



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE SOLUCIONES DE TIPO ONDA VIAJERA DE
UNA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL.
PRINCIPIO DE CONCENTRACIÓN-COMPACIDAD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
GERARDO CAMACHO DE LA ROSA

TUTOR PRINCIPAL
DR. PABLO PADILLA LONGORIA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. HÉCTOR SÁNCHEZ MORGADO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

DR. PEDRO ALVES MARTINS DA SILVA GIRÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO,
UNIVERSIDADE DE LISBOA

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO DE 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Existencia y estabilidad de soluciones de tipo onda viajera de
una ecuación de onda semilineal.
Principio de Concentración-Compacidad.**

por

Gerardo Camacho de la Rosa

M.C.M., Facultad de Ciencias UNAM (2012)

Tesis presentada para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en el

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria, Ciudad de México. Agosto, 2016

... “las ciencias” (y me refiero aquí especialmente a las llamadas “ciencias formales” y a las “ciencias naturales”...)... tienen la posibilidad de reconstruir sobre la catástrofe que ya “opera” en todo el territorio mundial. Y no hablo de “reconstruir” en el sentido de retomar lo caído y armarlo de nuevo, a imagen y semejanza de su versión antes de la desgracia. Hablo de “rehacer”, es decir, “hacer de nuevo”. Y los conocimientos científicos pueden entonces reorientar la desesperación y darle su sentido real, es decir, “dejar de esperar”. Y quien deja de esperar, podría empezar a actuar.

SUBCOMANDANTE INSURGENTE GALEANO.
EZLN, MÉXICO, FEBRERO DE 2016.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Ondas viajeras	7
1.2. Cálculo de variaciones	11
1.2.1. Principio variacional: ecuaciones de Euler-Lagrange	14
2. Ecuación transformada y sus propiedades	17
2.1. Ecuación transformada	17
2.2. Leyes de conservación: método de los multiplicadores	20
3. Existencia de ondas viajeras	30
3.1. Espacio funcional de soluciones \mathbb{H}	31
3.2. Problema variacional	33
3.2.1. Problema de minimización	36
3.3. Existencia de soluciones: convergencia de las sucesiones minimizantes	47
3.3.1. Observación: normas equivalentes	48
3.3.2. Caso subcrítico	51
3.3.3. Caso crítico	54
3.3.4. Observaciones de existencia.	62
4. Estabilidad de las soluciones	65
4.1. Existencia local (en el tiempo)	68
4.2. Estabilidad	71
5. Conclusiones	76

A.	80
B.	83
C.	87
D.	88
Bibliografía	90

Existencia y estabilidad de soluciones de tipo onda viajera de una ecuación de onda semilineal.

Principio de Concentración-Compacidad.

por

Gerardo Camacho de la Rosa

Resumen

La presente investigación se enfoca en el estudio de la ecuación de onda semilineal

$$u_{tt} - \Delta u - u|u|^{p-2} = 0, \quad (0-1)$$

para $p \in (2, p^*]$, con p^* el exponente crítico de Sobolev y $n \geq 3$. En particular estudiamos las soluciones de tipo onda viajera para dicha ecuación, en ese sentido presentamos un resultado de existencia de soluciones de tipo onda viajera para (0-1) y posteriormente presentamos otro resultado relativo a la estabilidad de este tipo de soluciones.

La ecuación para soluciones de tipo onda viajera, correspondiente a (0-1), es

$$-\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \psi_{x_i x_i} + \sum_{j,i=1}^n \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j \psi_{x_j x_i} - \psi |\psi|^{p-2} = 0. \quad (0-2)$$

Los resultados más relevantes que obtuvimos asociados al problema de existencia de la ecuación (0-2) y su correspondiente formulación variacional son:

1. **Lema 13**; se demuestra que las sucesiones minimizantes son precompactas en $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. **Teorema 18**; se demuestra que la sucesiones minimizantes - mód una subsucesión- convergen fuertemente en un espacio de funciones adecuado \mathbb{D} . Su límite es además una solución de tipo onda viajera de la ecuación (0-1).
3. **Teorema 25**; se prueba que las soluciones de la ecuación (0-2) y por tanto de la ecuación (0-1) son estables respecto a un conjunto de funciones minimizantes.

Los resultados anteriores y otros se prueban con detalle a lo largo de los diferentes capítulos que integran el presente trabajo. En el capítulo uno damos una breve introducción de los fenómenos ondulatorios, con un particular interés en los procesos no lineales, la ecuación de onda semilineal, las ondas viajeras y algunos aspectos fundamentales del cálculo variacional.

En el capítulo dos transformamos la ecuación (0-1) en una nueva cuyas soluciones corresponden a las soluciones de tipo onda viajera de la ecuación original. También establecemos algunas cantidades conservadas asociadas a la ecuación de onda semilineal y por último nos concentramos en algunas propiedades de la solución de la ecuación en el caso estacionario para el exponente crítico de Sobolev.

Posteriormente en el capítulo tres, que constituye la parte central del presente trabajo, se demuestra que existen soluciones de tipo onda viajera para la ecuación (0-1). Lo anterior se hace

a través de un problema de minimización, por supuesto asociado a un problema variacional con restricción. Concretamente, la existencia de minimizadores se establece probando la compacidad de sucesiones minimizantes mediante el principio de concentración-compacidad de P.L. Lions.

Finalmente en el capítulo cuatro, utilizando nuevamente concentración-compacidad, se demuestra que el conjunto de minimizadores es un conjunto estable para un problema de condiciones iniciales asociado.

Antes de empezar, debemos mencionar que la motivación de estudiar la ecuación de onda semilineal se enmarca en el interés de estudiar un problema mucho más amplio de Relatividad General: estimar el número de hoyos negros que se pueden llegar a formar en una región del espacio-tiempo según ciertas condiciones iniciales (es decir la formulación del problema de Cauchy para las ecuaciones de Einstein [42]).

La historia de los hoyos negros comienza en 1916, cuando Schwarzschild encontró una solución para el vacío a las ecuaciones de Einstein. Dicha solución depende de un parámetro positivo M , la masa. Un agujero negro de Schwarzschild es una región del espacio-tiempo que queda delimitada por una superficie imaginaria llamada horizonte de sucesos en cuyo centro se halla la singularidad. Resulta que en una región del espacio-tiempo con presencia de materia, existe un umbral para la densidad de energía de tal manera que, por encima de ese límite, es posible que un hoyo negro se desarrolle [17]. Por tal motivo existe cierta lógica en la búsqueda de un método para estimar el número de hoyos negros, cuya idea central sea considerar a dichos hoyos negros como concentraciones (singularidades) que serían posibles cuantificar mediante el principio de concentración-compacidad.

Como una primera etapa se había planteado la construcción de un modelo simplificado de hoyo negro, considerando el estudio de la ecuación de onda semilineal con soluciones de tipo onda viajera, solitaria o solitón que jugaran el papel de nuestro hoyo negro. Este modelo, aunque poco real, puede funcionar como una *buena aproximación* al problema original, ya que es posible suponer que un hoyo negro genera un *pozo profundo* en la geometría del espacio-tiempo y ese pozo profundo es modelado por el perfil de la onda viajera. Debido a que no se logró formalizar esta idea, en el presente trabajo sólo se hace mención de los resultados relativos a la ecuación de onda semilineal (0-1); quedando como tarea pendiente abordar el problema de relatividad general.

Hasta donde sabemos, este proyecto sigue constituyendo una pregunta abierta y relevante para una futura investigación. Es importante mencionar que las ecuaciones de campo de la relatividad general pueden escribirse como un sistema hiperbólico y que por lo tanto, dado que además existe una formulación variacional del problema (véase [42]), se contarían con los elementos necesarios para desarrollar las ideas aquí presentadas.

Capítulo 1

Introducción

La noción de *onda* es en cierta forma familiar para todos. Reconocemos el término y por lo general lo asociamos con fenómenos comunes como las olas en el mar o las ondas de sonido. En ese sentido, aún cuando el concepto de *onda* se utiliza de forma amplia no es fácil dar una definición precisa. Debido a que una *onda* se observa como resultado de una perturbación a lo largo de un medio, la cual se transfiere de un punto a otro con una velocidad y dirección particular, es frecuente encontrar que se considere la siguiente definición (véase [29]):

Una onda es cualquier señal reconocible que se transfiere de una región de un medio a otra con una velocidad de propagación determinada.

Matemáticamente lo sustancial es caracterizar y dar una descripción cuantitativa de los fenómenos ondulatorios. A lo largo de la historia fueron muchos los que han estudiado los procesos oscilatorios, tanto Pitágoras como Galileo hicieron aportaciones relevantes en su momento. Sin embargo fue hasta el siglo XVIII que los problemas oscilatorios fueron de particular interés para científicos de la época. En ese siglo se constituyó el problema que lleva por nombre *Problema de la cuerda vibrante*. El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para dicho problema fue Jean Le Rond d'Alembert en 1747. Dedujo una de las ecuaciones en derivadas parciales más importantes de la historia, la llamada *ecuación de onda*

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0.$$

En la actualidad se considera una generalización, conocida como ecuación de onda no ho-

mogénea. Dicha ecuación es

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = g(x, t), \quad (1-1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\Delta u(x, t)$ es el laplaciano de u y $g(x, t)$ es una función continuamente diferenciable. Esta ecuación se encuentra dentro de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) fundamentales.

En virtud de lo anterior el estudio de las ondas y la ecuación que las modela ha sido históricamente importante. Su relevancia no es sólo teórica, sino que también es significativa en las aplicaciones, pues incluso hoy día las investigaciones de los fenómenos ondulatorios son cruciales, por ejemplo, en el diseño óptimo en aeronáutica o para la prevención de desastres causados por sismos o terremotos, entre muchos otros (véase [7] y [19]). La ecuación de onda modela la propagación de ondas lineales, como la luz, el agua y las ondas de sonido, entre otras, siempre y cuando no se tomen en cuenta otros efectos que conducen a problemas no lineales. En ese sentido, el estudio de esta ecuación fue, en su inicio, motivado por la búsqueda de explicaciones a este tipo de fenómenos lineales. Sin embargo con el avance de la ciencia, el estudio de fenómenos no lineales incentivó en la matemática el estudio de las ecuaciones de este tipo. Dichas ecuaciones modelan fenómenos con comportamientos ondulatorios como los láseres y plasmas. Aunque el presente trabajo no tiene el objetivo de estudiar algún fenómeno en específico, sí estamos interesados en un caso particular de la extensa área de los problemas de valores iniciales y de frontera de ecuaciones de onda semilineales.

Cuando Albert Einstein señaló que *las leyes de la naturaleza no son lineales*, sintetizó en pocas palabras los descubrimientos científicos de los siglos pasados y delineó el quehacer científico de las próximas décadas. Un mapeo rápido por las EDP no lineales reafirman esta idea. Este tipo de ecuaciones surgen con frecuencia en la formulación de las leyes de la naturaleza y el análisis matemático de una amplia variedad de problemas, sobre todo físicos. En ese sentido el progreso en el entendimiento de la naturaleza y por tanto el progreso mismo de la física van de la mano de los avances de las matemáticas no lineales y de forma particular de los métodos para resolver ecuaciones no lineales. Por tanto se hace indispensable mencionar algunas que históricamente han sido relevantes¹:

¹Para los aspectos más relevantes de estos ejemplos véase [19].

1. *Ecuación de onda cinética o ecuación de transporte*

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

donde la función $c(u)$ es real. Es la ecuación de primer orden no lineal más simple. Describe la propagación de una onda no lineal y se aplica por ejemplo a la modelación; del flujo de tráfico en las carreteras, ondas de choque, inundaciones, movimiento de los glaciares, procesos de intercambio químico en la cromatografía, el transporte de sedimentos en ríos y ondas en plasmas.

2. *Ecuación no lineal de Klein-Gordon (KG)*

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + W'(u) = 0,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $W'(u)$ es la derivada de un potencial W . En realidad la ecuación de Klein-Gordon es un conjunto de ecuaciones que se caracterizan por que $W'(u)$ incluye siempre un término lineal, es decir, $W'(u) = S(u) + \kappa u$. Esta ecuación modela fenómenos de dispersión no lineal y teorías no lineales de mesones.

3. *Ecuación de Sine-Gordon*

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + \kappa \operatorname{sen}(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $\kappa \in \mathbb{R}$. Aunque esta ecuación se originó en el campo de la geometría diferencial y en la cristalografía, actualmente tiene aplicaciones tanto en el área de las partículas elementales como en modelos de ADN.

4. *Ecuación no lineal de Schrödinger (NLS)*

$$iu_t + u_{xx} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

donde γ es una constante. La ecuación, entre otros fenómenos, describe la evolución de ondas de agua, propagación de pulsos de calor en sólidos, ondas en plasmas, propagación de ondas solitarias en semiconductores y la dinámica de pulsos de luz en fibras ópticas.

5. Ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

donde ν es la viscosidad cinética. La ecuación es un modelo simple para ondas difusivas en dinámica de fluidos, para ondas de sonido en un medio viscoso y ondas magneto-hidrodinámicas en un medio con conductividad eléctrica finita.

Por supuesto existen muchos más ejemplos, entre ellos se encuentran ecuaciones relevantes como la de Fisher, Boussinesq, Benjamin-Ono, Korteweg-de Vries (KdV), KdV modificada, Benjamin-Bona-Mahony (BBM), Ginzburg-Landau (GL), Burgers-Huxley (BH), KdV concéntrica, Whitham, Davey-Stewartson, Camassa-Holm (CH), etcétera. Para una reseña breve de sus aplicaciones y aspectos más importantes también véase [7] y [19].

Ecuación de onda semilineal

En el presente trabajo estamos interesados en la *ecuación de onda semilineal*, que es un caso particular de las llamadas *ecuaciones geométricas*. Cabe señalar que *geométricas* se refiere a aquellas que se transforman de forma natural bajo un cambio de coordenadas (véase [46] y sección 2.1). En ese sentido una ecuación de onda semilineal homogénea añade un término extra no lineal que depende de la función u , pero no de sus derivadas. La ecuación es

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0. \tag{1-2}$$

El caso lineal, cuando $f(u) = mu$ con $m \in \mathbb{R}$, corresponde a la ecuación de Klein-Gordon (KG); desde el punto de vista de la física de partículas relativistas la constante m puede ser interpretada como una masa y por tanto se supone como no negativa. Existen otras aplicaciones, por ejemplo, mediante la ecuación (1-2) en los años cincuenta del siglo pasado, se intentaron modelar fenómenos no lineales como en cuantización utilizando no-linealidades específicas. Pero no sólo en la mecánica cuántica relativista este tipo de ecuaciones ha tomado relevancia, son muchas y diversas las investigaciones y aplicaciones, que desde diferentes enfoques han ido conformando el amplio espectro de las ecuaciones de onda semilineales en dimensiones superiores (véase [45], [46] y [50]).

En un conjunto amplio de trabajos se supone que f satisface las siguientes propiedades;

1. $f(0) = 0$.
2. f tiene un crecimiento polinomial del tipo

$$|f(u)| \leq c(1 + |u|^{p-2})|u|$$

para algún $p \geq 2$ y $c \in \mathbb{R}$.

3. $F(u) \geq -c|u|^2$ con $c \in \mathbb{R}$, donde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.
4. $\frac{|F(u)|}{|f(u)|} \rightarrow \infty$ cuando $|u| \rightarrow \infty$.

Debemos mencionar que las restricciones sobre f en principio podrían parecer arbitrarias, sin embargo, éstas surgieron de forma natural en las investigaciones de décadas pasadas, conformando así un conjunto de problemas a estudiar (véase [51]). Las últimas dos condiciones permiten incluir el caso lineal y de forma más general el caso de no linealidades Lipschitz. Además, en el caso superlineal, es decir, $|f(u)|/|u| \rightarrow \infty$ cuando $|u| \rightarrow \infty$, las condiciones (3) y (4) deben ser consideradas como una condición de coercitividad.

Como mencionamos antes la ecuación de onda semilineal tiene como subcaso a KG , sin embargo nosotros trabajaremos con una ecuación donde la no homogeneidad $f(u)$ no dependa de forma explícita de un término lineal en u . En el contexto del presente trabajo eso llevará a buscar soluciones de la ecuación en un espacio diferente al usual $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Concluimos esta introducción con una breve reseña de algunos resultados para el caso estacionario de la ecuación (1-2), que ha sido ampliamente estudiado para dominios regulares acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f(u) = -u^p$. Se considera el problema modelo

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1-3)$$

El inicio del estudio sistemático de este problema se dio en el campo de la geometría diferencial. En un artículo publicado en 1960 (véase [44] y [55]), Yamabe intentó contestar afirmativamente lo siguiente: Si (M, g) es una variedad Riemanniana compacta de dimensión $n \geq 3$, g su métrica y $R(x)$ su curvatura escalar, ¿existe una métrica g' conforme a g , tal que la curvatura

escalar k asociada a la nueva métrica g' sea constante?. Además de la motivación para el estudio del problema (1-3), proveniente de la geometría Riemanniana, problemas de este tipo están asociados con ciertos fenómenos físicos, en particular, con las ecuaciones de Emden-Fowler [22] y Yang-Mills [14].

Para el problema (1-3), cuando $p < (n+2)/(n-2)$, es fácil probar que existe solución mediante métodos variacionales, tipo minimización o técnicas de Ljusternik-Schrikelman o teoría de Morse. Todos estos métodos fallan cuando $p+1 = p^* = (2n)/(n-2)$ es el exponente crítico de Sobolev, pues en tal caso la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ no es compacta. Cabe mencionar que debido a este hecho se le ha dado el nombre de exponente crítico, de tal forma que p^* constituye un punto de ruptura con las teorías clásicas para atacar el problema (1-3).

Diferentes resultados encontrados en las décadas pasadas, muestran que la existencia de soluciones para (1-3) está condicionada por las propiedades topológicas y geométricas del dominio.

En 1965 S. Pohozaev [41] probó un resultado negativo sobre la solución de (1-3); en dominios estrellados no existe solución. La prueba se desprende de observar que cualquier u , solución regular del problema (1-3), satisface la siguiente identidad, conocida como identidad de Derrick-Pohozaev [21],

$$\left(\frac{n-2}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (\nu \cdot x) dS = \left(\frac{n}{p+1}\right) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx,$$

donde ν es el vector normal exterior sobre $\partial\Omega$. Cuando $p = p^*$ y Ω es un conjunto estrella respecto al origen, es decir $\nu \cdot x > 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces la desigualdad lleva a

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} u^{p^*} dx.$$

Esto es, $u = 0$. Por lo tanto no admite soluciones no nulas.

Posteriormente Brezis y Nirenberg obtuvieron nuevos resultados sobre un problema más general, el problema semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p^*-2}u + f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde suponen que f satisface

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{|u|^{p^*-1}} = 0.$$

En [11] demuestran que cuando Ω , nuevamente, tiene forma de estrella el problema no admite solución positiva.

Respecto a la influencia de la topología en la solubilidad de (1-3) el primer resultado fue obtenido por Kazdan y Werner [27]. Al considerar un dominio, Ω , que no tiene forma de estrella - concretamente un anillo con centro en el origen-, ellos probaron que el problema admite una solución radial positiva. En la misma dirección uno de los resultados más profundos es el de Bahri y Coron [5]. Probaron que en toda topología no trivial el problema (1-3) para $p = p^*$ tiene solución. Topología no trivial significa que los grupos de homología

$$H_{2k-1}(\Omega, \mathbb{Q}) \neq 0 \text{ o } H_k(\Omega, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0,$$

para algún $k \geq 1$. Cuando $n = 3$ la condición anterior se traduce en que Ω no es contraíble, por ejemplo Ω es un toro o un sólido con agujeros [58].

Posteriormente Ding [20] construyó dominios de topología trivial en los cuales existía solución. La idea consistía en perturbar anillos. Resultados similares, respecto a la influencia de la topología y la geometría del dominio en la solubilidad de (1-3) se deben a Gidas-Ni-Nirenberg [24], Coron [18] y Passaseo [39]. También se pueden consultar [58] y [12].

1.1. Ondas viajeras

La representación matemática fundamental de una onda (unidimensional) es

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

donde f es una función de una variable y c es una constante diferente de cero. La evolución de una función de este tipo comienza con la gráfica de un perfil inicial $u(x, 0) = f(x)$. Si c es positiva entonces el perfil de $u(x, t) = f(x - ct)$ en un instante posterior t es la traslación del perfil inicial por una cantidad ct en la dirección x positiva.

Similarmente, $u(x, t) = f(x - ct)$ con $c < 0$ representa una perturbación moviéndose en

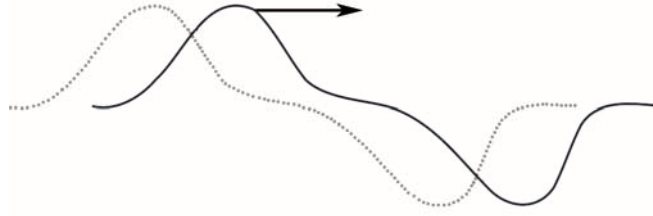


Figura 1-1: Perturbación que se mueve con velocidad constante c .

una dirección x negativa con velocidad $|c|$. En cualquier caso, el perfil en cada instante t no se distorsiona y sigue teniendo la forma característica de una onda que se traslada a lo largo del *eje-x*.

Las ondas representadas por funciones de la forma $u(x, t) = f(x - ct)$ son llamadas ondas viajeras. Las dos características básicas de cualquier onda viajera son la forma del perfil subyacente definido por f y la velocidad $|c|$ con la que el perfil se traslada a lo largo del *eje-x*. Para que $u(x, t)$ represente el movimiento de una perturbación (onda) que se mueva en el tiempo libremente a través de un medio, es necesario suponer que la función es no constante y c es diferente de cero.

Un caso particular de las ondas viajeras son las ondas solitarias, las cuales se pueden pensar como ondas de partículas semejantes que se derivan de efectos no lineales y dispersivos. En algunos casos este tipo de ondas guarda algunas propiedades relevantes, por ejemplo, los solitones son ondas solitarias que mantienen su forma cuando se mueven a velocidad constante y además conservan su amplitud, aún después de una colisión con otra onda. En ese sentido un solitón es una onda solitaria que exhibe alguna forma fuerte de estabilidad, de modo que tenga un comportamiento de partículas similares.

El estudio de los solitones comenzó en 1834, con su descubrimiento por el ingeniero escocés John Scott Russell. A este ingeniero le comisionaron el diseño de embarcaciones de vapor que navegaran el canal que conecta las ciudades de Edimburgo y Glasgow. Durante su trabajo Russell observó un fenómeno poco común; al paso de las embarcaciones (remolcadas por caballos) se llegaban a formar elevaciones grandes, redondas y lisas de agua. Dichas masas de agua viajaban con velocidad constante y se mantenían a lo largo de una distancia considerable:

Me encontraba observando el movimiento de un bote que era arrastrado a lo largo

de un estrecho canal por un par de caballos cuando el bote de pronto se paró- no así la masa de agua en el canal que éste había puesto en movimiento; ésta se había acumulado alrededor de la proa de la embarcación en un estado de violenta agitación, de repente lo dejó atrás, girando hacia adelante a gran velocidad, asumiendo la forma de una larga elevación solitaria, redonda, suave y bien definida onda de agua, la cual continuó su curso a lo largo del canal sin, aparentemente, cambio de forma o disminución de velocidad. Le seguí a lomo de caballo y lo rebasé rodando en un rango con cerca de ocho o nueve millas por hora, preservando su figura original unos treinta pies de largo con entre uno y uno y medio pies de altura. Su altura gradualmente disminuyó, y después de seguirle por una o dos millas lo perdí en los bobinados del canal. Así, en el mes de agosto 1834, fue mi primera oportunidad de admirar tan singular y hermoso fenómeno que he llamado la Onda de Traslación.

[43]

Esta observación motivó a Russell para realizar una investigación sistemática de las ondas que se forman en superficies de agua. El trabajo de Russell es considerado el inicio del estudio de lo que ahora se conocen como ondas solitarias y que fueron nombradas como solitón en 1965.

Los experimentos que realizó Russell despertaron la atención de notables científicos como Boussinesq, Rayleigh y Stokes. En 1845 Korteweg y de Vries derivaron una ecuación diferencial parcial para un modelo de ondas de agua en poca profundidad, como en el caso de las ondas de Russell. En dicho modelo la longitud de onda es considerablemente más grande que la profundidad del volumen de agua. La ecuación diferencial de Kortewe-de Vries (ecuación KdV),

$$U_t + (a_1 + a_2U)U_x + a_3U_{xxx} = 0$$

$a_2, a_3 \neq 0$, es una ecuación no-lineal de tercer orden. Las soluciones de tipo onda viajera de la ecuación KdV son un modelo adecuado al fenómeno observado por Russell.

En la actualidad se tiene certeza que existen (al menos) tres mecanismos que pueden producir ondas solitarias y solitones (véase [8]):

1. **Integrabilidad completa.** Un ejemplo en este caso son las soluciones de la ecuación KdV.

Los solitones de KdV se pueden entender mediante la visualización de estas ecuaciones

como sistemas Hamiltonianos integrables de dimensión infinita. Su estudio a dado luz a planteamientos, en su momento novedosos y fructíferos, para integrar tales sistemas.

2. **Restricciones topológicas.** Un solitón topológico (también llamado defecto topológico) es un solitón cuya estabilidad es debido a las limitaciones topológicas, en lugar de la integrabilidad de las ecuaciones de campo. Las restricciones dividen al espacio en función de los estados en varias clases de homotopía. Por lo tanto, las soluciones se pueden clasificar en las clases de homotopía. Lo relevante es que no existe una transformación continua que asigne a una solución en una clase de homotopía otra solución de una clase de homotopía diferente. En ese sentido las soluciones son verdaderamente distintas y mantienen su integridad incluso frente a perturbaciones fuertes. Un ejemplo de estos solitones proviene de las soluciones de la ecuación de Sine-Gordon.

3. **Relación de energía y carga.** Este tercer tipo de solitones, también llamados solitones *hilomórficos*, se definen como un estado donde se alcanza el mínimo de la energía para una carga fija. Las ecuaciones más generales para las que es posible tener este tipo de solitones al menos deben de satisfacer lo siguiente;

- a) Las ecuaciones son variacionales, es decir, son ecuaciones de Euler-Lagrange para una función de densidad Lagrangiana \mathcal{L} .
- b) Las ecuaciones son invariantes bajo traslaciones temporales, o bien \mathcal{L} no depende explícitamente de t .
- c) Las ecuaciones son invariantes para la acción de norma.

Un ejemplo en este caso es la ecuación de Gross-Pitaevskii;

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi, \text{ para } \psi \in \mathbb{C}.$$

Un hecho importante es que estos tres mecanismos pueden presentarse a la vez. Por ejemplo la ecuación de Sine-Gordon es totalmente integrable y además sus solitones también son topológicos. De forma similar la ecuación de Gross-Pitaevskii presenta solitones *hilomórficos* y también es completamente integrable.

1.2. Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones o cálculo variacional comenzó a desarrollarse hacia finales del siglo XVII, consolidándose, en el siglo XVIII, como una rama de las matemáticas, gracias a los trabajos de Euler, fundamentalmente. Como ocurrió en bastas áreas de las matemáticas surgió de la mano de diferentes problemas geométricos y físicos, principalmente en aquellos donde se trataba de buscar la solución como algún mínimo de una determinada magnitud, que genericamente se han llamado *principios de mínimo* o *principios variacionales*.

El primer *principio de mínimo* registrado por la historia lo estableció Herón de Alejandría en el siglo II (a. C.) que aseguraba que la distancia recorrida por la luz en las reflexiones entre espejos era mínima. En 1657 Pierre Fermat reformuló dicho principio diciendo que la luz viajaba de un punto a otro de forma tal que el tiempo empleado fuese mínimo (Principio de Fermat; camino óptico mínimo). En el campo de la Mecánica la aparición del primer *principio de mínimo* se debió a Louise-Mareau de Maupertuis (1747), aseguró que el movimiento dinámico tiene lugar con mínima acción. En 1760 Lagrange consolidó este principio. Posteriormente, en 1828, Gauss expuso otro *principio de mínimo* en Mecánica el llamado principio de mínima restricción. Sin embargo, el *principio de mínimo* más importante en Mecánica es el principio de Hamilton formulado entre 1834 y 1835. Además de los anteriores hay diferentes ejemplos clásicos, que incluso pedagógicamente son adecuados para una introducción al cálculo variacional, como el celebre problema de la braquistócrona, el problema de las superficies mínimas o bien el principio de Dirichlet.

Los ejemplos anteriores plantean el estudio de un problema más general. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $h : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ suficientemente regulares, encontrar $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, en una determinada clase de funciones, tal que

$$I(u) := \int_{\Omega} h(x, u, \nabla u) \, dx$$

sea mínimo en esa clase. En un lenguaje más adecuado el problema lo podemos replantear como sigue:

Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea

$$I : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función. Hallar $u \in X$ tal que

$$\inf_{v \in X} I(v) = I(u).$$

El problema anterior, conocido como problema de minimización, plantea tres aspectos fundamentales:

1. La existencia de soluciones en algún espacio de funciones X .
2. La unicidad de las soluciones en X .
3. La regularidad, es decir, la pertenencia de las soluciones a subespacios de X .

Para el estudio de los problemas variacionales existen dos aproximaciones dominantes. La primera son los llamados *métodos indirectos* o *métodos minimax*. Se pueden aplicar siempre y cuando exista suficiente regularidad en el funcional I , en h y en el dominio Ω . Generalmente la solución al problema se desprende de la condición clásica de mínimo (heredada del cálculo diferencial en dimensión finita), esto es $I'(u) = 0$. Desde este enfoque, el análisis del problema variacional se hace a través de la ecuación de Euler-Lagrange del funcional I . Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la demostración de existencia de soluciones y su posible cálculo mediante la resolución de la ecuación de Euler asociada, en ese sentido este enfoque se encuentra íntimamente ligado a la teoría de ecuaciones diferenciales. Sin embargo la solubilidad efectiva de estos problemas por lo general no es sencilla. En ocasiones ni siquiera es posible calcular la ecuación de Euler-Lagrange, generalmente por falta de regularidad.

La segunda aproximación a los problemas variacionales es conocida como *métodos directos*. Para abordar un problema en ecuaciones diferenciales desde esta óptica es necesario iniciar con la ecuación en derivadas parciales - objeto de estudio- y se procede a determinar un funcional. Dicho funcional tiene por ecuación de Euler-Lagrange la ecuación parcial original. Posteriormente se determinan los mínimos del funcional. Dichos métodos directos se caracterizan por la obtención de soluciones aproximadas al problema original.

Existen muchas técnicas diferentes agrupadas bajo el nombre de métodos directos. Sin embargo todas comparten una idea central, que es la siguiente. Se considera el problema variacional definido por el funcional $I(\cdot)$, para que éste tenga sentido, se debe suponer que existe $u \in X$ tal que

$$I(u) < \infty$$

y además

$$\inf_{u \in X} I(u) = \mu > -\infty.$$

Así que por definición de μ existe una sucesión de funciones $\{u_k\} \subset X$, llamada sucesión minimizante, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \mu.$$

Si la sucesión tiene una función límite, u_0 , y si es correcto escribir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = I(u_0)$$

entonces

$$I(u_0) = \mu,$$

por lo tanto u_0 es solución del problema variacional. En general se consideran a los términos de $\{u_k\}$ como soluciones aproximadas del problema. La idea anterior es una extensión del teorema fundamental de Weierstrass a funciones definidas en espacios de dimensión infinita. Recordemos que el teorema fundamental de Weierstrass establece que toda función continua

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

con Ω un compacto, es acotada y alcanza sus valores máximos y mínimos. Debido que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado, por la continuidad de f se implica la compacidad de $f(\Omega)$. Finalmente el resultado se obtiene al considerar sucesiones minimizantes y maximizantes. En el mismo sentido, si en el teorema de Weierstrass nos limitamos a demostrar

la existencia de un mínimo, entonces se puede observar que la hipótesis de continuidad puede sustituirse por la semicontinuidad inferior de f .² Weierstrass planteó los resultados esenciales y preparo el camino para Hilbert. El resultado en el caso de dimensión infinita se puede enunciar de la siguiente forma:

Teorema 1 *Sea $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido en un espacio de funciones X dotado de cierta noción de convergencia para la que X es compacto e I es semicontinuo inferiormente. Entonces existe un mínimo de I en X .*

En resumen para resolver un problema variacional mediante el resultado anterior, se procede el siguiente modo:

1. Se determina el espacio de funciones X donde buscar la solución. Es indispensable establecer adecuadamente una noción de convergencia para la que X sea completo.
2. Hay que mostrar que I está bien definido en X y es acotado inferiormente, de forma tal que $\inf_{u \in X} I(u)$ sea finito. Esto implica que se puede construir una sucesión minimizante $\{u_k\}$.
3. Luego se debe demostrar que I es semicontinuo inferiormente (secuencialmente), es decir que $u_k \rightarrow u_0$ implica

$$I(u_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k).$$

4. Finalmente, se prueba que X es compacto (secuencialmente) con respecto a la convergencia de 1. En otras palabras, que es válido

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = I(u_0).$$

1.2.1. Principio variacional: ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones fundamentales de la física son ecuaciones de Euler-Lagrange de un funcional adecuado. Esto es un hecho sorprendente y aunque es algo solamente empírico todas las ecua-

²Se dice que una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente en V si

$$\{x \in V | f(x) \leq \alpha\}$$

es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

ciones fundamentales que se han descubierto hasta ahora se derivan de un principio variacional. Por ejemplo las ecuaciones de movimiento de k partículas, donde la posición al tiempo t está determinada por $x_j(t) \in \mathbb{R}^3$ para $j = 1, \dots, k$, se obtienen de la ecuación de Euler-Lagrange relativa al siguiente funcional

$$\mathcal{S} = \int \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{2} |\dot{x}_j|^2 - V(t, x_1, \dots, x_k) dt,$$

donde m_j es la masa de la j -ésima partícula y V es la energía potencial del sistema. En general, las ecuaciones de movimiento de un sistema finito dimensional cuyas coordenadas generalizadas son $q_j(t)$, con $j = 1, \dots, k$, se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al funcional

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) dt,$$

donde \mathcal{L} es la función lagrangiana del sistema. De forma análoga la dinámica de los campos se puede determinar por el principio variacional. Desde un punto de vista matemático un campo es una función

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow V, \quad u = (u_1, \dots, u_m)$$

donde \mathbb{R}^{n+1} es un espacio-tiempo continuo y $V \cong \mathbb{R}^m$ es llamado espacio de parámetros internos. La función describe el “estado interno” en el punto x al tiempo t . En general las ecuaciones de campo se obtienen mediante la variación del funcional de acción

$$\mathcal{S} = \int \int \mathcal{L}(t, x, u, \partial_t u, \nabla u) dx dt. \tag{1-4}$$

La función \mathcal{L} es llamada función de densidad lagrangiana o sólo función lagrangiana. Si u es una función escalar, la variación de (1-4) está dada por la siguiente ecuación

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x_i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

Si $u = (u_1, \dots, u_m)$ entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son de la misma forma, sólo

que ahora

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{x_i}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1x_i}}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{mx_i}} \right)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_m} \right),$$

de forma que se obtienen las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{lx_i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad l = 1, \dots, m.$$

Utilizando la función de densidad lagrangiana es posible definir algunas cantidades importantes, como son la energía y el momentum o cantidad de movimiento. Aunque profundizaremos más en ellas, pero con otro enfoque, en la próxima sección, debemos mencionar que la energía E , por definición, es una cantidad que se preserva debido a la invariancia de la lagrangiana en el tiempo. En tanto el momentum \vec{P} es una cantidad que se preserva en virtud de la invariancia espacial (bajo traslaciones) de la lagrangiana. Cuando \mathcal{L} depende sólo de una función escalar real valuada φ se tiene que

1. Energía;

$$E = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathcal{L} \right) dx. \quad (1-5)$$

2. Momentum o cantidad de movimiento $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$;

$$P_i = - \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (1-6)$$

Capítulo 2

Ecuación transformada y sus propiedades

2.1. Ecuación transformada

Para el análisis en el que estamos interesados en el presente trabajo será necesario la construcción de algunas herramientas matemáticas de utilidad. Partiremos del estudio de las soluciones para el problema de valores iniciales de la ecuación de onda semilineal (0-1) y (1-2) de tipo onda viajera. Como este tipo de soluciones se caracteriza por ser una perturbación que se desplaza con velocidad constante $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$, es decir, depende únicamente del argumento $x - \vec{c}t$, entonces consideramos un cambio de variable general $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ dado por

$$\begin{cases} \xi_1 = \beta_1(x_1 - c_1 t) \\ \dots \\ \xi_n = \beta_n(x_n - c_n t), \end{cases} \quad (2-1)$$

donde consideramos que

1. $\xi, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\beta_i \neq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$.

3.

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} > 0.$$

Supongamos que u es solución de la ecuación (1-2) y definamos $u^*(\xi(x, t)) := u(x, t)$. Veamos cuál es la ecuación que satisface u^* . Para ello, utilizando la regla de la cadena, observemos primero que

$$\begin{cases} u_{x_i} = \beta_i u_{\xi_i}^* \\ u_t = -\mathcal{K} \cdot \nabla_{\xi} u^* \\ u_{x_i x_i} = \beta_i^2 u_{\xi_i \xi_i}^* \\ u_{tt} = \mathcal{K} \cdot \nabla_{\xi} (\mathcal{K} \cdot \nabla_{\xi} u^*) = \mathcal{K}^T H_{\xi} u^* \mathcal{K}, \end{cases} \quad (2-2)$$

donde hemos supuesto $\mathcal{K} := (\beta_1 c_1, \dots, \beta_n c_n)$, $\nabla_{\xi} u^* = (u_{\xi_1}^*, \dots, u_{\xi_n}^*)$ y $H_{\xi} u^* = [u_{\xi_i \xi_j}^*]$ la matriz hessiana de $u^*(\xi)$. Con lo anterior la ecuación se transforma en

$$-\sum_{i=1}^n \beta_i^2 u_{\xi_i \xi_i}^* + \sum_{j,i=1}^n \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j u_{\xi_j \xi_i}^* + f(u^*) = 0. \quad (2-3)$$

En conclusión, si u^* es solución de (2-3) entonces

$$u(x, t) = u^*(\beta_1(x_1 - c_1 t), \dots, \beta_n(x_n - c_n t))$$

es solución de (1-2).

Por otro lado, observamos lo siguiente: si definimos la matriz $H_{\xi}^* u^*$ como

$$[H_{\xi}^* u^*]_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ [H_{\xi} u^*]_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

entonces la ecuación (2-3) se transforma, nuevamente, en

$$-\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (1 - c_i^2) u_{\xi_i \xi_i}^* + \mathcal{K}^T H_{\xi}^* u^* \mathcal{K} + f(u^*) = 0. \quad (2-4)$$

La forma de la ecuación anterior sugiere considerar $|\vec{c}| < 1$ y proponer la transformación de coordenadas dada por

$$\beta_i^2 = \frac{1}{(1 - c_i^2)}$$

para cada $i = 1, \dots, n$. En este caso se puede observar que

$$\beta_i^2 \geq 1 \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Al considerar lo anterior la ecuación se reduce a

$$-\Delta_\xi u^* + \mathcal{K}^T H_\xi^* u^* \mathcal{K} + f(u^*) = 0, \quad (2-5)$$

donde $\Delta_\xi u^* = \sum_{i=1}^n u_{\xi_i \xi_i}^*$. Los elementos de la matriz $H_\xi^* u^*$, fuera de la diagonal, son de la forma $a_{ij} u_{\xi_i \xi_j}^*$ con $i \neq j$ y $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Un medio para eliminar los términos cruzados en (2-5) es proponer $c_k \neq 0$ para k fijo en $\{1, \dots, n\}$ y $c_j = 0 \forall j \neq k$, de donde obtendremos que $H_\xi^* u^* = [0]$, así que la ecuación (2-5) se reduce al caso estacionario de (1-2), es decir

$$-\Delta_\xi u^* + f(u^*) = 0. \quad (2-6)$$

En adelante consideraremos la transformación de coordenadas, para el caso estacionario, dada por:

$$\begin{cases} |\beta_1| = \frac{1}{\sqrt{1-c_1^2}}, & 0 < |c_1| < 1 \\ \beta_i^2 = 1, & c_i = 0 \text{ para } i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2-7)$$

Propiedades geométricas de las soluciones estacionarias

Para el caso estacionario existen algunos resultados importantes que es necesario mencionar. Para ello regresemos al problema modelo (1-3) considerando a Ω una región acotada. Concretamente consideremos Ω una bola abierta en \mathbb{R}^n y $\partial\Omega$ la frontera de la bola. Por el bien conocido resultado de Gidas, Ni y Nirenberg (véase [24]) se sabe que si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz continua -sin otra restricción-, u es una solución positiva y continua hasta la frontera, entonces u es radial y $u_r < 0$, es decir es decreciente en $|x| = r$. Cuando Ω ya no es una región acotada, sino $\Omega = \mathbb{R}^n$, $f(u) = -u^p$ y $n \geq 3$ (véase [15], [16] y [21]) se tiene el siguiente resultado

Teorema 2 *i) Si $p = p^* - 1$ y $p^* = 2n/(n-2)$, entonces toda solución positiva de (1-3) de clase C^2 debe de ser radialmente simétrica, monotóna decreciente respecto a algún punto y tiene*

la forma

$$u(x) = \frac{(n(n-2)\lambda^2)^{\frac{n-2}{4}}}{(\lambda^2 + |x - y^0|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad (2-8)$$

para $\lambda > 0$ y $y^0 \in \mathbb{R}^n$.

ii) Para $0 < p < p^* - 1$ la única solución no negativa de (1-3) es $u(x) \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Como mencionamos anteriormente, la manera más común de estudiar el problema (1-3) es por medio de su formulación variacional. En una de estas formulaciones, las soluciones son puntos críticos de un funcional adecuado restringido a una variedad (véase [51]). Otra formulación más se obtiene al cambiar la restricción a la variedad por la introducción de un multiplicador de Lagrange del mismo funcional (véase también [51]).

2.2. Leyes de conservación: método de los multiplicadores

El estudio de la dinámica de un sistema mecánico se reduce a conocer la *fuerza* o el conjunto de *fuerzas* que actúa sobre el sistema, lo cual se logra estableciendo la *ley de fuerzas* en cada caso particular. Al hacer esto se obtiene una ley de movimiento, una relación dinámica, por lo general dicha relación es una ecuación diferencial. La solución a esta ecuación diferencial es la descripción de la evolución del sistema. La solución analítica de las ecuaciones no siempre es posible; sin embargo, existen alternativas para conocer algunas propiedades del proceso. Una de ellas son las llamadas cantidades conservadas. En física, una cantidad que se conserva es aquella que no cambia su valor con el tiempo, incluso si otras variables sí están cambiando. Estas cantidades están asociadas con teoremas o leyes de conservación.

Más allá de su significado físico, las cantidades conservadas son una herramienta matemática importante para la comprensión de las ecuaciones diferenciales. Un procedimiento estándar para el estudio de las ecuaciones diferenciales es intentar determinar si tiene alguna cantidad conservada asociada. La cantidad conservada nos da información útil acerca de las soluciones, a pesar de que por lo general no es suficiente para encontrar las soluciones exactas. Desde el punto de vista físico la importancia de la conservación de energía y otras leyes de conservación trasciende su utilidad matemática; se considera que estas leyes son características fundamentales del universo, más fundamentales que cualquier ecuación diferencial particular.

Aunque no es el objetivo del presente trabajo el estudio de las leyes de conservación asociadas a la ecuación de onda, sí es ilustrativo mencionarlás ya que en adelante serán introducidos algunos funcionales relacionados con las cantidades conservadas.

Siempre podemos intentar derivar cantidades que se conservan al multiplicar la ecuación (1-2) por una expresión de la forma

$$au_t + b \cdot \nabla u + cu,$$

y tratar de elegir los coeficientes a, b y c para obtener una ley de conservación. A menudo a este método se le llama método abc (véase [46]).

Por ejemplo, para derivar la forma del principio de acción los coeficientes a, b y c pueden ser elegidos de manera que los multiplicadores sean los generadores de las simetrías del funcional de acción. Esto conduce a las leyes de conservación que corresponden a las simetrías. En el caso en que no existan leyes de conservación, este método puede generar algunas identidades útiles.

Para la ecuación (1-2), se pueden derivar identidades de energía, momento, escalamiento e identidades conformes. De acuerdo al método abc los tres multiplicadores básicos son u_t, u_{x_i} y u (véase [46]). Con ellos se obtienen las siguientes identidades

$$\partial_t \left(\frac{|\nabla u|^2 + u_t^2}{2} + F(u) \right) - \partial_i (u_i u_t) = 0, \quad (2-9)$$

$$\partial_t (u_{x_i} u_t) - \partial_k (\delta_{ik} \left(\frac{u_t^2 - |\nabla u|^2}{2} + F(u) \right) + u_i u_k) = 0, \quad (2-10)$$

$$\partial_t (u u_t) - \partial_i (u_i u) = u_t^2 - |\nabla u|^2 + u F(u), \quad (2-11)$$

donde $F(z) = \int_0^z f(w) dw$ para $z \in \mathbb{R}$. La identidad (2-9) conduce a la conservación de la energía, la (2-10) a la conservación del momento y la (2-11) a la conservación del momento angular. En lo que respecta a la conservación del momento, ésta es consecuencia de una traslación espacial

$$u_\epsilon := u(x + \epsilon x^0, t),$$

para algún $x^0 \in \mathbb{R}^n$, generada por $x^0 \cdot \nabla u$. Por tanto, si multiplicamos la ecuación vectorial

(2-10) por x^0 , obtenemos la ley de conservación del momento lineal

$$\partial_t(u_t x^0 \cdot \nabla u) - \operatorname{div}((x^0 \cdot \nabla u) \nabla u - (\frac{u_t^2 - |\nabla u|^2}{2} + F(u))x^0) = 0. \quad (2-12)$$

Es necesario considerar las siguientes condiciones de regularidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla u| = 0. \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0. \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_t = 0. \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(u(x, t)) = 0. \end{array} \right.$$

Por el teorema de la divergencia la integral de (2-12) en todo \mathbb{R}^n nos lleva a

$$\partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_t x^0 \cdot \nabla u \, dx \right) = 0. \quad (2-13)$$

De forma que si definimos el funcional de momento total como

$$Q(u, u_t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_t x^0 \cdot \nabla u \, dx, \quad (2-14)$$

para $x^0 \in \mathbb{R}^n$ fijo, entonces por (2-13) resulta una constante de movimiento.

Otra ley importante de conservación es la de energía, la cual se desprende de considerar el funcional de energía como

$$E(u, u_t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_t^2 + |\nabla u|^2}{2} + F(u) \, dx. \quad (2-15)$$

Si u es solución de la ecuación (1-2), con las condiciones adecuadas para $|\nabla u|$, u , u_t y $f(u)$ - como en (2-13) -, entonces utilizando la primera identidad de Green se verifica que

$$\partial_t E(u, u_t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t + F'(u) u_t \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} u_t u_{tt} - u_t \Delta u + f(u) u_t \, dx \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2-16}$$

Resulta así que el funcional $E(u, u_t)$ también es una constante de movimiento para (1-2).

Debemos mencionar que en el caso de la ecuación (1-2) es posible verificar que la función de densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((u_t)^2 - |\nabla u|^2) - F(u). \tag{2-17}$$

Así que utilizando (1-5) se puede concluir también que la energía es (2-15). De forma similar, al utilizar (1-6), se puede establecer la siguiente identidad ¹

$$Q(u, u_t) = x^0 \cdot \vec{P}. \tag{2-18}$$

Desde el enfoque de la función de densidad lagrangiana también se puede verificar que la energía y el momentum (o en su caso el momento total) son constantes de movimiento. En realidad estas aparecen de forma natural debido al Teorema de Noether (véase [8]), que puede enunciarse de la siguiente manera:

Teorema 3 *Si la Lagrangiana de un sistema físico es invariante bajo un grupo de transformaciones continuas que dependen de n parámetros independientes entonces este sistema tiene una primera integral para cada uno de estos parámetros.*

Desde esta perspectiva las constantes de movimiento se deben a la homogeneidad del tiempo y a la homogeneidad e isotropía del espacio, lo que genera invariancia con respecto a las traslaciones temporales, traslaciones espaciales y rotaciones espaciales (véase [8] y [37]).

¹Se puede observar que el momento total Q es la proyección de la cantidad de movimiento \vec{P} en la dirección x^0 .

La masa de las ondas viajeras

En [8] V. Benci y D. Fortunato señalan algunas propiedades dinámicas de las soluciones, tipo solitón, de la ecuación no lineal de Klein-Gordon (NKG)

$$\psi_{tt} - \Delta\psi + W'(\psi) = \omega_0^2\psi.$$

Concretamente trabajan con las soluciones tipo solitón de la forma

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = u(\gamma(x_1 - vt), x_2, x_3)e^{\vec{k}\cdot x - \omega t}$$

donde $\omega = \gamma\omega_0$, $\vec{k} = \gamma\omega_0\vec{v}$, $\vec{v} = (v, 0, 0)$, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ y $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. En particular demuestran que algunos efectos relativistas como la contracción espacial, la dilatación del tiempo y la ecuación de Einstein son consecuencia de la invariancia de la ecuación NKG para el grupo de Poincaré. Parte importante de esto es la observación de que las soluciones de tipo solitón poseen una masa escalar.

En mecánica clásica la masa es un tensor simétrico m_{ij} que relaciona la cantidad de movimiento \vec{P} con la velocidad \vec{v} mediante la siguiente fórmula

$$P_i = m_{ij}v_j,$$

donde suponemos la convención de índices para la suma. Para el caso NKG la masa está dada por $m_{ij} = m\delta_{ij}$, con δ_{ij} la delta de Dirac. Benci y Fortunato muestran que los solitones de NKG se comportan como partículas de materia con una masa bien definida.

Para nuestro caso, como la cantidad de movimiento está dado por

$$\vec{P}(u) = - \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t) \nabla u(x, t) dx, \quad (2-19)$$

entonces cuando $u(x, t) = \varphi(\xi)$ es una solución de onda viajera de (1-2), véase (2-1) y (2-2), se

satisface que

$$\begin{aligned}
m_{ij}c_j &= P_i(u) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t)u_{x_i}(x,t) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} (-\mathcal{K} \cdot \nabla_{\xi}\varphi(\xi)) (\beta_i\varphi_{\xi_i}(\xi)) dx \\
&= \mathcal{K} \cdot \left(\beta_i \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\xi_i}(\xi)\nabla_{\xi}\varphi(\xi) dx \right) \\
&= \mathcal{K} \cdot \left(\beta_i \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{y_i}(y)\nabla\varphi(y) dy \right).
\end{aligned} \tag{2-20}$$

De tal forma que la última expresión define un sistema de ecuaciones para los elementos de m_{ij} y no necesariamente es un escalar. Para el caso estacionario, cuando se supone que la transformación de coordenadas está dada por (2-7) se obtiene que

$$\begin{aligned}
m_{ij}c_j &= m_{i1}c_1 + \dots + m_{in}c_n \\
&= \beta_i \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{y_i}(y)\varphi_{y_1}(y) dy,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$m_{i1} = \frac{\beta_i}{c_1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{y_i}(y)\varphi_{y_1}(y) dy. \tag{2-21}$$

Energía, momentum y masa en el caso estacionario: $f(u) = -u|u|^{p^*-2}$

Regresemos ahora al caso estacionario de la ecuación (1-2), es decir, la ecuación (2-6). Sin pérdida de generalidad supongamos la transformación de coordenadas dada por (2-7). Para el caso en que $f(u) = -u|u|^{p^*-2}$, con p^* el exponente crítico de Sobolev, por el Teorema 2 sabemos que la solución es

$$u^*(x,t) := \varphi^*(\xi) = A(\lambda^2 + |\xi - \xi^0|^2)^{\frac{2-n}{2}},$$

con $A = (n(n-2)\lambda^2)^{\frac{n-2}{4}}$, $\lambda > 0$ y $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$.

En esta sección revisaremos lo relativo a $E(u^*, u_t^*)$, para un mayor detalle en los cálculos se

puede revisar el Apéndice al final del presente trabajo².

En primer lugar observaremos que el funcional no depende de λ y de $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$, para ello recordemos (2-1), (2-2) y (2-7) (véase Apéndice A). Para empezar tenemos que $\nabla u^* = (\beta_1, \dots, \beta_n)(\nabla_\xi \varphi^*)^T$ y así $|\nabla u^*|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{\xi_i}^*)^2$, con $\beta_i^2 = 1$ para todo $2 \leq i \leq n$ y $\beta_1^2 = 1/(1 - c_1^2)$. Con los cambios de variable

$$\xi_j = \beta_j(x_j - c_j t),$$

$$z = \frac{\xi - \xi^0}{\lambda}$$

y las identidades en (2-2) podemos obtener las siguientes relaciones

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*(x, t)|^2 dx = n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_i^2 dx, \quad (2-22)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u^*(x, t))^2 dx = (\beta_1 c_1)^2 n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_1^2 dx \quad (2-23)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u^*(x, t))^{p^*} dx = (n(n-2))^{\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx. \quad (2-24)$$

Las identidades anteriores nos permiten concluir que los términos $\int |\nabla u^*|^2 dx$, $\int (\partial_t u^*)^2 dx$ y $\int (u^*)^{p^*} dx$ no dependen de λ , $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ y t , entonces se concluye lo mismo para $E(u^*, \partial_t u^*)$ (véase (2-15)). Por lo tanto podemos eliminar la dependencia en λ , ξ^0 y el funcional de energía toma la forma

$$\begin{aligned} E(u^*, \partial_t u^*) &= E(\varphi^*) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_t^*)^2 + |\nabla u^*|^2}{2} + F(u^*) dx \end{aligned}$$

²Es necesario puntualizar que los cálculos y aproximaciones que aparecen en la presente sección y el Apéndice I son propios de la investigación.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) ((\beta_1 c_1)^2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} x_1^2 dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} x_i^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx. \tag{2-25}
\end{aligned}$$

Para conocer los valores más específicos del funcional es necesario calcular las integrales $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} x_i^2 dx$ y $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx$ (véase Apéndice B). Lo anterior se hace mediante el cambio de variable dado por las coordenadas esféricas n -dimensionales. De donde se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx = nV(S_n) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n} dr \tag{2-26}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} x_i^2 dx = V(S_n) \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr \tag{2-27}$$

para $i = 1, \dots, n$, con

$$V(S_n) = \frac{2\pi}{n} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^k \theta d\theta$$

el volumen de la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . Las integrales que aparecen en las expresiones anteriores son, en términos la función Γ ,

$$\int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)} \tag{2-28}$$

y

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n} dr = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}{2^n\Gamma(\frac{1+n}{2})}. \tag{2-29}$$

Finalmente el funcional de energía para u^* toma la forma

$$\begin{aligned}
&E(u^*, u_t^*) = \\
&\frac{1}{2} n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} V(S_n) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \left((2(\beta_1 c_1)^2 + n) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}{2^n\Gamma(\frac{1+n}{2})} \right). \tag{2-30}
\end{aligned}$$

Al observar que $(\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})) / (2\Gamma(n)) > (\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})) / (2^n\Gamma(\frac{1+n}{2}))$, para toda $n \geq 3$,

y considerar las condiciones impuestas para las β_i 's obtenemos que $E(u^*, u_t^*) > 0$ para cada $n \geq 3$.

Por otro lado, de los cálculos anteriores se desprenden algunas observaciones importantes, para la solución $u^* = \varphi^*$, que nos permiten verificar que no pertenecen al espacio de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$:

Observación 4 Para toda $n \geq 3$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi^*|^2 dx < \infty,$$

en tanto un cálculo adecuado (véase Apéndice C) muestra que en general no se satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*)^2 dx < \infty,$$

para toda $n \geq 3$. En realidad tendremos que $\varphi^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $n \geq 5$.

Veamos ahora el cálculo análogo para el funcional de momento total. Consideraremos

$$x^0 = c = (c_1, 0, \dots, 0),$$

de forma que

$$u_t^*(x, t) = -\beta_1 c_1 \varphi_{\xi_1}^*(\xi)$$

y así

$$\begin{aligned} u_t^*(x, t) x^0 \cdot \nabla u^*(x, t) &= (-\beta_1 c_1 \varphi_{\xi_1}^*(\xi))(c_1 u_{x_1}(x, t)) \\ &= (-\beta_1 c_1 \varphi_{\xi_1}^*(\xi))(c_1 \beta_1 \varphi_{\xi_1}^*(\xi)) \\ &= -(c_1 \beta_1 \varphi_{\xi_1}^*(\xi))^2. \end{aligned}$$

Al considerar el cambio de variable adecuado obtenemos

$$\begin{aligned} Q(u^*, u_t^*) &= -(\beta_1 c_1)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\xi_1}^*(\beta_1(x_1 - c_1 t), \beta_2 x_2, \dots, \beta_n x_n))^2 dx \\ &= -(\beta_1 c_1)^2 \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\xi_1}^*(\xi))^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2-31}$$

Por otro lado, nuevamente con los cambios de variable adecuados (véase *Ápndice B*) y por (2-28), se tiene la siguiente sucesión de identidades

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\xi_1}^*(\xi))^2 d\xi &= A^2 \lambda^{-2n} (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}|^2)^{-n} (\xi_1 - \xi_1^0)^2 d\xi \\
&= A^2 \lambda^{-2n} (n-2)^2 \lambda^{2+n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} (x_1)^2 dx \\
&= (n)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} (x_1)^2 dx \\
&= (n)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} V(S_n) \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr \\
&= (n)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} V(S_n) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)}.
\end{aligned} \tag{2-32}$$

Finalmente al sustituir la identidad anterior en (2-31) podemos concluir que

$$Q(u^*, u_t^*) = -(\beta_1 c_1)^2 (n)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} V(S_n) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)}. \tag{2-33}$$

Por otro lado resulta que en este caso la masa es un escalar, es decir tiene la forma $m_{ij} = m\delta_{ij}$ para $m \in \mathbb{R}$ (véase *Apéndice D*). En ese sentido la onda viajera se comporta como una partícula con una masa bien definida. Lo anterior debido a (2-21), ya que sólo basta observar lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \varphi^*(x)) (\partial_j \varphi^*(x)) dx = 0 \text{ para cada } j = 2, \dots, n. \tag{2-34}$$

En tanto de (2-32) y nuevamente por (2-21) se obtiene

$$m_{11} = \frac{\beta_1}{c_1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right) (n)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} V(S_n) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)}. \tag{2-35}$$

De forma tal que podemos definir $m_0 := m_{11} \neq 0$. Luego se fija $m_{ii} = m_0$ para $i = 2, \dots, n$, resultado de la forma de la velocidad para esta transformación de coordenadas. Por el mismo argumento podemos extender a cero los términos que faltan y obtendremos que al considerar $m_{ij} = m_0 \delta_{ij}$ se satisface la ecuación (2-20) para la onda viajera en cuestión. Lo que verifica efectivamente la masa es un escalar.

Capítulo 3

Existencia de ondas viajeras

Antes de continuar, queremos señalar que los resultados obtenidos que se presentan a continuación y en las siguientes secciones son los más relevantes durante la investigación, los cuales han sido probados en detalle.

Como ya hemos mencionado, el objetivo de estudio será la ecuación de onda semilineal

$$u_{tt} - \Delta u - u|u|^{p-2} = 0 \tag{3-1}$$

para $p \in (2, p^*]$ y $n \geq 3$. En particular estudiaremos las soluciones de tipo onda viajera para dicha ecuación. Por ello se hace necesario recordar el cambio de variable dado en (2-2) que nos permite obtener la ecuación

$$-\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \psi_{x_i x_i} + \sum_{j,i=1}^n \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j \psi_{x_j x_i} - \psi |\psi|^{p-2} = 0, \tag{3-2}$$

donde, por comodidad, también hemos llamado x a la variable transformada. En primer lugar, si se logra demostrar que la ecuación (3-2) tiene solución, entonces se concluirá que la ecuación (3-1) tiene soluciones de tipo onda viajera.

En este trabajo la búsqueda de soluciones se hará a través de un problema variacional y utilizando el principio de concentración-compacidad de P. L. Lions. Desde esta perspectiva es necesario buscar soluciones en un espacio funcional adecuado. Dicho espacio se construye de forma heurística, pues conocemos una solución particular al caso estacionario cuando $p = p^*$.

Recordemos que en el caso estacionario y crítico, la solución φ^* es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $|\nabla\varphi^*| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, para ciertos valores de n , $\varphi^* \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ (véase Observación 4) y por tanto

$$\varphi^* \notin H^1(\mathbb{R}^n).$$

Aún cuando la función φ^* no sea de cuadrado integrable en todo el espacio, sí lo es localmente, es decir, $\varphi^* \in H^1(B_r(y))$ para todo $r > 0$ y $y \in \mathbb{R}^n$. Otras propiedades que satisfacen son: $\varphi^*(x) \rightarrow 0$ y $|\nabla\varphi^*(x)| \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

3.1. Espacio funcional de soluciones \mathbb{H}

Las observaciones anteriores ayudan a definir un conjunto adecuado de funciones para buscar soluciones, al que hay que dotar de una estructura para el caso general.

Además de lo antes señalado, la intención es utilizar las herramientas del Análisis Funcional, por tanto buscamos soluciones suficientemente regulares y que satisfagan resultados como las desigualdades generales de Sobolev o la desigualdad de Poincaré. Ésta última la enunciamos en seguida y se puede consultar en [51].

Teorema 5 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto conexo, abierto y acotado. Si $1 \leq p \leq p^*$ entonces existe $C_{\Omega,p} > 0$ que depende de Ω y de p tal que*

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{\Omega,p} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. En consecuencia $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y esta inclusión es continua.

Se define el espacio de tal forma que dichos resultados se satisfagan en subconjuntos abiertos, conexos y acotados de \mathbb{R}^n . Específicamente estamos interesados en conjuntos como $B_r(z)$ con $r > 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Definimos así un conjunto H , que reúne las propiedades que necesitamos;

Definición 6 *Sea $n \geq 3$. Definimos H como el conjunto de funciones $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que*

1. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y
2. $\varphi \in H_0^1(R_n(z))$, donde $R_n(z)$ es cualquier cubo unidad n -dimensional con centro en $z = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Se puede observar que $\varphi(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ es un elemento del conjunto H , pero existen otros ejemplos de funciones no triviales que pertenecen al conjunto H . Consideremos $z = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ y definamos la función $\psi_z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$\psi_z(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-z|^2 - \frac{1}{2}}} & \text{si } |x-z| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x-z| \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3-3)$$

las funciones de este tipo son tales que $\psi_z \in H$ para toda $z \in \mathbb{Z}^n$.

También podemos observar que para toda $\varphi \in H$, debido a $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in H^1(B_r(0))$ para todo $r > 0$.

El siguiente paso natural es dotar a H de una estructura algebraica, para nuestro objetivo será necesario proponer una métrica adecuada tal que H sea un espacio métrico, pero antes de llegar a este punto es ineludible observar primero que H es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , lo cual resulta inmediato (de la definición) y enseguida definir un producto interno adecuado.

Definimos entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow [0, \infty)$ dado por $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_H = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi_1(x) \cdot \nabla \varphi_2(x) dx$ y en la siguiente proposición se verifica que efectivamente es un producto interno en H ;

Proposición 7 $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ es un producto escalar en H .

Demostración. Claramente $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ satisface la linealidad por la izquierda, linealidad conjugada por la derecha, es definido positivo y cumple la hermiticidad. Sea $\varphi_1 \in H$. Si suponemos que $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_H = 0$ entonces $|\nabla \varphi_1(x)|^2 = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Si $\varphi_1(x) \neq 0$ para algún $z \in \mathbb{R}^n$ entonces por continuidad existe $r > 0$ suficientemente grande tal que $\varphi_1(x)$ no es idénticamente cero en $B_r(z)$. Por otro lado como $\varphi_1 \in H^1(B_r(z))$ y r es suficientemente grande entonces

$$0 \leq C \|\varphi_1\|_{H^1(B_r(z))} \leq \int_{B_r(z)} |\nabla \varphi_1(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_1(x)|^2 dx = 0$$

para algún $C > 0$. Así que $\|\varphi_1\|_{H^1(B_r(z))} = 0$, de donde $\varphi_1(x) = 0 \forall x \in H^1(B_r(z))$, lo que es una contradicción. Por tanto $\varphi_1(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ ■

Después de haber verificado que $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ es un producto escalar en H podemos considerar la norma inducida dada por

$$\|\varphi\|_H = (\langle \varphi, \varphi \rangle_H)^{1/2}. \quad (3-4)$$

Sin embargo H con la norma $\|\cdot\|_H$ no resulta ser un espacio de Hilbert. Debido a esto trabajaremos con \mathbb{H} la completación de H con la misma norma, que en adelante denotaremos por

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(x)|^2 dx.$$

Definición 8 Sea \mathbb{H} la completación de H con la norma $\|\cdot\|$.

Así que \mathbb{H} con la norma $\|\cdot\|$ resulta ser un espacio de Hilbert adecuado para nuestro estudio. Antes de concluir esta sección recordemos que para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ y $p \geq 1$ se define la norma

$$\|\varphi\|_{D^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^\alpha\varphi|^p dx$$

para $D^{k,p}(\Omega)$ la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ con esta norma. Cuando $k = 1$ y $p = 2$ se tiene que

$$\|\varphi\|_{D^{1,2}(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx.$$

En particular resulta que $\mathbb{H} \subset D^{1,2}(\Omega)$. Es importante también señalar que, por las inclusiones de Sobolev, en general $D^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ donde $1/q = 1/p - k/n$ y existe una constante (óptima) $S = S(k, n, p)$ tal que

$$S \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{D^{k,p}(\Omega)}$$

para toda $\varphi \in D^{k,p}(\Omega)$, además con $k = 1$ y $p = 2$ se tiene $q = p^* = 2n/(n-2)$ es el exponente crítico de Sobolev.

3.2. Problema variacional

Principio de concentración-compacidad de Lions

Existen muchas EDP no lineales que se desprenden de ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a problemas variacionales. Como mencionamos anteriormente, el primer paso para resolver tales ecuaciones mediante métodos variacionales es mostrar que se alcanzan los extremos, para esto

se requiere coercitividad o compacidad. Si la cantidad a minimizar tiene un término, como la “energía”, que involucre derivadas entonces se tiene control sobre la regularidad local a lo largo de las sucesiones minimizantes. Lo cual funciona, normalmente, si el dominio es compacto. Sin embargo, cuando el dominio no es compacto la situación está lejos de ser clara. Consideremos por ejemplo el problema de minimizar el funcional

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} V(x-y)(u(x))^2(u(y))^2 dx dy$$

sobre funciones u tales que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lambda > 0$$

y

$$V(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } |x| \longrightarrow \infty.$$

Debido a la invariancia bajo traslaciones, las sucesiones minimizantes deben estar completamente “concentradas” para que exista la posibilidad de la convergencia. La idea clave es que si una sucesión minimizante no está “concentrada” entonces cualquier elemento de la sucesión puede considerarse como dos funciones con soportes muy lejos uno del otro. Si denotamos al ínfimo por $\iota(\lambda)$ entonces a lo largo de dichas sucesiones el ínfimo será $\iota(\lambda_1) + \iota(\lambda_2)$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ ($0 < \lambda_1, \lambda_2 < \lambda$) en lugar de $\iota(\lambda)$. Si de forma independiente se puede demostrar que $\iota(\lambda)$ es estrictamente subaditiva¹ entonces se puede probar la existencia de un minimizador. Esta idea fue desarrollada y aplicada con éxito por P. L. Lions en diferentes problemas.

Pierre Louis Lions ha hecho contribuciones muy importantes a las matemáticas en las últimas décadas, que van desde la probabilidad hasta las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y en estas últimas particularmente en las ecuaciones no lineales. Dichas aportaciones cubren un conjunto amplio de problemas variacionales. Con respecto al problema mencionado anteriormente, en 1984 Lions publicó sus resultados en un par de artículos que dieron luz al Principio de concentración-compacidad de Lions (véase [4], [32], [33] y [34]). Aunque existen diferentes formulaciones, todas equivalentes, enunciemos la que utilizaremos:

¹Decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente subaditiva si para todo $x, y \in \Omega$ se tiene que

$$f(x+y) < f(x) + f(y).$$

Lema 9 (*Principio de concentración-compacidad*)

Sea $\{\rho_k\}$ una sucesión no negativa de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx = L \quad \forall k \geq 1, \quad y \quad L > 0,$$

entonces existe una subsucesión denotada por $\{\rho_k\}$ que satisface una de las tres condiciones siguientes:

1. (*Compacidad*) Existe $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r(\varepsilon) > 0$ de modo que para todo $k \geq 1$

$$\int_{B_{r(\varepsilon)}(y_k)} \rho_k(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx - \varepsilon.$$

2. (*Desvanecimiento*) Para todo $r > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} \rho_k(x) dx = 0$$

3. (*Dicotomía*) Existe $\alpha \in (0, L)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existen $r > 0$, $r_k \rightarrow \infty$, $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ y $k_0 \geq 1$ de modo que

$$\left| \int_{B_r(y_k)} \rho_k(x) dx - \alpha \right| < \varepsilon \quad y \quad \left| \int_{r < |x - y_k| < r_k} \rho_k(x) dx \right| < \varepsilon$$

para toda $k \geq k_0$.

De manera informal, este lema asegura que puede ocurrir sólo una de las siguientes tres posibilidades:

1. Las medidas $\{\rho_k\}$ permanecen concentradas cerca de los puntos $\{y_k\}$.
2. Las medidas $\{\rho_k\}$ no se concentran al rededor de ningún valor de \mathbb{R}^n .
3. Alguna fracción $\alpha \in (0, L)$, de las medidas $\{\rho_k\}$, se concentra en los puntos $\{y_k\}$ y otra fracción no se concentra cerca de esos puntos.

La importancia del Principio de concentración-compacidad radica en que permite resolver problemas que presentan alguna forma de “compacidad local”, o en otras palabras, resolver

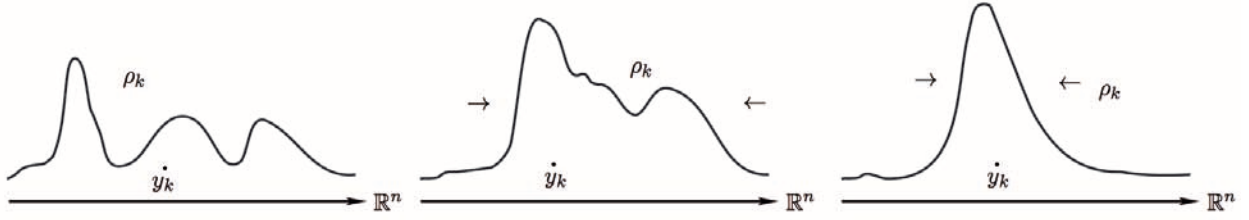


Figura 3-1: Concentración; $k \rightarrow \infty$.

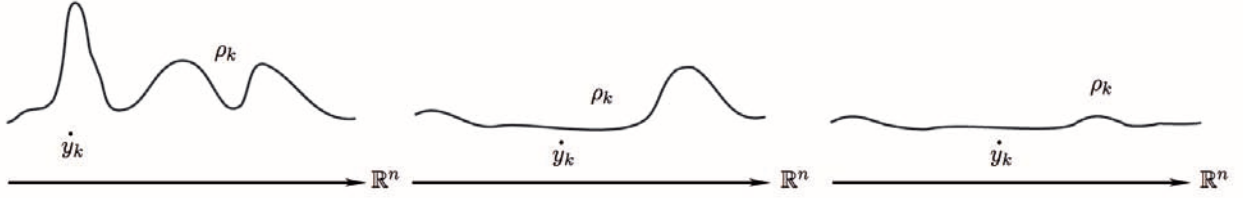


Figura 3-2: Desvanecimiento; $k \rightarrow \infty$.

problemas que si estuvieran definidos en dominios acotados podrían ser resueltos por métodos clásicos de convexidad-compacidad.

3.2.1. Problema de minimización

Después de que definimos adecuadamente el espacio funcional \mathbb{H} en la definición 8, con la intención de buscar las soluciones en él, plantearemos un problema de minimización con restricción para obtener soluciones de (3-1)-(3-2), utilizando el principio de Lions (Lema 9)D.

Empecemos definiendo los funcionales que intervienen en el problema variacional;

Definición 10 Consideremos $p \in (2, p^*]$. Sean $I, K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ los funcionales dados por

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[(\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx$$

y

$$K(\varphi) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx,$$

donde \mathcal{K} y los β_i 's están definidos en (2-2). Y ahora definamos algunos conjuntos necesarios y lo que es una sucesión minimizante en \mathbb{H} ;

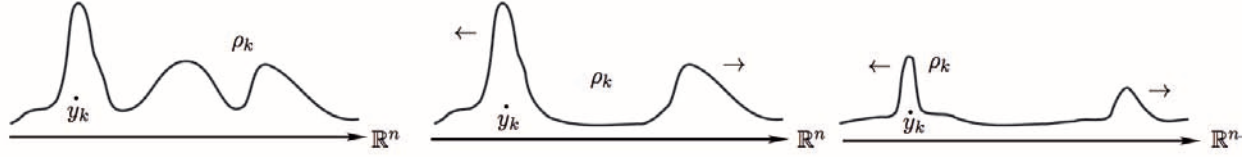


Figura 3-3: Dicotomía; $k \rightarrow \infty$.

Definición 11 Para $0 < \gamma \leq 1$ definimos

$$M_\gamma := \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathbb{H}, K(\varphi) = \gamma\} > 0$$

y decimos que una sucesión $\{\varphi_k\} \subset \mathbb{H}$ es minimizante si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(\varphi_k) = 1$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k) = M_1. \quad (3-5)$$

Así, el conjunto de minimizadores es

$$G := \{\varphi \in \mathbb{H} \mid I(\varphi) = M_1 \text{ y } K(\varphi) = 1\}.$$

Por rescalamiento se tiene que

$$M_\gamma = \gamma^{\frac{2}{p}} M_1 \quad (3-6)$$

para $0 < \gamma \leq 1$ y además de la condición de subaditividad estricta

$$M_\gamma + M_{1-\gamma} > M_1 \quad (3-7)$$

para $0 < \gamma < 1$. Como mencionamos anteriormente se considera $\beta_i \neq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$.

Lema 12 El funcional I es coercitivo en \mathbb{H} .

Demostración. De la forma del funcional I , se observa

$$\begin{aligned}
I(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[(\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \\
&\geq \frac{\min\{\beta_i^2\}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \\
&= \frac{\min\{\beta_i^2\}}{2} \|\varphi\|^2.
\end{aligned} \tag{3-8}$$

Por tanto $I(\varphi) \geq \frac{1}{2} \min\{\beta_i^2\} \|\varphi\|^2$ para toda $\varphi \in \mathbb{H}$, así que el funcional es coercitivo en \mathbb{H} . ■

En seguida para cada $\{\varphi_k\}$ sucesión minimizante definimos una sucesión $\{\rho_k\}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\rho_k(x) := |\nabla \varphi_k(x)|^2. \tag{3-9}$$

Como $I(\varphi)$ es coercitivo en \mathbb{H} entonces toda $\{\varphi_k\}$ sucesión minimizante es acotada en \mathbb{H} . De tal forma que

$$a_k := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx \geq 0$$

es una sucesión acotada en \mathbb{R} , así que por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión

$$a_{k_j} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{k_j}(x) dx \geq 0$$

que converge a una constante $L > 0$. Denotamos la subsucesión anterior por $\{a_k\}$, así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx = L.$$

Luego bajo una renormalización adecuada podemos suponer que

$$a_k = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx = L, \quad \forall k \geq 1.$$

Compacidad de las sucesiones minimizantes

Las propiedades precedentes para la sucesión $\{\rho_k\}$ no son más que las hipótesis del principio de concentración-compacidad de Lions. Para nuestro caso las sucesiones minimizantes definen “medidas”, $\{\rho_k\}$, que son compactas módulo traslaciones, lo cual se establece en el siguiente lema;

Lema 13 *Sea $p \in (2, p^*]$. La sucesión $\{\rho_k\}$ es compacta módulo una sucesión de traslaciones en \mathbb{R}^n .*

Demostración. La prueba consiste en mostrar que no puede ocurrir ni la dicotomía, ni el desvanecimiento. En ese sentido supongamos primero que ocurre el desvanecimiento y mostremos que se llega a una contradicción.

Sea $R_n(y)$ el rectángulo n -dimensional con centro en $y \in \mathbb{Z}^n$ y cuya diagonal es $d_n = \sqrt{n}$ y sea $r_0 = \frac{\sqrt{n}}{2} > 0$. Por las desigualdades generales de Sobolev (véase [21]) existe $C > 0$ (que sólo depende de p, n y $R_n(y)$) tal que

$$\int_{R_n(y)} |\varphi_k(x)|^p dx \leq C \left[\int_{R_n(y)} \rho_k(x) dx \right]^{\frac{p}{2}} \quad \forall k \geq 1, \forall y \in \mathbb{Z}^n. \quad (3-10)$$

Suponiendo que ocurre el desvanecimiento entonces para $r_0 > 0$ sabemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r_0}(y)} \rho_k(x) dx \right] = 0$$

Por tanto para $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \geq 1$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$\int_{R_n(y)} \rho_k(x) dx \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{R_n(y)} \rho_k(x) dx \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r_0}(y)} \rho_k(x) dx < \varepsilon, \quad (3-11)$$

así que para toda $z \in \mathbb{Z}^n$ y $k \geq k_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{R_n(z)} |\varphi_k(x)|^p dx &\leq C \left[\int_{R_n(z)} \rho_k(x) dx \right]^{\frac{p}{2}} \\ &= C \left[\int_{R_n(z)} \rho_k(x) dx \right]^{\frac{p}{2}-1} \left[\int_{R_n(z)} \rho_k(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\leq C [\varepsilon]^{\frac{p-2}{2}} \left[\int_{R_n(z)} \rho_k(x) dx \right].$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{R_n(z)} |\varphi_k(x)|^p dx \\ &\leq C [\varepsilon]^{\frac{p-2}{2}} \left[\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{R_n(z)} \rho_k(x) dx \right] \\ &= C [\varepsilon]^{\frac{p-2}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx \right] \\ &= C [\varepsilon]^{\frac{p-2}{2}} L \end{aligned}$$

y como $p-2 > 0$ se puede concluir que $\lim_{k \rightarrow \infty} K(\varphi_k) = 0$, lo que es una contradicción pues $\{\varphi_k\}$ es una sucesión minimizante. Así que el desvanecimiento no puede ocurrir.

Veamos ahora que la dicotomía no puede ocurrir. Nuevamente procedamos por contradicción. En tal caso si se verifica la dicotomía existe $\alpha \in (0, L)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existen $r > 0$, $r_k \rightarrow \infty$, $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ y $k_0 \geq 1$ de modo que

$$\left| \int_{B_r(y_k)} \rho_k(x) dx - \alpha \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \int_{r < |x-y_k| < r_k} \rho_k(x) dx \right| < \varepsilon$$

para toda $k \geq k_0$.

Empecemos por simplificar la notación definiendo

$$T(\varphi(x)) := \frac{1}{2} \left[(\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right]$$

y consideremos $\zeta, \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \zeta, \eta \leq 1$ tales que

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1 & \text{si} & \quad |x| \leq 1, \\ \zeta(x) &= 0 & \text{si} & \quad |x| \geq 2, \\ \eta(x) &= 1 & \text{si} & \quad |x| \geq 1, \\ \eta(x) &= 0 & \text{si} & \quad |x| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3-12)

También definimos

$$u_k(x) = \zeta\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right)\varphi_k(x)$$

y

$$v_k(x) = \eta\left(\frac{|x - y_k|}{r_k}\right)\varphi_k(x). \tag{3-13}$$

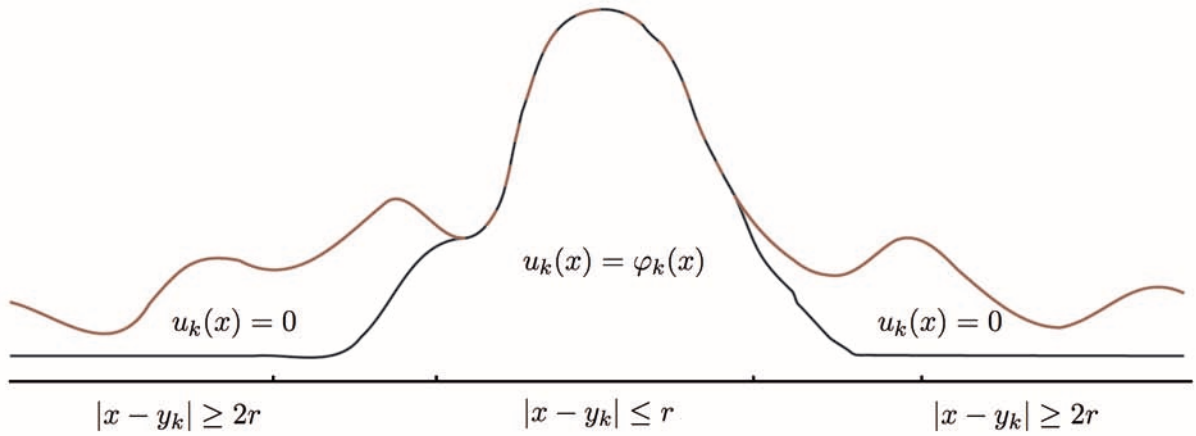


Figura 3-4: Función $u_k(x)$.

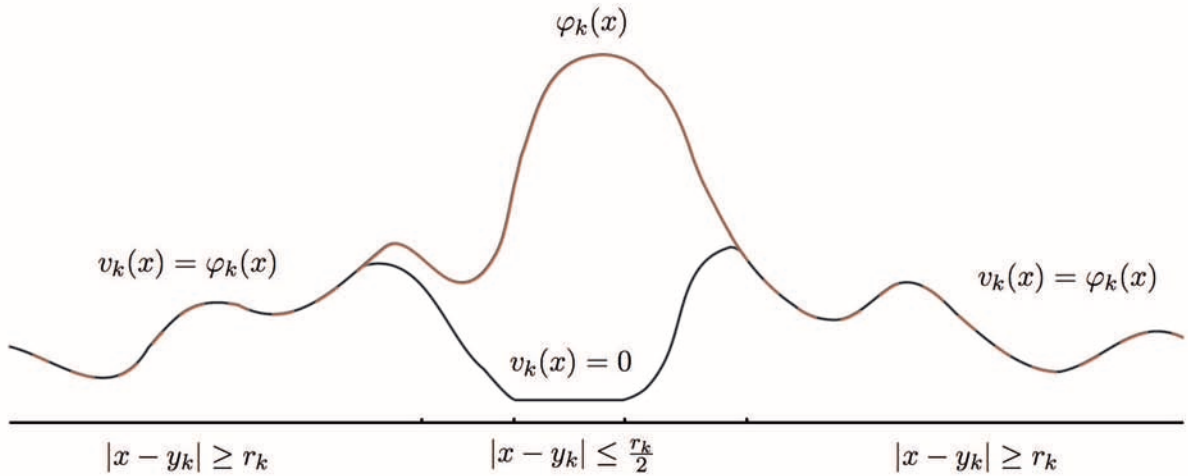


Figura 3-5: Función $v_k(x)$.

De donde se obtiene

$$\begin{aligned}
u_k(x) &= \varphi_k(x) & \text{si } |x - y_k| \leq r, \\
u_k(x) &= 0 & \text{si } |x - y_k| \geq 2r, \\
v_k(x) &= \varphi_k(x) & \text{si } |x - y_k| \geq r_k, \\
v_k(x) &= 0 & \text{si } |x - y_k| \leq \frac{r_k}{2}.
\end{aligned}$$

Un esbozo de las funciones anteriores se puede apreciar en las figuras (3-4) y (3-5). Por otro lado debido a $r_k \rightarrow \infty$ siempre podemos escoger $k_0 \geq 1$ tal que para $k \geq k_0$, $r \leq 2r \leq \frac{r_k}{2} \leq r_k$ con r suficientemente grande, de modo que

$$\begin{aligned}
I(u_k) &= \int_{\mathbb{R}^n} T(u_k(x)) dx \\
&= \int_{B_r(y_k)} T(\varphi_k(x)) dx + \int_{r \leq |x - y_k| \leq r_k} T(u_k(x)) dx
\end{aligned} \tag{3-14}$$

y

$$\begin{aligned}
I(v_k) &= \int_{\mathbb{R}^n} T(v_k(x)) dx \\
&= \int_{(B_{r_k}(y_k))^c} T(\varphi_k(x)) dx + \int_{r \leq |x - y_k| \leq r_k} T(v_k(x)) dx.
\end{aligned} \tag{3-15}$$

Por otro lado sea

$$\omega_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid r \leq |x - y_k| \leq 2r\}$$

y

$$m_0 := \int_{\omega_k} 1 dx = \dots = \int_{\omega_{k_0}} 1 dx < \infty.$$

Como ω_k es compacto para cada $k \geq k_0$ entonces existe $p_0 > 0$ tal que

$$\left| \zeta' \left(\frac{|x - y_k|}{r} \right) \right| \leq p_0 \quad \forall x \in \omega_k, \quad \forall k \geq k_0. \tag{3-16}$$

Observemos que p_0 es la cota global de $|\zeta'|$ sobre el conjunto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz también se verifica

$$\int_{\omega_k} T(u_k(x)) dx \leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \int_{\omega_k} |\nabla u_k(x)|^2 dx. \tag{3-17}$$

En tanto para todo $x \in \omega_k$ y $k \geq k_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\nabla u_k(x)| &= |\varphi_k(x) \nabla \zeta\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right) + \zeta\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right) \nabla \varphi_k(x)| \\
&= |\varphi_k(x) \zeta'\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right) \frac{(x - y_k)}{r|x - y_k|} + \zeta\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right) \nabla \varphi_k(x)| \\
&\leq |\varphi_k(x)| \left| \zeta'\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right) \right| \frac{|x - y_k|}{r|x - y_k|} + \zeta\left(\frac{|x - y_k|}{r}\right) |\nabla \varphi_k(x)| \\
&\leq |\varphi_k(x)| \frac{p_0}{r} + |\nabla \varphi_k(x)|.
\end{aligned} \tag{3-18}$$

Antes de continuar consideremos la siguiente observación. Para cada $k \geq 1$, $\varphi_k(x)$ no es necesariamente un elemento de $H_0^1(\omega_k)$ por tanto no es posible aplicar la desigualdad de Poincaré; sin embargo, como r es suficientemente grande y $r_k \rightarrow \infty$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_k} |\varphi_k(x)|^2 dx &\leq \int_{U_k} |\varphi_k(x)|^2 dx \\
&\leq m \int_{U_k} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

donde m es el número mínimo de n -cubos cuya unión U_k cubre ω_k , es decir

$$\omega_k \subset U_k := \cup_{j=1}^m R_n(z_j)$$

y

$$\omega_k \subset U_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{r}{2} \leq |x - y_k| \leq r_k\}.$$

Enseguida al utilizar (3-18), (3-17), la desigualdad de Poincaré y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_k} T(u_k(x)) dx &\leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \int_{\omega_k} |\nabla u_k(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \int_{\omega_k} \left[|\varphi_k(x)|^2 \frac{p_0^2}{r^2} + |\nabla \varphi_k(x)|^2 + \frac{2p_0}{r} |\varphi_k(x)| |\nabla \varphi_k(x)| \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \left(\left[\frac{p_0^2}{r^2} m + 1 \right] \int_{U_k} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{2p_0}{r} \left[\int_{U_k} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{U_k} |\varphi_k(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \left[\frac{p_0^2}{r^2} m + 1 + \frac{2p_0}{r} m^{\frac{1}{2}} \right] \int_{U_k} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \left[\frac{p_0}{r} m^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \int_{U_k} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx. \tag{3-19}
\end{aligned}$$

Pero como $\omega_k \subset U_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{r}{2} \leq |x - y_k| \leq r_k\}$ entonces por (3-19) y suponiendo la dicotomía se obtiene

$$0 \leq \int_{\omega_k} T(u_k(x)) dx \leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \left[\frac{p_0}{r} m^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Lo anterior significa que existe $\Theta_1(\varepsilon)$ con $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_1(\varepsilon) = 0$ tal que

$$\int_{\omega_k} T(u_k(x)) dx = \Theta_1(\varepsilon), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3-20}$$

Por otro lado, sea

$$\omega_k^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{r_k}{2} \leq |x - y_k| \leq r_k\}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Como ω_k^* es compacto existe $p_1 > 0$ tal que

$$\left| \eta' \left(\frac{|x - y_k|}{r_k} \right) \right| \leq p_1, \quad \forall x \in \omega_k^*, \quad \forall k \geq k_0. \tag{3-21}$$

Observemos que p_1 es la cota global de $|\eta'|$ sobre el conjunto $[1/2, 1] \subset \mathbb{R}$.

Al igual que en el caso de u_k se puede mostrar que

$$|\nabla v_k(x)| \leq |\varphi_k(x)| \frac{p_1}{r_k} + |\nabla \varphi_k(x)|. \tag{3-22}$$

Nuevamente observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\omega_k^*} |\varphi_k(x)|^2 dx &\leq \int_{U_k} |\varphi_k(x)|^2 dx \\ &\leq b_k \int_{U_k^*} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

donde b_k es el número mínimo de n -cubos cuya unión U_k^* cubre ω_k^* , es decir

$$\omega_k^* \subset U_k^* := \cup_{j=1}^{b_k} R_n(z_j).$$

Así que al utilizar b_k , la desigualdad de Hölder, (3-21) y (3-22) se obtiene

$$\int_{\omega_k^*} T(v_k(x)) dx \leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \left[p_1 \left(\frac{b_k}{r_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \int_{U_k^*} |\nabla \varphi_k(x)|^2 dx. \quad (3-23)$$

Para toda $k \geq k_0$, si $[0, r_k]^n = [0, r_k] \times \dots \times [0, r_k]$ (un cubo en \mathbb{R}^n), entonces $U_k^* \subset [0, r_k]^n$, así que la desigualdad de Poincaré -modificada- nos permite considerar $b_k \leq r_k$. Además debido a $r_k \rightarrow \infty$ se puede suponer que existe $m^* > 0$ tal que $\frac{1}{r_k} < m^*$, entonces por la dicotomía en (3-23) resulta

$$0 \leq \int_{\omega_k^*} T(v_k(x)) dx \leq \frac{1}{2} [|\mathcal{K}|^2 + \max\{\beta_i^2\}] \left[p_1 (m^*)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \varepsilon.$$

Finalmente de forma similar a (3-20), existe $\Theta_2(\varepsilon)$ con $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_2(\varepsilon) = 0$ tal que

$$\int_{\omega_k} T(v_k(x)) dx = \Theta_2(\varepsilon), \quad \forall k \geq k_0. \quad (3-24)$$

Ahora al utilizar (3-14), (3-15), (3-20) y (3-24) obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} I(v_k) + I(u_k) &= \int_{[B_{r_k}(y_k)]^c} T(\varphi_k(x)) dx + \int_{B_{r_k}(y_k)} T(\varphi_k(x)) dx + \Theta_2(\varepsilon) + \Theta_1(\varepsilon) \\ &= I(\varphi_k) - \int_{r \leq |x-y_k| \leq r_k} T(\varphi_k(x)) dx + \Theta_2(\varepsilon) + \Theta_1(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned} \quad (3-25)$$

Suponiendo nuevamente la dicotomía existe $\Theta_3(\varepsilon)$, con $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_3(\varepsilon) = 0$ tal que

$$\int_{\omega_k} T(\varphi_k(x)) dx = \Theta_3(\varepsilon), \quad \forall k \geq k_0, \quad (3-26)$$

que al sustituir en (3-25) nos permite obtener la identidad

$$I(v_k) + I(u_k) = I(\varphi_k) + \Theta(\varepsilon), \quad \forall k \geq k_0, \quad (3-27)$$

donde $\Theta(\varepsilon) = \Theta_1(\varepsilon) + \Theta_2(\varepsilon) + \Theta_3(\varepsilon)$ y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon) = 0$.

De forma completamente análoga para el funcional K se puede deducir la siguiente identidad

$$K(v_k) + K(u_k) = K(\varphi_k) + \Theta^*(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_0 \quad (3-28)$$

con $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta^*(\varepsilon) = 0$.

En este punto procedemos a definir

$$\gamma_1(\varepsilon) := \lim_{k \rightarrow \infty} K(v_k) \quad (3-29)$$

y

$$\gamma_2(\varepsilon) := \lim_{k \rightarrow \infty} K(u_k). \quad (3-30)$$

Debido a que la sucesión es minimizante, es decir $\lim_{k \rightarrow \infty} K(\varphi_k) = 1$, y por la identidad (3-28) obtenemos que $|\gamma_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon) - 1| = |\Theta^*(\varepsilon)|$, donde $\gamma_1(\varepsilon), \gamma_2(\varepsilon) \in [0, 1]$. En tanto al considerar una sucesión $\varepsilon_j \rightarrow 0$ se concluye

$$\gamma_1 := \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_1(\varepsilon_j) \quad (3-31)$$

y

$$\gamma_2 := \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_2(\varepsilon_j) = 1 - \gamma_1. \quad (3-32)$$

Si $\gamma_1 \in (0, 1)$ y consideramos el rescalamiento de (3-7) entonces por (3-28)

$$M_1 + \Theta(\varepsilon_j) = M_{\gamma_1(\varepsilon_j)} + M_{\gamma_2(\varepsilon_j)}$$

$$= \left[(\gamma_1(\varepsilon_j))^{\frac{2}{p}} + (\gamma_2(\varepsilon_j))^{\frac{2}{p}} \right] M_1,$$

que al tomar el límite ($j \rightarrow \infty$) y debido a la condición de subaditividad se concluye

$$M_1 = \left[(\gamma_1)^{\frac{2}{p}} + (\gamma_2)^{\frac{2}{p}} \right] M_1 > M_1,$$

lo que es una contradicción. De forma completamente similar para los casos $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_1 = 1$ obtenemos una contradicción, lo que nos permite concluir que la dicotomía no puede ocurrir.

Finalmente al no ocurrir la dicotomía ni el desvanecimiento, por el Principio de concentración-compacidad se tiene la compacidad, es decir la sucesión $\{\rho_k\}$ es compacta módulo una sucesión de traslaciones en \mathbb{R}^n . ■

El principio de concentración-compacidad ha generado un procedimiento estándar, que cuando se logra probar la compacidad se desprenden de forma inmediata los siguientes resultados (véase [34] y [56]):

Corolario 14 *La sucesión $\{|\varphi_k(\cdot + y_k)|^p\}$ es compacta en $L^1(\mathbb{R}^n)$, donde $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es la sucesión que garantiza el principio de concentración-compacidad en el Lema 13.*

Corolario 15 *Si $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es la sucesión que garantiza el principio de concentración-compacidad en el Lema 13, entonces dicha sucesión es acotada.*

3.3. Existencia de soluciones: convergencia de las sucesiones minimizantes

La solubilidad de (1-3) depende de modo importante del exponente p . Cuando $p < p^*$ el problema siempre tiene solución no trivial en cualquier dominio acotado Ω (véase [51]). En cambio, cuando $p \geq p^*$ la existencia sí depende del dominio Ω . Por tal motivo realizaremos el análisis de existencia por separado para los casos crítico y subcrítico. También cabe mencionar que estamos trabajando con una ecuación, la transformada (3-2), que para algunos valores de las constantes β_i 's y c_i 's se reduce a la ecuación (2-6); por tanto los resultados deben de ser compatibles en las regiones de análisis donde se intersecten. Cuando se considera el exponente crítico y las constantes β_i 's y c_i 's son tales que transforman la ecuación de onda original en su caso estacionario se

obtiene un resultado de existencia, sin embargo no es claro que en el caso crítico las solubilidad del problema dependa de las constantes. Faltan explorar aún diferentes posibilidades y obtener resultados sólidos al respecto.

Cabe señalar que un resultado de existencia, que motiva nuestro análisis, fue obtenido por Levandosky (véase [30]) para soluciones de tipo onda viajera de la ecuación de onda de cuarto orden con un término lineal

$$u_{tt} + \Delta^2 u + u - u|u|^{p-1} = 0.$$

3.3.1. Observación: normas equivalentes

Antes de continuar realicemos algunas observaciones previas. Recordemos de (3-8) la siguiente sucesión de desigualdades que se verifica para cada $\varphi \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[(\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \\ &\geq \frac{\min\{\beta_i^2\}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \\ &= \frac{\min\{\beta_i^2\}}{2} \|\varphi\|^2, \end{aligned} \tag{3-33}$$

donde la norma $\|\cdot\|$ está definida en (3-4). Definamos el conjunto

$$\Pi_1 := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{x_i}(x))^2 \right] dx \geq \alpha \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in \mathbb{H} \right\}, \tag{3-34}$$

dado que $\min\{\beta_i^2\}/2 \in \Pi_1$, $\Pi_1 \neq \emptyset$, entonces para toda $\varphi \in \mathbb{H}$ y $\alpha \in \Pi_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \|\varphi\|^2 &\leq I(\varphi) \\ &\leq \frac{(\max\{\beta_i^2\} + |\mathcal{K}|^2)}{2} \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto Π_1 es acotado superiormente y como es no vacío existe su supremo, que definimos como

$$\alpha^* := \sup \Pi_1.$$

Se puede observar también que $\alpha^* \in \Pi_1$. En el mismo sentido podemos considerar el siguiente conjunto

$$\Pi_2 := \{\omega \in \mathbb{R}^+ \mid I(\varphi) \leq \omega \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}\}.$$

Nuevamente Π_2 es no vacío y acotado inferiormente, por lo que existe su ínfimo que denotaremos por

$$\omega^* := \inf \Pi_2.$$

Por tanto tenemos que

$$\alpha^* \|\varphi\|^2 \leq I(\varphi) \leq \omega^* \|\varphi\|^2 \quad (3-35)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{H}$.

Por otro lado dada la forma del funcional I sabemos que $I(\varphi), I(\psi) \geq 0$ para toda $\varphi, \psi \in \mathbb{H}$.

Definimos

$$\|\varphi\|_I := \sqrt{I(\varphi)}, \quad (3-36)$$

para cada $\varphi \in \mathbb{H}$.

Proposición 16 $\|\cdot\|_I$ es una norma en \mathbb{H} y además es equivalente con $\|\cdot\|$.

Demostración.

Para probar que es una norma debemos verificar las siguientes propiedades:

1. $\|\varphi\|_I \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}$ y $\|\varphi\|_I = 0$ si y sólo si $\varphi(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\|\lambda\varphi\|_I = |\lambda| \|\varphi\|_I \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|\varphi + \psi\|_I \leq \|\varphi\|_I + \|\psi\|_I \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{H}$.

Las dos primeras son inmediatas, la que necesita mayor desarrollo es la tercera. Para ello primero observemos lo siguiente;

$$\begin{aligned} I(\varphi + \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[(\mathcal{K} \cdot \nabla(\varphi(x) + \psi(x)))^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\partial_i(\varphi(x) + \psi(x)))^2 \right] dx \\ &= O_1 + O_2 \\ &= I(\varphi) + I(\psi) + O_3 + O_4. \end{aligned} \quad (3-37)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
O_1 &:= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [(\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 + (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))^2 + 2(\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))(\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))] dx. \\
O_2 &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_i \varphi(x))^2 + (\partial_i \psi(x))^2 + 2(\partial_i \psi(x))(\partial_i \varphi(x))] dx \right]. \\
O_3 &:= \sum_{i=1}^n \left[\beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x))(\partial_i \varphi(x)) dx \right]. \\
O_4 &:= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))(\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x)) dx.
\end{aligned}$$

Definamos ahora las cantidades:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \sum_{i=1}^n \left[\beta_i^2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right]. \\
A_2 &:= \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \\
A_3 &:= \left[\sum_{i=1}^n \left[|\beta_i| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[|\beta_i| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right]^2. \\
A_4 &:= \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))^2 dx \right]. \\
A_5 &:= 2 \left[\sum_{i=1}^n \left[|\beta_i| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[|\beta_i| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right] A_5^* \\
A_5^* &:= \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \\
A_6 &:= \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x))^2 dx \right] \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(x))^2 dx \right]. \\
A_7 &:= \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))^2 dx \right]. \\
A_8 &:= \sum_{i=1}^n \left[\beta_i^2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x))^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 dx \right] + A_8^* \right]. \\
A_8^* &= \beta_i^2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(x))^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x))^2 dx \right]
\end{aligned}$$

Por otro, al utilizar la desigualdad de Hölder y la desigualdad para la sumas de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned}
[O_3 + O_4]^2 &= \left[\sum_{i=1}^n \left[\beta_i^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \psi(x)) (\partial_i \varphi(x)) dx \right] + \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x)) (\mathcal{K} \cdot \nabla \psi(x)) dx \right]^2 \\
&\leq [A_1 + A_2]^2 \\
&= A_3 + A_4 + A_5 \\
&\leq A_6 + A_7 + A_8 \\
&= 4I(\psi)I(\varphi).
\end{aligned} \tag{3-38}$$

Luego utilizando la última desigualdad (3-38) en (3-37) se observa que

$$\begin{aligned}
I(\varphi + \psi) &\leq I(\psi) + I(\varphi) + 2\sqrt{I(\varphi)I(\psi)} \\
&= (\sqrt{I(\varphi)} + \sqrt{I(\psi)})^2,
\end{aligned}$$

lo que nos lleva finalmente a la siguiente desigualdad

$$\sqrt{I(\varphi + \psi)} \leq \sqrt{I(\varphi)} + \sqrt{I(\psi)}, \tag{3-39}$$

que se verifica para toda $\psi, \varphi \in \mathbb{H}$.

Por tanto $\|\cdot\|_I$ induce una norma en \mathbb{H} y más aún, debido a (3-35), $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_I$ son normas equivalentes. ■

3.3.2. Caso subcrítico

Cuando $p \in (2, p^*)$ existe un resultado, que se desprende del Lema 13, el cual establece que toda sucesión minimizante es relativamente compacta en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (módulo una sucesión de traslaciones en \mathbb{R}^n). Resulta que φ , el límite de la subsucesión, es además su límite débil en el espacio \mathbb{H} . Por tal motivo dicha función será la solución débil de tipo onda viajera de la ecuación original, por tanto es necesario verificar la convergencia fuerte en \mathbb{H} . Para el caso subcrítico, la convergencia fuerte, es una propiedad que verifican todas las sucesiones minimizantes, independientemente de los valores de β'_i s y c'_i s, que definen la transformación de coordenadas. Lo anterior se desarrolla en los siguientes resultados.

Lema 17 Sea $p \in (2, p^*)$. Si $\{\varphi_k\} \subset \mathbb{H}$ es una sucesión minimizante entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{k_j}\}, \{y_j\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in \mathbb{H}$ tal que

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_j) \rightarrow \varphi \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Por el Lema 13 existe $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{\rho_k(\cdot + y_k)\}$ es acotada y por el Corolario 14 $\{|\varphi_k(\cdot + y_k)|^p\}$ es compacta.

Por otro lado, como $\{\varphi_k\}$ es minimizante entonces es acotada en \mathbb{H} . Así que por la propiedad fundamental de la convergencia débil ² existe una subsucesión $\{\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\}$ y $\varphi \in \mathbb{H}$ tal que

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightharpoonup \varphi \quad \text{en } \mathbb{H} \tag{3-40}$$

y por lo mismo

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightharpoonup \varphi \quad \text{en } H^1(B_r(y)) \tag{3-41}$$

para todo $r > 0$ suficientemente grande y $\forall y \in \mathbb{R}^n$. En tanto, como $H^1(B_r(y))$ está compactamente contenido en $L^p(B_r(y))$, ya que $p \in (2, p^*)$, entonces $\{\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\}$ contiene una subsucesión -que denotaremos del mismo modo- tal que

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightarrow \varphi \quad \text{en } L^p(B_r(y)) \tag{3-42}$$

para todo $r > 0$ suficientemente grande y $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Pero $\{\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\}$ es acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Luego, como es un espacio de Banach, la subsucesión converge débilmente y utilizando la unicidad del límite débil podemos extender φ (definida inicialmente en vecindades de los puntos de \mathbb{R}^n) a todo el espacio. El siguiente paso es probar que

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightarrow \varphi \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^n). \tag{3-43}$$

²La llamada propiedad fundamental de la convergencia débil -en espacios de Hilbert- establece que toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert contiene una subsucesión débilmente convergente en el espacio. A diferencia de lo que ocurre en \mathbb{R}^n , en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita existen sucesiones acotadas que no contienen ninguna subsucesión convergente. En ese sentido se hace necesario la introducción de una noción de convergencia más débil que permita hacer una extensión del teorema de Bolzano-Weierstrass a espacios de dimensión infinita.

Para lo anterior, observemos que como $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que

$$\int_{[B_{r_0}(0)]^c} |\varphi(x)|^p dx < \varepsilon. \quad (3-44)$$

En tanto por la compacidad de $\{|\varphi_k(\cdot + y_k)|^p\}$, para la misma $\varepsilon > 0$ existe $r(\varepsilon) > 0$ y $j_1(\varepsilon)$ tal que para cada $k_j \geq j_1(\varepsilon)$

$$\int_{[B_{r(\varepsilon)}(0)]^c} |\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})|^p dx \leq \varepsilon. \quad (3-45)$$

Por otro lado podemos considerar $r(\varepsilon) > r_0$ y por (3-45) al considerar $j_2(\varepsilon) \geq j_1(\varepsilon)$ tal que para toda $j \geq j_2(\varepsilon)$ se verifica que

$$\|\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) - \varphi\|_{L^p(B_{r(\varepsilon)}(0))}^p < \varepsilon, \quad (3-46)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) - \varphi\|_{L^p(B_{r(\varepsilon)}(0))}^p + \int_{[B_{r(\varepsilon)}(0)]^c} |\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})|^p dx + \int_{[B_{r_0}(0)]^c} |\varphi(x)|^p dx \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (3-47)$$

Finalmente se verifica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

es decir

$$K(\varphi) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx = 1.$$

■

Teorema 18 Sean $p \in (2, p^*)$ y $\{\varphi_k\} \subset \mathbb{H}$ una sucesión minimizante. Si la subsucesión $\{\varphi_{k_j}\}$, $\{y_j\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in \mathbb{H}$ son las que se establecen en el Lema 17 entonces

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_j) \rightarrow \varphi \quad \text{en } \mathbb{H}.$$

La función φ es un mínimo y además es una solución débil de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$-\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \varphi_{x_i x_i} + \sum_{j,i=1}^n \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j \varphi_{x_j x_i} - \mu \varphi |\varphi|^{p-2} = 0 \quad (3-48)$$

para algún multiplicador $\mu \neq 0$. Donde $c_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{K}_i = \beta_i c_i$ y

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} > 0.$$

Demostración. Por el Lema 17 sabemos que

$$\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightarrow \varphi \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}^n) \quad (3-49)$$

y $K(\varphi) = 1$ (véase Definición 11). Además debido a la convergencia débil de $\{\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\}$ a φ en \mathbb{H} y como $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_I$ son normas equivalentes en \mathbb{H} (véase (3-35)), entonces se obtiene

$$\begin{aligned} I(\varphi) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I(\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})) \\ &\leq M_1. \end{aligned} \quad (3-50)$$

Y dado que $K(\varphi) = 1$ y $M_1 \leq I(\varphi)$ se concluye directamente de la Definición 11 que $M_1 = I(\varphi)$. Por tanto φ alcanza el mínimo de $I(\varphi)$ con la restricción $K(\varphi) = 1$. Además por la misma sucesión de desigualdades (3-35) se concluye que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\|^2 = \|\varphi\|^2$, luego entonces $\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightarrow \varphi$ en \mathbb{H} .³ ■

3.3.3. Caso crítico

Como se podría esperar en el caso del exponente crítico p^* de Sobolev, los resultados son diferentes, por ejemplo el teorema de existencia para el caso subcrítico no se puede extender al caso crítico siguiendo la misma estructura de la demostración. Lo anterior debido a que la

³Recordemos que algunas de las propiedades más importantes de la convergencia débil en un espacio de Hilbert D son:

1. Si $\{u_k\}$ converge débilmente a u en D entonces $\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|$.
2. Si $\{u_k\}$ converge débilmente a u en D y $\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|$ entonces $u_k \rightarrow u$ en D .

inclusión $H^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ no es un operador compacto cuando Ω es un dominio exterior en \mathbb{R}^n . Desde la perspectiva del principio de concentración-compacidad el caso del desvanecimiento es posible ya que jugando con algunos parámetros (en la llamada función de concentración) se pueden construir sucesiones minimizantes donde ocurre el desvanecimiento. Revisemos esto con un poco más de detalle.

Para $\varepsilon > 0$ definimos la ε -dilatación $u_\varepsilon : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de una función $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ como

$$u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{\frac{2-n}{n}} u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

El comportamiento de una ε -dilatación para $\varepsilon \rightarrow 0$ se ilustra en la figura 3-6.

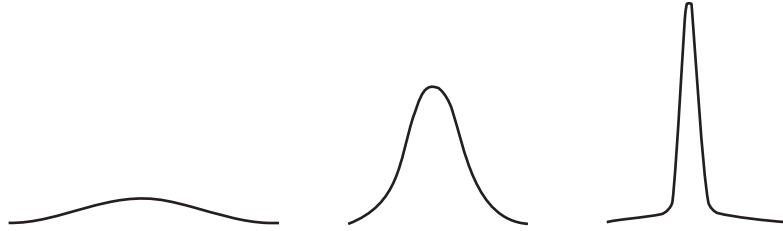


Figura 3-6: ε -dilatación de una función para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Como se observó antes, es fácil verificar que si $u \in \mathbb{H}$ entonces $u_\varepsilon \in \mathbb{H}$, además

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon(x+y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x+y)|^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*} dx.$$

para toda $y \in \mathbb{R}^n$ y toda $\varepsilon > 0$ (véase Apéndice I.1). Por lo general estas identidades se conocen como invariancia bajo dilataciones y bajo traslaciones. Ellas son las responsables de que se puedan construir sucesiones minimizantes donde ocurra el desvanecimiento, en otras palabras que no se satisfaga el teorema de Rellich-Kondrachov para el exponente crítico. Veamos esto en el siguiente lema.

Lema 19 *Existen sucesiones minimizantes en \mathbb{H} que no contienen ninguna subsucesión convergente en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ para toda $n \geq 3$.*

Demostración. Sea $\{\varphi_k\} \subset \mathbb{H}$ una sucesión minimizante y consideremos la nueva sucesión $\{\psi_k\}$ dada por la $\frac{1}{k}$ -dilatación;

$$\psi_k(x) := k^{\frac{n-2}{2}} \varphi_k(kx) \quad \forall k \geq 1.$$

Se puede demostrar que $I(\psi_k) = I(\varphi_k)$ y $K(\psi_k) = K(\varphi_k)$ para toda $k \geq 1$, de forma que $\{\psi_k\}$ también es una sucesión minimizante. En particular dicha sucesión es acotada en \mathbb{H} así que si esta contuviera una subsucesión convergente -que denotaremos igual- a algún φ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$0 \neq p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} = \|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*}. \quad (3-51)$$

Por tanto una nueva subsucesión convergería puntualmente a φ casi donde quiera en \mathbb{R}^n (véase [26]). Por otro lado, podemos observar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x) = 0 \quad \forall x \neq 0,$$

entonces $\varphi(x) = 0$ casi dondequiera en \mathbb{R}^n , lo que es una contradicción con (3-51). Así podemos concluir que $\{\psi_k\}$ es una sucesión minimizante que no contiene ninguna subsucesión convergente en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. ■

Para continuar, mencionemos que además de las invariancias bajo traslaciones y dilataciones existen otras identidades importantes como las siguientes:

1. Si $y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ al definir $T(x) = (x-y)/r$ y utilizando el cambio de variable $z = (x-y)/r$ resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla(r^{\frac{2-n}{2}} \varphi(\frac{x-y}{r})))^2 dx &= r^{2-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot (\nabla \varphi(\frac{x-y}{r}) DT(x)))^2 dx \\ &= r^{2-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot (\frac{1}{r} \nabla(\varphi(\frac{x-y}{r}))))^2 dx \\ &= r^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} r^n (\mathcal{K} \cdot (\nabla(\varphi(z))))^2 dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot (\nabla(\varphi(z))))^2 dz. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(\frac{x-y}{r}))^2 dx &= r^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(\frac{x-y}{r}))^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi(z))^2 dz. \end{aligned}$$

Las observaciones anteriores, sin embargo, no niegan la posibilidad de encontrar (por otras vías) sucesiones minimizantes, que presenten propiedades extras, que contengan subsucesiones fuertemente convergentes en \mathbb{H} . En un primer resultado, que mostraremos en seguida, se construyen sucesiones donde no ocurre el desvanecimiento gracias a una traslación y dilatación adecuadas. El resultado utiliza el segundo lema de concentración-compacidad que enunciamos a continuación.

Teorema 20 (Segundo Lema de Concentración-Compacidad de Lions) *Supongamos que $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ -con la norma usual- y $\mu_m = |\nabla u_m|^2 dx \rightharpoonup \mu$, $\nu = |u_m|^{p^*} dx \rightharpoonup \nu$ débilmente en el sentido de medida, con μ y ν medidas acotadas y no negativas en \mathbb{R}^n , entonces se tiene*

1. *Existe un conjunto J al menos numerable, una familia de puntos distintos en \mathbb{R}^n $\{x^{(j)}\}_{j \in J}$ y una familia de números positivos $\{\nu^{(j)}\}_{j \in J}$ tal que*

$$\nu = |u|^{p^*} dx + \sum_{j \in J} \nu^{(j)} \delta_{x^{(j)}},$$

donde δ_x es la función de Dirac de masa uno concentrada en x .

2. *Además tenemos*

$$\mu \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu^{(j)} \delta_{x^{(j)}},$$

para alguna familia $\{\mu^{(j)} > 0\}_{j \in J}$ que satisface

$$S(\nu^{(j)})^{\frac{2}{p^*}} \leq \mu^{(j)}$$

para cada $j \in J$ y S es la constante óptima de Sobolev. En particular

$$\sum_{j \in J} (\nu^{(j)})^{\frac{2}{p^*}} < \infty.$$

Después de estas observaciones podemos enunciar el lema siguiente.

Lema 21 *Supongamos que $p = p^*$. Si $\{\varphi_k\}$ es una sucesión minimizante en $\mathbb{H} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|\varphi_k\|^2 \leq S(p^*)^{\frac{2}{p^*}} \quad (3-52)$$

para toda $k \geq 1$ entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{k_j}\}$, que bajo una traslación y una dilatación, es relativamente compacta en $L^{p^}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Consideremos $\{R_k\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales positivos y $\{z_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión de puntos. Definimos

$$u_k(x) := R_k^{\frac{2-n}{2}} \varphi_k\left(\frac{x - z_k}{R_k}\right). \quad (3-53)$$

De la invariancia bajo traslaciones y dilataciones se tiene

$$\|u_k\| = \|\varphi_k\|$$

y

$$\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}$$

para cada $k \geq 1$.

Así, por las identidades anteriores y las observaciones (1) y (2) de la presente sección resulta que $\{u_k\}$ es nuevamente una sucesión minimizante. De esta forma, por el Corolario 14 dicha sucesión es compacta módulo una subsucesión y una sucesión de traslaciones en \mathbb{R}^n , es decir existe $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $r = r(\varepsilon)$ de forma que para todo $k \geq 1$

$$\int_{B_r(y_k)} |u_k(x)|^{p^*} dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^{p^*} dx - \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad dicha subsucesión la denotaremos de la misma forma. Podemos

suponer que existe $u \in \mathbb{H}$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en L^{p^*} y en \mathbb{H} .

Consideremos la familia de medidas

$$\mu_k := |\nabla u_k(x)|^2 dx$$

y

$$\nu_k := |u_k(x)|^{p^*} dx.$$

Sabemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^{p^*} dx = p^*,$$

por ser una sucesión minimizante, así que bajo una renormalización adecuada y sin pérdida de generalidad podemos suponer

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^{p^*} dx = p^*.$$

Entonces por la compacidad tendremos que

$$\int_{B_r(y_k)} d\nu_k \geq p^* - \varepsilon.$$

Siempre se pueden escoger $\{z_k\}$ y $\{R_k\}$ sucesiones tales que

$$\int_{B_1(0)} |u_k(x)|^{p^*} dx = \frac{p^*}{2}. \quad (3-54)$$

Así que si consideramos $\varepsilon \leq p^*/2$ la condición anterior (de normalización) implica que

$$B_r(y_k) \cap B_1(0) \neq \emptyset.$$

Lo anterior debido a que si $B_r(y_k) \cap B_1(0) = \emptyset$ entonces por la condición de normalización

(3-54) se tendría que

$$\begin{aligned}
p^* &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^{p^*} dx \\
&= \int_{B_r(y_k)} |u_k(x)|^{p^*} dx + \int_{B_1(0)} |u_k(x)|^{p^*} dx + \int_{(B_r(y_k) \cup B_1(0))^c} |u_k(x)|^{p^*} dx \\
&> \frac{p^*}{2} + \frac{p^*}{2} \\
&= p^*,
\end{aligned}$$

debido a que $\varepsilon < p^*/2$ y por el lema de concentración se obtiene una contradicción. Por dicha razón podemos suponer que $y_k = 0$ y la compacidad en concentración-compacidad se sigue verificando, reemplazando r por $2r + 1$ si fuese necesario. En tanto como $\nu_k \rightarrow \nu$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\nu = p^*.$$

Enseguida por el segundo lema de concentración-compacidad suponemos que

1. $\mu_k \rightarrow \mu \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu^{(j)} \delta_{x^{(j)}}$ y
2. $\nu_k \rightarrow \nu = |u|^{p^*} dx + \sum_{j \in J} \nu^{(j)} \delta_{x^{(j)}}$,

para ciertos puntos $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j \in J$ y números positivos $\mu^{(j)}, \nu^{(j)}$ tal que

$$S(\nu^{(j)})^{\frac{2}{p^*}} \leq \mu^{(j)}$$

para toda $j \in J$. Luego por la desigualdad de Sobolev se tiene

$$\begin{aligned}
S(p^*)^{\frac{2}{p^*}} &\geq \|u_k\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k \\
&\geq \|u\|^2 + \sum_{j \in J} \mu^{(j)} \\
&\geq S \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^2 + S \sum_{j \in J} (\nu^{(j)})^{\frac{2}{p^*}}.
\end{aligned}$$

En tanto por la concavidad estricta del mapeo $\lambda \mapsto \lambda^{\frac{2}{p^*}}$ el último término es

$$\begin{aligned} &\geq S(\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu^{(j)})^{\frac{2}{p^*}} \\ &= S(p^*)^{\frac{2}{p^*}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{j \in J} (\nu^{(j)})^{\frac{2}{p^*}} = (p^*)^{\frac{2}{p^*}}. \quad (3-55)$$

Regresando a la condición de normalización impuesta en (3-54), se puede observar que

$$\nu^{(j)} \leq \frac{2}{p^*}$$

para toda $j \in J$. Entonces estos últimos términos se desvanecen, lo que nos permite concluir que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} = p^*,$$

lo que finalmente implica que $\{u_k\}$ converge fuertemente a u en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. ■

El teorema siguiente es el resultado de existencia de soluciones para el caso crítico. Dicho teorema y el lema anterior pueden resumirse en uno solo, sin embargo, se han separado para hacer incapié en que las sucesiones minimizantes presentan la propiedad de convergencia fuerte en el espacio $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ (módulo traslaciones y dilataciones). En el caso crítico la convergencia a una solución de la ecuación en el espacio \mathbb{H} se logra al incluir la condición (3-52) para las sucesiones.

Teorema 22 *Supongamos que $p = p^*$ es el exponente crítico de Sobolev y $\{\varphi_k\}$ es una sucesión minimizante en $\mathbb{H} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ que se satisface la condición (3-52). Si $\{\varphi_{k_j}\}$ y φ , son la subsucesión y la función que se establecen en el Lema 21, entonces*

$$\varphi_{k_j} \rightarrow \varphi \quad (\text{módulo dilataciones y traslaciones})$$

en \mathbb{H} . La función φ es un mínimo y además es una solución débil de la ecuación de Euler-Lagrange

$$-\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \varphi_{x_i x_i} + \sum_{j,i=1}^n \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j \varphi_{x_j x_i} - \mu \varphi |\varphi|^{p^*-2} = 0,$$

para algún multiplicador $\mu \neq 0$. Donde $c_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{K}_i = \beta_i c_i$ y

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} > 0.$$

Demostración. Por los Lemas 13 y 21 sabemos que existen $\varphi \in \mathbb{H}, \{z_k\} \subset \mathbb{R}^n, \{R_k\} \subset \mathbb{R}$ y $\{\varphi_k\}$ una subsucesión -que denotaremos de la misma forma- tales que

$$u_k(x) := R_k^{\frac{2-n}{2}} \varphi_k\left(\frac{x - z_k}{R_k}\right) \quad (3-56)$$

define una sucesión que converge fuertemente a φ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. En el mismo sentido debido a las observaciones 1 y 2, sabemos que si $\{\varphi_k\}$ es una sucesión minimizante entonces también lo es $\{u_k\}$. Por tanto, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}$$

se concluye $K(\varphi) = 1$. Además debido a la convergencia débil de $\{\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})\}$ a φ en \mathbb{H} y por la equivalencia de los normas, se verifica

$$\begin{aligned} I(\varphi) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I(\varphi_{k_j}(\cdot + y_{k_j})) \\ &\leq M_1. \end{aligned} \quad (3-57)$$

Y dado que $K(\varphi) = 1$ y $M_1 \leq I(\varphi)$ se concluye que $M_1 = I(\varphi)$. Por tanto φ alcanza el mínimo de $I(\varphi)$ con la restricción $K(\varphi) = 1$. Además por la misma sucesión de desigualdades (3-35) se concluye que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|^2 = \|\varphi\|^2$, luego entonces $\varphi_{k_j} \rightarrow \varphi$ en \mathbb{H} , módulo dilataciones y traslaciones. ■

3.3.4. Observaciones de existencia.

En los apartados precedentes hemos presentado resultados de existencia para el caso crítico y subcrítico. Para el caso subcrítico hemos resuelto el problema de existencia en su totalidad,

ya que demostramos que cualquier sucesión minimizante es precompacta módulo una sucesión de traslaciones, esto independientemente de las constantes que definen la transformación y por tanto los funcionales que intervienen en el problema variacional. Sin embargo el caso crítico no está completo debido a que no hemos demostrado la existencia de sucesiones minimizantes que satisfagan la condición (3-52). De tal forma que es necesario exhibir al menos un ejemplo con la intención de no trabajar sobre un conjunto vacío.

Aunque hasta el momento no se ha podido determinar la convergencia en el caso crítico sin pedir la condición (3-52), existe un caso definido por las constantes dadas en (1-10) donde se puede mostrar una sucesión minimizante que satisfaga (3-52) a partir de una solución conocida. En ese sentido si se considera la transformación dada por (1-10) la ecuación transformada es

$$\Delta\varphi = -\varphi|\varphi|^{p^*-2}, \quad (3-58)$$

cuya solución es la conocida función (2-8) de Ni, Gidas y Nirenberg, es decir

$$\varphi^*(x) = A \left(1 + \frac{|x|^2}{\lambda}\right)^{\frac{2-n}{2}},$$

para A una constante adecuada.

Si definimos

$$\tau := \left[\frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi^*(x)|^{p^*} dx \right]^{\frac{p^*-2}{p^*}}, \quad (3-59)$$

entonces la función

$$\tilde{\varphi}(x) := \tau^{\frac{1}{2-p^*}} \varphi^*(x) \quad (3-60)$$

es solución de la ecuación

$$\Delta\varphi = -\tau\varphi|\varphi|^{p^*-2}. \quad (3-61)$$

Por la forma propuesta para $\tilde{\varphi}$ se desprende rápidamente que $K(\tilde{\varphi}) = 1$ y $I(\tilde{\varphi}) = M_1$. Además las funciones que tienen la forma de (2-8), son las que alcanzan la constante óptima de Sobolev, es decir satisfacen la condición (3-52) (véase [51]). En ese sentido podemos pensar en la siguiente sucesión de funciones dada por

$$\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}(x) \text{ para toda } k \geq 1, \quad (3-62)$$

que por lo antes expuesto es una sucesión minimizante que satisface las hipótesis del Teorema 22.

Con la observación anterior se verifica el hecho de que el conjunto de sucesiones minimizantes que satisfacen (3-52) en el caso del exponente crítico de Sobolev es no vacío. Sin embargo esto sólo es válido para valores particulares de las c'_i s y β'_i s (véase las constantes que definen el caso estacionario en (2-7)). Un trabajo posterior es tratar de generalizar el resultado o encontrar nuevas condiciones para otros valores de dichas constantes donde se verifique la convergencia fuerte.

Capítulo 4

Estabilidad de las soluciones

Un campo importante de estudio de las ecuaciones de evolución ha sido el de estabilidad. En general, debido a su relevancia en los diferentes modelos físicos y biológicos, se ha estudiado la estabilidad de las soluciones de equilibrio o estacionarias. En el área de las ecuaciones diferenciales ordinarias una solución de equilibrio es estable si soluciones que inician en vecindades, suficientemente pequeñas, del punto de equilibrio asociado a la solución de equilibrio se mantienen cerca del estado de equilibrio para todo instante posterior. En cambio si la solución se aleja del estado de equilibrio se dice que la solución de equilibrio es inestable.

En ecuaciones diferenciales parciales, el método clásico para determinar si un estado de equilibrio $u_e(x)$ es estable o no, es el siguiente: Consideremos valores próximos al equilibrio, u_e ,

$$u(x, 0) = u_e(x) + g(x),$$

donde g es pequeño. Supongamos

$$u(x, t) = u_e(x) + v(x, t)$$

siendo $v(x, t)$ el desplazamiento del equilibrio. Si $v(x, t) \rightarrow 0$ se sigue que $u(x, t) \rightarrow u_e(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Decimos entonces que el estado de equilibrio es estable (asintóticamente). Si $v(x, t)$ es acotado cuando $t \rightarrow \infty$ y suponemos que u está inicialmente próximo a u_e , entonces decimos que la solución de equilibrio es estable. En cambio, si existe algún dato inicial (próximo a u_e)

para el cual $u(x, t) - u_e(x)$ es grande para $t \rightarrow \infty$, entonces $u_e(x)$ es inestable.

En general, el desplazamiento del equilibrio satisface una ecuación en derivadas parciales lineal (con un número infinito de grados de libertad). En el caso de la ecuación de onda semilineal el estudio se complica debido, por supuesto, a la no linealidad.

El objetivo de esta sección es presentar el resultado que ha sido probado para un tipo de estabilidad de las ondas viajeras, soluciones de la ecuación (3-2). En [4] se prueba la estabilidad, para ecuaciones no-lineales dispersivas, de soluciones de tipo onda viajera, por ejemplo aquellas de la forma

$$u_t + f(u)_x - Mu_x = 0, \quad (4-1)$$

con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^\infty(\mathbb{R})$ superlineal y M un operador de dispersión. La prueba se logra al verificar que la solución de onda viajera es un minimizador local restringido de un funcional hamiltoniano asociado con la ecuación (4-1). Lo anterior se hace fundamentalmente mediante la obtención de información básica sobre el espectro de un operador asociado. Este operador se obtiene al linealizar la ecuación de onda viajera. En la práctica el análisis es particularmente difícil de realizar. Para evitar estas dificultades se puede recurrir a un método alternativo para probar estabilidad de ondas solitarias, que no se basa en un análisis local. Dicho método fue desarrollado por Cazanave y P. Lions (véase [13]) utilizando el principio de concentración-compacidad de Lions. Mediante esta técnica, en [1], John P. Albert prueba que las ondas solitarias, soluciones de la ecuación KdV, son estables en el sentido de que una ligera perturbación de una onda solitaria continuará pareciéndose a una onda solitaria para todo tiempo, en lugar de evolucionar a otra forma de onda. Resulta que cuando este método funciona se demuestra no sólo la existencia de minimizadores y la compacidad de las sucesiones minimizantes, sino también que el conjunto de minimizadores es un conjunto estable para el problema de valores iniciales asociado; en el sentido de que la solución que inicia cerca del conjunto permanecerá cerca para todo tiempo.

Como ya mencionamos una ventaja del método de concentración-compacidad para probar la estabilidad de ondas solitarias es que requiere un análisis menos detallado que el de métodos locales como los de Benjamin, Weinstein y Grillakis, sin embargo, produce un resultado débil de estabilidad; en tanto que sólo se demuestra la estabilidad de un conjunto de soluciones minimizadoras y no proporciona información de la estructura de este conjunto y tampoco

distingue entre sus diferentes miembros.

Un problema, que es un ejemplo donde se aplica el método de Cazanave y Lions, es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ E(\psi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)^2 - \frac{2}{(p+1)(p+2)} (\psi(x))^p dx, \\ \text{sujeto a la restricción} \\ F(\psi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(x))^2 dx = \lambda > 0. \end{array} \right. \quad (4-2)$$

Mediante el principio de concentración-compacidad se puede demostrar que este problema tiene una solución para $p < 4$ que satisface la ecuación

$$-\phi'' + c\phi - \frac{1}{p+1}(\phi)^{p+1} = 0$$

y por lo tanto es una solución de tipo onda viajera de la ecuación Generalizada de Korteweg-de Vries (GKdV)

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0,$$

donde $p \in \mathbb{N}$. La solución es para una velocidad de onda $c > 0$, que además es un multiplicador de Lagrange asociado con el problema (4-2). Después de que se verifica que las sucesiones minimizantes asociadas al problema (4-2) son relativamente compactas módulo traslaciones, se utiliza la propiedad de que E y F son cantidades que se conservan de la ecuación GKdV para probar que el conjunto de minimizadores globales del problema (4-2) es un conjunto estable para el flujo estable asociado con la ecuación GKdV (véase [4]).

La estabilidad de ondas viajeras, soluciones de ecuaciones de segundo orden, se ha estudiado en muchos trabajos, incluyendo [28], [47], [48] para las ecuaciones de Klein-Gordon y [13], [53], [54] para la ecuación de Schrödinger. Además de los resultados de estabilidad de Levandosky para ecuaciones de cuarto orden existen otros para ecuaciones de orden superior, tales como la ecuación KdV (véase [9] y [49]) y la de Boussinesq generalizada (véase [35] y [40]). Otros trabajos importantes son los de Weinstein [52], Albert, Bona y Saut [3], Bouard y Saut [10], Kichenassamy [28], Lopes [36], Albert y Angulo [2]. Además Levandosky en [30] aplica el mismo método para probar estabilidad de soluciones tipo ondas solitarias cuando los funcionales involucrados en el

problema variacional no son cantidades conservadas. Sin embargo, no hay resultados para la ecuación (3-2) utilizando el método de concentración-compacidad, lo cual es una aportación de la presente investigación.

4.1. Existencia local (en el tiempo)

Antes de continuar realizaremos una breve exposición sobre la existencia y unicidad para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4-3)$$

Aunque existen múltiples enfoques mencionaremos uno que reduce el problema de existencia y unicidad a un problema de punto fijo. El material respectivo a esta sección se puede revisar con mayor detalle en [13], [57] y [47].

La ecuación del problema (4-3) puede ser escrita en forma de un sistema

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = \Delta u - f(u), \end{cases} \quad (4-4)$$

que, a su vez, puede ser escrito en términos de un sistema semilineal abstracto

$$U_t = AU + S(U), \quad (4-5)$$

donde la nueva incógnita del sistema es el par $U = (u, v)^T = (u, u_t)^T$. En tanto A es el operador lineal

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix},$$

siendo I el operador identidad, Δ el operador de Laplace y

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Una definición rigurosa del operador A exige no sólo que indiquemos la forma en que actúa sino también su dominio. Éste resulta ser el espacio adecuado para resolver la ecuación de onda. De forma natural se considera el espacio de Hilbert

$$\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \times L^2(\mathbb{R}^n).$$

La elección de este espacio no es arbitraria, sino surge de considerar el funcional de energía

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u_t)^2 + |\nabla u|^2}{2} + F(u) \, dx,$$

que es una integral de movimiento. Efectivamente la conservación de la energía sugiere buscar soluciones tales que

1. $u \in \mathbb{H}$, ya que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0,$$

que es una condición de contorno.

2. $u_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Cabe mencionar que el espacio de energía $\tilde{\mathbb{H}}$ es un espacio de Hilbert dotado de la norma

$$\| (f, g) \|_{\tilde{\mathbb{H}}} := (\| f \|^2 + \| g \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4-6)$$

Por otro lado, el problema de condiciones iniciales se reduce a la ecuación integral

$$U(t) = e^{A(t)}U_0 + \int_0^t e^{A(t-w)}S(U(w)) \, dw, \quad (4-7)$$

que, a su vez, es equivalente al problema de punto fijo

$$U(t) = [\Phi(U)](t) \quad (4-8)$$

para la función

$$[\Phi(U)](t) = e^{A(t)}U_0 + \int_0^t e^{A(t-w)}S(U(w)) \, dw. \quad (4-9)$$

En ese sentido se recurre al teorema de punto fijo de Banach. Consideremos las siguientes hipótesis:

1. Sea $R = \|U_0\|_{\tilde{\mathbb{H}}}$ y B_{2R} la bola de radio $2R$ en $\tilde{\mathbb{H}}$.
2. Supongamos que la no linealidad S mapea $\tilde{\mathbb{H}}$ en $\tilde{\mathbb{H}}$ de modo que se trata de una función lipschitziana sobre conjuntos acotados en $\tilde{\mathbb{H}}$, es decir

Definición 23 S es una función de tipo Lipschitz sobre conjuntos acotados si para cada $k > 0$ existe $L_k > 0$ tal que

$$\|S(U_1) - S(U_2)\|_{\tilde{\mathbb{H}}} < L_k \|U_1 - U_2\|_{\tilde{\mathbb{H}}}$$

para cada $U_1, U_2 \in \tilde{\mathbb{H}}$ con

$$\|U_1\|_{\tilde{\mathbb{H}}}, \|U_2\|_{\tilde{\mathbb{H}}} \leq k.$$

Bajo estas hipótesis es fácil comprobar que si $\tau > 0$ es suficientemente pequeño, Φ es una contracción estricta en $C([0, \tau]; B_{2R})$. Esto permite deducir la existencia y unicidad de una solución local (en tiempo) de (4-3) en $C([0, \tau]; B_{2R})$.

En el caso específico de la no-linealidad que hemos considerado y bajo las condiciones del exponente p , resulta que para cada par de datos iniciales

$$(u_0, u_1) \in \tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \times L^2(\mathbb{R}^n)$$

existe $\tau > 0$ y una única solución

$$u \in C([0, \tau]; \tilde{\mathbb{H}}) \cap C^1([0, \tau]; L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Por último una vez que la solución local en el tiempo ha sido obtenida, mediante los mismos argumentos de prolongación que se utilizan en el marco de las ecuaciones diferenciales ordinarias, esta solución local puede ser prolongada al máximo intervalo de existencia $V(0) = [0, T_{max})$ de modo que la solución única de (4-3) se obtiene finalmente en el conjunto

$$u \in C(V(0); \tilde{\mathbb{H}}) \cap C^1(V(0); L^2(\mathbb{R}^n)).$$

4.2. Estabilidad

Primero establecemos el Teorema 24 similar al de Albert en [1]. Dicho Teorema otorga prácticamente la demostración final del resultado de estabilidad de nuestra construcción, el cual se enuncia a continuación en el Teorema 25. Debemos mencionar que los resultados siguientes se establecen suponiendo $2 < p < p^*$, es decir el caso subcrítico. Recordemos que G denota al conjunto de minimizadores (véase definición 11) y por el Teorema 18 es un conjunto no vacío en el caso subcrítico.

Teorema 24 *Sea G no vacío. Si $\{\varphi_k\} \subset \mathbb{H}$ es una sucesión minimizante entonces*

1. *Existen $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in \mathbb{H}$ tal que $\{\varphi_k(\cdot + y_k)\}$ tiene al menos una subsucesión fuertemente convergente a φ en \mathbb{H} .*

2.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi \in G, y \in \mathbb{R}^n} \|\varphi_k(\cdot + y) - \varphi\| \right] = 0.$$

3.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi \in G} \|\varphi_k - \varphi\| \right] = 0.$$

Demostración. El inciso 1) es inmediato del Teorema 18. Ahora, para demostrar 2) procederemos por contradicción. En ese sentido supongamos que existe una subsucesión $\{\varphi_{k_j}\}$ para la cual existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{\varphi \in G, y \in \mathbb{R}^n} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y) - \varphi\| \geq \varepsilon$$

para cada $j \geq 1$. Como dicha subsucesión es en sí misma una sucesión minimizante entonces por 1) existe $\{y_j\}$ tal que $\{\varphi_{k_j}(\cdot + y_j)\}$ tiene una subsucesión - que denotaremos del mismo modo- fuertemente convergente a $\varphi^* \in G$, verificándose

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \inf_{\varphi \in G, y \in \mathbb{R}^n} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y) - \varphi\| \\ &\leq \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_j) - \varphi^*\| \end{aligned}$$

para cada $j \geq 1$. Por tanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_j) - \varphi^*\| > 0,$$

pero por otro lado, debido a la convergencia fuerte, se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{k_j}(\cdot + y_j) - \varphi^*\| = 0,$$

lo que es una contradicción, así que se obtiene 2). Finalmente para verificar 3) basta recordar que K e I son funcionales invariantes bajo traslaciones espaciales, es decir $K(\varphi(\cdot + y)) = K(\varphi)$ e $I(\varphi(\cdot + y)) = I(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathbb{H}$ y toda $y \in \mathbb{R}^n$. En ese sentido observemos que si $\varphi^* \in G$ entonces $M_1 = I(\varphi^*) = I(\varphi^*(\cdot + y))$ y $1 = K(\varphi^*) = K(\varphi^*(\cdot + y))$, de donde $\varphi^*(\cdot + y) \in G$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$. Por tanto se verifica

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi \in G, y \in \mathbb{R}^n} \|\varphi_k(\cdot + y) - \varphi\| \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi(\cdot + y) \in G, y \in \mathbb{R}^n} \|\varphi_k(\cdot + y) - \varphi\| \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi(\cdot + y) \in G, y \in \mathbb{R}^n} \|\varphi_k - \varphi\| \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi \in G} \|\varphi_k - \varphi\| \right]. \end{aligned}$$

■

Teorema 25 Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\inf_{\varphi \in G} \|v_0 - \varphi\| < \delta,$$

entonces la solución $v(x, t) = v^*(\xi(x, t))$ de (4-3) con $v_0 = v(x, 0) = v^*(\xi(x, 0))$ satisface

$$\inf_{\varphi \in G} \|v(\cdot, t) - \varphi\| < \varepsilon$$

para todo $t \in V(0) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Para la demostración supongamos que el teorema es falso, así que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$

$$\inf_{\varphi \in G} \|v_0 - \varphi\| < \delta,$$

pero

$$\inf_{\varphi \in G} \|v(\cdot, t^*) - \varphi\| \geq \varepsilon$$

para algún $t^* \in V(0) \subset \mathbb{R}$. Lo anterior es válido para un conjunto de problemas de condiciones iniciales adecuado que nos permite considerar una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}$ en \mathbb{H} . La sucesión anterior es tal que $v_k(x, t) = v^*(\xi(x, t))$ es solución de (4-3) con $v_k(x, 0) = \varphi_k(\xi(x, 0))$ para cada $k \geq 1$. Que a su vez define una sucesión $\{t_k\} \subset V(0) \subset \mathbb{R}$ tal que para algún $\varepsilon > 0$ se satisface

$$\inf_{\varphi \in G} \|\varphi_k - \varphi\| < \frac{1}{k} \quad (4-10)$$

y

$$\inf_{\varphi \in G} \|v_k(\cdot, t_k) - \varphi\| \geq \varepsilon \quad (4-11)$$

para toda $k \geq 1$.

Observemos ahora que si $\{\varphi_k\}$ no convergiera a $\varphi_0 \in G$ entonces existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq m$

$$\|\varphi_k - \varphi\| \geq \frac{1}{k}$$

para toda $\varphi \in G$, por tanto

$$\inf_{\varphi \in G} \|\varphi_k - \varphi\| \geq \frac{1}{k}$$

lo cual es una contradicción con (4-10). Luego podemos afirmar que existe $\varphi_0 \in G$ tal que $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ en \mathbb{H} , con $I(\varphi_0) = M_1$ y $K(\varphi_0) = 1$.

Demostremos ahora que $\{\varphi_k\}$ es minimizante. Notemos primero que debido a la convergencia fuerte $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi_0\| = 0$ y

$$\|\varphi_k - \varphi_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{R_n(z)} |\varphi_k(x) - \varphi_0(x)|^p dx$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left[\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{R_n(z)} |\nabla \varphi_k(x) - \nabla \varphi_0(x)|^2 dx \right] \\ &= C \|\varphi_k - \varphi_0\|_H^2 \end{aligned}$$

donde $R_n(z)$ el rectángulo n -dimensional con centro en $z \in \mathbb{R}^n$ y cuya diagonal es $d_n = \sqrt{n}$. Se tiene $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = 0$, es decir $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \|\varphi_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$ lo que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} K(\varphi_k) = 1$.

Por otro lado, debido a que $\|\cdot\|_I$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes, se verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_I^2 = \|\varphi_0\|_I^2 = M_1,$$

es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k) = M_1.$$

Por tanto $\{\varphi_k\}$ es una sucesión minimizante.

Por otro lado siempre se puede escoger una sucesión $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ y $|a_k| \geq 1$ para cada $k \geq 1$, de tal forma que se satisface $\lim_{k \rightarrow \infty} K(a_k \varphi_k) = 1$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} I(a_k \varphi_k) = M_1$, es decir, $\{a_k \varphi_k\}$ es una sucesión minimizante.

Consideremos ahora la sucesión $\{a_k v_k(\cdot, t_k)\}$, que resulta minimizante. Lo anterior ya que como los funcionales K e I no dependen del tiempo t entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} K(a_k v_k(\cdot, t_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} K(\varphi_k) = 1$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} I(a_k v_k(\cdot, t_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k) = M_1$. Habiendo observado lo anterior por el Teorema 24 se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\inf_{\varphi \in G} \|a_k v_k(\cdot, t_k) - \varphi\| \right] = 0,$$

es decir existe una sucesión $\{\widehat{\varphi}_k\} \subset G$ tal que para k suficientemente grande se satisface

$$\|a_k v_k(\cdot, t_k) - \widehat{\varphi}_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|v_k(\cdot, t_k) - \widehat{\varphi}_k\| \\ &\leq \|v_k(\cdot, t_k) - a_k v_k(\cdot, t_k)\|_H + \|a_k v_k(\cdot, t_k) - \widehat{\varphi}_k\| \end{aligned}$$

$$\leq |1 - a_k| \|v_k(\cdot, t_k)\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda $k \geq 1$ suficientemente grande. Así que tomado $k \rightarrow \infty$ se tiene $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$, lo que es una contradicción. ■

Una desventaja del Teorema 25 es que sólo asegura la estabilidad con respecto a un conjunto indeterminado de minimizadores. Si por ejemplo el conjunto G contiene dos funciones, φ_1 y φ_2 , que no son traslaciones una de la otra, entonces no todas las sucesiones minimizantes convergerían módulo traslaciones a la misma función; ya que una sucesión minimizante podría contener dos subsucesiones que tiendan a φ_1 y φ_2 respectivamente. En ese sentido se puede intentar hacer una descripción detallada del conjunto de minimizadores. Esto lo hace Albert para la ecuación KdV

$$u_t + uu_x + u_xxx = 0$$

al caracterizar los minimizadores de un problema variacional adecuado.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo presentamos resultados relativos a la existencia y estabilidad de soluciones de tipo onda viajera para la ecuación (0-1) en el caso subcrítico y la existencia de soluciones de onda viajera para la ecuación (0-1) en el caso crítico. Recordemos que en este último caso la prueba sólo es para un conjunto determinado de valores de la transformación de coordenadas.

Es importante mencionar que el problema analizado en el presente trabajo tiene una estructura variacional. Esto permite estudiarlo mediante los diferentes métodos variacionales conocidos y no uno en específico. De forma particular utilizamos el principio de concentración-compacidad, ya que como quedó exhibido en el desarrollo expuesto, cuando el método funciona, probar la existencia de minimizadores y compacidad de sucesiones minimizantes es la antesala de la estabilidad del conjunto de minimizadores respecto a un problema de valores iniciales.

A lo largo de la investigación han surgido nuevas preguntas que aún quedan por contestar. En este sentido, nos parece importante mencionar las siguientes:

1. ¿ Se podrá caracterizar, en algunos casos, el conjunto de minimizadores para nuestra ecuación ?
2. ¿Existirán simetrías particulares para las funciones en el conjunto de minimizadores?
3. ¿Qué ocurre con la existencia y en su caso estabilidad de las soluciones para el caso crítico?
4. Además de dar respuesta a lo anterior buscamos principalmente construir un resultado en

el siguiente sentido: supongamos que una solución de tipo onda viajera para un problema de condiciones iniciales de la ecuación (12) inicia con k puntos críticos, entonces después de cierto tiempo y bajo ciertas hipótesis se formarán $m(k)$ puntos críticos. En otras palabras: para una solución que inicia con cierto número de crestas en su perfil nos interesaría conocer el número de crestas que tiene en otro instante. Pensamos que esto se puede lograr “contando” las concentraciones que asegura el lema de concentración-compacidad. La idea general es la siguiente: la sucesión de centros $\{y_k\}$, cuya existencia asegura el principio de concentración-compacidad, es una sucesión acotada (véase Corolario 15). Por tal motivo podemos considerar el conjunto Υ de puntos de acumulación del conjunto de subsucesiones convergentes de la sucesión minimizante original. Suponemos que dicho conjunto coincide con el conjunto de puntos críticos (concretamente con los máximos relativos) de la función límite φ . En ese sentido Υ tiene una relación relevante con las “crestas” de φ . Intuimos también que dicho conjunto es finito y su cardinalidad coincide con el número de concentraciones de la función φ . Consideramos que una herramienta para abordar este problema es el resultado de *Concentración Global de Struwe* (véase [51]).

Por último quisiéramos mencionar una observación respecto a las sucesiones minimizantes en el caso subcrítico. Para ello nos remitimos a la sección 3.3.1. Debemos señalar que los conjuntos Π_1 y Π_2 , que se definen en la sección antes mencionada, pueden restringirse al fijar φ , en ese sentido podemos hablar ahora de

$$\alpha^*(\varphi) = \sup \Pi_1(\varphi)$$

y

$$\omega^*(\varphi) := \inf \Pi_2(\varphi).$$

En este caso se sigue satisfaciendo

$$\alpha^*(\varphi) \leq \frac{(\max\{\beta_i^2\} + |\mathcal{K}|^2)}{2}$$

y

$$\frac{\min\{\beta_i^2\}}{2} \leq \omega^*(\varphi)$$

para todo $\varphi \in \mathbb{H}$.

Por otro lado si consideramos una sucesión minimizante $\{\varphi_k\}$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k) = M_1$$

y así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\partial_{x_i} \varphi_k(x))^2 \right] dx = \varepsilon M_1,$$

con $0 \leq \varepsilon \leq 1$. De donde

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\partial_{x_i} \varphi_k(x))^2 \right] dx = \varepsilon_k M_1 \quad (5-1)$$

para

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = \varepsilon.$$

En ese sentido observamos que

$$\begin{aligned} I(\varphi_k) &\leq \omega^* \|\varphi_k\|^2 \\ &\leq \frac{\omega^*}{\alpha^*} \varepsilon_k M_1 \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$. De donde

$$M_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k) \leq \frac{\omega^*}{\alpha^*} \varepsilon M_1$$

y como $M_1 > 0$ entonces $1 \leq (\omega^*/\alpha^*)\varepsilon$ y $\varepsilon > 0$.

Dada cualquier sucesión minimizante podemos definir una sucesión de números reales dada por

$$\alpha_k := \alpha^*(\varphi_k) \quad (5-2)$$

para cada $k \geq 1$. Resulta que hay casos en los que se verifica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[\omega^*(\varphi) \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} \right] \leq 1 \quad (5-3)$$

para φ la función del Lema 13 y $\{\varepsilon_k\}$ la sucesión dada en (5-1). Cuando esto ocurre la sucesión minimizante converge fuertemente a φ en \mathbb{H} .

Algunos casos concretos nos llevan a pensar que la condición (5-3) se satisface cuando $\varepsilon_k < 1$ para todo $k \geq 1$. Lo anterior implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{K} \cdot \nabla \varphi(x))^2 dx > 0, \quad (5-4)$$

es decir, la parte cinética de la energía total es diferente de cero. En ese sentido aquellas sucesiones minimizantes que satisfacen la condición (5-2) podemos llamarlas “sucesiones cinéticas”. Como en el caso subcrítico todas las sucesiones minimizantes convergen y entonces las que son sucesiones cinéticas también convergen. Además convergen a una función que es la representación de una onda viajera que en cierto sentido conserva la propiedad cinética de las sucesiones minimizantes. Un hecho que falta por esclarecer es si todas las sucesiones minimizantes son cinéticas. Esto establecería que en el presente caso la energía potencial no puede evolucionar en cinética sin una causa externa.

Por otro lado si se utiliza el mismo razonamiento para el caso crítico sería relevante determinar o exhibir sucesiones minimizantes cinéticas, ya que en tal caso también tendríamos la convergencia fuerte sin imponer más condiciones. Podríamos concluir así que, tanto en caso crítico y subcrítico, *si $\{\varphi_k\}$ es una sucesión minimizante cinética entonces converge fuertemente a φ -que establece el Lema 13- en \mathbb{H} .*

Apéndice A

Consideremos

$$u_\lambda^{\xi^0}(x, t) := \varphi^*(\xi) = A(\lambda^2 + |\xi - \xi^0|)^{\frac{2-n}{2}},$$

con $A = (n(n-2)\lambda^2)^{\frac{n-2}{4}}$, $3 \leq n$, $\lambda > 0$ y $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$. Para empezar tenemos que

$$\nabla u_\lambda^{\xi^0} = (\beta_1, \dots, \beta_n)(\nabla_\xi \varphi^*)^T$$

y así $|\nabla u^*|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{\xi_i}^*)^2$, con $\beta_i^2 = 1$ para todo $2 \leq i \leq n$ y $\beta_1^2 = 1/(1 - c_1^2)$. Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda^{\xi^0}(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{\xi_i}^*(\beta_1(x_1 - c_1 t), \beta_2 x_2, \dots, \beta_n x_n))^2 dx$$

y con el cambio de variable apropiado tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda^{\xi^0}(x, t)|^2 dx &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\varphi_{\xi_i}^*(\xi))^2 d\xi \\ &:= \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}\right) I_1. \end{aligned} \tag{A-1}$$

Por otro lado

$$\partial_i \varphi^* = A\lambda^{-n}(2-n)\left(1 + \left|\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}\right|^2\right)^{-\frac{n}{2}}(\xi_i - \xi_i^0).$$

Luego de utilizar el cambio de variable $z_i = (\xi_i - \xi_i^0)/\lambda$ se obtiene

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} A^2 \lambda^{-2n} (2-n)^2 (1 + |\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}|^2)^{-n} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 (\xi_i - \xi_i^0)^2 d\xi \\
&= A^2 \lambda^{-2n} (2-n)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^{-n} (\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \lambda^2 z_i^2) \lambda^n dz \\
&= n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^{-n} (\sum_{i=1}^n \beta_i^2 z_i^2) dz.
\end{aligned} \tag{A-2}$$

De la identidad anterior y al sustituir en (A-1) podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda^{\xi^0}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1^0(x)|^2 dx,$$

es decir no existe dependencia respecto a λ , ξ^0 y t .

Veamos ahora el correspondiente cálculo para término $\int (\partial_t u_\lambda^{\xi^0})^2$. Empecemos observando que

$$\partial_t u_\lambda^{\xi^0} = -\beta_1 c_1 \varphi_{\xi_1}^*,$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u_\lambda^{\xi^0}(x, t))^2 dx &= (\beta_1 c_1)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\xi_1}^*(\beta_1(x_1 - c_1 t), \beta_2 x_2, \dots, \beta_n x_n))^2 dx \\
&= (\beta_1 c_1)^2 (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\xi_1}^*(\xi))^2 d\xi \\
&= (\beta_1 c_1)^2 (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) \int_{\mathbb{R}^n} A^2 \lambda^{-2n} (2-n)^2 (1 + |\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}|^2)^{-n} (\xi_1 - \xi_1^0)^2 d\xi \\
&= (\beta_1 c_1)^2 (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^{-n} z_1^2 dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u_1^0(x, t))^2 dx.
\end{aligned} \tag{A-3}$$

Nuevamente no existe dependencia respecto a λ , ξ^0 y t . En seguida veamos que lo anterior también se verifica para la integral $\int (u_\lambda^{\xi^0})^{p^*}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_\lambda^{\xi^0}(x, t))^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(\beta_1(x_1 - c_1 t), \beta_2 x_2, \dots, \beta_n x_n))^{p^*} dx$$

$$\begin{aligned}
&= (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) \int_{\mathbb{R}^n} A^{p^*} (1 + |\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}|^2)^{p^* (\frac{2-n}{2})} \lambda^{(2-n)p^*} d\xi \\
&= (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) (n(n-2))^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^{-n} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (u_1^0(x, t))^{p^*} dx.
\end{aligned}$$

Apéndice B

Si recuperamos la forma que tiene el funcional de energía (véase (2-25)) podemos concluir que este no tiene dependencia respecto a los parámetros λ , ξ^0 y t . Para profundizar un poco más en el análisis del funcional de energía es necesario calcular integrales de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx \quad (\text{B-1})$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_i^2 dx \quad (\text{B-2})$$

para $i = 1, \dots, n$. Una forma de calcular dichas integrales es utilizando el cambio de variable dado por las coordenadas esféricas n -dimensionales donde intervienen las n variables $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$;

$$x_1 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}$$

$$x_2 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1}$$

$$x_3 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}$$

$$x_4 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3}$$

.

.

.

$$x_{n-1} = r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_n = r \cos \theta_1$$

Donde $r \geq 0$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$ para $i = 1, \dots, n-2$, $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ y el jacobiano de la transformación es

$$\left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} \right| = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)}.$$

En primer lugar para (B-1) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1 + r^2)^{-n} r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \\ &= nV(S_n) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr, \end{aligned} \tag{B-3}$$

donde $V(S_n)$ es el volumen de la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . En tanto para (B-2) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_i dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1 + r^2)^{-n} r^2 \phi_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1 + r^2)^n} dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \phi_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &=: \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1 + r^2)^n} dr I_i. \end{aligned} \tag{B-4}$$

En la sucesión anterior de ecuaciones ϕ_i esta dado por

$$\phi_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (\cos \theta_{n-(i-1)})^2 \prod_{j=1}^{n-i} (\text{sen } \theta_j)^2,$$

pero además resulta que para cada $n \geq 3$ se tiene que $I_i = V(S_n)$ para toda $i = 1, \dots, n$. Por

ejemplo para el caso $i = 1$ tenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \phi_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi (\text{sen } \theta_1)^2 (\text{sen } \theta_2)^2 \dots (\text{sen } \theta_{n-3})^2 (\text{sen } \theta_{n-2})^2 (\cos \theta_{n-1})^2 (\text{sen } \theta_1)^{n-2} (\text{sen } \theta_2)^{n-3} \dots \\
&\quad \dots (\text{sen } \theta_{n-3})^2 (\text{sen } \theta_{n-2}) d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^\pi \dots \int_0^\pi (\text{sen } \theta_1)^n (\text{sen } \theta_2)^{n-1} \dots (\text{sen } \theta_{n-3})^2 (\text{sen } \theta_{n-2})^3 d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} (\cos \theta_{n-1})^2 d\theta_{n-1} \\
&= \pi \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^{k+2} d\theta \\
&= \pi \frac{\int_0^\pi (\text{sen } \theta)^n d\theta \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^{n-1} d\theta}{\int_0^\pi (\text{sen } \theta)^2 d\theta \int_0^\pi (\text{sen } \theta) d\theta} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \\
&= \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^n d\theta \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^{n-1} d\theta \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta.
\end{aligned} \tag{B-5}$$

Por otro lado recordamos la identidad

$$\int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1+k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})} \tag{B-6}$$

y al sustituirla en (B-5), utilizando las propiedades de la función Gamma, se obtiene

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1+n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1+n-1}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n-1}{2})} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \\
&= \pi \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \\
&= \pi \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \\
&= \frac{2\pi}{n} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \\
&= V(S_n).
\end{aligned} \tag{B-7}$$

Finalmente regresando a las identidades (B-3) y (B-4), vemos que es necesario calcular un par de integrales indefinidas, estas estan dadas por

$$\int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1) \Gamma(1 + \frac{n}{2})}{2\Gamma(n)}$$

y

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n} dr = \frac{2^{-n} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1+n}{2})},$$

que al sustituirlas en (B-3) y (B-4) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx = nV(S_n) \frac{2^{-n} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1+n}{2})} \quad (\text{B-8})$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} x_i^2 dx = V(S_n) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1) \Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)}. \quad (\text{B-9})$$

Considerando las identidades anteriores y al reemplazarlas en la forma que tiene el funcional de energía (2-25) de la sección 2.2 obtenemos la identidad (2-30), de la misma sección.

Apéndice C

Verifiquemos ahora lo relativo a la observación 4. Empecemos desarrollando la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} (u_\lambda^{\xi^0}(x, t))^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(\beta_1(x_1 - c_1 t), \beta_2 x_2, \dots, \beta_n x_n))^2 dx \\
 &= (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) \int_{\mathbb{R}^n} A^2 (1 + |\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}|^2)^{(2-n)} \lambda^{2(2-n)} d\xi \\
 &= (\prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}) (n(n-2))^{\frac{n-2}{2}} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|^2)^{2-n} dz
 \end{aligned}$$

La integral de la última expresión se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{2-n} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1 + r^2)^{2-n} r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\sin \theta_k)^{n-(k+1)} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{n-2}} dr \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi (\sin \theta)^k d\theta \\
 &= nV(S_n) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{n-2}} dr,
 \end{aligned}$$

donde $V(S_n)$ es el volumen de la esfera unitaria en \mathbb{R}^n . Por otro lado se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{n-2}} dr = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-2)\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(n-2)} & \text{si } n \geq 5, \\ \text{Diverge} & \text{si } 4 \geq n \geq 1. \end{cases}$$

En ese sentido podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_\lambda^{\xi^0}(x, t))^2 dx < \infty$$

para todo $n \geq 5$, es decir $u_\lambda^{\xi^0} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $n \geq 5$.

Apéndice D

Verifiquemos la identidad (2-34), que esta relacionada con (2-21), y se utiliza para determinar la masa de la onda viajera. En primer lugar tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i \varphi^*(\xi)) (\partial_j \varphi^*(\xi)) d\xi &= A^2 \lambda^{-2n} (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\frac{\xi - \xi^0}{\lambda}|^2)^{-n} (\xi_i - \xi_i^0) (\xi_j - \xi_j^0) d\xi \\
 &= A^2 \lambda^{-2n} (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} \lambda^{n+2} x_i x_j dx \\
 &= n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_i x_j dx,
 \end{aligned} \tag{D-1}$$

en particular estamos interesados en

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \varphi^*(\xi)) (\partial_j \varphi^*(\xi)) d\xi = n^{\frac{n-2}{2}} (n-2)^{\frac{n+2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_1 x_j dx. \tag{D-2}$$

Iniciemos con $j = 2$. Utilizando nuevamente el cambio de variable dado por las coordenadas esféricas n-dimensionales se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} x_1 x_2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1 + r^2)^{-n} (r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}) \\
 &\quad (r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1}) \left(r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\operatorname{sen} \theta_k)^{n-(k+1)} \right) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1 + r^2)^{-n} r^{n+1} (\operatorname{sen} \theta_1)^n (\operatorname{sen} \theta_2)^{n-1} \dots (\operatorname{sen} \theta_{n-2})^3 \\
 &\quad \cos \theta_{n-1} \operatorname{sen} \theta_{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^\infty (1+r^2)^{-n} r^{n+1} dr \right) \left(\prod_{k=3}^n \int_0^\pi (\text{sen } \theta)^k d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta \text{sen } \theta d\theta \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D-3}$$

debido a que

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \text{sen } \theta d\theta = 0.$$

Veamos ahora que ocurre cuando $3 \leq j \leq n$. Primero observemos que

$$x_j = r \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \dots \text{sen } \theta_{n-j} \cos \theta_{n-(j-1)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} x_1 x_j dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1+r^2)^{-n} (r \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \dots \text{sen } \theta_{n-3} \text{sen } \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}) \\
&\quad (r \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \dots \text{sen } \theta_{n-j} \cos \theta_{n-(j-1)}) \left(r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)} \right) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty (1+r^2)^{-n} r^{n+1} (\text{sen } \theta_1)^2 \dots (\text{sen } \theta_{n-j})^2 \cos \theta_{n-(j-1)} \text{sen } \theta_{n-(j-1)} \\
&\quad \text{sen } \theta_{n-(j-2)} \dots \text{sen } \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{n-(k+1)} \right) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \left(\int_0^\infty (1+r^2)^{-n} r^{n+1} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \right) \left(\int_0^\pi \dots \int_0^\pi \dots d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D-4}$$

ya que

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0.$$

Bibliografía

- [1] J. P. Albert, Concentration Compactness and The Stability of Solitary-Wave Solutions to Non-local Equations, Applied analysis Baton Rouge, 1996.
- [2] J. P. Albert, J. Angulo, Existence and Stability of Ground-State Solutions of a Schrödinger-KdV System, Proc. Royal Soc. Edimburgo, Sect. A 133, 2003.
- [3] J. P. Albert, J. L. Bona , J.C. Saut , Model Equations for Waves in Stratified Fluids, Proc. Royal Soc. Edimburgo, Sect. A 453, 1997.
- [4] J. Angulo, *Nonlinear Dispersive Equations: Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Wave Solutions*, AMS, 2009.
- [5] A. Bahri, J. M. Coron, On a Nonlinear Elliptic Equation Involving the Critical Sobolev Exponent, The Effect of the Topology of the Domain, Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 41, 1988.
- [6] J. Belmonte-Beitia, Varias Cuestiones Sobre la Ecuación de Schrödinger No Lineal con Coeficientes Dependientes del Espacio, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., No 52, 2010.
- [7] V. Benci, G. Cerami, M. Degiovani, D. Fortunato, F.Gianoni, A. M. Michelet, Variational and Topological Methods in the Study of Nonlinear Phenomena, Progresin Nonlinear Differential Equations and Their Aplications, V. 49, 2002.
- [8] V. Benci, D. Fortunato, *Variational Methods in Nonlinear Field Equations. Solitary Waves, Hylomorphic Solitons and Vortices*, Springer Monographs in Mathematics, 2014.
- [9] J. L. Bona, P. E. Souganidis, W.A. Strauss, Stability and Instability of Solitary Waves of Korteweg-de Vries Type, Proc Roy. Soc. London A 411, 1987.

- [10] A. de Bouard, J.C. Saut, Solitary Waves of Generalized Kadomtsev Petviashvili Equations, *Annales de l'institut Henri Poincaré Analyse non linéaire* 14, 1997.
- [11] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent, *Comm. Pure Appl. Math.* , Vol. 36, 1983.
- [12] A. Carpio, Algunos Resultados Recientes sobre Ecuaciones No Lineales, *SeMa* , 1999.
- [13] T. Cazenave, P. L. Lions, Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schrödinger Equations, *Comm. Math. Phys.* 85, 1982.
- [14] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, 1939.
- [15] W. Chen, C. Li, Classification of Solutions of Some Nonlinear Elliptic Equations, *Duke Math. J.*, 63, 1991.
- [16] W. Chen, C. Li, Maximum Principles and the Method of Moving Planes, <http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~lma/lectures5Cmovingplane.pdf>, 2007.
- [17] D. Christodoulou, *The Formation of Black Holes in General Relativity*, EMS Monographs in Mathematics, EMS Publishing House Monograph, 2009.
- [18] J. M. Coron, Topologie et Cas Limite des Injections de Sobolev, *C.R. Acad. Sc. Paris* , No. 7, 1984.
- [19] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Springer Science, LLC, 2012.
- [20] W.Y. Ding, Positive Solutions of $\Delta u = u$ in Contractile Domains, *J. Partial Diff. Eqs.* 2, 1989.
- [21] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, second edition, 2010.
- [22] R. H. Fowler, Further Studies on Emden's and Similar Differential Equations, *Quarterly J. Math.* 2, 1931.
- [23] G. Date, *General Relativity, Basics and Beyond*, CRC Press, 2015.

- [24] B. Gidas, W.-M. Ni, L. Nirenberg, Symmetry an Related Properties via the Maximum Principle, *Commun. Math. Phys.* 68, 1979.
- [25] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry, *I. J. Fund. Anal.* 74, 1987.
- [26] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer, Tercera edición, 2005.
- [27] J. Kazdan, T. W. Warner, Remarks on Some Quasilinear Elliptic Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 28, 1975.
- [28] S. Kichenassamy, Existence of Solitary Waves for Water-Wave Models, *Nonlinearity* 10, 1997.
- [29] R. Knobel, *An introduction to the Mathematical Theory of Waves*, AMS, V. 3, 2000.
- [30] S. Levandosky, Stability and Instability of Fourth-Order Solitary Waves, *Journal of Dynamics and Deferential Equations*, Vol. 10, No. 1, 1998.
- [31] P. L. Lions, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, Part 1, *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire* 1.2, 1984.
- [32] P. L. Lions, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, Part 2, *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire* 1.2, 1984.
- [33] P. L. Lions, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 1, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1985.
- [34] P. L. Lions, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 2, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1985.
- [35] Y. Liu, Instability of Solitary Waves for Generalized Boussinesq Equations, *J. Dynam. Diff. Eqs.* 5, 1993.
- [36] O. Lopes, A Constrained Minimization Problem with Integral son the Entire Space, *Bol. Soc. Brasil Mat. N. S.*, no. 1 25, 1994.

- [37] A. Molina, *Mecánica Teórica: Mecánica Analítica y Mecánica de los Medios Continuos*, Segunda edición, Universidad de Granada, 2014.
- [38] D. D. Nolte, *Introduction to Modern Dynamics, Chaos, Networks, Space and Time*, Oxford University Press, 2015.
- [39] D. Passaseo, Multiplicity of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponent in Some Contractible Domains, *M. Mathematica*, No. 65, 1989.
- [40] R. Pego, W. Weinstein, Eigenvalues and Instability of Solitary Waves, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* 340, 1992.
- [41] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the Equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R.*, Vol. 165, 1965.
- [42] H. Ringström, *The Cauchy Problem in General Relativity*, KTH Mathematics, Stockholm, Sweden. ESI Lectures in Mathematics and Physics, 2009.
- [43] J. S. Russell, Report on Waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.
- [44] R. Schoen, Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature, *J. Differential Geom.* 20, 1984.
- [45] I. E. Segal, The Global Cauchy Problem for a Relativistic Scalar Field with Power Interaction, *Bull. Soc. Math. France* 91, 1963.
- [46] J. Shatah, M. Struwe, *Geometric Wave Equations*, AMS, second edition, 2000.
- [47] J. Shatah, W. Strauss, Instability of Nonlinear Bound States, *Commun. Math. Phys.* 100, 1985.
- [48] J. Shatah, Stable Standing Waves of Nonlinear Klein Gordon Equations, *Commun. Math. Phys.* 91, 1983.
- [49] P. E. Souganidis, W.A. Strauss, Instability of a Class of Dispersive Solitary Waves, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 114A, 1990.

- [50] M. Struwe, Semi-linear Wave Equations, Bull. Amer. Math. Soc. 26.1, 1992.
- [51] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer, fourth edition, 2008.
- [52] M. Weinstein, Existence and Dynamic Stability of Solitary Wave Solutions of Equations Arising in Long Wave Propagation, Comm. PDE 12, 1987.
- [53] M. Weinstein, Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Wave Equations, CPAM 39, 1986.
- [54] M. Weinstein, Modulational Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations, SIAM J. Math. Anal. 16, 1985.
- [55] H. Yamabe, On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, Osaka Journal of Mathematics 12, 1960.
- [56] Y. Yea, X. Yub, A Global Compactness Result for a Critical Semilinear Elliptic Equation in \mathbb{R}^n . Nonlinear Analysis 71, 2009.
- [57] E. Zuazua, *Métodos Numéricos de Resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Departamento de Matemáticas-Universidad Autónoma de Madrid, 2007.
- [58] M. Zuluaga, Sobre un Problema Semilineal Elíptico con Exponente Crítico de Sobolev, Revista de la Facultad de Ciencias UN-Medellín, 1992.