



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
FACULTAD DE CIENCIAS
MATERIALES ELECTRÓNICOS

MODIFICACIÓN DEL BAND-GAP DE UN CRISTAL FOTÓNICO
UNIDIMENSIONAL SOMETIDO A PRESIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:
ALEJANDRO SÁNCHEZ CERVANTES

TUTORA
DRA. SUSANA OROZCO SEGOVIA
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. VICENTA SÁNCHEZ MORALES
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DR. GERARDO JORGE VAZQUÉZ FONSECA
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CU UNAM, DICIEMBRE DEL 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico esta tesis a mis padres, cuyo arduo trabajo y apoyo me permitió llegar a estas instancias.

También dedico este trabajo a todas las personas que, directa o indirectamente, participaron en el conjunto de sucesos que convergieron en esta tesis, dado que no es sólo resultado de mi esfuerzo y dedicación sino que dependió de las situaciones y oportunidades que se me presentaron, y en cada una de éstas estuvo mucha gente involucrada.

Esta tesis fue auspiciada por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica PAPIIT: IN117014-3, DGAPA, UNAM.

Agradezco eufóricamente a Susana Orozco Segovia por su labor docente conmigo, la cual trascendió su deber e incluso pudo superar litigios. Estoy en deuda por brindarme su comprensión y por haber compartido conmigo su calidad humana.

Mi más sincero agradecimiento a Andrés V. Porta Contreras, uno de mis mejores profesores de la licenciatura en Física, quien siempre me brindó su asesoría, apoyo y amabilidad. No creo poder olvidar mi insistencia con él ni mi capacidad para molestarlo en algunas ocasiones, algo que parecía imposible. En verdad, gracias.

Por último, pero no menos importante, me satisface expresar mi agradecimiento a Fermín A. Viniegra Heberlein. El mejor profesor que he tenido. Es innegable que mi encuentro con él durante mis estudios de doctorado me dio la capacidad de llegar a estas instancias. En mi memoria quedan cada una de sus clases y en mi biblioteca siempre ocuparán un lugar especial sus libros.

Alejandro Sánchez Cervantes

CU UNAM, Cd. Mx., México, diciembre del 2016

CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	7
PARTE I. PLANTAMIENTO DEL PROBLEMA Y TEORÍA	
1. Introducción.	
1.1 Algo de historia.	11
1.2 Antecedentes y Planteamiento del problema.	14
1.3 Objetivo y relevancia.	18
2. Electromagnetismo en materiales.	
2.1 Ecuaciones de Maxwell macroscópicas de materiales.	19
2.2 Campos electromagnéticos y problema de eigenvalores.	21
2.3 Problema de eigenvalores con el vector $\vec{H}(\vec{r})$.	23
2.4 Invariancia en la escala espacial de las ecuaciones de Maxwell.	28
2.5 Anisotropía en la respuesta eléctrica de un material y tensor de índices de refracción.	29
3. Simetrías de sólidos y Electromagnetismo.	
3.1 Simetrías de sólidos.	33
3.2 Simetría de traslación continua y discreta.	36
3.3 Simetría de inversión espacial y temporal.	37
4. Cristales fotónicos unidimensionales.	
4.1 Lámina de sólido dieléctrico isótropo y homogéneo.	41
4.2 Cristal fotónico unidimensional.	43
4.3 Origen físico de las brechas.	45
4.4 El tamaño de la brecha.	46
4.5 Las brechas y los modos evanescentes.	47
4.6 Láminas defecto y modos defecto.	48
4.7 Teoría de pequeñas perturbaciones.	51
5. Sólidos deformables en régimen elástico lineal, ley de Hooke generalizada y efecto elasto- óptico.	
5.1 Cinemática de sólidos deformables.	57
5.2 Vectores de desplazamiento y campo de desplazamiento.	60
5.3 Tensores de deformación.	62
5.4 Fuerzas externas, campo de tensión de un sólido deformable y tensor de esfuerzos.	64

5.5 Teoría de la elasticidad lineal.	67
5.6 Efecto elasto-óptico.	69

PARTE II. DESARROLLO, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6. Cristal fotónico unidimensional sometido a presión.	
6.1 Presión hidrostática.	78
6.2 Presión localizada.	83

PARTE III. CONCLUSIONES Y REFERENCIAS

7. Conclusiones.	105
8. Referencias.	107

APÉNDICE A. SISTEMAS LINEALES	A1
-------------------------------	----

APÉNDICE B. COEFICIENTES DE SÓLIDOS ELÁSTICOS ISOTROPOS	B1
---	----

RESUMEN

El objetivo de este trabajo de tesis es hacer un estudio teórico del cambio en el espectro de frecuencias permitidas de un cristal fotónico unidimensional formado de dos láminas de material dieléctrico, alternadas y en arreglo periódico, al ser sometido a una presión de tipo hidrostático y a una presión localizada, considerando incidencia normal de las electromagnéticas sobre las láminas del cristal. Para el caso de presión hidrostática, se propone un modelo teórico del problema que está basado en la teoría de eigenvalores del vector de intensidad magnética y en la teoría elasto-óptica. Dada la simetría de traslación discreta del cristal, las eigenfunciones se desarrollan en series de Fourier. Los resultados muestran que la brecha de frecuencias prohibidas tiende a mayores frecuencias conforme se incrementa la presión hidrostática; y que existe una variación en el ancho de la brecha de frecuencias prohibidas que depende de las propiedades mecánicas de las láminas del cristal. Para el caso de presión localizada, la teoría de pequeñas perturbaciones se utiliza para incluir los defectos en la estructura cristalina que son causados por este tipo de presión. Se construye el espectro de frecuencias permitidas del cristal con defectos, el cual incluye a los denominados modos defecto, frecuencias asociadas a ondas electromagnéticas que concentran gran parte de su energía de campo eléctrico en las inmediaciones de los defectos. Los resultados indican que si la presión se aplica sobre una sola de las láminas del cristal, entonces, un solo modo defecto aparece en el espectro de frecuencias permitidas y se localiza dentro de la brecha de frecuencias prohibidas, entre la primera banda y la segunda banda, y cercano a la primera banda. Conforme aumenta la presión localizada sobre la lámina, la frecuencia del modo defecto aumenta y se aleja de la primera banda. Además, el modelo se utiliza para hacer una demostración del hecho de que los modos defecto más cercanos al centro de la brecha están más localizados en el cristal.

ABSTRACT

The object of this thesis is to make a theoretical study of the change in the frequency spectrum of a one-dimensional photonic crystal formed of two layers of dielectric material, alternating and periodic arrangement, when subjected to a pressure of hydrostatic type and one localized pressure, considering normal incidence of the electromagnetic waves on the crystal layers. In the case of hydrostatic pressure, a theoretical model of the problem based on the theory of eigenvalues for magnetic intensity vector and the elasto-optical theory is proposed. Given the discrete translational symmetry of the crystal, the eigenfunctions are developed in Fourier series. The results show that the forbidden frequencies gap tends to higher frequencies when the hydrostatic pressure increases; and there is variation in the width of the forbidden frequencies gap that depends on mechanical properties of the crystal layers. In the case of localized pressure, the theory of perturbations is used to include defects in the crystal structure are caused by this type of pressure. The frequency spectrum of the crystal with defects, which includes so-called defect modes (frequencies associated with electromagnetic waves that concentrate most of electric field energy in the vicinity of the defects), is constructed. The results indicate that if pressure is applied on one of the crystal layers, then a single defect mode appears in the frequency spectrum and is located within the forbidden frequencies gap between the first band and the second band, and close to the first band. If localized pressure on the layer increases, then the frequency of defect mode increases and tends to higher frequencies. In addition, the model is used to make a

demonstration of the fact that the defect modes closest to the gap center are more localized in the crystal.

PARTE I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y TEORÍA

Capítulo 1

Introducción

1.1 Algo de historia.

El desarrollo científico y tecnológico de la Fotónica es impresionante. Desde sus orígenes, en la década de los sesenta del siglo pasado, se ha enfrentado al reto de la emisión y detección de fotones por medio de láseres, diodos emisores de luz y fototransistores; y al problema del control y guiado de luz con cristales fotónicos y guías de onda. Y en las últimas décadas, nuevas fronteras han sido exploradas como la ingeniería de materiales a nivel de nano-estructuras para modificar la emisión espontánea y el scattering (esparcimiento) de los fotones dentro de éstos, y la creación de novedosos dispositivos opto- electrónicos [1, 2].

Los problemas del control y guiado de luz por materiales fueron investigados mucho antes del nacimiento de la Fotónica. Lord Rayleigh, en 1887, publicó un artículo sobre la propagación de la luz en una serie de rebanadas alternadas de dos materiales con diferentes permitividades eléctricas [3]. Sin embargo, fue hasta la invención del láser y la viabilidad de producir ondas electromagnéticas monocromáticas que se obtuvo una verdadera revolución en la solución de estos problemas.

En referencia al guiado de luz, las fibras ópticas fueron el resultado de numerosos estudios y son, a día de hoy, el objeto de desarrollo central de las telecomunicaciones modernas. Por otro lado, en las últimas décadas, las fibras ópticas se han utilizado como elemento principal en sensores de cantidades físicas como, por ejemplo, temperatura, presión, campos eléctricos, etc.; en los cuales son más importantes la “robustez” y la capacidad para guiar ondas electromagnéticas¹ de las fibras, que su capacidad de guiar por largas distancias con poca atenuación [4, 5].

En cuanto al control de luz, los cristales fotónicos², como el que estudió Rayleigh en 1877, han sido el elemento central de desarrollo científico y tecnológico. Una clase de cristales fotónicos son aquellos con estructura periódica macroscópica³ constituida por materiales con diferentes propiedades físicas, por ejemplo, permitividad, permeabilidad, conductividad, elasticidad, etc. Este tipo de cristales tiene brechas de banda en el espectro de frecuencias de las ondas

¹ Las frecuencias de las ondas electromagnéticas que pueden viajar por una fibra óptica dependen de su estructura y material, pero en general van desde el infrarrojo cercano hasta el ultravioleta cercano.

² Se les denomina así por su analogía con los sólidos cristalinos cuya estructura periódica es a nivel molecular.

³ Esto incluye longitudes desde los 10 nm.

electromagnéticas que pueden viajar a lo largo de una dirección en el cristal. Además, la ruptura⁴ de la periodicidad causa que algunas frecuencias adicionales, que antes de la ruptura estaban prohibidas, sean permitidas; obteniéndose un análogo a los semiconductores dopados. Otro tipo de cristales fotónicos son aquellos con estructuras periódicas del orden de nanómetros, los cuales difieren de los anteriores por la presencia del fenómeno de difracción.

Ambos procesos, guiado y control de luz, no son ajenos, de hecho los cristales fotónicos unidimensionales que tienen un patrón periódico formado por dieléctricos con espesor, ancho y alto finitos, tienen una brecha de banda fotónica (PBG⁵) para las frecuencias asociadas a ondas electromagnéticas que se propagan a lo largo de la dirección de periodicidad y pueden confinar ondas electromagnéticas en las otras direcciones por el principio de guiado de índice; a este tipo de cristales se les denomina guías de onda dieléctricas periódicas, figura 1.1. Otro ejemplo fue propuesto en el año de 1975 por Ken Hill [6], quién demostró que una variación periódica del índice de refracción a lo largo de un segmento del núcleo de una fibra óptica, se puede utilizar para filtrar señales ópticas o como un reflector de frecuencia específica, figura 1.2. Se denominan fibras de rejilla de Bragg (FBG⁶) y son utilizadas en multiplexores y filtros de señales ópticas, y en sensores de presión y temperatura [7].

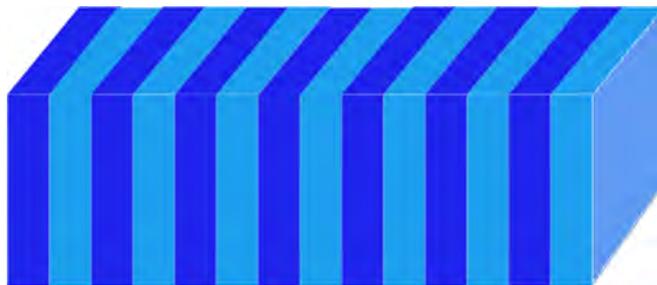


Figura 1.1. Guía de onda dieléctrica periódica hecha de rebanadas de dos distintos materiales dieléctricos.



Figura 1.2. Fibra de rejilla de Bragg.

La tecnología de las fibras ópticas avanzó considerablemente con la incorporación de estructuras periódicas en su constitución. Surgieron las fibras de cristal fotónico (PCF⁷), que se clasifican de

⁴ Ésta se puede hacer con la inserción de uno o más elementos distintos en la estructura del cristal, el análogo directo de los semiconductores dopados; o se puede hacer con la aplicación de un agente externo que modifique alguna propiedad de uno o más elementos.

⁵ Por sus siglas en inglés, photonic band gap.

⁶ Por sus siglas en inglés, fiber Bragg grating.

⁷ En inglés, photonic crystal fiber.

acuerdo al proceso físico por el cual guían las ondas electromagnéticas, a saber, fibras de guiado por índice que se basan en el principio de guiado por índice; y fibras de PBG que guían las ondas usando un PBG originado por la estructura periódica de la misma.

Las FBG son de tipo guiado por índice porque el PBG de éstas no es la causa por la cual se guía la onda electromagnética, de igual manera, las guías de onda dieléctricas periódicas pertenecen a este tipo. En el año de 1968, Melekin [8] sugirió teóricamente que una fibra óptica con estructura periódica de capas cilíndricas de dos distintos materiales dieléctricos alternados, puede confinar y guiar ondas electromagnéticas en su núcleo hueco; en su estudio, utilizó la óptica geométrica y no asoció la causa del confinamiento al PBG, esto último fue hecho diez años más tarde por P. Yeh y sus colegas [9] y las nombraron fibras de Bragg (BF⁸). En esencia, los rayos que viajan por el núcleo de una BF con un ángulo respecto al eje axial y con una frecuencia prohibida por el revestimiento (las capas cilíndricas) son totalmente reflejados y confinados en el núcleo de la fibra, ver figura 1.3.

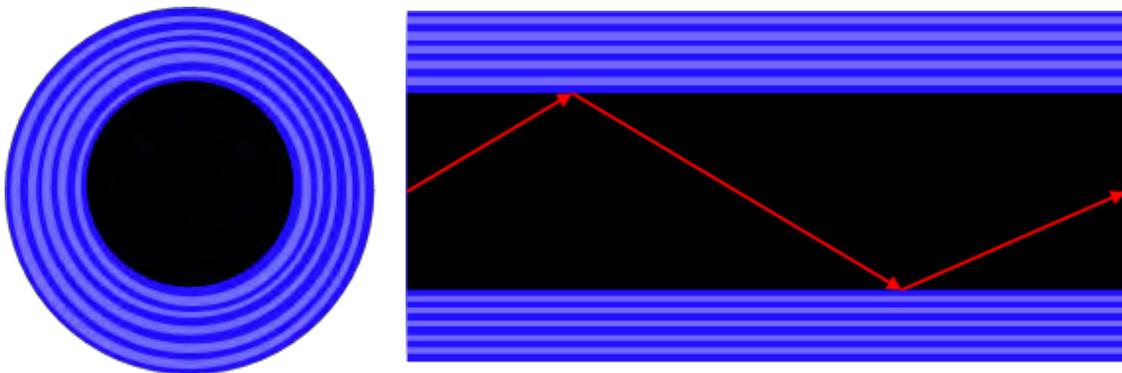


Figura 1.3. Fibra de Bragg. Izquierda, corte transversal, y derecha, corte longitudinal. Las zonas de color negro representan aire. El rayo tiene una frecuencia asociada que está prohibida por el revestimiento.

Para garantizar un buen confinamiento en las BF es necesario un alto contraste en el índice de refracción de las capas, o un bajo contraste en el índice y muchas capas; ambas opciones causan fragilidad mecánica y térmica. Por lo cual se comenzaron a estudiar otras opciones.

En el año de 1995 Birks y sus colegas [10], presentaron otro tipo de fibra óptica con un revestimiento periódico formado por huecos cilíndricos de aire paralelos al eje axial de la fibra; en corte transversal, la fibra tiene un núcleo hueco rodeado de un revestimiento de agujeros de aire en arreglo triangular rodeados de sílice puro, ver figura 1.4 (a). Otras estructuras periódicas son posibles pero la más utilizada al día de hoy es la propuesta por el grupo de Birks.

Un año más tarde, J. C. Knight, incorporado al grupo de Birks [11, 12], presentó una fibra de un solo material dieléctrico (sílice puro) con huecos de aire paralelos al eje axial de la fibra, con arreglo triangular en sección transversal, y con un núcleo sólido, figura 1.4 (b). En este caso, la estructura periódica se forma con la finalidad de crear un revestimiento con un índice de refracción

⁸ En inglés, Bragg fiber.

efectivo menor que el respectivo al núcleo. Por esta razón pertenecen a la clase de PCF de guiado por índice [13].

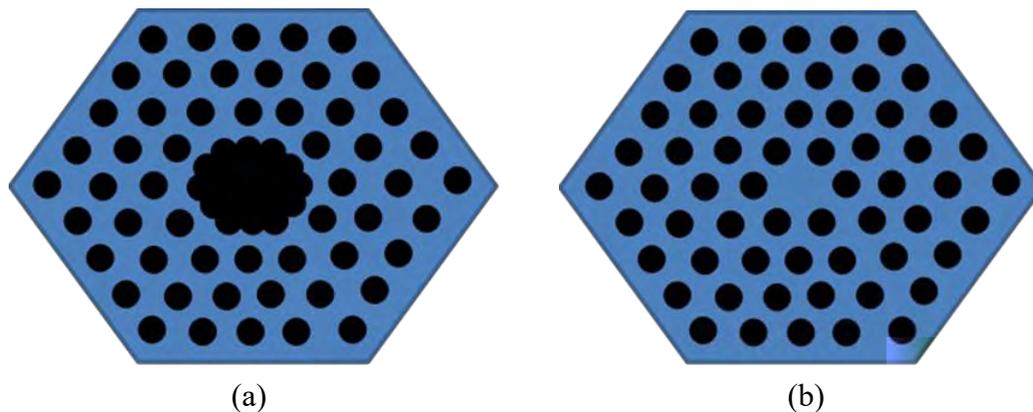


Figura 1.4. Cortes transversales de: (a) Una fibra de cristal fotónico con núcleo hueco, y (b) una fibra de cristal fotónico con núcleo sólido. Ambas tienen arreglo triangular. Las zonas negras son aire y las azules son sílice puro.

Con el surgimiento de las PCF se renovó la investigación en sensores de fibra óptica gracias a la nueva forma de guiar luz con los cristales fotónicos inmersos en su estructura, ya sea en su núcleo o en su revestimiento [14]. Dado que las PCF se pueden fabricar de una gran variedad de materiales (sílice puro o dopado, aire, gases, líquidos, variedad de vidrios y polímeros) y con diversidad de estructuras periódicas, se tiene un amplio intervalo de índices efectivos para elegir en la operación de los sensores y mayores opciones para mejorar la precisión de los mismos [14], a diferencia de los sensores basados en fibra óptica convencional⁹.

En la actualidad, cristales fotónicos, PCF y materiales nano-estructurados, son estudiados para utilizarlos en nuevas tecnologías y mejorar las existentes; tanto a nivel macroscópico como a nivel nano-métrico.

1.2 Antecedentes y planteamiento del problema.

El estudio del cambio en las propiedades ópticas de un material al someterlo a un esfuerzo mecánico¹⁰ o a un gradiente de temperaturas es fundamental en la tecnología de sensores con fibra óptica. Un material muy utilizado en la fabricación de fibras ópticas es el polimetil metacrilato. Previamente, estudié las propiedades elasto-ópticas de una fibra óptica con núcleo de poli(metil metacrilato) [15]. En dichos estudios, concluí que si se mantiene la hipótesis de elasticidad para la fibra, ésta se puede utilizar para cuantificar variaciones de presión cuasi-estáticas, porque sus tiempos de recuperación al cese de presión son del orden de minutos, para presiones desde 1.0 MPa hasta 200 MPa. En otras palabras, las propiedades visco-elásticas de la fibra óptica limitan el tipo de operación de la fibra óptica como elemento sensor.

⁹ Fibras ópticas de gradiente de índice o de índice escalonado, multimodo o monomodo. Fabricadas de sílice puro o dopado, o de polímeros.

¹⁰ Elongación, contracción, cisión (corte), torsión o flexión.

Motivado por el anterior resultado, decidí cuantificar el comportamiento visco-elástico de la fibra óptica con núcleo de poli(metil metacrilato) con mi grupo de investigación de la Facultad de Ciencias, UNAM: “Propiedades ópticas y mecánicas de materiales”. Se desarrolló un modelo teórico para asociar las partes real e imaginaria de los módulos de Young y de corte a cantidades que se determinaron en dos experimentos, el primero consistió en un péndulo de torsión mientras que el segundo en un péndulo simple [16]. Los resultados muestran una razón entre la parte imaginaria y la real de los módulos de 0.063 para frecuencias menores que 10 Hz.

Al igual que las fibras ópticas, los cristales fotónicos fabricados a escala macroscópica o nanométrica son afectados en sus propiedades por agentes externos. Por ejemplo, un cristal fotónico 2D usado como circuito integrado fotónico (PIC)¹¹ sujeto a un estado de tensión originado por un gradiente térmico o un esfuerzo mecánico externo, cambia su PGB y como consecuencia se altera su intervalo de frecuencias de operación [17]. Por lo cual es importante estudiar cómo afectan los gradientes térmicos y los esfuerzos externos a los distintos materiales fotónicos. Tomando en cuenta lo anterior, decidí utilizar la información que he obtenido del poli(metil metacrilato) en el área de los cristales fotónicos, planteando un problema con un cristal fotónico formado de este material y algún otro, como sílice amorfo. A continuación presentaré el problema en general, sin aludir los materiales específicos del cristal.

Considérese un cristal fotónico formado por láminas de dos diferentes materiales dieléctricos, homogéneos, isotropos, de permitividad constante y no magnéticos, alternados uno a uno. Además, supóngase que el alto y ancho de las rebanadas son mucho mayores que su espesor, y que sus respectivas fronteras sólo contribuyen al proceso de guiado por índice, figura 1.5. Por hipótesis, el espesor de las rebanadas es mucho mayor a la longitud de onda de las ondas electromagnéticas utilizadas en el experimento, por lo cual, no hay necesidad de considerar fenómenos de difracción. Por otro lado, las ondas electromagnéticas son monocromáticas y de frente de onda plano.

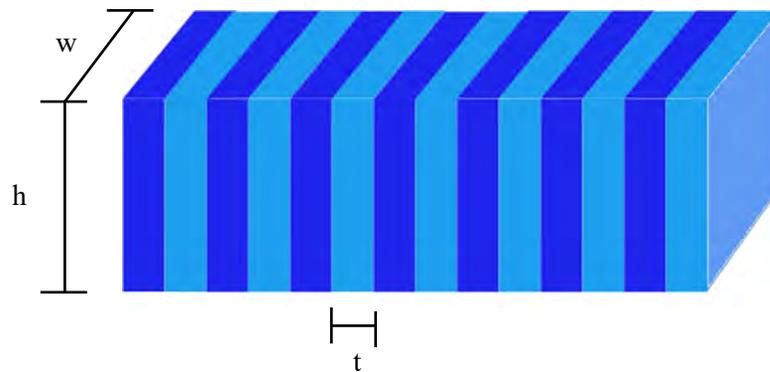


Figura 1.5. Cristal fotónico formado por láminas de dos distintos materiales dieléctricos. El alto (h) y ancho (w) son mucho mayores que su espesor (t).

¹¹ Por sus siglas en inglés, photonic integrated circuits.

Dadas las hipótesis anteriores es válido utilizar las ideas de la Óptica Geométrica. Considérese un rayo de una cierta frecuencia asociada que ingresa al cristal fotónico con un ángulo respecto al eje principal del cristal. Este rayo realizará un cierto número de reflexiones y refracciones en las fronteras internas del cristal que depende del ángulo con el cual ingresó al cristal y del espesor de las rebanadas, figura 1.6. Si el rayo llega a la frontera azimuthal con un ángulo de incidencia mayor que el crítico, éste viajará por todo el cristal a causa de la reflexión total interna en la frontera azimuthal y la simetría del cristal (figura 1.6); por supuesto, el rayo perderá energía por las múltiples reflexiones en las fronteras internas, a diferencia de su análogo en una fibra óptica de índice escalonado. Por otro lado, los rayos que inciden con un ángulo menor al crítico se “perderán” mucho más rápido.

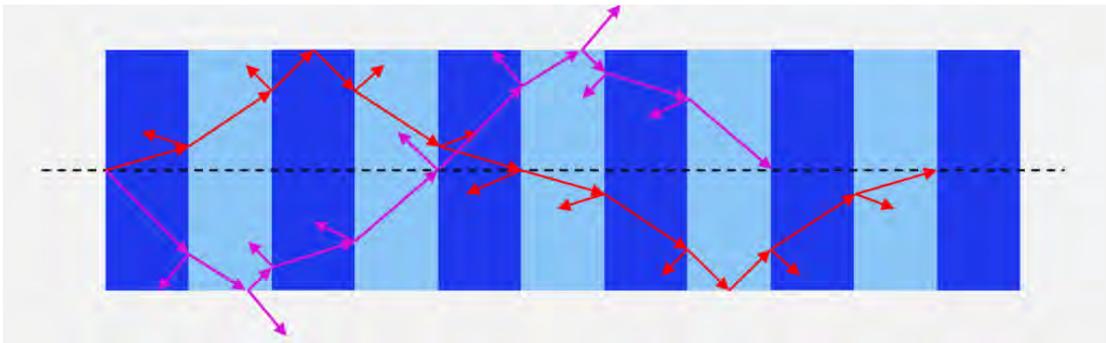


Figura 1.6. Esquema de dos rayos viajando dentro del cristal. El rayo rojo llega a la frontera azimuthal (frontera inferior en el esquema) con un ángulo mayor al crítico, por lo cual, se refleja totalmente; a diferencia del rayo morado que sufre reflexión y refracción en la frontera azimuthal (frontera superior del esquema). Fuera del cristal hay aire.

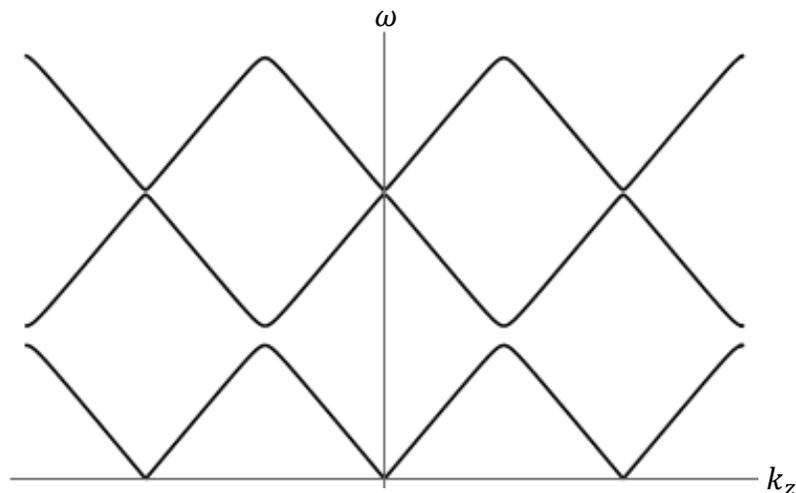


Figura 1.7. Esquema de zona repetida del espectro de frecuencias permitidas de un cristal unidimensional planteado.

Lo anterior no es cierto para todas las frecuencias, ya que al resolver las ecs. de Maxwell para el tipo de ondas planteadas con las condiciones de fronteras impuestas por el cristal, se obtiene un espectro de frecuencias permitidas agrupadas en “bandas” y éstas separadas por intervalos de frecuencias prohibidas, los FBGs del cristal, y en consecuencia los rayos con frecuencias prohibidas serán totalmente reflejados al intentar ingresar al cristal. Los FBGs son una consecuencia de la in-homogeneidad del cristal y su “tamaño” depende de las propiedades de las láminas del cristal y la longitud de periodicidad. La figura 1.7 muestra un esquema del típico espectro de frecuencias de un cristal fotónico unidimensional para ondas electromagnéticas que se transmiten paralelas al eje principal del cristal.

Con esto en mente, se puede imaginar lo que le sucedería a una señal óptica con un ancho de banda, ver figura 1.8. Si el ancho de banda contiene las frecuencias prohibidas por el cristal, entonces, la señal se dividirá en dos; por un lado, una señal filtrada en el ancho de frecuencias prohibidas que viajará por el cristal hasta el otro extremo, de acuerdo a como viajan los rayos por el cristal, y por otro lado, una señal óptica reflejada por el cristal, con un ancho de banda igual al ancho de frecuencias prohibidas.

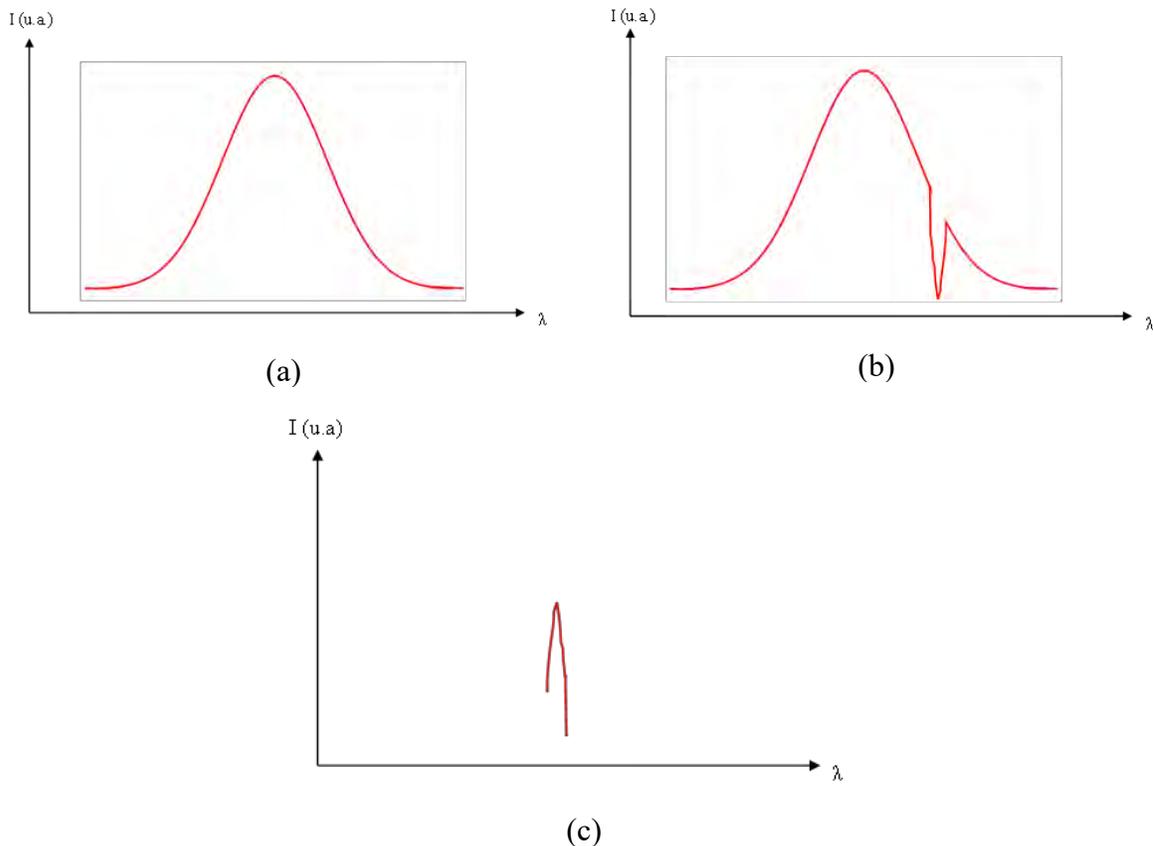


Figura 1.8. (a) Señal de entrada con un ancho de banda (en longitud de onda), (b) señal al salir del cristal fotónico, debido al PBG la señal es filtrada; (c) señal reflejada, corresponde al valor de la longitud de onda prohibida por el cristal fotónico.

Ahora, fíjese la atención en un rayo que viaja por el cristal. El campo eléctrico del rayo polariza el material por el cual está viajando, entonces, en un volumen de control, en una rebanada del cristal, la densidad de dipolos por unidad de tiempo permanece constante, y por lo tanto, su permitividad. Ahora, supóngase que se aplica una presión localizada en una de las láminas del cristal, como se muestra en la figura 1.9. Entonces, en el mismo volumen de control, el número de dipolos por unidad de tiempo cambia porque la densidad de masa de la rebanada cambia mientras se esté aplicando la presión, más aún, la densidad de dipolos será diferente en cada dirección del volumen de control porque la presión se distribuye de diferente manera, y la lámina ahora es caracterizada por un tensor de permitividad. Por lo tanto, la presión cambia las propiedades eléctricas del cristal y en consecuencia debe cambiar el espectro de frecuencias permitidas del cristal.

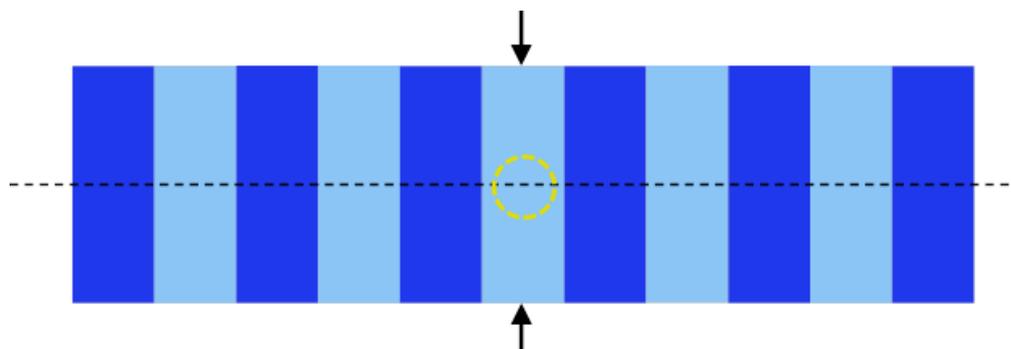


Figura 1.9. Corte transversal del cristal fotónico. Las flechas negras indican la dirección de aplicación de la presión localizada sobre una rebanada del cristal. La línea punteada de color amarillo representa el corte transversal de un volumen de control.

Análogo al caso de presión localizada, cualquier esfuerzo mecánico aplicado al cristal cambiará la permitividad del mismo y ésta estará descrita por un tensor y, en consecuencia, el espectro de frecuencias permitidas del cristal cambiará.

1.3 Objetivo y relevancia.

El objetivo de esta tesis es hacer un estudio teórico del cambio en el espectro de frecuencias permitidas de un cristal fotónico unidimensional formado de dos láminas de material dieléctrico, alternadas y en arreglo periódico, al ser sometido a una presión de tipo hidrostático y a una presión localizada.

A través de una revisión bibliográfica, he encontrado trabajos enfocados al estudio teórico del efecto elasto-óptico en cristales fotónicos. Morozov *et al.* estudiaron el efecto sobre el espectro de reflexión de una estructura periódica dieléctrica de dos láminas por compresión de las fronteras de la estructura [18]. Li *et al.* estudiaron la contribución de la deformación a los modos de resonancia en un sensor de fuerza de cristal fotónico 2D [19]. Sin embargo, puedo afirmar que el trabajo aquí presentado es original, de relevancia actual, y pionero en el estudio teórico del efecto de una presión hidrostática en el espectro de frecuencias permitidas de un cristal fotónico unidimensional¹² [20]. En los siguientes capítulos hago una revisión de la teoría que utilice para abordar el problema.

¹² Esta frase fue hecha por uno de los revisores anónimos del artículo citado.

Capítulo 2

Electromagnetismo de medios materiales

El estudio de las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales se puede realizar de dos maneras distintas, macroscópicamente o microscópicamente. La primera, se fundamenta en el hecho de que las propiedades físicas del material, como la carga eléctrica, el momento dipolar eléctrico y el momento dipolar magnético, están definidas en cada uno de los puntos del material y no atiende la constitución atómica o molecular del mismo. Por otro lado, la perspectiva microscópica toma en cuenta el rol de las moléculas y/o los átomos, y son éstos los que están dotados de las propiedades físicas como carga eléctrica. En este trabajo se tratará sólo el aspecto macroscópico.

2.1 Ecuaciones de Maxwell macroscópicas en materiales.

En el punto de vista macroscópico, la electrodinámica describe la respuesta eléctrica de un material ante un campo eléctrico mediante una relación constitutiva¹. Si el material es lineal e isótropo, la relación constitutiva es

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

En la ecuación anterior, el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, que es resultado del campo eléctrico externo aplicado al material y el campo eléctrico originado por la carga eléctrica en cada punto de éste, hace que el material “responda” cambiando su propiedad física $\vec{P}(\vec{r}, t)$ denominada polarización. La función adimensional $\chi_e(\vec{r})$ es la susceptibilidad eléctrica del material y la constante ε_0 es la permitividad del vacío. La polarización cuantifica el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen en cada punto del material.

Si el campo eléctrico es separable en la variable t (tiempo), entonces, de acuerdo al análisis de Fourier la parte temporal se puede descomponer en una suma (integral en el caso más general) de funciones armónicas temporales. Como la ecuación constitutiva es lineal, no se pierde generalidad al suponer que el campo eléctrico es de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo este campo en la ec. (2.1) y manteniendo el hecho de que el material es invariante temporalmente², entonces

¹ También se le suele llamar función de respuesta o ecuación constitutiva.

² Véase el apéndice A.

$$\vec{P}(\vec{r})e^{-i\omega t} = \varepsilon_0\chi_e(\vec{r}, \omega)\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}. \quad (2.3)$$

El hecho de que la susceptibilidad eléctrica sea función de la frecuencia del campo eléctrico aplicado se denomina dispersión³, y se dice que el medio es dispersivo.

Análogamente, la respuesta de un material lineal, invariante temporalmente, no homogéneo e isótropo ante un campo magnético es

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m(\vec{r}, \omega)\vec{H}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

donde $\vec{M}(\vec{r})$ es la magnetización del material, $\vec{H}(\vec{r})$ es el vector de intensidad magnética, ω es la frecuencia angular de oscilación del campo, y la función adimensional $\chi_m(\vec{r}, \omega)$ es la susceptibilidad magnética del material. La magnetización cuantifica el momento dipolar magnético por unidad de volumen en cada punto del material.

De acuerdo a las definiciones de polarización y magnetización, ambos son parte de la “causa” o “fuente” de sus respectivos campos, lo cual es más sencillo de ver expresando los potenciales de los campos estacionarios [21, 22]:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[\frac{\rho_l(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] d^3\vec{r}', \quad (2.5)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}_l(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] d^3\vec{r}'. \quad (2.6)$$

donde ε_0 es la permitividad del vacío, $\rho_l(\vec{r}')$ es la densidad de carga libre, μ_0 es la permeabilidad del vacío, y $\vec{J}_l(\vec{r}')$ es la densidad de corriente eléctrica libre. Los campos estacionarios en términos de estos potenciales son $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$ y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$. Por lo tanto, la polarización $\vec{P}(\vec{r})$ y la magnetización $\vec{M}(\vec{r})$ contribuyen a la densidad de carga eléctrica y a la densidad de corriente, respectivamente. Entonces, se definen:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad (2.7)$$

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}. \quad (2.8)$$

Como la densidad de carga enlazada⁴ y la densidad de corriente enlazada, respectivamente.

Si la dinámica del sistema (material y campos) es tal que existe un cambio en la polarización con respecto al tiempo, entonces, existe una densidad de corriente causada por esta razón de cambio, a saber,

³ Esta definición es una generalización de la dispersión definida en Óptica, esto es, la dependencia del índice de refracción con la frecuencia.

⁴ Se denomina así debido a que está carga, en cada punto del material, tiene un desplazamiento limitado a una reducida vecindad.

$$\vec{J}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, las fuentes de los campos eléctrico y magnético se descomponen de la siguiente manera

$$\rho = \rho_l - \nabla \cdot \vec{P}, \quad (2.10)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \nabla \times \vec{M} + \vec{J}_p, \quad (2.11)$$

donde los subíndices l etiquetan a las cargas que pueden moverse en regiones no localizadas del material.

De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones de Maxwell que describen la dinámica de los campos eléctrico y magnético en un material son [23]:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_l(\vec{r}, t), \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}_l(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.13)$$

donde se definen al vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} y al vector de intensidad magnética \vec{H} como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.14)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.15)$$

Resolver un problema de electrodinámica de materiales es encontrar las tres componentes del vector de desplazamiento eléctrico y las tres componentes del vector de intensidad magnética dadas la densidad de carga libre y las tres componentes de la densidad de corriente libre. Un método de solución es reescribir los campos en términos de un potencial escalar y un potencial vectorial, con lo cual se reduce de seis a cuatro cantidades a encontrar. Otro método de solución consiste en reescribir el problema en forma de operadores que cumplen una ecuación de eigenvalores generalizada. Éste último es el que se utiliza en este trabajo para encontrar los campos en un cristal fotónico y se expondrá en detalle en la siguiente sección de este capítulo.

2.2 Campos electromagnéticos y problema de eigenvalores.

Supongamos que tenemos un material dieléctrico, no homogéneo, y cuyas respuestas a campos eléctricos y magnéticos son lineales, invariantes temporalmente e isotropas; entonces, el vector de desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\vec{r}, t)$ y el vector de intensidad magnética $\vec{H}(\vec{r}, t)$ cumplen las ecs. de Maxwell macroscópicas de materiales ecs. (2.12) y (2.13), y son tales que:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \epsilon(\vec{r}, \omega) \equiv 1 + \chi_e(\vec{r}, \omega), \quad (2.16)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu(\vec{r}, \omega) \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \mu(\vec{r}, \omega) \equiv 1 + \chi_m(\vec{r}, \omega). \quad (2.17)$$

Las funciones $\epsilon(\vec{r}, \omega)$ y $\mu(\vec{r}, \omega)$ se denominan permitividad relativa y permeabilidad relativa del material, respectivamente.

Por otro lado, se supone que los campos son armónicos temporales de la forma mostrada en la ec. (2.2), y también se supone que el material no es magnético y no tiene cargas ni corrientes libres, entonces, sustituyendo las ecs. (2.16) y (2.17) en las ecs. (2.12) y (2.13) se tiene

$$\nabla \cdot [\epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r})] = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - i\omega\mu_0 \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) + i\omega\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.19)$$

Dividiendo la ecuación del rotacional de la intensidad magnética entre $\epsilon(\vec{r}, \omega)$ y aplicando rotacional al resultado,

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r}, \omega)} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) + i\omega\epsilon_0 \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (2.20)$$

y sustituyendo la ecuación del rotacional del campo eléctrico en la ecuación anterior se obtiene

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r}, \omega)} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}), \quad (2.21)$$

donde $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. De esta ecuación se obtiene $\vec{H}(\vec{r})$ y despejando el campo eléctrico de la ecuación del rotacional de $\vec{H}(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{\omega\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}, \omega)} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}), \quad (2.22)$$

se obtiene el campo eléctrico en término de $\vec{H}(\vec{r})$. Sin embargo, la solución de estas dos ecuaciones está condicionada al cumplimiento de las ecs. (2.18). La divergencia del campo eléctrico se cumple inmediatamente con la ec. (2.22), pues la divergencia de un rotacional es cero. Por lo tanto, el problema se reduce a resolver la ec. (2.21) con la condición de que la divergencia de \vec{H} sea cero, y después calcular el campo eléctrico con la ec. (2.22).

Se observa que el problema también se puede reducir a una ecuación para el campo eléctrico, sin embargo, éste camino lleva a una condición de divergencia más complicada, a saber,

$$\nabla \cdot [\epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r})] = 0.$$

Por lo tanto, la elección de \vec{H} es conveniencia matemática.

Ya se mencionó que la dependencia de la permitividad relativa con la frecuencia del campo de excitación se conoce como fenómeno de dispersión, esta dependencia es la causa de que la ec. (2.21) sea una ecuación de eigenvalores generalizada, sin embargo, si se selecciona un intervalo de frecuencias en el cual los efectos de la frecuencia no sean apreciables en la permitividad relativa del material, basta fijar el valor de la permitividad relativa con la frecuencia media y, entonces, ésta sólo dependerá de la posición. Por lo tanto, la ec. (2.21) toma la forma de una ecuación de eigenvalores

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}) \quad (2.23)$$

con el eigenvalor $\left(\frac{\omega}{c} \right)^2$. En este trabajo se utiliza la hipótesis de permitividad no dependiente de la frecuencia, esto es, se resuelve el problema en un intervalo de frecuencias de interés.

2.3 Problema de eigenvalores con el vector $\vec{H}(\vec{r})$.

En la ec. (2.23) se identifica un operador $\hat{\Theta}$ que se aplica al vector \vec{H} y da como resultado el mismo vector por un factor multiplicativo, donde el operador es

$$\hat{\Theta} \equiv \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \quad (2.24)$$

y la ecuación de eigenvalores se reescribe como

$$\hat{\Theta} \vec{H}(\vec{r}) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}). \quad (2.25)$$

El operador $\hat{\Theta}$ es lineal, esto es, si $\vec{H}_1(\vec{r})$ y $\vec{H}_2(\vec{r})$ son soluciones de la ec. (2.25) entonces $a_1 \vec{H}_1(\vec{r}) + a_2 \vec{H}_2(\vec{r})$ también es solución de la misma ecuación, donde a_1 y a_2 son constantes. Por otro lado, si se define el producto interno de dos funciones vectoriales de variable vectorial $\vec{H}_1(\vec{r})$ y $\vec{H}_2(\vec{r})$ como

$$(\vec{H}_1, \vec{H}_2) \equiv \int \vec{H}_1^* \cdot \vec{H}_2 d^3\vec{r}, \quad (2.26)$$

donde el asterisco denota complejo conjugado, el punto indica operación de producto escalar entre vectores y la integración se hace en un volumen de interés. Entonces, el operador es Hermitiano con este producto interno, es decir,

$$(\vec{H}_1, \hat{\Theta} \vec{H}_2) = (\hat{\Theta} \vec{H}_1, \vec{H}_2), \quad (2.27)$$

para cualesquiera dos vectores $\vec{H}_1(\vec{r})$ y $\vec{H}_2(\vec{r})$ que sean soluciones de la ec. (2.25). Siempre y cuando los campos eléctrico y magnético⁵ cumplan alguna de las siguientes condiciones de

⁵ Recuérdese que el vector $\vec{H}(\vec{r})$ y su rotacional están determinados por los campos magnético y eléctrico.

frontera: El campo y/o sus derivadas espaciales son cero lejos de la zona de interés, o, el campo y/o sus derivadas son funciones periódicas en el volumen de integración. En todos los casos de interés alguna de las condiciones es cierta.

Para demostrar la validez de la ecuación (2.27) se utiliza la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

y se hace dos veces integración por partes, igualando a cero las dos integrales de superficie de acuerdo a las condiciones de frontera [24, 25].

Dado que el operador $\hat{\Theta}$ es hermitiano se demuestra que sus eigenvectores son ortogonales, si sus eigenvalores asociados son diferentes, y además los eigenvalores son números reales. A continuación la demostración.

Sean \vec{H}_m y \vec{H}_n dos soluciones distintas de la ec. (2.25) con eigenvalores distintos ω_m y ω_n respectivamente, entonces

$$(\vec{H}_m, \hat{\Theta}\vec{H}_n) = \int \vec{H}_m^* \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}_n \right) d^3\vec{r} = \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 (\vec{H}_m, \vec{H}_n), \quad (2.28)$$

$$(\hat{\Theta}\vec{H}_m, \vec{H}_n) = \int \left(\nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}_m \right)^* \cdot \vec{H}_n d^3\vec{r} = \left[\left(\frac{\omega_m}{c} \right)^2 \right]^* (\vec{H}_m, \vec{H}_n), \quad (2.29)$$

restando las ecuaciones anteriores y dado que el operador es hermitiano, se obtiene que

$$0 = \left\{ \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left[\left(\frac{\omega_m}{c} \right)^2 \right]^* \right\} (\vec{H}_m, \vec{H}_n). \quad (2.30)$$

Por lo tanto, los eigenvectores son ortogonales entre sí. Adicionalmente con $n = m$ se concluye que los eigenvalores son números reales. Estos resultados son sumamente importantes porque garantizan la existencia de una base ortogonal del dominio de la transformación (y contra-dominio por ser una transformación de eigenvalores) [25]. Sin embargo pueden existir eigenvectores distintos con el mismo eigenvalor, en este caso se dice que los eigenvectores son degenerados y éstos no necesariamente forman una base ortogonal. La simetría del material usualmente es la causa de la existencia de eigenvectores degenerados⁶ [24].

Los eigenvectores del operador $\hat{\Theta}$ cumplen una regla cualitativa sencilla pero sumamente importante, a saber, un eigenvector tiende a concentrar la energía de campo eléctrico en regiones de mayor permitividad relativa, manteniéndose ortogonal a los eigenvectores con frecuencias menores. Esta regla se deduce del principio variacional de la Electrodinámica (expresado en términos del operador $\hat{\Theta}$) y se expondrá enseguida.

⁶ El tema de las simetrías y los eigenvectores se expondrá en el siguiente capítulo.

Se define la siguiente funcional⁷

$$U_f(\vec{H}) \equiv \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})}, \quad (2.31)$$

el principio variacional de la Electrodinámica es un teorema que dice: La funcional $U_f(\vec{H})$ bajo la condición $\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$ tiene un mínimo en el eigenvector de $\hat{\Theta}$ asociado al menor de todos los eigenvalores de $\hat{\Theta}$.

Primero se demuestra que la funcional $U_f(\vec{H})$ tiene un valor extremo en un eigenvector de $\hat{\Theta}$, para lo cual se calcula la diferencia de la funcional evaluada en $\vec{H} + \delta\vec{H}$ y evaluada en \vec{H} ,

$$U_f(\vec{H} + \delta\vec{H}) = \frac{(\vec{H} + \delta\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H} + \hat{\Theta} \delta\vec{H})}{(\vec{H} + \delta\vec{H}, \vec{H} + \delta\vec{H})}, \quad (2.32)$$

$$U_f(\vec{H}) = \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})}, \quad (2.33)$$

$$\delta U_f \equiv U_f(\vec{H} + \delta\vec{H}) - U_f(\vec{H}). \quad (2.34)$$

Ignorando términos de segundo grado en $\delta\vec{H}$ se hacen las siguientes aproximaciones

$$(\vec{H} + \delta\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H} + \hat{\Theta} \delta\vec{H}) \approx (\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}) + (\vec{H}, \hat{\Theta} \delta\vec{H}), \quad (2.35)$$

$$(\vec{H} + \delta\vec{H}, \vec{H} + \delta\vec{H}) \approx (\vec{H}, \vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H}) + (\vec{H}, \delta\vec{H}), \quad (2.36)$$

entonces,

$$\delta U_f \cong \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}) + (\delta\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}) + (\vec{H}, \hat{\Theta} \delta\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H}) + (\delta\vec{H}, \vec{H}) + (\vec{H}, \delta\vec{H})} - \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})}. \quad (2.37)$$

Multiplicando el primer término de lado derecho por $\frac{(\vec{H}, \vec{H}) - (\delta\vec{H}, \vec{H}) - (\vec{H}, \delta\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H}) - (\delta\vec{H}, \vec{H}) - (\vec{H}, \delta\vec{H})}$ y despreciando términos de segundo grado en $\delta\vec{H}$ se tiene

$$\delta U_f \cong \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H})[(\vec{H}, \vec{H}) - (\delta\vec{H}, \vec{H}) - (\vec{H}, \delta\vec{H})]}{(\vec{H}, \vec{H})^2 - [(\delta\vec{H}, \vec{H}) + (\vec{H}, \delta\vec{H})]^2} + \frac{[(\delta\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}) + (\vec{H}, \hat{\Theta} \delta\vec{H})](\vec{H}, \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})^2 - [(\delta\vec{H}, \vec{H}) + (\vec{H}, \delta\vec{H})]^2} - \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})}. \quad (2.38)$$

Nótese que

⁷ El concepto de funcional apareció en el cálculo variacional y se refiere a una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

$$\frac{(\vec{H}, \vec{H})^2 - [(\delta\vec{H}, \vec{H}) + (\vec{H}, \delta\vec{H})]^2}{(\vec{H}, \vec{H})^2} = 1 - \left(2\text{Re} \left[\frac{(\vec{H}, \delta\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \right] \right)^2 \approx 1, \quad (2.39)$$

porque $\delta\vec{H}$ es pequeño. Por lo tanto,

$$\delta U_f \cong \frac{(\delta\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} + \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\delta\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} - \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})^2} (\delta\vec{H}, \vec{H}) - \frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})^2} (\vec{H}, \delta\vec{H}). \quad (2.40)$$

La ecuación anterior se reescribe como

$$\delta U_f(\vec{H}) \cong \left[(\delta\vec{H}, \vec{G}(\vec{H})) + (\vec{G}(\vec{H}), \delta\vec{H}) \right] / 2, \quad (2.41)$$

donde la funcional vectorial \vec{G} está dada por

$$\vec{G}(\vec{H}) \equiv \frac{2}{(\vec{H}, \vec{H})} \left(\hat{\Theta}\vec{H} - \left[\frac{(\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H})}{(\vec{H}, \vec{H})} \right] \vec{H} \right). \quad (2.42)$$

La ec. (2.41) es equivalente a la expresión de la diferencial de una función escalar de variable vectorial $F(\vec{r})$, a saber,

$$dF(\vec{r}) = \nabla\vec{F} \cdot d\vec{r} = (d\vec{r} \cdot \nabla\vec{F} + \nabla\vec{F} \cdot d\vec{r}) / 2. \quad (2.43)$$

Por lo tanto, la funcional vectorial \vec{G} se interpreta como el gradiente de la funcional $U_f(\vec{H})$ con respecto a \vec{H} [21, 23]. Para un valor extremo de $U_f(\vec{H})$ la ec. (2.41) debe ser igual a cero para todo $\delta\vec{H}$, por lo cual, $\vec{G}(\vec{H})$ debe ser cero y esto sólo es posible si \vec{H} es un eigenvector del operador $\hat{\Theta}$. Con esto queda demostrada la primera parte del teorema. Por demostrar que el mínimo de U_f es el eigenvector de $\hat{\Theta}$ asociado al menor de los eigenvalores.

Supóngase que se ordenan los eigenvalores de $\hat{\Theta}$ de la siguiente manera

$$\left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \leq \left(\frac{\omega_1}{c} \right)^2 \leq \left(\frac{\omega_2}{c} \right)^2 \leq \dots$$

donde la igualdad considera la existencia de eigenvectores degenerados, ya que los subíndices $\{0, 1, 2, \dots\}$ etiquetan a los eigenvalores y a sus correspondientes eigenvectores. No hay pérdida de generalidad con la asignación discreta de eigenvalores y eigenvectores. Supóngase además que los eigenvectores forman una base del dominio de la transformación, entonces, utilizando el proceso de ortogonalización de Grand-Smith se forma una base $\{\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots\}$ cuyos elementos son soluciones ortogonales del operador $\hat{\Theta}$, y a \vec{f}_0 le corresponde el menor de los eigenvalores $\left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2$. Esto implica que cualquier solución normalizada de la ecuación de eigenvalores de $\hat{\Theta}$ se expresa como

$$\vec{H} = \sum_i c_i \vec{f}_i \quad (2.44)$$

donde el índice i numera a los elementos de la base y las c_i son constantes tales que

$$\sum_i |c_i|^2 = 1.$$

El valor esperado de \vec{H} es

$$E_{\vec{H}} = (\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}), \quad (2.45)$$

entonces,

$$E_{\vec{H}} = \sum_{i,j} c_i^* c_j (f_i, \hat{\Theta} f_j) = \sum_{i,j} c_i^* c_j \left(\frac{\omega_j}{c}\right)^2 (f_i, f_j) = \sum_{i,j} c_i^* c_j \left(\frac{\omega_j}{c}\right)^2 \delta_{ij} = \sum_i |c_i|^2 \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2.$$

Por lo tanto la siguiente desigualdad es cierta

$$E_{\vec{H}} \geq \sum_i |c_i|^2 \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \sum_i |c_i|^2 = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2. \quad (2.46)$$

Con este resultado y la conclusión de la primera parte de la demostración se afirma: Una función \vec{H} que es solución de la ecuación de valores propios del operador $\hat{\Theta}$ tiene un eigenvalor $E_{\vec{H}}$ que es mayor o igual al eigenvalor del estado base $\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2$ y es tal que constituye un valor extremo de la funcional $U_f(\vec{H})$, y por lo tanto, el eigenvector del estado base \vec{H}_0 es aquel que minimiza U_f . Más aún, el eigenvector que sigue en orden al eigenvector del estado base es tal que minimiza U_f en el subconjunto de eigenvectores que es ortogonal a \vec{H}_0 , y así sucesivamente.

Ha quedado demostrado el principio variacional, ahora se obtendrá la regla para los eigenvectores de $\hat{\Theta}$, para esto se reescribe la funcional U_f en términos del campo eléctrico \vec{E} como se describe a continuación.

El numerador de la funcional U_f se reescribe utilizando las dos ecuaciones rotacionales de los campos \vec{E} y \vec{H} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (\vec{H}, \hat{\Theta} \vec{H}) &= \frac{i}{\omega^* \mu_0} \left(\nabla \times \vec{E}, \nabla \times \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} \right) \\ &= \frac{i}{\omega^* \mu_0} \left(\nabla \times \vec{E}, \nabla \times \frac{1}{\epsilon} (-i\omega \epsilon_0 \epsilon) \vec{E} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, el denominador de U_f se reescribe utilizando integración por partes, igualando el término de la integral de superficie a cero de acuerdo a las condiciones de frontera de los campos y posteriormente se utiliza la ecuación de rotacional de \vec{H} , como se detalla a continuación

$$\begin{aligned}
(\vec{H}, \vec{H}) &= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (\vec{H}, \hat{\Theta}\vec{H}) \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \int \vec{H}^* \cdot \nabla \times \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} dV \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \int (\nabla \times \vec{H})^* \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} dV \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \omega^* \omega \epsilon_0^2 (\vec{E}, \epsilon \vec{E}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la funcional U_f queda expresada como

$$U_f = \frac{\omega^2 (\nabla \times \vec{E}, \nabla \times \vec{E})}{\omega^{*2} (\vec{E}, \epsilon \vec{E})} = \frac{\omega^2 \int |\nabla \times \vec{E}|^2 d^3\vec{r}}{\omega^{*2} \int \epsilon |\vec{E}|^2 d^3\vec{r}}, \quad (2.47)$$

entonces, la funcional tiene sus menores valores cuando el denominador tiene sus mayores valores y el numerador tiene sus menores valores, y esto ocurre respectivamente, si la energía del campo eléctrico se concentra más en las regiones de mayor permitividad relativa y si las oscilaciones espaciales del campo eléctrico en dichas regiones son menores que en las regiones de menor permitividad; manteniendo la ortogonalidad con los modos de menor frecuencia de acuerdo al principio variacional de U_f . Por lo tanto ha quedado demostrada la regla de los eigenvectores.

2.4 Invariancia en la escala espacial de las ecuaciones de Maxwell.

Ya se ha demostrado que el problema de encontrar los campos eléctrico y magnético se puede plantear en términos de un problema de eigenvalores para el vector \vec{H} ,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}).$$

Una propiedad sumamente importante de las ecs. de Maxwell macroscópicas de materiales se deduce de esta ecuación. Para comenzar, se define el re-escalamiento en la variable espacial como $\vec{r}' = \alpha \vec{r}$, donde α es un número positivo. Esta transformación hace que cada una de las coordenadas del vector posición sean multiplicada por α , luego, como el operador nabla va como las derivadas de las coordenadas del vector posición, entonces, sin pérdida de generalidad se expresa $\nabla' = \nabla/\alpha$. Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene

$$\alpha \nabla' \times \left(\frac{1}{\epsilon(\frac{\vec{r}'}{\alpha})} \alpha \nabla' \times \vec{H} \left(\frac{\vec{r}'}{\alpha} \right) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H} \left(\frac{\vec{r}'}{\alpha} \right). \quad (2.48)$$

Sea $\epsilon'(\vec{r}') \equiv \epsilon(\vec{r}'/\alpha)$, la permitividad relativa del material con dimensiones re-escaladas, y sea $\vec{H}'(\vec{r}') \equiv \vec{H}(\vec{r}'/\alpha)$, un eigenvector del operador que describe el problema re-escalado, entonces, sustituyendo se obtiene

$$\nabla' \times \left(\frac{1}{\epsilon'(\vec{r}')} \nabla' \times \vec{H}'(\vec{r}') \right) = \left(\frac{\omega}{\alpha'c} \right)^2 \vec{H}'(\vec{r}'). \quad (2.49)$$

En conclusión, el problema re-escalado tiene eigenvalores que son iguales a los del problema original por un factor $1/\alpha'^2$. Este resultado es muy importante en la práctica, por ejemplo, se puede diseñar y construir un cristal fotónico en la región de las microondas, entonces, el cristal tendrá parámetros de red del orden de centímetros y se pueden encontrar experimentalmente sus eigenvalores y eigenvectores para, posteriormente, utilizar esta información para construir un cristal fotónico en la región del visible, el cual tendrá parámetros de red del orden de nanómetros.

2.5 Anisotropía en la respuesta eléctrica de un sólido y tensor de índices de refracción.

Como el campo eléctrico es un vector, la respuesta eléctrica de un material se puede estudiar en diferentes direcciones, y en general, la respuesta será diferente en cada dirección. En cada punto del material basta con especificar la respuesta eléctrica en las direcciones principales que pasan por el punto⁸ [26]. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que las direcciones principales en cada punto del material forman un sistema cartesiano. Entonces, si la respuesta es lineal en las tres direcciones, la permitividad relativa del material es un tensor de segundo orden en cada punto del material, y la ecuación del vector desplazamiento en cada punto del material se reescribe como⁹

$$D_i(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega) E_j(\vec{r}, t) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.50)$$

donde ϵ_{ij} son las componentes del tensor permitividad relativa del material.

Para un material que cumple las ecs. (2.17) y (2.50), las densidades de energía eléctrica y magnética son

$$w_e \equiv \frac{1}{8\pi} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} E_i(\vec{r}, t) \varepsilon_0 \epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega) E_j(\vec{r}, t), \quad (2.51)$$

$$w_m \equiv \frac{1}{8\pi} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} \mu_0 \mu(\vec{r}, \omega) H^2(\vec{r}, t). \quad (2.52)$$

Entonces, derivando con respecto al tiempo cada una de las ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_0 \epsilon_{ij}(\vec{r}, \omega) [E_i \dot{E}_j + E_j \dot{E}_i], \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} [B_i \dot{H}_i + H_i \dot{B}_i]. \quad (2.54)$$

donde el punto sobre la variable representa la operación de derivada parcial con respecto al tiempo.

Por otro lado, si se multiplica por \vec{H} la ecuación de rotacional del campo eléctrico, ec. (2.13), con un producto punto, se tiene

⁸ Esto es análogo a como se definen las componentes del tensor de esfuerzos, véase el capítulo 5 de este trabajo.

⁹ En esta ecuación se utiliza la convención de suma de Einstein: Siempre que un mismo índice aparece por pareja en una o dos literales, en el mismo miembro de una expresión, significa suma sobre los valores de ese índice.

$$-\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.55)$$

donde se utilizó propiedades del producto mixto. Análogamente, si se multiplica por \vec{E} la ecuación rotacional del vector de intensidad magnética, ec. (2.13), con un producto punto, suponiendo que no hay corrientes libres en el material, se obtiene

$$-\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.56)$$

Restando las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right], \quad (2.57)$$

que se puede reescribir como:

$$-\nabla \cdot \vec{S} = [\dot{B}_i H_i + \dot{D}_i E_i], \quad (2.58)$$

donde $\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$ se denomina vector de Poynting.

Como los índices i, j son mudos¹⁰ en la ec. (2.51), entonces se pueden intercambiar en el último término de la ecuación, con lo cual, se obtienen dos resultados muy importantes: Primero, el teorema de conservación de la energía electromagnética, por simple sustitución de las ecs. (2.51) y (2.52) en la ec. (2.58):

$$-\nabla \cdot \vec{S} = \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \omega = \omega_e + \omega_m. \quad (2.59)$$

Segundo, dado que el intercambio de índices en la ec. (2.51) es independiente del valor del campo eléctrico, entonces, el tensor de permitividad relativa debe ser simétrico y sólo seis de sus nueve componentes son distintas.

La simetría del tensor de permitividad relativa hace posible reducir la expresión de la densidad de energía eléctrica a una forma cuadrática

$$8\pi\omega_e = \varepsilon_0 \varepsilon_{kl} E_k E_l = \varepsilon_0 (\varepsilon_{11} E_1^2 + \varepsilon_{22} E_2^2 + \varepsilon_{33} E_3^2 + 2\varepsilon_{12} E_1 E_2 + 2\varepsilon_{13} E_1 E_3 + 2\varepsilon_{23} E_2 E_3)$$

Como ω_e siempre es positiva para cualquier valor del campo eléctrico, entonces, la ecuación anterior representa un elipsoide, el cual siempre se puede transformar a su expresión en un sistema de ejes principales:

¹⁰ En una ecuación escrita con notación de índices, se dice que un índice es mudo si aparece dos veces en un término de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación $a_{ij}=b_{ik}c_{kj}$ el índice k es mudo.

$$\epsilon_{11}E_1^2 + \epsilon_{22}E_2^2 + \epsilon_{33}E_3^2 = \frac{8\pi}{\epsilon_0}\omega_e.$$

En este sistema de “ejes principales” se tiene que

$$\begin{cases} D_1 = \epsilon_0\epsilon_{11}E_1 \\ D_2 = \epsilon_0\epsilon_{22}E_2 \\ D_3 = \epsilon_0\epsilon_{33}E_3 \end{cases}$$

Entonces,

$$\frac{D_1^2}{\epsilon_{11}} + \frac{D_2^2}{\epsilon_{22}} + \frac{D_3^2}{\epsilon_{33}} = \frac{8\pi}{\epsilon_0}\omega_e.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $x_i = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{8\pi\omega_e}}D_i$ en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1, \quad (2.60)$$

donde se han identificado los semiejes principales del elipsoide con las raíces cuadradas de los índices de refracción en las direcciones de los ejes principales. Ésta es la ecuación del denominado elipsoide de índices de refracción y sirve para definir al tensor de índices de refracción en el sistema de ejes principales:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3^2} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Para obtener el tensor de permitividad relativa en el sistema de ejes principales, basta recordar que el índice de refracción en una dirección principal, en un sólido dieléctrico no magnético con respuesta lineal a los campos electromagnéticos, es igual a la raíz cuadrada de la permitividad relativa en la misma dirección.

Capítulo 3

Simetrías de sólidos y Electromagnetismo

En el capítulo anterior se presentó el problema electromagnético de un material a través de una ecuación de eigenvalores, el objetivo, determinar al vector $\vec{H}(\vec{r})$ en cada punto \vec{r} del material. Ahora, si el material posee alguna simetría geométrica esta tarea se simplifica porque los puntos del material que cumplen con la simetría deben tener la misma respuesta a algún estímulo físico, en particular, a los campos electromagnéticos. El desarrollo de esta afirmación es el contenido de este capítulo.

3.1 Simetrías de sólidos.

Matemáticamente, una transformación puntual¹ de \mathbb{R}^3 que deja invariante al conjunto define una simetría del conjunto. Las transformaciones puntuales se realiza con respecto a un elemento geométrico del conjunto, y las simetrías que definen esta clase de transformación se pueden clasificar por el elemento geométrico con respecto al cual se realiza la misma. Entonces, si la transformación se lleva a cabo con respecto a un punto se denomina inversión, y si esta transformación deja invariante al conjunto de puntos se dice que el conjunto tiene simetría de inversión; si el elemento geométrico es una recta o eje, la transformación es una rotación, y si hay invariancia, el conjunto tiene simetría de rotación; si el elemento geométrico es un plano, la transformación es una reflexión, y si hay invariancia, el conjunto tiene simetría de reflexión.

Otro tipo de transformación de un conjunto de puntos son las translaciones. Estas desplazan cada punto una misma distancia en una misma dirección. Si la imagen de la transformación de translación es igual al dominio de ésta, se dice que hay simetría ante la translación.

En el estudio de los sólidos, el dominio de las transformaciones es el conjunto de puntos que conforman al sólido y los elementos geométricos con respecto a los cuales se realizan las transformaciones puntuales son los puntos, rectas y planos del sólido; y el conjunto de transformaciones (puntuales y de translación) que dejan invariante al sólido forman las simetrías del sólido.

Si una transformación puntual del sólido define una simetría, entonces, la operación matemática de la transformación (llevar un punto del sólido a otro lugar con respecto a un elemento geométrico del mismo) es completamente equivalente a la situación física de observadores equivalentes². En el siguiente párrafo se expone esta idea con un ejemplo concreto.

¹ Una transformación puntual es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos y cuyo codominio es otro conjunto de puntos, la cual transforma al menos un punto en sí mismo.

² Es claro que es condición necesaria que ambos observadores se encuentren en sistemas de referencia inerciales.

Supóngase que el material es un sólido que tiene simetría de rotación de 90° alrededor de uno de sus ejes principales³, físicamente, esto significa que dos observadores ubicados uno respecto al otro a 90° , y con respecto al eje principal del sólido que está asociado a la simetría (figura 3.1), van a observar lo mismo; es decir, cualquier función de respuesta del sólido que varíe con la posición de los puntos del mismo tendrá los mismos valores en cada punto para ambos observadores a un mismo estímulo. Situaciones análogas suceden para cualquier otra simetría que tenga el sólido. A continuación se desarrollará de forma matemática la situación física aquí expuesta.

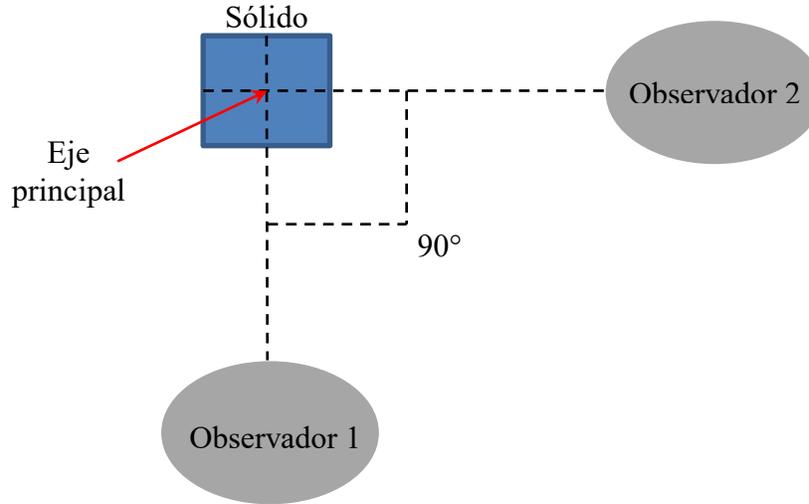


Figura 3.1 Esquema de la simetría de rotación de 90° con respecto a un eje principal de un sólido.

Una transformación espacial⁴ se representa por un operador $\widehat{\mathcal{M}}$ que actúa sobre los puntos \vec{r} de un conjunto y da como resultado un punto \vec{r}' de otro conjunto de puntos, esto es

$$\vec{r}' = \widehat{\mathcal{M}}\vec{r}. \quad (3.1)$$

Por otro lado, una función de respuesta del sólido se representa por una funcional $\widehat{\mathcal{L}}$, definida en la imagen de una función vectorial $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ y cuya imagen $\vec{R}(\vec{r})$ representa la “reacción” del sólido al ser sometido a un “agente físico”, por ejemplo, presión, campo eléctrico, campo gravitacional, etc.; y claramente $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ representa el valor del agente físico en cada punto del sólido. Entonces, las respuestas del sólido, medidas por los observadores, son

$$\vec{R}(\vec{r}) = \widehat{\mathcal{L}}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \quad (3.2)$$

³ Aquellos ejes definidos por el tensor de inercia.

⁴ Transformación puntual cuyo dominio es un conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 y cuyo codominio es otro conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 .

$$\vec{R}'(\vec{r}') = \hat{L}'\vec{E}'(\vec{r}'). \quad (3.3)$$

De forma análoga, se definen las transformaciones espaciales $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}$ y $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1}$ sobre una función vectorial de los puntos del sólido como

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\vec{E}(\vec{r}), \quad (3.4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1}\vec{E}'(\vec{r}'). \quad (3.5)$$

Nótese que estas transformaciones actúan tanto en los puntos del sólido como en los operadores.

De acuerdo a lo anterior, la condición física de que ambos observadores reportan lo mismo a causa de la simetría del sólido es

$$\vec{R}(\vec{r}) = \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1}\vec{R}'(\vec{r}'), \quad (3.6)$$

entonces, sustituyendo las ecs. (3.2) y (3.3) en la condición de simetría, ec. (3.6), se tiene

$$\hat{L}\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1}\hat{L}'\vec{E}'(\vec{r}'), \quad (3.7)$$

y sustituyendo la ec. (3.4) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\hat{L}\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1}\hat{L}'\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\vec{E}(\vec{r}). \quad (3.8)$$

En el análisis funcional se demuestra que los operadores lineales se representan como elementos de matriz usando una base completa del dominio y una base completa del contra-dominio [25, 27, 28, 29], por lo que se puede representar la ec. (3.8) como un producto de componentes de matrices. Más aún, dado que \hat{L} y \hat{L}' tienen los mismos dominio y contra-dominio, y representan una misma “regla” de relación, entonces, los operadores son iguales y a lo más difieren en sus componentes de matriz y son tales que

$$\hat{L} = \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1}\hat{L}'\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}. \quad (3.9)$$

Multiplicando la ec. (3.9) por la matriz $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}$ (por la izquierda) se obtiene

$$\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\hat{L} - \hat{L}'\hat{\Omega}_{\mathcal{M}} = 0, \quad (3.10)$$

donde se usó el hecho que $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1} = \mathbb{I}$, con \mathbb{I} la matriz identidad⁵. Si esta ecuación se aplica al operador $\hat{\Theta}$ definido en la ec. (2.24) y se multiplica la ecuación resultante por uno de sus eigenvectores $\vec{H}(\vec{r})$ por la derecha, se tiene

$$\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\hat{\Theta}\vec{H} - \hat{\Theta}\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\vec{H} = 0, \quad (3.11)$$

⁵ Que $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}^{-1} = \mathbb{I}$ es un resultado inmediato de las ecs. (3.4) y (3.5).

pero usando la ecuación de eigenvalores de $\hat{\Theta}$ con eigenvalor $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ en la ecuación anterior se tiene el siguiente resultado:

$$\hat{\Theta}(\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\vec{H}) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\vec{H}. \quad (3.12)$$

La ec. (3.12) dice que si \vec{H} es un eigenvector del operador $\hat{\Theta}$ con eigenvalor $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, entonces, $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}\vec{H}$ también es un eigenvector del operador con el mismo eigenvalor. Por lo tanto, la simetría del material indica la existencia de eigenvectores degenerados del operador $\hat{\Theta}$. Más aún, de acuerdo al análisis funcional, cuando dos operadores conmutan⁶ se pueden construir eigenvectores para ambos operadores de manera simultánea [25, 27, 28, 29] y esto proporciona una manera de clasificar los eigenvectores de acuerdo a las simetrías del sólido, porque, en general, es más sencillo encontrar los eigenvectores de un operador de simetría $\hat{\Omega}_{\mathcal{M}}$. En las siguientes secciones se presentarán algunas simetrías que pueden tener los sólidos y que son de importancia para este trabajo.

3.2 Simetría de traslación continua y discreta.

Las transformaciones de traslación desplazan los puntos de un sólido una cierta distancia d en una cierta dirección. Se define el operador de traslación que desplaza los puntos del sólido en la dirección y magnitud del vector \vec{d} como

$$\hat{T}_{\vec{d}}\vec{r} = \vec{r} - \vec{d}. \quad (3.13)$$

Por otro lado, la operación de traslación para una función vectorial, que depende de los vectores de posición del sólido, es tal que

$$\hat{\Omega}_{\vec{d}}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r} - \vec{d}). \quad (3.14)$$

Si la transformación es invariante para cualquier valor d en una dirección fija \hat{e} , esto es,

$$\hat{\Omega}_{d\hat{e}}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r} - d\hat{e}) = \lambda\vec{A}(\vec{r}) \quad \forall d \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

con λ una constante, entonces, el sólido tiene simetría de traslación continua en la dirección \hat{e} . Una clase de funciones que cumple esta condición de simetría son las funciones exponenciales, y en particular, las funciones exponenciales complejas como se muestra a continuación

$$\hat{\Omega}_{d\hat{e}}\vec{B} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) = \vec{B} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - id\vec{k} \cdot \hat{e} + \varphi) = \exp(-id\vec{k} \cdot \hat{e})\vec{B} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi).$$

donde \vec{k} y \vec{B} son vectores cuyas componentes son constantes y φ es una constante. Por lo cual, cada función exponencial compleja $\vec{B} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, etiquetada por el vector \vec{k} y φ , es un

⁶ El conmutador de dos operadores \hat{A} y \hat{B} es $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Se dice que dos operadores conmutan si el conmutador de estos operadores es cero.

eigenvector del operador de traslación continua $\hat{\Omega}_{a\hat{e}}$ en la dirección \hat{e} , y $\exp(-id\vec{k} \cdot \hat{e})$ representa su conjunto (no numerable) de eigenvalores.

Si la transformación de traslación es invariante para múltiplos enteros de una distancia constante a en una dirección fija \hat{e} , es decir,

$$\hat{\Omega}_{an\hat{e}}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r} - an\hat{e}) = \lambda\vec{A}(\vec{r}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.16)$$

con λ una constante, entonces, el sólido tiene simetría de traslación discreta en la dirección \hat{e} . Las funciones exponenciales complejas cumplen esta condición porque

$$\hat{\Omega}_{an\hat{e}}\vec{B}\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) = \vec{B}\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - ian\vec{k} \cdot \hat{e} + \varphi) = \exp(-ian\vec{k} \cdot \hat{e})\vec{B}\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi).$$

donde \vec{k} y \vec{B} son vectores cuyas componentes son constantes. En este caso, cada función exponencial compleja $\vec{B}\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, etiquetada por el vector \vec{k} y φ , es un eigenvector del operador de traslación discreta $\hat{\Omega}_{an\hat{e}}$ en la dirección \hat{e} , y $\exp(-ian\vec{k} \cdot \hat{e})$ representa su conjunto (numerable) de eigenvalores.

3.3 Simetría de inversión espacial y temporal.

Como se mencionó al inicio del capítulo, si un sólido es invariante ante una transformación con respecto a uno de sus puntos, se dice que el sólido tiene simetría de inversión, figura 3.2. Si se selecciona como origen de referencia este punto, el operador de inversión \hat{Y} es tal que

$$\hat{Y}\vec{r} = -\vec{r}. \quad (3.17)$$

Por otro lado, la operación de inversión para una función vectorial, que depende de los vectores de posición del sólido, es tal que

$$\hat{\Omega}_Y\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(-\vec{r}). \quad (3.18)$$

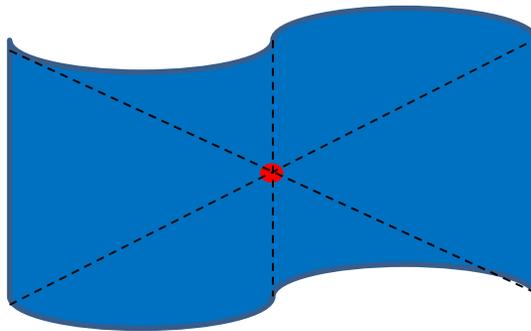


Figura 3.2 Sólido que tiene simetría de inversión con respecto al punto rojo.

Si el sólido es invariante ante la transformación de inversión se debe cumplir que

$$\widehat{\Omega}_Y \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(-\vec{r}) = \lambda \vec{A}(\vec{r}). \quad (3.19)$$

Pero si se aplica el operador de la transformación inversa por la izquierda a la ec. (3.19) se tiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = \lambda \vec{A}(-\vec{r}). \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la única forma en que las ecs. (3.19) y (3.20) se cumplan simultáneamente es que λ sea igual a 1 ó -1, y en consecuencia se pueden clasificar las eigenfunciones del operador $\widehat{\Omega}_Y$ en: Impares, si $\vec{A}(-\vec{r}) = -\vec{A}(\vec{r})$; y en pares, si $\vec{A}(-\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})$.

La respuesta de los sólidos a los campos electromagnéticos es de particular interés en este trabajo. La dependencia de estos campos con el tiempo permite estudiar otro tipo de simetría que se da en el conjunto del tiempo, y dado que este conjunto es isomorfo al conjunto de los números reales (\mathbb{R}), entonces, la única transformación puntual que se puede hacer es la inversión, físicamente, esto significa que la única simetría puntual que se puede estudiar es la inversión temporal, y para que exista esta simetría es necesario que la respuesta del sólido a los campos electromagnéticos sea reversible temporalmente.

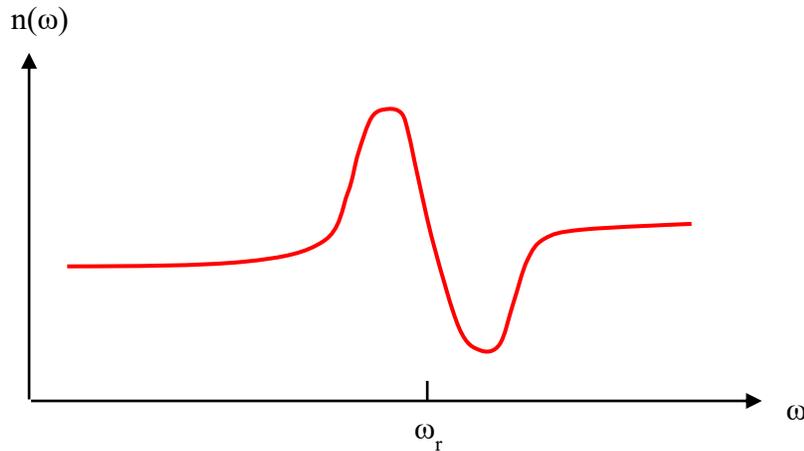


Figura 3.3. Dependencia del índice de refracción de un sólido dieléctrico lineal y no magnético con la frecuencia. Alrededor de la frecuencia de resonancia ω_r hay una gran variación del índice de refracción.

En el capítulo dos de este trabajo se estudió la respuesta de los sólidos tanto a campos eléctricos como a campos magnéticos. Se mencionó que los sólidos que tienen una respuesta lineal a los campos electromagnéticos armónicos temporales son tales que la permitividad y la permeabilidad relativas son funciones de la frecuencia. Esta dependencia implica la existencia de fenómenos de disipación en el sólido [21, 23, 30] y en consecuencia la respuesta no es reversible temporalmente.

Por ejemplo, la figura 3.3 muestra la “típica” dependencia en frecuencia del índice de refracción de un sólido dieléctrico lineal y no magnético. La región de frecuencias donde existe una gran variación en el índice de refracción está centrada en una frecuencia de resonancia del sólido [30, 31] y en esta región es donde son mayores los efectos de disipación.

Por lo tanto, en un intervalo de frecuencias que no incluye alguna de las frecuencias de resonancia, los sólidos dieléctricos, no magnéticos y no ferro-eléctricos, son tales que sus funciones de respuesta son reversibles temporalmente, en consecuencia, campos electromagnéticos de la forma $\vec{A} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ deben ser reversibles en sus trayectorias⁷, y como el vector \vec{k} es tangente a la trayectoria de propagación de los campos electromagnéticos, entonces, la condición de simetría de inversión temporal y la invariancia del operador $\hat{\Theta}$ ante inversión temporal implican que las eigenfunciones $\vec{A} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ y $\vec{A} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})$ tienen el mismo eigenvalor.

⁷ En este caso, la palabra trayectoria se refiere a la dirección de propagación de la onda electromagnética de frente de onda plana.

Capítulo 4

Cristales fotónicos unidimensionales

Los cristales fotónicos unidimensionales son un conjunto de láminas de diferentes materiales dispuestas en un orden periódico a lo largo de una dirección. En este trabajo sólo son de interés los materiales dieléctricos, y en particular, aquellos que son homogéneos y tienen una respuesta lineal e isotrópica a los campos electromagnéticos. En este capítulo se abordan los aspectos teóricos sobre este tipo de cristales fotónicos que son relevantes para resolver el problema planteado.

4.1 Lámina de sólido dieléctrico isotrópico y homogéneo.

En el capítulo 2 se explicó que los campos electromagnéticos en cualquier punto de un sólido no magnético y no dispersivo se obtienen resolviendo la ecuación de eigenvalores del operador $\hat{\Theta} \equiv \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times$ con la condición de divergencia nula del vector de intensidad magnética. Las hipótesis de homogeneidad e isotropía implican que la respuesta eléctrica del sólido es la misma en todas las direcciones y en todos los puntos del sólido, sin embargo, sólo en las direcciones paralelas a la placa existe simetría de traslación continua si se supone que la placa tiene extensión infinita¹.

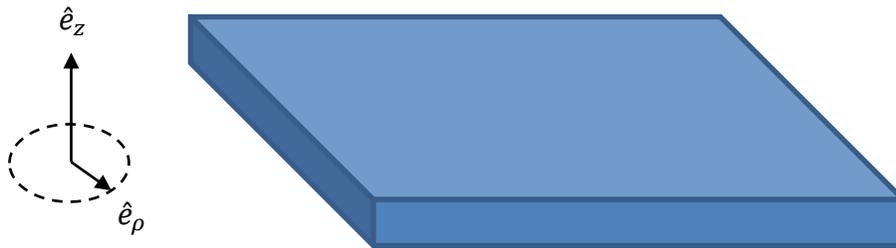


Figura 4.1 Lámina de sólido dieléctrico.

Sean \hat{e}_ρ un vector unitario cuya dirección es paralela al plano de la placa y \hat{e}_z un vector unitario perpendicular a \hat{e}_ρ , ver figura 4.1. La simetría de traslación continua a lo largo de cualquier dirección paralela a la placa implica que las eigenfunciones² del respectivo operador de simetría deben ser funciones exponenciales de la forma

$$\vec{h}(z) = \vec{h}_0 \exp(ik_z z) \exp(ik_{\parallel} \rho), \quad (4.1)$$

¹ Físicamente basta con que las dimensiones laterales de la placa sean mucho mayores al espesor de la placa.

² Apartir de aquí se utiliza de forma indistinta las palabras eigenvector y eigenfunción.

donde \vec{h}_0 es un vector constante, $k_{\parallel} = \vec{k} \cdot \hat{e}_{\rho}$ y $k_z = \vec{k} \cdot \hat{e}_z$ son constantes, y las componentes del vector posición son $z = \vec{r} \cdot \hat{e}_z$ y $\rho = \vec{r} \cdot \hat{e}_{\rho}$.

Dado que el operador de simetría de traslación continua conmuta con el operador $\hat{\Theta}$, las eigenfunciones expresadas en la ec. (4.1) también son eigenfunciones del operador $\hat{\Theta}$ y serán solución del problema electromagnético si y sólo si cumplen la condición de divergencia del vector de intensidad magnética. Por lo cual

$$\vec{h}_0 \cdot \vec{k} = 0. \quad (4.2)$$

Tomando en cuenta lo anterior, la ec. (2.25) para este tipo de sólidos implica que

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\epsilon}, \quad (4.3)$$

donde $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_z^2$ y ϵ es la permitividad relativa de la placa. Esto significa que los eigenvalores del operador $\hat{\Theta}$ se pueden clasificar de acuerdo a los valores de k_{\parallel} y k_z .

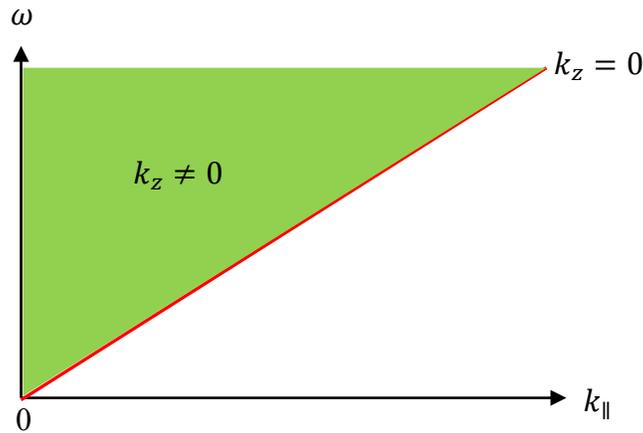


Figura 4.2 Esquema de representación de todos los eigenvalores del operador $\hat{\Theta}$ asociado a una placa dieléctrica homogénea, no magnética y no dispersiva, y de respuesta lineal e isótropa a campos electromagnéticos.

La figura 4.2 muestra un esquema de clasificación de los eigenvalores en un cuadrante cartesiano donde las ordenadas son los valores de ω y las abscisas son los valores de k_{\parallel} . La línea roja representa todos los eigenvalores de todos aquellos eigenvectores con $k_z = 0$. La zona verde representa todos los eigenvalores de todas aquellas eigenfunciones con k_z distinto de cero, en particular, en el eje de las ordenadas están todos los eigenvalores de todos los eigenvectores con $k_z \neq 0$ y $k_{\parallel} = 0$; esta última zona es muy importante en este trabajo porque corresponde a los

campos que se transmiten paralelos al eje de simetría principal de una “pila” de láminas de sólidos dieléctricos.

4.2 Cristal fotónico unidimensional.

Muchas de las ideas más importantes sobre cristales fotónicos se pueden estudiar en un cristal fotónico unidimensional formado por un conjunto de láminas alternadas de dos distintos sólidos dieléctricos en una configuración periódica con parámetro de red a [24], ver figura 4.3. Cada lámina es un sólido dieléctrico homogéneo, no magnético y no dispersivo con respuesta lineal e isotropa a campos electromagnéticos. Este tipo de cristales fotónicos tiene una simetría de traslación discreta en la dirección de su eje principal (eje perpendicular a las láminas). Por lo cual, las eigenfunciones del operador de simetría deben ser de la forma

$$\vec{h}(\vec{r}) = \vec{h}_0 \exp(ik_z z) \exp(ik_{\parallel} \rho), \quad (4.4)$$

donde \vec{h}_0 es un vector constante, $k_{\parallel} = \vec{k} \cdot \hat{e}_{\rho}$ y $k_z = \vec{k} \cdot \hat{e}_z$ son constantes, y las componentes del vector posición son $z = \vec{r} \cdot \hat{e}_z$ y $\rho = \vec{r} \cdot \hat{e}_{\rho}$. Las componentes del vector \vec{k} sirven para clasificar (etiquetar) las eigenfunciones.

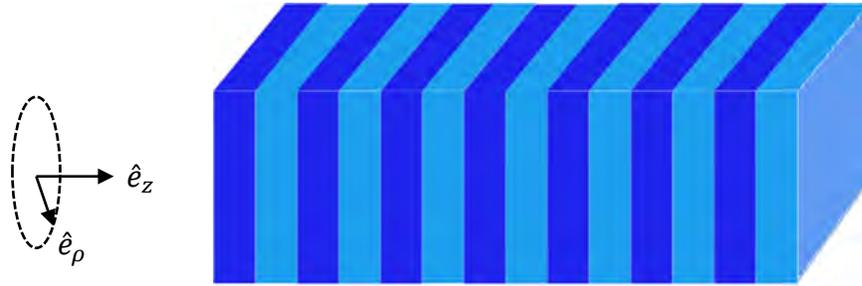


Figura 4.3. Cristal fotónico unidimensional formado por láminas alternas de dos distintos sólidos dieléctricos con el mismo espesor ($a/2$) en una configuración periódica con parámetro de red a .

Dado que el parámetro de red es a entonces cualquier eigenfunción con $k'_z = k_z + n \frac{2\pi}{a}$, n número entero, también es una eigenfunción del operador de simetría con el mismo eigenvalor. Por lo tanto, la forma más general de expresar las eigenfunciones del operador de simetría es

$$\vec{h}(\vec{r}) = \exp(ik_{\parallel} \rho) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{C}_n \exp \left[i \left(k_z + n \frac{2\pi}{a} \right) z \right] \quad (4.5)$$

donde \vec{C}_n son vectores que no dependen de z .

Un resultado del análisis funcional es que el conjunto

$$\left\{ \exp\left(\frac{in_1 2\pi z}{a}\right), \exp\left(\frac{in_2 2\pi z}{a}\right), \dots \right\} \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad (4.6)$$

es una base del espacio de funciones periódicas con periodo a que son cuadrado integrables en un período [27, 28]. Entonces, para una k_z fija en el intervalo $(-\pi/a, \pi/a)$, este conjunto también es una base del espacio de eigenfunciones del operador de simetría de traslación continua, y dado que el operador de simetría conmuta con el operador $\hat{\Theta}$, este conjunto también es una base del espacio de eigenfunciones del operador $\hat{\Theta}$.

Por lo tanto, en el espacio de puntos del cristal se tiene un vector de red primitivo $a\hat{e}_z$, y a causa de la periodicidad, existe un espacio recíproco, también periódico, con vector de red primitivo $(2\pi/a)\hat{e}_z$ tal que si la componente k_z es un elemento de la primera zona de Brillouin $(-\pi/a \leq k_z \leq \pi/a)$ de este espacio, entonces las eigenfunción etiquetadas con k_z no son degeneradas a causa de la simetría y son iguales a una onda plana ($\exp(ik_z z)$) por una función periódica con periodo a . Este resultado es conocido como teorema de Bloch en la Física del estado sólido.

Sin embargo, a causa de la simetría de inversión temporal, existe degeneración en la primera zona de Brillouin porque cada eigenfunción etiquetada con k_z tiene el mismo eigenvalor que la eigenfunción etiquetada con $-k_z$. Además, a causa de la simetría de traslación discreta, cada eigenfunción etiquetada con k_z tiene un conjunto no acotado y numerable de eigenvalores, tal y como se demostró en el capítulo 3. A partir de ahora se centrará la atención en las eigenfunciones con $k_{\parallel} = 0$, esto es, en los campos que se transmiten paralelos al eje principal del cristal fotónico unidimensional.

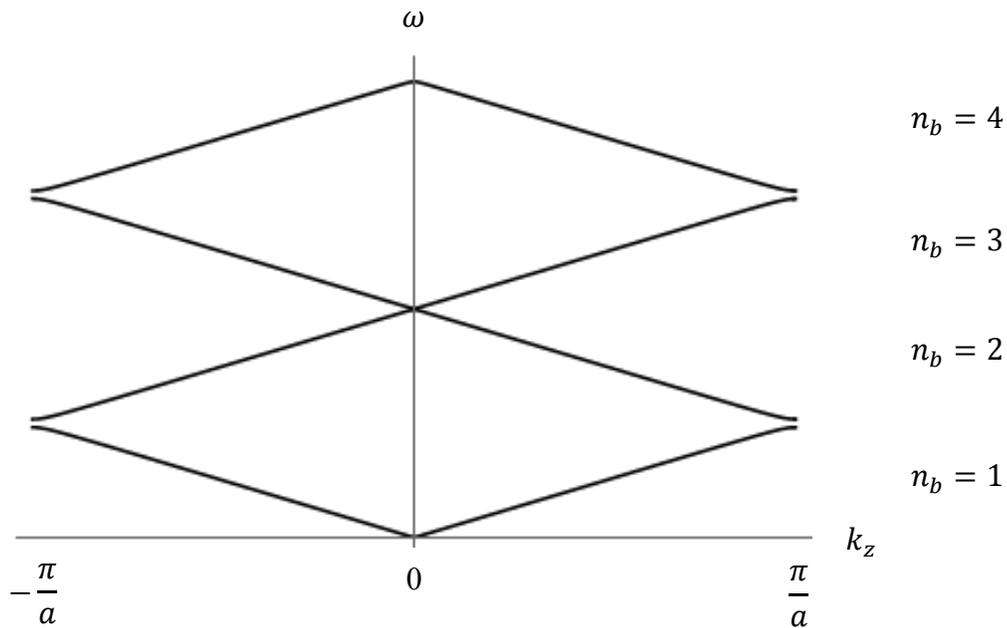


Figura 4.4 Espectro de bandas en la primera zona de Brillouin de un cristal fotónico unidimensional de dos láminas alternadas en arreglo periódico con parámetro de red a . Las láminas tienen igual espesor y una diferencia de permitividades relativas $\Delta\epsilon = |\epsilon_2 - \epsilon_1| = 0.4$. Los campos se transmiten paralelos al eje principal del cristal.

La figura 4.4 muestra el conjunto de eigenvalores de las eigenfunciones que son solución de la ecuación de eigenvalores del operador $\hat{\Theta}$ asociado a un cristal fotónico unidimensional de dos láminas alternadas en arreglo periódico con parámetro de red a . Las láminas tienen igual espesor y una diferencia de permitividades relativas $\Delta\epsilon = |\epsilon_2 - \epsilon_1| = 0.4$. Las eigenfunciones se etiquetan con los valores de k_z . Nótese que para cada valor de k_z existe un conjunto infinito de eigenvalores ω (frecuencias angulares) y se numeran con n_b . Además, existe un conjunto de frecuencias angulares que no están asociadas a algún valor de k_z , por ejemplo, entre los eigenvalores etiquetados con $n_b = 1$ y los eigenvalores etiquetados con $n_b = 2$, y se dice que hay una “brecha” entre las “bandas” de eigenvalores etiquetadas con $n_b = 1$ y $n_b = 2$. ¿Cuál es la causa de la existencia de estas brechas en el conjunto de eigenvalores? ¿Qué determina su tamaño? Estas preguntas se resolverán en las siguientes secciones.

4.3 Origen físico de las brechas.

Las “brechas de banda” son una consecuencia de la in-homogeneidad del material y se puede explicar esta afirmación con el principio variacional de la electrodinámica. Para entender esto, préstese atención a las eigenfunciones en la frontera de la primera zona de Brillouin (π/a) y que corresponden a las bandas $n_b = 1$ y $n_b = 2$ en la figura 4.4. Cada una de estas eigenfunciones tiene una longitud de onda de $2a$, esto es, el doble de la periodicidad del cristal. Entonces, se requiere acomodar un período de estas eigenfunciones en cuatro láminas del cristal de tal forma que se conserve la propiedad de traslación discreta, esto es,

$$\vec{H}_{\frac{\pi}{a}}(z) = \alpha \vec{H}_{\frac{\pi}{a}}(z + a), \quad 0 \leq z \leq 2a, \quad (4.7)$$

donde α es un coeficiente que no depende de z . Por lo tanto, sólo existen dos formas en que estas eigenfunciones pueden existir en el cristal, a saber, los nodos de la eigenfunción deben estar en el centro de las láminas de menor permitividad relativa, o los nodos deben estar en los centros de las láminas de mayor permitividad relativa.

Pero, ¿cuál de estas dos eigenfunciones corresponde a la banda $n_b = 1$ y cuál a la banda $n_b = 2$? La respuesta la proporciona el principio variacional de la electrodinámica. De acuerdo a este principio, las eigenfunciones tienden a concentrar la energía de campo eléctrico en las zonas de mayor permitividad relativa permaneciendo ortogonales al conjunto de eigenfunciones con menor eigenvalor. Por lo cual, una eigenfunción tiene más energía de campo eléctrico³ concentrado en las zonas de mayor permitividad relativa, a causa de que sus nodos están en los centros de las láminas de menor permitividad relativa, entonces, a esta eigenfunción le corresponde una frecuencia angular menor porque minimiza la funcional de la energía electromagnética (U_f) en mayor medida que la otra eigenfunción, ver ec. (2.47); y por lo tanto, le corresponde estar en la banda $n_b = 1$ de menor frecuencia angular. Se puede generalizar este resultado afirmando que las eigenfunciones con eigenvalores en la banda $n_b = 1$ tienden a concentrar en mayor medida la energía de campo eléctrico en las zonas de mayor permitividad relativa, mientras que las eigenfunciones con eigenvalores arriba de la brecha tienden a concentrar en mayor medida la energía de campo

³ La energía de campo eléctrico es proporcional a la amplitud al cuadrado de la eigenfunción.

eléctrico en las zonas de menor permitividad relativa. Por lo tanto, la brecha del conjunto de eigenvalores que son solución del operador $\hat{\Theta}$ es consecuencia de la discontinuidad en la distribución de la energía de las eigenfunciones y la causa de esto es la “in-homogeneidad” del cristal.

En efecto, la causa es la in-homogeneidad del cristal que propicia la existencia de gradientes de permitividad relativa y en consecuencia la existencia de brechas. Entonces, si la periodicidad del cristal unidimensional se rompe, por ejemplo, con la inserción de una lámina de diferente permitividad relativa, el cristal aún tendrá una brecha en el conjunto de eigenvalores de $\hat{\Theta}$, pues el cristal sigue siendo in-homogéneo. Más adelante se estudiará que sucede con los cristales fotónicos unidimensionales con una lámina de diferente permitividad relativa que rompe la periodicidad. Por ahora, basta con hacer énfasis en que cualquier contraste en la permitividad relativa de las láminas de un cristal fotónico unidimensional propiciará la aparición de brechas en el conjunto de eigenvalores de $\hat{\Theta}$.

4.4 El tamaño de la brecha.

El “ancho” en frecuencia angular $\Delta\omega$ no es una buena medida del tamaño de las brechas, porque los eigenvalores de $\hat{\Theta}$ son re-escalables si hay un re-escalamiento en las dimensiones del cristal, tal y como se demostró en el capítulo 2. En cambio, la razón entre el ancho del gap $\Delta\omega$ y la frecuencia angular media de la brecha ω_m es una medida de la brecha que no es afectada por el re-escalamiento del sistema. A esta razón $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_m}\right)$ se le denomina “gap-midgap ratio” y cuando se mencione el tamaño de la brecha se pensará en el valor de esta razón.

Para un cristal fotónico unidimensional formado por un conjunto de láminas alternadas de dos distintos sólidos dieléctricos en una configuración de periodo a , una con espesor d y la otra con espesor $a - d$, se tiene una expresión analítica aproximada del tamaño de la brecha entre las dos primeras bandas para transmisión paralela al eje principal del cristal, a saber,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} \cong \frac{\Delta\epsilon \operatorname{sen}(\pi d/a)}{\epsilon \pi}, \quad (4.8)$$

donde ϵ es la menor de las permitividades relativas de las láminas y $\Delta\epsilon$ es la diferencia de permitividades relativas de las láminas. La expresión anterior se cumple si $\Delta\epsilon$ es menor a 0.5 [24, 32, 33, 34].

De acuerdo a la ecuación anterior, el tamaño de la primera brecha del espectro de bandas de un cristal fotónico unidimensional con láminas de igual espesor sólo depende del valor de las permitividades relativas de las láminas.

Otras expresiones analíticas para diferentes valores de $\Delta\epsilon/\epsilon$ y espesores de las láminas se pueden encontrar en la literatura de cristales fotónicos, por ejemplo, Joannopoulos, J. D. *et al.* (2008).

4.5 Las brechas y los modos evanescentes.

En el capítulo 1, se dijo que una onda electromagnética monocromática, con una frecuencia dentro de alguna de las brechas del espectro de bandas del operador $\hat{\Theta}$ asociado a un cristal fotónico unidimensional, que incide sobre una de las láminas externas del cristal sufre una reflexión total. En esta sección se da una explicación teórica de esta afirmación.

Para comenzar, recuérdese que el vector \vec{k} apareció como un coeficiente de las eigenfunciones del operador de simetría de traslación discreta del cristal. Por lo cual, este coeficiente puede pertenecer al conjunto de los vectores con componentes complejas, siempre y cuando se asocie un sentido físico a las partes imaginarias. Por ejemplo, para incidencia normal ($k_{\parallel} = 0$), las eigenfunciones del cristal fotónico son de la forma

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{h}_0 \exp(-\kappa z) \exp(ik_z) u(z), \quad (4.9)$$

donde κ es un número real y $u(z)$ es una función periódica. Nótese que es la misma solución que se propuso en la ec. (4.5) pero la componente del vector \vec{k} en la dirección principal del cristal es compleja ($k_z + i\kappa$). La parte imaginaria de la componente del vector \vec{k} ocasiona que la solución decaiga exponencialmente si $\kappa > 0$, lo cual debe siempre ser cierto porque no se espera que los campos aumenten su amplitud si no existen fuentes de campo en el cristal ni dispersión en los materiales que propicien la existencia de frecuencias de resonancia.

En la banda $n_b = 1$ del espectro de bandas del cristal fotónico unidimensional, figura 4.4, la frecuencia angular es una función de k_z , por lo cual, se puede aproximar el valor de $\omega(k_z)$ con un desarrollo en serie de Taylor alrededor de alguna k_z , en particular en la frontera de la primera zona de Brillouin (π/a), pero debido a la simetría de inversión temporal, el desarrollo sólo puede tener potencias pares de $(k_z - \pi/a)$, entonces

$$\delta\omega \equiv \omega(k_z) - \omega\left(\frac{\pi}{a}\right) \approx \alpha \left(k_z - \frac{\pi}{a}\right)^2 = \alpha(\delta k_z)^2, \quad (4.10)$$

donde α es el coeficiente de segundo grado del desarrollo. Un desarrollo análogo se puede hacer con las frecuencias angulares de la banda $n_b = 2$. De acuerdo a la figura 4.4, en la frontera de la primera zona de Brillouin, $\delta\omega > 0$ para la banda $n_b = 2$, y α es positivo por estar alrededor de un mínimo relativo, por tanto δk_z debe ser un número real. Análogamente, $\delta\omega < 0$ para la banda $n_b = 1$, y α es negativo por estar alrededor de un máximo relativo por lo que δk_z debe ser un número real.

Por lo tanto, a pesar de que se incluyó la forma más general de las funciones que cumplen la condición de simetría, esto es, vector \vec{k} complejo, se demostró que las eigenfunciones que están cerca de la frontera de la primera zona de Brillouin son campos que se extienden por todo el cristal, porque la componente k_z no tiene parte imaginaria, y además, son tales que su frecuencia angular es real por ser eigenfunciones del operador $\hat{\Theta}$. Se concluye que las eigenfunciones del operador $\hat{\Theta}$ no son de tipo evanescente, y por otro lado, se afirma que las frecuencias angulares de las brechas corresponden a campos evanescentes, cuya componente k_z , en la primera zona de Brillouin, tiene

una parte real igual a π/a y una parte imaginaria mayor que cero, y por lo cual, la energía electromagnética de estos campos es escasamente transmitida en el cristal en comparación a la energía que es reflejada.

4.6 Láminas defecto y modos defecto.

Es momento de estudiar qué sucede con los campos electromagnéticos dentro de un cristal unidimensional con estructura periódica rota por una lámina, la cual, se denominará lámina defecto en lo sucesivo. Nuevamente se restringe el análisis para campos electromagnéticos que se propagan paralelos al eje principal del cristal.

Para comenzar, supóngase que la lámina defecto es una lámina con un espesor diferente dentro del conjunto de láminas alternadas de dos distintos sólidos dieléctricos con el mismo espesor, ver figura 4.5. Este arreglo ya no tiene una red periódica. Sin embargo, intuitivamente, los campos electromagnéticos en el material, lejos de la lámina defecto, deben parecerse a los campos electromagnéticos con frecuencia angular igual a alguno de los eigenvalores del cristal perfecto, en particular, los eigenvalores de las fronteras inferior y superior de la primera brecha. Pero, ¿qué sucede con estos campos en la región cercana a la lámina defecto?

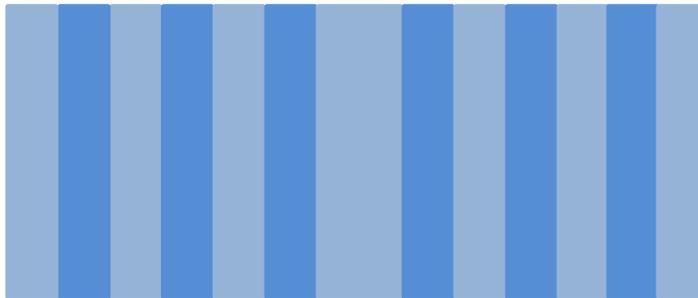


Figura 4.5 Cristal fotónico unidimensional con una lámina defecto de diferente espesor.

El principio variacional de la electrodinámica brinda la respuesta a la pregunta anterior, ya que sus consecuencias no dependen de la periodicidad del material. Concéntrese la atención en los dos campos electromagnéticos con frecuencias angulares iguales a los eigenvalores inferior y superior de la primera brecha del cristal perfecto. De acuerdo al principio variacional, las eigenfunciones que son solución del operador $\hat{\Theta}$ asociado al cristal con lámina defecto deben concentrar la energía de campo eléctrico, en mayor medida, en las regiones de mayor permitividad relativa, manteniéndose ortogonales a las eigenfunciones de menor frecuencia angular. Lejos de la lámina defecto sólo hay dos formas en que pueden existir los campos con $k_z = \pi/a$, a saber, sus nodos están centrados en las láminas de mayor permitividad relativa, o sus nodos están centrados en las láminas de menor permitividad relativa; tal y como se demostró en el caso de un cristal perfecto. Ahora, supóngase que la lámina defecto es una lámina de mayor permitividad relativa. Si los nodos están centrados en las láminas de menor permitividad relativa, la energía de campo eléctrico se concentrará en mayor medida en las láminas de mayor permitividad relativa incluida la lámina

defecto y a esta eigenfunción le corresponde una frecuencia angular menor porque minimiza la funcional de la energía electromagnética (U_f) en mayor medida que la otra eigenfunción.

Por lo tanto, al igual que en el cristal perfecto, se tienen bandas de frecuencia angular y existe una brecha de frecuencias a causa de la in-homogeneidad del material que propicia una discontinuidad en la distribución de la energía de campo eléctrico de las eigenfunciones del operador $\hat{\Theta}$. Pero hay una diferencia con respecto a las eigenfunciones del cristal perfecto, a saber, todas las eigenfunciones del cristal con lámina defecto tienden a concentrar gran parte de la energía de campo eléctrico en la lámina defecto o en las láminas vecinas a ésta, y conforme más diferencia exista entre la lámina defecto y las otras, mayor será la concentración de energía de campo eléctrico en la lámina defecto o en sus inmediaciones.

Este resultado es fundamental, ya que si se combina con lo que se sabe de cómo son los campos electromagnéticos con una frecuencia angular en la primera brecha del espectro de bandas del cristal perfecto, es factible pensar que alguno de los “modos evanescentes” con una frecuencia en esta brecha será tal que logrará propagarse por el cristal con lámina defecto y concentrará su energía de campo eléctrico, ya sea en la lámina defecto o en las inmediaciones de ésta. Y conforme mayor sea la diferencia entre la lámina defecto y las otras, mayor será la “factibilidad” de que alguno de los campos evanescentes pueda propagarse por el cristal con lámina defecto y concentrar su energía de campo eléctrico en alguna de estas zonas. A continuación se explora más esta idea con un caso concreto.

Supóngase que la lámina defecto es una de las láminas de menor permitividad relativa pero que tiene un espesor un poco mayor que el resto de las láminas. Ya se sabe que su conjunto de eigenvalores se separa en bandas divididas por brechas. La primera banda de eigenvalores es tal que el conjunto de eigenfunciones correspondientes tiende a concentrar en mayor medida su energía de campo eléctrico en las zonas de mayor permitividad relativa, en cambio, la segunda banda de eigenvalores es tal que el conjunto de eigenfunciones correspondiente tiende a concentrar en mayor medida su energía de campo eléctrico en las zonas de menor permitividad relativa. Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que una banda muy estrecha (un pico) dentro de la brecha de estas dos bandas corresponde a frecuencias angulares de campos que tienen la factibilidad de propagarse por el cristal con lámina defecto. Entonces, hay tres opciones de ubicar el pico en la brecha, a saber, cerca de la primera banda, en el centro de la brecha o cerca de la segunda banda. Para responder cuál es la opción adecuada hay que hacer un análisis relativo con el pico asociado a otro defecto que difiera muy poco del anterior en el mismo cristal. Para esto supóngase que el espesor de la lámina defecto aumenta un poco, entonces, con respecto al caso anterior, la permitividad relativa “global” del cristal es menor, en consecuencia, la funcional de la energía electromagnética evaluada en los campos asociados al pico debe ser mayor que la correspondiente al caso anterior, y por lo tanto, la frecuencia del pico debe ser mayor que la frecuencia del pico anterior. Entonces, por inducción se afirma que conforme aumenta el espesor de la lámina defecto mayor es la frecuencia del pico y por lo tanto este conjunto de picos debe estar cerca de la primera banda. Ahora, supóngase que la lámina defecto es nuevamente una de las láminas de menor permitividad relativa pero con un espesor un poco menor que el resto de las láminas. Nuevamente, hay tres opciones de ubicación del pico en la brecha, pero dado que la lámina defecto tiene menor espesor, la funcional de energía electromagnética evaluada en los campos asociados al pico es menor que en los casos anteriores, y por inducción se concluye que

conforme disminuye el espesor de la lámina defecto menor es la frecuencia del pico y el conjunto de picos debe estar cerca de la segunda banda.

En conclusión, si la lámina defecto es una lámina de menor permitividad relativa con un espesor mayor al de las otras láminas, existe un pico en la primera brecha, cercano a la primera banda, que corresponde a campos que se propagan por el material y concentran gran parte de la energía de campo eléctrico en la vecindad de la lámina defecto; y si el espesor de la lámina defecto aumenta gradualmente, el pico se aleja gradualmente de la primera banda distribuyendo una parte de la energía de campo eléctrico en la lámina defecto. En cambio, si el espesor es menor al de las otras láminas, existe un pico en la primera brecha, cercano a la segunda banda, que corresponde a campos que se propagan por el material y concentran gran parte de la energía de campo eléctrico en la lámina defecto; y si el espesor de la lámina defecto disminuye gradualmente, el pico se aleja gradualmente de la segunda banda distribuyendo parte de su energía de campo eléctrico en la vecindad de la lámina defecto.

Los modos (eigenfunciones) que eran evanescentes en un cristal perfecto y que se vuelven permitidos⁴ al incluir una lámina defecto se denominan modos defecto. En este trabajo se demuestra que la teoría de pequeñas perturbaciones proporciona un método para calcular los modos defecto de un cristal al incluir una lámina defecto, y un análisis análogo al presentado en esta sección se utilizará para saber si los resultados obtenidos son teóricamente consistentes. En la siguiente sección se exponen los detalles de la teoría de pequeñas perturbaciones.

4.7 Teoría de pequeñas perturbaciones.

La teoría de pequeñas perturbaciones proporciona un método para encontrar aproximaciones a las soluciones de un problema que difiere de otro, completamente resuelto, en un pequeño cambio en su planteamiento, pequeña perturbación. En el estudio de los cristales fotónicos, el problema de encontrar los campos electromagnéticos en el interior de los cristales está completamente definido por el operador $\hat{\Theta}$ con la condición de que la divergencia del vector de intensidad magnética sea nula. Por lo cual el planteamiento del problema se hace a través de la definición de dos operadores, el conocido y otro que contiene la información de la pequeña perturbación. En esta sección se desarrolla este planteamiento.

Supónganse que el operador $\hat{\Theta}_0$ define un cristal fotónico cuyas eigenfunciones $\vec{\mathcal{H}}_n$ (soluciones del problema) son conocidas. El subíndice n sirve para etiquetar, ordenar y numerar el conjunto de soluciones del problema y sus respectivos eigenvalores. En los cristales fotónicos unidimensionales con campos electromagnéticos que se propagan paralelos al eje principal del cristal, la etiqueta corresponde al valor de k_z en la primera zona de Brillouin y al número de banda. Por otro lado, supóngase que el problema perturbado está definido por el operador $\hat{\Theta}$ y es tal que

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_0 + \lambda \hat{\Theta}', \quad (4.11)$$

⁴ No evanescentes.

donde $\widehat{\Theta}'$ representa la perturbación al problema conocido y λ es un parámetro adimensional que puede ser igual a 1 sin pérdida de generalidad pero es conveniente dejarlo indicado para facilitar la verificación con el caso no perturbado ($\lambda = 0$).

Las eigenfunciones del problema perturbado son tales que

$$\widehat{\Theta}\vec{H}_n = \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \vec{H}_n, \quad (4.12)$$

donde ω_n es el eigenvalor de la eigenfunción \vec{H}_n . Análogamente, las eigenfunciones del problema conocido son tales que

$$\widehat{\Theta}_0\vec{\mathcal{H}}_n = \left(\frac{\varpi_n}{c}\right)^2 \vec{\mathcal{H}}_n. \quad (4.13)$$

La condición límite, no perturbación, implica que

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega_n = \varpi_n, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{H}_n = \vec{\mathcal{H}}_n. \end{cases} \quad (4.14)$$

El operador $\widehat{\Theta}_0$ es una funcional cuyo dominio es el conjunto de todas las funciones vectoriales de variable vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ que son cuadrado integrables en el espacio de puntos del cristal, esto es

$$\int_{\Omega} |\vec{H}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} < \infty, \quad (4.15)$$

donde Ω es el volumen del cristal, y que además cumplen la condición de divergencia del vector intensidad magnética y son solución del problema. El conjunto de eigenfunciones del operador $\widehat{\Theta}_0$ es una base de este conjunto [33]. Dado que el problema perturbado sólo difiere en una pequeña cantidad del original, se utiliza como hipótesis que el dominio del operador perturbado $\widehat{\Theta}$ es igual al dominio del operador no perturbado $\widehat{\Theta}_0$ y comparten la misma base [33]. Por lo tanto, toda eigenfunción del operador $\widehat{\Theta}$ se expresa como una combinación lineal de elementos de esta base, es decir

$$\vec{H}_n = \sum_{i=1}^{\infty} C_{in} \vec{\mathcal{H}}_i, \quad (4.16)$$

donde C_{in} son las componentes del n -ésimo eigenvector del operador $\widehat{\Theta}$. Con esta base se garantiza que se cumple la condición límite que se reescribe como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} C_{in} = \delta_{in}, \quad (4.17)$$

donde δ_{in} es la delta de Kronecker. Además, la ecuación de eigenvalores (4.12) se reescribe como

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_{in} \left(\frac{\varpi_i}{c}\right)^2 \vec{\mathcal{H}}_i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} C_{in} \widehat{\Theta}' \vec{\mathcal{H}}_i = \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} C_{in} \vec{\mathcal{H}}_i. \quad (4.18)$$

Supóngase que los elementos de la base están normalizados, entonces, multiplicando la ec. (4.18) por $\vec{\mathcal{H}}_j^*$ con un producto punto e integrando sobre Ω se tiene

$$C_{jn} \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_j}{c} \right)^2 \right] = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} C_{in} \hat{\Theta}'_{ji}, \quad (4.19)$$

donde

$$\hat{\Theta}'_{ji} = \int_{\Omega} \vec{\mathcal{H}}_j^* \cdot \hat{\Theta}' \vec{\mathcal{H}}_i d^3\vec{r}. \quad (4.20)$$

La ecuación (4.19) indica que dada una n se tiene un conjunto de ecuaciones numeradas por j , cuya solución proporciona todos los coeficientes del desarrollo lineal de la eigenfunción \vec{H}_n , en efecto, si el sistema de ecuaciones tiene solución su determinante debe ser cero. En la práctica no es posible hacer este procedimiento porque el conjunto de elementos de la base es infinito y es necesario buscar un método aproximado que proporcione una buena solución. Como no se pueden encontrar todos los elementos del desarrollo se tiene que centrar la atención en aquellos coeficientes que proporcionan mayor “peso” al desarrollo, esto significa, que dada una n hay que comparar las diferentes C_{jn} y por lo cual se puede comenzar haciendo la siguiente clasificación

$$j = n : C_{nn} \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 \right] = \lambda C_{nn} \hat{\Theta}'_{nn} + \lambda \sum'_{i=1}^{\infty} C_{in} \hat{\Theta}'_{ni}, \quad (4.21)$$

$$j \neq n : C_{jn} \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_j}{c} \right)^2 \right] = \lambda C_{nn} \hat{\Theta}'_{jn} + \lambda \sum'_{i=1}^{\infty} C_{in} \hat{\Theta}'_{ji}, \quad (4.22)$$

donde Σ' implica suma sin el elemento n -ésimo. Entonces

$$j = n : \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 = \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 + \lambda \hat{\Theta}'_{nn} + \lambda \sum'_{i=1}^{\infty} \frac{C_{in}}{C_{in}} \hat{\Theta}'_{ni}, \quad (4.23)$$

$$j \neq n : \frac{C_{jn}}{C_{nn}} = \frac{\lambda \hat{\Theta}'_{jn}}{\left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_j}{c} \right)^2 \right]} + \frac{\lambda}{\left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_j}{c} \right)^2 \right]} \sum'_{i=1}^{\infty} \frac{C_{in}}{C_{nn}} \hat{\Theta}'_{ji}. \quad (4.24)$$

Si se construyen soluciones normalizadas entonces para cada n se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_{in}|^2 = 1, \quad (4.25)$$

por lo que

$$|C_{nn}|^2 = \frac{1}{1 + \sum'_{i=1}^{\infty} \left| \frac{C_{in}}{C_{nn}} \right|^2}. \quad (4.26)$$

Las ecuaciones (4.24) y (4.26) proporcionan una “medida” relativa de los coeficientes del desarrollo lineal de cada eigenfunción en términos de los elementos de la base. Una prueba del

método consiste en encontrar las eigenfunciones del caso no perturbado ($\lambda = 0$). En este caso la ec. (4.24) indica que $C_{jn} = \delta_{jn}$ para $j \neq n$ y por lo cual, de acuerdo a la ec. (4.26), $C_{nn} = 1$ para $j = n$. Por lo tanto, de acuerdo a las ecs. (4.23) y (4.16) se tiene respectivamente que:

$$\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 = \left(\frac{\varpi_n}{c}\right)^2, \quad (4.27)$$

$$\vec{H}_n = \vec{\mathcal{H}}_n. \quad (4.28)$$

Lo cual es cierto. En efecto, el parámetro λ nos indica que tan perturbado está el material fotónico con respecto al conocido. Sin embargo, una pequeña perturbación significa tener un pequeño cambio con respecto al cristal conocido, entonces, la solución se puede obtener haciendo $\lambda \neq 0$ y sustituir las condiciones de los coeficientes a $\lambda = 0$ en la ec. (4.24). De acuerdo a esto se tiene

$$j = n : \quad C_{nn} = 1, \quad (4.29)$$

$$j \neq n : \quad C_{jn} = \frac{\lambda \hat{\Theta}'_{jn}}{\left[\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varpi_n}{c}\right)^2\right]}. \quad (4.30)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en las ecs. (4.23) y (4.16), y despreciando los términos con λ cuadrada, se obtiene respectivamente lo siguiente:

$$\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 = \left(\frac{\varpi_n}{c}\right)^2 + \lambda \hat{\Theta}'_{nn}, \quad (4.31)$$

$$\vec{H}_n = \vec{\mathcal{H}}_n + \lambda \sum'_{j=1} \frac{\hat{\Theta}'_{jn} \vec{\mathcal{H}}_j}{\left[\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varpi_n}{c}\right)^2\right]}. \quad (4.32)$$

Las últimas dos ecuaciones proporcionan la solución al problema perturbado en primer grado⁵ de λ . Sin embargo, la ec. (4.30) indica que existe una condición necesaria para que la solución cumpla con las hipótesis establecidas, a saber, para cada eigenfunción del problema perturbado etiquetada con n se debe tener un eigenvalor tal que:

$$\lambda \hat{\Theta}'_{jn} \leq \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varpi_j}{c}\right)^2 \quad \forall j \neq n. \quad (4.33)$$

Sin embargo, en los cristales fotónicos esta condición no se cumple debido a que los eigenvalores forman bandas continuas y la desigualdad no se cumple para toda j que etiqueta los eigenvalores del problema conocido.

Lo anterior se puede solucionar si de antemano se considera la existencia de términos en el desarrollo lineal que no cumplen la condición de la ec. (4.33). Entonces, supóngase que la eigenfunción $j = l$ no cumple la condición necesaria, por lo cual, la ec. (4.19) se puede separar en tres casos

⁵ También se suele denominar solución a primer orden.

$$j = n : \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\varpi_n}{c} \right)^2 - \lambda \widehat{\Theta}'_{nn} \right] C_{nn} - \lambda \widehat{\Theta}'_{nl} C_{ln} = \lambda \Sigma''_{i=1} \widehat{\Theta}'_{ni} C_{in}, \quad (4.34)$$

$$j = l : \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\varpi_l}{c} \right)^2 - \lambda \widehat{\Theta}'_{ll} \right] C_{ln} - \lambda \widehat{\Theta}'_{ln} C_{nn} = \lambda \Sigma''_{i=1} \widehat{\Theta}'_{li} C_{in}, \quad (4.35)$$

$$j \neq l, n : \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\varpi_j}{c} \right)^2 \right] C_{jn} - \lambda \widehat{\Theta}'_{jn} C_{nn} - \lambda \widehat{\Theta}'_{jl} C_{ln} = \lambda \Sigma''_{i=1} \widehat{\Theta}'_{ji} C_{in}. \quad (4.36)$$

Donde $\Sigma''_{i=1}$ indica suma sin los elementos l -ésimo y n -ésimo. El siguiente paso es suponer $\lambda \neq 0$ en las ecuaciones anteriores y sustituir la condición de los coeficientes para $\lambda = 0$ en éstas, por lo cual, en las tres ecuaciones, los términos a la derecha que van como λ al cuadrado se desprecian en una aproximación a primer grado de λ . Con esto, la ec. (4.36) indica que si se conocen C_{nn} y C_{ln} se pueden calcular los demás coeficientes con esta ecuación, y estos coeficientes se calculan con las ecs. (4.34) y (4.35), que a primer grado de λ forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\varpi_n}{c} \right)^2 - \lambda \widehat{\Theta}'_{nn} \right] C_{nn} - \lambda \widehat{\Theta}'_{nl} C_{ln} = 0 \\ -\lambda \widehat{\Theta}'_{ln} C_{nn} + \left[\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\varpi_l}{c} \right)^2 - \lambda \widehat{\Theta}'_{ll} \right] C_{ln} = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene una solución distinta de la trivial si el determinante del sistema es igual a cero, y esta condición implica que

$$\left(\frac{\omega_n}{c} \right)^{2(\pm)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varpi_n}{c} \right)^2 + \left(\frac{\varpi_l}{c} \right)^2 + \lambda (\widehat{\Theta}'_{nn} + \widehat{\Theta}'_{ll}) \right] \pm \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\varpi_n}{c} \right)^2 - \left(\frac{\varpi_l}{c} \right)^2 + \lambda (\widehat{\Theta}'_{nn} - \widehat{\Theta}'_{ll})}{2} \right]^2 + \lambda^2 \widehat{\Theta}'_{ln} \widehat{\Theta}'_{nl}}. \quad (4.37)$$

La ecuación anterior proporciona los eigenvalores del problema perturbado en términos de los eigenvalores del problema conocido y los llamados elementos de matrix $\widehat{\Theta}'_{nn}$, $\widehat{\Theta}'_{ll}$, $\widehat{\Theta}'_{ln}$ y $\widehat{\Theta}'_{nl}$. Si se requiere conocer la expresión de las eigenfunciones correspondientes basta con sustituir esta ecuación en el sistema de ecuaciones para conocer la expresión de los coeficientes C_{nn} y C_{ln} , y después usar la ec. (4.36) para calcular el resto de coeficientes. En este trabajo sólo es de interés conocer los eigenvalores del problema perturbado.

Nótese que el valor de λ en la ec. (4.37) se puede hacer igual a uno sin ningún problema porque donde realmente reside el significado de “pequeña perturbación” está en la expresión del operador $\widehat{\Theta}'$. Esta ecuación se utiliza para encontrar los eigenvalores de un cristal fotónico unidimensional sometido a presión localizada.

Capítulo 5

Sólidos deformables en régimen elástico lineal, ley de Hooke generalizada y efecto elasto-óptico

La deformación de un cristal fotónico propicia cambios en su respuesta a campos electromagnéticos, y estos cambios tienen consecuencias en la ecuación de eigenvalores del cristal, y por lo tanto, en su estructura de bandas. En este capítulo se expone la dinámica de sólidos deformables en su régimen elástico lineal y se explica cómo cambian las propiedades ópticas de un sólido a causa de la aplicación de esfuerzos mecánicos, el denominado efecto elasto-óptico.

5.1 Cinemática de sólidos deformables.

Tanto para sólidos rígidos como deformables, el efecto de las fuerzas externas que actúan sobre ellos es el cambio de sus estados de movimiento. Sin embargo, si la suma de las fuerzas y torcas es cero, entonces, el único efecto observable en un sólido rígido es su reposo o su movimiento rectilíneo uniforme, por otro lado, en un sólido deformable se observa un efecto adicional, a saber, el cambio en la configuración de los puntos de su volumen con respecto a su configuración inicial sin fuerzas aplicadas, y se dice que el sólido está deformado. Por lo tanto, la cinemática¹ de los sólidos deformables requiere un tratamiento distinto a la cinemática de sólidos rígidos².

La cinemática de los sólidos deformables supone que el sólido está distribuido en forma continua en todo su volumen, de tal forma que en cada “punto” del volumen del sólido existe una “partícula” del sólido con una densidad ρ tal que

$$m = \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (5.1)$$

donde m es la masa del sólido, \vec{r} es el vector de posición de un punto³ en el volumen del sólido y V es el volumen del sólido⁴. A esto se denomina hipótesis del medio continuo y es aplicable tanto a sólidos como a líquidos y gases.

Una vez que la hipótesis del medio continuo es establecida, la cinemática de un sólido deformable consiste en describir el movimiento relativo de todas las partículas del sólido desde una configuración inicial hasta una configuración final (sólido deformado). Dependiendo de las

¹ Descripción del movimiento sin atender las causas que lo originan.

² Esta cinemática divide al movimiento en dos, a saber, el movimiento de traslación del centro de masa del sólido y la rotación del sólido con respecto a un eje.

³ Nótese que estoy utilizando la palabra “punto” de acuerdo a su definición en Geometría y cada punto del espacio puede o no estar ocupado por una partícula del sólido.

⁴ En el lenguaje de la topología diferencial se dice que la medida de Lebesgue m está en correspondencia con la medida de Lebesgue V a través de la función de distribución ρ .

propiedades del sólido, la velocidad del movimiento relativo de las partículas del sólido puede ser despreciada⁵, sin embargo, si la aplicación de las fuerzas externas se realiza muy lentamente entonces la velocidad es despreciable, y bajo esta hipótesis, la cinemática de todos los sólidos deformables consiste en la descripción de la configuración del estado final (sólido deformado) con respecto a la configuración inicial sin prestar atención alguna a las configuraciones intermedias. Efectivamente, éste es un caso particular de la cinemática de sólidos deformables pero su importancia quedará justificada en las subsecuentes secciones de este capítulo.

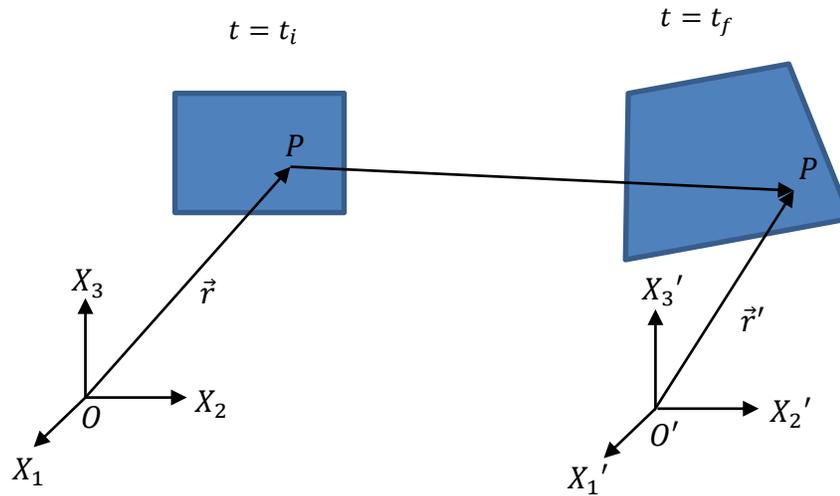


Figura 5.1 Esquema de movimiento de un sólido deformable en dos configuraciones, inicial ($t = t_i$) y final ($t = t_f$).

La figura 5.1 presenta un esquema del movimiento de las partículas de un sólido deformado y que presta atención únicamente a su configuración inicial al tiempo t_i y a su configuración final al tiempo t_f . El sistema de referencia $OX_1X_2X_3$ está fijo en un punto del espacio y se denomina sistema material, cualquier punto del espacio, incluidos aquellos que están ocupados por una partícula del sólido, se representa por un vector de posición

$$\vec{r} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3. \quad (5.2)$$

Por ejemplo, la partícula etiquetada en el esquema por la letra P al tiempo t_i se representa en el sistema material con el vector de posición $\vec{r}^{(i)} = x_1^{(i)}\hat{e}_1 + x_2^{(i)}\hat{e}_2 + x_3^{(i)}\hat{e}_3$, y la misma partícula al tiempo t_f , es decir, cuando el sólido está deformado, se representa en el sistema material con el vector de posición $\vec{r}^{(f)} = x_1^{(f)}\hat{e}_1 + x_2^{(f)}\hat{e}_2 + x_3^{(f)}\hat{e}_3$.

El sistema de referencia $O'X_1'X_2'X_3'$ de la figura 5.1 está “anclado” al sólido deformable, es decir, este sistema se mueve con el sólido deformable aunque este movimiento no es de interés, dadas las hipótesis antes mencionadas. Éste se denomina sistema espacial y cualquier punto del espacio se representa por un vector de posición

⁵ Los efectos de disipación de energía de los sólidos son esencialmente los responsables de esta decisión.

$$\vec{r}' = x_1' \hat{e}_1' + x_2' \hat{e}_2' + x_3' \hat{e}_3'. \quad (5.3)$$

Supóngase que los ejes del sistema espacial están “unidos” al sólido deformable, esto tiene como consecuencia que las posiciones relativas entre los ejes de este sistema de referencia cambian conforme las partículas del sólido deformable se mueven. Por ejemplo, considérese la placa deformable de la figura 5.2, a la izquierda se muestra la placa en su configuración inicial, en esta configuración los ejes de ambos sistemas son ortogonales entre sí; en cambio, dado que los ejes del sistema espacial ($O'X_1'$ y $O'X_2'$) están “unidos” a la placa, estos ejes ya no son ortogonales en la configuración final.



Figura 5.2 Esquema de movimiento de una placa deformable. Los ejes coordenados $O'X_1'$ y $O'X_2'$ están fijos a la placa.

El ejemplo anterior pone de manifiesto cuál debe ser la forma de cambiar información entre un observador que sólo etiqueta a las partículas del sólido en su configuración inicial y un observador que sólo etiqueta las partículas del sólido en su configuración final, esto es, la transformación de coordenadas entre el sistema material (configuración inicial) y el sistema espacial (configuración final o deformada) es

$$x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3) \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \quad (5.4)$$

Efectivamente, las coordenadas materiales x_1, x_2, x_3 etiquetan las partículas del sólido en la configuración inicial y las coordenadas x_1', x_2', x_3' dan las posiciones de las partículas del sólido en la configuración final (sólido deformado). Esta descripción cinemática que hace a las coordenadas materiales las variables independientes y las coordenadas espaciales las variables dependientes se conoce como descripción Lagrangiana.

Dado que la transformación anterior se puede invertir, la información sobre la posición de las partículas del sólido es recíproca entre los observadores, y la transformación inversa es

$$x_i = x_i(x_1', x_2', x_3') \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \quad (5.5)$$

Esta descripción cinemática se denomina Euleriana y en este caso las coordenadas espaciales x_1', x_2', x_3' etiquetan las partículas del sólido en la configuración final (sólido deformado) y las coordenadas x_1, x_2, x_3 dan las posiciones de las partículas del sólido en la configuración inicial.

Ambas transformaciones son biunívocas y continuas, esto último por la hipótesis del medio continuo. Si además se supone que las transformaciones tienen derivadas parciales continuas, entonces, las transformaciones son las inversas únicas de una con respecto a la otra, y la condición necesaria y suficiente para que exista la transformación inversa es que el jacobiano (J) sea distinto de cero, esto es

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \right) \neq 0 \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.6)$$

5.2 Vectores de desplazamiento y campo de desplazamiento.

Para cuantificar el movimiento de las partículas del sólido deformable se define el vector de desplazamiento de la partícula P del sólido deformable como el vector que va del punto del espacio donde se encontraba la partícula P en la configuración inicial del sólido al punto del espacio donde se encuentra la partícula en la configuración final del sólido. Nótese que la definición de vector desplazamiento de una partícula del sólido deformable es independiente del sistema de referencia que se elija para representarlo, sin embargo, las coordenadas de este vector serán diferentes en cada sistema de referencia, en general. El conjunto de vectores desplazamiento de todas las partículas del sólido deformable se denomina campo de desplazamientos.

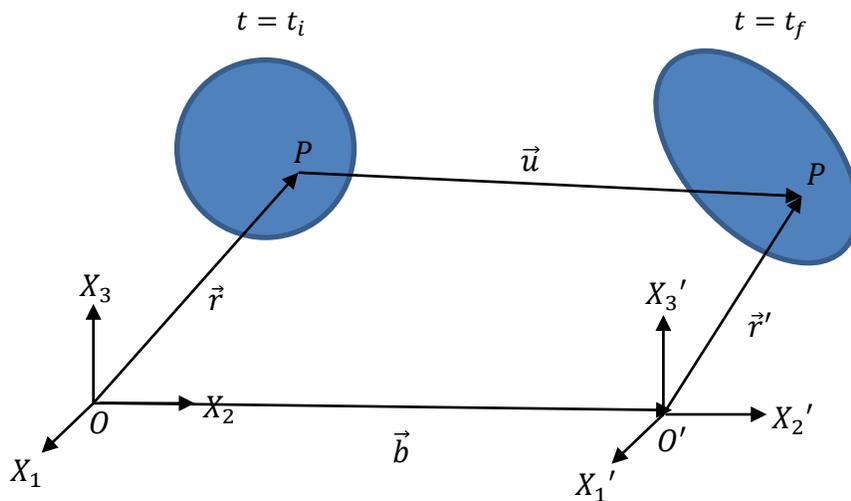


Figura 5.3 Diagrama vectorial del movimiento de un sólido deformable.

Un observador en el sistema material etiqueta las partículas de un sólido deformable en su configuración inicial con vectores de posición como los presentados en la ec. (5.2), por lo tanto, el campo de desplazamiento del sólido para este observador es una función vectorial de variable vectorial de la forma

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \quad (5.7)$$

Sin embargo para asignar valores a cada componente de los vectores de desplazamiento se necesita información de la configuración final del sólido, esto es, la información que tiene el observador material y la forma de compartir esta información es a través de la transformación presentada en la ec. (5.5), entonces

$$u_i = u_i(x_1', x_2', x_3') \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \quad (5.8)$$

Se dice que el campo de desplazamientos está descrito en la representación euleriana. Nótese la analogía con la ec. (5.5), en este caso las componentes materiales del campo de desplazamiento son variables dependientes de las coordenadas espaciales.

Análogamente, el campo de desplazamiento en la representación lagrangiana es tal que

$$u_i' = u_i'(x_1, x_2, x_3) \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \quad (5.9)$$

donde las componentes espaciales del campo de desplazamiento son variables dependientes de las coordenadas materiales.

Por otro lado, de acuerdo a la definición, el vector de desplazamiento que va de la partícula cuya posición en la configuración inicial está etiquetada por el vector de posición \vec{r} desde el sistema material y cuya posición en la configuración final está etiquetada por el vector de posición \vec{r}' desde el sistema espacial se escribe vectorialmente como

$$\vec{u} = \vec{b} + \vec{r}' - \vec{r}, \quad (5.10)$$

donde \vec{b} es el vector que une los orígenes de ambos sistemas, ver figura 5.3. Ahora, si el conjunto de vectores de desplazamiento están descritos en la representación lagrangiana entonces las componentes del campo de desplazamiento deben ser funciones de las coordenadas materiales, ec. (5.9), y en consecuencia

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} - \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}. \quad (5.11)$$

Análogamente, si el conjunto de vectores de desplazamiento están descritos en la representación euleriana entonces

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} = \delta_{ij} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}. \quad (5.12)$$

Estas expresiones serán de mucha utilidad en la siguiente sección.

5.3 Tensores de deformación.

El campo de desplazamientos cuantifica por completo (globalmente) el movimiento del sólido deformable, sin embargo, resulta de mucha utilidad estudiar que tanto se movieron las partículas vecinas de una partícula específica del sólido, esto es, hacer un estudio local del sólido y mediante integración completar la descripción del movimiento del sólido. Para hacer esto se define el vector diferencial de posición $d\vec{r}'$ en un punto \vec{r}' con respecto a un observador en el sistema espacial como

$$d\vec{r}' = dx_1'\hat{e}_1' + dx_2'\hat{e}_2' + dx_3'\hat{e}_3'. \quad (5.13)$$

Utilizando la ec. (5.4) se tiene que

$$dx_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} dx_j \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}, \quad (5.14)$$

entonces, la magnitud al cuadrado del vector diferencial de posición para un observador en el sistema espacial es

$$(d\vec{r}')^2 \equiv dx_i' dx_i' = \delta_{ij} dx_i' dx_j'. \quad (5.15)$$

Pero sustituyendo (5.14) en (5.15) se obtiene

$$(d\vec{r}')^2 = \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \frac{\partial x_k'}{\partial x_j} dx_i dx_j. \quad (5.16)$$

Análogamente para el vector diferencial de posición de un punto \vec{r} con respecto a un observador en el sistema material se tienen las siguientes ecuaciones:

$$(d\vec{r})^2 \equiv dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j, \quad (5.17)$$

$$(d\vec{r})^2 = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial x_k}{\partial x_j'} dx_i' dx_j'. \quad (5.18)$$



Figura 5.4 Vecindad alrededor de una partícula P de un sólido deformable, en la configuración inicial $t = t_i$ y en la configuración final $t = t_f$.

Para cuantificar que tanto se separaron las partículas vecinas a una cierta partícula del sólido deformable durante su movimiento, se utiliza la diferencia $(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2$, esto es, se compara la vecindad de una partícula en la configuración inicial del sólido con la vecindad que tiene la misma partícula en la configuración final del sólido, ver figura 5.4. Utilizando las cuatro ecuaciones anteriores esta cantidad se expresa como

$$(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 = \left(\frac{\partial x_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{k'}}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j = 2L_{ij} dx_i dx_j, \quad (5.19)$$

ó

$$(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial x_k}{\partial x_{i'}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{j'}} \right) dx_{i'} dx_{j'} = 2E_{ij} dx_{i'} dx_{j'}, \quad (5.20)$$

donde L_{ij} son las componentes del tensor de deformación en la representación lagrangiana, porque sus componentes son funciones de las coordenadas materiales, y análogamente E_{ij} son las componentes del tensor de deformación en la representación euleriana porque sus componentes son funciones de las coordenadas espaciales.

Al sustituir la ec. (5.11) en la ec. (5.19) se obtiene

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j'}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{k'}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{k'}}{\partial x_j} \right). \quad (5.21)$$

De igual manera, al sustituir la ec. (5.12) en la ec. (5.20) se tiene

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_{i'}} \frac{\partial u_k}{\partial x_{j'}} \right). \quad (5.22)$$

Si las componentes de los gradientes de desplazamiento $\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial u_i}{\partial x_{j'}}$ son pequeños comparados con la unidad y se desprecian productos entre estos términos de segundo grado, se obtienen los llamados tensores de deformación infinitesimales lagrangiano y euleriano, cuyas componentes se definen respectivamente como

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j'}}{\partial x_i} \right), \quad (5.23)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{i'}} \right). \quad (5.24)$$

Nótese que si las ecs. (5.19) y (5.20) son iguales a cero entonces todos los tensores de deformación son cero y se dice que el sólido deformable realizó un desplazamiento rígido, esto es, las partículas vecinas a una partícula específica del sólido en su configuración inicial permanecieron igualmente “juntas” en la configuración final del sólido.

5.4 Fuerzas externas, campo de tensión de un sólido deformable y tensor de esfuerzos.

Es momento de atender las causas del cambio de estado de movimiento de las partículas de un sólido: Las fuerzas. Si no actúan fuerzas sobre el sólido⁶, cada una de sus partículas permanece en reposo o movimiento rectilíneo uniforme descritas desde un sistema de referencia inercial. Se distingue un tipo de fuerzas “externas” al sólido que tienen la propiedad de actuar en cada partícula del sólido de forma simultánea⁷, a este tipo de fuerzas “externas” se les denomina fuerzas de cuerpo, por ejemplo, la fuerza de gravedad. También se distingue otro tipo de fuerzas “externas” al sólido que tienen la particularidad de sólo actuar en una porción de la superficie del sólido, por ejemplo, las fuerzas de contacto entre dos sólidos, estas fuerzas sólo actúan en las partículas del sólido que se encuentran en la porción de superficie donde actúa la fuerza. Además, existe otro tipo de fuerzas cuyo origen está en el “interior” del sólido y que actúan en cada partícula del sólido, estas fuerzas son las responsables de que las partículas del cuerpo se mantengan unidas aún en ausencia de fuerzas “externas”.

Las fuerzas “externas” al sólido que actúan en una porción de la superficie de éste, así como las fuerzas cuyo origen es “interno” se les denomina fuerzas superficiales porque tienen la propiedad de actuar sobre las partículas localizadas en una porción de la superficie del sólido o en una superficie interna arbitraria del sólido.

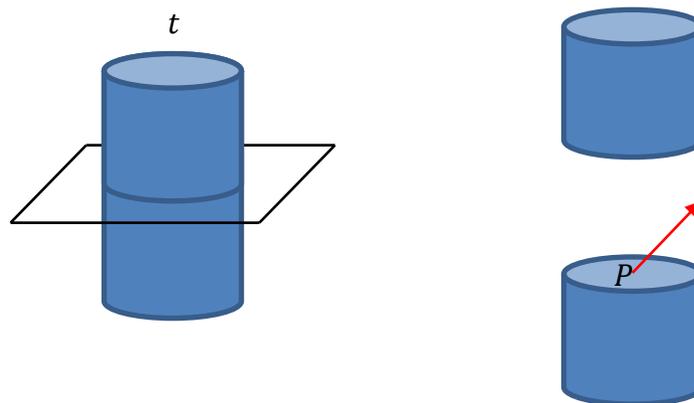


Figura 5.5 Diagrama de corte de un sólido deformable libre de fuerzas externas al tiempo t .

La figura 5.5 sirve para aclarar la definición anterior. La figura muestra un sólido deformable libre de fuerzas externas que se interseca con un plano al tiempo t . Entonces, para una partícula del sólido, localizada en algún punto de la intersección (plano de corte en el sólido), actúa una fuerza resultante igual a la suma de todas las fuerzas que ejercen las demás partículas del sólido sobre ésta. La figura 5.5 muestra la fuerza resultante que actúa sobre una partícula P en el plano de corte. Una situación similar ocurre en el caso de que existan fuerzas “externas”.

⁶ Con esto se excluye también la aplicación de pares de fuerza, cuya suma es cero pero causan una rotación del sólido.

⁷ En este trabajo se trata sólo con la simultaneidad denominada clásica o de Newton.

En conclusión, las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sólido se clasifican en dos tipos: Fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales.

Sean P una partícula del sólido localizada en un plano de corte del sólido, y ΔS un elemento de área del plano de corte con vector normal \hat{n} tal que rodea a la partícula P . Supóngase que sobre la partícula P actúa una fuerza resultante \vec{f} distinta de cero, entonces, se definen los vectores de tensión $\vec{t}^{(\hat{n})}$ y $\vec{t}^{(-\hat{n})}$, asociados a la fuerza \vec{f} y a la superficie con normal \hat{n} como

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{f} \cdot \hat{n}}{\Delta S} \hat{n}, \quad (5.25)$$

$$\vec{t}^{(-\hat{n})} = -\vec{t}^{(\hat{n})}. \quad (5.26)$$

Nótese que si se considera la convención de la mano derecha para especificar el sentido de la normal a una superficie, entonces, la definición anterior no tiene ambigüedad.

Es claro que la definición anterior se aplica a cualquier plano que pase por la partícula P y para toda partícula del sólido, incluidas las partículas en la superficie de éste. En un estudio local del sólido, la especificación de todos los vectores de tensión definidos en una partícula no tiene utilidad práctica. Pero la especificación de los vectores de tensión de una partícula en las direcciones principales locales⁸ sí, porque cualquier otra dirección se especifica como combinación lineal de éstas. Este proceso se especifica a continuación para el caso particular de un sólido cuyas direcciones principales locales son iguales a sus direcciones principales (globales)⁹.

Supóngase que las tres direcciones principales de un sólido deformable son ortogonales entre sí, entonces, para cada partícula P del sólido, estas direcciones definen un conjunto de planos ortogonales entre sí que pasan por P . Por comodidad, los tres planos ortogonales en una partícula P se representan con las caras de un cubo, figura 5.6. Los vectores de tensión $\vec{t}^{(\hat{n}_x)}$, $\vec{t}^{(\hat{n}_y)}$, $\vec{t}^{(\hat{n}_z)}$ tienen las direcciones de los ejes principales de acuerdo a su definición vectorial. Ahora, un observador en el sistema material debe proyectar cada uno de estos vectores en sus ejes coordenados OX_1 , OX_2 y OX_3 para especificarlos; por lo tanto, las expresiones de los vectores de tensión en las direcciones principales para un observador en el sistema material son

$$\begin{cases} \vec{t}^{(\hat{n}_x)} = t_1^{(\hat{n}_x)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{n}_x)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{n}_x)} \hat{e}_3 \\ \vec{t}^{(\hat{n}_y)} = t_1^{(\hat{n}_y)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{n}_y)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{n}_y)} \hat{e}_3 \\ \vec{t}^{(\hat{n}_z)} = t_1^{(\hat{n}_z)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{n}_z)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{n}_z)} \hat{e}_3 \end{cases} \quad (5.27)$$

donde $t_j^{(\hat{n}_\alpha)}$ es la proyección de $\vec{t}^{(\hat{n}_\alpha)}$ sobre el eje OX_j del sistema material con $\alpha \in \{x, y, z\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$.

⁸ En general las direcciones principales locales son diferentes en cada punto de un sólido. Por ejemplo, los puntos de una esfera tienen diferentes direcciones principales.

⁹ Ejemplos son los sólidos cristalinos.

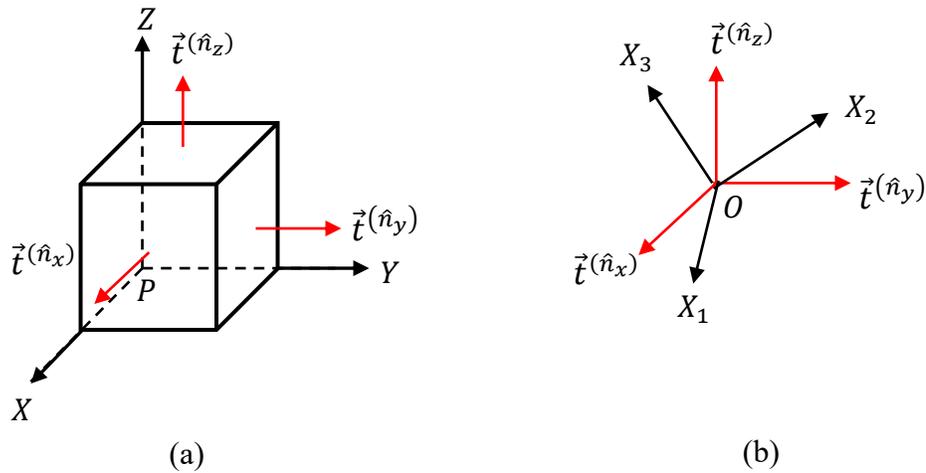


Figura 5.6 (a) Diagrama de ejes principales locales en una partícula P del sólido. Se incluyen los vectores de tensión en las direcciones de los ejes principales, y (b) representación de los vectores de tensión en el sistema material.

Se definen las componentes del tensor de esfuerzos en una partícula P de un sólido deformable como

$$\sigma_{\alpha j} = t_j^{(\hat{e}_\alpha)}, \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.28)$$

Nótese que el subíndice α indica la normal del plano con el cual se define el vector de tensión y el subíndice j indica la dirección de proyección del respectivo vector de tensión. Se dice que el tensor de esfuerzos determina el estado de tensión de la partícula P .

El conjunto de estados de tensión de todas las partículas del sólido deformable se denomina campo de tensiones del sólido, y dada la hipótesis del medio continuo, este campo es descrito por un tensor de esfuerzos cuyas componentes son funciones de las coordenadas de posición de las partículas con respecto a un sistema de referencia. Por ejemplo, para un observador en el sistema material se tiene

$$t_j^{(\hat{n}_\alpha)} = t_j^{(\hat{n}_\alpha)}(x_1, x_2, x_3) \quad y \quad \sigma_{\alpha j} = \sigma_{\alpha j}(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.29)$$

Por último, se afirma que el tensor de esfuerzos es simétrico si el sólido deformable está en equilibrio (suma de fuerzas y torcas igual a cero) [35, 36], es decir,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (5.30)$$

5.5 Teoría de la elasticidad lineal.

La teoría de la elasticidad lineal supone como primera hipótesis que el sólido en estudio es un medio continuo y que las deformaciones que puede sufrir son muy pequeñas (infinitesimales), por lo cual, los vectores de desplazamientos \vec{u} de las partículas del sólido y los gradientes de estos vectores son muy pequeños comparados con la unidad, y no se puede hacer una diferencia entre la configuración inicial y final del sólido [37]; en consecuencia, no hay distinción entre las coordenadas materiales y espaciales, es decir

$$\begin{cases} x_i = x'_i \\ \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_{j'}} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (5.31)$$

Además, como consecuencia, el campo de densidad en la descripción Lagrangiana $\rho' = \rho'(x_1, x_2, x_3)$ coincide con el campo de densidad en la descripción Euleriana $\rho = \rho(x'_1, x'_2, x'_3)$ (que se supone conocido) y por lo tanto, la densidad no es incógnita en problemas de elasticidad lineal.

Que los gradientes de los vectores desplazamiento de las partículas del sólido sean pequeños comparados con la unidad implica que los tensores de deformación, tanto en la descripción Lagrangiana como Euleriana, coinciden con sus respectivos tensores de deformación infinitesimal; y como no hay distinción entre coordenadas materiales y espaciales, estos últimos son iguales entre sí, es decir

$$L_{ij} = E_{ij} = l_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.32)$$

Como segunda hipótesis, la teoría de la elasticidad lineal admite la existencia de un estado neutro en el cual las deformaciones y las tensiones son nulas. Como tercera hipótesis se establece que el proceso de deformación es isotérmico (la temperatura es constante en el tiempo) y adiabático (no hay transferencia de energía en forma de calor). Esta última condición se escribe como

$$\rho c(x_1, x_2, x_3) + \nabla \cdot \vec{q}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (5.33)$$

donde $c(x_1, x_2, x_3)$ es la función que cuantifica el calor disipado por unidad de masa y unidad de tiempo en cada punto del sólido, este calor es generado por las fuerzas externas e internas que actúan en cada partícula del sólido y que son de tipo disipativo¹⁰; y $\vec{q}(x_1, x_2, x_3)$ es el campo de flujo de calor por unidad de superficie.

Si el sólido en estudio cumple con estas hipótesis, entonces, la teoría de la elasticidad lineal establece una relación lineal entre los esfuerzos internos del material y la deformación que sufre, esto es,

¹⁰ Nótese que no se está diciendo que el sólido tiene una cierta cantidad de calor en cada punto, ya que el calor no es una variable termodinámica del sistema.

$$\sigma_{ij}(e_{kl}) = \sigma_{ij}(0) + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_{e_{kl}=0} e_{kl} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial e_{kl} \partial e_{mn}} \right)_{e_{kl}=0, e_{mn}=0} e_{kl} e_{mn} + \dots \approx C_{ijkl} e_{kl}, \quad (5.34)$$

donde se impone la hipótesis de existencia de estado neutro, $\sigma_{ij}(0)$, y se definen las componentes del tensor de rigidez como

$$C_{ijkl} \equiv \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_{e_{kl}=0}. \quad (5.35)$$

La ec. (5.35) se denomina ley de Hooke generalizada y los sólidos que cumplen esta ecuación se dice que se encuentran en su régimen elástico lineal.

A causa de las simetrías de los tensores σ y e , el tensor de rigidez tiene las siguientes simetrías

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl}, \\ C_{ijkl} = C_{ijlk}. \end{cases} \quad (5.36)$$

En consecuencia, el número de componentes distintas del tensor de rigidez se reduce de $3^4=81$ a 36 y la ley de Hooke generalizada se puede expresar sólo con estas 36 componentes, para esto, se impone un sistema de doble asignación de índices a las componentes de los tensores de esfuerzos y deformación, de la siguiente forma [36]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_1, & \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4, \\ \sigma_{22} = \sigma_2, & \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5, \\ \sigma_{33} = \sigma_3, & \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6. \end{cases} \quad (5.37)$$

$$\begin{cases} e_{11} = e_1, & 2e_{23} = 2e_{32} = e_4, \\ e_{22} = e_2, & 2e_{13} = 2e_{31} = e_5, \\ e_{33} = e_3, & 2e_{12} = 2e_{21} = e_6. \end{cases} \quad (5.38)$$

Por lo cual, la ley de Hooke generalizada se reescribe como

$$\sigma_K = C_{KM} e_M, \quad \forall K, M \in \{1,2,3,4,5,6\}. \quad (5.39)$$

Por otro lado, se demuestra que el tensor de rigidez reducido a sus 36 componentes distintas es simétrico [38], esto es,

$$C_{KM} = C_{MK} \quad \forall K, M \in \{1,2,3,4,5,6\}. \quad (5.40)$$

En conclusión, el número de componentes distintas del tensor de rigidez se reduce a sólo 21. Sin embargo, al considerar clases particulares de sólidos elásticos, el problema se puede simplificar aún más gracias a sus simetrías, lo cual se traduce en una reducción del número de componentes distintas del tensor de rigidez. En particular, los sólidos isótropos poseen el más alto número de simetrías, pues no presentan direcciones privilegiadas, es decir, son simétricos por todas partes; y

como consecuencia sus propiedades “elásticas” son descritas por sólo 2 componentes distintas del tensor de rigidez, lo cual se demuestra a continuación.

Las propiedades físicas de un sólido isótropo son, por definición, independientes de la elección del sistema de ejes coordenados (por suposición ortonormales). En particular, las propiedades elásticas, dadas por el tensor de rigidez, deben ser invariantes para cualquier cambio de ejes (rotación o simetría con respecto a un plano o punto). Las únicas cantidades que no son afectadas por estas transformaciones ortogonales son un escalar y el tensor unitario δ_{ij} , por tanto, cada componente del tensor de rigidez se puede expresar como una combinación lineal de productos externos de δ_{ij} , pero debido a la simetría del tensor unitario ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$), sólo se pueden tener las siguientes combinaciones para los cuatro índices $ijkl$:

$$\begin{cases} \delta_{ij}\delta_{kl}, \\ \delta_{ik}\delta_{jl}, \\ \delta_{il}\delta_{jk}. \end{cases} \quad (5.41)$$

Entonces, las componentes del tensor de rigidez se escriben como

$$C_{ijkl} = \lambda_e \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik}\delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il}\delta_{jk}, \quad (5.42)$$

donde λ_e , μ_1 y μ_2 son constantes. Pero la condición de simetría del tensor de rigidez ec. (5.40) y la simetría del tensor unitario implican que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_e$, por lo cual

$$C_{ijkl} = \lambda_e \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_e (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (5.43)$$

Las constantes λ_e y μ_e se denominan constantes de Lamé del sólido isótropo en régimen elástico y deben ser obtenidas experimentalmente. Por último, sustituyendo en la ecuación anterior la ec. (5.34) se obtiene

$$\sigma_{ij} = \lambda_e e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu_e e_{ij}. \quad (5.44)$$

5.6 Efecto elasto-óptico.

La deformación de un sólido también propicia cambios en sus propiedades eléctricas, las cuales están cuantificadas por el tensor de índices de refracción en el caso de sólidos no magnéticos. El cambio en el tensor de índices de refracción como consecuencia de la deformación del sólido se conoce como efecto elasto-óptico y fue reportado por primera vez por el científico escocés Sir David Brewster. Él observó que al aplicar un esfuerzo mecánico a un sólido isótropo y transparente, éste pasa a ser anisótropo [31].

El físico Friedrich Carl Alwin Pockels desarrolló un modelo teórico del efecto elasto-óptico. Este modelo se basa en la teoría de la elasticidad lineal para establecer la relación esfuerzo-deformación, por lo cual, se tiene como hipótesis deformaciones pequeñas y no rotaciones locales, además se supone que el sólido no presenta efectos piezoeléctricos. Para relacionar la deformación con los cambios en el tensor de índices de refracción se propone una dependencia lineal, a saber,

$$\Delta N_{ij} = P_{ijkl}e_{kl}, \quad (5.45)$$

donde ΔN_{ij} representa las componentes del tensor “cambio” de índices de refracción del sólido, P_{ijkl} son las componentes del tensor de Pockels o elasto-óptico y e_{kl} son las componentes del tensor de deformación. Por lo tanto, el nuevo tensor de índices de refracción del sólido deformado es:

$$N_{ij} + \Delta N_{ij}, \quad (5.46)$$

donde N_{ij} representa las componentes del tensor de índices de refracción del sólido sin deformar.

De acuerdo a la ecuación anterior, si el sólido es inicialmente isótropo entonces los índices de refracción a lo largo de los ejes principales (n_1, n_2, n_3) del sólido deformado son:

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_0^2} + \lambda_i}} = \frac{n_0}{\sqrt{1 + n_0^2 \lambda_i}} \cong n_0 \left[1 - \frac{n_0^2}{2} \lambda_i \right], \quad (5.47)$$

donde n_0 es el índice de refracción del sólido inicialmente isótropo y λ_i representa los eigenvalores del tensor “cambio” de índices de refracción. Esta ecuación proporciona toda la información concerniente a la relación entre la deformación del sólido y el cambio en sus índices de refracción, pero al igual que en la teoría de la elasticidad, el número de componentes distintas del tensor de Pockels se reduce por las simetrías de los tensores “causa” (tensor de deformación) y “efecto” (tensor cambio de índices de refracción) de la ecuación constitutiva. En efecto, el número de componentes distintas del tensor de Pockels se reduce a 36 y se pueden reescribir a estas componentes en un sistema de doble asignación de índices análogo al caso elástico, a saber,

$$[P_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{26} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & P_{56} \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} & P_{65} & P_{66} \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Para un sólido inicialmente isótropo, las propiedades elasto-ópticas quedan completamente descritas con sólo dos componentes distintas (P_{11}, P_{12}) del tensor de Pockels. La reducción del número de componentes distintas es análoga al caso elástico y el tensor de Pockels se reescribe como:

$$[P_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad A = \frac{(P_{11} - P_{12})}{2}. \quad (5.49)$$

Estas ecuaciones junto a la ecuación de eigenvalores de un cristal fotónico se utilizan para determinar el espectro de bandas de un cristal fotónico unidimensional sometido a una presión hidrostática y a una presión localizada.

PARTE II

DESARROLLO, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Capítulo 6

Cristal fotónico unidimensional bajo presión

El objetivo de este trabajo es determinar el cambio en el espectro de transmisión electromagnético de un cristal fotónico unidimensional al ser sometido a un esfuerzo mecánico. Dos tipos de esfuerzos mecánicos se proponen: Una compresión por presión hidrostática y una compresión localizada.

El cristal fotónico unidimensional que se estudió es un conjunto de láminas apiladas de dos tipos de materiales dieléctricos, ambos homogéneos, isotropos y no magnéticos. Cada lámina tiene el mismo espesor y están dispuestas de forma alternada en una configuración periódica con parámetro de red igual a dos veces el espesor de una lámina.

El par de materiales que conforman el cristal fotónico se seleccionó para considerar dos casos de interés, a saber, poli(metil metacrilato) (PMMA) y poli(estireno) cristalino (PS) cuyas propiedades mecánicas son similares, y PMMA y dióxido de silicio amorfo (SiO_2) cuyas propiedades mecánicas son diferentes. En la tabla 1 se presentan los módulos de Young y las razones de Poisson de estos materiales [39, 40].

Tabla 1 Propiedades mecánicas y ópticas.

Material	Módulo de Young (GPa)	Razón de Poisson	Índice de refracción @ (0, 200) THz
Poli(metil metacrilato)	3.0303	0.37	1.48478
Poli(estireno)	3.3000	0.35	1.57816
Sílice fundido (SiO_2)	73.0190	0.17	1.45323

El intervalo de frecuencias electromagnéticas de 0 a 200 THz es de interés práctico porque las ondas electromagnéticas en el rango de los THz pueden transmitir enormes cantidades de datos por vía inalámbrica [41], tienen menor efecto de esparcimiento¹ en entornos urbanos que las ondas ópticas y permiten transmitir imágenes de alta calidad [42, 43]. Además, las transiciones de vibración o de rotación de un amplio conjunto de arreglos moleculares y las transiciones electrónicas de muchos nano-compuestos (de sustancias químicas y biológicas) exhiben fuertes resonancias en las frecuencias de THz, y sus bandas de absorción sirven para identificar estos materiales [44]. Las propiedades dispersivas de los materiales limitan el conjunto de eigenvalores (frecuencias angulares) que son solución del operador $\hat{\Theta}$ asociado al cristal fotónico, porque sólo se deben elegir las bandas que están en el intervalo de frecuencias donde los materiales no son dispersivos o donde los anchos de los picos de absorción son mucho menores al intervalo de

¹ En ingles scattering.

frecuencias de interés y se puede promediar el índice de refracción. El PMMA, PS y SiO₂ tienen picos de absorción en el intervalo de 0 a 200 THz. Por ejemplo, estudios de espectroscopia infrarroja en películas de SiO₂ muestran picos de absorción alrededor de 21, 24 y 33 THz [45]. Sin embargo, sus anchos son mucho menores al intervalo de interés y se puede promediar el índice de refracción. La tabla 1 contiene los índices de refracción promedio de PMMA, PS y SiO₂ en el intervalo de 0 a 200 THz [46-48].

Se supone que cada lámina es homogénea, por lo cual, las permitividades relativas de cada lámina no son función de la posición de las partículas² del material, pero la permitividad relativa del cristal si es función de la posición a lo largo del cristal (dirección-z) y es tal que

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \epsilon^{(1)} & \text{si } \frac{-a}{4} + ma \leq z \leq \frac{a}{4} + ma, \\ \epsilon^{(2)} & \text{si } \frac{a}{4} + ma < z \leq \frac{3a}{4} + ma, \end{cases}$$

donde z indica la posición a lo largo del eje principal del cristal con respecto a un punto de referencia, m es un entero y a es el parámetro de red del cristal, $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ son las permitividades relativas del par de materiales que conforman el cristal.

Dado que la función permitividad relativa del cristal es periódica entonces también la función $1/\epsilon(z)$ es periódica y se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \epsilon_m^{-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mz\right),$$

donde ϵ_m^{-1} son los coeficientes del desarrollo.

Las soluciones de la ecuación de eigenvalores $\hat{\Theta} \vec{H}(\vec{r}) = (\omega/c)^2 \vec{H}(\vec{r})$ son

$$\vec{H}(\vec{r}) = \exp(ik_{\parallel}\rho) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{C}_n \exp\left[i\left(k_z + n \frac{2\pi}{a}\right)z\right],$$

donde \vec{C}_n son vectores que no dependen de z , $k_{\parallel} = \vec{k} \cdot \hat{e}_{\rho}$ y $k_z = \vec{k} \cdot \hat{e}_z$ son constantes y sirven para etiquetar las eigenfunciones junto con los valores del índice n , y las componentes del vector posición son $\rho = \vec{r} \cdot \hat{e}_{\rho}$ y $z = \vec{r} \cdot \hat{e}_z$. Dado que el vector de intensidad magnética tiene divergencia nula, se tiene que las soluciones obtenidas deben de satisfacer:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\vec{k} + n \frac{2\pi}{a} \pi \hat{e}_z\right) \cdot \vec{C}_n = 0.$$

² Se utiliza esta palabra en el mismo contexto que en la mecánica de sólidos deformables.

En este trabajo sólo interesa estudiar el caso de campos electromagnéticos que se propagan de forma paralela al eje principal del cristal, por lo que $k_{\parallel} = 0$ y en consecuencia los vectores \vec{C}_n deben ser ortogonales a \hat{e}_z . Entonces, los elementos de matriz de la ecuación de eigenvalores³ son

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_m^{-1}}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(i \frac{2\pi}{a} (m+n-l)z\right) dz \times$$

$$\left(k_z + \frac{2\pi}{a} (m+n)\right) \left(k_z + \frac{2\pi}{a} n\right) \vec{C}_n =$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\vec{C}_n}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(i \frac{2\pi}{a} (n-l)z\right) dz,$$

donde n, m, l son números enteros.

La solución exacta no se puede calcular, sin embargo, se puede hacer un análisis de convergencia de soluciones, esto es, encontrar un índice n_{max} tal que si $n > n_{max}$ entonces el conjunto de eigenvalores del operador tiende al mismo conjunto que se obtiene con $n = n_{max}$.

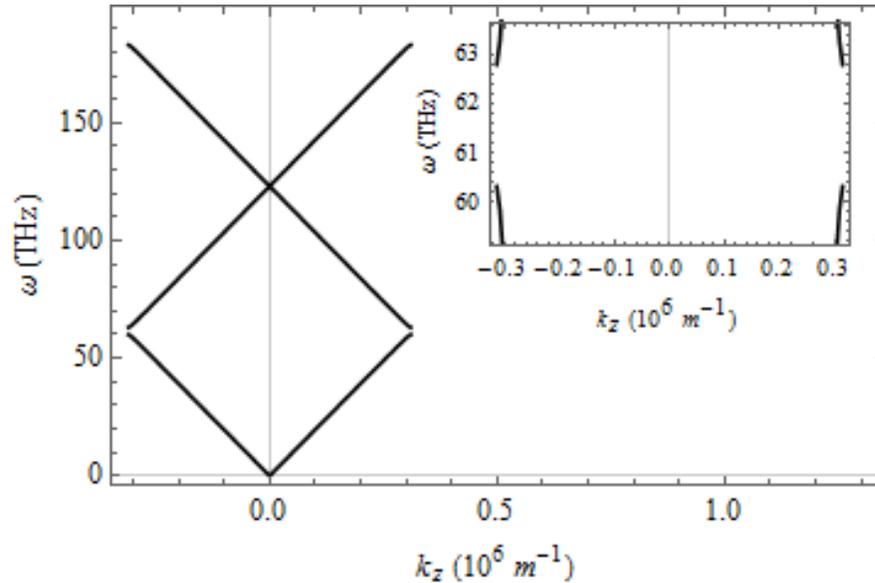


Figura 6.1 Estructura de bandas del cristal fotónico unidimensional PMMA-PS con parámetro de red $a = 10 \mu\text{m}$. En el recuadro se muestra la brecha de frecuencias angulares, entre la primera y segunda banda, que no son eigenvalores del operador asociado al cristal.

Para ambos arreglos de cristales fotónicos, PMMA-PS y PMMA-SiO₂, se encontró una convergencia del conjunto de eigenvalores con matrices de 7×7 , es decir, $n_{max} = 6$ con un

³ De acuerdo a la base de las funciones periódicas de cuadrado integrable en un período.

parámetro de red $a = 10 \mu\text{m}$. Las figuras 6.1 y 6.2 muestran el conjunto de eigenvalores en la primera zona de Brillouin $-\pi/a \leq k_z \leq \pi/a$ de los operadores asociados a los cristales fotónicos PMMA-PS y PMMA-SiO₂ respectivamente.

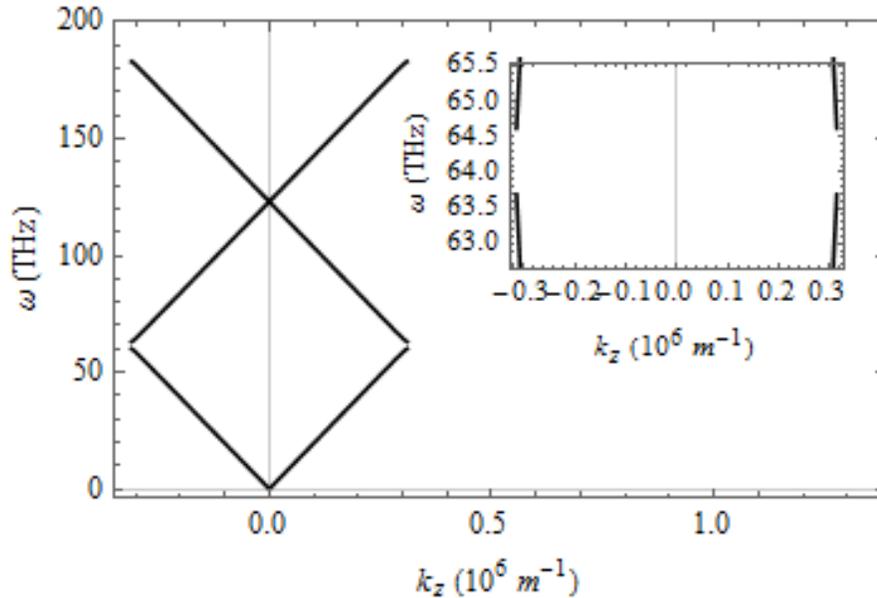


Figura 6.2 Estructura de bandas del cristal fotónico unidimensional PMMA-SiO₂ con parámetro de red $a = 10 \mu\text{m}$. En el recuadro se muestra la brecha de frecuencias angulares, entre la primera y segunda banda, que no son eigenvalores del operador asociado al cristal.

Las brechas en las bandas de frecuencia angular de ambos cristales se repiten conforme aumenta la frecuencia angular, y para ambos cristales se observa que las primeras dos bandas están en el intervalo de no dispersión de los tres materiales. Entonces, basta con considerar las primeras dos bandas para garantizar el cumplimiento de las hipótesis y es lo que se hace en este trabajo.

Los tamaños de las brechas ($\Delta\omega/\omega_m$) obtenidos numéricamente son 0.04 y 0.013 para PMMA-PS y PMMA-SiO₂, respectivamente. Las razones porcentuales entre los valores obtenidos numéricamente y los valores teóricos son 96.8 % para PMMA-PS y 97.01 % para PMMA-SiO₂.

6.1 Presión hidrostática.

Una presión de tipo hidrostático sobre un cristal fotónico implica que las fuerzas deben ser normales a la superficie externa del cristal, ver figura 6.3. La presión modifica las propiedades ópticas del cristal, las cuales están cuantificadas en el tensor de índices de refracción, y el cambio se calcula con la teoría elasto-óptica, por lo que es necesario calcular el tensor de deformación del cristal. Sin embargo, si no se consideran los esfuerzos cortantes entre las láminas del cristal, entonces, cada lámina constituye un problema de “tensión plana” [36], por lo cual, las componentes σ_{xz} , σ_{yz} y σ_{zz} del tensor de esfuerzos de cada lámina son cero, y las restantes

componentes son solamente función de x e y ; además, si el material de la lámina es elástico, entonces, el tensor de deformación de cada lámina es tal que

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix},$$

donde cada componente distinta de cero es función de x e y . Sin embargo, si se considera que la distribución de esfuerzos en los puntos de la lámina es uniforme, entonces, las componentes son independientes de la posición, y en una geometría cilíndrica y con constricción en la dirección del eje principal⁴, $\epsilon_{33} = 0$, se tiene que

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde σ es el valor de la presión hidrostática y E es el módulo de Young de la lámina.

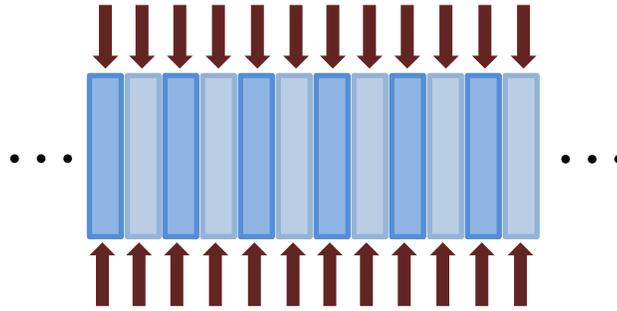


Figura 6.3 Esquema de un cristal fotónico unidimensional sometido a presión hidrostática.

Para expresar los elementos del tensor de deformación en términos de la presión hidrostática (σ) y el módulo de Young (E), se utilizó la ley de Hooke generalizada ec. (5.44) para sólidos isótropos y se expresaron las constantes de Lamé en términos de la razón de Poisson (ν) y el módulo de Young (E) (ver apéndice B).

Con esta información y la ec. (4.37) se calcula el cambio de la permitividad relativa en cada lámina del cristal utilizando una aproximación en serie de Taylor, a saber,

⁴ Esta constricción es el resultado de tener un cristal unidimensional (que por definición es infinito en la dirección principal) y de la condición de presión hidrostática (que por definición implica que la fuerza se aplica ortogonal en toda la superficie del cristal). En la práctica esto se logra con un cristal unidimensional finito, limitado en sus extremos por dos paredes "rígidas" transparentes a las ondas electromagnéticas de interés, y en la superficie restante del cristal se aplica la presión hidrostática.

$$\epsilon_i = \frac{1}{\frac{1}{n_0^2} + \lambda_i} \cong \epsilon_0 - \epsilon_0^2 \lambda_i, \quad i \in \{1,2,3\},$$

donde ϵ_i son las permitividades relativas en las direcciones principales de la lámina, n_0 y ϵ_0 son el índice de refracción y la permitividad relativa de la lámina sin deformación, respectivamente; y λ_i son los eigenvalores del tensor “cambio” de índices de refracción en las direcciones principales de la lámina, a saber,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(e_{11}p_{11} + e_{22}p_{11} + e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{e_{11}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{11}^2 + e_{22}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}^2 p_{11}p_{12} + 4e_{11}e_{22}p_{11}p_{12} \\ &\quad - 2e_{22}^2 p_{11}p_{12} + e_{11}^2 p_{12}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{12}^2 + e_{22}^2 p_{12}^2}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}(e_{11}p_{11} + e_{22}p_{11} + e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{e_{11}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{11}^2 + e_{22}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}^2 p_{11}p_{12} + 4e_{11}e_{22}p_{11}p_{12} \\ &\quad - 2e_{22}^2 p_{11}p_{12} + e_{11}^2 p_{12}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{12}^2 + e_{22}^2 p_{12}^2}, \end{aligned}$$

donde e_{ij} son las componentes del tensor de deformación y p_{ij} son las componentes del tensor de Pockels.

La tabla 2 presenta los valores de las componentes del tensor de Pockels del PMMA, PS y SiO₂ [39, 40], los cuales son necesarios para calcular los eigenvalores del tensor “cambio” de índices de refracción.

Tabla 2. Componentes del tensor de Pockels.

Material	p_{11}	p_{12}
Poli(metil metacrilato)	0.300	0.297
Poli(estireno)	0.320	0.310
Sílice fundido	0.121	0.270

Para campos que se propagan paralelos al eje principal del cristal (dirección-z) sólo es necesario calcular la permitividad relativa en esta dirección. La figura 6.4 muestra la gráfica del valor absoluto del cambio en la permitividad relativa ($d\epsilon = -\epsilon_0^2 \lambda_3$) en la dirección-z contra la presión hidrostática en el intervalo de (0, 200) MPa para cada uno de los materiales utilizados. Las líneas continua, punteada y discontinua corresponden a PMMA, PS y SiO₂.

La función permitividad relativa del cristal bajo presión hidrostática es

$$\epsilon(z, \sigma) = \begin{cases} \epsilon^{(1)}(\sigma) & \text{si } \frac{-a}{4} + ma \leq z \leq \frac{a}{4} + ma, \\ \epsilon^{(2)}(\sigma) & \text{si } \frac{a}{4} + ma < z \leq \frac{3a}{4} + ma, \end{cases}$$

donde $\epsilon^{(1)}(\sigma)$ y $\epsilon^{(2)}(\sigma)$ son las permitividades relativas en la dirección- z de las láminas del cristal, a es el parámetro de red del cristal, m es un número entero y σ es el valor de la presión hidrostática. Nótese esta función es periódica al igual que su recíproco ($1/\epsilon(z, \sigma)$) la cual se desarrolló en serie de Fourier y se siguió el mismo procedimiento que en el cristal sin presión para encontrar el conjunto de eigenvalores para cada valor de la presión hidrostática.

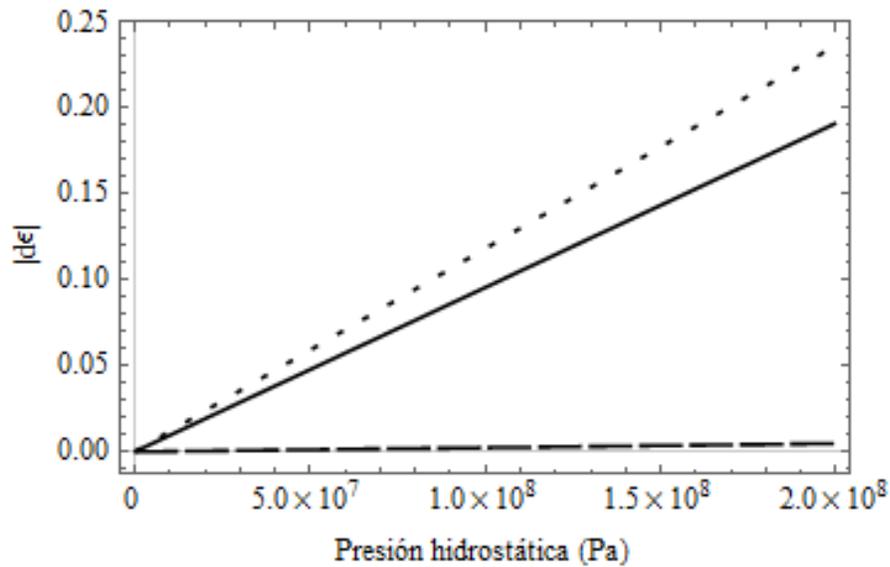


Figura 6.4 Valor absoluto de los cambios en permitividad relativa de PMMA (línea sólida), PS (línea punteada) y SiO₂ (línea discontinua) con la presión hidrostática.

Para ambos arreglos de cristales fotónicos, PMMA-PS y PMMA-SiO₂, se encontró una convergencia del conjunto de eigenvalores con matrices de 7×7 , es decir, $n_{max} = 6$ con un parámetro de red $a = 10 \mu\text{m}$. Además, para ambos arreglos se obtuvo una estructura de bandas similar a su respectivo caso sin presión hidrostática, para cada uno de los valores de presión hidrostática considerados. Sin embargo, la brecha entre la primera y segunda banda cambió en posición y/o tamaño ($\Delta\omega/\omega_m$) tal y como se describe a continuación.

La figura 6.5 muestra las variaciones del límite inferior de la brecha (LIB) y del límite superior de la brecha (LSB) con la presión hidrostática. Los círculos y cuadrados corresponden a PMMA-PS, y los rombos y triángulos corresponden a PMMA-SiO₂. Las líneas punteada y continua corresponden a aproximaciones lineales. El LIB y el LSB del PMMA-PS tienen la misma pendiente de 0.015 THz/MPa. En cambio, para PMMA-SiO₂, el LIB tiene una pendiente de 0.0118 THz/MPa hasta 100 MPa donde hay un cambio abrupto en la pendiente (0.0030 THz/MPa); análogamente, el LSB tiene una pendiente de 0.0030 THz/MPa hasta 100 MPa donde hay un

abrupto cambio en la pendiente (0.0125 THz/MPa) y ambos límites tienen primera derivada discontinua.

El comportamiento del tamaño de la brecha con la presión hidrostática para PMMA-PS y PMMA-SiO₂ está implícito en la figura 6.5. Para PMMA-PS, el ancho de la brecha se mantiene constante cuando la presión hidrostática se incrementa. Este resultado era esperado y es consistente con la ecuación 4.8, ya que los dos materiales tienen propiedades elásticas similares, y por tanto, la razón $\Delta\epsilon/\epsilon$ es constante cuando la presión hidrostática se incrementa. En cambio, para PMMA-SiO₂, el tamaño de la brecha cambia con el incremento de la presión hidrostática, porque las propiedades elásticas de los dos materiales son muy diferentes, como se observa en la figura 6.4. El tamaño de la brecha tiende a cero para presiones cercanas a los 100 MPa. Alrededor de esta presión, las láminas de PMMA y de SiO₂ tienen aproximadamente la misma permitividad relativa. Para presiones mayores a 100 MPa, la permitividad relativa de las láminas de PMMA es menor que la permitividad relativa de las láminas de SiO₂, y como el corolario del teorema variacional de la electrodinámica establece, la energía de campo eléctrico está concentrada en las láminas de SiO₂ en mayor medida que en láminas de PMMA.

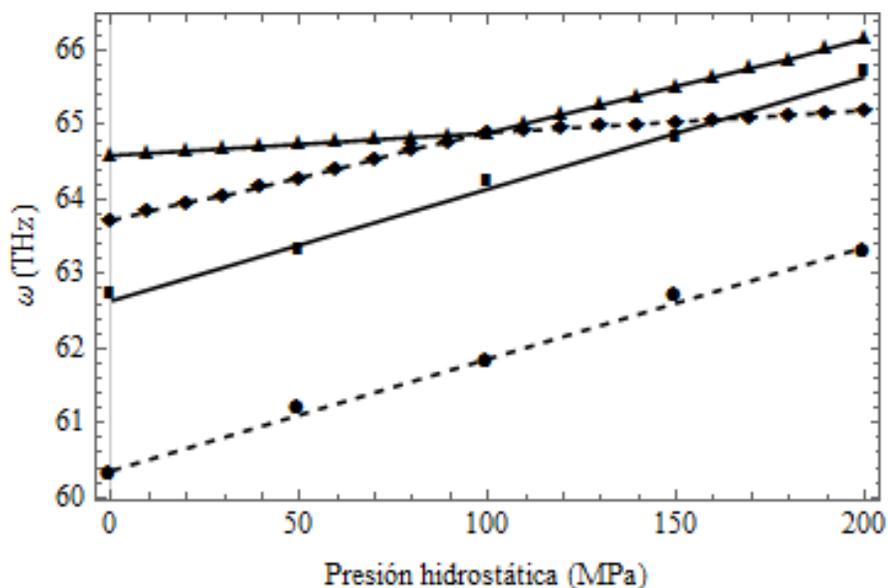


Figura 6.5 Variaciones del límite inferior de la brecha (LIB) y el límite superior de la brecha (LSB) con la presión hidrostática para PMMA-PS (círculo y cuadrado) y PMMA-SiO₂ (rombo y triángulo). Las líneas punteada y sólida corresponden a aproximaciones lineales.

Como se dijo anteriormente, ambos polímeros, PMMA y PS, así como el SiO₂, tienen picos (bandas estrechas) de absorción en el rango de frecuencias de 0 a 200 THz, sin embargo, los efectos elasto-ópticos en la estructura de bandas de ambos arreglos, PMMA-PS y PMMA-SiO₂, están en la brecha entre la primera banda y la segunda banda, y de acuerdo a la figura 6.5, las brechas de ambos arreglos cambian con la presión hidrostática en el intervalo de frecuencias de (60, 67) THz, y en este intervalo de frecuencias ninguno de los tres materiales tiene picos de absorción [48-51]. Por lo tanto, los cambios en la estructura de bandas de ambos arreglos son

consecuencia de la presión hidrostática y los resultados sugieren el uso de estos cristales fotónicos como filtros y reflectores con entonación por presión hidrostática en el intervalo de los THz [20].

Cabe destacar que estos resultados son sumamente importantes dado el reciente interés en los cristales fotónicos unidimensionales en el desarrollo de filtros, reflectores y resonadores en el intervalo de los THz [52-54], y sensores de presión [55].

6.2 Presión localizada.

Una presión⁵ localizada sobre un cristal fotónico unidimensional implica que la fuerza se aplica ortogonal al eje principal del cristal y en una (o varias) región de la superficie lateral del cristal, ver figura 6.6. Para comenzar el estudio de la presión localizada es conveniente primero estudiar que sucede cuando la presión está restringida a una sola lámina del cristal y después extender el estudio a un caso más general.

Supóngase que la presión se ejerce sobre una lámina del cristal, ver figura 6.8. Si no se consideran los esfuerzos cortantes entre las láminas vecinas, entonces, el tensor de deformación de una lámina sometida a presión es

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \nu \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{\sigma}{E} \end{pmatrix},$$

donde ν , E son la razón de Poisson y el módulo de Young de la lámina, y σ es el valor de la presión. Nótese que la fuerza de la presión está en la dirección- y , y que se está suponiendo que la distribución de esfuerzos en cada punto de la lámina es uniforme (las componentes del tensor no dependen de las coordenadas de posición).

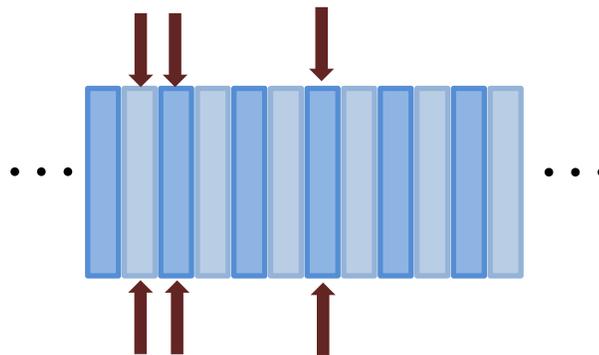


Figura 6.6 Esquema de presión localizada en dos regiones de un cristal fotónico unidimensional. La fuerza se aplica ortogonal al eje principal del cristal.

⁵ En este trabajo se usa la palabra presión para denotar la acción de comprimir un material por unidad de área.

Con esta información se calcula el cambio de la permitividad relativa en cada lámina del cristal, utilizando la ec. (4.37) pero en términos de la permitividad relativa y utilizando una aproximación en serie de Taylor, a saber,

$$\epsilon_i = \frac{1}{\frac{1}{n_0^2} + \lambda_i} \cong \epsilon_0 - \epsilon_0^2 \lambda_i, \quad i \in \{1,2,3\},$$

donde ϵ_i son las permitividades relativas en las direcciones principales de la lámina, n_0 y ϵ_0 son el índice de refracción y la permitividad relativa de la lámina sin deformación, respectivamente; y λ_i son los eigenvalores del tensor “cambio” de índices de refracción en las direcciones principales de la lámina. Para las láminas sin presión $\lambda_i = 0 \forall i \in \{1,2,3\}$, y para las láminas sometidas a presión se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12} + e_{33}p_{11}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(e_{11}p_{11} + e_{22}p_{11} + e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12} + 2e_{33}p_{12}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\begin{array}{c} e_{11}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{11}^2 + e_{22}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}^2 p_{11}p_{12} + 4e_{11}e_{22}p_{11}p_{12} \\ - 2e_{22}^2 p_{11}p_{12} + e_{11}^2 p_{12}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{12}^2 + e_{22}^2 p_{12}^2 \end{array}}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}(e_{11}p_{11} + e_{22}p_{11} + e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12} + 2e_{33}p_{12}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\begin{array}{c} e_{11}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{11}^2 + e_{22}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}^2 p_{11}p_{12} + 4e_{11}e_{22}p_{11}p_{12} \\ - 2e_{22}^2 p_{11}p_{12} + e_{11}^2 p_{12}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{12}^2 + e_{22}^2 p_{12}^2 \end{array}}, \end{aligned}$$

donde e_{ij} son las componentes del tensor de deformación y p_{ij} son las componentes del tensor de Pockels.

Para campos que se propagan paralelos al eje principal del cristal (dirección-z) sólo es necesario calcular la permitividad relativa del cristal en esta dirección. La figura 6.7 muestra la gráfica del valor absoluto del cambio en la permitividad relativa ($d\epsilon = -\epsilon_0^2 \lambda_3$) en la dirección-z contra la presión aplicada en una lámina del cristal, en el intervalo de (0, 100) MPa. Las líneas continua, punteada y discontinua corresponden a PMMA, PS y SiO₂ respectivamente.

La presión localizada sobre una de las láminas del cristal fotónico unidimensional rompe su periodicidad y la simetría de traslación discreta ya no aplica. Sin embargo la teoría de pequeñas perturbaciones proporciona una solución aproximada del problema siempre y cuando la perturbación sea pequeña. Entonces, se tiene que hacer un análisis de la perturbación que ocasiona la compresión de una sola lámina del cristal.

Para un cristal fotónico unidimensional de láminas alternadas con igual espesor de dos materiales dieléctricos en arreglo periódico, la función permitividad relativa en la dirección principal del cristal (dirección-z) es

$$\epsilon_0(z) = \begin{cases} \epsilon^{(1)} & \text{si } \frac{-a}{4} + ma \leq z \leq \frac{a}{4} + ma, \\ \epsilon^{(2)} & \text{si } \frac{a}{4} + ma < z \leq \frac{3a}{4} + ma, \end{cases}$$

donde m es un número entero, a es el parámetro de red del cristal, $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ son las permitividades relativas en la dirección- z del par de materiales. La correspondiente función permitividad relativa $\epsilon(z)$ del cristal con una sola de sus láminas bajo presión se expresa como

$$\epsilon(z) = \epsilon_0(z) + \Delta\epsilon(z),$$

donde $\Delta\epsilon(z)$ cuantifica el cambio en la permitividad relativa de una sola de las láminas del cristal.

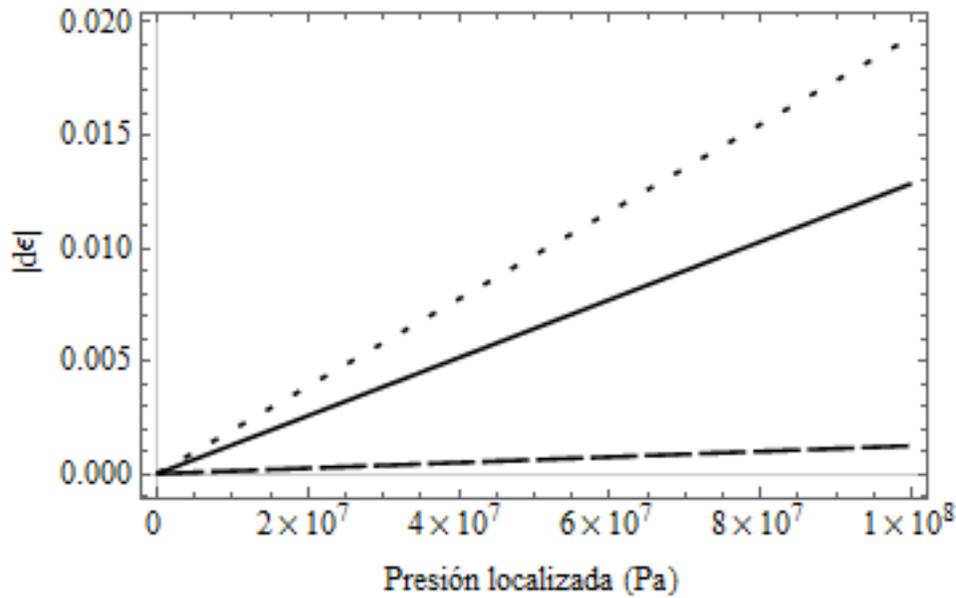


Figura 6.7 Valor absoluto de los cambios en permitividad relativa de PMMA (línea sólida), PS (línea punteada) y SiO₂ (línea discontinua) con la presión localizada.

Dado que la permitividad relativa de una lámina se reduce en la dirección- z si se comprime la lámina con una fuerza en la dirección- y , entonces, el cambio en la permitividad relativa debe ser negativo, esto es, $\Delta\epsilon(z) < 0$. Por otro lado, la función permitividad recíproca $1/\epsilon(z)$ se escribe como

$$\frac{1}{\epsilon(z)} = \frac{1}{\epsilon_0(z)} \left(\frac{1}{1 + \Delta\epsilon(z)/\epsilon_0(z)} \right),$$

y es claro que el factor $|\Delta\epsilon(z)/\epsilon_0(z)|$ cuantifica la magnitud de la perturbación.

Supóngase que la perturbación es pequeña, esto es, $|\Delta\epsilon(z)/\epsilon_0(z)| < 1$, entonces, se desarrolla en serie de Taylor la función entre paréntesis alrededor de cero y se consideran sólo los términos a primer grado de $\Delta\epsilon(z)/\epsilon_0(z)$, es decir

$$\frac{1}{\epsilon(z)} \cong \frac{1}{\epsilon_0(z)} \left(1 - \frac{\Delta\epsilon(z)}{\epsilon_0(z)} \right).$$

De acuerdo al problema de eigenvalores con el vector de intensidad magnética, los campos se determinan solucionando el problema de eigenvalores del operador $\Theta = \nabla \times \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times$, el cual para este problema se reescribe como

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_0 + \hat{\Theta}',$$

donde

$$\hat{\Theta}_0 = \nabla \times \frac{1}{\epsilon_0(z)} \nabla \times, \quad y$$

$$\hat{\Theta}' = -\nabla \times \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} \nabla \times.$$

Ya se tienen casi todos los elementos necesarios para desarrollar el método de la teoría de pequeñas perturbaciones. Falta algo esencial, a saber, el ordenamiento de las eigenfunciones del problema conocido en términos del ordenamiento de su conjunto de eigenvalores. Este proceso de ordenamiento se hará a continuación.

En un cristal fotónico unidimensional, los campos que se propagan paralelos al eje principal del cristal (dirección- z) tienen la forma

$$\vec{\mathcal{H}}_0(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{C}_n \exp \left[i \left(k_z + n \frac{2\pi}{a} \right) z \right],$$

donde \vec{C}_n son vectores que no dependen de z , $k_z = \vec{k} \cdot \hat{e}_z$ es la componente del vector \vec{k} en la dirección- z y sirve para etiquetar las eigenfunciones (campos), n es un número entero, $z = \vec{r} \cdot \hat{e}_z$ es la componente del vector de posición en la dirección principal del cristal y a es el parámetro de red del cristal. Estos campos tienen la forma de una onda plana por una función periódica de período a expresada como una combinación lineal de los elementos de una base de este tipo de funciones. Con esta base se calculan los elementos de matriz de la ecuación de eigenvalores del operador $\hat{\Theta}_0$ asociado al cristal sin defectos.

La figura 6.8 muestra un esquema de los eigenvalores asociados a los campos que se propagan paralelos al eje principal de un cristal fotónico unidimensional de dos capas alternadas, de igual espesor y con una pequeña diferencia en sus permitividades relativas (< 0.5), en arreglo periódico con parámetro de red a . Cada eigenfunción etiquetada con k_z tiene un conjunto infinito y

numerable de eigenvalores (frecuencias angulares ω) en la primera zona Brillouin (k_z entre $-\pi/a$ y π/a) los cuales están agrupados en “bandas” (numeradas por n_b). En la figura se pueden apreciar intervalos de frecuencia angular cuyos elementos no tienen asociada una eigenfunción, es decir, que no son solución de la ecuación de eigenvalores del operador asociado al cristal.

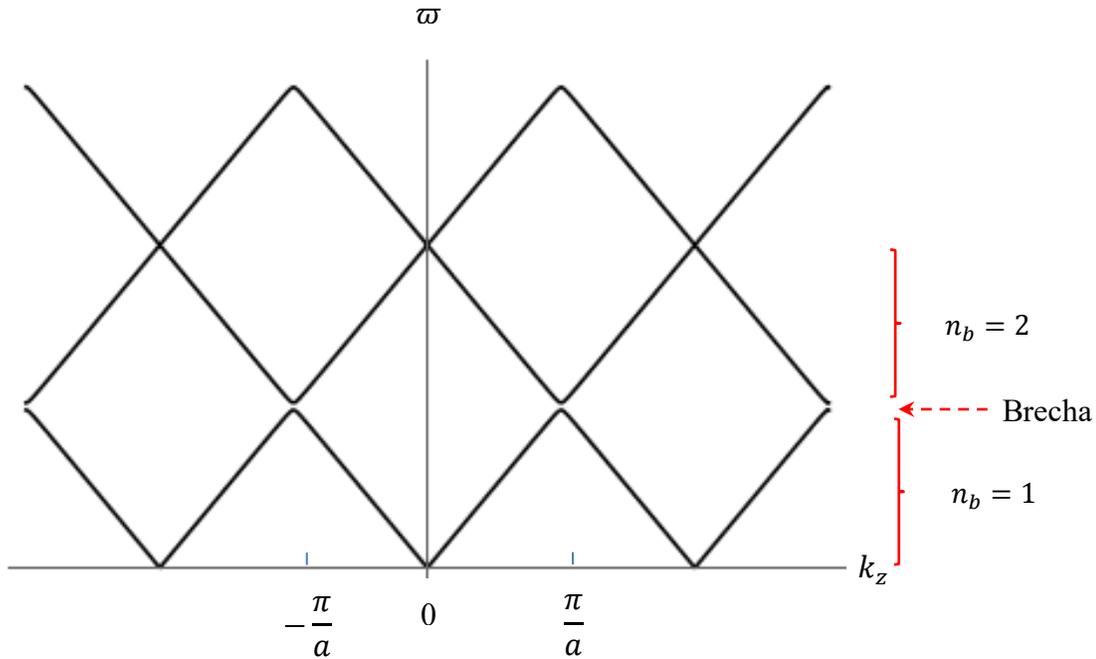


Figura 6.8 Esquema (de zona periódica) de los eigenvalores asociados a los campos que se propagan paralelos al eje principal de cristal fotónico unidimensional de dos láminas alternadas en arreglo periódico con parámetro de red a . Las láminas tienen igual espesor y la diferencia en sus permitividades relativas es pequeña (<0.5).

La numeración de las bandas con el índice n_b junto con la etiqueta k_z de las eigenfunciones sirve para ordenar los eigenvalores del operador asociado al cristal fotónico unidimensional y por ende a su conjunto de eigenfunciones. Un esquema de este ordenamiento se muestra en la figura 6.9. En la primera zona de Brillouin $k_z \in (-\pi/a, \pi/a)$ sólo están los eigenvalores de la primera banda, en la segunda zona de Brillouin $k_z \in (-2\pi/a, -\pi/a) \cup (\pi/a, 2\pi/a)$ sólo se consideran los eigenvalores de la segunda banda y así sucesivamente. Solamente en las fronteras de las zonas de Brillouin hay dos eigenvalores por una sola eigenfunción. Este esquema de ordenamiento no es fortuito sino que es consecuencia del principio variacional de la electrodinámica. En efecto, el eigenvalor de menor frecuencia angular $\omega^{(0)}/c$ está asociado a la menor de las eigenfunciones $\vec{\mathcal{H}}^{(0)}$ y es tal que minimiza la funcional de energía electromagnética U_f . La eigenfunción que sigue en ordenamiento es tal que minimiza U_f en el subespacio de funciones que son ortogonales a $\vec{\mathcal{H}}^{(0)}$ y así sucesivamente. A este esquema de ordenamiento se le denomina esquema de zona extendida.

En el esquema de zona extendida, las eigenfunciones tienen la forma

$$\frac{\vec{b}}{\sqrt{a}} \exp[ik_z z]$$

donde k_z puede estar en cualquiera de las zonas de Brillouin, \vec{b} es un vector constante y unitario, y el factor $1/\sqrt{a}$ sirve para formar una base ortogonal del espacio de funciones definidas en todos los puntos del cristal a excepción, a lo más, en un conjunto de medida cero, y tales que son cuadrado integrables [56].

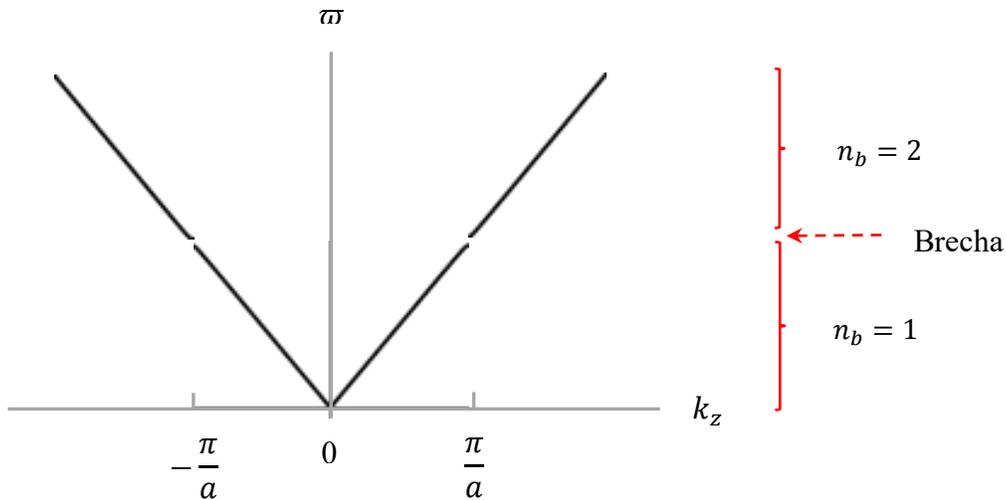


Figura 6.9 Esquema de zona extendida de los eigenvalores asociados a los campos que se propagan paralelos al eje principal de cristal fotónico unidimensional de dos capas alternadas, de igual espesor y con una pequeña diferencia en sus permitividades relativas (<0.5), en arreglo periódico con parámetro de red a .

Ya se tienen todos los elementos necesarios para desarrollar el método de la teoría de pequeñas perturbaciones. De acuerdo a la teoría (ver capítulo 4), los eigenvalores (ω_k) del operador asociado al cristal con una lámina defecto están dados por

$$\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^{2(\pm)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{k'}}{c}\right)^2 + (\hat{\Theta}'_{kk} + \hat{\Theta}'_{k'k'}) \right] \pm \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{k'}}{c}\right)^2 + (\hat{\Theta}'_{kk} - \hat{\Theta}'_{k'k'})}{2} \right]^2 + \hat{\Theta}'_{k'k} \hat{\Theta}'_{kk'}}$$

donde k, k' son etiquetas⁶ para los eigenvalores y las eigenfunciones del operador asociado al problema conocido (cristal fotónico unidimensional), y

⁶ Aquí se omiten los subíndices de la componente en la dirección-z del vector \vec{k} por simplicidad de notación.

$$\widehat{\Theta}'_{kk'} = \frac{1}{a} \int_{-L/2}^{L/2} \vec{b}^* \exp(-ikz) \cdot \widehat{\Theta}' \vec{b}' \exp(ik'z) dz$$

donde L es el tamaño del cristal con lámina defecto, y de acuerdo a lo anteriormente expuesto se tiene que

$$\widehat{\Theta}'_{kk'} = \frac{1}{a} \int_{-L/2}^{L/2} \vec{b}^* \exp(-ikz) \cdot \left[-\nabla \times \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} \nabla \times \right] \vec{b}' \exp(ik'z) dz.$$

Los campos que son solución al problema deben cumplir la condición de la divergencia del vector de intensidad magnética, esto es

$$0 = \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \nabla \cdot \left[\sum \vec{b} \exp(ik_z z) \right] = - \sum ik_z \exp(ik_z z) \vec{b} \cdot \hat{e}_z.$$

Por lo cual, basta con que el vector \vec{b} sea ortogonal a \hat{e}_z .

Con la condición de divergencia se desarrolla el integrando de la expresión de los elementos de matriz $\widehat{\Theta}'_{kk'}$:

$$\nabla \times \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} \nabla \times \vec{b}' \exp(ik'z) = ik' \left[ik' \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} \exp(ik'z) \hat{e}_z + \exp(ik'z) \nabla \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} \right] \times \hat{e}_z \times \vec{b}'.$$

Las funciones $\Delta\epsilon(z)$ son tipo escalón, por lo cual, el segundo término es igual a cero en todos los puntos del cristal a excepción de un conjunto de medida cero. Por lo tanto los elementos de matriz se reducen a

$$\widehat{\Theta}'_{kk'} = -\frac{(k')^2}{a} \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(k' - k)z] \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} dz.$$

El eigenvalor del estado base (ω_0) es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^{2(\pm)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{k'}}{c}\right)^2 + (\widehat{\Theta}'_{00} + \widehat{\Theta}'_{k'k'}) \right] \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{k'}}{c}\right)^2 + (\widehat{\Theta}'_{00} - \widehat{\Theta}'_{k'k'})}{2} \right]^2 + \widehat{\Theta}'_{k'0} \widehat{\Theta}'_{0k'}}. \end{aligned}$$

El problema conocido tiene un conjunto continuo de eigenvalores por lo cual los eigenvalores $\varpi_{k'}$ más cercanos a ϖ_0 son los que mayor contribución aportan al desarrollo en serie de los campos. En este caso se tiene que

$$\left(\frac{\varpi_0}{c}\right)^2 \cong \left(\frac{\varpi_{k'}}{c}\right)^2 \quad y \quad \hat{\Theta}'_{00} \cong \hat{\Theta}'_{k'k'}.$$

Por lo que

$$\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^{2(\pm)} \cong \left(\frac{\varpi_0}{c}\right)^2 + \hat{\Theta}'_{00},$$

donde se han despreciado los términos de segundo grado en la perturbación.

Desarrollos análogos se pueden hacer para otros eigenvalores que están dentro de una banda del espectro de frecuencias permitidas del cristal perfecto, es decir, los eigenvalores del operador asociado al cristal con lámina defecto también forman bandas de frecuencias permitidas. Sin embargo, en los límites de las zonas de Brillouin existen dos eigenvalores asociados a una sola eigenfunción y no aplica el desarrollo anterior.

En el límite por la izquierda de la primera zona de Brillouin ($k = \pi/a$) se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_{\pi/a}}{c}\right)^{2(\pm)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varpi_{\pi/a}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varpi_{k'}}{c}\right)^2 + \left(\hat{\Theta}'_{\frac{\pi\pi}{aa}} + \hat{\Theta}'_{k'k'}\right) \right] \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\varpi_{\pi/a}}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varpi_{k'}}{c}\right)^2 + \left(\hat{\Theta}'_{\frac{\pi\pi}{aa}} - \hat{\Theta}'_{k'k'}\right)}{2} \right]^2} + \hat{\Theta}'_{k'\frac{\pi}{a}} \hat{\Theta}'_{\frac{\pi}{a}k'}. \end{aligned}$$

El término que más aporta al desarrollo es la misma eigenfunción ($k' = \pi/a$) pero asociada con el eigenvalor de la segunda banda (límite por la derecha). Entonces:

$$\left(\frac{\omega_{\pi/a}}{c}\right)^{2(\pm)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varpi_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varpi_2}{c}\right)^2 + 2\hat{\Theta}'_{\frac{\pi}{a}} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\varpi_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varpi_2}{c}\right)^2}{2} \right]^2} + \left(\hat{\Theta}'_{\frac{\pi}{a}}\right)^2$$

donde ϖ_1, ϖ_2 son los eigenvalores del operador asociado al cristal perfecto en los límites inferior y superior de la brecha de frecuencias, respectivamente; y

$$\hat{\Theta}'_{\frac{\pi}{a}} = -\frac{\pi^2}{a^3} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\Delta\epsilon(z)}{(\epsilon_0(z))^2} dz.$$

Por lo tanto, las frecuencias permitidas por el cristal con lámina defecto que son adicionales al caso de cristal perfecto son las asociadas a las eigenfunciones en la frontera de la zona de Brillouin. Si alguna de

estas frecuencias se encuentra en la brecha de las primeras dos bandas del espectro del cristal perfecto, entonces, se tiene un modo defecto, esto es, una frecuencia que era prohibida para el cristal perfecto pero que a causa de la lámina defecto le corresponde una onda que puede propagarse por el cristal pero concentrado gran parte de su energía de campo eléctrico en la lámina defecto o en sus inmediaciones, dependiendo de qué tipo de lámina defecto se trate.

Sólo estas dos últimas ecuaciones se necesitan para analizar la existencia de modos defecto a causa de la presión localizada. Tres tipos de presión localizada se estudiaron en ambos arreglos de cristal fotónico (PMMA-PS y PMMA-SiO₂): Una presión localizada sobre una de las láminas de mayor permitividad relativa, una presión localizada sobre una de las láminas de menor permitividad relativa, y una presión localizada sobre dos láminas del cristal.

Los cambios de permitividad relativa en valor absoluto de una lámina de PS y PMMA con la presión localizada son menores a 0.01 para presiones menores a 80 MPa, ver figura 6.7. Cinco cambios de permitividad relativa de una lámina de PS y una de PMMA se seleccionaron para calcular las frecuencias de los modos defecto y se muestran en la tabla 3 con la respectiva presión que provoca el cambio.

Tabla 3 Cambio de permitividad relativa de una lámina de PS y una de PMMA con la presión localizada.

Cambio de la permitividad relativa de la lámina	Presión (MPa) que causa el cambio de permitividad relativa en una lámina de:	
	PS	PMMA
-0.001	5	8
-0.003	15	23
-0.005	26	39
-0.008	41	62
-0.010	52	78

Debido al poco cambio de permitividad relativa de una lámina de SiO₂ con la presión localizada, en comparación con los cambios en las otras láminas, ver figura 6.7, los cambios de permitividad relativa de una lámina de SiO₂ que se seleccionaron son diferentes y se muestran en la tabla 4 junto con la respectiva presión que provoca el cambio.

Tabla 4 Cambio de permitividad relativa de una lámina de SiO₂ con la presión localizada.

Cambio de la permitividad relativa de la lámina	Presión (MPa) que causa el cambio de permitividad relativa en una lámina de SiO ₂
-0.0002	16
-0.0004	32
-0.0006	48
-0.0008	64
-0.001	80

I. Presión localizada sobre una lámina de mayor permitividad relativa.

El PS es el material de mayor permitividad relativa en el cristal PMMA-PS, y el PMMA es el material de mayor permitividad relativa en el cristal PMMA-SiO₂. Las frecuencias permitidas (dos raíces) que se obtienen para ambos cristales por presión localizada sobre una sola de las láminas de mayor permitividad relativa, para cada cambio de permitividad relativa, se muestran en la tabla 5.

Tabla 5 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre una sola lámina de mayor permitividad relativa.

Cambio de permitividad relativa de la lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre una lámina de PS en el cristal PMMA-PS		Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre una lámina de PMMA en el cristal PMMA-SiO ₂	
-0.001	60.367	62.755	63.728	64.605
-0.003	60.378	62.766	63.742	64.620
-0.005	60.390	62.778	63.755	64.635
-0.008	60.407	62.795	63.775	64.658
-0.010	60.418	62.807	63.787	64.675

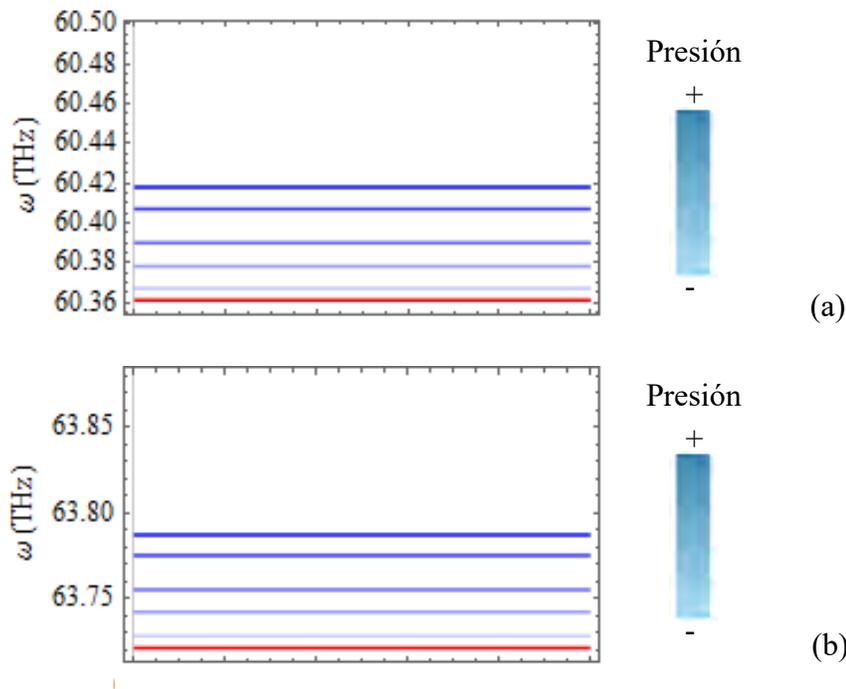


Figura 6.10 Comportamiento del modo defecto con el aumento de la presión localizada sobre una sola lámina de mayor permitividad relativa para los cristales (a) PMMA-PS y (b) PMMA-SiO₂. La línea roja indica el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el comportamiento del modo defecto con la presión.

El intervalo de frecuencias prohibidas del cristal PMMA-PS sin perturbación es (60.361, 62.749) THz, entonces, sólo existe un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa, pues sólo una frecuencia está dentro del intervalo de frecuencias prohibidas del cristal sin perturbación. Análogamente, el intervalo de frecuencias prohibidas del cristal PMMA-SiO₂ sin perturbación es (63.721, 64.598) THz, y por lo tanto, sólo hay un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa.

Conforme mayor es la perturbación (cambio de permitividad relativa de la lámina sometida a presión localizada), a causa del aumento de la presión localizada, mayor es la frecuencia del modo defecto. Además, todos los modos defecto se ubican cerca de la primera banda. Este resultado es consistente con la teoría porque al disminuir localmente la permitividad relativa del cristal se incrementa la funcional de energía electromagnética, y en consecuencia, la eigenfunción asociada debe tener una mayor frecuencia angular y parte de su energía de campo eléctrico se distribuye en la lámina sometida a presión. La figura 6.10 muestra el comportamiento del modo defecto con el aumento de la presión localizada sobre una sola lámina de mayor permitividad relativa para los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂, en esquemas de niveles de frecuencia angular. La línea roja, en ambos esquemas, representa el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la presión.

II. Presión localizada sobre una lámina de menor permitividad relativa.

El PMMA es el material de menor permitividad relativa en el cristal PMMA-PS, y el SiO₂ es el material de menor permitividad relativa en el cristal PMMA-SiO₂. Las frecuencias permitidas (dos raíces) que se obtienen para ambos cristales por presión localizada sobre una sola de las láminas de menor permitividad relativa, para cada cambio de permitividad relativa, se muestran en las tablas 6 y 7.

Tabla 6 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre una sola lámina de PMMA del cristal PMMA-PS.

Cambio de permitividad relativa de la lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre una lámina de PMMA en el cristal PMMA-PS	
-0.001	60.368	62.756
-0.003	60.383	62.771
-0.005	60.398	62.786
-0.008	60.420	62.809
-0.010	60.434	62.824

Los intervalos de frecuencias prohibidas de los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂ sin perturbación son (60.361, 62.749) THz y (63.721, 64.598) THz, respectivamente. Entonces, sólo existe un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa en ambos cristales, y conforme mayor es el cambio de permitividad, mayor es la frecuencia del modo defecto. Además, todos los modos defecto se encuentran cerca de la primera banda.

Tabla 7 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre una sola lámina de SiO₂ del cristal PMMA-SiO₂.

Cambio de permitividad relativa de la lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre una lámina de SiO ₂ en el cristal PMMA-SiO ₂	
-0.0002	63.7224	64.5996
-0.0004	63.7239	64.6011
-0.0006	63.7257	64.6026
-0.0008	63.7272	64.6044
-0.001	63.7287	64.6059

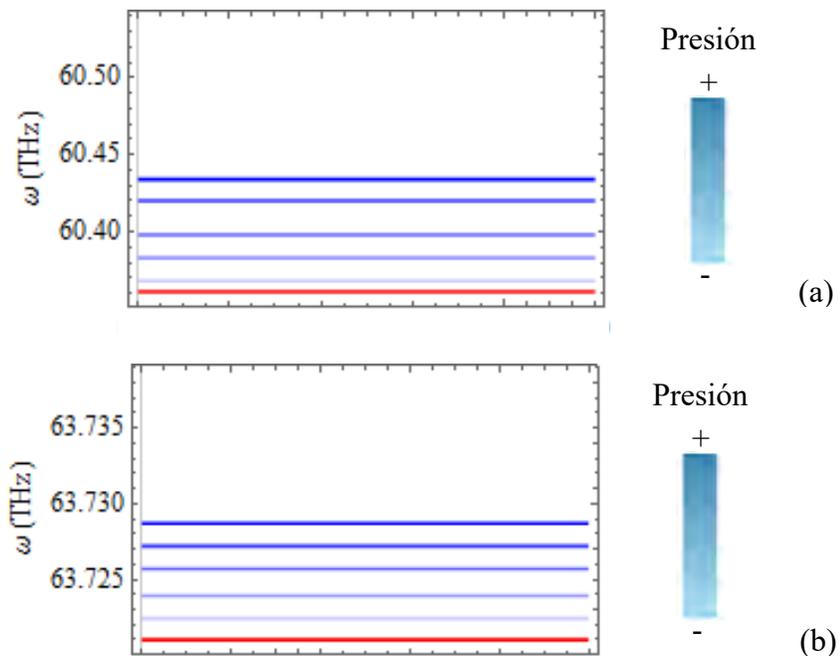


Figura 6.11 Comportamiento del modo defecto con el aumento de la presión localizada sobre una sola lámina de menor permitividad relativa para los cristales (a) PMMA-PS y (b) PMMA-SiO₂. La línea roja indica el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el comportamiento del modo defecto con la presión.

Los resultados son consistentes con la teoría porque al disminuir localmente la permitividad relativa del cristal se incrementa la funcional de energía electromagnética, y por lo tanto, la eigenfunción asociada debe tener una mayor frecuencia angular y parte de su energía de campo eléctrico se distribuye en la lámina sometida a presión. La figura 6.11 muestra el comportamiento del modo defecto con el aumento de la presión localizada sobre una sola lámina de menor permitividad relativa para los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂, en esquemas de niveles de frecuencia angular. La línea roja, en ambos esquemas, representa el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la presión.

Con la finalidad de hacer un estudio completo de los modos defecto inducidos en los cristales fotónicos propuestos se agregan los casos de “tensión localizada” sobre una lámina del cristal antes de presentar el caso de presión localizada sobre dos láminas del cristal.

La fuerza de tensión se aplica en la misma dirección de la fuerza de compresión de los casos anteriores. El efecto de la tensión sobre una lámina por la que se trasmite una onda electromagnética es aumentar la densidad de dipolos por unidad de volumen en la dirección de transmisión de la onda, y esto implica que la permitividad debe aumentar con respecto al caso sin tensión. Para el caso de tensión localizada basta con cambiar el signo de la expresión del cambio de permitividad relativa con presión localizada (ver inicio de la sección 6.2).

III. Tensión localizada sobre una lámina de mayor permitividad relativa.

Las frecuencias permitidas (dos raíces) que se obtienen para los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂ por tensión localizada sobre una sola de las láminas de mayor permitividad relativa, para cada cambio de permitividad relativa, se muestran en la tabla 8.

Tabla 8 Frecuencias permitidas por tensión localizada sobre una sola lámina de mayor permitividad relativa.

Cambio de permitividad relativa de la lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por tensión localizada sobre una lámina de PS en el cristal PMMA-PS		Frecuencias (THz) obtenidas por tensión localizada sobre una lámina de PMMA en el cristal PMMA-SiO ₂	
0.001	62.743	60.355	64.591	63.714
0.003	62.732	60.343	64.577	63.699
0.005	62.721	60.331	64.564	63.684
0.008	62.704	60.312	64.545	63.660
0.010	62.693	60.300	64.533	63.643

El intervalo de frecuencias prohibidas del cristal PMMA-PS sin perturbación es (60.361, 62.749) THz, entonces, sólo existe un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa, pues sólo una frecuencia está dentro del intervalo de frecuencias prohibidas del cristal sin perturbación. Análogamente, el intervalo de frecuencias prohibidas del cristal PMMA-SiO₂ sin perturbación es (63.721, 64.598) THz, y por lo tanto, sólo hay un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa.

Conforme mayor es la perturbación (cambio de permitividad relativa) a causa del aumento de la tensión localizada, menor es la frecuencia del modo defecto. Además, todos los modos defecto se ubican cerca de la segunda banda. Este resultado es consistente con la teoría porque al aumentar localmente la permitividad relativa del cristal se reduce la funcional de energía electromagnética, y en consecuencia, la eigenfunción asociada debe tener una menor frecuencia angular y parte de su energía de campo eléctrico se distribuye en la lámina sometida a tensión. La figura 6.12 muestra el comportamiento del modo defecto con el aumento de la tensión localizada sobre una sola lámina de mayor permitividad relativa para los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂, en

esquemas de niveles de frecuencia angular. La línea roja, en ambos esquemas, representa el límite superior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la tensión.

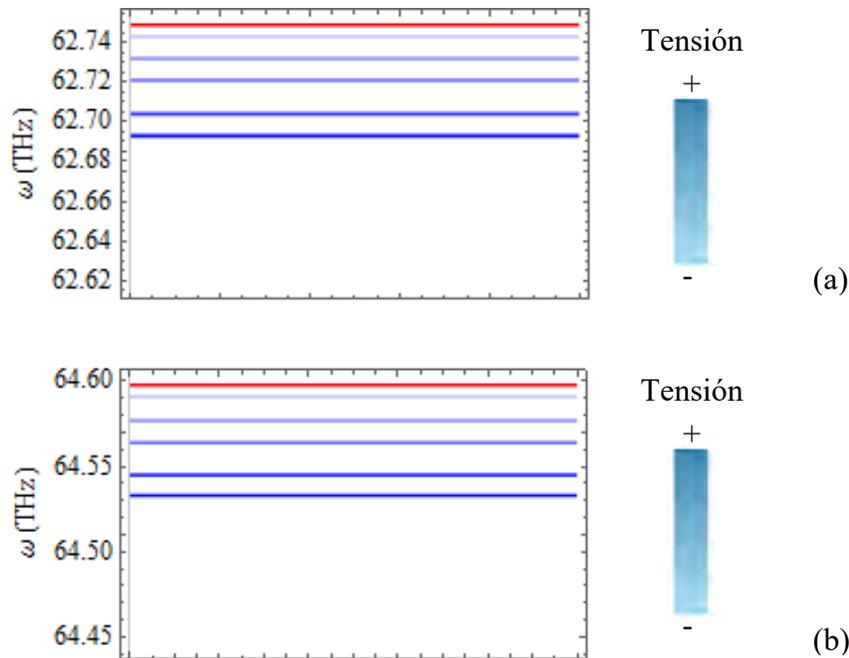


Figura 6.12 Comportamiento del modo defecto con el aumento de la tensión localizada sobre una sola lámina de mayor permitividad relativa para los cristales (a) PMMA-PS y (b) PMMA-SiO₂. La línea roja indica el límite superior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la tensión.

IV. Tensión localizada sobre una lámina de menor permitividad relativa.

Las frecuencias permitidas (dos raíces) que se obtienen para los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂ por tensión localizada sobre una sola de las láminas de menor permitividad relativa, para cada cambio de permitividad relativa, se muestran en las tablas 9 y 10.

Tabla 9 Frecuencias permitidas por tensión localizada sobre una sola lámina de PMMA del cristal PMMA-PS.

Cambio de permitividad relativa de la lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por tensión localizada sobre una lámina de PMMA en el cristal PMMA-PS	
0.001	62.742	60.353
0.003	62.727	60.338
0.005	62.713	60.322
0.008	62.692	60.298
0.010	62.678	60.283

Tabla 10 Frecuencias permitidas por tensión localizada sobre una sola lámina de SiO₂ del cristal PMMA-SiO₂.

Cambio de permitividad relativa de la lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por tensión localizada sobre una lámina de SiO ₂ en el cristal PMMA-SiO ₂	
0.0002	64.5966	63.7194
0.0004	64.5951	63.7179
0.0006	64.5936	63.7161
0.0008	64.5921	63.7146
0.001	64.5906	63.7131

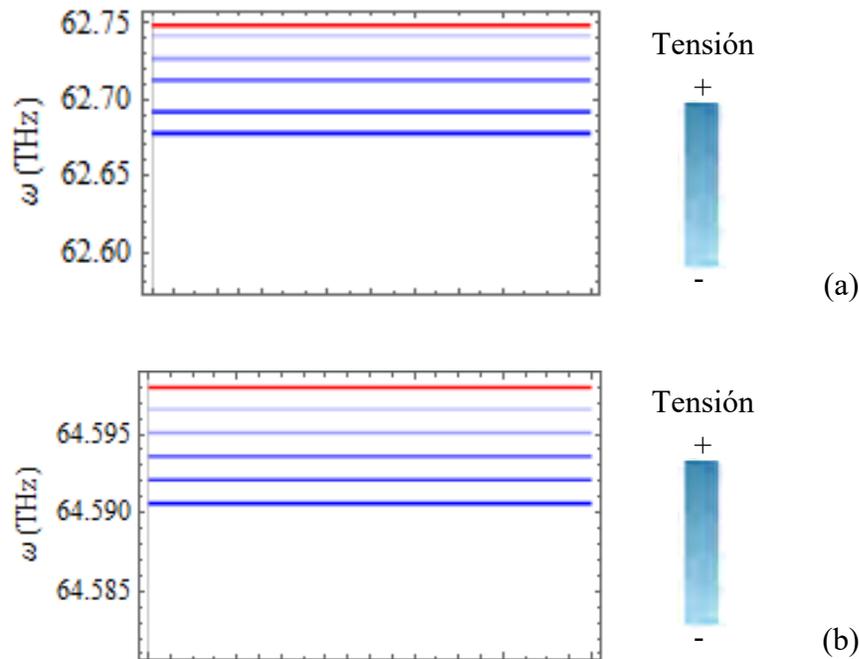


Figura 6.13 Comportamiento del modo defecto con el aumento de la tensión localizada sobre una sola lámina de menor permitividad relativa para los cristales (a) PMMA-PS y (b) PMMA-SiO₂. La línea roja indica el límite superior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la tensión.

Los intervalos de frecuencias prohibidas de los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂ sin perturbación son (60.361, 62.749) THz y (63.721, 64.598) THz, respectivamente. Entonces, sólo existe un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa en ambos cristales, y conforme mayor es el cambio de permitividad, menor es la frecuencia del modo defecto. Además, todos los modos defecto se encuentran cerca de la segunda banda.

Los resultados son consistentes con la teoría porque al aumentar localmente la permitividad relativa del cristal se incrementa la funcional de energía electromagnética, y por lo tanto, la eigenfunción asociada debe tener una menor frecuencia angular y parte

de su energía de campo eléctrico se distribuye en la lámina sometida a tensión. La figura 6.13 muestra el comportamiento del modo defecto con el aumento de la tensión localizada sobre una sola lámina de menor permitividad relativa para los cristales PMMA-PS y PMMA-SiO₂, en esquemas de niveles de frecuencia angular. La línea roja, en ambos esquemas, representa el límite superior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la tensión.

Antes de presentar los resultados de presión localizada sobre dos láminas del cristal es conveniente hacer unas aclaraciones.

Primero, es factible pensar que el problema de una sola lámina bajo presión proporciona una base para las eigenfunciones correspondientes al problema de dos láminas bajo presión, es decir, el caso de una lámina se puede considerar como el caso no perturbado y el caso de dos láminas como el caso perturbado; sin embargo, las eigenfunciones del problema de una sola lámina sometida a presión están expresadas por un conjunto infinito de coeficientes que se calculan con el conocimiento de las eigenfunciones del cristal perfecto. Entonces, en la práctica no es posible aplicar el método de perturbaciones bajo este supuesto porque el método requiere el conocimiento de las eigenfunciones del problema que se supone como no perturbado. Por lo tanto, esta idea se descarta y se toma como problema no perturbado el cristal perfecto.

Segundo, la ecuación (4.37) indica que el método de perturbaciones proporciona sólo dos eigenvalores que pueden corresponder a un modo defecto o no, ya sea si se trata el problema de dos o más láminas sometidas a presión localizada.

Dadas las hipótesis sobre el tipo de cristal fotónico hay tres casos de estudio: Se comprimen dos láminas de mayor permitividad relativa, se comprimen dos láminas de menor permitividad relativa, o se comprime una lámina de cada material.

V. Presión localizada sobre dos láminas del cristal.

Recuérdese que el PS es el material de mayor permitividad relativa en el cristal PMMA-PS, y el PMMA es el material de mayor permitividad relativa en el cristal PMMA-SiO₂. Las frecuencias permitidas (dos raíces) que se obtienen para el cristal PMMA-PS por el cambio de permitividad relativa a causa de la presión localizada sobre: dos láminas de mayor permitividad relativa, dos láminas de menor permitividad relativa y una lámina de cada material; se muestran en la tabla 11.

Dado que el intervalo de frecuencias prohibidas del cristal PMMA-PS sin perturbación es (60.361, 62.749) THz, entonces, los resultados indican que sólo existe un modo defecto por cada cambio de permitividad relativa para los tres casos, ya que sólo una frecuencia está dentro del intervalo de frecuencias prohibidas del cristal sin perturbación. La figura 6.14 muestra un esquema del comportamiento del modo defecto con el aumento de la presión localizada en los tres casos. La línea roja representa el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto y las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la presión.

Tabla 11 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre dos láminas del cristal PMMA-PS.

Cambio de permitividad relativa de una lámina	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre dos láminas del cristal PMMA-PS					
	Dos láminas de mayor permitividad relativa (PS)		Dos láminas de menor permitividad relativa (PMMA)		Una lámina de cada material	
-0.001	60.372	62.760	60.376	62.764	60.374	62.762
-0.003	60.396	62.784	60.405	62.793	60.400	62.788
-0.005	60.418	62.807	60.434	62.824	60.426	62.815
-0.008	60.452	62.844	60.475	62.793	60.464	62.857
-0.010	60.473	62.868	60.502	62.764	60.488	62.886

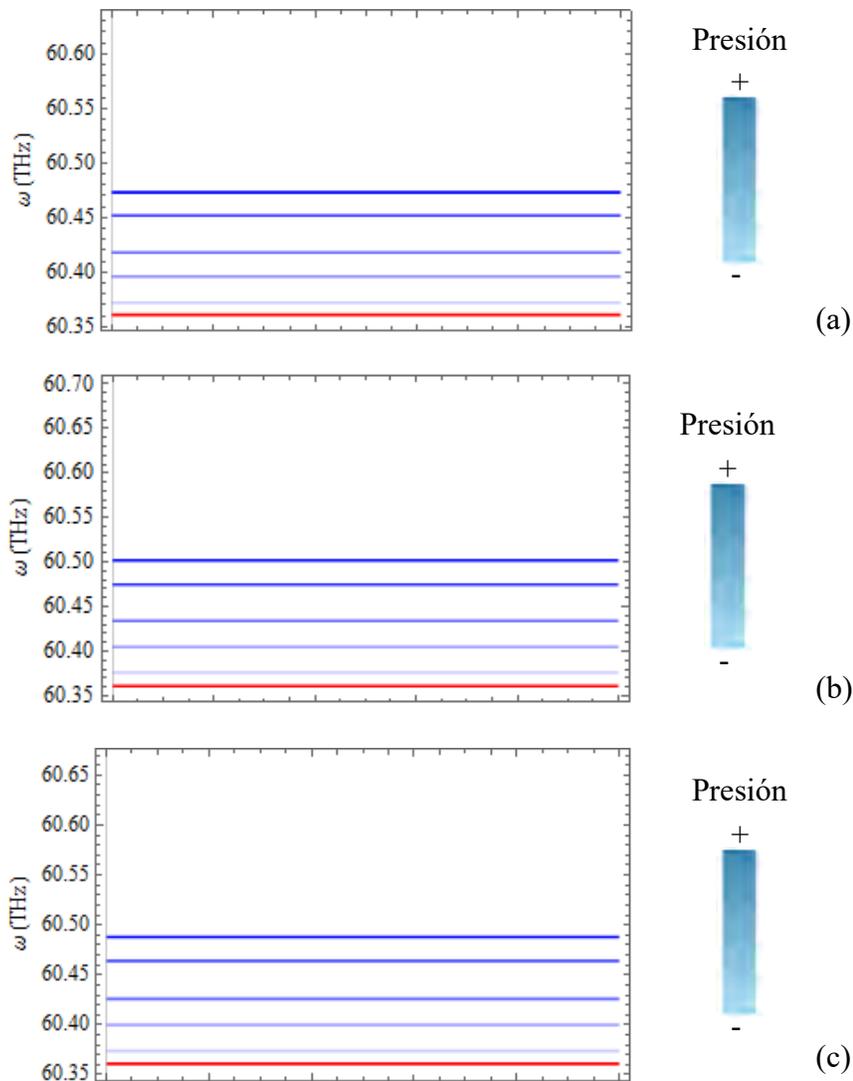


Figura 6.14 Comportamiento del modo defecto con el cambio de permitividad relativa a causa de la presión localizada sobre dos láminas del cristal PMMA-PS: a) Dos láminas de PS, b) dos láminas de PMMA, y c) una lámina de cada material. La línea roja indica el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la presión.

Las tablas 12, 13 y 14 presentan los eigenvalores (dos raíces) obtenidas por presionar: Dos láminas de PMMA, dos láminas de SiO₂ y una lámina de cada material, en el cristal PMMA-SiO₂. Dado que el intervalo de frecuencias prohibidas del cristal PMMA-SiO₂ sin perturbación es (63.721, 64.598) THz, entonces, los resultados indican que sólo hay un modo defecto por cada cambio de permitividad en los tres casos. La figura 6.15 muestra el comportamiento del modo defecto con el aumento de la presión para los tres casos. La línea roja indica el límite inferior de la brecha de banda del cristal sin defecto, y las líneas azules muestran el comportamiento del defecto con la presión.

Tabla 12 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre dos láminas de PMMA del cristal PMMA-SiO₂.

Cambio de permitividad relativa de una lámina de PMMA	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre dos láminas de PMMA en el cristal PMMA-SiO ₂	
-0.001	63.735	64.612
-0.003	63.762	64.642
-0.005	63.787	64.675
-0.008	63.821	64.726
-0.010	63.841	64.762

Tabla 13 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre dos láminas de SiO₂ del cristal PMMA-SiO₂.

Cambio de permitividad relativa de una lámina de SiO ₂	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre dos láminas de SiO ₂ en el cristal PMMA-SiO ₂	
-0.0002	63.724	64.601
-0.0004	63.727	64.604
-0.0006	63.730	64.607
-0.0008	63.733	64.611
-0.001	63.736	64.614

Tabla 14 Frecuencias permitidas por presión localizada sobre una lámina de cada material del cristal PMMA-SiO₂.

Cambio de permitividad relativa de la lámina de PMMA	Cambio de permitividad relativa de la lámina de SiO ₂	Frecuencias (THz) obtenidas por presión localizada sobre dos láminas de SiO ₂ en el cristal PMMA-SiO ₂	
-0.001	-0.0002	63.730	64.607
-0.003	-0.0004	63.745	64.623
-0.005	-0.0006	63.760	64.640
-0.008	-0.0008	63.780	64.665
-0.010	-0.001	63.793	64.684

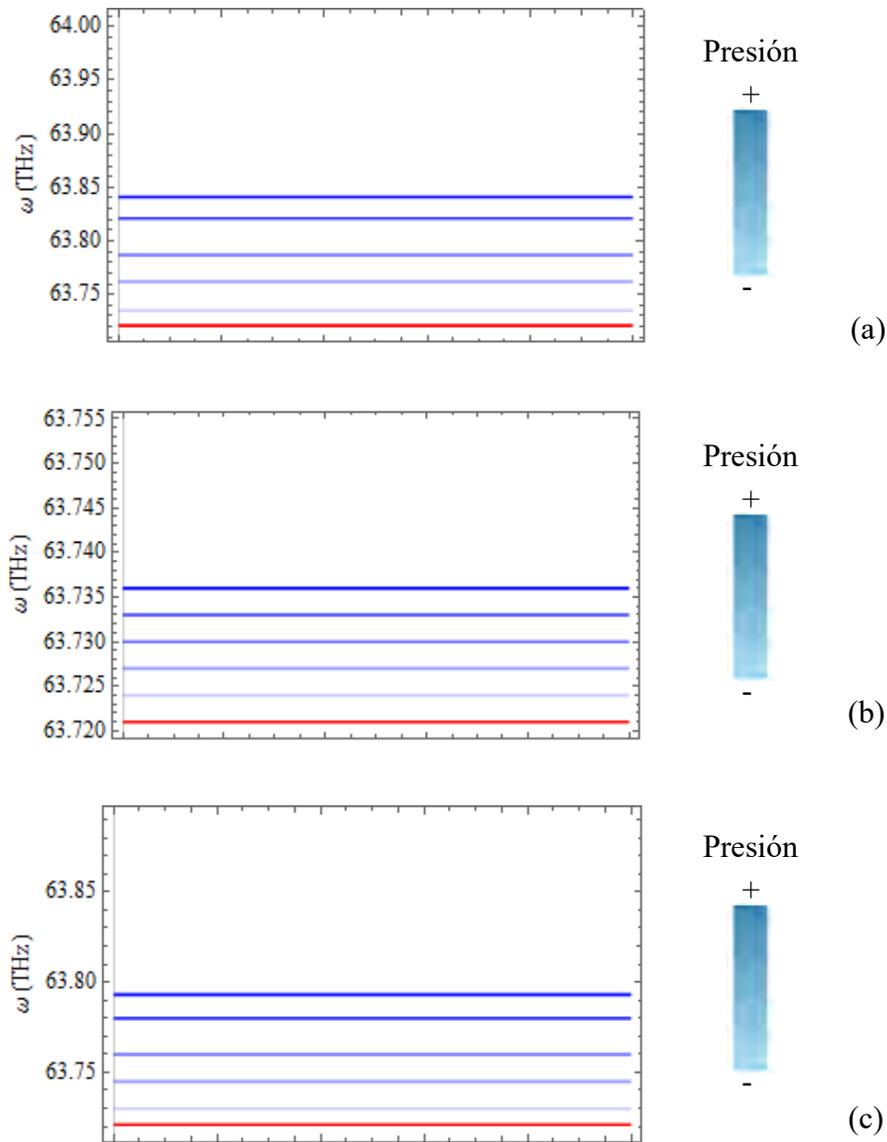


Figura 6.15 Comportamiento del modo defecto con el cambio de permitividad relativa a causa de la presión localizada sobre dos láminas del cristal PMMA-SiO₂: a) Dos láminas de PMMA, b) dos láminas de SiO₂ y c) una lámina de cada material. La línea roja indica el límite superior de la brecha de banda del cristal sin defecto. Las líneas azules indican el cambio del modo defecto con la presión.

Los modos defecto obtenidos en los casos de dos láminas bajo presión localizada están más próximos al centro de la brecha que los correspondientes al caso de una sola lámina bajo presión localizada. Se afirma que los modos más próximos al centro de la brecha tienen una mayor factibilidad de ser modos localizados. A continuación se demuestra esta proposición.

Sean $\bar{\omega}_n^{(1)}$ y $\bar{\omega}_n^{(2)}$ los modos defecto inducidos por presión localizada en una y dos láminas del cristal con la misma presión, respectivamente; y sean $\hat{\Theta}'_{ln^{(1)}}$ y $\hat{\Theta}'_{ln^{(2)}}$ sus respectivos elementos de matriz del operador de perturbación que mayor aporte dan a su desarrollo en la base de eigenfunciones del caso no perturbado.

De las ecs. (4.34) y (4.35) a primer grado de λ se tiene que:

$$\left| \frac{C_{ln}^{(1)}}{C_{nn}^{(1)}} \right| = \left| \frac{\lambda \hat{\Theta}'_{ln^{(1)}}}{\omega_n - \omega_l} \right|,$$

$$\left| \frac{C_{ln}^{(2)}}{C_{nn}^{(2)}} \right| = \left| \frac{\lambda \hat{\Theta}'_{ln^{(2)}}}{\omega_n - \omega_l} \right|,$$

donde ω_n y ω_l son los límites inferior y superior de la brecha, respectivamente. Estas ecuaciones dan la amplitud de los modos defecto, y por lo tanto, indican la “factibilidad” de que el modo defecto se presente en el cristal con defecto. Para compararlos simplemente se toma la razón entre los términos:

$$\frac{\left| \frac{C_{ln}^{(1)}}{C_{nn}^{(1)}} \right|}{\left| \frac{C_{ln}^{(2)}}{C_{nn}^{(2)}} \right|} = \frac{\left| \hat{\Theta}'_{ln^{(1)}} \right|}{\left| \hat{\Theta}'_{ln^{(2)}} \right|} < 1.$$

La desigualdad se debe a que $\left| \hat{\Theta}'_{ln^{(1)}} \right| < \left| \hat{\Theta}'_{ln^{(2)}} \right|$, esto es, el término de perturbación debido a la aplicación de una presión localizada sobre dos láminas es mayor que el respectivo término para presión localizada sobre una lámina.

Como $\bar{\omega}_n^{(1)} < \bar{\omega}_n^{(2)}$, de acuerdo a los resultados, entonces se concluye que los modos defecto que están más cercanos a la mitad de la brecha son más factibles de presentarse en un cristal con defecto. Una demostración análoga aplica para el caso de tensión localizada. Este resultado está de acuerdo con los resultados reportados por Joannopoulos, J. D. et al: “States with frequencies in the center of the gap will be most strongly attached to the defect” [24].

Por lo tanto, los resultados numéricos obtenidos con la teoría de perturbaciones están de acuerdo con los resultados experimentales. Más aún, dado que no hay ninguna razón física por la cual el modo defecto que se obtiene al comprimir una sola lámina ya no sea factible al comprimir dos láminas, entonces, los dos modos defecto conservan su amplitud en el espectro de frecuencias de un pulso que se transmite por el cristal, por lo cual, los resultados obtenidos también son consistentes con el hecho experimental de que el número de modos defecto en un cristal fotónico unidimensional es igual al número de láminas defecto para incidencia normal [57].

PARTE III

CONCLUSIONES Y REFERENCIAS

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se hizo un estudio teórico de los efectos que producen una presión hidrostática y una presión localizada en la estructura de bandas de dos cristales fotónicos unidimensionales: Uno compuesto por láminas de poli (metil-metacrilato) (PMMA) y de poliestireno (PS), y otro compuesto por láminas de PMMA y dióxido de silicio (SiO_2). En ambos cristales las láminas tenían igual espesor y estaban alternadas en una configuración periódica de $10 \mu\text{m}$.

En el caso de la presión hidrostática. Los resultados de este trabajo muestran que la brecha de frecuencias prohibidas de los cristales tiende a mayores frecuencias conforme se incrementa la presión hidrostática. Este comportamiento se debe a la disminución de la permitividad relativa de las láminas con la presión. Los resultados también muestran una variación en el ancho de la brecha de frecuencias prohibidas que depende de las propiedades mecánicas de las láminas del cristal. Si las propiedades mecánicas de las dos láminas son similares, como en el caso de los polímeros, el ancho de la brecha se mantiene aproximadamente constante con el aumento de presión. En cambio, si la lámina con mayor permitividad relativa es menos rígida que la otra lámina, como en el caso del cristal de PMMA y SiO_2 , el ancho de la brecha ($\Delta\omega$) decrece con el aumento de la presión hasta que $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 0$ y $\Delta\omega = 0$. Éste es el mínimo valor del ancho de la brecha. A mayores presiones, el ancho incrementa con la presión.

En el caso de la presión localizada. Los resultados indican que si la presión se aplica sobre una sola de las láminas del cristal entonces un modo defecto aparece en el espectro de frecuencias permitidas del cristal y se localiza dentro de la brecha entre la primera banda y la segunda banda, y cercano a la primera banda. Conforme aumenta la presión localizada sobre la lámina, la frecuencia del modo defecto aumenta y se aleja de la primera banda. Para complementar este estudio se incluyó el caso de tensión localizada sobre una sola lámina del cristal. Los resultados muestran la aparición de un modo defecto localizado dentro de la brecha, entre la primera banda y la segunda banda, y cercano a la segunda banda. Conforme aumenta la tensión localizada sobre la lámina, la frecuencia del modo defecto disminuye y se aleja de la segunda banda.

Los cálculos muestran que si la presión localizada se aplica sobre dos láminas del cristal, entonces, aparece un solo modo defecto y éste se encuentra más cercano al centro de la brecha comparado con el modo defecto correspondiente a una sola lámina bajo la misma presión. Además, el método de perturbaciones permite hacer una demostración sencilla del hecho de que aquellos modos defecto más cercanos al centro de la brecha están más localizados en el cristal.

Todos los resultados obtenidos son teóricamente consistentes, sin embargo, se sugiere una prueba experimental.

Referencias

- [1] Li X. and Lee D.-W. “Integrated microcantilevers for high-resolution sensing and probing”. *Meas. Sci. Technol.* **23**, 2012.
- [2] Sauer V. T. K., Diao Z., Freeman M. R. and Hiebert W. K. “Optical racetrack resonator transduction of nanomechanical cantilevers”. *Nanotechnology* **25**, 2014.
- [3] Lord Rayleigh. “On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure”. *Philosophical Magazine* **24**, 1887.
- [4] Yu, F. T. S. and Yin S. “Fiber Optic Sensors”. Marcel Dekker, 2002.
- [5] Kulkarni A., Na J., Kim Y. J., Baik S. and Kim T. “An evaluation of the optical fiber beam as force sensor”. *Opt. Fiber Technol.* **15**, 2009.
- [6] Hill K. O., Fujii Y., Johnson D. C. and Kawasaki B. S. “Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication”. *Appl. Phys. Lett.* **32**, 1978.
- [7] Othonos, A. and Kalli, K. “Fiber Bragg Gratings: Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing”. Artech House, 1999.
- [8] Melekin, V. N. and Manenkov A. B. *Soviet Physics-Technical Physics* **13**, 1968.
- [9] Yeh, P., Yariv A. and Marom E. “Theory of Bragg fiber”. *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1978.
- [10] Birks T. A., Russell P. St. J., Atkin D. M. and Shepherd T. J. “Full 2-D photonic bandgaps in silica/air structures”. *Electron. Lett.* **31**, 1995.
- [11] Knight J. C. et al. in *Conference on Optical Fiber Communications (Optical Society of America, San Jose, California, 1996.*
- [12] Knight J. C., Birks T. A., Russell P. St. J. and Atkin D. M.. “All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding”. *Opt. Lett.* **21**, 1996.
- [13] Birks T. A., Knight J. C. and Russell P. St. J. “Endlessly single-mode photonic crystal fiber”. *Opt. Lett.* **22**, 1997.
- [14] Arismar Cerqueira S. Jr. “Recent progress and novel applications of photonic crystal fibers”. *Rep. Prog. Phys.* **73**, 2010.

- [15] Sánchez A., Orozco S., Porta A. V. and Ortiz M. A. “Elasto-optical behavior model of a step-index fiber under localized pressure”. *Materials Chemistry and Physics* **139**, 2013.
- [16] Sánchez A., Guerra K. Y., Porta A. V. and Orozco S. “Viscoelastic behavior of polymeric step-index optical fiber”. XXIII International Materials Research Congress, S5B-P031, 2014.
- [17] Rigneault H., Lourtioz J.-M., Delalande C. and Levenson A. “Nanophotonics”. ISTE, USA, 2006.
- [18] G. V. Morozov, R. G. Maev, and G. W. F. Drake, “Switching of electromagnetic waves by two-layered periodic dielectric structures,” *Phys. Rev. E* **60**, 4860-4867 (1999).
- [19] Y. Li, H. W. Fu, X. L. Li, and M. Shao, “Contribution of strain and elasto-optical effect to resonant mode in the two-dimensional photonic crystals force sensor,” *Adv. Mater. Res.* **216**, 148-152 (2011).
- [20] A. Sánchez, and S. Orozco, “Elasto-optical effect on the band structure of a one-dimensional photonic cristal under hydrostatic pressure,” *JOSA B* **33** (6) (2016).
- [21] Reitz J. R., Milford F. J. and Christy R. W. “Fundamentos de la teoría electromagnética”. 4ta ed. Addison Wesley Iberoamericana, México, 1996.
- [22] Griffiths D. J. “Introduction to Electrodynamics”. 3rd ed. Prentice-Hall, USA, 1999.
- [23] Jackson J. D. “Classical Electrodynamics”. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., USA, 1999.
- [24] Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N. and Meade R. D. “Photonic Crystals: Molding the flow of light”. 2nd ed. Princeton University Press, USA, 2008.
- [25] Arfken G. “Métodos matemáticos para físicos”. Editorial Diana, México, 1981.
- [26] Fiódorov N. N. “Fundamentos de la electrodinámica”. Mir, México, 1982.
- [27] Kolmogorov A. N. and Fomin S. V. “Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional”. 2da ed. Mir, Moscú, 1975.
- [28] Apostol T. M. “Análisis matemático”. Reverté, España 1972.
- [29] Rudín. “Principles of mathematical analysis”. 2nd ed. Mc Graw-Hill, México, 1965.
- [30] Born M. and Wolf E. “Principles of Optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light”. 7th ed. Cambridge University Press, UK, 2006.
- [31] Hecht E. “Óptica”. 3ra ed. Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000.

- [32] Steven G. J. and Joannopoulos J. D. "Introduction to Photonic Crystals: Bloch's Theorem, Band Diagrams, and Gaps (But No Defects)". MIT, USA, 2003.
- [33] Steven G. J., Ibanescu M., Skorobogatiy M. A., Weisberg O., Joannopoulos J. D. and Fink Y. "Perturbation theory for Maxwell's equations with shifting material boundaries". *Physical Review E* **65**, 066611, 2002.
- [34] Yeh, P. "Optical waves in layered media". New York, Wiley, 1988.
- [35] Viniegra F. A. "Mecánica de los cuerpos deformables". Las prensas de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2011.
- [36] Mase G. E. "Teoría y problemas de Mecánica del medio continuo". Mc Graw-Hill, México, 1977.
- [37] Olivella X. O. and Bosch C. A. de S. "Mecánica de medios continuos para ingenieros". Alfaomega, México, 2002.
- [38] Sánchez A. "Respuesta Elasto-óptica de una fibra óptica de índice escalonado. Teoría, solución numérica y experimento". Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2011.
- [39] Royer D. and Dieulesaint E. "Elastic Waves in Solids II Generation, Acousto-optic Interaction, Applications". Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [40] Harbach N. G. "Fiber Bragg Gratings in Polymer Optical Fibers". École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland (2008).
- [41] Shams H., Shao T., Fice M. J., Anandarajah P. M., Renaud C. C., Van Dijk F., Barry L. P. and Alwyn J. "100 Gb/s Multicarrier THz Wireless Transmission System With High Frequency Stability Based on A Gain-Switched Laser Comb Source," *IEEE Photonics Journal* **7**: 7902011, 2015.
- [42] Bing P.-B., Yao J.-Q., Xu D.-G., Xu X.-Y. and Li Z.-Y. "High-Quality Continuous-Wave Imaging with a 2.53 THz Optical Pumped Terahertz Laser and a Pyroelectric Detector". *Chin. Phys. Lett.* **27**, 124209, 2010.
- [43] Blanchard N., Marchese L., Martel A., Terroux M., Savard E., Chevalier C., Mercier L., Gagnon L., Lambert J., Bolduc M. and Bergeron A. "Catadioptric optics for high-resolution terahertz imager". *Terahertz Physics, Devices, and Systems VI: Advanced Applications in Industry and Defense*, edited by A. F. Mehdi Anwar, Nibir K. Dhar, Thomas W. Crowe, *Proc. of SPIE* **8363**, 83630B, 2012. DOI: 10.1117/12.918583
- [44] Barh A., Pal B. P., Agrawal G. P., Varshney R. K. and Rahman B. M. A. "Specialty Fibers for Terahertz Generation and Transmission: A Review (Invited)". *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **22**, 2015. DOI: 10.1109/JSTQE.2015.2494537

- [45] Vogel C., Kohl A. and Adam C. "Spectroscopic Investigation in the Mid- and Far-Infrared Regions of Phosphorus Fertilizers Derived from Thermochemically Treated Sewage Sludge Ash". *Appl. Spectrosc* **65**: 265-271, 2011.
- [46] Yamamoto K. and Masui A. "Complex Refractive Index Determination of Bulk Materials from Infrared Reflection Spectra". *Appl. Spectrosc.* **49**: 639-644, 1995.
- [47] Jitian S. "Determination of Optical Constants of Polystyrene Films from IR Reflection-Absorption Spectra". *Analele Universitatii Eftimie Murgu Resita* **18**: 41-48, 2011. ISSN:1453-7397.
- [48] Kitamura R., Pilon L. and Mirosław J. "Optical constants of silica glass from extreme ultraviolet to far infrared at near room temperature". *Appl. Optics* **46**:8118-8133, 2007.
- [49] Hoult R. A., Perston B., Spragg R. A. "Polystyrene Film as a Standard for Testing FT-IR Spectrometers". *Spectroscopy* **28**: 38-43, 2013.
- [50] Graf R. T., Koenig J. L. and Ishida H. "Optical Constant Determination of Thin Polymer Films in the Infrared". *Appl. Spectrosc.* **39**: 405-408, 1985.
- [51] Duan G., Zhang C., Li A., Yang X., Lu L. and Wang X. "Preparation and characterization of Mesoporous Zirconia Made by Using a Poly(methyl methacrylate) Template". *Nanoscale Res. Lett.* **3**: 118-122, 2008.
- [52] Chao X. X., Zhu Q. F. and Zhang Y., "The design of a photonic crystal filter in the terahertz range," *Chinese Phys. B* **18**, 2864-2867 (2009).
- [53] Kim K. J., Seo J. K. and Oh M. C., "Strain induced tunable wavelength filters based on flexible polymer waveguide Bragg reflector," *Opt. Express* **16**, 1423-1430 (2008).
- [54] Gondek E. and Karasiński P., "One dimensional photonic crystals as selective back reflectors," *Opt. Laser Technol.* **48**, 438-446 (2008).
- [55] Ghouila-houri C., Gerbedoen J. C., Viard R., Talbi A., Merlen A. and Pernod P., "One-dimensional photonic crystals as selective back reflectors," *Procedia Engineering* **120**, 744-747 (2015).
- [56] Yakovlev B. and Hanson G. W. "Operator Theory for Electromagnetics. An Introduction". Springer-Verlag, USA, 2002.
- [57] Chen Ying, Dong Jing, Shi Ji, Zhu Qiguang, Bi Weihong, "Study on tunable filtering performance of compound defect photonic crystal with magnetic control," *Optik*, **126** 5353–5356 (2015).

APÉNDICE A

SISTEMAS LINEALES

Un sistema se caracteriza por la forma en que responde a un estímulo. Matemáticamente esto se representa con una función de entrada, una funcional y una función de salida.

Sean $f_i(t)$ la función de entrada y $f_o(t)$ la función de respuesta de un sistema. Nótese que ambas funciones están definidas en el mismo dominio. La acción del sistema sobre la función de entrada es la funcional \hat{L} tal que

$$\hat{L}f_i(t) = f_o(t).$$

Si la respuesta del sistema a la función de entrada $f_i(t) = a_1f_{i1}(t) + a_2f_{i2}(t)$ es $f_o(t) = a_1f_{o1} + a_2f_{o2}$, se dice que el sistema es lineal.

Si la respuesta del sistema a la función de entrada $f_i(t - t_0)$ es $f_o(t - t_0)$ con t_0 constante, se dice que el sistema es invariante en la variable t

La respuesta de un sistema lineal e invariante en la variable t a una función de entrada exponencial es también una función exponencial y proporcional a la función de entrada. Esta afirmación se demuestra a continuación.

Sea $f_i(t) = e^{i\omega t}$, entonces, la función de respuesta del sistema es $f_o(t) = \hat{L}e^{i\omega t}$. Dado que el sistema es invariante entonces

$$f_o(t + t_0) = \hat{L}e^{i\omega(t+t_0)} = e^{i\omega t_0}\hat{L}e^{i\omega t}.$$

Por lo cual,

$$f_o(t + t_0) = e^{i\omega t_0}f_o(t).$$

Haciendo $t = 0$ se tiene

$$f_o(t_0) = f_o(0)e^{i\omega t_0}.$$

Pero lo anterior es cierto para cualquier t_0 en el dominio de la función de entrada por lo cual

$$f_o(t) = k(\omega)e^{i\omega t},$$

donde $k(\omega) = f_o(0)$ es la constante de proporcionalidad que en general depende de ω .

APÉNDICE B

CONSTANTES ELÁSTICAS DE SÓLIDOS ISÓTROPOS

Las componentes del tensor deformación de un sólido elástico isótropo en función de las componentes del tensor de esfuerzos son

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

Para determinar experimentalmente las constantes de Lamé (λ, μ) es conveniente reescribir la ecuación anterior en términos de los coeficientes de ingeniería Y y ν definidos en el caso de tensión uniaxial simple mediante las relaciones $\sigma_{11} = Y e_{11}$ y $e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}$, con lo cual

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{Y} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{Y} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

donde el módulo de Young Y y la razón de Poisson ν se relacionan con las constantes de Lamé por

$$Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Si se considera el estado de tensión originado por una presión hidrostática uniforme en simetría esférica ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$) entonces

$$e_{ij} = \frac{e_{kk}}{3} \delta_{ij},$$

$$p = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) e_{kk} = -K e_{kk}.$$

El coeficiente K se denomina módulo de deformación volumétrica. Por otro lado, para el estado de tensión pura, las componentes de tensión y deformación se relacionan con el módulo cortante o de rigidez G , que es igual a la constante de Lamé μ y se relaciona con las otras constantes por

$$G = \mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)}.$$

Si se conoce el valor de un par de los diferentes coeficientes elásticos de un sólido isótropo, se pueden calcular los otros mediante relaciones sencillas mostradas en la Tabla A.1.

Tabla A.1 Relación entre los diferentes coeficientes elásticos.

	Y, ν	Y, μ	λ, μ	c_{11}, c_{12}
λ	$\frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(Y-2\mu)}{3\mu-Y}$	λ	c_{12}
μ	$\frac{Y}{2(1+\nu)}$	μ	μ	$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$
Y	Y	Y	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$c_{11} - 2\frac{c_{12}^2}{c_{11}+c_{12}}$
K	$\frac{Y}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu Y}{3(3\mu-Y)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{c_{11}+2c_{12}}{3}$
ν	ν	$\frac{Y-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}}$