UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TEOREMAS ERGÓDICOS MULTIPLICATIVOS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ PABLO DEL CUETO NAVARRO

DIRECTOR DE LA TESINA O TESIS
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN
RICARDO GÓMEZ AÍZA
IMATE, UNAM.

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2016.

Teoremas ergódicos multiplicativos

José Pablo del Cueto Navarro

7 de diciembre de 2016

Índice

1. Introducción

Los exponentes de Lyapunov fueron usados por primera vez por Aleksandr Lyapunov, quien los definió como $\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|x(t, x_0)\|$, siendo $x(t; x_0)$ solución de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, con $t \in \mathbb{R}^+$ y $x(0; x_0) = x_0$ la condición inicial. El interés de Lyapunov fue emplear estos objetos para estudiar la estabilidad de sistemas lineales perturbados por funciones continuas o diferenciables. A pesar de haber sigo una herramienta que tuvo sus inicios en el estudio de ecuaciones diferenciables, con el tiempo fueron apareciendo como útiles aliados para variados campos, como por ejemplo:

- Productos de matrices aleatorias y mapeos aleatorios.
- Operadores aleatorios de Schrödinger y propagación de onda en medios aleatorios.
- Flujos estocásticos, caos, y transición de fases.

Este trabajo se realizó con el propósito de entender y desarrollar con detalle la demostración del Teorema de Oseledets que fue extraída de las notas *Lectures on Lyapunov Exponents*, del autor Marcelo Viana. El teorema es un resultado acerca de los exponentes de Lyapunov en un contexto más general que el de soluciones a ecuaciones diferenciales. Una de las motivaciones por comprender el Teorema de Oseledets es disponer de una herramienta ya bien entendida en la poco explorada teoría de juegos dinámicos. El texto consiste en cubrir con más detalle aquellas partes que en [1] podrían ser explicadas con mayor profundidad y cubrir con el mismo o menor detalle, aquellas partes que el autor transmitió de manera completa.

2. Cociclos Lineales

Para comenzar, considermos al espacio de probabilidad $(M, \mathcal{B}, \mu)$ y a $f : M \to M$ una transformación tal que para todo B en la σ-álgebra $\mathcal{B}$, el valor de $\mu(f^{-1}(B))$ coincida con $\mu(B)$, *i.e.* f es μ-invariante. En contexto de los teoremas aditivos, uno de los resultados principales es el conocido Teorema Ergódico de Birkhoff, éste asegura que cada que se tenga una función μ-integrable $\phi : M \to \mathbb{R}$, existe, lo que se conoce como su promedio temportal

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\phi(f^j(x))$$

para μ-casi todo punto $x \in M$ (p.μ-c.t. $x \in M$). Otro teorema ergódico aditivo importante es el siguiente.

Definición 2.1. *Decimos que una sucesión de funciones $\varphi_n : M \to \mathbb{R}$ es* subaditiva *para una transformación $f : M \to M$ si $\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$ para toda $m, n \geq 1$.*

Teorema 2.1. *(Teorema ergódico subaditivo de Kingman) Sea μ una probabilidad invariante para una transformación $f : M \to M$ y sea $\varphi_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión subaditiva para f de funciones medibles tal que $\varphi^+ \in L^1(\mu)$. Entonces la sucesión $(\varphi_n/n)_n$ converge en μ-casi todo punto a una transformación f-invariante $\varphi : M \to [-\infty, \infty)$. Además $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ y*

$$\int \varphi d\mu = \lim_n \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu \in [-\infty, \infty).$$

Para revisar una demostración de este teorema véase [2].

Así como los teoremas ergódicos aditivos, los teoremas multiplicativos estudian desde una perspectiva probabilística, comportamientos asintóticos de multiplicación dados por el conjunto de órbitas del sistema dinámico f. Para dar paso a dichos teoremas, primero es necesario conocer la siguiente definición. Recuerde que $\mathrm{GL}(\mathbb{R},d)$ es el grupo de matrices invertibles de tamaño $d \times d$ con entradas reales.

Definición 2.2. *Dada $\mathcal{A}\colon M \to \mathrm{GL}(\mathbb{R},d)$ y $f\colon M \to M$ un sistema dinámico μ-invariante. Definimos el* cociclo lineal *de $(f,\mathcal{A})$, como la transfomación $F\colon M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d$, dada por:*

$$F(x,v) = (f(x), \mathcal{A}(x)v).$$

Para simplificar la notación denotamos a $\mathcal{A}(x)$ como A_x. Al ser F una función de $M \times \mathbb{R}^d$ en si mismo, ésta define un sistema dinámico cuya n-ésima iterada es $F^n(x,v) = (f^n(x), A_{f^{n-1}(x)}A_{f^{n-2}(x)}\dots A_x v)$. Denotaremos $A_x^n := A_{f^{n-1}(x)}A_{f^{n-2}(x)}\dots A_x$. Veamos en los siguientes ejemplos la utilidad de los cociclos lineales.

Ejemplo 2.1. Sea M una variedad C^1 de dimensión d y haz tangente trivial, y $f : M \to M$ un difeomorfísmo. Si $A_x := Df|_x$, con $Df|_x : T_xM \to T_{f(x)}M$ la derivada de f en el punto x. Por la regla de la cadena, la n-ésima iteración del cociclo lineal de $(f,\mathcal{A})$ en el punto (x,v), es igual a $(f^n(x), Df^n|_x v)$.

Ejemplo 2.2. Dada $n \geq 2$, consideramos a $\Sigma := \{1,\dots,n\}$, $M := \Sigma^{\mathbb{N}}$ el *shift de Bernoulli* de n-símbolos y a $p = (p_1,\dots,p_n)$, un vector positivo de probabilidad. Para $i \in \mathbb{N}$ y $(j_1,\dots,j_k) \in \Sigma^k$, definimos la medida μ de Bernoulli del *cilindro* $C(i;j_1,\dots,j_k) := \{x \in M : x_i = j_1,\dots,x_{i+k-1} = j_k\}$ como el producto $p_{j_1}\dots p_{j_k}$. Esta medida en los cilíndros se extiende a una medida μ en M que es σ-invariante, siendo $\sigma : M \to M$ la transformación *shift*. Sea $\Omega := \{A_1,\dots,A_n\} \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{R},d)$, $\mathcal{A}\colon M \to \Omega$ dada por $A_x = A_{x_0}$ y F, el cociclo lineal de $(\sigma,\mathcal{A})$. Dado $B \subseteq M \times \mathbb{R}^d$ medible de la forma $C(i;j_1,\dots j_k) \times B'$, $F^{-1}(B) = \cup_{l=1}^n (C(i;l,j_1,\dots,j_k) \times A_l^{-1}(B'))$, por lo que el cociclo F y cualquier iteración de éste es una transformación medible. Sea $k \in \mathbb{N}$ y a $\pi_2 : M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la proyección en $\mathbb{R}^d$; la función $\pi_2 \circ F^k$ es medible, por lo que la transformación $\pi_2 \circ F^k|_v : M \to \mathbb{R}^d$ es una transformación medible para cualquier $v \in \mathbb{R}^d$. Este hecho es interesante, pues dado $B' \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto medible, $\mu((\pi_2 \circ F^k|_v)^{-1}(B'))$ es la probabilidad de llevar el vector $v \in \mathbb{R}^d$ al conjunto medible B' por medio de un producto aleatorio de matrices elegidas en Ω.

3. Teoremas ergódicos multiplicativos y exponentes de Lyapunov

Similarmente a la *norma* de un operador lineal $A:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, la *co-norma* $(m(A))$ es la menor tasa de expansión entre $\|Av\|$ y $\|v\|$ sobre todos los vectores v en $\mathbb{R}^d$. Dado un cociclo F de $(f, \mathcal{A})$, el *Teorema de Furstenberg* brinda información probabilística del comportamiento asintótico que tienen norma y co-norma de los operadores A_x^n al n tender a infinito.

Ejemplo 3.1. Para ejemplificar la convergencia asintótica de la norma del producto aleatorio de matrices consideremos el siguiente caso: Sea $n = 2$ y M como en el ejemplo 2.2 con $\Omega = \{A_1, A_2\}$, siendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p = (1/2, 1/2)$$

el vector de probabilidad asociado. Entonces

$$A_x^m(x) := A_{x_0} A_{x_1} ... A_{x_{m-1}} = \begin{pmatrix} 2^{k_{x,m}} 3^{-l_{x,m}} & 0 \\ 0 & 2^{-k_{x,m}} 3^{l_{x,m}} \end{pmatrix},$$

con $k_{x,m} := |\{i \in \{0, ..., m-1\} : x_i = 1\}|$ y $l_{x,m} := |\{i \in \{0, ..., m-1\} : x_i = 2\}|$. Por la Ley de los Grandes Números, para casi todo punto x, $\frac{k_{x,m}}{m} \to \frac{1}{2}$ y $\frac{l_{x,m}}{m} \to \frac{1}{2}$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto, la razón $\|A_x^m\|/3^{\frac{m}{2}} 2^{-\frac{m}{2}} \to 1$ cuando $m \to \infty$, para μ-casi todo punto en M. De lo anterior obtenemos que:

$$\text{lím} \frac{1}{n} \log \|A_x^n\| = \frac{1}{2} \log(3) - \frac{1}{2} \log(2)$$

para μ-casi todo punto $x \in M$.

El comportaminto asintótico de las normas del ejemplo es sencillo de entender debido a la conmutatividad de las matrices A_1 y A_2. Para casos no tan evidentes, existen condiciones para los cociclos con las cuales la norma y co-norma de los productos aleatorios de matrices tienen convergencia. El Teorema de Furstenberg-Kesten da condiciones suficientes.

Teorema 3.1 (Furstenberg-Kesten-1958). *Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : M \to M$ una transformación μ-invariante. Si $\mathcal{A} : M \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}, d)$ es medible tal que $\log^+ ||\mathcal{A}^{\pm 1}(\cdot)||$ es μ-integrable, entonces existen:*

$$\lambda_+(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(||A_x^n||) \quad y \quad \lambda_-(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(m(A_x^n))$$

para μ-casi todo punto $x \in M$. Además, las funciones $\lambda_+(\cdot)$ y $\lambda_-(\cdot)$ son funciones en $L^1(\mu)$ cuyas integrales son precisamente

$$\int \lambda_+(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \log(||A_x^n||) d\mu = \inf \frac{1}{n} \int \log(||A_x^n||) d\mu;$$

$$\int \lambda_-(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \int \log(||A_x^{-n}||) d\mu = \sup -\frac{1}{n} \int \log(||A_x^{-n}||) d\mu.$$

Los valores λ_+ y λ_- se conocen como los exponentes de Lyapunov extremales, pues corresponden a los límite de las normas y co-normas respectivamente. El Teorema de Fustenberg es una consecuencia del Teorema Ergódico Subaditivo.

4. Teorema de Oseledets

En esta sección se anunciará el Teorema de Oseledets, una versión más fuerte que el desarrollado por Furstenberg; esbozaremos también una demostración extraída de [1].

4.0.1. Funciones medibles en los Grassmanianos

El Grassmaniano de un espacio vectorial E, de dimensión finita, es una variedad Riemanniana cuyos puntos son los subespacios vectoriales de E. Dicho conjunto se denota por $\mathrm{Gr}(E)$. Esta variedad es un espacio medible con la σ-álgebra de Borel asignada por la siguiente métrica:

$$d_G(U,V) = \begin{cases} 2 & si \quad \mathrm{dim}U \neq \mathrm{dim}V, \\ \sup_{u\in U}\{\text{ínf}_{v\in V}\{||u-v||\} : ||u|| = 1\} & si \quad \mathrm{dim}U = \mathrm{dim}V. \end{cases}$$

Cuando U, V son de la misma dimensión, $d_G(U,V)$ coincide con la mayor distancia de los vectores unitarios de U a sus respectivas proyecciones sobre V. Notemos que la métrica d_G hace disconexo a $\mathrm{Gr}(E)$, y dos subespacios están en la misma componente conexa si y solamente si tienen la misma dimensión. Denotamos por $\mathrm{Gr}_l(\mathbb{R}^d)$ al conjunto de subespacios $\{V \in \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d) \mid \dim V = l\}$.

Definición 4.1. *Un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ se dice* completo *si para todo $B \in \mathcal{B}$ con $\mu(B) = 0$ y $A \subseteq B$, A también pertenece a $\mathcal{B}$.*

Proposición 4.1. *Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio completo de probabilidad y $\phi : M \to \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ϕ es una función medible.*

2. *La función $x \mapsto \mathrm{dim}\phi(x)$ es medible y existen d funciones medibles $X_1, X_2, \ldots, X_d : M \to \mathbb{R}^d$*

tales que $\forall l \in \{1,\dots,d\}$ *y para casi todo* $x \in \phi^{-1}(\mathrm{Gr}_l(\mathbb{R}^d))$, *el conjunto* $\{X_1(x),\dots,X_l(x)\}$ *es base de* $\phi(x)$.

3. $\{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^d \mid v \in \phi(x)\}$ *está en* $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración 1. $1 \Leftrightarrow 2$) El regreso se obtiene trabajando con las definiciones, de modo que trabajaremos unicamente la ida. Dado $l \in \{1,\dots,d\}$ y $V \in \mathrm{Gr}_l(\mathbb{R}^d)$, $\phi^{-1}(B_{d_G}(V,2) \setminus B_{d_G}(V,1))$ es el conjunto $\{x \in M \mid \dim \phi(x) = l\}$, por lo que la función $x \mapsto \dim \phi(x)$ es medible. Dado $E \in \mathrm{Gr}_l(\mathbb{R}^d)$, es posible encontrar una vecindad $V(E)$ de E en $\mathrm{Gr}_l(\mathbb{R}^d)$ y funciones continuas $\xi_1,\dots,\xi_l : V(E) \to \mathbb{R}^d$ tales que $\{\xi_1(V),\dots,\xi_l(V)\}$ es base de V para toda $V \in V(E)$. Esto se hace de la siguiente manera: Consideramos a $V(E) = B_{d_G}(E, 1/2)$ y a $\mathbb{R}^d = E \oplus E^\perp$. Entonces para toda $V \in V(E)$ existe una única función lineal $L_V : E \to E^\perp$ de manera que V coincide con la gráfica de L_V; si $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$ es una base de E, entonces $\{(\alpha_1, L_V\alpha_1),\dots,(\alpha_l, L_V\alpha_l)\}$ resulta ser una base de V. Como $\mathrm{Gr}_l(\mathbb{R}^d)$ es compacto, podemos elegir una colección finita $\{V(E_1),\dots,V(E_j)\}$ de abiertos disjuntos que lo cubren. Para cada V tomamos al $V(E_j)$ que lo contiene y definimos $\xi_i(V) = (\alpha_i, L_V\alpha_i)$ donde $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$ es la base de E_j. Para x con $\dim\phi(x) = l$ definimos $X_i(x) := \xi_i(\phi(x))$. Si definimos así las funciones $X_1,\dots,X_d : M \to \mathbb{R}^d$ para toda $x \in M$, entonces éstas son medibles, pues $\xi_1,\dots,\xi_d$ son continuas por pedazos.

$1 \Leftrightarrow 3$) Véase la demostración en [1] página 41.

Definición 4.2. *Si* E *es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces definimos una* bandera *como una colección de subespacios* $\{V_1, V_2,\dots,V_k\}$ *de* E *con* $k \leq \dim E$, *de manera que:*

$$E = V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \dots \supsetneq V_k \supsetneq \{0\}.$$

Bajo las mismas hipótesis que el Teorema de Furstenberg agregando que $(M, \mathcal{B}, \mu)$ sea completo, el Teorema de Oseledets afirma lo siguiente:

Teorema 4.1 (Oseledets). *Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : M \to M$ una transformación μ-invariante. Si $\mathcal{A} : M \to GL(\mathbb{R}, d)$ es medible tal que $\log^+ ||\mathcal{A}^{\pm 1}|| \in L^1(\mu)$, entonces existen: $k : M \to \{1, \ldots, d\}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_d : M \to \mathbb{R}$ y $\phi_1, \ldots, \phi_d : M \to Gr(\mathbb{R}^d)$ funciones medibles tales que para toda $1 \leq i \leq d$ se cumple:*

1. *$k(f(x)) = k(x)$, $\quad \lambda_i(f(x)) = \lambda_i(x) \quad$ y $\quad A_x \phi_i(x) = \phi_i(f(x))$ para casi toda $x \in M$.*

2. *$\{\phi_1(x), \ldots, \phi_{k(x)}(x)\}$ es una bandera de $\mathbb{R}^d$, para casi toda $x \in M$.*

3. *Para casi toda $x \in M$ y para todo $v \in \phi_i(x) \setminus \phi_{i+1}(x)$, se tiene*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| = \lambda_i(x).$$

Debido a la diversidad de argumentos que se emplean en la demostración de los incisos la hemos dividido en tres apartados. El primero demuestra los primeros dos incisos, el segundo la medibilidad de las funciones, y el tercero será para demostrar la convergencia del último inciso.

4.1. Invarianza

Dado $x \in M$ y $v \in \mathbb{R}^d$ definimos $\lambda(x, v) := \limsup_n \frac{1}{n} \log ||A_x^n(v)||$. Las primeras observaciones que acerca de $\lambda : M \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ son las del siguiente lema:

Lema 4.1. *Para toda $x \in M$, $v, v' \in \mathbb{R}^d$ y todo $c \neq 0$, se cumple:*

1. *$\lambda_-(x) \leq \lambda(x, v) \leq \lambda_+(x)$.*

2. *$\lambda(x, cv) = \lambda(x, v)$.*

3. *$\lambda(x, v + v') = \max\{\lambda(x, v), \lambda(x, v')\}$.*

4. $\lambda(f(x), A_x(v)) = \lambda(x, v)$.

Demostración. El inciso 2) es claro por la propiedadad del producto para logaritmo. Dado $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, $m(A_x^n) \leq ||A_x^n v||$ y $||A_x^n v|| \leq ||A_x^n||$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que el inciso 1) es cierto para vectores unitarios. Si v no fuese unitario, basta emplear el inciso 2) con $c = 1/\|v\|$. 3) se obtiene del hecho de que dadas dos sucesiones de números positivos a_n y b_n, el $\limsup_n \log(a_n + b_n) = \max\{\limsup_n \log(a_n), \limsup_n \log(b_n)\}$. Además

$$\lambda(f(x), A_x v) = \limsup \frac{1}{n} \log \|A_x^{n+1} v\| = \limsup \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \log \|A_x^{n+1} v\| = \lambda(x, v),$$

de donde se obtiene el inciso 4). $\square$

Teorema 4.2. *(Primer apartado) Para μ casi todo $x \in M$ existen $k = k(x) \in \{1, \ldots, d\}$, $\lambda_x^1 > \lambda_x^2 > \ldots > \lambda_x^{k(x)}$ y una bandera $\{V_x^1, V_x^2, \ldots, V_x^{k(x)}\}$ tales que $\forall i \in \{1, \ldots, k(x)\}$ se cumple: $k(f(x)) = k(x)$, $\lambda_{f(x)}^i = \lambda_x^i$, y $V_{f(x)}^i = A_x(V_x^i)$.*

Demostración. El Teorema de Furstenberg afirma que $\lambda_-(\cdot)$ y $\lambda_+(\cdot)$ son funciones integrables, de modo que para casi todo $x \in M$ y para todo $v \in \mathbb{R}^d$, $\lambda(x, v)$ debe ser finito. De ahora en adelante nos restringimos a ese conjunto de medida total al cual llamaremos M para no perder costumbre. Dado $x \in M$, sea $\lambda_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dada por $\lambda_x(v) = \lambda(x, v)$. De los incisos 2) y 3) del Lema anterior se obtiene que $k(x) := |\{\lambda_x(v) \mid v \in \mathbb{R}^d\}| \leq d$. Sean $\lambda_x^1 > \ldots > \lambda_x^{k(x)}$ los valores que toma λ_x, y sean $V_x^i := \{v \in \mathbb{R}^d | \lambda_x(v) \leq \lambda_x^i\}$. De nueva cuenta por el Lema 2) y 3), V_x^i es un subespacio de $\mathbb{R}^d$ y $\{V_x^1, \ldots, V_x^{k(x)}\}$, por definición, es una bandera. Por el inciso 4) del Lema, $\lambda_x(v) = \lambda_{f(x)}(A_x v)$. Como A_x es una matriz invertible, entonces $k(x) = k(f(x))$. Sean ahora las funciones $\lambda_i : M \to \mathbb{R}$

y $\phi_i : M \to \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d)$, dadas por:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \lambda_x^i & si \quad k(x) \geq i \\ 0 & si \quad k(x) < i \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_i(x) = \begin{cases} V_x^i & si \quad k(x) \geq i \\ \{\bar{0}\} & si \quad k(x) < i. \end{cases}$$

Usando nuevamente el inciso 4) del Lema anterior se muestra que $\lambda_i(x) = \lambda_i(f(x))$ y $A_x(\phi_i(x)) = \phi_i(f(x))$. Si $i \leq k(x)$ lo anterior se puede rescribir como $\lambda_x^i = \lambda_{f(x)}^i$ y $A_x(V_x^i) = V_{f(x)}^i$.

□

Para la siguiente sección probaremos que para cada $1 \leq i \leq d$, las funciones $k : M \to \{1, \ldots, d\}$, $\lambda_i : M \to \mathbb{R}$ y $\phi_i : M \to \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d)$ son medibles.

4.2. Medibilidad

Proposición 4.2. *Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad, y Y es un espacio métrico completo con $\mathcal{B}(Y)$ la σ-álgebra de Borel, entonces para cada $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(Y)$, la proyección $\pi_X(E) := \{x \in X \mid (x, y) \in E$ p.a. $y \in Y\}$ pertenece a $\mathcal{B}$.*

La demostración de esta última proposición puede revisarse en [4].

Proposición 4.3. *La función $\lambda : M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, es medible.*

Demostración.

Lema 4.2. *Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, Y un espacio métrico, completo y separable, y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Si para casi toda $x \in X$, la función $f|_{\{x\} \times Y}$ es continua y para toda $y \in Y$, la función $f|_{X \times \{y\}}$ es medible. Entonces f es medible.*

Demostración. Sea $S = \{v_0, v_1, \ldots\}$ un conjunto denso numerable en X. Dada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $A_i^n := B_{\frac{1}{n}}(v_i)$, *i.e.* la bola centrada en v_i con radio $\frac{1}{n}$. Definimos a $U_0^n := A_0^n$, y recursivamente a $U_i^n = A_i^n \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_{i-1}^n)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. La familia $\{U_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una partición del espacio Y en una colección de conjuntos medibles. Dada n, definimos la función $f_n : M \times Y$ dada por $f_n(x, y) = f(x, v^n(y))$, donde $v^n(y)$ es el centro de la bola A_l^n tal que $y \in U_l^n$. Para cada n, la función f_n es medible pues es constante en los conjuntos U_i^n para toda i. Una última observación es que al ser $f|_{\{x\}\times Y}$ continua para casi toda x, ocurre que $\lim_n f_n(x, y) = f(x, y)$, pues $\{v^n(y)\}$ es una sucesión que converge a y. Como una función límite de funciones medibles es medible, se concluye la demostración. $\square$

Por ser $\mathcal{A} : M \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}, d)$ medible, para cada $v \in \mathbb{R}^d$, la función $A^v : M \to \mathbb{R}^d$ dada por $A^v(x) = A_x v$ es una función medible. Por otro lado, para cada $x \in M$, la transformación $\mathcal{A}(x) = A_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es lineal y por tanto continua. Por la continuidad de $||\cdot||$ y el lema anterior coincluimos que $(x, v) \mapsto ||A_x v||$ es medible. De modo similar se comprueba que $(x, v) \mapsto ||A_x^n v||$ es medible $\forall n \in \mathbb{N}$. Por ser $\lambda(x, v)$ el $\limsup$ de las funciones medibles $\frac{1}{n}\log ||A_x^n||$ se concluye la proposición. $\square$

Teorema 4.3. *(Medibilidad) Para cada $1 \le i \le d$, las funciones $x \mapsto k(x)$, $x \mapsto \lambda_i(x)$ y $x \mapsto \phi_i(x)$ son medibles.*

Demostración. La funcion $\phi_1(\cdot)$ es medible pues $\phi_1(x) = \mathbb{R}^d$ para casi toda $x \in M$. Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Del Lema 4.1 inciso 3), se obtiene que $\lambda_1(x) = \max\{\lambda(x, e_i) : i \in \{1, \ldots, d\}\}$, por consiguiente $\lambda_1(\cdot)$ es también una función medible.

Sea $V_*^2 := \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \lambda(x, v) \le \lambda_1(x)\}$, es decir, el conjunto de parejas en $M \times \mathbb{R}^d$ para los que la función λ está acotada por arriba por la función λ_1. Este conjunto es medible debido a la medibilidad tanto de λ como de λ_1; pues de considerar la función medible $h(x, v) := \lambda(x, v)/\lambda_1(x)$, resulta que $V_*^2 = h^{-1}(-\infty, 1)$. Usando ahora la Proposición 4.2, se obtiene que $\pi_X(V_*^2)$ es también un conjunto medible. Este conjunto es $k^{-1}\{2, \ldots, d\}$. Como $k^{-1}\{2, \ldots, d\}$ es medible, también lo es su complemento $k^{-1}\{1\}$.

Dado $x \in \pi_X(V_*^2)$, $\phi_2(x) = V_x^2 = \{v \in \mathbb{R}^d \mid (x, v) \in V_*^2\} \cup \{\bar{0}\}$. Por la Proposición 4.1, la transformación que manda $x \mapsto \phi_2(x)$ es una transformación medible a los Grassmanianos, pues $\{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^d \,|\, v \in \phi_2(x)\} = V_*^2 \cup (M \times \{\bar{0}\})$. Por la Proposición 4.1, para cada $l \leq d$, el conjunto $M_l^2 := \{x \in M \mid \dim \phi_2(x) = l\}$ es un conjunto medible, y más importante aún, es la segunda consecuencia; es decir, la existencia de d campos vectoriales $X_1^2, \ldots, X_d^2 : M \to \mathbb{R}^d$ tal que para cada $l \leq d$ y cada $x \in M_l^2$, $\{X_1^2(x), \ldots, X_l^2(x)\}$ es una base del subespacio $\phi_2(x)$. Hasta ahora ya se estableció que los mapeos ϕ_1, ϕ_2 y λ_1 son medibles, así como los conjuntos $k^{-1}\{1\}$ y $k^{-1}\{2, \ldots, d\}$.

M es la unión disjunta de los elemenos $\{M_l^2\}_{l=0}^{d-1}$, y cada M_l^2 es f-invariante por el inciso 1) de Oseledets. Para cada $x \in M_l^2$, $\lambda_2(x) = \max\{\lambda(x, X_j^2(x)) \,|\, j \in \{1, \ldots, l\}\}$, por lo que $\lambda_2(\cdot)$ es medible en cada M_l^2 y por tanto también en M. Sea $V_*^3 := \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\} : \lambda(x, v) \leq \lambda_2(x)\}$. Del mismo modo que se hizo en el párrafo anterior, V_*^3 y $\pi_X(V_*^3) = k^{-1}(\{3, \ldots, d\})$ son medibles. Resulta también que $\{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^d \,|\, v \in \phi_3(x)\} = V_*^3 \cup (M \times \{\bar{0}\})$, por lo que usando la Proposición 4.1, $x \mapsto \phi_3(x)$ es medible. Para concluir, usaremos argumentos recursivos. Supongamos que ϕ_{i-1} y λ_{i-1} son funciones medibles y $k^{-1}\{i-1, \ldots, d\}$ es también un conjunto medible. Consideremos la partición de M en los medibles $M_0^{i-1} \cup \cdots \cup M_{d-i+2}^{i-1}$, con cada $M_j^{i-1} = \{x \in M \mid \dim \phi_{i-1}(x) = j\}$. Si $x \in M_j^{i-1}$ con $j > 0$, entonces $\lambda_i(x) = \max\{\lambda(x, X_1^{i-1}(x)), \ldots, \lambda(x, X_j^{i-1}(x))\}$, donde $\{X_1^{i-1}(x), \ldots, X_j^{i-1}(x)\}$ es la base de $\phi_{i-1}(x)$. Así, λ_i es medible en M, pues $X_1^{i-1}, \ldots, X_j^{i-1} : M_j^{i-1} \to \mathbb{R}^d$ son medibles y por tanto λ_i es medible en cada M_j^{i-1}. Por los mismos argumentos usados antes, $V_*^i = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^d \mid \lambda(x, v) \leq \lambda_{i-1}(x)\}$ y $\pi_X(V_*^i) = k^{-1}\{i, \ldots, d\}$ son medibles. Como $\{(x, v) \,|\, v \in \phi_i(x)\} = V_*^i \cup (M \times \{\bar{0}\})$ es medible, usando la Proposición 4.1, ϕ_i es medible. Repitiendo estas ideas, hasta que $i = d$, se concluye el teorema. $\square$

4.3. Convergencia

Para entrar en contexto de la Proposición que usaremos en esta sección, consideramos los siguientes objetos: P un conjunto métrico compacto y $(C^0(P), ||\cdot||_0)$ el conjunto de funciones reales continuas con la norma del supremo. Sea

$$\hat{\mathcal{F}} = \{\Psi : M \times P \to \mathbb{R} \mid \Psi(x, \cdot) \in C^0(P) \ \ p.\mu\text{-}c.t.\ x \in M \text{ y } \int \|\Psi(x,\cdot)\|_0 d\mu < \infty\},$$

y sea $\mathcal{F} := \hat{\mathcal{F}}/\sim$, donde $\Psi_1, \Psi_2 \in \hat{\mathcal{F}}$ están $\sim$-relacionadas si existe $N \subseteq M$ de medida total tal que $\Psi_1(x,p) = \Psi_2(x,p)$ para todo $(x,p) \in N \times P$. Dada $\Psi \in \mathcal{F}$, al definir:

$$||\Psi||_1 := \int ||\Psi(x,\cdot)||_0 d\mu(x),$$

entonces $||\cdot||_1$ es una norma completa en $\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{M}(\mu)$ el conjunto de medidas en $M \times P$ tales que $\pi_* \eta = \mu$ para toda $\eta \in \mathcal{M}(\mu)$, con π la proyección canónica en M. La *topología débil** es la menor topología en $\mathcal{M}(\mu)$ tal que hace del operador $\eta \mapsto \int \Psi d\eta$ una transformación continua para toda $\Psi \in \mathcal{F}$. Con esta topología el espacio $\mathcal{M}(\mu)$ es un espacio métrico y compacto.

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{G}\colon M \times P \to M \times P$ una transformación medible de la forma $\mathcal{G}(x,v) = (f(x), \mathcal{G}_x(v))$, donde $\mathcal{G}_x : P \to P$ es continua p.μ-c.t. x. Dada $\Phi \in \mathcal{F}$, los siguientes límites*

$$I(x) = \lim_n \frac{1}{n} \inf_{v\in P} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\mathcal{G}^j(x,v)) \quad y \quad S(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sup_{v\in P} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\mathcal{G}^j(x,v))$$

existen para μ-casi todo punto. Además, existen dos medidas de probabilidad $\mathcal{G}$-invariantes: η_I y η_S en $\mathcal{M}(\mu)$ tales que

$$\int \Phi d\eta_I = \int I d\mu \quad y \quad \int \Phi d\eta_S = \int S d\mu.$$

Esbozo de la demostración. Basta argumentar para el límite denotado por $I(x)$, pues si se considera a $\Phi' = -\Phi$, entonces el límite $S(X)$ de Φ coincide con el límite $I(X)$ para Φ'. Dada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $I_n(x) = \text{ínf}_{v \in P} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\mathcal{G}^j(x,v))$. Por el Teorema Ergódico Subaditivo para las funciones $-I_n$ se comprueba que $I(x) := \text{lím} \frac{1}{n} I_n(x)$ existe para casi todo punto.

Por ser P un conjunto compacto y las funciones $\mathcal{G}_x(\cdot)$, $\Phi(x,\cdot)$ continuas para casi toda x, existe $v_n(x) \in P$ tal que el valor $I_n(x)$ coincide con $\sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\mathcal{G}^j(x, v_n(x)))$, *i.e.* se alcanza el ínfimo. Consideremos la medida en $\mathcal{M}(\mu)$ de $M \times P$ dada por $\xi_n = \int \delta_{(x,v_n(x))} d\mu(x)$, con $\delta_{(x,v_n(x)}$ una función de *Dirac*, entonces se obtiene una medida que da peso solamente a aquellas parejas $(x, v_n(x))$. La medida η_I es límite de alguna subsucesión de las medidas $\eta_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}_*^j \xi_n$. Estas últimas son consideradas para lograr que η_I sea una medida $\mathcal{G}$-invariante. η_I existe por ser $\mathcal{M}(\mu)$ un conjunto completo con la *topología-débil**. Al ser una medida límite de aquellas que dan peso a los puntos de la forma (x,v) donde v alcanza el ínfimo de $I_n(x)$, resulta algo intuitivo que al integrar la función Φ con respecto a la medida η_I el valor coincida con la integral del límite de los ínfimos ahora con la medida μ, es decir, $\int I(x) d\mu(x)$.

La siguiente consecuencia es la que brinda importancia a la proposición anterior para el desarrollo de la demostración del inciso 3) de Oseledets.

Corolario 4.1. *Bajo las mismas condiciones que la proposición anterior, p.μ-c.t. $x \in M$ existen $v_I(x)$ y $v_S(x)$ tales que*

$$\text{lím}_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\mathcal{G}^j(x, v_I(x))) = I(x) \quad y \quad \text{lím}_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\mathcal{G}^j(x, v_S(x))) = S(x)$$

Demostración. Como en la proposición anterior, sólo se realiza la prueba para demostrar la existencia de $v_I(x)$. η_I es una medida $\mathcal{G}$-invariante, de modo que por el Teorema Ergódico de Birkhoff y por la proposición anterior;

$$\int \tilde{\phi} d\eta_I = \int \phi d\eta_I = \int I d\mu.$$

Por definición de $I(x)$, $I(x) \leq \tilde{\phi}(x, v)$ para μ-casi todo x y toda v. De ahí que el conjunto $E := \{(x, v) \in M \times P : \tilde{\phi}(x, v) = I(x)\}$ tenga medida $\eta_I(E) = 1$. Como $\pi_*(\eta_I) = \mu$, se tiene que $\mu(\pi(E)) = 1$. □

Dada la sucesión de vectores $v_n(x)$ que alcanzan los ínfimos de I_n, $v_I(x)$ es límite de alguna subsucesión. Del corolario obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.5. *Si $x \mapsto V_x$ es medible en* $\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d)$ *y $A_x V_x = V_{f(x)}$ con medida total, entonces para μ-casi todo x ocurren:*

[label=()]$\lim_n \frac{1}{n} \log ||(A_x^n|_{V_x})^{-1}||^{-1} = \min\{\lambda(x, v) : v \in V_x \setminus \{0\}\}$. $\lim_n \frac{1}{n} \log ||(A_x^n|_{V_x})|| = \max\{\lambda(x, v) : v \in V_x \setminus \{0\}\}$.

2. *Demostración.* Como ya se mencionó anteriormente, basta con probar la proposición para los conjuntos $M_l := \{x \in M : \dim V_x = l\}$. Debido a que la dimensión de V_x es la misma para todo punto en M_l, tomamos funciones medibles $X_1, \ldots, X_l : M^l \to \mathbb{R}^d$, con $\{X_1(x), \ldots, X_l(x)\}$ base de V_x. Un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt nos lleva a que dichas funciones medibles den bases ortogonales del espacio V_x para cada x, de modo que se identifica cada V_x con $\mathbb{R}^l$. Sean $D_x := A_x|_{V_x}$ y $G : M_l \times \mathbb{R}^l \to M_l \times \mathbb{R}^l$ con $G(x, v) = (f(x), D_x v)$, es decir, las restricciones de A y F a los nuevos espacios totales M_l y $\mathbb{R}^l$, y sea también la función

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : M_l \times \mathbb{P}\mathbb{R}^l &\to M_l \times \mathbb{P}\mathbb{R}^l \\ (x, [v]) &\mapsto (f(x), [D_x v]). \end{aligned}$$

De las conclusiones del Corolario 4.1 para la transformación $\Phi(x, [v]) := \log(\frac{||D_x v||}{||v||})$ se obtiene la existencia de los elementos $[v_I(x)]$ y $[v_S(x)]$ en $\mathbb{P}V_x$ tales que $\lim \frac{1}{n} I_n(x) = \lim \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi(\mathcal{G}^j(x,[v_I(x)])$ y $\lim \frac{1}{n} S_n(x) = \lim \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi(\mathcal{G}^j(x,[v_S(x)])$. $I_n(x)$ y $S_n(x)$ resultan ser $\log m(D_x^n)$ (la *co-norma* de $D_{f^{n-1}(x)}\ldots D_x$) y $\log ||D_x^n||$ (la *norma* de $D_{f^{n-1}(x)}\ldots D_x$) respectivamente. Los límites de co-normas y normas se alcanzan en los vectores unitarios de $v_I(x)$ y $v_S(x)$. Al usar lo anterior y el Lema 4.1 inciso 1) se obtiene el resultado.

□

Observación 4.1. De la misma manera, si $x \in M_l$ y $\{X_1(x),\ldots,X_l(x)\}$ es base ortogonal del subespacio A-invariante V_x, entonces es posible descomponer a $\mathbb{R}^d$ en $V_x^{\perp}\oplus V_x$ y elegir $\{v_1(x),\ldots,v_{d-l}(x)\}\subset V_x^{\perp}$ base ortogonal de manera medible con la utilidad de que la matriz A_x tenga la forma:

$$A_x = \begin{pmatrix} B_x & 0 \\ C_x & D_x \end{pmatrix}, \tag{1}$$

con $B_x : \mathbb{R}^{d-l} \cong V_x^{\perp} \to V_x^{\perp} \cong \mathbb{R}^{d-l}$, $C_x : \mathbb{R}^{d-l} \cong V_x^{\perp} \to V_x \cong \mathbb{R}^l$ y $D_x : \mathbb{R}^l \cong V_x \longrightarrow V_x \cong \mathbb{R}^l$. Esta descomposición será útil más adelante pues nos servirá para obtener cociclos lineales que son restricciones del cociclo original F.

Hay una última proposición que debe ser enunciada antes de realizar la demostración del inciso 3) de Oseledets.

Proposición 4.6. *Sea $x \mapsto V_x$ un mapeo medible en* $\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d)$. *Si existen funciones μ-medibles $\alpha,\beta : M \to \mathbb{R}$ con $\alpha(x) < \beta(x)$ p.μ-c.t. $x \in M$ tales que*

$$\lambda(x,v) \leq \alpha(x) \;\; \forall v \in V_x \setminus \{0\} \quad y \quad \beta(x) \leq \lambda(x,v) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^d \setminus V_x,$$

entonces para μ-casi todo $x \in M$, y cualesquier $u \in V_x^{\perp}\setminus\{0\}$ y $v \in V_x$ se cumple *[label=()]*$\limsup_n \frac{1}{n}\log||B_x^n u|| = \limsup_n \frac{1}{n}\log||A_x^n(u+v)||$. *Si* $\lim_n \frac{1}{n}||B_x^n u||$ *existe, entonces también existe* $\lim_n \frac{1}{n}\log||A_x^n(u+v)||$*, y ambos límites coinciden.*

2. *Demostración.* La demostración es algo técnica y carece de gran valor intuitivo, por lo que solamente mencionaremos que la existencia de las funciones α y β se utilizan para mostrar que los valores de $\lambda(x,\cdot)$ son mayores cuando se consideran vectores fuera de V_x (los de la forma $u+v$) y los valores que toma λ en dichos vectores no dependen de v. $\square$

4.3.1. Convergencia

La importancia que tiene el inciso 2) de Oseledets, es que se puede descomponer a M en subconjuntos f-invariantes donde el número de exponentes de Lyapunov es constante y la dimensión de los subespacios correspondientes a la bandera también se mantienen constantes.

Teorema 4.4. *(Tercer inciso de Oseledets) Para μ-casi todo $x \in M$ y $\forall v \in V_x^i \setminus V_x^{i+1}$ se tiene que*

$$\lim_n \frac{1}{n}\log||A_x^n v|| = \lambda_i(x).$$

Demostración. Sean los conjuntos $\hat{M}_i := \{x \in M : k(x) = i\}$ para $1 \le i \le d$. Primero se demostrará que el enunciado es válido para $\hat{M}_1$, ya que este caso nos sirve como demostración de la hipótesis de inducción que se hará posteriormente. La inducción es sobre la dimensión del espacio vectorial donde opera el cociclo (hasta ahora ha sido d).

Sea $F : M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d$ un cociclo lineal con $\mu(\hat{M}_1) > 0$. Consideremos el cociclo lineal $F' := F|_{\hat{M}_1}$ el cual está bien definido pues cada $\hat{M}_1$ es f-invariante y para cada $x \in \hat{M}_1$ el espacio V_x^1 coincide con $\mathbb{R}^d$. Por la Proposición 4.5, los límites $\lim_n \frac{1}{n}\log m(A_x^n)$ y $\lim_n \frac{1}{n}\log||A_x^n||$ existen y se alcanzan en $v_I(x)$ y $v_S(x)$ respectivamente. Ahora si $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} = V_x^1 \setminus \{0\}$, entonces

$$\lambda(x,v) = \lambda(x, v_I(x)) = \lim_n \frac{1}{n} \log m(A_x^n) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log(||A_x^n v||/||v||) = \liminf_n \frac{1}{n} \log ||A_x^n v||,$$

de donde obtenemos que el $\lim_n \frac{1}{n} \log ||A_x^n v||$ existe y coincide con $\lambda_-(x) = \lambda_+(x) = \lambda_1(x)$.

Comenzamos ahora la inducción sobre la dimensión del espacio vectorial en que opera el cociclo. La demostración para cuando $d = 1$ se tiene resuelto por el párrafo anterior ya que en ese caso $M = \hat{M}_1$. Supongamos ahora que se tiene resuelto el problema para cuando la dimensión del espacio vectorial está entre 1 y $d-1$. Sea nuevamente el cociclo $F : M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d$ y sea $\hat{M}_i$ con medida positiva. Consideremos ahora la partición medible de $\hat{M}_i = \hat{M}_i^1 \cup \ldots \cup \hat{M}_i^{d-(i-1)}$, donde los $\hat{M}_i^l := \{x \in \hat{M}_i \mid \dim V_x^i = l\}$ son conjuntos f-invariantes por el inciso 1) de Oseledets. Probaremos que el enunciado es cierto para casi todo punto en $\hat{M}_i^l$ con $1 \leq l \leq d-(i-1)$, concluyendo así que el enunciado es válido para $\hat{M}_i$. Si $\mu(\hat{M}_i^l) = 0$ no hay nada que probar así que consideramos l con $\mu(\hat{M}_i^l) > 0$. Como $\hat{M}_i^l$ es un subconjunto medible de M_i, la función $\phi_i|_{\hat{M}_i^l}$ es una función medible en $\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^d)$ por lo que podemos aplicar la Observación 4.1 y obtener para cada $x \in \hat{M}_i^l$ una representación de la matriz A_x de la forma indicada en (1). Consideremos ahora las siguientes restricciones del cociclo F, ambas cociclos lineales:

$$\begin{array}{rccc} F': & \hat{M}_i^l \times \mathbb{R}^l & \to & \hat{M}_i^l \times \mathbb{R}^l, \\ & (x,v) & \mapsto & (f(x), D_x v) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} F'': & \hat{M}_i^l \times \mathbb{R}^{d-l} & \to & \hat{M}_i^l \times \mathbb{R}^{d-l} \\ & (x,u) & \mapsto & (f(x), B_x u). \end{array}$$

Del primer cociclo obtenemos se hace el siguiente análisis: como $D_x = A_x|_{V_x^i}$ para los $x \in \hat{M}_i^l$, entonces $\lambda(x,v) = \limsup_n \frac{1}{n} \log ||D_x^n v||$ para todo $v \in V_x^i$, por lo que la función $k(\cdot)$ pensada para el cociclo F' toma el valor 1 para todo $x \in \hat{M}_i^l$, por el argumento establecido en el párrafo anterior para casi todo punto en $\hat{M}_i^l$ y cualquier $v \in \mathbb{R}^l \cong V_x^i$ se tiene que $\lim_n \frac{1}{n} \log ||D_x^n v||$ debe existir, obteniendo finalmente que $\lim_n \frac{1}{n} \log ||A_x^n v||$ existe y vale $\lambda_i(x)$.

Para analizar el segundo cociclo se definen las funciones $\alpha(x) := \lambda_i(x)$ y $\beta(x) := \lambda_{i-1}(x)$ que como ya se mencionó repetidas veces son funciones medibles y por definición cumplen $\alpha(x) < \beta(x)$ para casi todo $x \in \hat{M}_i^l$. Sean $U_j := V_x^{\perp} \cap V_x^j$ con $1 \leq j \leq i-1$. Consideremos a $v \in V_x^j \setminus V_x^{j+1}$ con $1 \leq j \leq i-1$, de modo que $v = u + v'$ con $u \in U_x^j \setminus U_x^{j+1}$ y $v \in V_x^i$. Usando la Proposición 4.6 (a) se obtiene $\lambda_j(x) = \lambda(x,v) = \limsup \frac{1}{n} \log ||A_x^n v|| = \limsup \frac{1}{n} \log ||B_x^n u||$. Esté último límite existe por hipótesis de inducción para el cociclo F''. Por la Proposición 4.6 (b) se obtiene que $\lim \frac{1}{n} \log ||A_x^n v||$ existe y es igual a $\lim \frac{1}{n} \log ||B_x^n u|| = \lambda_j(x)$.

Hemos probado que el enunciado es válido en $\hat{M}_i^l$ tomando a l arbitrariamente, por lo que entonces deberá ser válido también para el mismo $\hat{M}_i$. Como $M = \bigcup_{i=1}^d \hat{M}_i$ el resultado se concluye.

$\square$

Referencias

[1] Marcelo Viana. *Lectures on Lyapunov Exponents.* Cambridge University Press. Pages: 1-66, 2013

[2] Marcelo Viana, Krerley Oliveira. *Fundamentos da Teoria Ergódica.* Fronteiras de Matemática, SBM, 2014.

[3] Peter Walters. *A Dynamical proof of the multiplicative ergodic theorem.* Transactions of the American Mathematical Society, Volume 335, Number 1, 1993.

[4] Castaing and Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Springer-Verlag, 1977.