los materiales magnéticos se polarizan en la misma dirección.

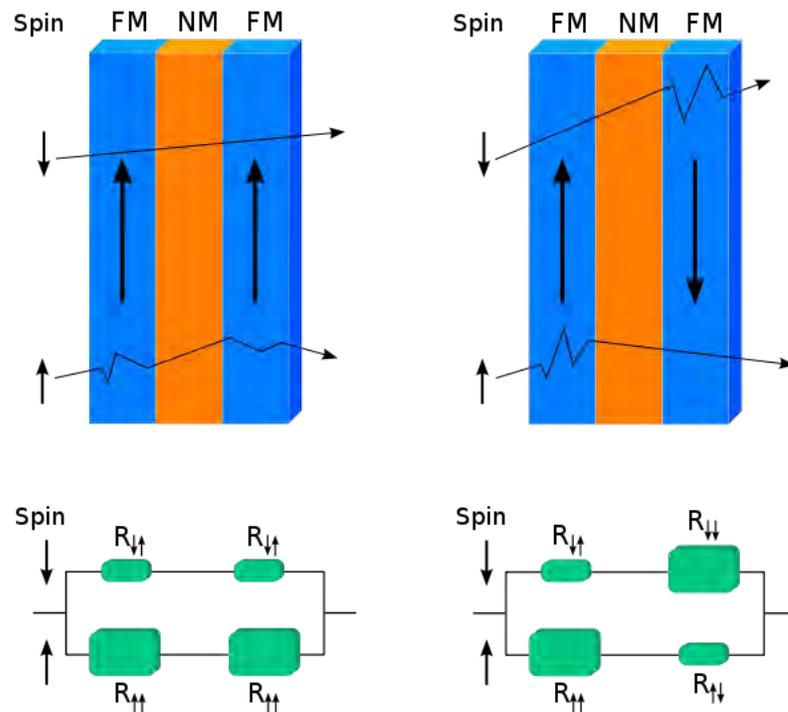


Figura 1.2: Ilustración de una válvula de espín. las siglas FM denotan capa ferromagnética (las flechas indican la dirección de la magnetización), NM: capa no magnética. R denota la resistencia.

Otro dispositivo desarrollado a partir de la espintrónica, es la Junta magnética de efecto túnel, formado por una capa fija y una capa libre, como las que se mencionaron anteriormente, estas capas están separadas por una capa de un aislante, uno de los materiales utilizados para este fin es el óxido de aluminio. Su funcionamiento está basado en el fenómeno de magnetorresistencia, y ha permitido la fabricación de sensores de campo magnético, cabezas lectoras de discos duros, aislantes gálvanicos y dispositivos RAM magnetorresistivos.

Los mayores retos en la actualidad para la espintrónica es el desarrollo de materiales ferromagnéticos, se ha recurrido a semiconductores ferromagnéticos, debido a que su temperatura de Curie es mas cercana a la temperatura ambiente, así como materiales en los que la longitud de difusión de los espines sea mayor.[10]

1.4. Efecto Seebeck

El efecto Seebeck, fue observado por primera vez, por el físico alemán Thomas Johann Seebeck en 1822. Seebeck observó que si se forma un circuito cerrado de dos metales distintos A y B , como se muestra en la figura 1.3 , y se mantienen a distintas temperaturas T y $T + \Delta T$, si se conecta un potenciómetro entre los puntos a y d , el cual se mantiene a una temperatura T_0 tal que $T < T_0 < T + \Delta T$.

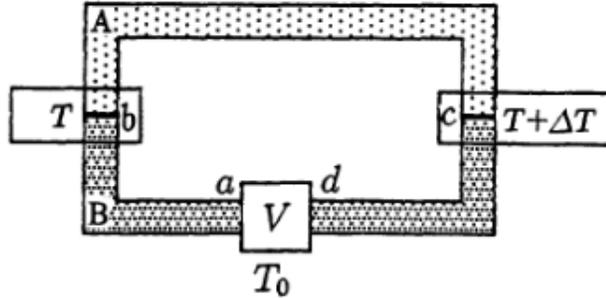


Figura 1.3: Circuito de efecto Seebeck

Por medio de relaciones de Onsager, (las cuales expresan la igualdad de razones entre flujos y fuerzas en sistemas termodinámicos fuera del equilibrio) $L_{SE}^i = L_{ES}^i$, que son los coeficientes de transporte para el proceso, $i = 1, 2$, componentes de la matriz de Onsager. [17][13]

Cuando $\Delta T \neq 0$ se puede medir una diferencia de potencial entre los puntos a y d . Para este sistema se puede escribir la ley de Ohm para el sistema como $J_{el} = -L_{ES}\nabla_r T - L_{EE}\nabla_r \mu_{el}^e$, para este arreglo no hay corriente eléctrica por lo que $J_{el} = 0$, considerando que $S_i^* = \frac{L_{ES}^i}{L_{EE}^i}$

$$[\nabla_r \mu_{el}^e]_{J_{el}=0} = -\frac{L_{ES}^i}{L_{EE}^i} \nabla_r T = -S_i^* \nabla_r T \quad (1.1)$$

donde μ_{el}^e es el potencial electroquímico de los electrones, que se define como $\mu_{el}^e = \mu_{el}(T) - F\phi$, donde $\mu_{el}(T)$ es el potencial químico de los electrones, F se conoce como constante de Faraday y ϕ es el potencial eléctrico, S_i^* es un parámetro de transporte de entropía para el i -ésimo metal, con $i = 1, 2$,

este parametro mide la cantidad de entropía que porta la corriente de electrones cuando la temperatura en el circuito es uniforme, el subíndice r denota que el gradiente es con respecto a las coordenadas espaciales.

Se puede establecer una relación entre la diferencia de potencial $\Delta\phi_{ad}$ y la diferencia de temperatura entre los metales.

$$(\Delta\mu_{el}^e)_{cd} = - \int_{T_0}^{T+\Delta T} S_B^* dT$$

de forma análoga para las otras regiones

$$(\Delta\mu_{el}^e)_{bc} = - \int_{T+\Delta T}^T S_A^* dT$$

$$(\Delta\mu_{el}^e)_{ab} = - \int_T^{T_0} S_B^* dT$$

$$(\Delta\mu_{el}^e)_{da} = -(\Delta\mu_{el}^e)_{cd} - (\Delta\mu_{el}^e)_{bc} - (\Delta\mu_{el}^e)_{ab} = \int_T^{T+\Delta T} (S_B^* - S_A^*) dT$$

Como los puntos a y d están a la misma temperatura $(\Delta\mu_{el}^e)_{da} = -F\Delta\phi_{da}$ combinando estos resultados se obtiene

$$\Delta\phi_{ad} = \frac{1}{F} \int_T^{T+\Delta T} (S_B^* - S_A^*) dT$$

Esta expresión exhibe la relación que existe entre la diferencia de potencial medida en la unión metálica y la diferencia de temperatura en esta misma.

Si consideramos que la diferencia de temperatura es muy pequeña

$$\frac{d\phi_{ad}}{dT} = \frac{S_B^* - S_A^*}{F}$$

esta cantidad recibe el nombre de coeficiente de Seebeck[20]

1.5. Efecto espin Seebeck

En este trabajo será analizado el efecto espin Seebeck, el cuál es el fenómeno análogo espintrónico del efecto Seebeck.

Se considera una placa rectangular de longitud L , en la cual se aplica un gradiente de temperatura en la dirección z , como se muestra en la figura 1.4. La temperatura aumenta de forma lineal con la distancia entre bordes de la placa, esto ocurre en placas planas, en el caso en que la conductividad térmica de la placa es constante. [9]

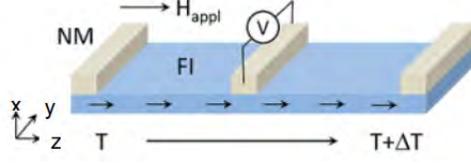


Figura 1.4: Diagrama que representa la situación descrita

La ecuación que describe esta situación es [25][24]

$$\nabla^2(\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}) = \frac{1}{\lambda^2}(\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}) \quad (1.2)$$

donde $\mu_{\uparrow,\downarrow}$ denota el potencial electroquímico para electrones con espines hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

En el material ferromagnético a partir de la ecuación (1.2) se puede obtener la corriente de espines como

$$\bar{J}_s = \frac{1}{e} \nabla(\sigma_{\uparrow}\mu_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}\mu_{\downarrow}) + (\sigma_{\uparrow}S_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}S_{\downarrow})(-\nabla T)$$

donde e es la carga del electrón, $\sigma_{\uparrow,\downarrow}$ es la conductividad dependiente de el espín y $S_{\uparrow,\downarrow}$ es el coeficiente de Seebeck dependiente del espín, $\mu_{\uparrow,\downarrow}$ el potencial electroquímico dependiente del espín para electrones de conducción.

La solución imponiendo condiciones de frontera de $\bar{J}_s = 0$ en los extremos de la placa es

$$\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} = e\lambda(S_{\uparrow} - S_{\downarrow}) \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \nabla T$$

Se muestra que es solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} e\lambda(S_{\uparrow} - S_{\downarrow}) \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \nabla T &= e(S_{\uparrow} - S_{\downarrow}) \frac{\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \nabla T \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(e\lambda(S_{\uparrow} - S_{\downarrow}) \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \nabla T \right) &= \frac{e(S_{\uparrow} - S_{\downarrow})}{\lambda} \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \nabla T = \frac{1}{\lambda^2} (\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}) \end{aligned}$$

Esta solución será comparada con el caso en el que se agrega la contribución de la entropía, con el objetivo de conocer el momento en que esta contribución se vuelve significativa. Para lo cual se considera la relación

$$\nabla\mu_{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{N_{\uparrow,\downarrow}} \nabla n_{\uparrow,\downarrow} - e\nabla\phi \quad (1.3)$$

con $N_{\uparrow,\downarrow}$ la densidad de estados dependiente del espín, $n_{\uparrow,\downarrow}$ la densidad de portadores y ϕ el potencial electrostático, con lo que es necesario añadir el término de entropía incluida en el potencial químico dependiente del espín $\mu_{\uparrow,\downarrow}^c$, que se puede escribir como $\mu_{\uparrow,\downarrow} = \mu_{\uparrow,\downarrow}^c - e\phi$ donde $\mu_{\uparrow,\downarrow}^c$ depende de la temperatura y de la densidad $n_{\uparrow,\downarrow}$ por lo cual se puede escribir

$$\nabla\mu_{\uparrow,\downarrow} = \left(\frac{\partial\mu_{\uparrow,\downarrow}^c}{\partial T} \right)_{n_{\uparrow,\downarrow}} \nabla T + \left(\frac{\partial\mu_{\uparrow,\downarrow}^c}{\partial n_{\uparrow,\downarrow}} \right)_T \nabla n_{\uparrow,\downarrow} - e\nabla\phi$$

la cual se reduce a

$$= \left(\frac{\partial \mu_{\uparrow,\downarrow}^c}{\partial T} \right)_{n_{\uparrow,\downarrow}} \nabla T + \nabla \bar{\mu}_{\uparrow,\downarrow}$$

considerando que el gradiente de temperatura es uniforme

$$\mu_{\uparrow,\downarrow} = \left(\frac{\partial \mu_{\uparrow,\downarrow}^c}{\partial T} \right)_{n_{\uparrow,\downarrow}} (\nabla T)x + \bar{\mu}_{\uparrow,\downarrow} \quad (1.4)$$

$\bar{\mu}_{\uparrow,\downarrow}$ debe satisfacer la ecuación (6.1) por lo que combinando la ecuación 6.1 para $\bar{\mu}_{\uparrow,\downarrow}$ obteniendo

$$\nabla^2(\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}) = \frac{1}{\lambda^2}(\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}) - \frac{e}{\lambda^2} S_S (\nabla T)x$$

donde la solución es

$$\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} = e S_S (\nabla T)z - e\lambda [S_S - (S_{\uparrow} - S_{\downarrow})] \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \nabla T$$

$$\bar{J}_S = \frac{\sigma_F}{2}(1 - p_c^2) [S_S - (S_{\uparrow} - S_{\downarrow})] \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \right] \nabla T$$

donde $\sigma_F = \sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow}$ y $p_c = \frac{\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}}{\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow}}$ y S_S es el coeficiente espín Seebeck.

Para el caso en el que $L \gg \lambda$, el cual es un límite geométrico, se obtiene

$$\bar{J}_S = \frac{\sigma_F}{2}(1 - p_c^2) [S_S - (S_{\uparrow} - S_{\downarrow})] \nabla T \quad (1.5)$$

$$\mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow} = e S_S (\nabla T)z \quad (1.6)$$

La corriente de espines que se produce, puede ser detectada al medir una diferencia de potencial en la unión, este puede ser detectado por efecto spin Hall inverso, un análogo en espintrónica del efecto Hall, este voltaje se expresa por

$$V_{ISHE} = -\frac{\theta \eta_{F/N} L_N}{e d_N} \delta\mu \quad (1.7)$$

donde el subíndice *ISHE*, significa Efecto Espín Hall Inverso, por sus siglas en inglés Inverse spin Hall Effect, θ es el ángulo espín Hall asociado con un metal no magnético, L_N es el largo de una placa no magnética y d_N es su espesor, $\eta_{F/N}$ es el parámetro de eficiencia de inyección de espines.

$$\eta_{F/N} = \frac{\frac{\sinh^2(d_N/2\lambda_N)}{\cosh(d_N/\lambda_N)}}{1 + \frac{\sigma_N \lambda_F \tanh(d_N/\lambda_N)}{\sigma_F \lambda_N \tanh(d_F/\lambda_F)}} \quad (1.8)$$

donde el subíndice N o F está relacionado con el material ferromagnético o con el no magnético, $\lambda_{F,N}$ es la longitud de difusión de espines. El voltaje espín Hall también puede expresarse como

$$V_{ISHE} = \theta \langle j_s \rangle d_N \rho_N e$$

De esta ecuación se puede ver que el voltaje producido debido a efecto espín Hall esta directamente relacionado con la corriente de espines producida entre la unión.

En el mundo existen actualmente distintos trabajos en espintrónica, algunos dedicados a mejorar la tecnología existente basada en el fenómeno de GMR, desarrollando nuevos materiales con mayor polarización de espín. Sin embargo existen otros trabajos dedicados a estudiar nuevos medios de producción de corrientes de espines, algunos basados en el estudio de semiconductores que puedan funcionar como las válvulas de espín antes mencionadas.

El propósito de este trabajo es encontrar como se comportan los primeros momentos estadísticos de la magnetización en una muestra de un aislante ferromagnético, en unión con un metal no magnético, debido a la influencia de fluctuaciones térmicas.

La magnetización de esta muestra está directamente relacionada con la corriente producida en forma de ondas de espín. El ferromagnético analizado es el YIG (Yttrium iron garnet), en unión con platino, esta es una combinación de materiales en donde el efecto espín Seebeck ha sido observado.

A lo largo de este trabajo se revisan distintos temas necesarios para estudiar el efecto espín Seebeck, por ello en el capítulo 2 se presenta una introducción a los procesos de Markov, así como la obtención de la ecuación de Fokker-Planck, a partir de una ecuación más básica.

En el capítulo 3 se describe la forma en que se magnetiza un ferromagnético, así como la forma en que se producen las ondas de espín asociadas a este proceso.

En el capítulo 4 se encuentra la ecuación de Landau Lifshitz Gilbert, así como la ecuación de Fokker-Planck asociada a esta, así como el primer y segundo momento asociado a la magnetización en un ferromagnético.

Por último se establecen las conclusiones de este trabajo, así como una discusión de las perspectivas.

Capítulo 2

Ecuación de Fokker-Planck

En este capítulo se hablará acerca de la ecuación de Fokker-Planck, ya que esta modela la evolución temporal de una función de distribución en el espacio fase, se discute su obtención y el tipo de procesos que describe, con la finalidad de entender la forma de aplicarla, así como entender algunos ejemplos didácticos en que esta puede resolverse.

Distintos procesos estocásticos pueden ser descritos desde varias perspectivas. Formulaciones bastante generales involucran la ecuación de Chapman-Kolmogorov, o la ecuación maestra para procesos Markovianos.

Si en particular el proceso Markoviano bajo consideración está caracterizado por distribuciones de probabilidad muy estrechas, es entonces posible utilizar la ecuación de Fokker-Planck

2.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico $\mathbf{X} = \{X(t), t \in T\}$ se define como una colección de variables aleatorias, donde t es un parámetro que pertenece a un conjunto T , que suele definirse como el tiempo, $X(t)$ se define como el estado del proceso al tiempo t . Si el conjunto T es discreto, se dice que \mathbf{X} es un proceso de tiempo discreto, por el contrario si T es continuo, se dice que \mathbf{X} es un proceso a tiempo continuo.

Se llama una realización al valor que se observa de una variable aleatoria para un punto del espacio muestral.

Existen procesos estocásticos con distintas propiedades, una de ellas es la propiedad de Markov, se puede definir un proceso que cumple la propiedad de Markov, se dice que un proceso estocástico que cumple esta propiedad si un estado futuro del proceso sólo depende del estado actual del proceso, por lo tanto no depende de estados anteriores.

Para definir formalmente un proceso de Markov se requiere de algunos conceptos previos que a continuación se discuten.

Se define una σ -álgebra a partir de la consideración de un espacio arbitrario no vacío Ω . Se define una clase \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , como un campo, si contiene a Ω y es cerrado con respecto a la formación de complementos y uniones finitas, esto se escribe de la siguiente forma:

$$i) \Omega \in \mathcal{F}$$

$$ii) \text{Si } A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

iii) Si $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

iv) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

Las propiedades *iii* y *iv* se cumplen para intersecciones finitas. Si la clase \mathcal{F} de subconjuntos de Ω cumplen la propiedades mencionadas, se dice que forma una σ -álgebra sobre Ω .

Se define la filtración como una familia no decreciente $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ de sub σ -álgebras de \mathcal{F}

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \text{para } s \leq t$$

Se le llama a $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$ la filtración generada por el proceso estocástico X_t , donde $\sigma(X_s; s \leq t)$ denota la σ -álgebra generada por X_s . [18][21][21, 28][21, 28]

La definición formal de un proceso de Markov se enuncia de la siguiente manera

Definición 2.1. Sea X_t : un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y sea \mathcal{F}_t^x la filtración generada por $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$. Entonces $\{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ es un proceso de Markov si

$$\mathbb{P}[X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^x] = P(\Gamma, t | X_s, s)$$

Para toda $t, s \in T$ con $t \geq s$ y $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ corresponde a la σ -álgebra de Borel, que es la σ -álgebra más pequeña generada por \mathbb{R}^d .

Un concepto importante para el caso de un proceso de Markov discreto es la probabilidad de transición, y la función de transición, esto puede definirse como la probabilidad de que si se tiene el estado inicial x_n al tiempo s_n pueda estar en el estado x_{n+1} al instante s_{n+1} , esta se denota como $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$.

Otro concepto importante es la función de transición que se define como

$$P(\Gamma, t | X_s, s) = \mathbb{P}[X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^x]$$

la cual se puede asociar a todo proceso de Markov a tiempo continuo definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, cuyos argumentos son el tiempo inicial s el tiempo y posición X_s , el tiempo final t y el conjunto $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{F}_s^X$ se define como la filtración generada por el proceso estocástico X_s , esta función cumple con la condición $P(\mathbb{R}^d, t | X_s, s) = 1$, esta función satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P(\Gamma, t | x, s) = \int_{\mathbb{R}^d} P(\Gamma, t | y, u) P(dy, u | x, s)$$

la ecuación de Chapman-Kolmogorov significa que para un proceso de Markov, la transición de x al tiempo s al conjunto Γ al tiempo t puede realizarse en dos pasos, el sistema se mueve de x a y en un tiempo intermedio u , entonces se mueve de y a Γ al tiempo t . Para calcular la probabilidad de transición de x al tiempo s a Γ al tiempo t es necesario sumar sobre todos los posibles estados intermedios y , para ello se recurre a la integración. La función de transición y la distribución inicial de X_t son suficientes para definir de forma única un proceso de Markov.

$$P(\Gamma, t | x, s) = \int_{\Gamma} p(y, t | x, s) dy$$

Para este análisis se consideran procesos de Markov cuya función de transición tiene asociada una función de densidad de la siguiente manera

$p(y, t|x, s)$ es la densidad de probabilidad de transición, por lo que se puede encontrar la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$\int_{\Gamma} p(y, t|x, s)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Gamma} p(y, t|z, u)p(z, u|x, s)dz$$

como Γ es arbitrario

$$p(y, t|x, s)dy = \int_{\mathbb{R}^d} p(y, t|z, u)p(z, u|x, s)dz$$

Un proceso de Markov consiste de 3 componentes, un término de arrastre, un término determinista, es decir, puedo conocer con certeza el estado del sistema para cualquier tiempo, un proceso aleatorio y un proceso de salto. Si el proceso de Markov es estacionario, la probabilidad de transición no depende de dos tiempos, solamente del intervalo, por lo que se denota de la siguiente manera

$$P(y_2, t_2|y_1, t_1) = T_{\tau}(y_2|y_1)$$

con $\tau = t_2 - t_1$. La ecuación de Chapman-Kolmogorov para esta función se escribe como

$$T_{\tau+\tau'}(y_3|y_1) = \int T_{\tau'}(y_3|y_2)T_{\tau}(y_2|y_1)dy_2$$

donde $T_{\tau+\tau'} = T_{\tau}T_{\tau'}$

2.2. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano, es un movimiento aleatorio que se observa en partículas microscópicas inmersas en un fluido, fue observado por primera vez por el biólogo Robert Brown en 1827, al notar la forma en que partículas de polen se desplazaban de forma aleatoria sin motivo aparente, sin embargo, este movimiento se debe a la naturaleza discreta de la materia. De manera general el fenómeno puede ser observado si se sumerge una partícula del orden de $1 \mu m$ de diametro. Posteriormente Albert Einstein en la búsqueda de la confirmación de la naturaleza atómica de la materia, obtuvo una relación entre el coeficiente de difusión, (que será definido en secciones posteriores) y las propiedades atómicas de la materia.

Definición 2.2. *Un movimiento Browniano unidimensional $W(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es un proceso estocástico de variable real de trayectoria continua tal que $W(0) = 0$, tiene incrementos independientes y para toda $t > s \geq 0$, el incremento $W(t) - W(s)$ tiene una distribución Gaussiana con promedio 0 y varianza $t - s$, es decir, la densidad de la variable aleatoria $W(t) - W(s)$ es*

$$g(x; t, s) = \left(2\pi(t - s)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t - s)}\right)$$

Para el caso n-dimensional se debe considerar a $W(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector de n movimientos brownianos unidimensionales independientes

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$$

La densidad del vector Gaussiano aleatorio $W(t) - W(s)$ es

$$g(\mathbf{x}; t, s) = \left(2\pi(t-s)\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(t-s)}\right)$$

La ecuación de Fokker Planck sirve para obtener la distribución de probabilidad de un movimiento browniano en el espacio fase.

2.3. Procesos de difusión

Un proceso de difusión modela el movimiento de muchos individuos en un medio, con esto se puede hablar de partículas, bacterias moléculas o incluso rumores. Este movimiento ocurre de regiones de alta concentración a lugares de baja concentración, también puede decirse que el movimiento ocurre de regiones de mayor potencial químico a menor potencial químico.

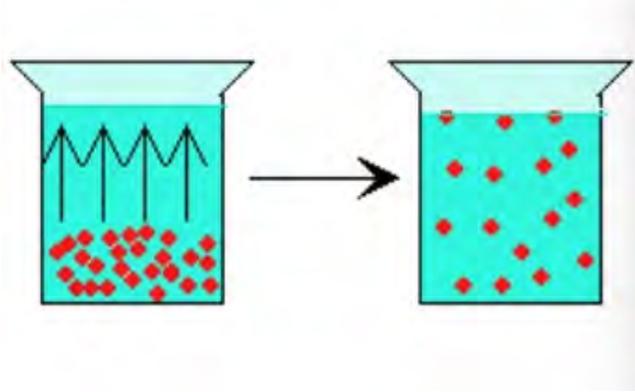


Figura 2.1: Forma en que ocurre un proceso de difusión

Para el análisis de estos procesos, se considera una colección de partículas realizando una caminata al azar en una dimensión con escala espacial Δx y temporal Δt y sea $N(x, t)$ el número de partículas en la posición x al tiempo t . Cuando pasa el tiempo, la mitad de las partículas tiene la posibilidad de moverse a la izquierda y la otra mitad a la derecha. Como sólo la mitad de las partículas se mueve a la derecha, este movimiento queda representado por

$$-\frac{1}{2} [N(x + \Delta x, t) - N(x, t)] \quad (2.1)$$

El flujo de partículas J es la cantidad que atraviesa un elemento de área a durante un intervalo de tiempo Δt con esto se tiene que

$$J = -\frac{1}{2} \left[\frac{N(x + \Delta x, t)}{(a\Delta t)} - \frac{N(x, t)}{(a\Delta t)} \right] \quad (2.2)$$

Multiplicando y dividiendo por $(\Delta x)^2$ se obtiene

$$J = -\frac{(\Delta x)^2}{2a\Delta t} \left[\frac{N(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} - \frac{N(x, t)}{(\Delta x)^2} \right] \quad (2.3)$$

$\phi(x, t) = \frac{N(x, t)}{a\Delta x}$ se define como la concentración, que es el número de partículas por unidad de volumen. A la cantidad $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ se le llama la constante de difusión D con lo que la expresión anterior resulta ser

$$J = -D \left[\frac{\phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} - \frac{\phi(x, t)}{\Delta x} \right] \quad (2.4)$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ se obtiene de la ecuación anterior la primera ley de Fick

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.5)$$

Esta ecuación implica que el flujo de partículas es proporcional al gradiente de concentración en la dirección x .

Considerando que la densidad de partículas no depende solo de la dimensión x , sino de $\vec{r}(x, y, z)$ y usando la ecuación de continuidad $\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$ ya que se supuso que el flujo de partículas se conserva.

Sustituyendo a J en la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \nabla \phi(\vec{r}, t)) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.7)$$

La ecuación 2.7 es la ecuación de difusión, la cual describe procesos como los mencionados en la sección anterior, en algunos casos se le llama segunda ley de Fick.[4]

En el caso de difusiones que no siguen las leyes de Fick, se define un proceso de difusión como un proceso de Markov con trayectorias continuas. Formalmente se puede escribir

Definición 2.3. *Un proceso de Markov $X_t \in \mathbb{R}$ con función de transición $P(\Gamma, t|x, s)$ es un proceso de difusión si las siguientes condiciones se satisfacen:*

i) *Continuidad, esto significa que para toda x y toda $\epsilon > 0$*

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x| > \epsilon} P(dy, t|x, s) = 0$$

ii) *Definición de coeficiente de arrastre, existe una función $b(x, s)$*

$$b(x, s) = \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left(\frac{X_t - X_s}{t - s} \middle| X_s = x \right)$$

definida como el coeficiente de arrastre del proceso de Markov

iii) *Definición de un coeficiente de difusión, tal que existe una función $\Sigma(x, s)$*

$$\Sigma(x, s) = \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left(\frac{|X_t - X_s|^2}{t - s} \middle| X_s = x \right)$$

dicha función puede definirse como el coeficiente de difusión del proceso

2.3.1. Problema del caminante al azar

Como se mencionó previamente un proceso de Markov, es un proceso estocástico en el que el estado futuro no depende de estados anteriores, únicamente del estado actual, por lo que se puede decir que los eventos pasados y futuros son estadísticamente independientes.

Un ejemplo de un proceso de Markov es el problema del caminante al azar unidimensional, el cual puede ser estudiado como una serie de procesos de Markov sucesivos (a esto se le llama cadena de Markov). Será considerando el caso de electrones. Los cuales se mueven una distancia l con velocidad v antes de cambiar de dirección, el tiempo que tarda este proceso es $\tau = \frac{l}{v}$. Ahora suponiendo que se aplica un campo eléctrico que no acelere a las partículas de forma significativa. Esto se cumple cuando

$$|\Delta v| = |eE\tau/m| \ll v$$

Ahora se considera a $n(x, t)$ la densidad de partículas en x al tiempo t , a N_0 el número de electrones, a partir de esto se define la condición de normalización

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx.$$

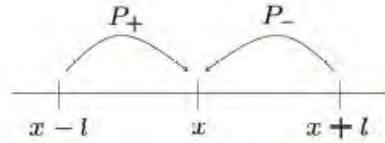


Figura 2.2: Esquema del problema del caminante al azar

El esquema del problema se muestra en la figura 2.2 donde se puede observar que la densidad de electrones en la posición x depende de los electrones que se encuentran en la posición $x - l$ y tienen probabilidad de moverse a la derecha P_+ y los que se encuentran en la posición $x + l$ y se pueden mover a la izquierda lo cual tiene una probabilidad P_- al tiempo $t - \tau$, de acuerdo con la teoría de la probabilidad $P_+ + P_- = 1$.

Teniendo esto en consideración, se dice que la densidad de partículas en la posición x al tiempo t esta dada por

$$n(x, t) = n(x + l, t - \tau)P_- + n(x - l, t - \tau)P_+ \quad (2.8)$$

Expandiendo la ecuación (2.8) por series de Taylor alrededor de (x, t) y definiendo $\Delta P = P_+ - P_-$ se obtiene

$$n(x, t) = n(x, t) + l \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} P_- - l \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} P_+ + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial n(x, t)}{\partial t}$$

y simplificando

$$\begin{aligned} n(x, t) &= n(x, t) - l \Delta P \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} \\ -\tau \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} - l \Delta P \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se define la cantidad

$$D = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\tau} = \frac{1}{2} v^2 \tau, \quad (2.10)$$

que corresponde a la tasa de difusión de electrones, se dice que el segundo término de la ecuación (2.9) es el arrastre de electrones, por lo que se define a v_d de la siguiente forma

$$v_d = \frac{1}{\tau} \Delta P, \quad (2.11)$$

Bajo la consideración de que $\Delta P \ll 1$ se puede reescribir la ecuación (??)

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \quad (2.12)$$

Ahora se mostrará que el segundo término de la ecuación puede considerarse como el arrastre de electrones, (2.12) ya que la existencia de este término, implica que todos los electrones se mueven a velocidad v_d a partir del valor esperado de la posición

$$\bar{x} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x n(x, t) dx, \quad (2.13)$$

o bien,

$$\dot{\bar{x}} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} dx \quad (2.14)$$

sustituyendo de (2.9), $\frac{\partial n(x, t)}{\partial t}$ y evaluando esta integral por partes bajo la consideración de que en ∞ y $-\infty$ la densidad de partículas es 0 se obtiene

$$\dot{\bar{x}} = \frac{D}{N_0} \left[x \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial x} dx \right] - \frac{v_d}{N_0} \left[x n(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx \right] \quad (2.15)$$

Los tres primeros términos se anulan y por definición el último miembro de la ecuación es N_0 por lo que el valor que se obtiene es v_d como se había planteado.

Ahora se puede analizar en que región se pueden mover los electrones calculando las fluctuaciones de la posición

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad (2.16)$$

primero se calcula el segundo momento \bar{x}^2 .

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} xn(x, t) dx \right)^2 \quad (2.17)$$

$$= \left(\int_0^t \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} dx \right)^2 dt \quad (2.18)$$

$$= \left(\int_0^t v_d dt \right)^2 \quad (2.19)$$

$$= (v_d t)^2. \quad (2.20)$$

Ahora se realiza el cálculo $\overline{x^2}$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 n(x, t) dx,$$

para realizar este cálculo se deriva la expresión anterior con respecto del tiempo obteniendo:

$$\dot{\overline{x^2}} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} dx$$

se sustituye de la ecuación (2.11) $\frac{\partial n(x, t)}{\partial t}$ en la expresión anterior e integrando por partes obteniendo

$$\dot{\overline{x^2}} = \frac{D}{N_0} \left[x^2 \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial n}{\partial x} dx \right] - \frac{v_d}{N_0} \left[x^2 n(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} xn(x, t) dx \right]$$

El primer y tercer términos se anulan, mediante integración del segundo y cuarto términos y se obtiene

$$\dot{\overline{x^2}} = 2D + 2v_d^2 t, \quad (2.21)$$

se toma el tiempo como variable de integración 2.21 y se obtiene $\overline{x^2} = 2Dt + v_d^2 t^2$ con toda la información anterior se calcula σ^2 de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = 2Dt + (v_{dt})^2 - (v_d t)^2 \quad (2.22)$$

$$= 2Dt. \quad (2.23)$$

Se propone para la ecuación de difusión una solución del estilo:

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (2.24)$$

se hace el cambio de variable $\zeta = \frac{x}{\sqrt{t}}$ y se toma la condición de normalización $\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) d\zeta = 1$ y sustituyendo en la ecuación 2.12

$$f'' + \frac{1}{2}\zeta f' + f = 0, \quad (2.25)$$

con $f(0) = 1$, de 2.25 con esto se obtiene la solución a la ecuación de difusión para la densidad de electrones como

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (2.26)$$

La velocidad v_d está relacionada con el campo eléctrico dicha relación se expresa por

$$v_d = \frac{-e\tau}{m} E \quad (2.27)$$

se dice que coeficiente de proporcionalidad $\frac{e\tau}{m}$, es la movilidad electrónica, μ_e , representa la facilidad que tienen los electrones para moverse en el medio propuesto. Con esto se representa la ecuación (2.12) de la siguiente manera

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\mu_e E n(x, t) - D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.28)$$

Al término entre corchetes se le llama J , y por las hipótesis de conservación asumidas cumple la ecuación de continuidad, por lo que a J se le considera como una corriente de electrones.

2.4. Ecuación de Fokker-Planck

Como ya se ha mencionado la ecuación de Fokker-Planck gobierna la evolución temporal de la densidad de probabilidad de un movimiento Browniano, esta ecuación es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

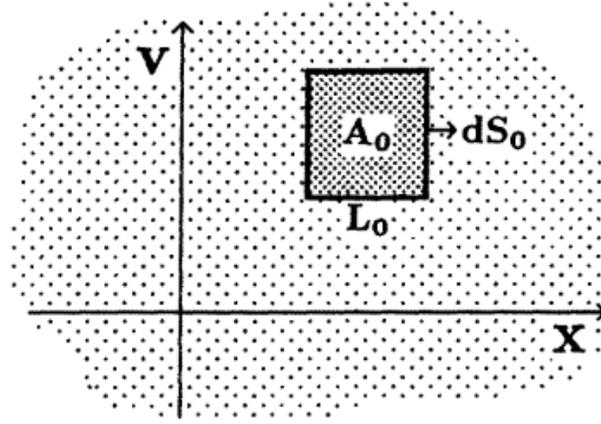


Figura 2.3: Región para derivación de ecuación de Fokker-Planck

Para construir esta ecuación hay que considerar la probabilidad de encontrar una partícula en movimiento Browniano en el intervalo $x \rightarrow x + dx$ y $v \rightarrow v + dv$ al tiempo t , para una realización de la fuerza aleatoria $\xi(t)$; considerando el espacio fase del movimiento Browniano como el vector $\mathbf{X} = (x, v)$ que denota el desplazamiento y velocidad respectivamente. Se analizara el flujo de probabilidad sobre el espacio fase, la velocidad $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}, \dot{v})$, la condición de normalización es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dv \rho(x, v, t) = 1.$$

Con estas consideraciones, la probabilidad de encontrar una partícula en movimiento browniano es $P(A_0) = \int_{A_0} dx dv \rho(x, v, t)$, dicha región se muestra en la figura 2.3, el cambio en el tiempo del flujo de esta probabilidad será

$$\frac{\partial}{\partial t} P(A_0) = \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{A_0} dx dv \rho(x, v, t) = - \oint_{L_0} \rho(x, v, t) \dot{\mathbf{X}} \cdot d\mathbf{S}_0$$

que mediante el teorema de Gauss puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{A_0} dx dv \rho(x, v, t) = - \int_{A_0} dx dv \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\rho(x, v, t) \dot{\mathbf{X}})$$

El area A_0 es fija por lo que se puede intercambiar la derivada temporal y la integración, el area de integración es ademas arbitraria, por lo que se puede escribir con $\rho(x, v, t) = \rho(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\rho(t) \dot{\mathbf{X}}). \quad (2.29)$$

Para describir el comportamiento de una partícula Browniana en un potencial, se recurre a las ecuaciones de Langevin, esta ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= -\frac{\gamma}{m} v(t) + \frac{1}{m} F(x) + \frac{1}{m} \xi(t) \\ \frac{dx}{dt} &= v(t) \end{aligned}$$

donde $F(x) = -dV/dx$ y γ . La ecuación (2.29) puede escribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\frac{\partial(\dot{x}\rho(t))}{\partial x} - \frac{\partial(\dot{v}\rho(t))}{\partial v}$$

por lo que sustituyendo las ecuaciones de Langevin en la ecuación (2.29) esta toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= -\frac{\partial(v\rho(t))}{\partial x} - \frac{\partial\left(\left(-\frac{\gamma}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(x) + \frac{1}{m}\xi(t)\right)\rho(t)\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= -\frac{\partial(v\rho(t))}{\partial x} + \frac{\gamma}{m}\frac{\partial(v\rho(t))}{\partial v} - \frac{1}{m}F(x)\frac{\partial(\rho(t))}{\partial v} - \frac{1}{m}\xi(t)\frac{\partial(\rho(t))}{\partial v} \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= -v\frac{\partial(\rho(t))}{\partial x} + \frac{\gamma}{m}v\frac{\partial(\rho(t))}{\partial v} + \frac{\gamma}{m}\rho(t) - \frac{1}{m}F(x)\frac{\partial(\rho(t))}{\partial v} - \frac{1}{m}\xi(t)\frac{\partial(\rho(t))}{\partial v} \end{aligned}$$

se escribe esta ecuación en terminos de operadores de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\hat{L}_0\rho(t) - \hat{L}_1\rho(t) \quad (2.30)$$

donde estos operadores se definen como

$$\hat{L}_0 = -v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma}{m}v\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\gamma}{m} - \frac{1}{m}F(x)\frac{\partial}{\partial v} \quad \text{y} \quad L_1 = -\frac{1}{m}\xi(t)\frac{\partial}{\partial v} \quad (2.31)$$

Como la variable $\xi(t)$ se definió como estocástica, la evolución de ρ sera distinta para cada realización, por lo que se introduce una función $P(x, v, t)dxdv$ que representa la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $x + dx$ y $v + dv$ que se define como

$$P(x, v, t) = \langle \rho(x, v, t) \rangle_\xi$$

Se propone que $\rho(t)$ tiene la forma $\rho(t) = e^{-L_0 t}\sigma(t)$ por lo que sustituyendo en (2.30) se obtiene que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -e^{L_0 t}L_1(t)e^{L_0 t}\sigma(t)$$

la cual se representa como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\hat{V}(t)\sigma(t)$$

La solución a esta ecuación es

$$\sigma(t) = \exp\left[-\int_0^t dt' \hat{V}(t')\right] \sigma(0)$$

mediante un desarrollo en series de potencias

$$\sigma(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^t dt' \hat{V}(t') \right)^n \right] \sigma(0) \quad (2.32)$$

Considerando que $\xi(t)$ tiene media 0, es decir consideramos que $\xi(t)$ es ruido blanco, al tomar el promedio de la ecuación (2.32) sólo habrá potencias pares, por las características del ruido blanco.

$$\langle \sigma(t) \rangle_\xi = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left\langle \left(\int_0^t dt' \hat{V}(t') \right)^{2n} \right\rangle_\xi \right] \sigma(0) \quad (2.33)$$

Considerando que el promedio de un producto de $2n$ variables estocásticas es la suma de todas las posibles combinaciones de pares de promedios de estas, por ejemplo para el caso de 4 variables estocásticas

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle + \langle x_1 x_3 \rangle \langle x_2 x_4 \rangle + \langle x_1 x_4 \rangle \langle x_3 x_2 \rangle$$

por lo que tienen la forma

$$\langle x_1 x_2 \cdots x_{2n} \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle \cdots \langle x_{2n-1} x_{2n} \rangle + \cdots \quad (2.34)$$

por lo que el numero de combinaciones que pueden realizarse de variables son $\frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2}$, ya que existen $n!$ combinaciones identicas, lo que da como resultado $\left(\frac{1}{n!} \frac{(2n)(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)}{2} \cdots \frac{1}{2} \right)$, esto se puede expresar como $\frac{(2n)!}{2^n n!}$, lo que significa que es el número de sumandos que aparece en la ecuación (2.34).

En la ecuación (2.33) el término $\left(\int_0^t dt' \hat{V}(t') \right)^{2n}$ puede descomponerse como $\left(\int_0^t dt_i V(t_i) \int_0^t dt_j \hat{V}(t_j) \right)^n$ por lo que al tomar el promedio de este habrá $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ sumandos de términos identicos, lo que lleva a la ecuación(2.33) a la forma

$$\langle \sigma(t) \rangle_\xi = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \left(\frac{1}{2} \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \langle \hat{V}(t_2) \hat{V}(t_1) \rangle \right)^n \right] \sigma(0) \quad (2.35)$$

la serie de la ecuación 2.35 converge a

$$\langle \sigma(t) \rangle_\xi = \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \langle \hat{V}(t_2) \hat{V}(t_1) \rangle \right) \right] \sigma(0) \quad (2.36)$$

Al recordar la forma del operador $\hat{V}(t)$ definido en la ecuación (2.31) se realiza la integral de la ecuación (2.36)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \langle \hat{V}(t_2) \hat{V}(t_1) \rangle \right) &= \frac{g}{2m^2} \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \delta(t_2 - t_1) e^{\hat{L}_0 t_2} \frac{\partial}{\partial v} e^{-\hat{L}_0(t_2 - t_1)} \frac{\partial}{\partial v} e^{-\hat{L}_0 t_1} \\ &= \frac{g}{2m^2} \int_0^t dt_1 e^{\hat{L}_0 t_1} \frac{\partial^2}{\partial v^2} e^{-\hat{L}_0 t_1} \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene que

$$\langle \sigma(t) \rangle = \exp \left(\int_0^t dt_1 e^{\hat{L}_0 t_1} \frac{\partial^2}{\partial v^2} e^{-\hat{L}_0 t_1} \right)$$

Derivando esta expresión con respecto del tiempo se obtiene la ecuación de evolución que tiene la siguiente forma

$$\frac{d\langle \sigma(t) \rangle}{dt} = \frac{g}{2m^2} \exp \left(\int_0^t dt_1 e^{\hat{L}_0 t_1} \frac{\partial^2}{\partial v^2} e^{-\hat{L}_0 t_1} \right) e^{\hat{L}_0 t} \frac{\partial^2}{\partial v^2} e^{-\hat{L}_0 t}$$

esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{d\langle \sigma(t) \rangle}{dt} = \frac{g}{2m^2} e^{\hat{L}_0 t} \frac{\partial^2}{\partial v^2} e^{-\hat{L}_0 t} \langle \sigma(t) \rangle$$

$$D = \frac{g}{2\gamma^2}$$

En términos de la densidad definida previamente $\rho(t) = e^{-L_0 t} \sigma(t)$, se escribe como $\rho(t) = \hat{U}(t) \sigma(t)$ derivando con respecto del tiempo se obtiene

$$\frac{\partial \langle \rho(t) \rangle}{\partial t} = -L_0 \langle \rho(t) \rangle + \hat{U}(t) \frac{\partial \langle \sigma(t) \rangle}{\partial t}$$

Se puede con esto obtener que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(-\frac{\gamma}{m} + \frac{1}{m} F(x) \right) P \right] + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$

que es la ecuación de Fokker Planck para un movimiento Browniano.[11]

2.5. Derivación general de la ecuación de Fokker Planck

De manera más general se puede obtener la ecuación de Fokker-Planck, partiendo de la forma diferencial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Esta ecuación es llamada ecuación maestra, la cual se representa como

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\tau(y_3|y_1) = \int \{W(y_3|y_1)T_\tau(y_2|y_1) - W(y_2|y_3)T_\tau(y_3|y_1)\}$$

otra forma de escribirla es

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int \{W(y|y')P(y', t) - W(y'|y)P(y, t)\} dy'$$

donde $W(y|y')$ denota la probabilidad de transición por unidad de tiempo de y a y' .

Para derivar la ecuación de Fokker-Planck hay que expresar a W como función del tamaño del salto y del punto inicial

$$W(y|y') = W(y'; r), \quad r = y - y'$$

Con esta función la ecuación maestra tiene la forma

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int W(y - r; r)P(y - r, t)dr - P(y, t) \int W(y; -r)dr \quad (2.37)$$

Se considera que solo ocurren saltos pequeños, lo que implica la existencia de $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} W(y'; r) &\approx 0 && \text{para } |r| > \delta \\ W(y' + \Delta y; r) &\approx W(y'; r) && \text{para } |\Delta y| < \delta \end{aligned}$$

Otra suposición es que la solución $P(y, t)$ varíe lentamente con y , lo que permite desarrollar la ecuación (2.37) en términos de series de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(y, t)}{\partial t} &= \int W(y; r)P(y - r, t)dr - \int r \frac{\partial}{\partial y} \{W(y; r)P(y, t)\} dr \\ &+ \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{W(y; r)P(y, t)\} dr - P(y, t) \int W(y; -r)dr \\ &= - \int r \frac{\partial}{\partial y} \{W(y; r)P(y, t)\} dr + \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{W(y; r)P(y, t)\} dr, \end{aligned}$$

se realiza una expansión únicamente hasta términos de segundo orden, ya que se considera la hipótesis de saltos pequeños, por lo que términos de orden mayor son despreciables.

Se definen los momentos de salto como

$$a_n = \int r^n W(y; r)$$

con lo que la ecuación de Fokker-Planck toma la forma general

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a_1(y)P\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{a_2(y)P\} \quad (2.38)$$

Esta ecuación constituye la base del trabajo realizado, ya que mediante ella se describe la dinámica del efecto espín Seebeck.

2.5.1. Resolución de la ecuación de Fokker-Planck

El ruido blanco Gaussiano debe cumplir las propiedades

$$\langle \xi(t) \rangle^{v_0} = 0$$

Promedio nulo, sobre las realizaciones del ruido y sobre el ensamble de las condiciones iniciales

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D\delta(t_1 - t_2)$$

es decir que la correlación es instantánea.

La ecuación de Fokker-Planck para la velocidad de una partícula en movimiento Browniano se puede escribir como

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} (vP) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$

Si se multiplica la ecuación por v y se integra de la siguiente manera

$$\int v \frac{\partial P}{\partial t} dv = \gamma \int v \frac{\partial}{\partial v} (vP) dv + \frac{D}{2} \int v \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} dv$$

donde

$$\begin{aligned} \int v \frac{\partial P}{\partial t} dv &= \frac{d}{dt} \int vP dv \\ &= \frac{d}{dt} \langle v \rangle \end{aligned}$$

integrando por partes el término

$$\begin{aligned} \gamma \int v \frac{\partial}{\partial v} (vP) dv &= \gamma P v^2 - \gamma \int vP dv \\ &= -\gamma \langle v \rangle \end{aligned}$$

si se procede de la misma manera con el término

$$\int v \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} dv = v \frac{\partial P}{\partial v} - \int \frac{\partial P}{\partial v} dv$$

$$= 0$$

$$\frac{d}{dt} \langle v \rangle = -\gamma \langle v \rangle$$

de manera análoga se puede encontrar la ecuación de evolución del segundo momento al multiplicar por v^2 e integrar se obtiene la ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt} \langle v^2 \rangle = -2\gamma \langle v^2 \rangle + D$$

Las soluciones a estas ecuaciones son

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\gamma t}$$

$$\langle v^2 \rangle = v_0^2 e^{-2\gamma t} + D\gamma (1 - e^{-2\gamma t})$$

Con esto el proceso estocástico queda determinado completamente de forma única a partir de la solución de la ecuación de Fokker-Planck.

Otro caso de la ecuación de Fokker-Planck es la ecuación de difusión para movimiento Browniano en el caso libre [7]. Dicha ecuación tiene la forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial v} v + \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) P \quad (2.39)$$

Integrando la ecuación (2.39) con respecto de x , se resolverá esta ecuación para la distribución marginal $P_V(v, t) = \int dx P(x, v, t)$, tomando el hecho de que $\int dx \partial_x P(x, v, t) = 0$ y que $P(x = \pm\infty, v, t) = 0$ se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial P_V}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial v} v + \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) P_V \quad (2.40)$$

la ecuación (2.40) tiene la forma general de una partícula sobreamortiguada, que se mueve en un potencial armónico, por lo que se puede escribir como

$$\tau \partial_t P = \partial_y (yP) + D \partial_y^2 P \quad (2.41)$$

Para resolver la ecuación (2.41) se introduce la función característica. Esta se define para una variable aleatoria X , como el valor esperado de e^{ikX} , esta función se denota como $G(k)$, con k un parámetro real, y tiene la propiedad de que $G^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$.

Introduciendo la función

$$G(k, t) = \int dy e^{iky} P(y, t), \quad P(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-iky} G(k, t),$$

en la ecuación (2.41) se obtiene

$$\tau \partial_t G + k \partial_k G = -D k^2 G \quad (2.42)$$

la ecuación (2.42) puede resolverse por el método de características, en este método si se tiene una ecuación diferencial de la forma

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = R \quad (2.43)$$

con $u(x, y, f) = a$ y $v(x, y, f) = b$, soluciones del sistema subsidiario

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{df}{R}$$

la solución general de la ecuación (2.43), es una función h de u y v tal que $h(u, v) = 0$.

El sistema subsidiario para la ecuación (2.42) es

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dk}{k} = -\frac{dG}{Dk^2G} \quad (2.44)$$

con lo que considerando la ecuación 2.44

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dk}{k}$$

$k = ae^{t/\tau}$ con lo que $a = ke^{-t/\tau} = u$.

Para la ecuación $-Dkdk = dG/G$, mediante integración directa se obtiene $-\frac{1}{2}Dk^2 = \ln G + c$ donde se obtiene que $v = e^{-\frac{1}{2}Dk^2}G = b$.

La solución $h(u, v) = 0$ puede hallarse considerando a $v = \phi(u)$, con este hecho la solución es

$$G = e^{-\frac{1}{2}Dk^2} \phi(ke^{-t/\tau})$$

la solución para condiciones iniciales $P(y, t) = \delta(y - y_0)$ que es equivalente a la condición $G(k, t = 0) = e^{iky_0}$, con esto se obtiene que $\phi(k) = e^{iky_0 + \frac{1}{2}Dk^2}$ con ello

$$G(k, t) = \exp \left(iy_0 e^{-t/\tau} k - \frac{1}{2} D \left(1 - e^{-2t/\tau} \right) k^2 \right)$$

una vez obtenida G puede obtenerse la función P , la cual se expresa como

$$P(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D (1 - e^{-2t/\tau})}} \exp \left[-\frac{(y - y_0 e^{-t/\tau})^2}{2D (1 - e^{-2t/\tau})} \right]$$

2.6. Formalismo para describir ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales

En esta sección se realiza una revisión de la metodología propuesta por Van Kampen[11], con el propósito de encontrar una ecuación estocástica asociada a una ecuación determinista no lineal, primero para ello se analiza el caso de ecuaciones lineales.

2.6.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Supóngase una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{u} = A(t)u = \{A_0 + \alpha A_1(t)\} u \quad (2.45)$$

donde u es un vector, A_0 es una matriz constante, $A_1(t)$ una matriz aleatoria, y α es un parámetro que mide la magnitud de las fluctuaciones en los coeficientes. $A_1(t)$ se considera una matriz con tiempo

de autocorrelación finito llamado τ_c , esto significa que a dos tiempos $|t_1 - t_2| \gtrsim \tau_c$, por lo que se pueden tratar los elementos de matriz $A(t_1)$ como estadísticamente independientes de $A(t_2)$; el parámetro $\alpha\tau_c$ se considera pequeño, se considera además que $\langle A_1(t) \rangle = 0$.

Considerando la ecuación (2.45), se transforma a la representación de interacción de la siguiente forma

$$u(t) = e^{tA_0} v(t) \quad (2.46)$$

Con esta transformación la ecuación 2.45 toma la forma

$$\dot{v} = \alpha e^{-tA_0} A_1(t) e^{tA_0} v \equiv \alpha V(t) v \quad (2.47)$$

La solución a segundo orden en potencias de α con $v(0) = u(0) = a$ es

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t dt_1 V(t_1) a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) a + \dots \quad (2.48)$$

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1) V(t_2) \rangle a$$

La aproximación a segundo orden es válida mientras los ordenes superiores son pequeños, esto se considera para $\alpha t \ll 1$.

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle a \quad (2.49)$$

para $t_1 > \tau_c$ el límite superior puede ser reemplazado como infinito, si el integrando se anula. Por lo tanto 2.49 se escribe como

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^\infty d\tau \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle a \quad (2.50)$$

derivando con respecto del tiempo 2.50

$$\partial_t \langle v(t) \rangle = \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle V(t) V(t - \tau) \rangle a.$$

Tomando la transformación inversa de 2.46 se obtiene que la ecuación estocástica asociada a la ecuación diferencial es

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle A_1(t) e^{tA_0} A_1(t - \tau) \rangle e^{-\tau A_0} \right] \langle u(t) \rangle$$

2.6.2. Caso no lineal

Para esto se debe considerar una ecuación determinista que tenga la forma

$$\dot{u}_\nu = F_\nu(u, i; y(t))$$

Donde $y(t)$ representa una realización, o un valor observado para una variable aleatoria $Y(t)$.

La ecuación representa un flujo sobre el espacio u , la variación temporal de la densidad ρ de este flujo, se puede representar por medio de la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \{ F_\nu(u, i, y)(t) \rho \}$$

Al considerar todas las realizaciones de $Y(t)$ con sus respectivas probabilidades, la ecuacion se convierte en una ecuación estocástica para $\rho(u, t)$.

Si la ecuación diferencial no estocástica tiene solución tal que $u_\nu(0) = a_\nu$, la ecuación estocastica sera resuelta con la condición $\rho(u, 0) = \delta(u - a) = \prod_\nu \delta(u_\nu - a_\nu)$ donde puede demostrarse que $\langle \rho(u, t) \rangle = P(u, t)$.

Para construir la ecuación estocástica es necesario resolver la ecuacion determinista, el siguiente paso sera realizar una expansión del término $F_\nu(u, t; y(t))$ para pequeñas fluctuaciones de la siguiente manera

$$F_\nu(u, t; y(t)) = F_\nu^{(0)}(u) + \alpha F_\nu^{(1)}(u, t)$$

donde $F_\nu^{(0)}(u)$ cumple con ser un termino no estocastico y con la consideracion $\langle F_\nu^{(1)}(u, t) \rangle = 0$ sustituyendo estas suposiciones en la ecuacion de flujo, se obtiene

$$\dot{\rho}(u, t) = \{A_0(u) + \alpha A_1(u; t)\} \rho$$

$$\text{con } A_0 \rho = -\frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(0)}(u) \rho$$

$$A_1 \rho = -\frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(1)}(u; t) \rho$$

Para casos con las características de $F_\nu^{(0)}(u), F_\nu^{(1)}(u, t)$ se puede eliminar a A_0 transformandola al esquema de interacción

$$u(t) = e^{tA_0} v(t)$$

$$\dot{v} = \alpha e^{-tA_0} A_1(t) e^{tA_0} \equiv \alpha V(t) v$$

La solución a esta ecuación con la condición $u(0) = v(0) = a$ es

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t dt_1 V(t_1) + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) a + \dots$$

Considerando el promedio con a fija solo a segundo orden

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1) V(t_2) \rangle$$

Para que la aproximación a segundo orden sea buena, se debe considerar que $\alpha t \ll 1$.

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle$$

Llamando a τ_c el tiempo de auto correlación de $A_1(t)$,; consideraremos que la expresión anterior puede ser usada para $t > \tau_c$ con la suposición de $\alpha \tau_c \ll 1$. Para $t_1 > \tau_c$ el limite superior de la integral puede ser sustituido por infinito de la siguiente manera

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^\infty d\tau \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle$$

Como esta función es solución de la ecuación diferencial a segundo orden

$$\partial_t \langle v(t) \rangle = \alpha^2 \int_0^t d\tau \langle V(t)V(t-\tau) \rangle \langle v(t) \rangle$$

En su representación original la evolución temporal de $\langle v(t) \rangle$ se escribe como

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t)e^{tA_0} A_1(t-\tau) \rangle e^{-\tau A_0} d\tau \right] \langle u(t) \rangle$$

Una expansión equivalente para el caso que corresponde a la construcción de la ecuación estocástica es

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \rho(u, t) \rangle &= -\frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(0)}(u) \langle \rho(u, t) \rangle \\ &\quad + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial u_\nu} \int_0^\infty d\tau \left\langle F_\nu^{(1)}(u, \tau) e^{\tau A_0} \frac{\partial}{\partial u_\mu} F_\mu^{(1)}(u, t-\tau) \right\rangle e^{-\tau A_0} \\ \partial_t \langle \rho(u, t) \rangle &= -\frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(0)}(u) \langle \rho(u, t) \rangle + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial u_\nu} \int_0^\infty d\tau \left\langle F_\nu^{(1)}(u, \tau) e^{\tau A_0} \frac{\partial}{\partial u_\mu} F_\mu^{(1)}(u, t-\tau) \right\rangle e^{-\tau A_0} \end{aligned}$$

e^{-tA_0} actuando sobre cualquier función $f(u)$, corresponde a la solución para la parte no perturbada de la ecuación de Liouville, por lo que $e^{-tA_0} f(u)$ es la solución $\phi(u, t)$ de

$$\frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(0)}(u) \phi(u, t) \quad \phi(u, 0) = f(u)$$

$$\phi(u, t) = \phi(u^{-t}, 0) \frac{d(u^{-t})}{d(u)}$$

$$\dot{u}^t = F_\nu^{(0)}(u^t) \tag{2.51}$$

$$e^{tA_0} f(u) = f(u^{-t}) \frac{d(u^{-t})}{d(u)}$$

$$e^{-\tau A_0} \langle \rho(u, t) \rangle = P(u^{-\tau}, t) \frac{d(u^\tau)}{d(u)}$$

Se puede escribir

$$e^{\tau A_0} \frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(1)}(u, t-\tau) P(u^{-\tau}, t) \frac{d(u^\tau)}{d(u)} = \frac{d(u^{-\tau})}{d(u)} \frac{\partial}{\partial u_\mu^{-\tau}} F_\mu^{(1)}(u, t-\tau) P(u, t) \frac{d(u)}{d(u^{-\tau})}$$

por lo que la ecuación diferencial estocástica a partir del cálculo determinista resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(u, t)}{\partial t} &= -\frac{\dot{\partial}}{\partial u_\nu} F_\nu^{(0)}(u) P(u, t) \\ &\quad + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial u_\nu} \int_0^\infty d\tau \left\langle F_\nu^{(1)}(u; t) \frac{d(u^{-\tau})}{d(u)} \frac{\partial}{\partial u_\mu^{-\tau}} (F_\mu^{(1)}(u, t-\tau)) \right\rangle P(u, t) \frac{d(u)}{d(u^{-\tau})} \end{aligned} \tag{2.52}$$

la cual tiene la forma de la ecuación de Fokker-Planck, los índices repetidos denotan notación de suma.

Considerando el caso en el que $\tau_c |F^{(0)}| \ll 1$ esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial P(u, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u_\nu} F_\nu^{(0)}(u) + \frac{\partial^2}{\partial u_\nu \partial u_\mu} (B_{\mu\nu}(u)P) \quad (2.53)$$

$$B_{\mu\nu}(u) = \alpha^2 \int_0^\infty \left\langle F_\nu^{(1)}(u; t) F_\mu(u^{-\tau}; t - \tau) \right\rangle d\tau$$

Un ejemplo ilustrativo acerca del método empleado es el caso de un oscilador.

Para esto se supone una partícula, que se mueve en una dimensión, dicha partícula esta sometida a una fuerza $K(x)$, una fuerza de fricción $-\gamma\dot{x}$ y una fuerza aleatoria $\alpha\xi(t)$. Por segunda ley de Newton la ecuación de movimiento de la partícula (considerando que tiene masa unitaria) tendrá la forma

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = K(x) + \alpha\xi(t) \quad (2.54)$$

Aunque en principio el método fue planteado para ecuaciones diferenciales dinámicas de primer orden, en este caso se recurre a escribir $\dot{x} = v$ en la ecuación 2.54

$$\dot{v} + \gamma v = K(x) + \alpha\xi(t)$$

se despeja \dot{v} obteniéndose

$$\dot{v} = K(x) + \alpha\xi(t) - \gamma v \quad (2.55)$$

identificando términos se observa que $F_1^{(0)} = v$, de la ecuación 2.55 se obtiene que $F_2^{(0)} = K(x) - \gamma v$ y $F_2^{(1)}(t) = \alpha\xi(t)$, por lo que P es función de x y v ; utilizando la expresión 2.53 se obtiene que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial(F_1^{(0)}P)}{\partial x} - \frac{\partial(F_2^{(0)}P)}{\partial v} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \left(\int_0^\infty \left\langle F_2^{(1)}(t) F_2^{(1)}(t - \tau) \right\rangle d\tau \right)$$

sustituyendo se encuentra que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial((K(x) - \gamma v)P)}{\partial v} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \left(\alpha^2 \int_0^\infty \left\langle \xi(t)\xi(t - \tau) \right\rangle d\tau \right)$$

la forma final de la ecuación es la siguiente expresión, que corresponde a la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} - K(x) \frac{\partial P}{\partial v} - \gamma \frac{\partial(vP)}{\partial v} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \left(\alpha^2 \int_0^\infty \left\langle \xi(t)\xi(t - \tau) \right\rangle d\tau \right)$$

A lo largo este capítulo se mostró el formalismo detrás de la ecuación de Fokker-Planck, que permitirá analizar de manera estocástica el efecto espín Seebeck, por medio de esta ecuación. En este capítulo se introdujo el concepto de la función característica, o generadora de momentos, que será útil para resolver la ecuación de Fokker-Planck, lo cual nos provee los momentos estadísticos del proceso estocástico asociado.

Capítulo 3

Descripción de sistemas magnéticos

En este capítulo se establecen las ecuaciones dinámicas de la magnetización, asimismo se discute un planteamiento para esgrimir el concepto de ondas de espín. Previamente se habla acerca de como actúa un campo magnético sobre un ferromagnético, con el fin de comprender los términos involucrados en las ecuaciones dinámicas antes mencionadas. Se analiza este comportamiento debido a que estas ecuaciones dinámicas dan origen a la ecuación de Fokker-Planck.

3.1. Magnetización de ferromagnéticos y campos de desmagnetización

Como los materiales ferromagnéticos pueden ser altamente magnetizados por la acción de un campo magnético, estos materiales poseen permeabilidad magnética relativa del orden de 10^2 a 10^6 . Su comportamiento ante un campo magnético es como el mostrado en la siguiente figura 3.1[23]

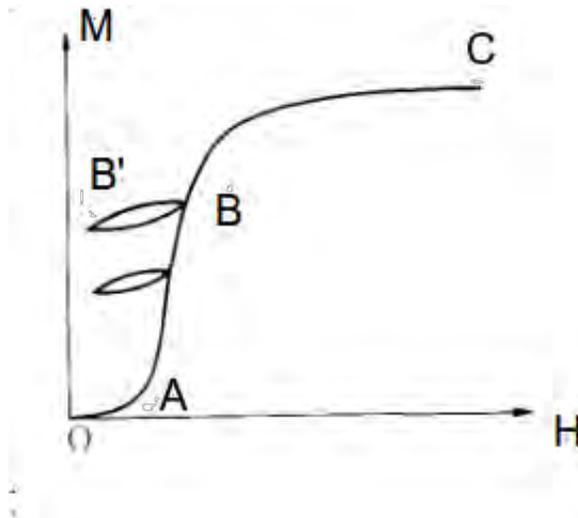


Figura 3.1: Curva de magnetización de un ferromagnético

A partir de un estado desmagnetizado, la magnetización se incrementa a lo largo de la curva

mostrada en la curva OABC, hasta que llega al valor llamado magnetización de saturación, en la región OA el proceso de magnetización es casi reversible, esto significa que si el sistema se retira del campo magnético, entonces la magnetización desaparece. La pendiente de la región OA es llamada la susceptibilidad inicial χ_a , más allá de esta región, la magnetización no es reversible, si el campo disminuye cuando el proceso ha llegado al punto B, la magnetización también lo hará, pero no a lo largo de la misma trayectoria, es decir, BAO, sino a lo largo de la curva BB', la pendiente de esta curva es llamada susceptibilidad reversible χ_{rev} .

En la figura 3.2 se muestra la curva de histéresis de un ferromagnético, la cual será descrita en detalle. Se llama al punto C, el estado saturado, cuando un campo magnético es aplicado, como se mencionó anteriormente, tomando el caso en que el sistema llega a su estado de magnetización máxima. Supóngase que en ese momento el campo magnético aplicado comienza a disminuir hasta llegar a 0, la magnetización del sistema comenzaría a disminuir, pero no a lo largo de la trayectoria CBAO, sino que lo haría a lo largo de la trayectoria CD, hasta un valor distinto de 0 para la magnetización, que corresponde al valor D, a esto se le llama magnetización residual.

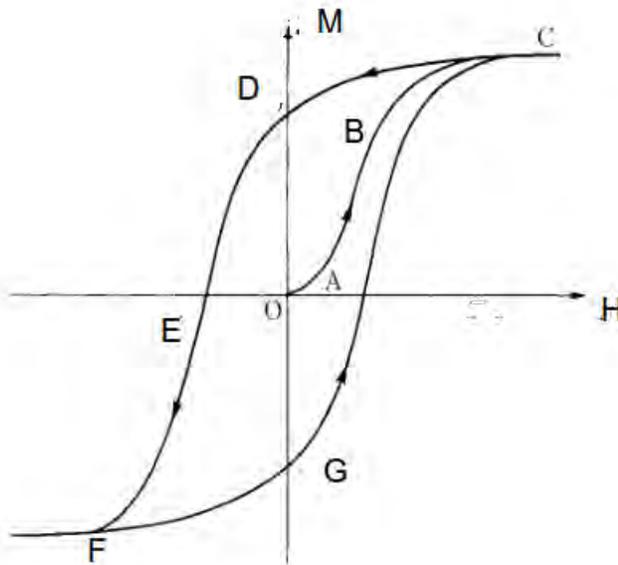


Figura 3.2: Curva de histéresis

Si el campo magnético sigue disminuyendo hasta valores negativos, la magnetización continúa disminuyendo hasta llegar a ser 0, este estado es alcanzado en el punto E, al valor del campo magnético en el que este estado es alcanzado, se le llama campo coercivo, la porción DE de la curva es conocida como la curva de desmagnetización; si el campo sigue creciendo en valores negativos, el material puede alcanzar la magnetización de saturación negativa, si el campo magnético empieza a aumentar hacia las magnitudes positivas, se observa que la magnetización del material sigue la trayectoria FGC.

La curva de magnetización de un material, no depende solamente de la susceptibilidad del ferromagnético, sino también de su forma. Cuando una muestra de tamaño finito es magnetizada por un campo magnético externo, los polos libres que aparecen en los bordes, producen un campo magnético, que se opone al campo magnético externo, dicha situación se ilustra en la figura 3.3.

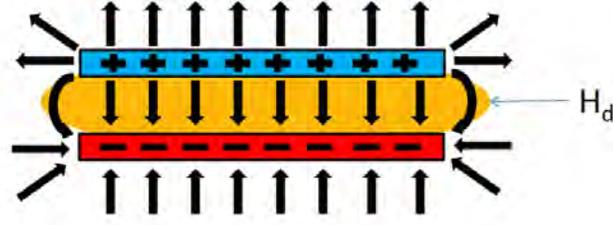


Figura 3.3: Efecto de desmagnetización en un material ferromagnético.

La intensidad de este campo denotado como H_d es proporcional a la cantidad de polos magnéticos libres y por lo tanto a la magnetización, este campo cumple la siguiente relación

$$H_d = N \cdot M$$

En el caso de una muestra rectangular los factores de desmagnetización pueden calcularse de la siguiente manera; para calcular los factores de magnetización se requiere dividir la muestra en celdas rectangulares, en este caso, el factor de desmagnetización se mide en el centro de cada celda, mediante las siguientes expresiones[1]

$$N_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} [\arctan f_i(x, y, z) + \arctan f_i(-x, y, z) + \arctan f_i(x, -y, z) + \arctan f_i(x, y, -z) + \arctan f_i(-x, -y, z) + \arctan f_i(x, -y, -z) + \arctan(-x, y, -z) + \arctan(-x, -y, -z)]$$

$$f_x(x, y, x) = \frac{(b-y)(c-z)}{(a-x) \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \right]^{1/2}}$$

$$f_y(x, y, x) = \frac{(a-x)(c-z)}{(b-y) \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \right]^{1/2}}$$

$$f_z(x, y, x) = \frac{(a-x)(b-y)}{(c-z) \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \right]^{1/2}}$$

$$N_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{F_{ij}(\mathbf{r}, a, b, c) F_{ij}(\mathbf{r}, -a, -b, c) F_{ij}(\mathbf{r}, a, -b, -c) F_{ij}(\mathbf{r}, -a, b, -c)}{F_{ij}(\mathbf{r}, a, -b, c) F_{ij}(\mathbf{r}, -a, b, c) F_{ij}(\mathbf{r}, a, b, -c) F_{ij}(\mathbf{r}, -a, -b, -c)} \right], i \neq j$$

$$F_{xy}(\mathbf{r}, a, b, c) = (c-z) + \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \right]^{1/2}$$

$$F_{yz}(\mathbf{r}, a, b, c) = (a-x) + \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \right]^{1/2}$$

$$F_{xz}(\mathbf{r}, a, b, c) = (b-y) + \left[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \right]^{1/2}$$

donde a constituye la mitad del largo de la muestra en la dirección x , b corresponde la mitad del

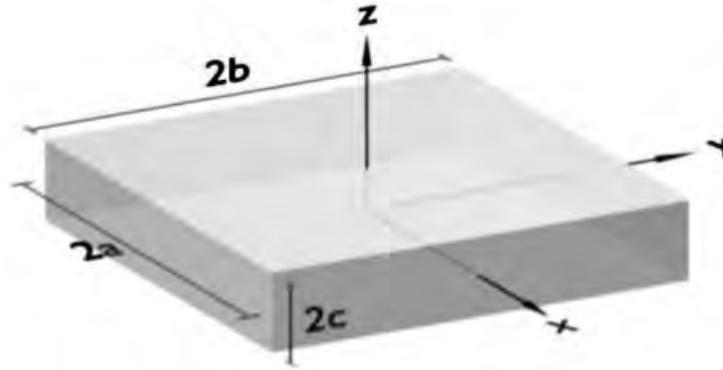


Figura 3.4: Esquema de un prisma rectangular

tamaño en la dirección y y c corresponde a la mitad del grosor en la dirección z , en la figura 3.4 se muestra el esquema de lo previamente mencionado.

Otro componente del campo es la componente del campo de intercambio, esta se puede expresar como

$$H_{exch} = A\nabla^2 M$$

donde A corresponde a la dureza de intercambio del material, este parámetro es característico de cada ferromagnético.

Esta componente aparece en átomos cercanos que tienen electrones desapareados. esta interacción esta relacionada con el principio de exclusión de Pauli. Por lo tanto, bajo ciertas condiciones, cuando los orbitales donde se encuentran electrones de valencia desapareados de átomos adyacentes se traslapan, sus distribuciones de carga en el espacio, se encuentran más lejanas cuando los electrones tienen espines paralelos, con respecto a cuando tienen espines opuestos. Esto disminuye la energía electrostática de los electrones cuando sus espines son paralelos, comparado con el caso en que los espines son antiparalelos, por lo tanto, el estado de espines paralelos es más estable. En resumen, los electrones, que se repelen unos a otros, pueden moverse más lejos alineando sus espines, así que los espines de estos electrones tenderán a alinearse, a esta diferencia de energía se le conoce como energía de intercambio[8], aunque el origen de este fenómeno es debido a repulsión eléctrica y el principio de exclusión, esta interacción modifica la naturaleza magnética de un material.

3.2. Ondas de espines

Las excitaciones elementales de sistemas acoplados de espines son llamadas ondas de espines, estas ondas pueden ser cuantizadas y reciben el nombre de magnones.[27][5][22]

En su estado base un ferromagneto tiene todos sus espines paralelos. Se considera un sistema de iones magnéticos en R sitios de una red de Bravais, que pueden ser descritos por el Hamiltoniano ferromagnético de Heisenberg

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{RR'}^N \mathbf{S}(R) \cdot \mathbf{S}(R') J(R - R') - g\mu_B H \sum_R S_z(R) \quad (3.1)$$

donde J es un parametro de interacción, H es el campo magnético que actúa sobre los espines locales, que no necesariamente es igual al campo magnético aplicado, μ_B es el magnetón de Bohr y g es el factor de Landé.

El Hamiltoniano (3.1) se puede escribir, utilizando las relaciones de conmutación del momento angular como

$$\mathcal{H} = - \sum_{RR'}^N S_z(R) S_z(R') J(R - R') - \frac{1}{2} \sum_{RR'}^N S_-(R') S_+(R') J(R - R') - g\mu_B H \sum_R S_z(R) \quad (3.2)$$

es la integral de intercambio de energía.

Un magnón es una excitación colectiva de los espines de los electrones en una red cristalina. Los magnones transportan una cantidad fija de energía y momento de red.

Para estudiar estas ondas se analiza un ferromagnético mediante el Hamiltoniano de Heisenberg a bajas temperaturas. Se dice que a temperatura $0K$ el ferromagnético se encuentra en su estado base, el espín promedio de cada ion es S , y la densidad de magnetización, conocida como magnetización de saturación es

$$M = g\mu_B \frac{N}{V} S, \quad (3.3)$$

a bajas temperaturas el peso estadístico de los estados de más baja energía. Para construir los estados de más baja energía se analiza un estado $|R\rangle$, este estado cumple con

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R) |0\rangle \quad (3.4)$$

el estado $|0\rangle$ es un eigenestado de $S_z(R)$ para todo R con eigenvalor máximo S ,

$$|0\rangle = \prod_R |S\rangle_R \quad (3.5)$$

El álgebra de los operadores de espín se define como

$$\begin{aligned} \hat{S}_{iz} |S_{iz}\rangle &= S_{iz} |S_{iz}\rangle \\ \hat{S}_{i+} |S_{iz}\rangle &= \sqrt{S(S+1) - S_{iz}(S_{iz}+1)} |S_{iz}+1\rangle \\ \hat{S}_{i-} |S_{iz}\rangle &= \sqrt{S(S+1) - S_{iz}(S_{iz}-1)} |S_{iz}-1\rangle, \end{aligned}$$

el subíndice i indica que se mide el espín en la posición i de la red. [?]

Los operadores de espín cumplen además con las relaciones de conmutación $[S_{iz}, S_{j\pm}] = \pm\delta_{ij} S_{i\pm}$ y $[S_{i+}, S_{j-}] = \pm 2\delta_{ij} S_{iz}$

El estado $|R\rangle$ es un eigenestado de $S_z(R)$, se analiza como actúa \mathcal{H} sobre este estado por lo que

$$S_-(R') S_+(R') |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R') S_+(R') S_-(R) |0\rangle$$

para esto se aplican los operadores de ascenso y descenso sobre el estado $|0\rangle$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R') S_+(R') S_-(R) \prod_R |S\rangle_R \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R') S_+(R') \sqrt{S(S+1) - S(S+1)} \prod_R |S-1\rangle_R \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R') S_+(R') \sqrt{2S} \prod_R |S-1\rangle_R \\
 &\quad \text{se aplica el operador de ascenso} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R') 2S \prod_R |S\rangle_R \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(R') 2S |0\rangle \\
 &= 2S |R'\rangle
 \end{aligned}$$

De manera análoga se puede encontrar que

$$\begin{aligned}
 S_z(R') |R\rangle &= S |R\rangle & R \neq R' \\
 &= (S-1) |R\rangle & R = R'
 \end{aligned}$$

Se define $E_0 = \mathcal{H} |0\rangle = -\frac{1}{2} S^2 \sum_{RR'} J(R-R') - Ng\mu_B H S$, al aplicar $\mathcal{H} |R\rangle$, con lo que se obtiene

$$\mathcal{H} |R\rangle = E_0 |R\rangle + g\mu_B H |R\rangle + S \sum_{R'} J(R-R') [|R\rangle - |R'\rangle]$$

por este motivo $|R\rangle$ no es un eigenvector de \mathcal{H} ; $\mathcal{H} |R\rangle$ es una combinación lineal de $|R\rangle$ y otros estados con un espín disminuido, por lo tanto se propone el vector $|k\rangle = \sum_R \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} |R\rangle$ que diagonaliza el Hamiltoniano de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} |k\rangle &= E_k |k\rangle \\
 E_k &= E_0 + g\mu_B H + S \sum_R J(R) (1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}})
 \end{aligned}$$

Para esto se construye $J(k) = \sum_R J(R) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ a partir de condiciones de frontera de Born-von Karman

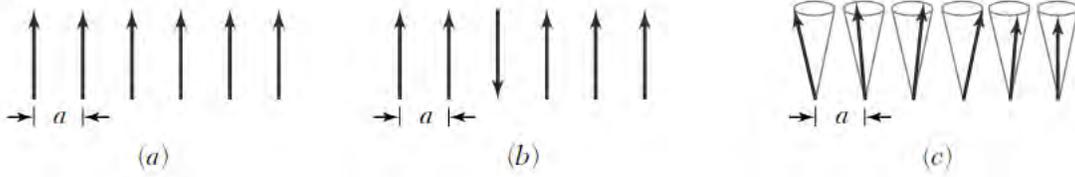
cabe mencionar que el estado $|k\rangle$ tiene valor de espín $NS - 1$. La probabilidad de encontrar una partícula con el estado $|k\rangle$ en el sitio $|R\rangle$ es $|\langle k | R \rangle|^2 = \frac{1}{N}$. Se define además la función de correlación transversal en el estado $|k\rangle$ como el valor esperado de $S_\perp(R) \cdot S_\perp(R') = S_x(R)S_x(R') + S_y(R)S_y(R')$, al evaluarlo se obtiene que

$$\langle k | S_\perp(R) \cdot S_\perp(R') | k \rangle = \frac{2S}{N} \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')) \quad (3.6)$$

esto implica la existencia de una componente transversal, perpendicular a la dirección de magnetización, cuya dimensión es de $\frac{2S}{N}$.



Figura 3.6: Ilustración de una onda de espín


 Figura 3.5: a) Estado base, con todas las partículas en su máximo estado de espín. b) Estado con un solo espín no alineado. c) Estado con precesión del espín. a es la separación entre los sitios de la red

La figura 3.5 ilustra la conclusión obtenida a partir de la ecuación 3.6, ya que el vector de onda forma un ángulo con el vector $R - R'$, esta diferencia representa las coordenadas relativas entre distintas partículas, lo que implica la precesión del espín.

La figura 3.6 nos muestra que si pudieramos ver desde arriba el estado mostrado en la figura 3.5c, observaríamos que la excitación debida al campo magnético se propaga como una onda dentro de un ferromagnético.

Las ondas de espín o magnones, siguen la estadística de Bose Einstein, la energía de los estados excitados es la suma de el numero de estados que tienen como energía $\varepsilon(k)$ lo cual se denota como $\sum \varepsilon(k)n_k$. De acuerdo con la estadística de Bose-Einstein el número medio de ocupación para bosones está dado por

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\varepsilon(k)/k_B T} - 1}$$

El espín total se reduce de su valor NS en una unidad por cada onda de espín, por lo que la magnetización a temperatura T satisface que

$$M(T) = M(0) \left[1 - \frac{1}{NS} \sum_k n(k) \right]$$

$$M(T) = M(0) \left[1 - \frac{1}{NS} \sum_k n(k) \right]$$

se cambia la suma por una integral en el espacio fase, con lo que se obtiene

$$M(T) = M(0) \left[1 - \frac{1}{h^3} \frac{V}{NS} \int \frac{d^3 p d^3 q}{e^{\varepsilon(k)/k_B T} - 1} \right]$$

con $p = \hbar k$ y dado que la integral no depende de q , se obtiene

$$M(T) = M(0) \left[1 - \frac{V}{NS} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\varepsilon(k)/k_B T} - 1} \right]$$

3.3. Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert

A temperaturas debajo de la temperatura crítica, la magnetización de equilibrio de un ferromagnético de bulto, se satura para un valor específico de cada material M_s , es decir un valor para el cual el material no puede ser magnetizado. Se dice que un ferromagneto es un estado de simetría rota, los restauradores de esta simetría son los modos de Goldstone, los cuales son ondas de espines que causan una magnetización transversal. En ferromagnetos itinerantes existen también excitaciones longitudinales, los modos de Stoner. Sin embargo como una variación macroscópica en $T \ll T_C$ requiere de mucha energía libre, se hace especial enfoque en el movimiento transversal de la magnetización dependiente de la posición $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$ con magnitud fija $|\mathbf{M}| = M_s$. [12][14]

Tradicionalmente para el estudio de la magnetización en un medio ferromagnético, se usa la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert.

Considerando la dinámica del momento angular de espín de un electrón libre bajo la acción de un campo magnético eterno dependiente del tiempo con el término de Zeeman

$$\hat{H}_s = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mathbf{H}(t), \quad (3.7)$$

De la ecuación de Schrödinger se obtiene el valor esperado del operador de espín

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{g\mu_B}{\hbar} \langle \mathbf{S}(t) \rangle \times \mathbf{B}(t) \quad (3.8)$$

Ahora se toma en cuenta la relación entre el momento angular clásico de un electrón moviéndose y el momento dipolar magnético de una espira de corriente inmersa en un campo magnético uniforme $\mathcal{M}_e = \frac{e}{2m} \mathbf{L}$. Análogamente se puede definir la magnetización $\mathcal{M} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \langle \mathbf{S} \rangle = \gamma \langle \mathbf{S} \rangle$, considerando la magnetización por unidad de volumen \mathbf{M} puede escribirse 3.8 como

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma_0 [\mathbf{M}(t) \times \mathbf{H}(t)] \quad (3.9)$$

donde $\gamma_0 = \mu_0 \mathbf{H}$, que es la ecuación de Landau-Lifshitz.

Experimentalmente se ha observado que las curvas de histéresis de sustancias ferromagnéticas, claramente muestran que más allá de ciertos valores críticos del campo magnético aplicado, el material se satura como se mencionó anteriormente, se vuelve uniforme y se alinea paralelamente con el campo magnético, para lo cual se añade el término de Gilbert, de tal modo que la ecuación de movimiento se escribe

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \left(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)$$

que es la llamada ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert, donde α es el término de amortiguamiento y es característica de cada material.

$\mathbf{H}_{eff} = A\nabla^2 \mathbf{M} - N \cdot \mathbf{M} + \mathbf{H}_{ext} + \mathbf{H}_{temp}$, que incluye las contribuciones del campo de desmagnetización, el campo de intercambio, el campo magnético aplicado y el campo debido a fluctuaciones térmicas en el ferromagnético .

Es necesario resolver la ecuación determinista, ya que por el método usado para obtener la ecuación de Fokker-Planck, que corresponde a una descripción estocástica, requiere una solución de esta ecuación diferencial, esto se lleva a cabo en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Planteamiento del sistema

Se establece la ecuación de Fokker Planck, como una extensión estocástica para para la ecuación de Landau Lifshitz Gilbert, utilizando un formalismo basado en la ecuación de Liouville desarrollado por Van Kampen[11] para ecuaciones estocásticas no lineales y se obtienen los momentos estadísticos de la magnetización, con la finalidad de estudiar el tiempo durante el cual se pueden producir las ondas de espín, para esto se resuelve la ecuación de Fokker-Planck asociada a esta ecuación dinámica, bajo ciertas aproximaciones que permiten una resolución analítica de esta situación.

4.1. Efecto espín Seebeck en uniones Ferromagnético/No magnético.

En el capítulo 1 de este trabajo se discutió el efecto Seebeck, un efecto termoeléctrico que relaciona, la aplicación de un gradiente de temperatura con la producción de una diferencia de potencial en una unión de materiales.

En el mismo capítulo se hace mención del efecto espín Seebeck, que es el objeto de estudio del presente trabajo, y la forma en que se produce en una unión F/N. Este fenómeno ha logrado atraer la atención en el campo de la espintrónica, ya que es un método para producir corrientes de espines que sustituyan a las corrientes de electrones, en las que no se considera este grado de libertad.

El efecto espín Seebeck permite que se genere una fuerza electromotriz a partir de un gradiente de temperatura, tal como ocurre en el efecto Seebeck.

Este efecto fue observado por primera vez por un grupo de investigación en una muestra de permalloy (aleación magnética de hierro y níquel), cuyas dimensiones eran del orden de milímetros, alineada con platino en sus bordes exteriores, a través de las cuales se aplicó un gradiente de temperatura, así como un campo magnético en la dirección del gradiente que se hizo circular a través de espiras de histéresis. El coeficiente de Seebeck convencional, es distinto dependiendo del espín de los electrones implicados, por lo que se origina una diferencia de potencial dentro de cada electrodo de platino proporcional al gradiente de temperatura.

En la figura 4.1 se observa la diferencia entre el efecto Seebeck, y el efecto espín Seebeck, y puede observarse que este es producido debido a la diferencia entre los potenciales electroquímicos. [2]

Tanto en el efecto Seebeck, como en el efecto espín Seebeck se considera irrelevante la participación de los electrones de conducción; sin embargo se considera que los magnones mencionados en el capítulo

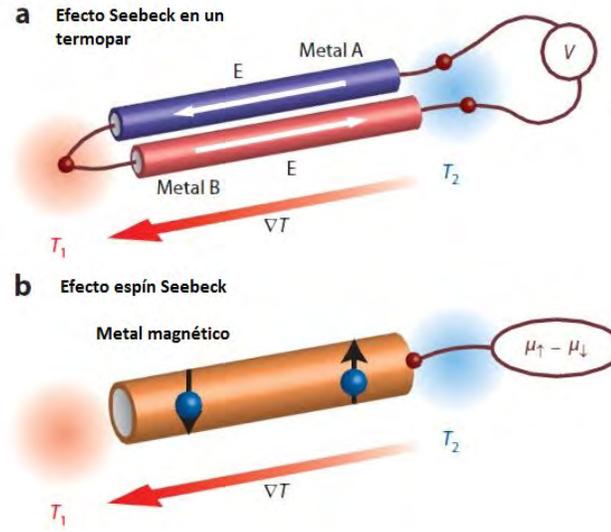


Figura 4.1: a)Efecto Seebeck b)efecto espín Seebeck

anterior, son los responsables de este fenómeno.

El efecto espín Seebeck consiste en la creación de una distribución de spines que es medida por medio del efecto spin Hall inverso, donde una corriente eléctrica es inducida por un flujo de spines debido a la polarización de estos.

El efecto espín Seebeck observado en aislantes ferromagnéticos, muestra que la corriente de spines es transportada por ondas de espín.

4.2. Ecuación de Landau Lifshitz Gilbert para el efecto espín Seebeck

Para este trabajo se propone una unión de un aislante ferromagnético y un metal normal. Una corriente de spines es generada en el metal normal, la corriente se propaga en dirección perpendicular al gradiente de temperatura. La ecuación dinámica que permite describir el comportamiento de las ondas de spines a partir de la magnetización es la ecuación de Landau Lifshitz Gilbert.

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\gamma (\bar{M} \times (\bar{H}_{eff} + \bar{H}_{temp})) + \frac{\alpha}{M_s} \left(\frac{d\bar{M}}{dt} \times \bar{M} \right) \quad (4.1)$$

Donde \bar{M} es la magnetización de la muestra \bar{H}_{eff} incluye al campo magnético aplicado, el campo debido a la desmagnetización de la muestra y el campo de intercambio debido al acoplamiento ferromagnético, M_s es la magnetización de saturación del material y α corresponde al parámetro de amortiguamiento de Gilbert. \bar{H}_{temp} incluye las fluctuaciones térmicas debidas a la magnetización del material M_s es la magnetización de saturación, que se define como el grado máximo de magnetización que puede tener un cuerpo, γ es la razón giromagnética, α es la constante de amortiguamiento.

Debido a que el YIG (Yttrium iron garnet) es uno de los materiales más estudiados con posibilidades

espintrónicas , dicho material tiene propiedades de ferromagnético cuya fórmula química es $Y_3Fe_5O_{12}$ tiene una estructura de tipo bcc , su magnetización de saturación es de $4\pi M_s = 19000\text{Oe}$. [16]

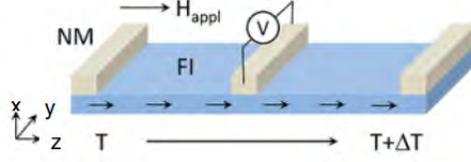


Figura 4.2: Diagrama que representa la situación descrita

Suponiendo que tal como en la figura 4.2, se tiene una muestra de YIG, en unión con platino; se aplica un campo magnético de 100 Oe , en la dirección z, en un modelo ideal bastaría resolver la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert, para conocer la forma en que se comporta la magnetización en el material ferromagnético, sin embargo, debido a otros efectos, como se mencionó en el capítulo anterior, en este modelo se debe incluir dentro de la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert, campos adicionales al campo aplicado, el campo de desmagnetización, el campo de intercambio, así como un campo magnético aleatorio, que se produce debido a fluctuaciones térmicas en el ferromagnético, dicho campo será denotado como \overline{H}_{temp} . Se realiza la suposición de que \overline{H}_{temp} cumplen con el siguiente modelo de correlación

$$\langle H_{temp}^{\mu}(t)H_{temp}^{\nu}(t-\tau) \rangle = \frac{2\alpha k_B T(\mathbf{r})}{\gamma_1 M_s V} \delta_{\mu\nu} e^{-\lambda\tau} = a \delta_{\mu\nu} e^{-\lambda\tau}$$

donde V es el volumen del ferromagnético. Nótese que esta correlación no es instantánea como la utilizada en modelos de ruido blanco, descritos mediante la ecuación de Langevin, en este caso λ y a son un parámetros que caracterizan amplitud, la escala temporal y respuesta de la función de correlación

Se considera para este análisis, que se tiene una muestra de YIG de las siguientes dimensiones, $500\mu m \times 0.1\mu m \times 0.1\mu m$,

Existen estudios realizados en que se ha considerado modelos de ruido blanco, en este caso se considera el ruido de Ornstein Uhlenbeck, el cual para λ muy grande se comporta como ruido blanco.

Sin considerar el campo de intercambio, ni el campo de desmagnetización, la ecuación 4.1 tiene como solución

$$M_x = M_0 \operatorname{sech} \left(\frac{\alpha}{M_s} \frac{\gamma M_0 H_0 t}{1 + \alpha^2 M_0^2} + \operatorname{ArcCosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right) \\ \times \cos \left(\frac{\gamma H_0 t}{1 + \alpha^2 M_0^2} + \operatorname{ArcTan} \left(\frac{M_{y0}}{M_{x0}} \right) \right)$$

$$M_y = M_0 \operatorname{sech} \left(\frac{\alpha}{M_s} \frac{\gamma M_0 H_0 t}{1 + \alpha^2 M_0^2} + \operatorname{ArcCosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right) \\ \times \sin \left(\frac{\gamma H_0 t}{1 + \alpha^2 M_0^2} + \operatorname{ArcTan} \left(\frac{M_{y0}}{M_{x0}} \right) \right)$$

$$M_z = M_0 \tanh \left(\frac{\alpha}{M_s} \frac{\gamma M_0 H_0 t}{1 + \alpha^2 M_0^2} + \text{ArcCosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right)$$

la deducción de la solución se realiza en el apéndice A

Cabe mencionar que la componente z de la magnetización no ha sido tomada en cuenta, debido a que puede ser obtenida en términos de las otras, ya que la norma de $\bar{\mathbf{M}}$ es una cantidad conservada.

Considerando el campo de desmagnetización debido a la interacción dipolo dipolo en la muestra, el campo de intercambio debido al acoplamiento ferromagnético, la ecuación diferencial, toma la forma

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = -\gamma (\bar{\mathbf{M}} \times (\bar{\mathbf{H}}_{app} - N \cdot \bar{\mathbf{M}} + A \nabla^2 \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{H}}_{temp})) + \frac{\alpha}{M_s} \left(\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} \times \bar{\mathbf{M}} \right) \quad (4.2)$$

Una solución bastante general de la Ec.(4.2) se puede obtener suponiendo que $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = g(x)\mathbf{H}(t)$ y $\mathbf{M} = g(x)\mathbf{M}(t)$ es decir suponer que ambos campos tienen la misma dependencia espacial, aunque su dependencia temporal puede ser diferente. Después de substituir directamente en la Ec.(4.2) se llega a

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \mathbf{M}(t) \times \left(\gamma_1 \mathbf{H}(t) - \gamma_1 N \cdot \mathbf{M}(t) + \gamma_2 \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right) \quad (4.3)$$

en donde hemos supuesto que $g(\mathbf{r})$, que es función de las coordenadas espaciales satisface la ecuación escalar de Helmholtz

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}) + k^2 g(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.4)$$

Se considera que el fenómeno es uniaxial, es decir, que solo una de las componentes del tensor de desmagnetización en este caso $N_{33} = 1$, por lo que los demás elementos de la diagonal son 0 para cumplir las propiedades de este tensor, que debe ser de traza 1.

De forma analoga al caso original, resuelto en el apéndice A, se propone que la solución se puede representar de forma polar

$$M_x = R(t) \text{Cos}(\theta(t))$$

$$M_y = R(t) \text{Sen}(\theta(t))$$

Donde $R(t)$ y $\theta(t)$, representan la magnitud y orientación en el plano $x - y$ de la magnetización, y cumplen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{M_s} \right) R(t) \left(\gamma H_0 \sqrt{M_0^2 - R(t)^2} - \gamma M_0^2 N_3 \right) + \gamma \left(\frac{\alpha}{M_s} \right) N_3 R(t)^3 + \left(\left(\frac{\alpha}{M_s} \right)^2 M_0^2 + 1 \right) R'(t) \\ R(t) \left(\gamma H_0 - \gamma N_3 \sqrt{M_0^2 - R(t)^2} \right) + \left(1 + \left(\frac{\alpha}{M_s} \right)^2 M_0^2 \right) \theta'(t) \end{aligned}$$

Del análisis del caso donde $N_3 = 0$ se propone $R(t) = M_0 \text{Sech}(u(t))$, con lo que se obtiene que $u(t)$ debe cumplir la ecuación diferencial

$$\frac{\alpha}{M_s} M_0 \gamma (-H_0 + M_0 N_3 \tanh(u(t))) + \left(1 + \left(\frac{\alpha}{M_s} \right)^2 M_0^2 \right) u'(t) = 0$$

llamando $\gamma_2 = \frac{\alpha}{M_s}$, se obtiene la solución de la ecuación diferencial mediante el método de separación de variables

$$\gamma_2 M_0 t = \int \frac{du}{H_0 - M_0 N_3 \tanh(u)} \quad (4.5)$$

obteniendo como solución

$$\gamma_2 M_0 t = \frac{H_0 u + M_0 N_3 \ln(H_0 \cosh(u) - M_0 N_3 \sinh(u))}{H_0^2 - M_0^2 N_3^2} + u_0$$

se impone la condición inicial de $t(u(0)) = 0$.

$$\gamma_2 M_0 t = \frac{H_0 u + M_0 N_3 \ln(\cosh(u) - \frac{M_0 N_3}{H_0} \sinh(u))}{H_0^2 - M_0^2 N_3^2}$$

La ecuación es trascendente, por lo que no es posible despejar la u en términos de t , se impone la condición sobre la norma de $M_0 = 1900$ Oe que y se realiza un ajuste de una función para encontrar la forma de la u , se realiza un ajuste de la curva obtenida para calcular la inversa de la función, con lo que se obtiene la función polinómica

$$u(t) = -1.07229 \times 10^{28} t^6 + 7.15987 \times 10^{23} t^5 - 2.01006 \times 10^{19} t^4 + 3.15213 \times 10^{14} t^3 - 3.05745 \times 10^9 t^2 + 18170.6 t \quad (4.6)$$

Se considera que

$$1 + \left(\frac{\alpha}{M_s} \right)^2 M_0^2 \approx 1$$

ya que debido a que $\alpha = 6.5 \times 10^{-5}$ para YIG, por lo tanto $\left(\frac{\alpha}{M_s} \right)^2 M_0^2 \ll 1$

Debido al comportamiento de la secante hiperbólica, las contribuciones más allá de los valores ajustados no contribuyen a la solución

Resolviendo la ecuación para $\theta(t)$ por el método de separación de variables se obtiene

$$\theta(t) = \frac{1}{1 + \alpha^2 M_0^2} \int_0^t \gamma (H_0 - N_3 M_0) \tanh(u(t)) dt + \theta_0$$

$$\theta(t) = \frac{\gamma H_0}{1 + \alpha^2 M_0^2} t - \frac{\gamma N_3 M_0}{1 + \alpha^2 M_0^2} \int_0^t \tanh(u(t)) dt + \theta_0$$

La integral no puede realizarse de manera exacta, sin embargo, la función tangente hiperbólica tiende a 1 si t es muy grande, por lo que $\tanh(u(t))$ se acerca a 1 si t es del orden de 2×10^{-7} s, por lo que la integral de esta función es t .¹

¹La integral, fue calculada numéricamente, para verificar que esta hipótesis fuera correcta, obteniendo como resultado una función que crece de manera lineal

La solución obtenida es

$$M_x = M_0 \operatorname{sech} \left(u(t) + \operatorname{ArcCosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right) \times \cos \left(\gamma t (H_0 - N_3 M_0) + \operatorname{ArcTan} \left(\frac{M_{y0}}{M_{x0}} \right) \right) \quad (4.7)$$

$$M_y = M_0 \operatorname{sech} \left(u(t) + \operatorname{ArcCosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right) \times \sin \left(\gamma t (H_0 - N_3 M_0) + \operatorname{ArcTan} \left(\frac{M_{y0}}{M_{x0}} \right) \right) \quad (4.8)$$

Con $u(t)$ la función mencionada en la ecuación 4.6.

4.3. Ecuación de Fokker-Planck para la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert

Se obtendrá la ecuación de Fokker-Planck para la ecuación de LLG a partir de la expresión de la ecuación 2.52, para lo cual se separa la parte estocástica de la ecuación 4.2, y la parte determinista de la misma. Para ello hay que recurrir a despejar las derivadas temporales de la ecuación 2.51, con la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{M}_x = & -\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(-\gamma_1 \gamma_2 H_0 M_0^2 + \gamma_1 \gamma_2 H_{x_{temp}} M_x(t)^2 - \gamma_1 H_{y_{temp}} M_z(t) + \gamma_1 \gamma_2 H_{y_{temp}} M_x(t) M_y(t) \right. \\ & + \gamma_1 \gamma_2 H_{z_{temp}} M_x(t) M_z(t) + \gamma_1 H_{z_{temp}} M_y(t) + \gamma_1 \gamma_2 H_0 M_x(t) M_z(t) + \gamma_1 H_0 M_y(t) \\ & \left. - \gamma_1 N_3 M_y(t) M_z(t) - \gamma_1 \gamma_1 M_0^2 N_3 M_x(t) + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_x(t) M_y(t)^2 + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_x(t)^3 \right) \\ \dot{M}_y = & -\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 H_{x_{temp}} M_z(t) + \gamma_1 \gamma_2 H_{x_{temp}} M_x(t) M_y(t) - \gamma_1 \gamma_2 H_{y_{temp}} M_0^2 + \gamma_1 \gamma_2 H_{y_{temp}} M_y(t)^2 \right. \\ & + \gamma_1 \gamma_2 H_{z_{temp}} M_y(t) M_z(t) - \gamma_1 H_{z_{temp}} M_x(t) + \gamma_1 \gamma_2 H_0 M_y(t) M_z(t) - \gamma_1 H_0 M_x(t) \\ & \left. + \gamma_1 N_3 M_x(t) M_z(t) - \gamma_1 \gamma_2 M_0^2 N_3 M_y(t) + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_x(t)^2 M_y(t) + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_y(t)^3 \right) \end{aligned}$$

$$\text{donde } M_z(t) = \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2}$$

separando los términos estocásticos y no estocásticos se obtiene

$$F_1^{(0)} = -\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 \gamma_2 H_0 M_x(t) M_z(t) + \gamma_1 H_0 M_y(t) - \gamma_1 N_3 M_y(t) M_z(t) - \gamma_1 \gamma_2 M_0^2 N_3 M_x(t) \right. \\ \left. + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_x(t) M_y(t)^2 + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_x(t)^3 \right) \quad (4.9)$$

$$F_2^{(0)} = -\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 \gamma_2 H_0 M_y(t) M_z(t) - \gamma_1 H_0 M_x(t) + \gamma_1 N_3 M_x(t) M_z(t) - \gamma_1 \gamma_2 M_0^2 N_3 M_y(t) \right. \\ \left. + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_x(t)^2 M_y(t) + \gamma_1 \gamma_2 N_3 M_y(t)^3 \right) \quad (4.10)$$

los términos estocásticos corresponden a

$$F_1^{(1)} = \frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 \gamma_2 H_{x_{temp}} M_0^2 - \gamma_1 \gamma_2 H_{x_{temp}} M_x(t)^2 - \gamma_1 \gamma_2 M_x(t) \left(H_{y_{temp}} M_y(t) + H_{z_{temp}} M_z(t) \right) \right. \\ \left. + \gamma_1 H_{y_{temp}} M_z(t) - \gamma_1 H_{z_{temp}} M_y(t) \right)$$

$$F_2^{(1)} = \frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 M_x(t) (H_{z_{temp}} - \gamma_2 H_{x_{temp}} M_y(t)) - \gamma_1 H_{x_{temp}} M_z(t) \gamma_1 \gamma_2 H_{y_{temp}} M_0^2 - \gamma_1 \gamma_2 H_{y_{temp}} M_y(t)^2 \right. \\ \left. - \gamma_1 \gamma_2 H_{z_{temp}} M_y(t) M_z(t) \right)$$

bajo el modelo de la ecuación 2.53 la ecuacion de Fokker Planck para este caso particular se escribe de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial M_x} (F_1^{(0)} P(M_x, M_y, t)) - \frac{\partial}{\partial M_y} (F_2^{(0)} P(M_x, M_y, t)) \\ & + \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial M_x^2} \int_0^\infty \langle F_1^{(1)}(M_x, M_y, t) F_1^{(1)}(M_x, M_y, t - \tau) \rangle P(u, t) \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial M_x \partial M_y} \int_0^\infty \langle F_1^{(1)}(M_x, M_y, t) F_2^{(1)}(M_x, M_y, t - \tau) \rangle P(u, t) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial M_x \partial M_y} \int_0^\infty \langle F_2^{(1)}(M_x, M_y, t) F_1^{(1)}(M_x, M_y, t - \tau) \rangle P(u, t) \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial M_y^2} \int_0^\infty \langle F_2^{(1)}(M_x, M_y, t) F_2^{(1)}(M_x, M_y, t - \tau) \rangle P(u, t) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación de Fokker Planck obtenida tiene la forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -f(t) \frac{\partial P}{\partial M_x} - g(t) \frac{\partial P}{\partial M_y} + h(t) \frac{\partial^2 P}{\partial M_x^2} + j(t) \frac{\partial^2 P}{\partial M_x \partial M_y} + n(t) \frac{\partial^2 P}{\partial M_y^2} \quad (4.12)$$

Donde $f(t)$ corresponde al término de la ecuación 4.9, $j(t)$ es el término de la ecuación 4.10. El término $h(t)$ corresponde al resultado de la primera integral de la ecuación 4.11, el término $h(t)$ es la suma del segundo y tercer miembros de la misma ecuación, y finalmente el término $n(t)$ corresponde al cuarto miembro.

Dado que para determinar un proceso estocástico se requiere del primer y segundo momentos, se realiza una transformada de Fourier de la ecuación 4.12 de forma que se obtiene la función generadora de momentos, que se mencionó en el capítulo 2

$$Q(k_x, k_y, t) = \int e^{(-ik_x M_x + -ik_y M_y)} P(M_x, M_y, t) dM_x dM_y$$

Realizando esta transformación sobre la ecuación 4.12 se obtiene la ecuación

$$\frac{dQ}{dt} = (ik_x f(t) + ik_y g(t) - h(t)k_x^2 - j(t)k_x k_y - n(t)k_y^2) Q, \quad (4.13)$$

la solución analítica $Q(k_x, k_y, t)$ de la ecuación 4.13 es

$$Q(k_x, k_y, t) = \exp \left(\int_0^t (ik_x f(t) + ik_y g(t) - h(t)k_x^2 - j(t)k_x k_y - n(t)k_y^2) dt \right) \quad (4.14)$$

A partir de las derivadas de la solución 4.14, con respecto a k_x y k_y , evaluadas en cero, se obtiene cada uno de los momentos estadísticos con esto se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial k_x} = -i \int e^{(-ik_x M_x + -ik_y M_y)} M_x P(M_x, M_y, t) dM_x dM_y \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_y} = -i \int e^{(-ik_x M_x + -ik_y M_y)} M_y P(M_x, M_y, t) dM_x dM_y \quad (4.16)$$

al evaluar las ecuaciones anteriores en $k_x = k_y = 0$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_x} = -i \int M_x P(M_x, M_y, t) dM_x dM_y = -i \langle M_x \rangle$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_y} = -i \int M_y P(M_x, M_y, t) dM_x dM_y = -i \langle M_y \rangle$$

derivando la expresión 4.14 se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial k_x} = \left(-i \int_0^t f(t) dt - ik_y \int_0^t j(t) dt \right) Q(k_x, k_y, t)$$

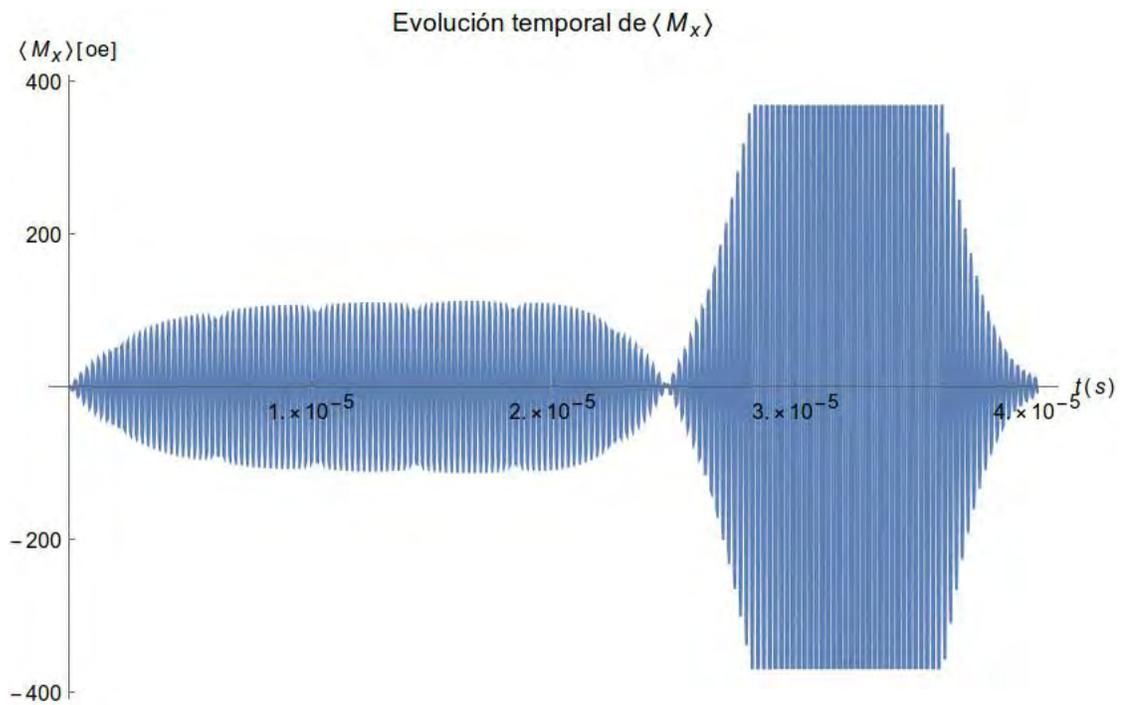
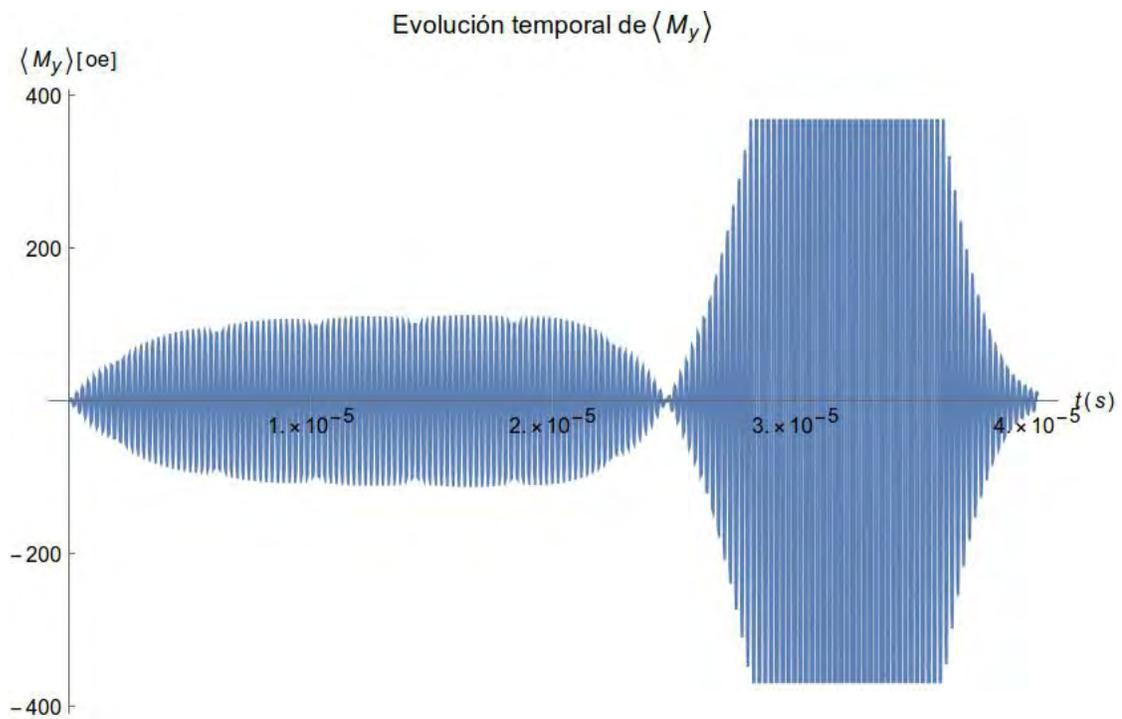
al evaluar se obtiene que el primer momento puede expresarse como

$$\langle M_x(t) \rangle = \int_0^t f(t) dt$$

de manera análoga puede obtenerse una expresión para el primer momento de la componente y que tiene la forma

$$\langle M_y(t) \rangle = \int_0^t g(t) dt$$

En la figura 4.3 y 4.4 se observa la evolución temporal del primer momento, para esto se consideran condiciones iniciales de la siguiente manera con las condiciones iniciales $M_0 = 1900$ oe, $M_{x0} = 600\sqrt{10}$ oe, $M_{y0} = 0$

Figura 4.3: Evolución temporal de $\langle M_x(t) \rangle$ Figura 4.4: Evolución temporal de $\langle M_y(t) \rangle$

Dada la forma de los términos no estocásticos, la integral se realizó de manera numérica, ya que

no existe expresión analítica para ellas.

El segundo momento puede obtenerse a partir de las integrales de los términos estocásticos, en los cuadros (4.1), (4.2), (4.3) se muestran los resultados obtenidos para estas integrales, cabe mencionar que también fueron obtenidas de forma numérica

Coefficientes de la ecuación de Fokker-Planck

$\lambda \left[\frac{1}{s} \right]$	$h(t)$	
1	$3.4760 \times 10^{14}a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
100	$3.4292 \times 10^{14}a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
10000000	$1.44372 \times 10^{11}a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^9	1.49654×10^9a	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^{15}	$1497a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^{20}	$0.01497a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$

Cuadro 4.1: $h(t)$ para distintos valores de λ

$\lambda \left[\frac{1}{s} \right]$	$j(t)$
1	$-1062.97a \text{sech} \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
100	$-952.821a \text{sech} \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
10000000	$-1.11254 \times 10^7 a \text{sech} \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^9	$1.07071 \times 10^9 a \text{sech} \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^{15}	$28404a \text{sech} \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^{20}	$0.28404a \text{sech} \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$

Cuadro 4.2: $j(t)$ para distintos valores de λ

$\lambda \left[\frac{1}{s} \right]$	$n(t)$	
1	$3.4760 \times 10^{14}a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
100	$3.4292 \times 10^{14}a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
10000000	$1.44372 \times 10^{11}a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^9	1.49654×10^9a	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^{15}	$1497a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$
1×10^{20}	$0.01497a$	$\tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right)$

Cuadro 4.3: $n(t)$ para distintos valores de λ

Los segundos momentos pueden obtenerse mediante las segundas derivadas de la función Q , de la siguiente manera

$$\left. \frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} \right|_{k_x=k_y=0} = - \int e^{(-ik_x M_x + -ik_y M_y)} M_x^2 P(M_x, M_y, t) dM_x dM_y \Big|_{k_x=k_y=0} = - \langle M_x^2 \rangle$$

de manera análoga al caso del primer momento se tiene que

$$\left. \frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} \right|_{k_x=k_y=0} = -2 \int_0^t h(t) dt - \left(\int_0^t f(t) dt \right)$$

por lo que se obtiene que el segundo momento tiene la forma

$$\langle M_x^2 \rangle = 2 \int_0^t h(t) dt + \left(\int_0^t f(t) dt \right)$$

En este caso la varianza es quien provee información más interesante, por lo que

$$\sigma_{M_x}^2 = \langle M_x^2 \rangle - \langle M_x \rangle^2 = 2 \int_0^t h(t) dt$$

Análogamente se puede obtener una expresión para el caso de M_y , con lo que se obtiene que

$$\sigma_{M_y}^2 = \langle M_y^2 \rangle - \langle M_y \rangle^2 = 2 \int_0^t n(t) dt$$

De forma general $h(t)$ y $n(t)$ pueden escribirse como $k \left| \tanh \left(u + \text{ArcCosh} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right|$, la integral de esta función, para tiempos cortos es la curva representada en la siguiente gráfica, a la cual se ajusta una función polinómica

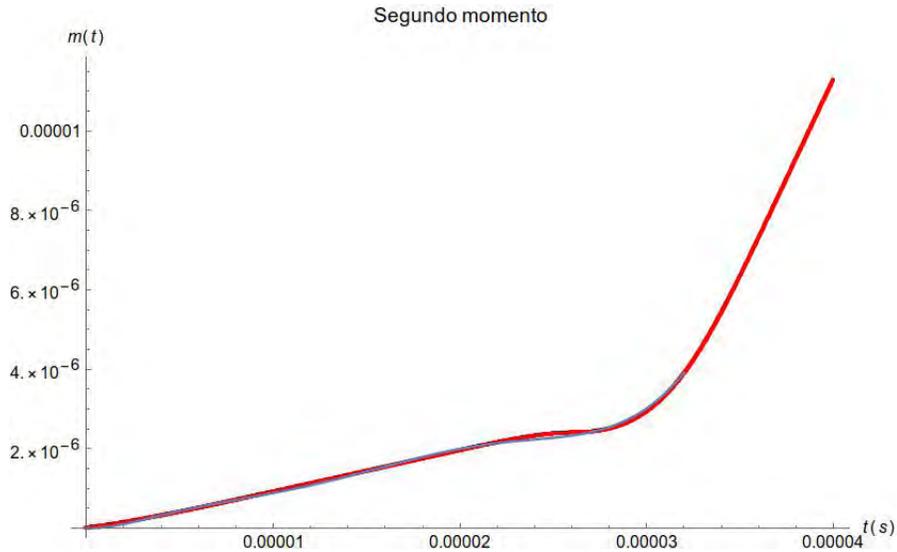


Figura 4.5: Gráfica de la forma general del segundo momento

La función ajustada se muestra en la figura 4.5 en azul, mientras que en color rojo se muestra la forma general. La función polinómica ajustada tiene la forma

$$m(t) = -3.10062 \times 10^{31}t^8 - 2.30111 \times 10^{27}t^7 + 5.77334 \times 10^{23}t^6 - 3.15115 \times 10^{19}t^5 + 7.62221 \times 10^{14}t^4 - 9.04747 \times 10^9t^3 + 51169.4t^2 - 0.0211216t$$

este ajuste solo es válido para tiempos cortos, para tiempos largos, tomando en cuenta el comportamiento de la función tangente hiperbólica, para tiempos grandes, en este caso mayores a 3.5×10^{-5} s toma valores muy cercanos a 1, por lo que en este caso la integral sería $m(t) = t$, lo que significa, que para tiempos grandes, la varianza coincide con la que se calcula para el problema del caminante al azar.

Para encontrar la relación entre la temperatura de la muestra y el segundo momento, se supone que la temperatura varía linealmente en la muestra en la dirección z , la temperatura va de 100 a 110 Kelvin de manera lineal. Con esto la temperatura en cualquier parte de la celda, puede expresarse como

$$T(z) = 100 + 2 \times 10^2 z$$

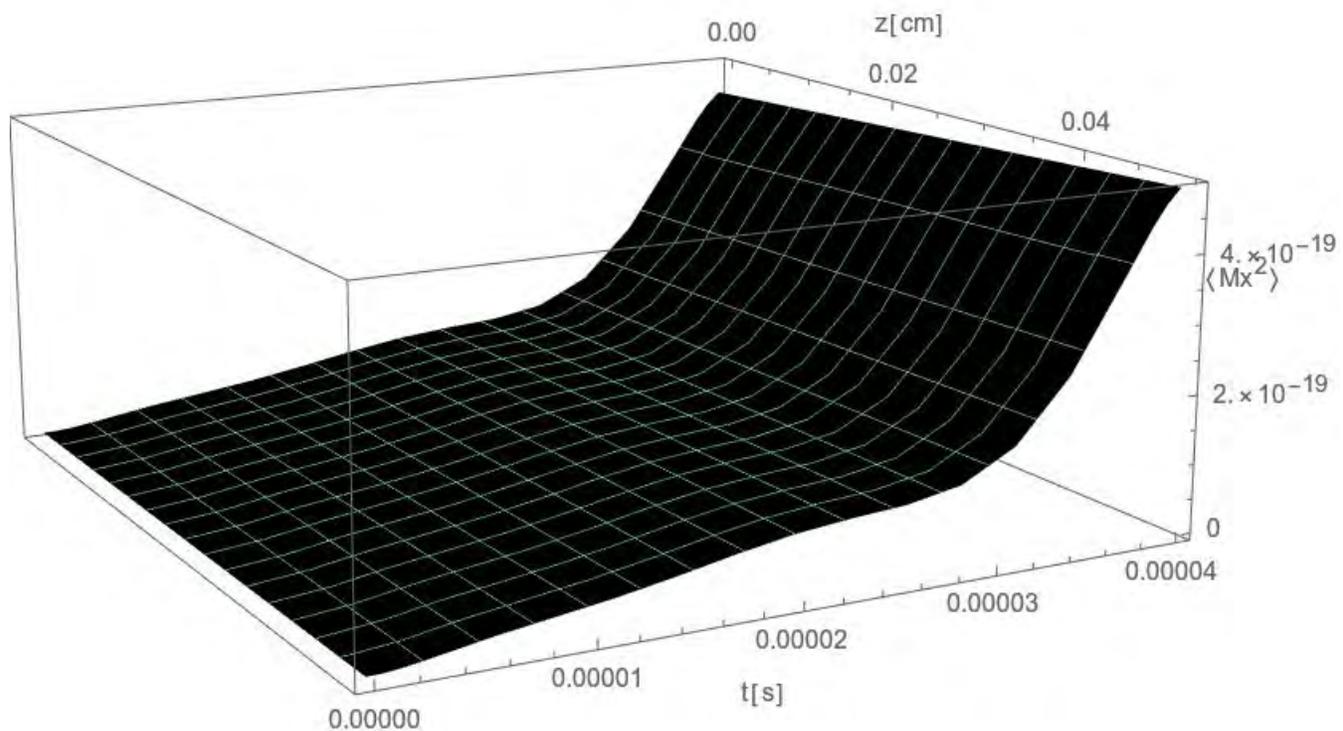


Figura 4.6: Superficie de variación del segundo momento

El volumen de la muestra es de $5 \mu\text{m}^3$, el segundo momento se observa en la figura 4.6

Se están usando unidades en el sistema cgs, se muestra la gráfica para el valor de $\lambda = 1 \times 10^{15}$, en el caso de λ distintas, el valor obtenido es proporcional.

En la figura 4.6 se puede observar que dado que con el aumento de z la temperatura de la muestra es mayor, esto implica que la magnitud del segundo momento aumenta de manera lineal en esa dirección, dado el comportamiento supuesto para la temperatura en la muestra, lo que significa que mientras más grande sea la diferencia de temperatura en los bordes habrá una mayor varianza.

Conclusiones

En este trabajo se formuló una descripción estocástica para el efecto espín Seebeck, basada en un formalismo basado por Van Kampen, para ecuaciones estocásticas no lineales, a partir de una solución para la ecuación determinista que gobierna el fenómeno. Para este análisis se consideró que la muestra usada es de un ferromagnético llamado YIG, en unión con platino, en este caso se estudió como se comporta la magnetización en el tiempo, con la finalidad de encontrar cuanto tiempo puede estar magnetizado el ferromagnético, bajo los efectos de ruido térmico. Las ondas de espín producidas en la muestra están relacionadas con la magnetización, como se mencionó en el capítulo 3 de este trabajo. Para construir la ecuación de Fokker-Planck, se consideró un modelo de correlación entre el ruido a distintos tiempos de Ornstein-Uhlenbeck, que a diferencia del ruido blanco Gaussiano, no considera que el tiempo de correlación es instantáneo.

Al comparar la solución sin introducir el campo de desmagnetización con la solución del problema completo, se puede notar que el efecto de la desmagnetización es disminuir la velocidad de oscilación de las componentes de la magnetización. Cabe mencionar que en el caso más sencillo, las funciones que se obtienen se pueden integrar analíticamente, no así en el caso del problema completo.

Para aplicar el método mencionado en el trabajo, es necesario siempre obtener una solución para la ecuación determinista, lo cual requiere en este caso siempre iniciar sin el término de ruido,

Mediante la obtención de los momentos estadísticos asociados a cada componente de la magnetización, el proceso estocástico queda completamente determinado a partir de la ecuación de Fokker-Planck.

La evolución temporal de los segundos momentos estadísticos aumenta de manera lineal en el tiempo, para tiempos grandes, coincidiendo con el problema del caminante al azar, sin embargo para tiempos cortos, que son tiempos del orden en que la magnetización de la muestra tarda en caer, el segundo momento tiene la forma de una constante multiplicado por una función polinómica; sin embargo, se observa que con el aumento del parámetro λ disminuye la magnitud del segundo momento, dado la forma en que se propuso amplitud de la correlación, esta aumentará conforme aumente la temperatura en la muestra, cabe mencionar que teóricamente el modelo de correlación utilizado, bajo ciertas condiciones se aproxima al modelo de ruido blanco Gaussiano.

De acuerdo con las gráficas se observa que el valor promedio de la magnetización es cercano a 0 para tiempos del orden de 5×10^{-4} s, lo que significa que para ese tiempo, el proceso llegó al equilibrio termodinámico. Si la magnetización se disipa, no pueden crearse ondas de espín, ya que estas dependen de que exista una magnetización distinta de 0 para viajar en el medio.

Aun quedan respuestas abiertas en este problema, ya que como se pudo apreciar, el problema tuvo solución dadas algunas hipótesis que lo simplificaron, sin embargo, la ventaja que tiene frente a otros métodos usados, es que considera un ruido de correlación más realista, ya que muchos análisis han sido realizados bajo la hipótesis de ruido blanco Gaussiano.

Apéndice A

Resolución de la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert

Se resolverá en este apéndice la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert, la cual como se mencionó en la sección 4 tiene la forma

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\gamma\bar{M} \times \bar{H} + \frac{\alpha}{M_s} \left(\frac{d\bar{M}}{dt} \times \bar{M} \right) \quad (\text{A.1})$$

donde \bar{M} es la magnetización de la muestra, \bar{H} es un campo magnético externo al sistema analizado; en general la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert describe materiales ferromagnéticos, M_s denota la magnetización de saturación del material y α corresponde al parámetro de amortiguamiento de Gilbert.

lo primero que se puede notar de esta ecuación es que si se realiza el producto punto con \bar{M}

$$\begin{aligned} \bar{M} \cdot \frac{d\bar{M}}{dt} &= -\gamma\bar{M} \cdot (\bar{M} \times \bar{H}) + \frac{\alpha}{M_s} \bar{M} \cdot \left(\frac{d\bar{M}}{dt} \times \bar{M} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{d|\bar{M}|^2}{dt} &= -\gamma\bar{H} \cdot (\bar{M} \times \bar{M}) + \frac{\alpha}{M_s} \frac{d\bar{M}}{dt} \cdot (\bar{M} \times \bar{M}) = 0 \end{aligned}$$

de la última expresión se puede observar que la norma de la magnetización es una cantidad conservada, por lo que se puede expresar en este caso la componente z se puede expresar en términos de las otras, ya que si M_0 es la norma del vector de Magnetización

$$M_0 = \sqrt{M_0^2 - M_x^2(t) - M_y^2(t)}$$

como se demostró que la norma es una cantidad conservada

$$M_z(t) = \sqrt{M_0^2 - M_x^2(t) - M_y^2(t)}$$

Se considera que el campo magnético sólo actúa en la dirección z y se renombra $\gamma_2 = \frac{\alpha}{M_s}$
Por componentes la ecuación A.1 tiene la forma

$$\gamma_1 H_0 M_y(t) + M'_x(t) - \gamma_2 (M_y(t) M_z'(t) - M_z(t) M_y'(t)) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$M'_y(t) - \gamma_1 H_0 M_x(t) - \gamma_2 (M_z(t) M'_x(t) - M_x(t) M'_z(t)) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$M'_z(t) - \gamma_2 (M_x(t) M'_y(t) - M_y(t) M'_x(t)) = 0 \quad (\text{A.4})$$

De la ecuación A.4 se obtiene mediante un despeje directo la expresión para $M'_z(t)$ con lo que fácilmente puede verse que

$$M'_z(t) = \gamma_2 (M_x(t) M'_y(t) - M_y(t) M'_x(t))$$

sustituyendo esta expresión en las ecuaciones A.2 y A.3 pueden obtenerse expresiones para las derivadas de $M_x(t)$ y $M_y(t)$ dichas expresiones son

$$M'_x(t) = -\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 \gamma_2 H_0 M_x(t) \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2} + \gamma_1 H_0 M_y(t) \right) \quad (\text{A.5})$$

$$M'_y(t) = -\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \left(\gamma_1 \gamma_2 H_0 M_y(t) \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2} - \gamma_1 H_0 M_x(t) \right) \quad (\text{A.6})$$

Se propone una solución de la forma $M_x = R(t) \cos \theta$ y $M_y = R(t) \sin \theta$, realizando este cambio de coordenadas polares se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} & \left(R(t) (\gamma_1 H_0 (\gamma_2 \sqrt{M_0^2 - R(t)^2} \cos(\theta(t)) + \sin(\theta(t))) - (1 + \gamma_2^2 M_0^2) \theta'(t) \sin(\theta(t))) \right. \\ & \left. + (1 + \gamma_2^2 M_0^2) R'(t) \cos(\theta(t)) \right) = 0 \\ \frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} & \left(R(t) (\gamma_1 H_0 (\gamma_2 \sqrt{M_0^2 - R(t)^2} \sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t))) + (1 + \gamma_2^2 M_0^2) \theta'(t) \cos(\theta(t))) \right. \\ & \left. + (1 + \gamma_2^2 M_0^2) R'(t) \sin(\theta(t)) \right) = 0 \end{aligned}$$

Se pueden reagrupar los términos aprovechando la ortogonalidad del seno y coseno, de lo que se obtiene el sistema

$$\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \gamma_1 \gamma_2 H_0 R(t) \sqrt{M_0^2 - R(t)^2} + R'(t) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{1 + \gamma_2^2 M_0^2} \gamma_1 H_0 R(t) - R(t) \theta'(t) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Tomando la ecuación A.7 se obtiene que la solución es $R(t) = M_0 \operatorname{sech} \left(\frac{H_0 \gamma_1 \gamma_2}{1 + M_0^2 \gamma_2^2} t + B \right)$, a partir de la ecuación A.8 se obtiene la solución como

$$M_x = M_0 \operatorname{sech} \left(\frac{M_0 H_0 \gamma_1 \gamma_2 t}{1 + M_0^2 \gamma_2^2} + \operatorname{Arccosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right) \cos \left(\frac{\gamma_1 H_0 t}{1 + M_0^2 \gamma_2^2} + \operatorname{ArcTan} \left(\frac{M_{0y}}{M_{0x}} \right) \right)$$

$$M_y = M_0 \operatorname{sech} \left(\frac{M_0 H_0 \gamma_1 \gamma_2 t}{1 + M_0^2 \gamma_2^2} + \operatorname{Arccosh} \left(\frac{M_0}{\sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2}} \right) \right) \sin \left(\frac{\gamma_1 H_0 t}{1 + M_0^2 \gamma_2^2} + \operatorname{ArcTan} \left(\frac{M_{0y}}{M_{0x}} \right) \right)$$

Apéndice B

Cálculo de los coeficientes de la ecuación de Fokker-Planck

Para encontrar la ecuación de Fokker-Planck es necesario realizar las siguientes integrales.

$$\int_0^\infty \langle F_1^{(1)}(M_x(t), M_y(t), t) F_1^{(1)}(M_x(-\tau), M_y(-\tau), t - \tau) \rangle P(u, t) \quad (\text{B.1})$$

$$\int_0^\infty \langle F_1^{(1)}(M_x(t), M_y(t), t) F_2^{(1)}(M_x(-\tau), M_y(-\tau), t - \tau) \rangle P(u, t) \quad (\text{B.2})$$

$$\int_0^\infty \langle F_2^{(1)}(M_x(t), M_y(t), t) F_1^{(1)}(M_x(-\tau), M_y(-\tau), t - \tau) \rangle P(u, t) \quad (\text{B.3})$$

$$\int_0^\infty \langle F_2^{(1)}(M_x(t), M_y(t), t) F_2^{(1)}(M_x(-\tau), M_y(-\tau), t - \tau) \rangle P(u, t) \quad (\text{B.4})$$

recordando que se usa un modelo de correlación de la forma

$$\langle H_{temp}^\mu(t) H_{temp}^\nu(t - \tau) \rangle = \frac{2\alpha k_B T(\mathbf{r})}{\gamma_1 M_s V} \delta_{\mu\nu} e^{-\lambda\tau} = a \delta_{\mu\nu} e^{-\lambda\tau}$$

a partir del producto de los términos estocásticos las integrales a realizar son para el caso de B.1

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(a\gamma_1^2\gamma_2^2 M_0^4 e^{-\lambda\tau} - a\gamma_1^2\gamma_2^2 M_0^2 e^{-\lambda\tau} M_x(-\tau)^2 \right. \\ & + a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(t) M_x(-\tau) \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2} \sqrt{M_0^2 - M_x(-\tau)^2 - M_y(-\tau)^2} \\ & - a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(-\tau) M_y(-\tau) \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2} \\ & + a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(t) M_y(-\tau) \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2} \\ & - a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(t) M_y(t) \sqrt{M_0^2 - M_x(-\tau)^2 - M_y(-\tau)^2} \\ & + a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(-\tau) M_y(t) \sqrt{M_0^2 - M_x(-\tau)^2 - M_y(-\tau)^2} \\ & + a\gamma_1^2 e^{-\lambda\tau} \sqrt{M_0^2 - M_x(t)^2 - M_y(t)^2} \sqrt{M_0^2 - M_x(-\tau)^2 - M_y(-\tau)^2} \\ & - a\gamma_1^2\gamma_2^2 M_0^2 e^{-\lambda\tau} M_x(t)^2 + a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(t) M_x(-\tau) M_y(t) M_y(-\tau) \\ & \left. + a\gamma_1^2\gamma_2^2 e^{-\lambda\tau} M_x(t)^2 M_x(-\tau)^2 + a\gamma_1^2 e^{-\lambda\tau} M_y(t) M_y(-\tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

Se desprecian los términos de orden γ_2 con lo que la integral que se debe realizar tiene la forma

$$f(t) = \int_0^\infty \left(e^{-\lambda\tau} \left(2.84441 \times 10^{19} a \tanh \left(u(-\tau) - \cosh^{-1} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \tanh \left(u(t) + \cosh^{-1} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right) \right) d\tau$$

dicha integral no tiene solución exacta, por lo que se realizó de manera numérica.

Para el caso del termino B.2 y B.3 se procede de forma análoga, por conveniencia estas dos integrales fueron sumadas, para obtener una integral más simple, de nuevo los términos que tienen γ_2 son despreciables, por lo que la integral a realizar es

$$j(t) = - \int_0^\infty \left(a\gamma_1^2 e^{-\lambda\tau} \cos(5.0526 \times 10^9 \tau) \operatorname{sech} \left(u(-\tau) - \cosh^{-1} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right. \\ \left. \times \sin(5.0526 \times 10^9 \tau) \operatorname{sech} \left(u(t) + \cosh^{-1} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right) d\tau$$

Finalmente para término B.4, la integral a realizar habiendo despreciado los términos con γ_2

$$n(t) = \int_0^\infty \left(e^{-\lambda\tau} \left(2.84441 \times 10^{19} a \tanh \left(u(-\tau) - \cosh^{-1} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \tanh \left(u(t) + \cosh^{-1} \left(\frac{19}{6\sqrt{10}} \right) \right) \right) \right) d\tau$$

Bibliografía

- [1] K.K. nielsen et al. A. Smith. The demagnetizing field of a nonuniform rectangular prism. *Journal of applied Physics*, 2010.
- [2] Hiroto Adachi, Ken ichi Uchida, Eiji Saitoh, and Sadamichi Maekawa. Theory of the spin seebeck effect. *Reports on Progress in Physics*, 76(3), 2013.
- [3] R. E. Camley and J. Barnas. Theory of giant magnetoresistance, layered structures with antiferromagnetic coupling. *Physical Review Letters*, 63, 1989.
- [4] J. Crank. *The mathematics of diffusion*. Clarendon Press, 1975.
- [5] Anil Prabhakar Daniel D. Stancil. *Spin Waves Theory and applications*. Springer, 2009.
- [6] Jaroslav Fabian and A. Matos-Abiague et al. Semiconductor spintronics. *Acta Physica Slovaca*, 57:565, 2007.
- [7] J. L. Garcia-Palacios. Introduction to the theory of stochastic processes and brownian motion problems. *eprint arXiv:cond-mat/0701242*, 2007.
- [8] J. B. Goodenough. *Magnetism and the chemical bond*. Interscience Publishers, 1966.
- [9] Ramiro Betancourt Grajales. *Fenomenos de transporte, un curso introductorio*. Facultad de Ingeniería y arquitectura, Universidad Nacional de Colombia, 1991.
- [10] John F. Gregg. Spintronics, a growing science. *Nature Materials*, 6, 2007.
- [11] N.G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Elsevier science, 1992.
- [12] M. Lakshmanan. Fascinating world of landau-lifshitz-gilbert equation: An overview. *Phil Trans R. Soc*, 2011.
- [13] Igor Lashkevych, Carlos Cortés, and Yuri G. Gurevic. Physics of thermoelectric cooling. 105, 2008.
- [14] Chein-Shan Liu, Kuo-Ching Chen, and Chau-Shioung Yeh. A mathematical revision of the landaulishitz equation. 17, 2009.
- [15] Jagadeesh S Moodera and Patrick Leclair. A quantum leap. *Nature Materials*, 2, 2003.
- [16] Jun-ichiro Ohe, Hiroto Adachi, Saburo Takahashi, and Sadamichi Maekawa. Numerical study on the spin seebeck effect. *Phys. Rev. B*, 2011.

- [17] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. *Phys. Rev.*, 37, 1931.
- [18] Billingsley Patrick. *Probability and measure*. John Wiley & sons inc, 2012.
- [19] Coehorn R. Giant magnetoresistance and magnetic interactions in exchange-biased spin valves. *Handbook of magnetic materials*, 15, 2003.
- [20] L. E. Reichl. *A modern Course in Statistical Physics*. John Wiley & sons inc, 1998.
- [21] Luis Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. Prentice Hall, México D.F., 2012.
- [22] Andrei N. Slavin Sergej O. Demokritov. *Magnonics, from fundamentals to applications*. Springer, 2013.
- [23] Chikazumi Soshin. *Physics of ferromagnetism*. Oxford University Press, 1997.
- [24] K. Uchida, T. Ota, K. Harii, S. Takahashi, S. Maekawa, Y. Fujikawa, and E. Saitoh. Spin seebeck effects in Ni₈₁Fe₁₉ /pt films. 150, 2010.
- [25] K. Uchida, S. Takahashi, Jieda, K Harii, K. Ikeda, W. Koshibae, and S. Maekawa. Phenomenological analysis for spin-seebeck effect in metallic magnets. 105, 2009.
- [26] V. M. Novotortsev V. A. Ivanov, T.G. Aminov and V. T. Kalinnikov. Spintronics and spintronics materials. 53:2357–2405, 2004.
- [27] N. Mermin W. Ashcroft. *Solid State physics*. Brooks Cole, 1976.
- [28] Alan J. Weir. *General integration and measure*. Cambridge University Press, New York, U.S.A., 1974.