



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Medición del Índice de Refracción de
Superficies Ópticas Utilizando Luz
Polarizada

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Físico

PRESENTA:

Fernando Arturo ARAIZA SIXTOS

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Maximino AVENDAÑO ALEJO



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Araiza

Sixtos

Fernando Arturo

56 71 31 61

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

412001253

2. Datos del tutor

Dr.

Maximino

Avendaño

Alejo

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rubén Gerardo

Barrera

y Pérez

4. Datos del sinodal 2

Dr.

José Rufino

Díaz

Uribe

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Oscar Gabriel

Rodríguez

Herrera

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Rafael

Espinosa

Luna

7. Datos del trabajo escrito

Medición del índice de refracción de superficies ópticas utilizando luz polarizada

72 pp.

2016

*A mi familia y amigos, por su apoyo incondicional durante
mi largo viaje estudiando.*

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el Dr. Maximino Avendaño Alejo por su guía y enseñanzas durante la elaboración de esta tesis, además de ser un excelente amigo.

Agradezco a mi jurado integrado por el Dr. Rubén Gerardo Barrera y Pérez, el Dr. José Rufino Díaz Uribe, el Dr. Oscar Gabriel Rodríguez Herrera, y el Dr. Rafael Espinosa Luna, mencionados en orden de asignación, por sus comentarios y correcciones para este trabajo.

Agradezco al Dr. Naser Qureshi, la Dra. Rosalba Castañeda Guzmán, y la Dra. María Esther Mata Zamora, por apoyarme con muestras metálicas para el experimento.

Agradezco a la Facultad de Ciencias y a la UNAM por todas las oportunidades para crecer que me brindaron durante la carrera.

Agradezco al Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET-UNAM) por permitirme utilizar las instalaciones para la elaboración de este trabajo.

Agradezco al Proyecto del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT-UNAM) por la beca otorgada bajo el número de proyecto #IN112316.

Este trabajo fue apoyado por el proyecto de CONACYT con número 168570 y por el proyecto PAPIIT-UNAM #IN112316.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Resumen

Facultad de Ciencias

Licenciado en Física

Medición del Índice de Refracción de Superficies Ópticas Utilizando Luz Polarizada por Fernando Arturo ARAIZA SIXTOS

Se obtuvieron las ecuaciones del índice de refracción como función del ángulo de incidencia y de la reflectancia, considerando los coeficientes de Fresnel para las polarizaciones paralela p y perpendicular s al plano de incidencia, considerando una interfase plana, isótropa-isótropa. A partir de la ecuación exacta de la reflectancia en la polarización s , se realiza una expansión en series de Taylor, que nos permita evaluar experimentalmente el índice de refracción a segundo, cuarto, sexto orden, etc., para interfases isótropa-isótropa. Se obtuvieron ecuaciones analíticas para la parte real e imaginaria del índice de refracción de un metal, en ambas polarizaciones, utilizando la serie de Taylor. De igual manera, se implementó un experimento para medir cuantitativamente los índices de refracción de superficies transparentes, también conocidas como dieléctricas, y disipativas, también conocidas como conductoras, considerando luz totalmente polarizada, utilizando las ecuaciones exactas del índice de refracción y las funciones aproximadas.

Índice General

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Índice General	ix
Índice de Figuras	xii
Índice de Tablas	xiv
1 Introducción	1
2 Teoría Electromagnética	5
2.1 Coeficientes de Fresnel	5
2.1.1 Condiciones de Frontera	5
2.1.2 Refracción y Reflexión	9
2.1.3 Obtención de los Coeficientes de Fresnel	10
Dieléctrico-Dieléctrico	14
Dieléctrico-Conductor	15
2.2 Elipse de Polarización Reflejada	18
3 Cálculo del Índice de Refracción	21
3.1 Índice Real	21
3.1.1 Función inversa	22
Polarización Perpendicular	22
Polarización Paralela	26
3.1.2 Aproximación con ajustes polinómicos	27
3.2 Índice Complejo	29
4 Desarrollo Experimental	33
4.1 Pruebas en Dieléctricos	33
4.1.1 Montaje Experimental	33
4.1.2 Resultados	35
4.2 Pruebas en Conductores	38
4.2.1 Montaje Experimental	38
4.2.2 Resultados	39
4.3 Elipse de Polarización Reflejada	44
5 Conclusiones y Trabajo a Futuro	49

A	Métodos para Obtener el Índice de Refracción Real	51
A.1	Ángulo de Mínima Desviación	51
A.2	Ángulo de Brewster	52
B	Ecuación de Dispersión de Sellmeier	53
	Bibliografía	55

Índice de Figuras

1.1	Estudio del fenómeno de dispersión por Newton.	1
1.2	Diagrama de Abbe [2].	2
2.1	Derivación de las condiciones de frontera normales.	6
2.2	Derivación de las condiciones de frontera tangenciales.	7
2.3	Plano de incidencia.	10
2.4	Reflectancia $n_1 < n_2$ a $589.29nm$	15
2.5	Reflectancia $n_1 > n_2$ a $589.29nm$	15
2.6	Reflectancia de conductores a $587.6nm$	17
2.7	Elipses reflejadas en oro (Au).	20
3.1	Simetría de la reflectancia en interfase aire-diamante.	21
3.2	Ángulo de incidencia a $589.29nm$	23
3.3	Índice de refracción a $589.29nm$	24
3.4	Error de la función inversa cuando $n_1 < n_2$	25
3.5	Error de la función inversa cuando $n_1 > n_2$	25
3.6	Ángulo de incidencia a $589.29nm$	27
3.7	Aproximación de Taylor.	28
3.8	Simetría de la reflectancia en interfase aire-oro.	29
3.9	Aproximación de Taylor perpendicular.	30
3.10	Aproximación de Taylor paralela.	30
3.11	Errores de n y k cuando $\delta a_0 = 0.001$ y $\delta a_1 = 0.001$	32
4.1	Diagrama del arreglo experimental.	34
4.2	Arreglo experimental.	34
4.3	Software del polarímetro.	35
4.4	Resultados ($\lambda = 532nm$).	35
4.5	Resultados ($\lambda = 488nm$).	36
4.6	Resultados ($\lambda = 457nm$).	37
4.7	Residuos.	38
4.8	Diagrama del arreglo experimental, haz ensanchado, y efecto de esparcimiento de la luz debido al nivel de pulimiento.	39
4.9	Función teórica y ajuste polinomial del Cu ($\lambda = 532nm$).	40
4.10	Residuo en la región paraxial Cu ($\lambda = 532nm$).	41
4.11	Función teórica y ajuste polinomial del Al ($\lambda = 532nm$).	41
4.12	Residuo en la región paraxial Al ($\lambda = 532nm$).	41
4.13	Función teórica y ajuste polinomial del Fe ($\lambda = 532nm$).	42
4.14	Residuo en la región paraxial Fe ($\lambda = 532nm$).	42
4.15	Función teórica y ajuste polinomial del Fe ($\lambda = 405nm$).	42

4.16	Residuo en la región paraxial Fe ($\lambda = 405nm$).	43
4.17	Función teórica y ajuste polinomial del Au ($\lambda = 532nm$).	43
4.18	Residuo en la región paraxial Au ($\lambda = 532nm$).	43
4.19	Elipse de polarización.	44
4.20	Datos del polarímetro.	44
4.21	Elipses teóricas.	46
4.22	Elipses experimentales.	47
A.1	Geometría del prisma dispersivo.	51
B.1	Dispersión de N-BK 7.	53

Índice de Tablas

4.1	Índices de refracción del prisma a diferentes longitudes de onda.	33
4.2	Coeficientes del ajuste ($\lambda = 532nm$).	35
4.3	Coeficientes del ajuste ($\lambda = 488nm$).	36
4.4	Coeficientes del ajuste ($\lambda = 457nm$).	36
4.5	Índices experimentales.	37
4.6	Polarización perpendicular.	40
4.7	Polarización paralela.	40
4.8	Parámetros de las elipses.	45
B.1	Coeficientes de Sellmeier para N-BK 7.	53

Capítulo 1

Introducción

El índice de refracción es una de las propiedades físicas más importante en lo que se refiere a materiales ópticos tanto lineales como no lineales. La precisión con que el índice de refracción debe medirse depende del tipo de material y de la función que desempeñe dentro del arreglo óptico.

El índice de refracción fue definido por Maxwell de la siguiente manera $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, donde ε_r es la permitividad eléctrica relativa, y μ_r es la permeabilidad magnética relativa. La mayoría de los materiales no son magnéticos en el espectro visible ($\lambda_{UV} = 300nm - \lambda_{IR} = 800nm$), es decir, su permeabilidad relativa es casi 1, y por lo tanto, n es aproximadamente $\sqrt{\varepsilon_r}$ [1].

En el caso de materiales transparentes, también conocidos como dieléctricos, ε_r es un número real, y por lo tanto, n también lo es. Sin embargo, para materiales disipativos, también conocidos como conductores, éste no es el caso, ε_r es un número complejo, haciendo que el índice de refracción sea complejo y tome la forma $\tilde{n} = n + ik$.

El índice de refracción juega un papel muy importante en el fenómeno de dispersión. La dispersión ocurre debido a la disminución en la velocidad de propagación de la luz a través de un medio. Debido a que el material absorbe y reemite la luz cuya frecuencia es cercana a la frecuencia de oscilación natural de los electrones que están presentes en él, ésta luz se propaga un poco más despacio en comparación a la luz de frecuencias distintas. Dichas variaciones en la velocidad de propagación dependen del índice de refracción del material y hacen que la luz se refracte de manera diferente para diversas frecuencias.

Cuando se trabaja con dos refracciones sucesivas, como sucede en un prisma isótropo, se distinguen entonces de manera organizada los colores que componen la luz blanca, visto por Sir Isaac Newton en el siglo XVIII como se muestra en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Estudio del fenómeno de dispersión por Newton.

La desviación de la luz incidente es progresiva, siendo mayor para frecuencias mayores como se verá a continuación.

Es bien sabido que la velocidad de fase y consecuentemente el índice de refracción dependen de la frecuencia. La variación del índice de refracción como función de la frecuencia del campo electromagnético incidente constituye el fenómeno de dispersión de la luz.

Para materiales ópticos, las propiedades más importantes desde el punto de vista de diseñadores ópticos son, por supuesto, el índice de refracción y los efectos de dispersión de la luz en los materiales [2]. En la Figura 1.2 se muestran las propiedades del índice de refracción de algunos materiales ópticos más comunes de acuerdo al catálogo de Schott, en donde el índice de refracción se grafica como función del número de Abbe ν_d donde el subíndice d denota la línea de emisión d ($\lambda = 587.6\text{nm}$).

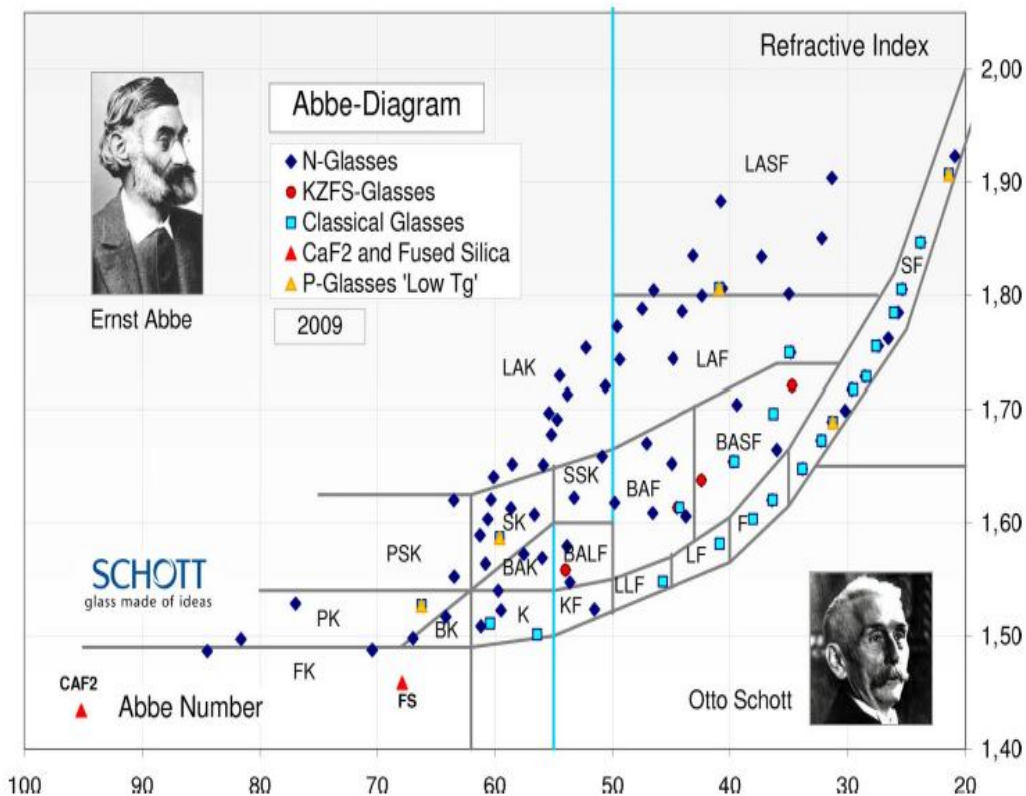


Figura 1.2: Diagrama de Abbe [2].

Existen muchos métodos para medir el índice de refracción de materiales isótropos transparentes. Por ejemplo, midiendo el ángulo de mínima desviación se puede determinar el índice de refracción de un prisma [3]. También, midiendo la longitud de onda, la presión, la temperatura, y la composición del aire, se puede usar la ecuación de Edlén para calcular el índice de refracción [4]. Por otro lado, el índice de refracción se puede determinar usando *refractómetros* [5]. Además, F. Abelès ha dado una expresión para determinar el grosor d y el índice de refracción n de una película delgada midiendo la reflectancia de la película en dos diferentes longitudes de onda λ [6]. Más aún, P. D. Fochs ideó un método simple y elegante usando el interferómetro de Michelson, el cuál nos da el espesor y el índice de refracción de una película delgada [6].

En general las pruebas deflectométricas tienen menor precisión que las interferométricas. Sin embargo, las técnicas deflectométricas permiten métodos de medida directa, mientras que la interferometría sólo permite métodos de medida indirecta [7].

En materiales isótropos disipativos, como los metales, conociendo las intensidades del rayo incidente y del reflejado, así como sus estados de polarización correspondientes, se pueden obtener algunas propiedades ópticas de la muestra tomando las razones apropiadas, éste método es conocido como elipsometría [8]. Distinguiendo las polarizaciones paralela p y perpendicular s al plano de incidencia, se puede tomar la razón de las intensidades y dar las reflectancias que usa el método de reflectometría [8]. Por otro lado, se puede calcular el índice de refracción complejo usando los modelos de Lorentz-Drude y Brendel-Bormann para obtener la función dieléctrica compleja [9].

Cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro, de manera que hay un cambio discontinuo en el índice de refracción en una distancia pequeña en comparación con la longitud de onda del rayo incidente, múltiples reflexiones ocurren en la frontera entre los dos medios. Si la distancia de la frontera entre ambos medios es pequeña, de tal manera que los múltiples rayos reflejados son coherentes, la intensidad de la luz reflejada (ó transmitida) por el sistema es igual a la suma algebraica de todas las amplitudes.

Expresiones para la reflectancia \mathcal{R} y la transmitancia \mathcal{T} se obtienen aplicando las condiciones de frontera considerando las ecuaciones de Maxwell en los libros de texto de óptica y electromagnetismo [1, 10, 11, 12]. Éstas expresiones, conocidas como los *Coefficientes de Fresnel*, se obtienen fácilmente cuando el sistema consta de dos materiales dieléctricos.

Sin embargo, los Coeficientes de Fresnel se tornan muy interesantes cuando se trata de una interfase dieléctrico-conductor. El efecto que produce insertar un índice de refracción complejo en los Coeficientes de Fresnel es sorprendente, pues se genera una expresión matemática muy complicada.

El objetivo de este trabajo es presentar un método nuevo basado en las ecuaciones de Fresnel, para la obtención del índice de refracción. Comparar los resultados con algunos métodos ya conocidos y aceptados para el caso de una interfase dieléctrico-dieléctrico, como el ángulo de mínima desviación en un prisma o encontrando el ángulo de Brewster en interfaces planas.

En el Capítulo 2 se obtienen los coeficientes de Fresnel usando la teoría electromagnética propuesta por Maxwell. Se observa claramente la dependencia de la reflectancia como función del índice de refracción, tanto del medio incidente donde la luz se propaga como del medio reflector donde la luz se refleja y/ó refracta, y del ángulo de incidencia.

Pero, tanto el índice de refracción del medio incidente como el ángulo de incidencia pueden ser manipulables, y la reflectancia puede medirse fácilmente (suponiendo una fuente de luz coherente y de intensidad constante), midiendo exclusivamente la intensidad de luz incidente y la intensidad de luz reflejada. Entonces la única variable desconocida es el índice de refracción del medio donde la luz es reflejada.

En el Capítulo 3 se obtienen expresiones y se proponen métodos basados en los coeficientes de Fresnel, que utilizan la expansión en series de Taylor, para calcular el índice de refracción, tanto de medios transparentes como disipadores.

Para la interfase dieléctrico-dieléctrico, es decir, con ambos índices de refracción reales, se presentarán dos métodos para la obtención del índice de refracción del medio sobre el cual la luz incide.

El primer método consiste en utilizar los coeficientes de Fresnel y algebraicamente obtener la función inversa para el índice de refracción n_2 , como función del ángulo de incidencia y de la reflectancia.

El segundo método consiste en aprovechar la simetría de la reflectancia para la polarización perpendicular, y , mediante la toma de datos experimentales aproximar con un polinomio par para obtener el valor de la función en la región paraxial.

Para una interfase dieléctrico-conductor, es decir, uno de los índices de refracción es complejo, se presenta un método que aprovecha al máximo la simetría de la reflectancia. La diferencia con el método para obtener índices reales, consiste en que se tienen dos variables desconocidas del índice de refracción: la parte real n , y la parte imaginaria k . Por esto, se debe hacer un poco más de álgebra en vez de sólo encontrar un valor numérico en la región paraxial para obtener el índice de refracción.

En el Capítulo 4, se presentan el desarrollo experimental y los resultados obtenidos para comprobar los métodos presentados en el Capítulo 3. De igual manera, se presentan todos los errores presentes en el desarrollo experimental que afectan en nuestras mediciones.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Teoría Electromagnética

2.1 Coeficientes de Fresnel

Para obtener los coeficientes de Fresnel es necesario partir desde las ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell¹

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{ext}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext}, \quad (2.1d)$$

donde \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico, \vec{H} es el campo magnético, \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{B} es el vector de inducción magnética, \vec{j}_{ext} es la densidad de corriente eléctrica de los campos externos, y ρ_{ext} es la densidad de carga eléctrica externa. La Ec. (2.1c) implica que no existen monopolos magnéticos, mientras que la Ec. (2.1d) puede ser considerada como la ecuación que define la densidad de carga eléctrica ρ_{ext} .

Los vectores participantes en las ecuaciones de Maxwell, Ecs. (2.1), se relacionan entre sí de manera particular considerando una onda monocromática, dichas relaciones son conocidas como *relaciones constitutivas* [1]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (2.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.3)$$

donde ε es la constante dieléctrica, también se le suele llamar permitividad eléctrica que en general puede ser un tensor de segundo orden, y μ es la permeabilidad magnética. Éstas ecuaciones no son instantáneas ya que dependen de la frecuencia de la onda.

2.1.1 Condiciones de Frontera

Las ecuaciones de Maxwell fueron propuestas solamente para regiones a través de las cuales las propiedades físicas, caracterizadas por ε y μ , son continuas.

¹Se escogió el sistema de unidades MKS para facilitar el álgebra.

Sin embargo, en la óptica se trabaja muy frecuentemente con sistemas que presentan discontinuidades abruptas en dichas propiedades físicas.

Supongamos que tenemos dos medios (caracterizados por $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$ respectivamente) separados por la superficie T , y se construye un cilindro con altura δh , separando las tapas equidistantemente de la superficie, y un área en las tapas δA_1 y δA_2 respectivamente como se muestra en la Figura 2.1. Aplicando el teorema de Gauss en el cilindro se tiene

$$\int \nabla \cdot \vec{B} dV = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0, \quad (2.4)$$

donde V es el volumen del cilindro, s es la superficie total que envuelve al cilindro, y \hat{n} es la normal unitaria a la superficie del cilindro y que apuntan hacia afuera de cada región respectivamente.

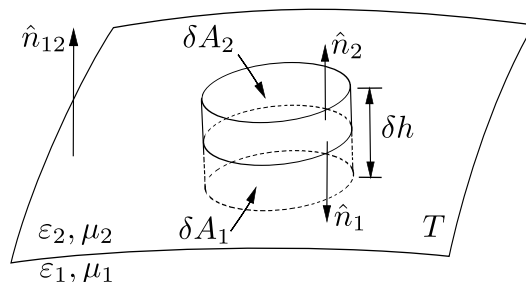


Figura 2.1: Derivación de las condiciones de frontera normales.

Suponiendo que las tapas del cilindro tienen área muy pequeña, es decir, δA_1 y δA_2 son muy pequeños, se puede considerar que \vec{B} tiene valores constantes \vec{B}_1 y \vec{B}_2 , respectivamente. Entonces la Ec. (2.4) se convierte en

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 \delta A_1 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \delta A_2 + \text{contribución del costado} = 0. \quad (2.5)$$

Si la altura δh se hace tender a cero, el cilindro se aplasta sobre la superficie T y la contribución aportada por los costados tienden a cero puesto que ya no hay superficie para que fluya campo. Entonces, para el límite cuando δh tiende a cero se tiene que

$$(\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2) \delta A = 0, \quad (2.6)$$

considerando que δA es el área donde el cilindro intersecta a la superficie T . Si definimos \hat{n}_{12} como la normal que apunta desde el primer medio hacia el segundo medio, se tiene que $\hat{n}_1 = -\hat{n}_{12}$ y $\hat{n}_2 = \hat{n}_{12}$, entonces la Ec. (2.6) nos da

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n}_{12} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}, \quad (2.7)$$

es decir, la componente normal de la inducción magnética es continua a través de la superficie de discontinuidad.

El desplazamiento eléctrico \vec{D} puede ser tratado de la misma manera, entonces, usando la Ec. (2.1d), la Ec. (2.4) se convierte en

$$\int \nabla \cdot \vec{D} dV = \int \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \int \rho dV. \quad (2.8)$$

La carga total contenida dentro del cilindro a medida que éste reduce sus dimensiones es finita, por lo cual la densidad de carga volumétrica se vuelve infinita. Por ésto, en lugar de usar la densidad de carga volumétrica ρ es necesario definir la densidad de carga superficial $\hat{\rho}$ [1] como

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int \rho dV = \int \hat{\rho} dS. \quad (2.9)$$

De igual manera que para la inducción magnética se tiene que cuando δh tiende a cero, la contribución de los costados tiende a cero también. Entonces, análogamente a la Ec. (2.7), se llega a que

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_{12} = \hat{\rho} \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \hat{\rho}, \quad (2.10)$$

es decir, en presencia de una superficie con densidad de carga superficial $\hat{\rho}$, la componente normal del desplazamiento eléctrico cambia abruptamente a través de la superficie la cantidad $\hat{\rho}$. Si tomamos en cuenta la Ec. (2.2) se tiene que

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \hat{\rho},$$

en el caso de materiales ópticos se tiene que $\varepsilon \approx n^2$, es decir

$$n_1^2 E_{1n} - n_2^2 E_{2n} \approx \hat{\rho}. \quad (2.11)$$

A continuación, se estudiará el comportamiento de las componentes tangenciales. De igual manera al caso anterior, tomamos dos medios (caracterizados por $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$ respectivamente) separados por la superficie T , y se construye un rectángulo con lados paralelos y perpendiculares a la superficie como se muestra en la Figura 2.2.

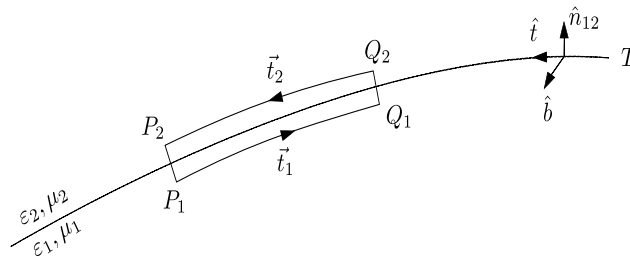


Figura 2.2: Derivación de las condiciones de frontera tangenciales.

Sea \hat{b} el vector unitario perpendicular al plano del rectángulo. Entonces, aplicando el teorema de Stokes a la Ec. (2.1b) se tiene

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{b} dS = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{b} dS, \quad (2.12)$$

donde s es la superficie del rectángulo, y \vec{r} va sobre el perímetro del mismo. Si se hace que las longitudes $\overline{P_1Q_1} = \delta s_1$ y $\overline{P_2Q_2} = \delta s_2$ sean infinitesimales, \vec{E} puede ser reemplazado por valores constantes \vec{E}_1 y \vec{E}_2 a lo largo de cada segmento $\delta s_{1,2}$, respectivamente. De igual manera $\partial\vec{E}/\partial t$ puede ser sustituido por un valor constante. Se obtiene entonces de la Ec. (2.12) que

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t}_1 \delta s_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{t}_2 \delta s_2 + \text{contribución de los costados} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \delta s \delta h, \quad (2.13)$$

donde δs es el segmento de línea en donde el rectángulo intersecta a la superficie, y $\delta h = \overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$ es la altura del rectángulo. Ahora, si consideramos que la altura δh tiende a cero, las contribuciones aportadas por los costados tienden a cero de manera análoga al caso anterior. Asumiendo de igual manera que $\partial\vec{E}/\partial t$ es finito, se tiene en el límite cuando δh tiende a cero que

$$(\vec{E}_1 \cdot \hat{t}_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{t}_2) \delta s = 0. \quad (2.14)$$

Si \hat{t} es la tangente a lo largo de la superficie, entonces (véase Figura 2.2) $\hat{t}_1 = -\hat{t} = \hat{b} \times \hat{n}_{12}$ y $\hat{t}_2 = \hat{t} = \hat{b} \times \hat{n}_{12}$, entonces la Ec. (2.14) nos da

$$[(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12}] \cdot \hat{b} = 0.$$

Como la orientación del rectángulo y consecuentemente la del vector \hat{b} es arbitraria, se sigue que

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}, \quad (2.15)$$

es decir, la componente tangencial del campo eléctrico es continua a través de la frontera entre los dos medios.

Por otro lado, partiendo de la ecuación de continuidad de corriente [1]

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.16)$$

si se integra sobre el volumen se tiene que

$$\int \nabla \cdot \vec{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \Rightarrow \int \vec{j} \cdot \hat{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int \hat{\rho} dS, \quad (2.17)$$

y finalmente se obtiene que

$$(\vec{j}_1 - \vec{j}_2) \cdot \hat{n}_{12} = -\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Rightarrow j_{1n} - j_{2n} = -\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}. \quad (2.18)$$

es decir, la componente normal de la densidad de corriente eléctrica cambia abruptamente la cantidad $-\partial\hat{\rho}/\partial t$.

Finalmente, para el campo magnético \vec{H} , análogamente al caso del desplazamiento eléctrico, es necesario definir una densidad de corriente superficial como [1]

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int \vec{j} dV = \int \hat{j} dS. \quad (2.19)$$

El análisis es similar, pero aparece un término adicional si hay corrientes presentes. En lugar de la Ec. (2.13), ahora se tiene que

$$\vec{H}_1 \cdot \hat{t}_1 \delta s_1 + \vec{H}_2 \cdot \hat{t}_2 \delta s_2 + \text{contribución de los costado} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \delta s \delta h + \hat{j} \cdot \hat{b} \delta s. \quad (2.20)$$

De igual manera, tomando el límite cuando δh tiende a cero se tiene que

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n}_{12} = \hat{j} \Rightarrow H_{1t} - H_{2t} = \hat{j}, \quad (2.21)$$

es decir, en presencia de corrientes, la componente tangencial del campo magnético cambia abruptamente la cantidad $\hat{j} \times \hat{n}_{12}$ la cuál está asociada a corrientes superficiales.

2.1.2 Refracción y Reflexión

Usando las condiciones de frontera obtenidas en la Sección 2.1.1, se puede demostrar fácilmente que una onda plana cruzando la frontera entre dos medios homogéneos de diferentes propiedades ópticas se divide en una onda reflejada al medio de incidencia y una onda transmitida al segundo medio.

Sean, $\hat{s}^{(i)}$, $\hat{s}^{(r)}$, y $\hat{s}^{(t)}$, las direcciones² en las que se propagan las ondas antes mencionadas. Si se conoce el comportamiento $F(t)$ de la onda plana en un punto en particular, se puede conocer el comportamiento en cualquier otro punto, es decir, si \vec{r} es el vector de posición relativa al primer punto entonces el comportamiento de la onda está dado por $F(t - \vec{r} \cdot \hat{s} / \nu)$, donde ν es la velocidad en el medio.

En particular, si arreglamos nuestro sistema como se ve en la Figura 2.3, se tiene que calculando los argumentos de las ondas planas incidentes en un punto \vec{r} de la frontera $z = 0$

$$t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(i)}}{\nu_1} = t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(r)}}{\nu_1} = t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(t)}}{\nu_2}, \quad (2.22)$$

donde ν_1, ν_2 son las velocidades de propagación en los dos medios, respectivamente. Más aún, si $\vec{r} = (x, y, 0)$ se tiene que

$$\frac{x s_x^{(i)} + y s_y^{(i)}}{\nu_1} = \frac{x s_x^{(r)} + y s_y^{(r)}}{\nu_1} = \frac{x s_x^{(t)} + y s_y^{(t)}}{\nu_2}. \quad (2.23)$$

Como la Ec. (2.23) debe cumplirse para cualquier punto en el plano $z = 0$, se tiene que

$$y \quad \begin{aligned} \frac{s_x^{(i)}}{\nu_1} &= \frac{s_x^{(r)}}{\nu_1} = \frac{s_x^{(t)}}{\nu_2}, \\ \frac{s_y^{(i)}}{\nu_1} &= \frac{s_y^{(r)}}{\nu_1} = \frac{s_y^{(t)}}{\nu_2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

El plano definido por $\hat{s}^{(i)}$ y la normal a la frontera es conocido como *plano de incidencia*. De la Ec. (2.24) se puede concluir que $\hat{s}^{(r)}$ y $\hat{s}^{(t)}$ yacen en éste plano.

²Los superíndices $i, r, y t$ hacen referencia a las ondas incidente, reflejada, y transmitida (refractada) respectivamente.

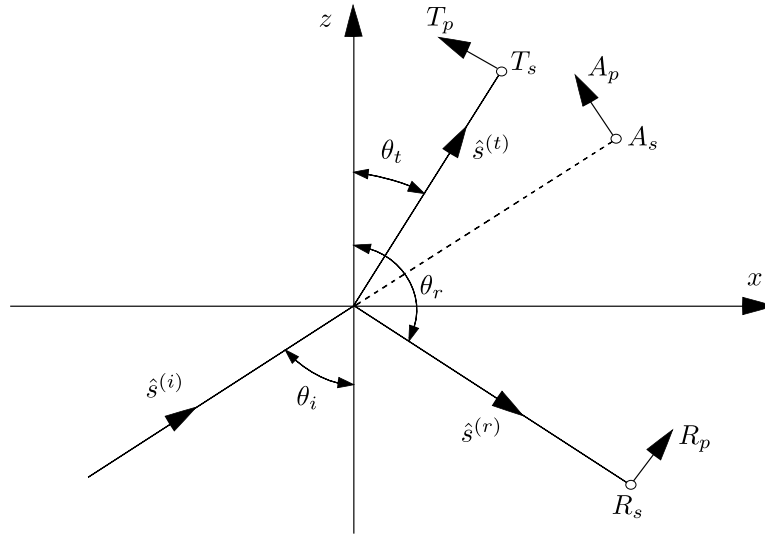


Figura 2.3: Plano de incidencia.

Definiendo el plano XZ como el plano de incidencia, y denotando θ_i , θ_r , y θ_t a los ángulos que las ondas hacen con el eje Z (véase la Figura 2.3), se tiene que

$$\begin{aligned} s_x^{(i)} &= \text{sen } \theta_i, & s_y^{(i)} &= 0, & s_z^{(i)} &= \text{cos } \theta_i, \\ s_x^{(r)} &= \text{sen } \theta_r, & s_y^{(r)} &= 0, & s_z^{(r)} &= -\text{cos } \theta_r, \\ s_x^{(t)} &= \text{sen } \theta_t, & s_y^{(t)} &= 0, & s_z^{(t)} &= \text{cos } \theta_t. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Sustituyendo la Ec. (2.25) en la Ec. (2.24) se tiene que

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\nu_1} = \frac{\text{sen } \theta_r}{\nu_1} = \frac{\text{sen } \theta_t}{\nu_2}. \quad (2.26)$$

La primer igualdad nos da la *ley de reflexión*, como $\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r$, además, se tiene que $\text{cos } \theta_i = -\text{cos } \theta_r$, entonces para cumplir las dos relaciones se deduce que $\theta_i = \pi - \theta_r$.

De igual manera, usando la relación de Maxwell [1] y sustituyendo en la Ec. (2.26) se tiene que

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.27)$$

Esta relación es conocida como la *ley de Snell* ó la *ley de la refracción*. Cuando n_2 es complejo, el ángulo de refracción se hace complejo y se tienen dos ondas transmitidas. Una que viaja a lo largo de $\hat{s}^{(t)}$ y otra que viaja en la normal.

2.1.3 Obtención de los Coeficientes de Fresnel

Ahora se calcularán las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas. Se considerará el caso general, del cuál derivaremos los casos que nos interesan estudiar.

Para longitudes de onda en el visible, las permeabilidades magnéticas difieren de la unidad en cantidades fáciles de ignorar, por lo tanto, podemos asumir que para materiales ópticos $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Considérese la onda incidente

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0^{(i)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(i)}}{\nu_1} - t \right) \right], \quad (2.28)$$

donde \vec{E}_0 es la amplitud del campo eléctrico incidente. Si se define como A_p a la amplitud de la componente paralela al plano de incidencia, y A_s a la amplitud de la componente perpendicular (del alemán *senkrecht*) al mismo, se tiene que

$$\vec{E}_0^{(i)} = (-A_p \cos \theta_i, A_s, A_p \sin \theta_i).$$

Las componentes para el campo magnético se obtienen fácilmente usando la relación [1]

$$\vec{H} = \sqrt{\varepsilon} \hat{s} \times \vec{E}. \quad (2.29)$$

Lo que nos da

$$\vec{H}^{(i)} = \sqrt{\varepsilon_1} \vec{H}_0^{(i)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(i)}}{\nu_1} - t \right) \right], \quad (2.30)$$

donde

$$\vec{H}_0^{(i)} = (-A_s \cos \theta_i, -A_p, A_s \sin \theta_i).$$

Análogamente, se pueden obtener las expresiones para los campos eléctrico y magnético reflejados

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{E}_0^{(r)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(r)}}{\nu_1} - t \right) \right], \quad (2.31)$$

$$\vec{H}^{(r)} = \sqrt{\varepsilon_1} \vec{H}_0^{(r)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(r)}}{\nu_1} - t \right) \right], \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{E}_0^{(r)} &= (-R_p \cos \theta_r, R_s, R_p \sin \theta_r), \\ \vec{H}_0^{(r)} &= (-R_s \cos \theta_r, -R_p, R_s \sin \theta_r). \end{aligned}$$

Y para los campos eléctrico y magnético transmitidos tenemos que

$$\vec{E}^{(t)} = \vec{E}_0^{(t)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(t)}}{\nu_2} - t \right) \right], \quad (2.33)$$

$$\vec{H}^{(t)} = \sqrt{\varepsilon_2} \vec{H}_0^{(t)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(t)}}{\nu_2} - t \right) \right], \quad (2.34)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{E}_0^{(t)} &= (-T_p \cos \theta_t, T_s, T_p \sin \theta_t), \\ \vec{H}_0^{(t)} &= (-T_s \cos \theta_t, -T_p, T_s \sin \theta_t). \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera de las Ecs. (2.15) y (2.21) demandan que las componentes tangenciales³ de \vec{E} y \vec{H} sean continuas en la frontera. Entonces, usando la ley de reflexión se tiene que

$$\begin{aligned}(A_p - R_p) \cos \theta_i &= T_p \cos \theta_t, \\ A_s + R_s &= T_s, \\ \sqrt{\varepsilon_1}(A_s - R_s) \cos \theta_i &= \sqrt{\varepsilon_2}T_s \cos \theta_t, \\ \sqrt{\varepsilon_1}(A_p + R_p) &= \sqrt{\varepsilon_2}T_p.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Se puede resolver la Ec. (2.35) para las componentes de las ondas reflejada y transmitida en términos de las componentes de la onda incidente, usando nuevamente la relación de Maxwell $n = \sqrt{\varepsilon}$ se tiene que

$$R_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_p,\tag{2.36}$$

$$R_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_s,$$

$$T_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_p,\tag{2.37}$$

$$T_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_s.$$

Las Ecs. (2.36) y (2.37) son conocidas como las *Ecuaciones de Fresnel*, o también como los *Coefficientes de Fresnel*, debido a que Fresnel las obtuvo de una manera un poco menos general en el año de 1823 usando su teoría elástica de la luz [1].

En el caso de luz incidiendo normalmente $\theta_i = 0$, y, por lo tanto $\theta_t = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}R_p &= \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} A_p & T_p &= \frac{2n_1}{n_2 + n_1} A_p \\ R_s &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_s & T_s &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_s.\end{aligned}\tag{2.38}$$

A continuación, se estudiará cómo la energía del campo incidente se divide en dos campos resultantes. Como \vec{E} y \vec{H} se pueden representar con complejos, el flujo de energía temporal está dado por la parte real del vector complejo de Poynting [10], entonces

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{E} \times \vec{H}^\dagger),\tag{2.39}$$

pero sustituyendo la Ec. (2.29) y recordando que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ llegamos fácilmente a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} (\vec{E} \cdot \vec{E}^\dagger) \vec{s} = \frac{n}{2} |\vec{E}|^2 \vec{s}.\tag{2.40}$$

La cantidad de energía del campo primario incidiendo sobre una unidad superficial de la frontera por segundo, se obtiene tomando el producto escalar del flujo de energía por

³Ya que no hay corrientes presentes.

la normal \hat{n} a la superficie

$$J^{(i)} = \langle \vec{S} \rangle^{(i)} \cdot \hat{n} = \frac{n_1}{2} |A|^2 \cos \theta_i, \quad (2.41)$$

y las energías del campo reflejado y transmitido dejando una unidad superficial de la frontera por segundo son

$$\begin{aligned} J^{(r)} &= \langle \vec{S} \rangle^{(r)} \cdot \hat{n} = \frac{n_1}{2} |R|^2 \cos \theta_i, \\ J^{(t)} &= \langle \vec{S} \rangle^{(t)} \cdot \hat{n} = \frac{n_2}{2} |T|^2 \cos \theta_t. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Entonces, se define a la *reflectancia* \mathcal{R} y a la *transmitancia* \mathcal{T} como los cocientes

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{J^{(r)}}{J^{(i)}} = \left| \frac{R}{A} \right|^2, \\ \text{y} \quad \mathcal{T} &= \frac{J^{(t)}}{J^{(i)}} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left| \frac{T}{A} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Es fácil ver que se cumple la conservación de la energía, es decir,

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1.$$

Sustituyendo las Ecs. (2.36) y (2.37) en la Ec. (2.43) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2, \\ \mathcal{R}_s &= \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_p &= \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)^2}, \\ \mathcal{T}_s &= \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t)^2}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

y usando la ley de Snell e identidades trigonométricas se puede finalmente escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \left(\frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \right)^2, \\ \mathcal{R}_s &= \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\mathcal{R}_p = \frac{4n_1n_2 \cos \theta_i \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i})^2},$$

$$\mathcal{R}_s = \frac{4n_1n_2 \cos \theta_i \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{(n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i})^2},$$
(2.47)

nuevamente para el caso de incidencia normal $\theta_i = \theta_t = 0^\circ$, se obtiene que

$$\mathcal{R}_p = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad \mathcal{T}_p = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

$$\mathcal{R}_s = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \mathcal{T}_s = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2.$$
(2.48)

Dieléctrico-Dieléctrico

A continuación se estudiará un caso más simple, donde los dos medios son transparentes, es decir, su permitividad dieléctrica ε es un real. Por lo tanto, su índice de refracción es también un real y los coeficientes de Fresnel anteriormente obtenidos no se alteran.

Éste caso es muy importante puesto que al analizar los coeficientes de Fresnel para la reflectancia, podemos obtener propiedades del medio como el índice de refracción. En particular, hay dos ángulos que son de suma importancia: el *ángulo crítico* y el *ángulo de Brewster*, de los cuáles se puede calcular el índice de refracción de una muestra bajo prueba.

Partiendo de las ecuaciones de la reflectancia (2.46) en ambas polarizaciones se estudiará el comportamiento en el ángulo crítico y el ángulo de Brewster.

El primero de ellos aparece cuando el índice de refracción del medio de incidencia es mayor que aquel del medio al que se transmitirá la luz. Se puede ver de la ley de Snell que la luz transmitida se curva a ángulos cada vez mayores a medida que aumenta el ángulo de incidencia, hasta que en un punto la luz transmitida deja el medio más denso de manera rasante. Entonces de la ley de Snell se tiene que, como $\theta_t = 90^\circ$

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1},$$
(2.49)

donde $n_2 < n_1$, y θ_c es el ángulo crítico de incidencia al cual la luz incidente presenta *reflexión total interna*.

Para definir el otro ángulo, es necesario escribir a \mathcal{R}_p en su forma alternativa [10]

$$\mathcal{R}_p = \left(\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right)^2,$$

cuando $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$, el denominador tiende a infinito y el cociente tiende a cero. De la ley de Snell se tiene que

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$
(2.50)

donde θ_B es el ángulo de incidencia en el cuál se desvanece la reflectancia en la polarización p , se llama así debido a que el primero en observar dicho fenómeno fue D. Brewster en el año de 1815 [1].

En las Figuras 2.4 y 2.5 se muestra el comportamiento típico de \mathcal{R}_s y \mathcal{R}_p para ambos casos⁴ $n_1 < n_2$ y $n_2 < n_1$, con $\theta_i \in [0^\circ, 90^\circ]$. En la Figura 2.5 podemos observar el fenómeno de reflexión total interna, mientras que en ambas figuras podemos observar el ángulo de Brewster cuando la reflectancia en la polarización p se desvanece.

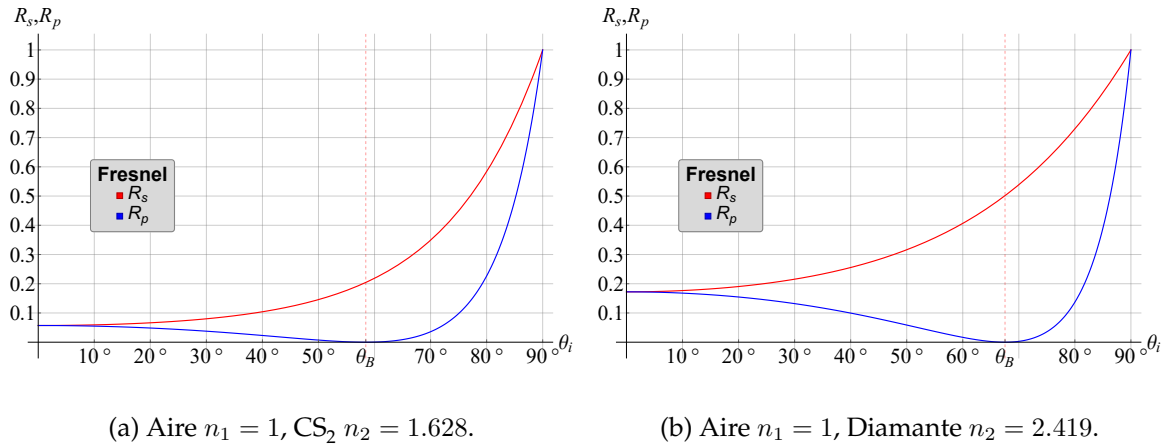


Figura 2.4: Reflectancia $n_1 < n_2$ a 589.29nm.

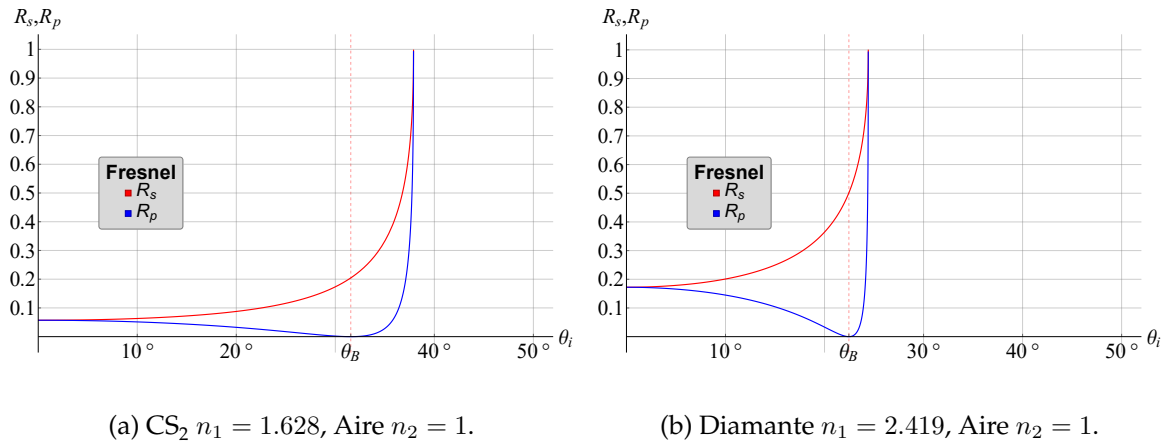


Figura 2.5: Reflectancia $n_1 > n_2$ a 589.29nm.

Dieléctrico-Conductor

Como ya se ha mencionado, lidiar con un medio disipador complica un poco el álgebra de los coeficientes de Fresnel. En éste caso la permitividad dieléctrica ϵ_2 es compleja, lo cuál ocasiona que el índice de refracción sea un complejo también. Para facilitar los cálculos, se considerará un sistema donde la onda incidente pasa de un medio dieléctrico a un medio conductor.

⁴Índices obtenidos del Hecht [3].

Se sigue que las fórmulas anteriormente obtenidas, en la medida que solamente involucran relaciones lineales entre las componentes de los vectores de campo de ondas planas monocromáticas, aplican en el caso presente [13]. En particular, las condiciones de frontera, la ley de reflexión, y la ley de Snell se cumplen.

Definiendo el índice de refracción complejo como \check{n}_2 , y recordando la ley de Snell, Ec. (2.27), se puede observar que

$$\text{sen } \check{\theta}_t = \frac{n_1}{\check{n}_2} \text{sen } \theta_i. \quad (2.51)$$

Como \check{n}_2 es complejo, el ángulo de la onda transmitida $\check{\theta}_t$ también lo es.

Para obtener los coeficientes de Fresnel es necesario reemplazar n_2 por $\check{n}_2 = n_2 + ik_2$ en las Ecs. (2.36) y (2.37), donde n_2 y k_2 son reales y k_2 se le conoce como el coeficiente de extinción. Para facilitar los cálculos es conveniente definir [13]

$$\check{n}_2 \cos \check{\theta}_t = u + iv \quad (2.52)$$

donde $u, v \in \mathbb{R}$. Elevando la Ec. (2.52) al cuadrado, usando identidades trigonométricas y la ley de Snell se obtiene que

$$\begin{aligned} (u + iv)^2 &= \check{n}_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i, \\ \Rightarrow u^2 - v^2 + i(2uv) &= n_2^2 - k_2^2 + i(2n_2k_2) - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Igualando las partes real e imaginaria se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i, \\ y \quad uv &= n_2k_2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Resolviendo la Ec. (2.54) para u y v se tiene

$$\begin{aligned} y \quad 2u^2 &= n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i)^2 + 4n_2^2k_2^2}, \\ 2v^2 &= -(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i) + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \text{sen}^2 \theta_i)^2 + 4n_2^2k_2^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Finalmente, sustituyendo en la Ec. (2.36) para el caso perpendicular se tiene

$$R_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - (u + iv)}{n_1 \cos \theta_i + (u + iv)} A_s, \quad (2.56)$$

para el caso paralelo hace falta un poco más de álgebra

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{\check{n}_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \check{\theta}_t}{\check{n}_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \check{\theta}_t} A_p = \frac{\check{n}_2^2 \cos \theta_i - n_1 \check{n}_2 \cos \check{\theta}_t}{\check{n}_2^2 \cos \theta_i + n_1 \check{n}_2 \cos \check{\theta}_t} A_p \\ &= \frac{[n_2^2 - k_2^2 + i2n_2k_2] \cos \theta_i - n_1(u + iv)}{[n_2^2 - k_2^2 + i2n_2k_2] \cos \theta_i + n_1(u + iv)} A_p. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ahora, la reflectancia se calcula con la Ec. (2.43) y se obtiene que

$$\mathcal{R}_p = \frac{[(n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i - n_1 u]^2 + [2n_2 k_2 \cos \theta_i - n_1 v]^2}{[(n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i + n_1 u]^2 + [2n_2 k_2 \cos \theta_i + n_1 v]^2}, \quad (2.58)$$

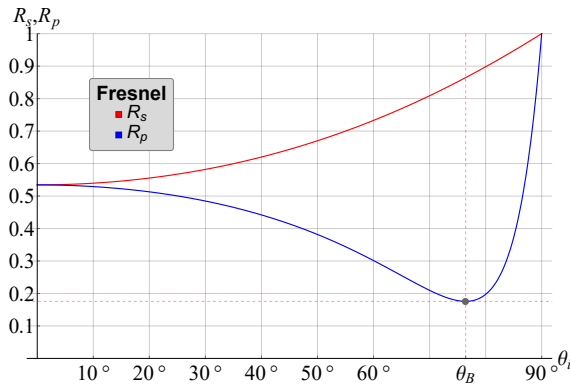
$$\mathcal{R}_s = \frac{[n_1 \cos \theta_i - u]^2 + v^2}{[n_1 \cos \theta_i + u]^2 + v^2}.$$

En la Figura 2.6 podemos observar algunos ejemplos de las reflectancias con los índices de refracción reportados en [9] y [14].

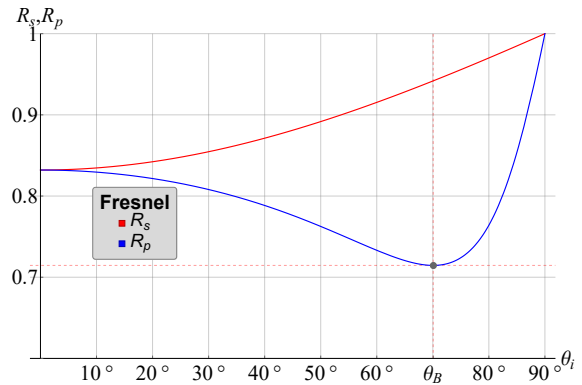
Se puede observar que, al igual que en los dieléctricos, existe un ángulo en el cuál la reflectancia paralela tiene un mínimo. Este ángulo es conocido como el *ángulo de pseudo-Brewster*, y es cuando la reflectancia paralela alcanza su mínimo. Dicho en otras palabras, es la solución a la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{R}_p}{\partial \theta_i} = 0. \quad (2.59)$$

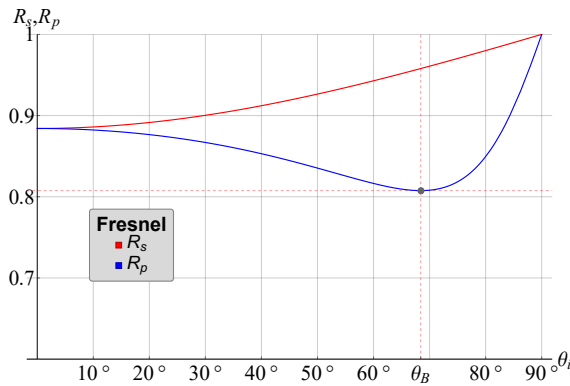
Sin embargo, encontrar una solución analítica a ésta ecuación es muy difícil. En la Figura 2.6 se muestra el ángulo de pseudo-Brewster, el cuál fue obtenido con métodos numéricos.



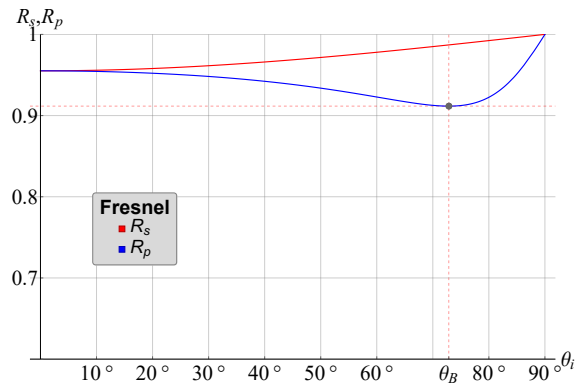
(a) Aire $n_1 = 1$, Fe $n_2 = 2.9093$ y $k_2 = 3.1160$.



(b) Aire $n_1 = 1$, Cu $n_2 = 0.46090$ y $k_2 = 2.9736$.



(c) Aire $n_1 = 1$, Au $n_2 = 0.27049$ y $k_2 = 2.7789$.



(d) Aire $n_1 = 1$, Al $n_2 = 0.15016$ y $k_2 = 3.4727$.

Figura 2.6: Reflectancia de conductores a $587.6nm$.

Nótese ahora que sí se escriben explícitamente la Ec. (2.58) se tiene

$$\mathcal{R}_p = \frac{\left[\left(2n_2k_2 \cos \theta_i - \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) + \sqrt{(n_1^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4n_2^2k_2^2}} \right)^2 + \left((n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i - \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4n_2^2k_2^2}} \right)^2 \right]}{\left[\left(2n_2k_2 \cos \theta_i + \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4n_2^2k_2^2}} \right)^2 + \left((n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i + \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4n_2^2k_2^2}} \right)^2 \right]},$$

y si hacemos $k_2 = 0$ el primer término entre paréntesis en el numerador y en el denominador se hacen cero, dejando solamente

$$\mathcal{R}_p = \left(\frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \right)^2 = \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2, \quad (2.60)$$

que es la ecuación de la reflectancia en la polarización p para dieléctricos. Por otro lado, para la reflectancia en la polarización s se tiene

$$\mathcal{R}_s = \frac{\left[n_1^2 \cos^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4k_2^2 n_2^2} - \sqrt{2} n_1 \cos \theta_i \sqrt{n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4k_2^2 n_2^2}} \right]}{\left[n_1^2 \cos^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4k_2^2 n_2^2} + \sqrt{2} n_1 \cos \theta_i \sqrt{n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i + \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4k_2^2 n_2^2}} \right]},$$

y nuevamente tomando $k_2 = 0$ se tiene

$$\mathcal{R}_s = \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \cos^2 \theta_i - 2n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \cos^2 \theta_i + 2n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t} = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2, \quad (2.61)$$

que nuevamente se reduce al caso para la reflectancia en la polarización s para dieléctricos.

2.2 Elipse de Polarización Reflejada

Se sabe que del haz incidente se puede obtener una elipse de polarización, la cuál es trazada por el cambio del vector del campo eléctrico a través del tiempo, haciendo un poco de álgebra [1, 15], y por ende también se puede hacer con el haz reflejado. En la Figura 2.3, se cambia el sistema de referencia para que el eje z quede alineado con $\hat{s}^{(r)}$ y se

tiene que el haz reflejado está dado por

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{E}_0^{(r)} \exp \left[i\omega \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{s}^{(r)}}{v_1} - t \right) \right], \quad (2.62)$$

donde

$$\vec{E}_0^{(r)} = (R_p, R_s, 0). \quad (2.63)$$

En el caso de una interfase dieléctrico-conductor, R_p y R_s están dadas por

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{n_1 \cos \theta_i - (u + iv)}{n_1 \cos \theta_i + (u + iv)} A_s \exp[i\delta_s] \\ &= \rho_s \exp[i(\phi_s + \delta_s)] A_s, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{[n_2^2 - k_2^2 + i2n_2k_2] \cos \theta_i - n_1(u + iv)}{[n_2^2 - k_2^2 + i2n_2k_2] \cos \theta_i + n_1(u + iv)} A_p \exp[i\delta_p] \\ &= \rho_p \exp[i(\phi_p + \delta_p)] A_p, \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde u y v están dadas por las Ecs. (2.55), δ_s y δ_p son las fases del haz incidente, y ϕ_s y ϕ_p son las fases del haz reflejado. Desarrollando un poco se obtiene que

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{[n_1 \cos \theta_i - u]^2 + v^2}{[n_1 \cos \theta_i + u]^2 + v^2}, \\ \rho_p &= \frac{[(n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i - n_1 u]^2 + [2n_2 k_2 \cos \theta_i - n_1 v]^2}{[(n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i + n_1 u]^2 + [2n_2 k_2 \cos \theta_i + n_1 v]^2}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

y

$$\begin{aligned} \tan \phi_s &= \frac{2n_1 v \cos \theta_i}{u^2 + v^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_i^2}, \\ \tan \phi_p &= 2n_1 \cos \theta_i \left(\frac{2n_2 k_2 u - (n_2^2 - k_2^2)v}{(n_2^2 + k_2^2)^2 \cos^2 \theta_i^2 - n_1^2(u^2 + v^2)} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Tomando promedios temporales y reduciendo términos semejantes en las Ecs. (2.64) y (2.65) como se muestra en [1, 15], se llega a la ecuación

$$\left(\frac{R_s}{A_s \rho_s} \right)^2 + \left(\frac{R_p}{A_p \rho_p} \right)^2 - 2 \left(\frac{R_s}{A_s \rho_s} \right) \left(\frac{R_p}{A_p \rho_p} \right) \cos[\phi_s + \delta_s - \phi_p - \delta_p] = \sin^2[\phi_s + \delta_s - \phi_p - \delta_p]. \quad (2.68)$$

La Ec. (2.68) es la ecuación de una cónica, el determinante asociado está dado por

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A_s \rho_s} & -\frac{\cos \Delta}{A_s \rho_s A_p \rho_p} \\ -\frac{\cos \Delta}{A_s \rho_s A_p \rho_p} & \frac{1}{A_p \rho_p} \end{vmatrix} = \frac{1}{A_s^2 \rho_s^2 A_p^2 \rho_p^2} (1 - \cos^2 \Delta) = \frac{\sin^2 \Delta}{A_s^2 \rho_s^2 A_p^2 \rho_p^2} \geq 0, \quad (2.69)$$

donde $\Delta = \phi_s + \delta_s - \phi_p - \delta_p$. Como el determinante es siempre positivo, se trata de una elipse en el espacio definido por las componentes del campo eléctrico.

Es fácil observar que ρ_s y ρ_p dependen del ángulo de incidencia, es decir, la elipse va cambiando dependiendo del ángulo de incidencia. Más aún, las elipses dependen del estado de polarización del haz incidente ya que las fases δ_s y δ_p juegan un papel importante en la ecuación de la elipse. Considerando utilizar experimentalmente una polarización lineal horizontal o vertical, circular derecha o izquierda, a 45° o -45° , elíptica, la polarización reflejada será siempre distinta para éstos casos.

En la Figura 2.7 podemos observar las elipses reflejadas en oro con $n_2 = 0.27049$ y $k_2 = 2.7789$, la polarización incidente es a 45° para la Figura 2.7a, y es circular derecha para la Figura 2.7b.

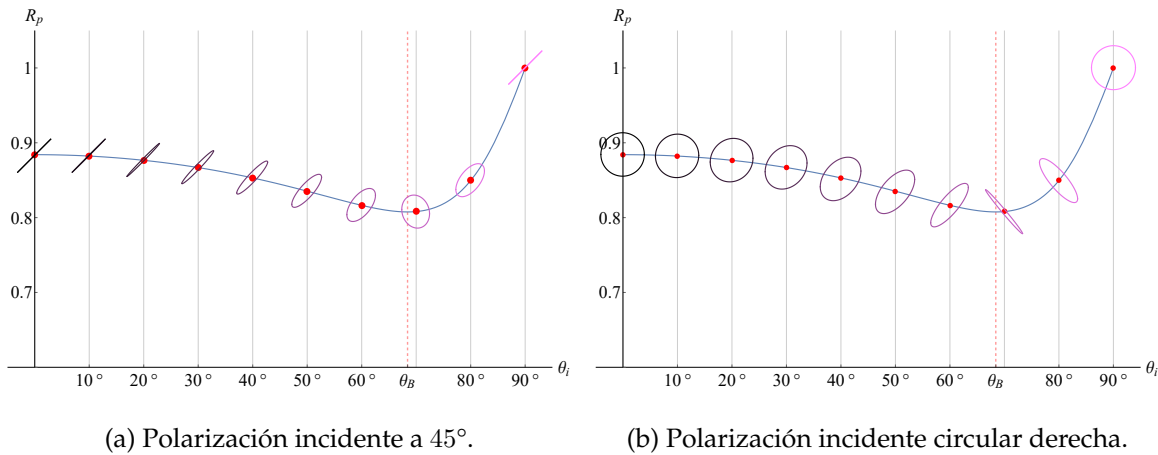


Figura 2.7: Elipses reflejadas en oro (Au).

Se puede observar que después del ángulo de Brewster, la polarización precesa y regresa rápidamente a su estado de polarización inicial.

Capítulo 3

Cálculo del Índice de Refracción

3.1 Índice Real

Para la interfase dieléctrico-dieléctrico, es decir, considerando ambos índices de refracción reales, se presentarán dos métodos para la obtención del índice de refracción del medio sobre el cual la luz incide utilizando el coeficiente de la reflectancia.

El primer método consiste en tomar la Ec. (2.46) y algebraicamente obtener la función inversa para el índice de refracción n_2 . Se obtiene una función que depende de la reflectancia $\mathcal{R}_{s,p}$ y del ángulo de incidencia, al graficar se obtiene una superficie que al intersectarla con un plano (un valor de n_2) se recupera la correspondiente función de reflectancia.

Este método tiene sus limitantes, ya que para la polarización paralela, la “función” inversa es por partes, y al graficar la intersección con el plano no se puede apreciar con claridad la función de reflectancia. Es por ésta razón que se ha decidido trabajar experimentalmente sólo con la polarización perpendicular.

El segundo método consiste en aprovechar la simetría de la reflectancia (Figura 3.1) principalmente para la polarización perpendicular, y, mediante la toma de datos aproximar con un polinomio de grado 14 o mayor para obtener el valor de la función en la región paraxial, entre aproximadamente $\pm 15^\circ$, donde todo se reduce a la Ec. (2.48).

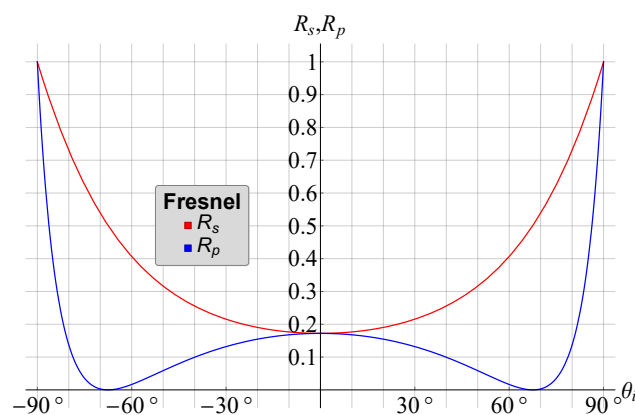


Figura 3.1: Simetría de la reflectancia en interfase aire-diamante.

A diferencia del método que se basa en el ángulo de mínima desviación, el cuál se obtiene en un prisma y se presenta en el Apéndice A, los métodos que se presentarán son por reflexión en lugar de refracción. Además, solamente se requiere una superficie plana y

no importa la geometría de la muestra. La ventaja de los métodos que serán presentados, es que no requieren conocimiento alguno de la muestra y no se tiene que buscar un ángulo de incidencia específico.

A diferencia del método que se basa en el ángulo de Brewster que consiste en encontrar el ángulo donde la muestra alcanza un mínimo en la reflectancia y utiliza la Ec. (2.50), los métodos que se van a presentar utilizan principalmente la polarización perpendicular. Nuevamente la ventaja radica en que no se tiene que buscar un ángulo en específico.

Ambos métodos son muy sencillos y fáciles de aplicar experimentalmente, sólo son necesarios un haz de luz polarizada coherente de intensidad constante, un instrumento para medir la intensidad incidente y la reflejada para obtener la reflectancia, y una platina rotativa de precisión para ir variando el ángulo de incidencia.

3.1.1 Función inversa

Partiendo de las ecuaciones de reflectancia en ambas polarizaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_p &= \left(\frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \right)^2, \\ \mathcal{R}_s &= \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \right)^2,\end{aligned}\tag{2.46}$$

aplicando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\pm \sqrt{\mathcal{R}_p} &= \frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}, \\ \pm \sqrt{\mathcal{R}_s} &= \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}},\end{aligned}\tag{3.1}$$

agrupando términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned}n_2^2 \cos \theta_i (1 \mp \sqrt{\mathcal{R}_p}) &= n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} (1 \pm \sqrt{\mathcal{R}_p}), \\ n_1 \cos \theta_i (1 \mp \sqrt{\mathcal{R}_s}) &= \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} (1 \pm \sqrt{\mathcal{R}_s}),\end{aligned}\tag{3.2}$$

a partir de aquí se tratarán las polarizaciones por separado.

Polarización Perpendicular

Usando identidades trigonométricas y reacomodando la Ec. (3.2) se llega a

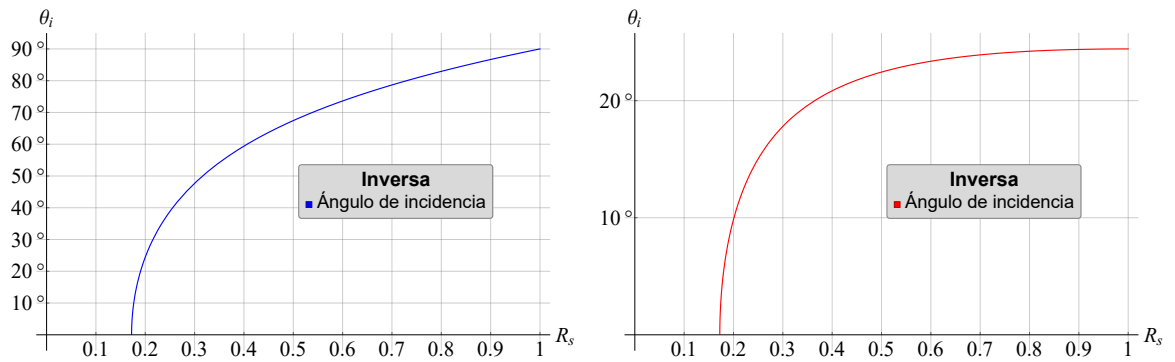
$$n_1^2 \cos^2 \theta_i (\mp 4 \sqrt{\mathcal{R}_s}) = (n_2^2 - n_1^2) (1 \pm \sqrt{\mathcal{R}_s}).\tag{3.3}$$

Para decidir qué signo utilizar recurrimos a los casos $n_1 < n_2$, que implica $n_2^2 - n_1^2 > 0$, y $n_1 > n_2$, que implica $n_2^2 - n_1^2 < 0$. De ésta manera, se tiene que

$$\theta_i^s = \begin{cases} \arccos \left[\frac{1 - \sqrt{\mathcal{R}_s}}{2n_1} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{\sqrt{\mathcal{R}_s}}} \right] & \text{si } n_1 < n_2 \\ \arccos \left[\frac{1 + \sqrt{\mathcal{R}_s}}{2n_1} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{\sqrt{\mathcal{R}_s}}} \right] & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}, \quad (3.4)$$

$$n_2^s = \begin{cases} n_1 \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{\mathcal{R}_s}}{(1 - \sqrt{\mathcal{R}_s})^2} \cos^2 \theta_i} & \text{si } n_1 < n_2 \\ n_1 \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{\mathcal{R}_s}}{(1 + \sqrt{\mathcal{R}_s})^2} \cos^2 \theta_i} & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Para la Ec. (3.4) y la Ec. (3.5) se tuvo que graficar primero, como se muestra en las Figuras 3.2 y 3.3, para asegurar que se estaba usando la rama de la raíz cuadrada adecuada.



(a) Interfase aire-diamante.

(b) Interfaz diamante-aire.

Figura 3.2: Ángulo de incidencia a 589.29nm.

Al graficar las ecuaciones para el índice de refracción como función de \mathcal{R}_s y θ_i , la Ec. (3.5), se obtiene una superficie, al intersectar la superficie con un plano (valor constante de n_2) se recupera la correspondiente gráfica de la reflectancia.

En la Figura 3.3 se graficó en el intervalo $[-90^\circ, 90^\circ]$ aprovechando que la reflectancia es una función par.

La simplicidad de la Ec. (3.5) es evidente, ya que solamente depende de la reflectancia y el ángulo de incidencia. Un material óptico podría ser caracterizado fácilmente midiendo la irradiancia incidente y la irradiancia reflejada para diferentes ángulos de incidencia, y se recuperaría el plano constante que corta a la superficie de índice de refracción.

Cabe resaltar que para el caso $n_1 < n_2$ (Figura 3.3a) la superficie diverge a infinito, es decir, teóricamente se podría medir un índice de refracción infinito. Pero, para el experimento que se realizará, ésto es irrelevante puesto que se trabajará solamente con dieléctricos transparentes.

Por otro lado, para el caso $n_1 > n_2$ (Figura 3.3b) se puede observar que la superficie termina hasta el valor de n_1 , es decir, n_1 es el valor máximo que se puede obtener para éste caso.

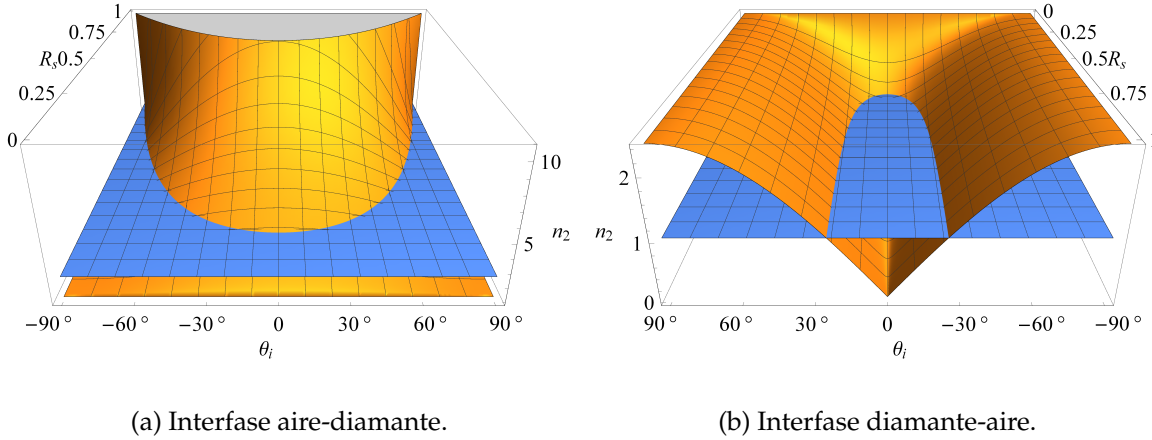


Figura 3.3: Índice de refracción a 589.29nm.

Usando la ecuación de propagación de error para funciones multivaluadas [16], se tiene que el error asociado a la función inversa es

$$\delta n_2^s = \sqrt{\left(\frac{\partial n_2^s}{\partial \theta_i} \delta \theta_i\right)^2 + \left(\frac{\partial n_2^s}{\partial \mathcal{R}_s} \delta \mathcal{R}_s\right)^2 + \left(\frac{\partial n_2^s}{\partial n_1} \delta n_1\right)^2}, \quad (3.6)$$

pero si hacemos que n_1 sea casi constante para una longitud de onda específica, ya que también depende de las condiciones ambientales que en éste trabajo se ignorarán, $\delta n_1 = 0$ y se tiene que la Ec. (3.6) se reduce a

$$\delta n_2^s = \sqrt{\left(\frac{\partial n_2^s}{\partial \theta_i} \delta \theta_i\right)^2 + \left(\frac{\partial n_2^s}{\partial \mathcal{R}_s} \delta \mathcal{R}_s\right)^2}. \quad (3.7)$$

En las Figuras 3.4 y 3.5 se puede observar el error teórico asumiendo que $\delta \mathcal{R}_s$ y $\delta \theta_i$ son constantes para todas las mediciones¹, y además $n_1 = 1$. Siendo $\delta \mathcal{R}_s$ el término que más influye en el error δn_2 , se puede observar en las Figuras 3.4b, 3.4c, 3.5b, y 3.5c, que son casi proporcionales. En cambio, aunque $\delta \theta_i$ presenta el mismo comportamiento en las Figuras 3.4d, 3.4e, 3.5d, y 3.5e, en nuestro experimento se considerará constante debido a que se usará una platina rotativa de precisión y el error reportado en el manual es 0.0005°.

Se puede observar que cuando se cambia a un medio más denso, $n_1 < n_2$, el error crece cuando la reflectancia es casi 1. También existe una discontinuidad cuando la reflectancia es 0 en donde el error diverge, Figura 3.4f, pero como se trata de la polarización perpendicular el valor mínimo es distinto de 0.

Para el caso donde se cambia a un medio menos denso, $n_1 > n_2$, el error es inversamente proporcional a la reflectancia. Aunque para este caso, debido al ángulo crítico, la región donde el error es mínimo no se puede aprovechar completamente.

¹En general no lo son y cambian para cada medición.

Para ambos casos, el error es muy pequeño. En el caso cuando $n_1 < n_2$ la región para trabajar es muy amplia en comparación del caso cuando $n_1 > n_2$. Conviene trabajar con el caso $n_1 < n_2$ ya que, aunque el error es más grande, el área de trabajo es más amplia como ya se mencionó y en el caso $n_1 > n_2$ es prácticamente imposible tomar mediciones dentro de la muestra.

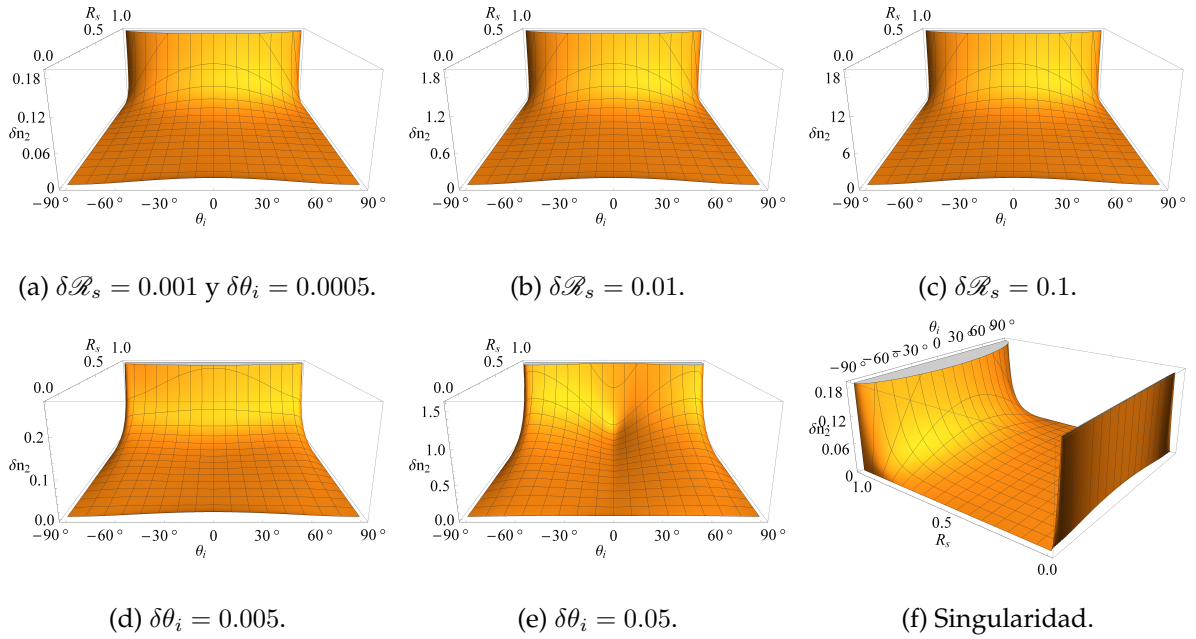


Figura 3.4: Error de la función inversa cuando $n_1 < n_2$.

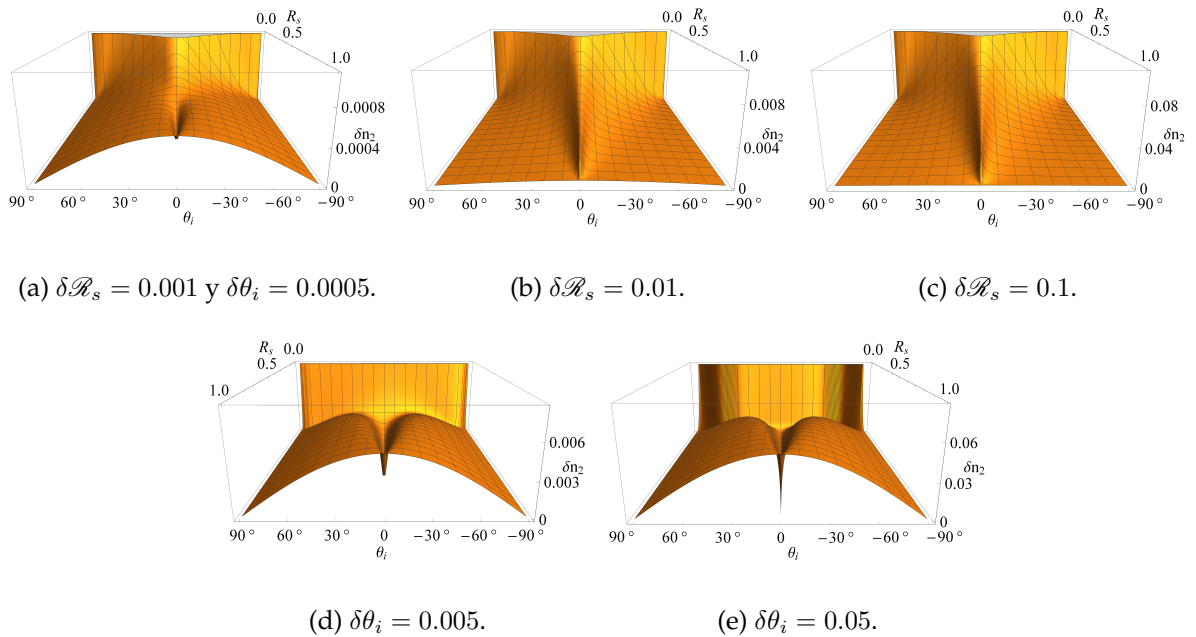


Figura 3.5: Error de la función inversa cuando $n_1 > n_2$.

Polarización Paralela

Esta polarización tiene un problema, ya que dos valores de θ_i pueden dar el mismo valor de \mathcal{R}_p como se observa en las Figuras 2.4 y 2.5, por lo que es necesario obtener primero la ecuación inversa del ángulo de incidencia para poder definir que valores de θ_i son permitidos para la función inversa del índice de refracción.

Partiendo de la Ec. (3.2) se llega a

$$\cos^2 \theta_i = n_1^2 (1 \pm \sqrt{\mathcal{R}_p})^2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^4 (1 \mp \sqrt{\mathcal{R}_p})^2 - n_1^4 (1 \pm \sqrt{\mathcal{R}_p})^2}, \quad (3.8)$$

para evitar lidiar con números complejos al sacar la raíz cuadrada se tiene que tomar en cuenta los casos $n_1 < n_2$ y $n_1 > n_2$.

Caso 1. ($n_1 < n_2$) Para este caso no hay problema, entonces no hay necesidad de cambiar signos. Se tiene entonces

$$\theta_i = \begin{cases} \arccos \left[n_1 (1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}) \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^4 (1 - \sqrt{\mathcal{R}_p})^2 - n_1^4 (1 + \sqrt{\mathcal{R}_p})^2}} \right] & \text{si } \theta_i \leq \theta_b \\ \arccos \left[n_1 (1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}) \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^4 (1 + \sqrt{\mathcal{R}_p})^2 - n_1^4 (1 - \sqrt{\mathcal{R}_p})^2}} \right] & \text{si } \theta_i \geq \theta_b \end{cases}, \quad (3.9)$$

$$n_2^p = \begin{cases} \frac{n_1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}} \sec \theta_i \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}} \right)^2 \sin^2(2\theta_i)}} & \text{si } \theta_i \leq \theta_b \\ \frac{n_1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}} \sec \theta_i \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}} \right)^2 \sin^2(2\theta_i)}} & \text{si } \theta_i \geq \theta_b \end{cases}. \quad (3.10)$$

Caso 2. ($n_1 > n_2$) Para este caso sí hay problemas en la Ec. (3.8) ya que $n_2^2 - n_1^2 < 0$, tomando ésto en cuenta se debe invertir un signo y se llega a

$$\theta_i = \begin{cases} \arccos \left[n_1 (1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}) \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^4 (1 - \sqrt{\mathcal{R}_p})^2 - n_2^4 (1 + \sqrt{\mathcal{R}_p})^2}} \right] & \text{si } \theta_i \leq \theta_b \\ \arccos \left[n_1 (1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}) \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^4 (1 + \sqrt{\mathcal{R}_p})^2 - n_2^4 (1 - \sqrt{\mathcal{R}_p})^2}} \right] & \text{si } \theta_i \geq \theta_b \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$n_2^p = \begin{cases} \frac{n_1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}} \sec \theta_i \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}} \right)^2 \sin^2(2\theta_i)}} & \text{si } \theta_i \leq \theta_b \\ \frac{n_1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}} \sec \theta_i \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\mathcal{R}_p}}{1 + \sqrt{\mathcal{R}_p}} \right)^2 \sin^2(2\theta_i)}} & \text{si } \theta_i \geq \theta_b \end{cases}. \quad (3.12)$$

Es fácil observar que a diferencia de la Ec. (3.5), las Ecs. (3.10) y (3.12) son multivaluadas. Esto se puede observar al intentar graficarlas, las superficies resultantes son muy complicadas y discontinuas, y al hacer el corte con un plano constante no se aprecia con claridad la función resultante.

En la Figura 3.6 se puede observar que incluso para el ángulo de incidencia, la función inversa obtenida consta de dos partes y para un mismo punto de reflectancia nos da dos valores diferentes del ángulo de incidencia.

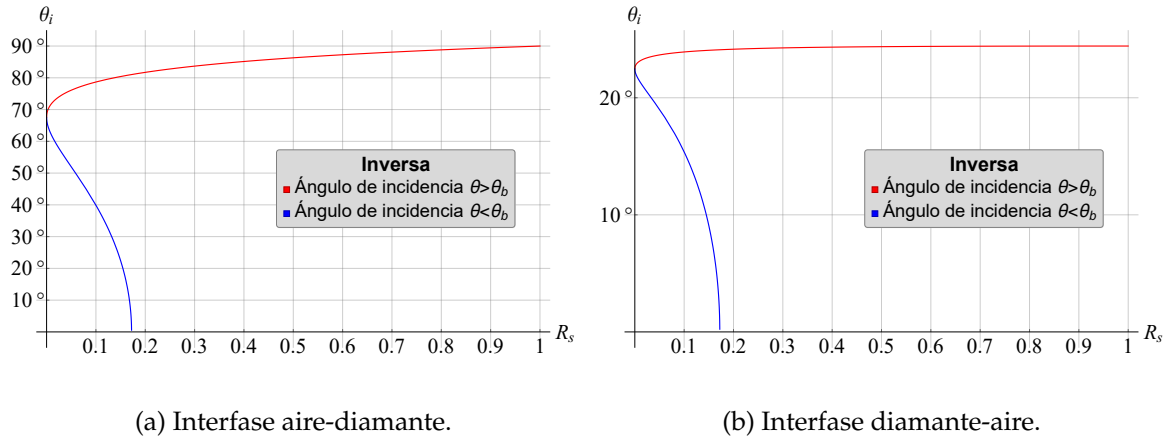


Figura 3.6: Ángulo de incidencia a 589.29nm.

Debido a que el caso usando polarización perpendicular es más fácil y práctico, se ha decidido trabajar experimental con ésta polarización.

3.1.2 Aproximación con ajustes polinómicos

Para este método aprovecharemos totalmente el hecho de que la reflectancia es una función par, es decir es simétrica respecto al eje y, además se aprovecharán las mediciones que se hicieron para calcular el índice de refracción usando la función inversa que se presentó en la Sección 3.1.1.

Primero tomamos en cuenta la expansión en series de Taylor de la Ec. (2.44) para la polarización perpendicular

$$\mathcal{R}_s = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \left(1 + \frac{2n_1}{n_2} \theta_i^2 + \frac{n_1(3n_1^2 + 12n_2n_1 - n_2^2)}{6n_2^3} \theta_i^4 + \frac{n_1(45n_1^4 + 180n_2n_1^3 + 210n_2^2n_1^2 - 60n_2^3n_1 + n_2^4)}{180n_2^5} \theta_i^6 + \dots \right), \quad (3.13)$$

sólo se tomó hasta grado 6, pero es fácil observar que las potencias impares no aparecen en la expansión en series de Taylor. También es fácil observar que el primer término constante se repite en todos los demás términos, por lo tanto, puede ser factorizado fácilmente. Ésto será de mucha utilidad, pues se intuye que el mejor polinomio para ajustar a los datos obtenidos debería ser de la forma

$$\mathcal{R}_s(\theta_i) = a_0 + a_1\theta_i^2 + a_2\theta_i^4 + a_3\theta_i^6 + a_4\theta_i^8 + a_5\theta_i^{10} + \dots, \quad (3.14)$$

entre mayor sea el grado del polinomio mejor será la aproximación a la reflectancia. La idea es aprovechar al máximo el hecho que la reflectancia es una función par, y aproximando con un polinomio obtener el valor en la región paraxial $\theta_i \approx 0^\circ$, ya que todo se reduce a resolver la ecuación

$$\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = a_0. \quad (3.15)$$

Como tomar mediciones en 0° es muy complicado, ya que la alineación del experimento debe ser muy cuidadosa para asegurar que se tiene el ángulo deseado, se propone éste método para aproximar el valor a_0 ajustando un polinomio a diferentes mediciones en la región paraxial.

En la Figura 3.7a se puede observar cómo la serie de Taylor de grado 10 se aproxima adecuadamente a la reflectancia utilizando la ecuación exacta de Fresnel.

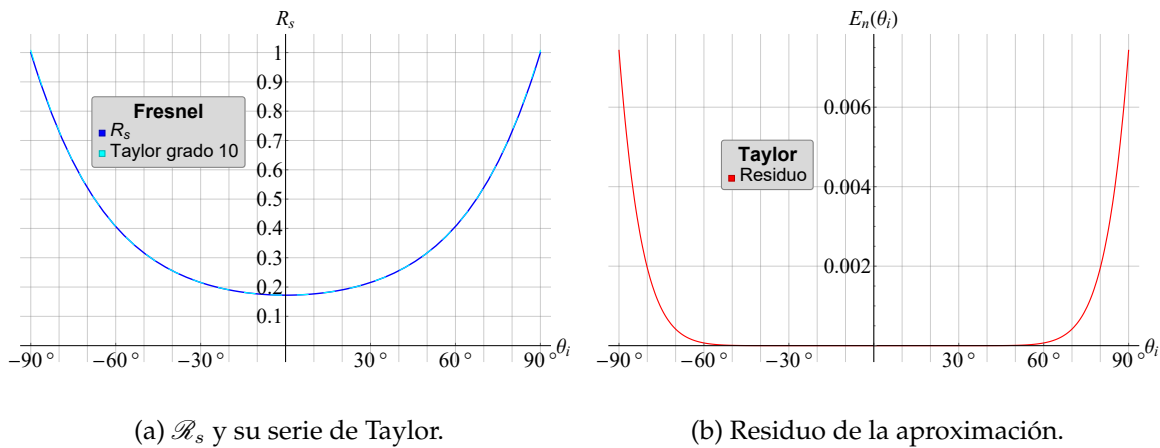


Figura 3.7: Aproximación de Taylor.

Utilizando la ecuación de Taylor con residuo [17]

$$\mathcal{R}_s(\theta_i) = \sum_{i=0}^n \frac{\mathcal{R}_s^{(i)}(\theta_0)}{i!} (\theta_i - \theta_0)^i + E_n(\theta_i), \quad (3.16)$$

donde $\mathcal{R}_s^{(i)}$ es la i -ésima derivada de \mathcal{R}_s respecto a θ_i , podemos definir al residuo como

$$E_n(\theta_i) = \mathcal{R}_s(\theta_i) - \sum_{i=0}^n \frac{\mathcal{R}_s^{(i)}(\theta_0)}{i!} (\theta_i - \theta_0)^i. \quad (3.17)$$

Para nuestro caso particular, con interfase aire-diamante, se tomó $\theta_0 = 0^\circ$ y $n = 10$, y se obtuvo la gráfica de la Figura 3.7b. Se puede observar que la aproximación es mejor en el intervalo $[-60^\circ, 60^\circ]$, es decir, la aproximación es mejor en la región paraxial. Esto nos sugiere que se deben tomar más mediciones en la región paraxial para obtener un mejor ajuste y, por lo tanto, una mayor precisión de la prueba para dar valores del índice de refracción.

3.2 Índice Complejo

De la misma manera que en la Sección 3.1, se hará uso de la simetría de la reflectancia (Figura 3.8). Sin embargo, la diferencia que introduce el hecho de que el índice de refracción sea complejo, es que se tienen dos variables desconocidas del índice de refracción: n la parte real, y k la parte imaginaria. Por ésto, se debe hacer un poco más de álgebra en vez de sólo encontrar un valor numérico en la región paraxial para obtener el índice de refracción.

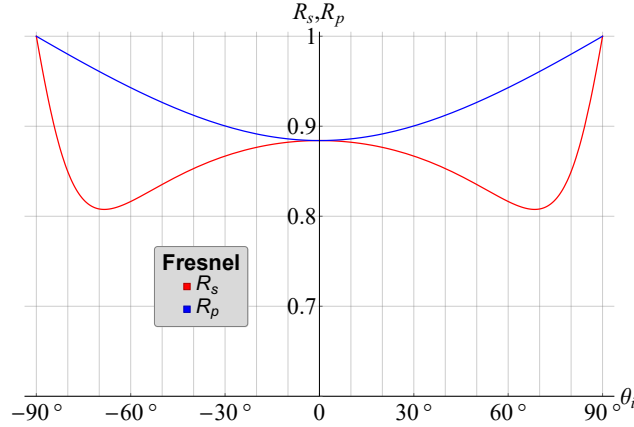


Figura 3.8: Simetría de la reflectancia en interfase aire-oro.

Primero tomamos en cuenta la expansión en series de Taylor de la Ec. (2.58) como función del ángulo de incidencia θ_i para la polarización perpendicular

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s &= \frac{k_2^2 + (n_1 - n_2)^2}{k_2^2 + (n_1 + n_2)^2} + \frac{2n_1n_2(k_2^2 + (n_1 - n_2)^2)}{(k_2^2 + n_2^2)(k_2^2 + (n_1 + n_2)^2)}\theta_i^2 \\ &+ \frac{n_1n_2 \left[n_2^2(n_1 - n_2)^2(3n_1^2 + 12n_1n_2 - n_2^2) + k_2^4(-10n_1^2 + 14n_1n_2 - 3n_2^2) + \right. \\ &\quad \left. - k_2^6 + k_2^2(-9n_1^4 + 30n_1^3n_2 - 32n_1^2n_2^2 + 28n_1n_2^3 - 3n_2^4) \right]}{6(k_2^2 + n_2^2)^3(k_2^2 + (n_1 + n_2)^2)}\theta_i^4 + \dots, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y para la polarización paralela

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \frac{k_2^2 + (n_1 - n_2)^2}{k_2^2 + (n_1 + n_2)^2} - \frac{2n_1n_2(k_2^2 + (n_1 - n_2)^2)}{(k_2^2 + n_2^2)(k_2^2 + (n_1 + n_2)^2)}\theta_i^2 \\ &+ \frac{n_1n_2 \left[n_2^2(n_1 - n_2)^2(9n_1^2 - 12n_1n_2 + 5n_2^2) + k_2^4(-22n_1^2 - 22n_1n_2 + 15n_2^2) + \right. \\ &\quad \left. 5k_2^6 + k_2^2(-27n_1^4 + 42n_1^3n_2 + 16n_1^2n_2^2 - 44n_1n_2^3 + 15n_2^4) \right]}{6(k_2^2 + n_2^2)^3(k_2^2 + (n_1 + n_2)^2)}\theta_i^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nuevamente se puede apreciar que las potencias impares son siempre nulas, es decir, no aparecen en la expansión en series de Taylor. La principal diferencia con la Ec. (3.13) radica en que no hay un término factorizable para resolver una ecuación en la región paraxial.

Usando la Ec. (3.17) podemos calcular el residuo de ambas series de Taylor, sustituyendo s por p para la polarización paralela. En las Figuras 3.9 y 3.10 se pueden observar estas aproximaciones.

Nuevamente, al observar las series de Taylor se intuye que el polinomio más adecuado para aproximar las funciones de la reflectancia es par. Un polinomio de la forma

$$\mathcal{R}_{s,p}(\theta_i) = a_0 \pm a_1\theta_i^2 + a_2^{s,p}\theta_i^4 + a_3^{s,p}\theta_i^6 + \dots + a_j^{s,p}\theta_i^{2j}, \quad (3.20)$$

puede ajustarse adecuadamente a las reflectancias en las polarizaciones s y p . Donde, comparando con las Ecs. (3.18) y (3.19), el signo $+$ corresponde a la polarización s y el signo $-$ a la polarización p , y los coeficientes $a_j^{s,p}$ se obtienen directamente de la serie de Taylor.

Para nuestro caso particular, una interfase aire-oro, se aproxima con un polinomio de grado 10. En las Figuras 3.9 y 3.10 se pueden observar los resultados de las aproximaciones tomadas.

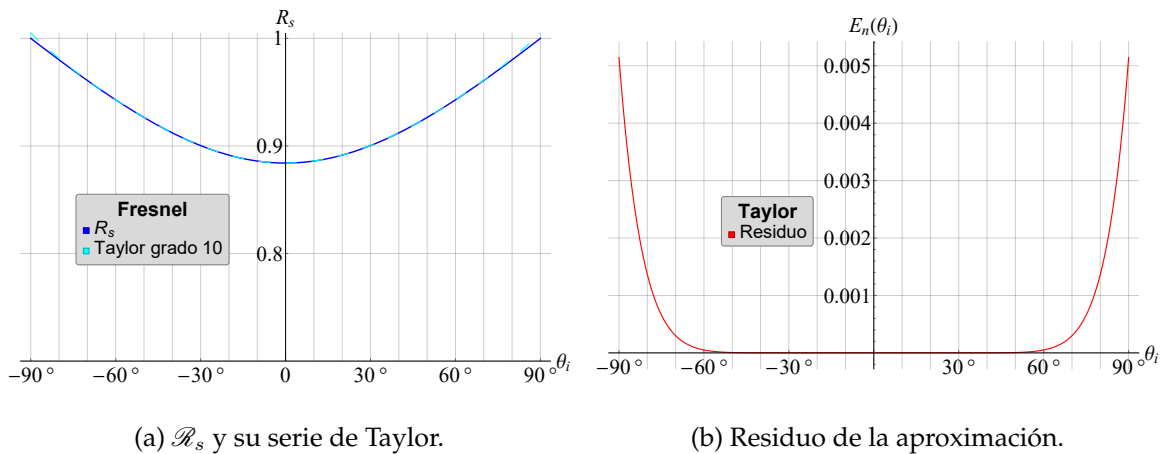


Figura 3.9: Aproximación de Taylor perpendicular.

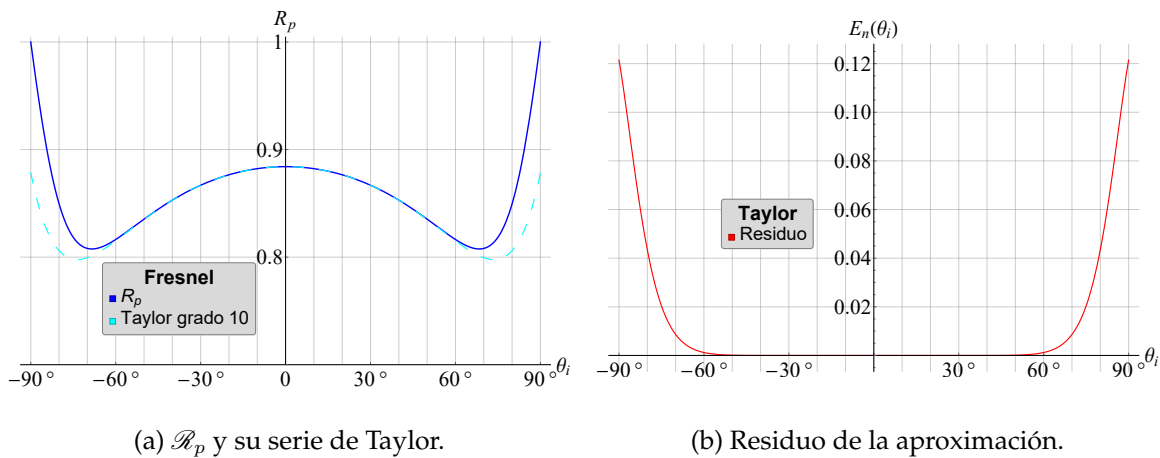


Figura 3.10: Aproximación de Taylor paralela.

En las Figuras 3.9 y 3.10 se puede apreciar que nuevamente las aproximaciones fallan para ángulos fuera del rango $[-60^\circ, 60^\circ]$. Esto nos indica que para tener una mejor aproximación se deben tomar más datos en este intervalo.

Ahora, comparando las Ecs. (3.18) y (3.19) con la Ec. (3.20) se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{k_2^2 + (n_1 - n_2)^2}{k_2^2 + (n_1 + n_2)^2}, \\ \text{y} \\ a_1 &= \frac{2n_1n_2(k_2^2 + (n_1 - n_2)^2)}{(k_2^2 + n_2^2)(k_2^2 + (n_1 + n_2)^2)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

es decir,

$$a_0 = \frac{k_2^2 + (n_1 - n_2)^2}{k_2^2 + (n_1 + n_2)^2} \Rightarrow k_2^2 + n_2^2 + n_1^2 = \frac{1 + a_0}{1 - a_0} 2n_1n_2, \quad (3.22)$$

por otro lado,

$$a_1 = \frac{2n_1n_2}{k_2^2 + n_2^2} a_0 \Rightarrow k_2^2 = \frac{2n_1n_2a_0}{a_1} - n_2^2. \quad (3.23)$$

Sustituyendo la Ec. (3.23) en la Ec. (3.22) y despejando n_2 se tiene

$$n_2 = \frac{n_1}{2} \frac{a_1(1 - a_0)}{a_1(1 + a_0) - a_0(1 - a_0)}, \quad (3.24)$$

y por último, sustituyendo la Ec. (3.24) en la Ec. (3.23) para obtener el valor de k_2 se tiene

$$k_2 = \sqrt{\frac{n_1^2 a_0}{a_1} \frac{a_1(1 - a_0)}{a_1(1 + a_0) - a_0(1 - a_0)} - \frac{n_1^2}{4} \left(\frac{a_1(1 - a_0)}{a_1(1 + a_0) - a_0(1 - a_0)} \right)^2}. \quad (3.25)$$

En ambos casos, conocemos el valor para n_1 y los valores para a_0 y a_1 se obtienen de los ajustes experimentales. Éste es un método puramente clásico para obtener los valores del índice de refracción, tanto la parte real como la imaginaria de muestras metálicas.

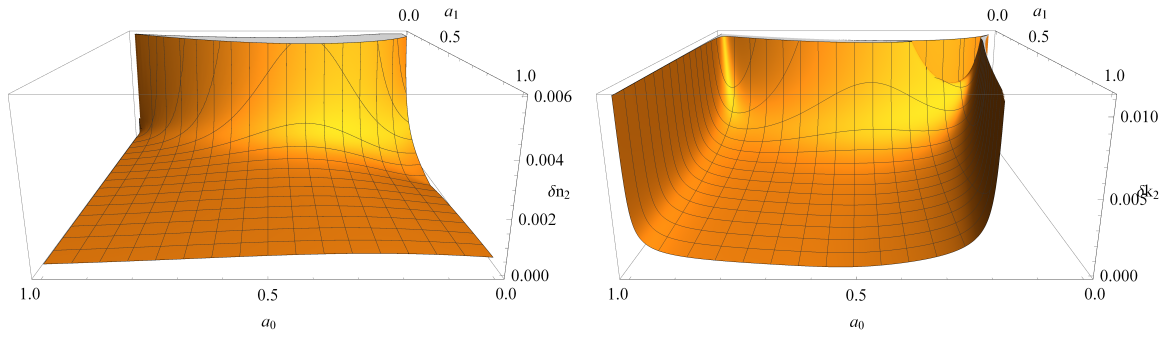
Usando la ecuación de propagación de error para funciones multivaluadas [16], se tiene que el error asociado a n_2 y k_2 está dado por

$$\delta n_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial n_2}{\partial a_0} \delta a_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial n_2}{\partial a_1} \delta a_1 \right)^2}, \quad (3.26)$$

$$\delta k_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial k_2}{\partial a_0} \delta a_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial k_2}{\partial a_1} \delta a_1 \right)^2}. \quad (3.27)$$

En la Figura 3.11 se puede observar el error teórico asumiendo que δa_0 y δa_1 son casi constantes, teniendo relativamente más error en la medición de la parte imaginaria.

El valor numérico de a_0 se tomó en el rango $[0, 1]$, ya que al ser el término constante físicamente tiene que estar en éste rango. No puede ser mayor a 1 porque el material estaría reflejando más de lo que está incidiendo, y de igual manera no puede ser menor a 0 ya que estaría absorbiendo más de lo que está incidiendo; entonces, por conservación de la energía ésto no puede ser posible.

(a) Error en n_2 .(b) Error en k_2 .Figura 3.11: Errores de n y k cuando $\delta a_0 = 0.001$ y $\delta a_1 = 0.001$

El valor numérico de a_1 se tomó en el rango $[0, 1]$ sin ninguna razón en especial. Los errores δa_0 y δa_1 se tomaron arbitrariamente, dependen del ajuste y entre mejor sea éste mejor será la precisión del método.

Capítulo 4

Desarrollo Experimental

En el Capítulo 3 se presentó la teoría necesaria para medir el índice de refracción de muestras dieléctricas y conductoras, las muestras bajo prueba usadas fueron con las que se contaba en el Laboratorio de Pruebas Ópticas del CCADET-UNAM. En el presente capítulo se explicará el montaje experimental, así como los problemas inherentes al mismo. Se muestran los resultados experimentales de las pruebas y los problemas asociados al pulimento de muestras metálicas.

4.1 Pruebas en Dieléctricos

4.1.1 Montaje Experimental

Para el montaje experimental utilizamos un láser polarizado de Ión-Argón de tres líneas espectrales de emisión sintonizables (514, 488, y 457nm) modelo Stellar-Pro Select 150 de Modu-laser™, así como un diodo láser (532nm) modelo CPS532 de Thorlabs®, un polarizador Polaroid®, una platina de precisión rotativa, y un potenciómetro óptico ambos de Edmund Optics®.

La muestra bajo prueba fue un prisma transparente de cristal desconocido, se caracterizó el índice de refracción usando el método de desviación mínima y usando el ángulo de Brewster [3]. Para ambos métodos se hizo un barrido del ángulo de incidencia y se ajustó una curva a los datos obtenidos para encontrar los valores mínimos, la desviación angular mínima y la reflectancia mínima para utilizar los métodos presentados en el Apéndice A.

Los índices obtenidos por ambos métodos se reportan en la Tabla 4.1.

$\lambda(nm)$	Desviación mínima	Ángulo de Brewster	Promedio
532	1.479 ± 0.001	1.4788 ± 0.0004	1.4788 ± 0.0004
488	1.493 ± 0.001	1.4944 ± 0.0003	1.4943 ± 0.0003
457	1.525 ± 0.002	1.5248 ± 0.0004	1.5248 ± 0.0004

Tabla 4.1: Índices de refracción del prisma a diferentes longitudes de onda.

En la Figura 4.1 se muestra el diagrama del arreglo experimental, mientras que en la Figura 4.2 se observa el arreglo experimental.

Se utiliza el polarizador para asegurar que el estado de polarización del rayo incidente sea perpendicular al plano de incidencia. La platina rotativa se utiliza para variar el ángulo de incidencia en el rango $[-80^\circ, 80^\circ]$, y con el potenciómetro óptico se medirá la irradiancia incidente y la irradiancia reflejada por el prisma bajo prueba.

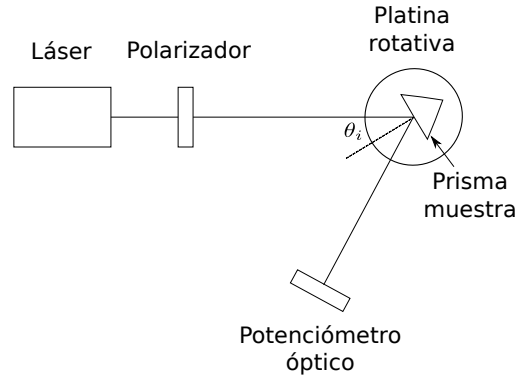


Figura 4.1: Diagrama del arreglo experimental.

Usando la definición presentada en la Ec. (2.43), la reflectancia se obtiene dividiendo la intensidad reflejada entre la intensidad incidente. Se supondrá que la intensidad incidente es estable en todas las mediciones, por lo cual será únicamente necesario medir una vez la intensidad incidente y se usa la misma para todas las intensidades reflejadas medidas.

El índice de refracción se obtiene experimentalmente como se mencionó en la Sección 3.1.2, usando una extrapolación de un ajuste polinómico a la región paraxial. Se tomarán más mediciones en el rango $[-50^\circ, 50^\circ]$, en pasos de 5° , con el fin de mejorar la aproximación en la región paraxial.

El láser de ión-argón mostró mucha inestabilidad para mantener la intensidad incidente constante, en especial en la longitud de onda $\lambda = 514nm$, por lo cual esta longitud de onda fue ignorada en la toma de datos. Para sustituir ésta longitud de onda se utilizó un diodo láser ($\lambda = 532nm$), el cual presentó una mayor estabilidad en la intensidad del haz.

Los láseres utilizados estaban casi polarizados verticalmente, se encontraba unos grados fuera del eje vertical, por lo que el uso del polarizador fue necesario para asegurar que el estado de polarización era perpendicular al plano de incidencia. Para asegurar que el estado de polarización era el correcto, se utilizó un polarímetro Thorlabs®PAX5710VIS-T que nos proporcionaba el estado de polarización (véase Figura 4.3).

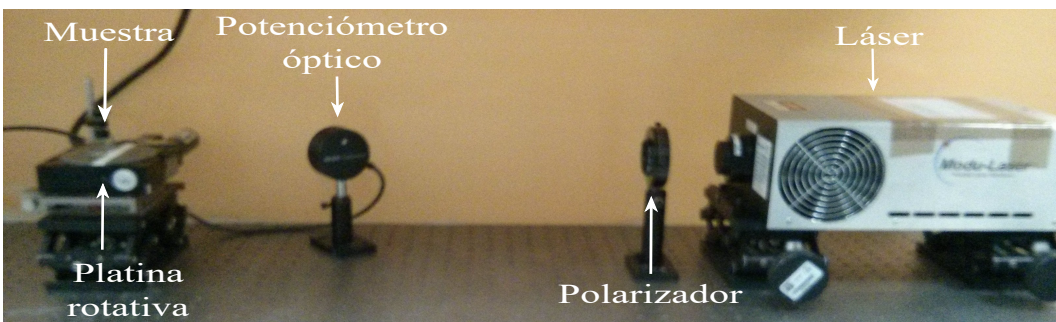


Figura 4.2: Arreglo experimental.

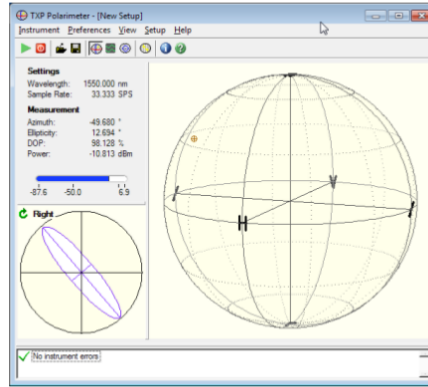


Figura 4.3: Software del polarímetro.

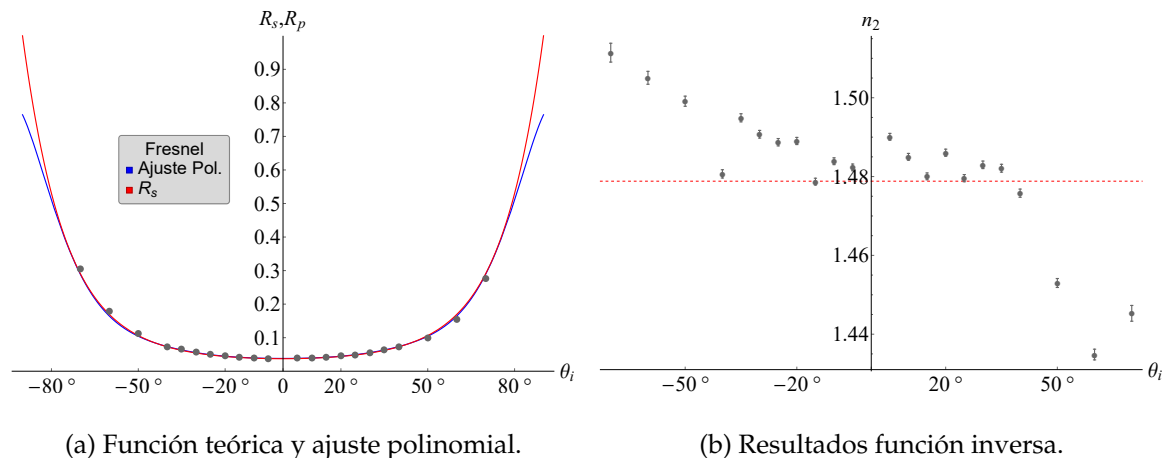
4.1.2 Resultados

Para $\lambda = 532nm$ se tomaron 26 mediciones, a las cuales se ajustó un polinomio de grado 10, con una $R^2 = 0.9928$, cuyos coeficientes se reportan en la Tabla 4.2.

Coefficiente	Valor	Error
a_0	0.0381	0.0001
a_1	0.0456	0.0018
a_2	0.0883	0.0115
a_3	-0.1173	0.0260
a_4	0.1156	0.0237
a_5	-0.0268	0.0073

Tabla 4.2: Coeficientes del ajuste ($\lambda = 532nm$).

En la Figura 4.4a se muestran la función teórica usando los índices de refracción de la Tabla 4.1, y el ajuste polinomial a los datos que se tomaron. En la Figura 4.4b se pueden observar los valores obtenidos usando la función inversa de la Ec. (3.5) y el valor obtenido de la Tabla 4.1.



(a) Función teórica y ajuste polinomial.

(b) Resultados función inversa.

Figura 4.4: Resultados ($\lambda = 532nm$).

Para $\lambda = 488nm$ se tomaron 26 mediciones, a las cuales se ajustó un polinomio de grado 10, con una $R^2 = 0.9935$, cuyos coeficientes se reportan en la Tabla 4.3.

Coficiente	Valor	Error
a_0	0.0385	0.0001
a_1	0.0781	0.0020
a_2	-0.0338	0.0105
a_3	0.0590	0.0191
a_4	0.0186	0.0033
a_5	-0.0093	0.0033

Tabla 4.3: Coeficientes del ajuste ($\lambda = 488nm$).

En la Figura 4.5a se muestran la función teórica usando los índices de refracción de la Tabla 4.1, y el ajuste polinomial a los datos que se tomaron. En la Figura 4.5b se pueden observar los valores obtenidos usando la función inversa de la Ec. (3.5) y el valor obtenido de la Tabla 4.1.

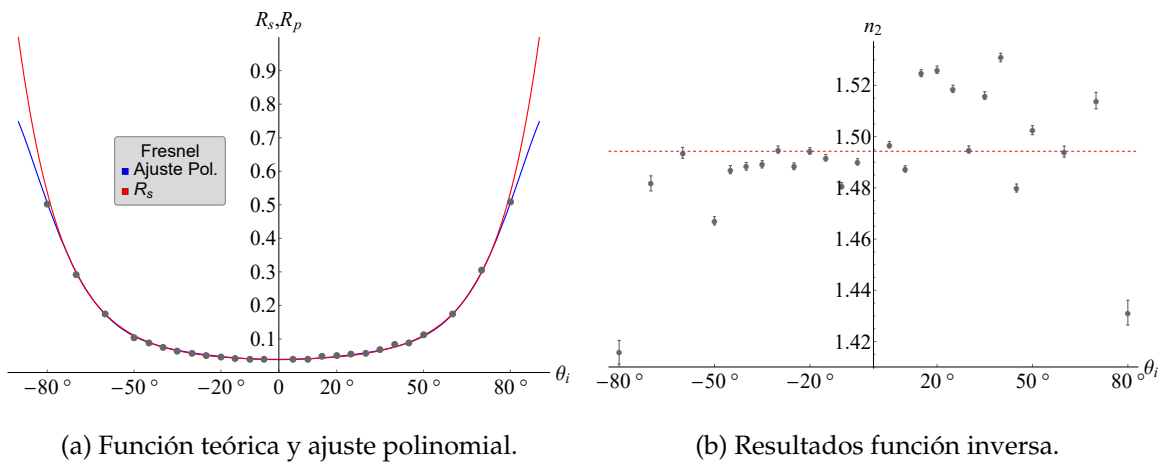


Figura 4.5: Resultados ($\lambda = 488nm$).

Para $\lambda = 457nm$ se tomaron 26 mediciones, a las cuales se ajustó un polinomio de grado 10, con una $R^2 = 0.9964$, cuyos coeficientes se reportan en la Tabla 4.4.

Coficiente	Valor	Error
a_0	0.0437	0.0001
a_1	0.0612	0.0022
a_2	-0.0485	0.0111
a_3	0.1898	0.0201
a_4	-0.1079	0.0144
a_5	0.0244	0.0034

Tabla 4.4: Coeficientes del ajuste ($\lambda = 457nm$).

En la Figura 4.6a se muestran la función teórica usando los índices de refracción de la Tabla 4.1, y el ajuste polinomial a los datos que se tomaron. En la Figura 4.6b se pueden

observar los valores obtenidos usando la función inversa de la Ec. (3.5) y el valor obtenido de la Tabla 4.1.

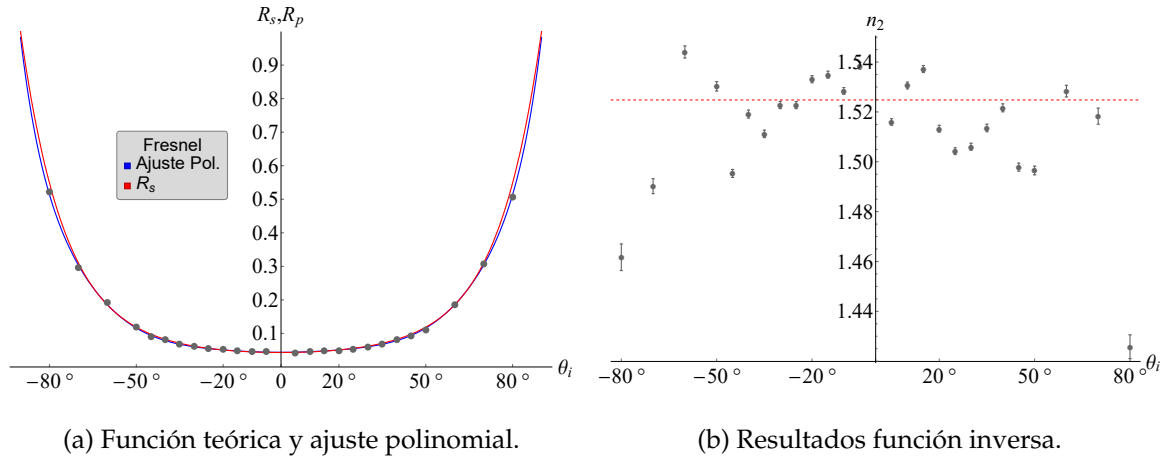


Figura 4.6: Resultados ($\lambda = 457nm$).

Se puede observar que, aunque las mediciones experimentales parecen simétricas en las Figuras 4.4a, 4.5a, y 4.6a, la función inversa es muy sensible y los valores obtenidos no son simétricos como se muestra en la Figura 4.4b, 4.5b, y 4.6b. La falta de simetría en la función inversa se puede deber a que la intensidad del láser utilizado varía con el tiempo, y a que no se aseguró que los ángulos en los que se midió fueran los correctos. Parece que la aproximación polinomial no es tan sensible a éstos errores, y por ende se obtiene un mejor resultado.

Ambos métodos funcionan mejor en la región paraxial y se deberían tomar más mediciones en ésta región.

En la Tabla 4.5 se reportan los índices de refracción obtenidos utilizando ambos métodos con su error relativo respecto a los obtenidos en la Tabla 4.1.

$\lambda(nm)$	Función inversa		Ajuste polinomial	
532	Índice	1.4826 ± 0.0002	Índice	1.4851 ± 0.0006
	Error (%)	0.4260	Error (%)	0.2520
488	Índice	1.4962 ± 0.0003	Índice	1.4882 ± 0.0008
	Error (%)	0.1282	Error (%)	0.4078
457	Índice	1.5191 ± 0.0003	Índice	1.5288 ± 0.0008
	Error (%)	0.3743	Error (%)	0.2618

Tabla 4.5: Índices experimentales.

Aunque los resultados mostrados en las Figuras 4.4, 4.5, y 4.6 parecen no ser satisfactorios, en la Tabla 4.5 se observa que el error relativo es muy pequeño. Ésto quiere decir que ambos métodos tienen una precisión aceptable.

En la Figura 4.7 podemos observar el error absoluto de los ajustes con la función usando el índice medido de la Tabla 4.1, definidos como

$$E(\theta_i) = |R_s(\theta_i) - f_s(\theta_i)|, \quad (4.1)$$

donde $f_s(\theta_i)$ es el ajuste polinomial.

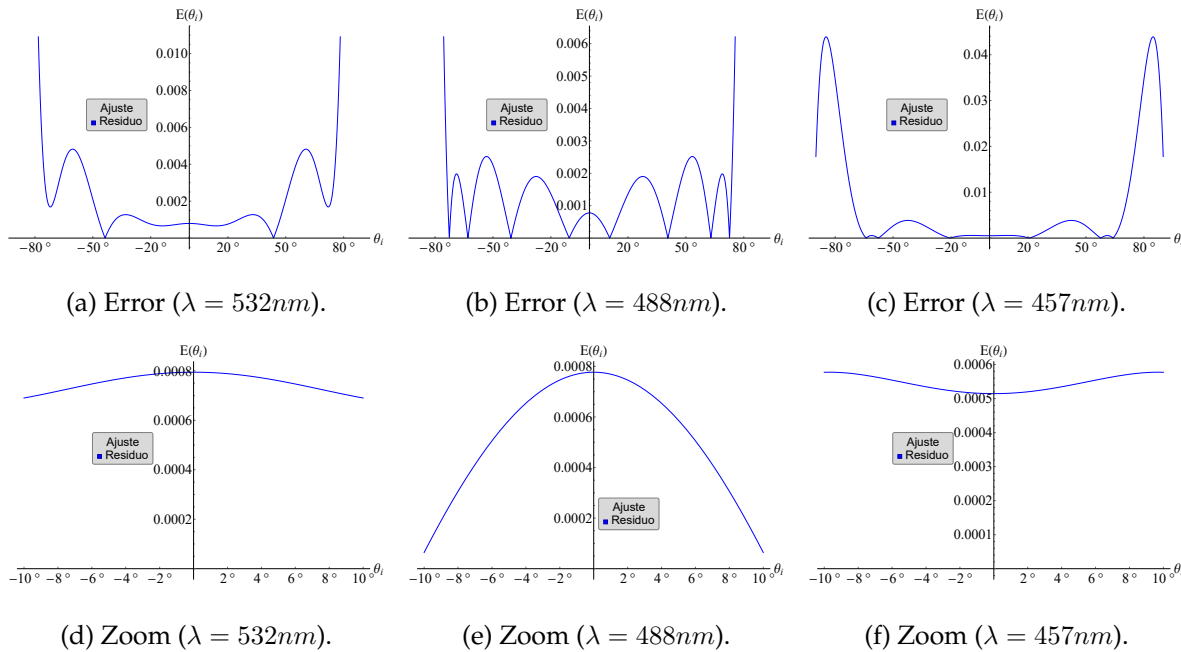


Figura 4.7: Residuos.

Podemos fácilmente observar que la extrapolación de nuestro ajuste en la región paraxial es muy preciso como se deseaba, obteniendo el índice de refracción con buena precisión.

4.2 Pruebas en Conductores

4.2.1 Montaje Experimental

Para el montaje experimental utilizamos un diodo láser ($532nm$) modelo CPS532 de Thorlabs®, un diodo de un apuntador comercial ($405nm$), un polarizador Polaroid®, una platina de precisión rotativa, y un potenciómetro óptico ambos de Edmund Optics®.

Se utilizaron varias muestras metálicas sin caracterizar, una de cobre, una de aluminio, una de hierro, y una de oro.

En la Figura 4.8a se presenta el diagrama del arreglo experimental.

El procedimiento para tomar datos es el mismo que para el caso de dieléctricos presentado en la sección 4.1.1. Sin embargo, debido a efectos geométricos el haz incidente se va ensanchando en una elipse conforme el ángulo de incidencia crece (véase Figura 4.8b) no se pudieron tomar datos fuera del rango $[-55^\circ, 55^\circ]$.

Por otra parte, debido a que algunas de las muestras no estaban apropiadamente pulidas, se tenían efectos de esparcimiento por reflexión difusa. En las Figuras 4.8 se observa como el nivel de pulido afectaba.

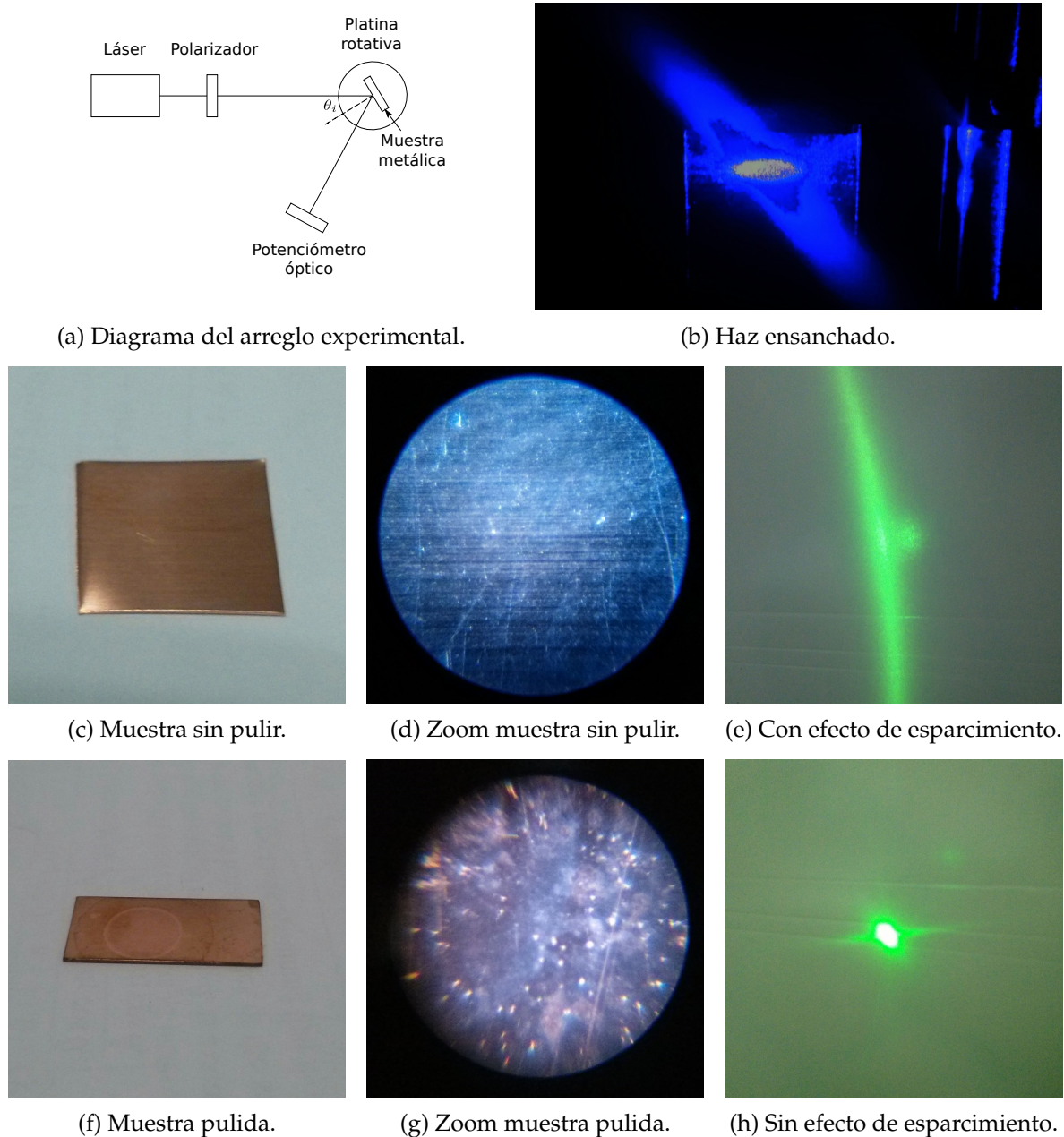


Figura 4.8: Diagrama del arreglo experimental, haz ensanchado, y efecto de esparcimiento de la luz debido al nivel de pulimiento.

4.2.2 Resultados

Para ambas polarizaciones s y p se tomaron 22 mediciones y se hicieron ajustes polinomiales para obtener la parte real y la parte imaginaria del índice de refracción del metal usando las Ecs. (3.24) y (3.25).

En la Tabla 4.6 se reportan los resultados calculados para la polarización s y en la Tabla 4.7 se reportan los de la polarización p .

Muestra	Polinomio	R^2	$n \pm \delta n$	$k \pm \delta k$	θ_B
Cu (532nm)	4°	0.9929	1.3392 ± 0.0733	1.4957 ± 0.0265	61.0982°
Al (532nm)	4°	0.9661	0.2000 ± 0.0411	1.6458 ± 0.2278	53.8343°
Fe (532nm)	12°	0.9207	1.0228 ± 0.1029	1.7045 ± 0.0844	60.2262°
Fe (405nm)	2°	0.9873	1.4168 ± 0.0241	1.5699 ± 0.0081	62.5251°
Au (532nm)	4°	0.9912	1.0999 ± 0.1703	1.9483 ± 0.1424	63.4383°

Tabla 4.6: Polarización perpendicular.

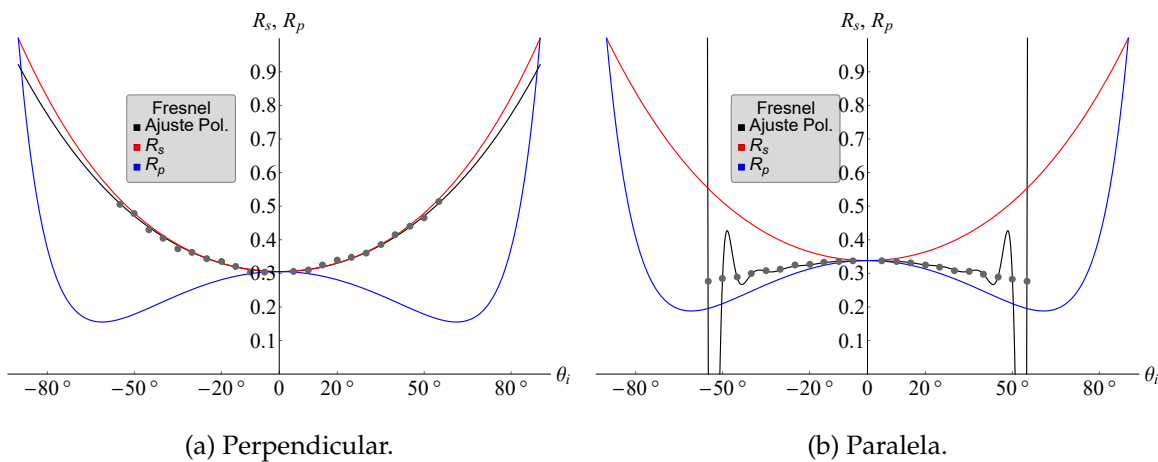
Muestra	Polinomio	R^2	$n \pm \delta n$	$k \pm \delta k$	θ_B
Cu (532nm)	20°	0.9960	1.2355 ± 0.0540	1.5711 ± 0.0278	60.7601°
Al (532nm)	6°	0.9433	0.2130 ± 0.0236	2.0230 ± 0.1313	60.1713°
Fe (532nm)	10°	0.9933	0.9270 ± 0.0484	1.6745 ± 0.0457	59.0229°
Fe (405nm)	16°	0.9994	1.2850 ± 0.0188	1.5407 ± 0.0098	60.9599°
Au (532nm)	4°	0.9917	1.0199 ± 0.1097	1.8803 ± 0.0999	62.1850°

Tabla 4.7: Polarización paralela.

Se puede observar que los polinomios usados para ajustar a los datos experimentales no son del mismo grado. El grado del polinomio usado se obtuvo probando con diferentes ajustes, ya que al sustituir los coeficientes obtenidos en las Ecs. (3.24) y (3.25) daban resultados negativos y en algunos casos imaginarios, por lo que en futuros trabajos se investigará más acerca de estas discrepancias.

Los resultados obtenidos en las diferentes polarizaciones difieren considerablemente, se observa que en el 0° no se mide la misma irradiancia para ambas polarizaciones como debería ser teóricamente. Ésto se puede deber a que al pulir las muestras se genera una aparente *preferencia* a cierta polarización para reflejar dependiendo de la dirección de los surcos creados.

En las Figuras 4.9-4.18 se pueden apreciar los resultados experimentales junto con el ajuste polinomial usado y la función teórica usando los índices calculados. También se muestran los residuos, obtenidos con la Ec. (4.1), en la región paraxial para cada ajuste.

Figura 4.9: Función teórica y ajuste polinomial del Cu ($\lambda = 532nm$).

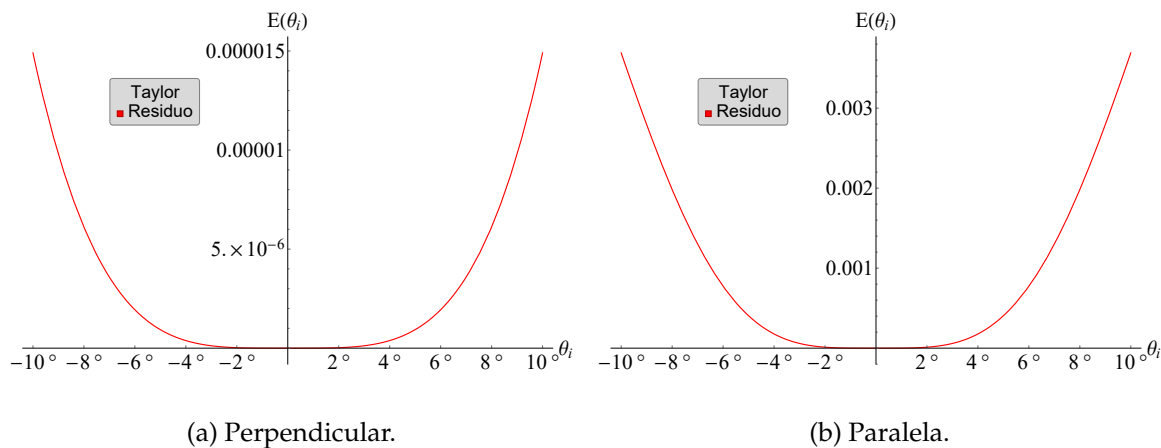


Figura 4.10: Residuo en la región paraxial Cu ($\lambda = 532nm$).

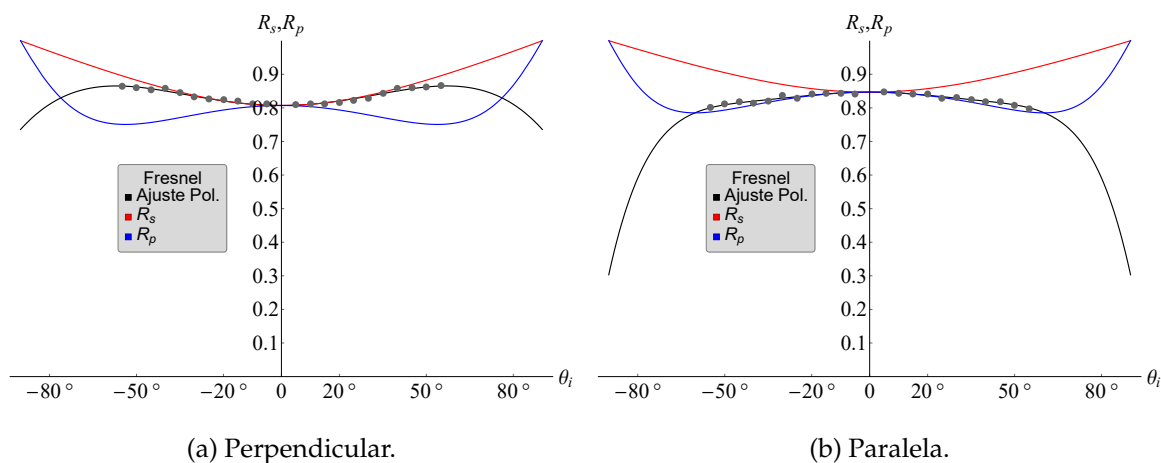


Figura 4.11: Función teórica y ajuste polinomial del Al ($\lambda = 532nm$).

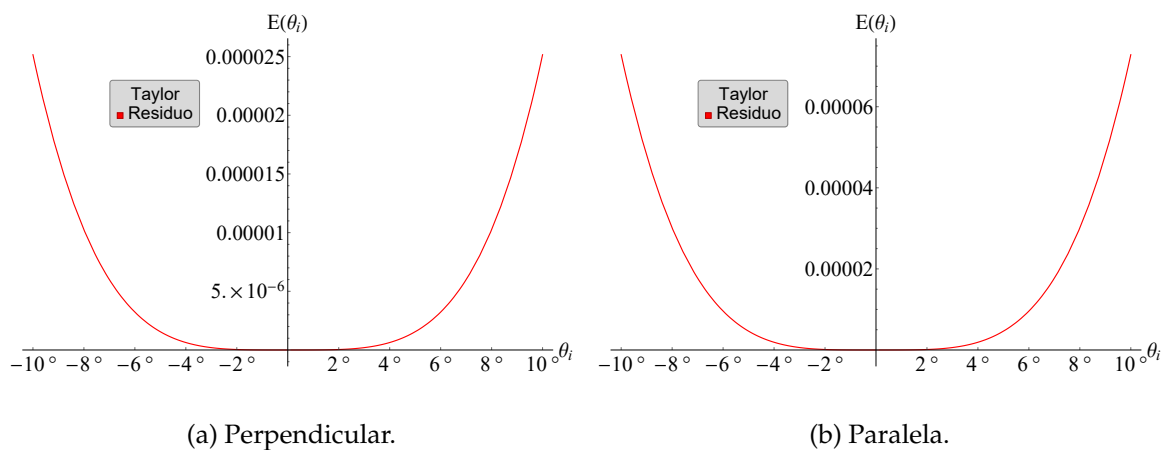


Figura 4.12: Residuo en la región paraxial Al ($\lambda = 532nm$).

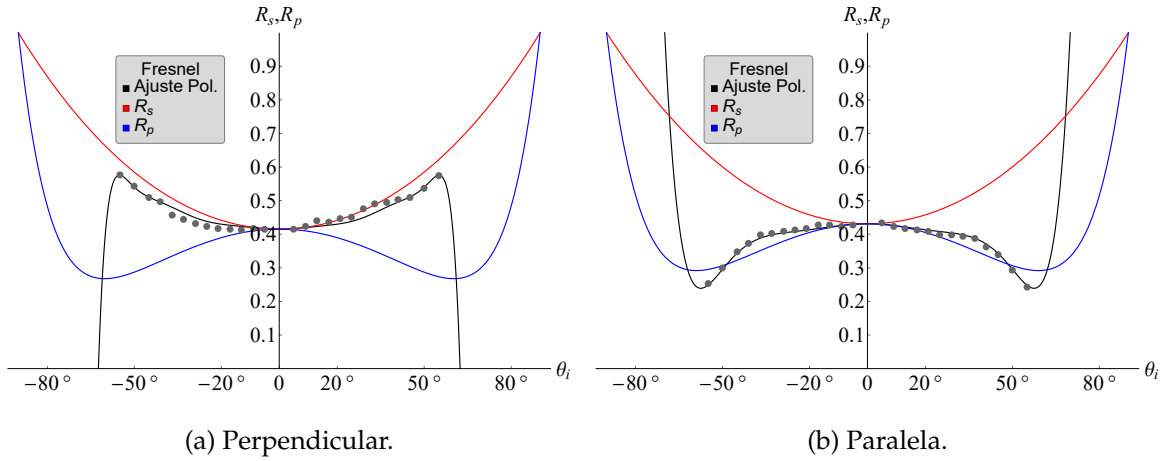


Figura 4.13: Función teórica y ajuste polinomial del Fe ($\lambda = 532nm$).

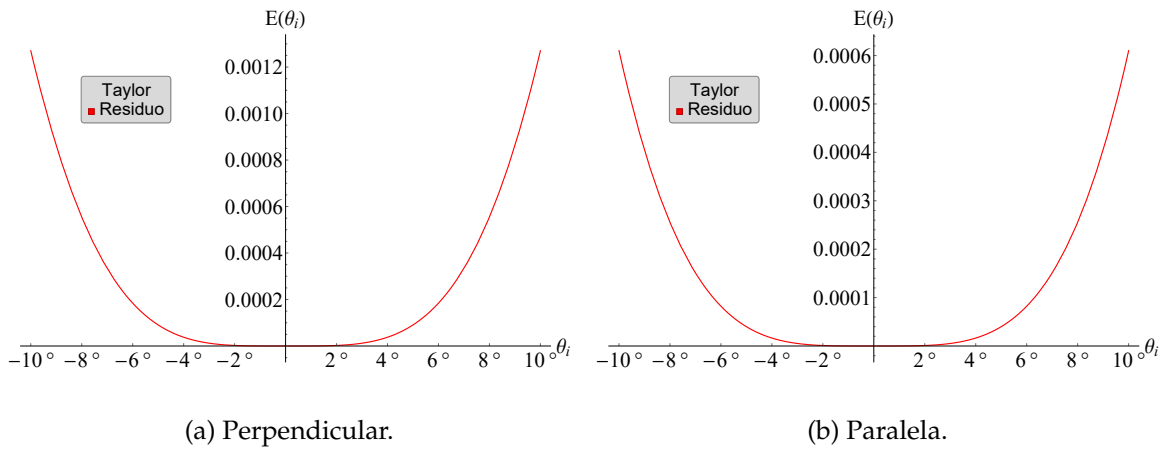


Figura 4.14: Residuo en la región paraxial Fe ($\lambda = 532nm$).

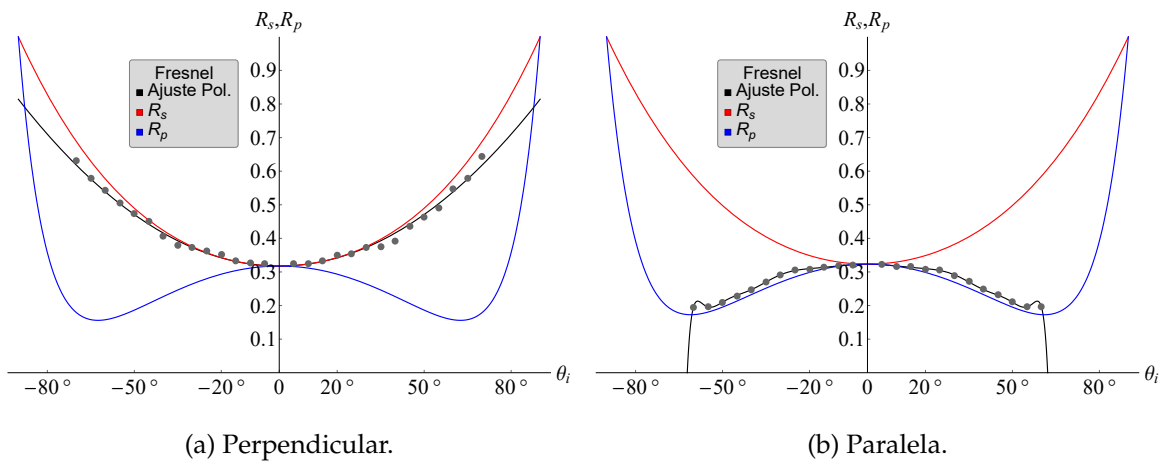


Figura 4.15: Función teórica y ajuste polinomial del Fe ($\lambda = 405nm$).

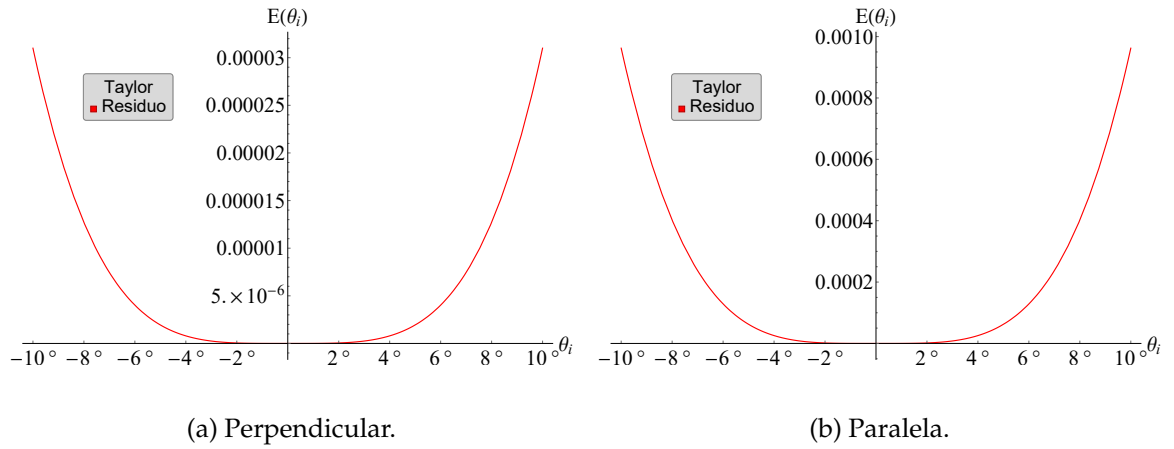


Figura 4.16: Residuo en la región paraxial Fe ($\lambda = 405nm$).

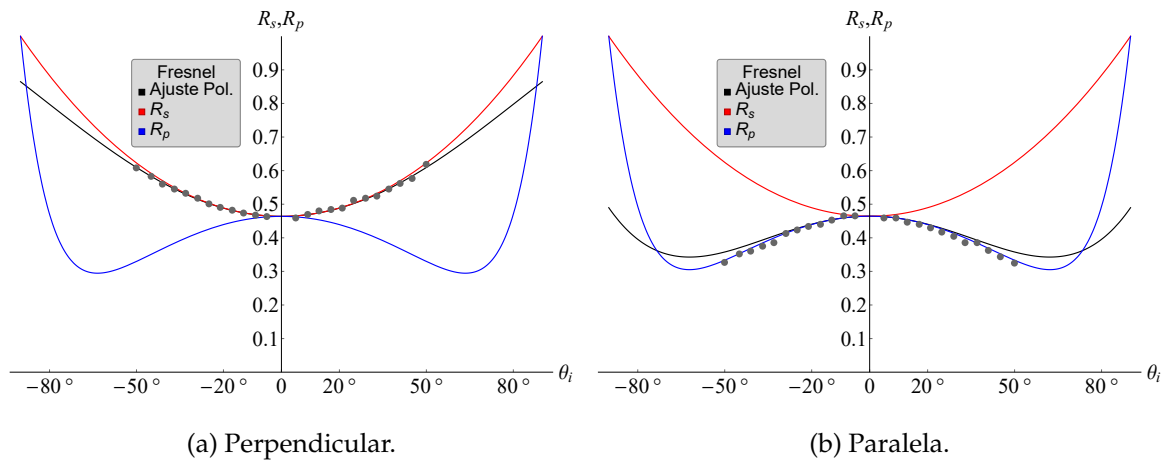


Figura 4.17: Función teórica y ajuste polinomial del Au ($\lambda = 532nm$).

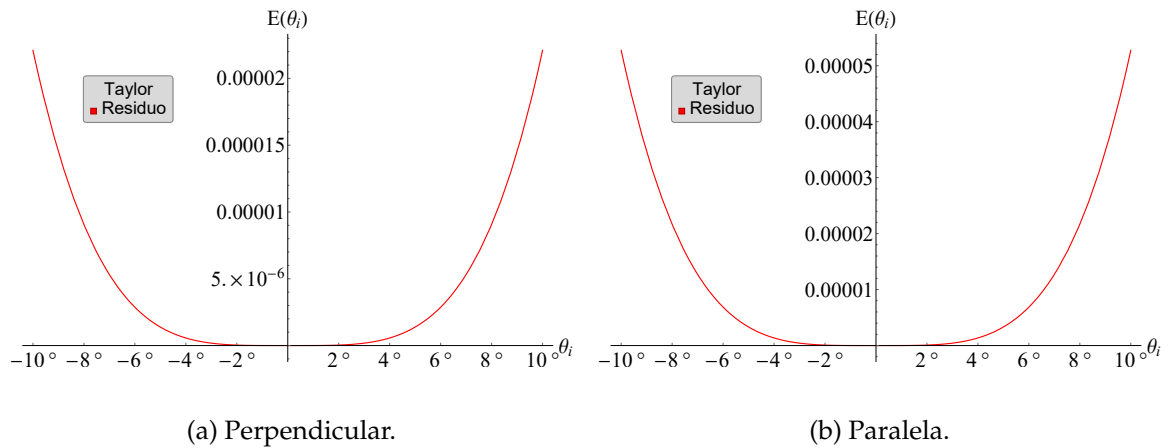
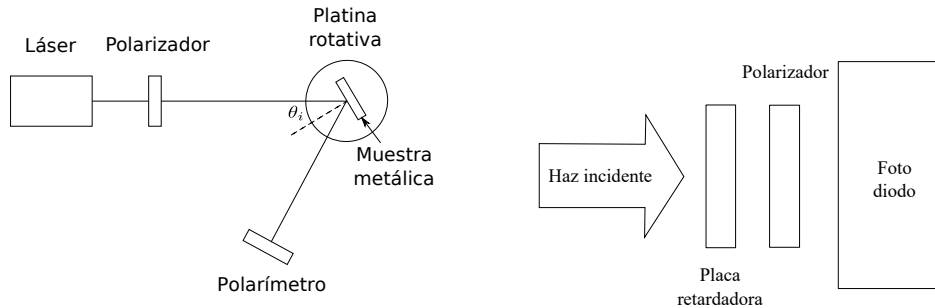


Figura 4.18: Residuo en la región paraxial Au ($\lambda = 532nm$).

4.3 Elipse de Polarización Reflejada

Para el montaje experimental utilizamos un diodo de un apuntador comercial (405nm), un polarizador Polaroid®, una platina de precisión rotativa de Edmund Optics®, y un polarímetro Thorlabs®PAX5710VIS-T.

En la Figura 4.19a se muestra el diagrama del arreglo experimental. En la Figura 4.19b se aprecian las componentes del polarímetro, la placa retardadora de $\lambda/4$ está girando para cambiar el estado de polarización del haz incidente, y el polarizador sólo deja pasar la polarización que se quiere para que el fotodiodo actúe como un potenciómetro óptico.



(a) Diagrama del arreglo experimental.

(b) Polarímetro.

Figura 4.19: Elipse de polarización.

El polarímetro proporciona varios datos como se muestra en la Figura 4.20, nos interesan el ángulo azimutal α para definir la razón entre las amplitudes por la relación

$$\tan \alpha = \frac{R_s}{R_p}, \quad (4.2)$$

y junto con la diferencia de fase Δ poder graficar las elipses usando la Ec. (2.68).

"Stokes 1"	"Stokes 2"	"Stokes 3"	"Azimuth [°]"	"Ellipticity [°]"	"Power Split Ratio"	"Phase Difference [°]"
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.58E-002	-5.49E+001	-7.39E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.40E-001	-9.40E-001	-2.56E-002	-5.49E+001	-7.33E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.55E-002	-5.49E+001	-7.32E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.56E-002	-5.49E+001	-7.32E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.56E-002	-5.49E+001	-7.30E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.56E-002	-5.49E+001	-7.33E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.57E-002	-5.49E+001	-7.35E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.40E-001	-9.40E-001	-2.58E-002	-5.49E+001	-7.40E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.40E-001	-9.40E-001	-2.57E-002	-5.49E+001	-7.35E-001	3.30E-001	-1.78E+002
-3.39E-001	-9.40E-001	-2.58E-002	-5.49E+001	-7.38E-001	3.30E-001	-1.78E+002

Figura 4.20: Datos del polarímetro.

Se toman los datos cada 5° y se grafican las elipses experimentales para compararlas con las elipses teóricas. En la Figura 4.21 se muestran las elipses teóricas, mientras que en la Figura 4.22 se muestran las obtenidas con el polarímetro. En la Tabla 4.8 se reportan los parámetros obtenidos del polarímetro.

Debido a que las componentes de las elipses son distintas, se necesita normalizar las elipses para poder compararlas cuantitativamente. Lamentablemente no se consiguió hacer la normalización en éste trabajo, sin embargo, cualitativamente se pueden comparar a simple vista, y se observa que las elipses son muy similares.

Al comparar las Figuras 4.21 y 4.22 se puede observar que las elipses se parecen demasiado, es decir, las elipses medidas concuerdan con lo predicho por la teoría. Las

diferencias pueden deberse a la alineación del experimento, además, no se aseguró que los ángulos de incidencia que se tomaron en cuenta eran completamente correctos comprobando que la platina estaba correctamente calibrada.

θ_i	$\tan \alpha$	Δ
5°	-1.4238	178.4483°
10°	-1.4524	177.1666°
15°	-1.4690	178.9765°
20°	-1.4922	178.5097°
25°	-1.52587	175.1721°
30°	-1.5672	170.9664°

θ_i	$\tan \alpha$	Δ
35°	-1.6289	165.9652°
40°	-1.7129	159.7619°
45°	-1.8262	151.3403°
50°	-2.0087	141.9913°
55°	-2.3455	130.6375°
60°	-3.0831	117.2056°

θ_i	$\tan \alpha$	Δ
65°	6.1903	101.4652°
70°	11.5295	84.3964°
75°	2.6979	66.1784°
80°	1.6174	46.3525°
85°	1.23592	25.7059°

Tabla 4.8: Parámetros de las elipses.

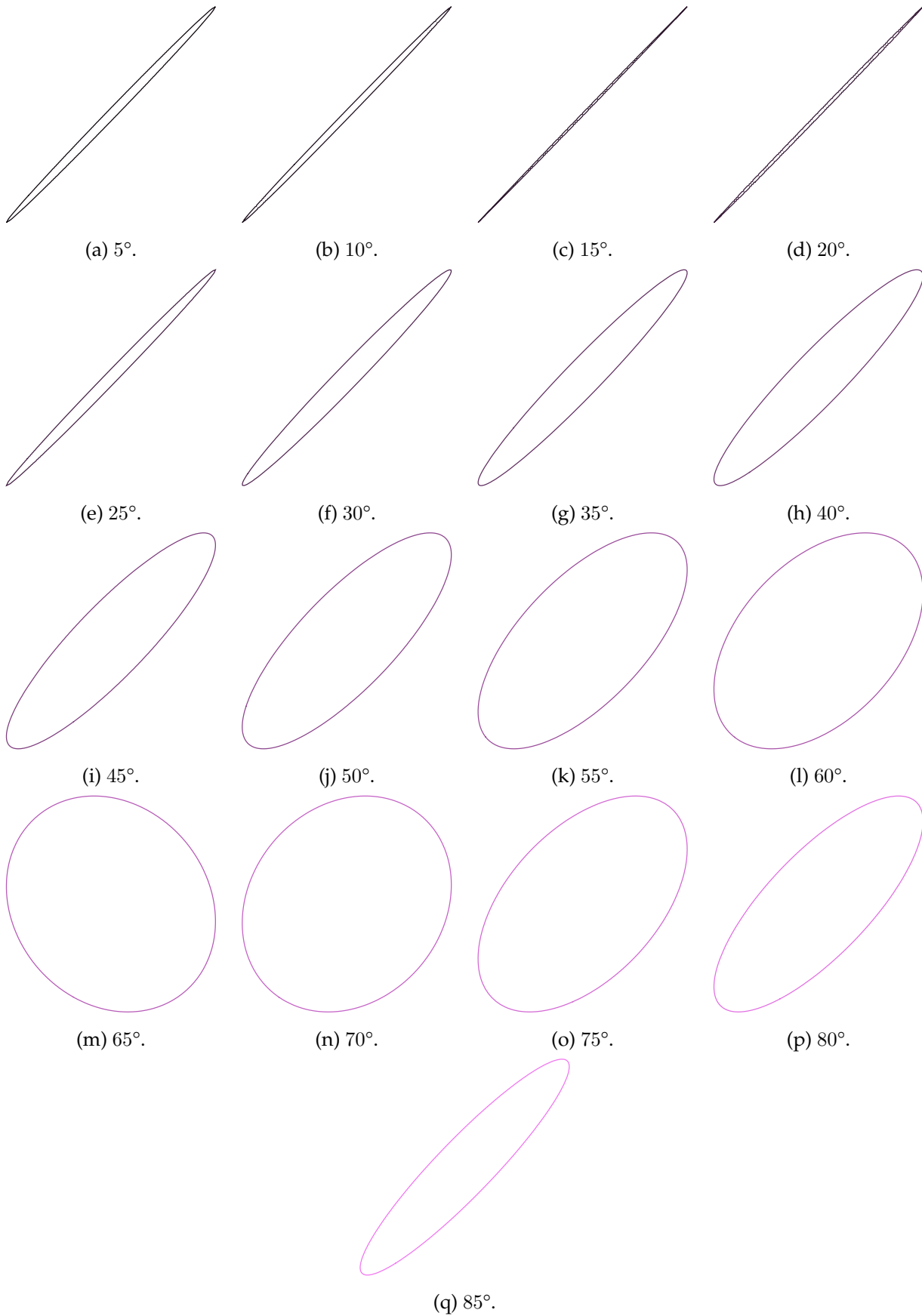


Figura 4.21: Elipses teóricas.

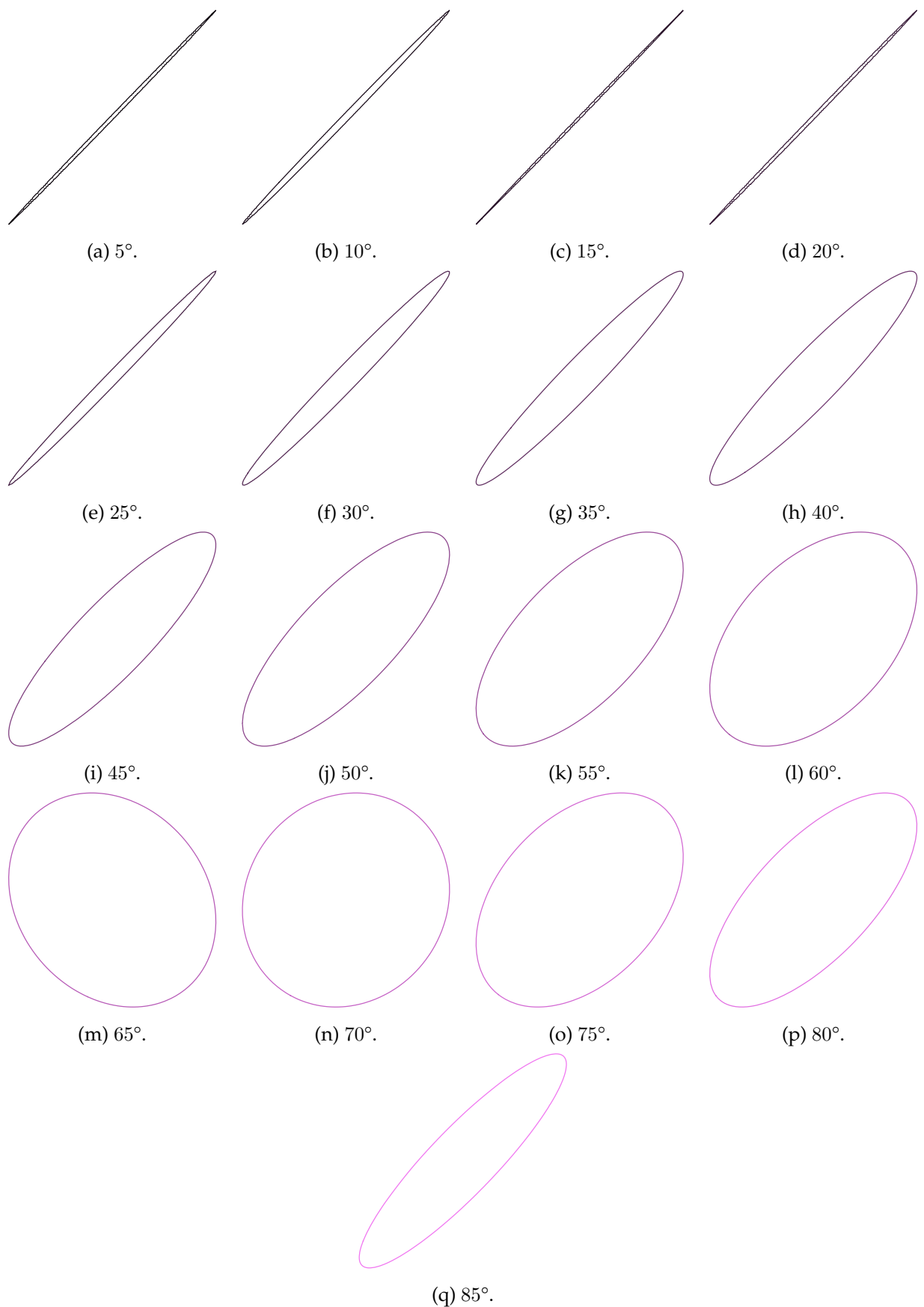


Figura 4.22: Elipses experimentales.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo a Futuro

Los métodos para medir el índice de refracción real de una muestra dieléctrica, propuestos en la Sección 3.1, presentan en los resultados experimentales una precisión aceptable comparable con métodos comúnmente aceptados ya que se obtuvieron errores porcentuales menores a 1%. Se pudo comprobar la dispersión del prisma, ya que siendo éste positivo, el índice de refracción crecía cuando la longitud de onda decrecía. Gracias a que es un método por reflexión, la homogeneidad del prisma no afecta el índice de refracción.

El método para medir el índice de refracción complejo de una muestra conductora, presentado en la Sección 3.2, es simple, muy fácil de implementar y su precisión puede ser mejorada considerablemente. A diferencia de muchos métodos para calcular el índice de refracción complejo que se basan en modelos sobre las interbandas de electrones, éste método parte de la teoría clásica del electromagnetismo y es menos complicado que los antes mencionados.

La importancia de los métodos presentados en este trabajo es que utilizan la polarización perpendicular, y la mayor parte de los métodos anteriores se basan en la polarización paralela.

En ambos casos la intensidad del rayo incidente juega un papel muy importante, pues la intensidad debe permanecer constante a través del tiempo; una manera de solucionar éste problema es manteniendo el haz incidente monitoreado para ver los cambios temporales de intensidad.

Para el caso del dieléctrico, no podemos comprobar si la función de dispersión es correcta ya que, además de que no se analizaron muchas longitudes de onda para hacer un ajuste más apropiado, el prisma utilizado no es de material óptico como los que se muestran en la Figura 1.2. Para el caso de los conductores, no hay manera de comparar los resultados experimentales con los resultados reportados en otros trabajos, ya que el índice de refracción depende las propiedades del ambiente (temperatura, presión atmosférica, humedad, etc.), y las propiedades de la muestra (oxidación, pureza, valencia, etc.) influyen considerablemente en la reflectancia. Se podrían tomar mediciones de la elipse de polarización y por métodos de elipsometría obtener el índice de refracción, sin embargo, éstos métodos van más allá del trabajo de esta tesis.

Se notó de igual manera que el pulido de las muestras afecta a la reflectancia, las muestras deben ser pulidas para que reflejen como superficie especular o si no aparecerán efectos de esparcimiento. Sin embargo, en la referencia [18], se menciona que pulir las muestras afecta en la reflectancia de las muestras, y el método de pulimiento afecta en los resultados obtenidos. Una manera de evitar esto, es haciendo una película por evaporación, cuyo espesor debe ser más grande que la longitud de penetración, ya que no requiere ser pulida y refleja como superficie especular idealmente.

De igual manera, la planicidad de las muestras afecta los resultados ya que la teoría se ha desarrollado suponiendo una frontera plana, se cree que un pico-valle del orden de $\lambda/10$ es suficiente para no introducir errores en la medición.

Las elipses de polarización del haz reflejado que se obtuvieron experimentalmente son muy parecidas a las obtenidas teóricamente. Debido al método propuesto para graficar las elipses experimentales, el cuál sólo considera la razón entre las amplitudes y no sus valores exactos, las elipses no se normalizaron en este trabajo para poder graficarlas juntas y no se pueden comparar cuantitativamente con las teóricas. Aún así comparándolas cualitativamente se observa que son muy semejantes, en forma y posición.

En general la teoría se empató muy bien al experimento, y se puede mejorar considerablemente el experimento para obtener aún mejores resultados. Controlando algunas variables de las condiciones ambientales, por ejemplo, utilizando una cámara de vacío para extraer todo el aire y así evitar que las muestras se oxiden considerablemente con el tiempo. Otra manera sería asegurar que el potenciómetro óptico esté perpendicular al haz al cual se tiene que medir la irradiancia, para evitar que la medición sea incorrecta.

Como trabajo a futuro se propone automatizar la toma de datos, aprovechando la platina de precisión rotativa, que nos permita tomar más datos en la región paraxial y mejorar la extrapolación al origen mejorando considerablemente la precisión del método de medición propuesto. Más aún, se pueden obtener más propiedades de la muestra a partir del cambio de la reflectancia a través del tiempo por oxidación por ejemplo.

La teoría se podría extender a materiales birrefringentes, dicróicos, y tal vez hasta metamateriales, pues sólo es necesario hacer los cambios pertinentes sobre el índice de refracción en los coeficientes de Fresnel como se hizo para los conductores. Sólo es necesario que los materiales reflejen y se podrá trabajar con la reflectancia para caracterizar los materiales.

Apéndice A

Métodos para Obtener el Índice de Refracción Real

A.1 Ángulo de Mínima Desviación

Este método utiliza un prisma dispersivo y es un método por refracción. Generalmente, al atravesar un prisma como se muestra en la Figura A.1, el haz emergerá habiendo sido deflectado de su dirección original un ángulo δ conocido como *desviación angular*.

Cuando la desviación angular alcanza su mínimo δ_m , se tiene que [19]

$$n_2 = \frac{n_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\delta_m + \alpha}{2} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}. \quad (\text{A.1})$$

Una vez que se encuentra el ángulo de mínima desviación angular, se puede utilizar la Ec. (A.1) para calcular el índice de refracción del prisma.

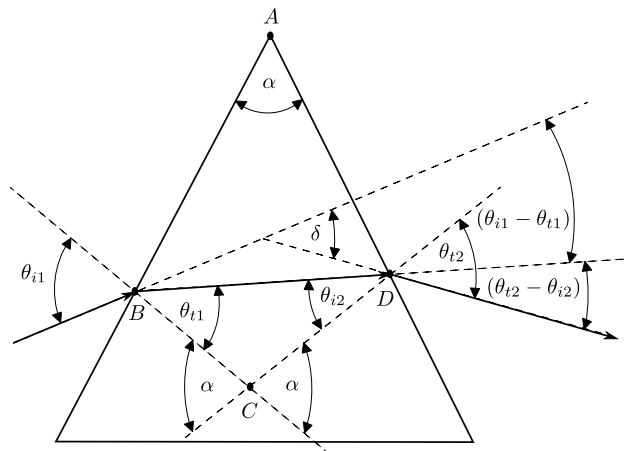


Figura A.1: Geometría del prisma dispersivo.

A.2 Ángulo de Brewster

Para definir el ángulo de Brewster, se parte de la reflectancia para la polarización paralela [15]

$$\mathcal{R}_p = \left(\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right)^2,$$

cuando $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$, el denominador tiende a infinito y el cociente tiende a cero. De la ley de Snell se tiene que

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (\text{A.2})$$

donde θ_B es el ángulo de incidencia en el cuál se desvanece la reflectancia en la polarización p . Partiendo de la Ec. (A.2) se puede obtener el índice de refracción n_2 al encontrar el ángulo de Brewster.

Apéndice B

Ecuación de Dispersión de Sellmeier

La ecuación de Sellmeier es una relación empírica entre el índice de refracción y la longitud de onda para un medio transparente particular. Esta ecuación es usada para determinar la dispersión de la luz a través del medio.

La forma usual de esta ecuación para vidrios es

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}, \quad (\text{B.1})$$

donde n es el índice de refracción, λ es la longitud de onda en micrómetros, $B_{1,2,3}$ y $C_{1,2,3}$ son los coeficientes de Sellmeier determinados experimentalmente.

Cabe resaltar que en la ecuación, λ es la longitud de onda en el vacío y no la de la muestra, la cuál es $\lambda/n(\lambda)$.

Por ejemplo, para el N-BK 7 los coeficientes son [20]:

B_1	1.03961212	C_1	0.00600069867
B_2	0.231792344	C_2	0.0200179144
B_3	1.01046945	C_3	103.560653

Tabla B.1: Coeficientes de Sellmeier para N-BK 7.

Los cuáles nos dan la gráfica de dispersión que se muestra en la Figura B.1.

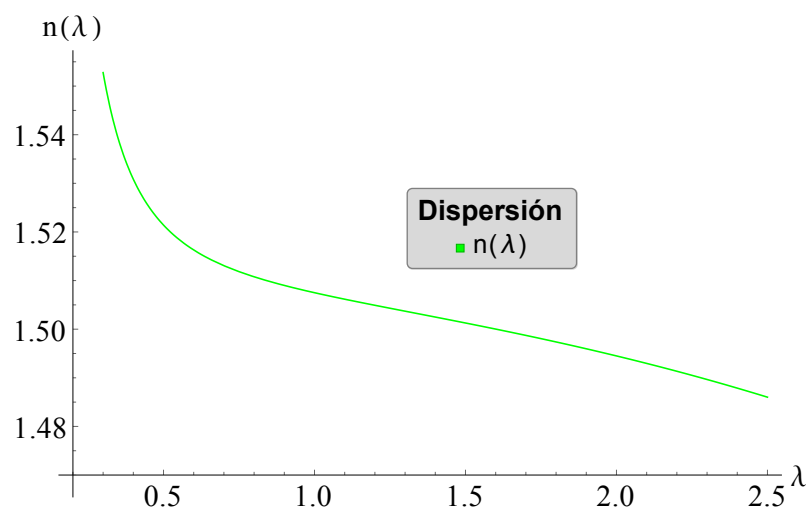


Figura B.1: Dispersión de N-BK 7.

Bibliografía

- [1] M. Born y E. Wolf. *Principles of Optics*. 6ª edición. Reino Unido: A. Wheaton & Co. Ltd., (1986). Cap. 1.
- [2] P. Hartmann y col. "Optical glass and glass ceramic historical aspects and recent developments: a Schott view". En: *Appl. Opt.* 49 (16 2010), págs. D157-D176. DOI: [10.1364/AO.49.00D157](https://doi.org/10.1364/AO.49.00D157). URL: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-49-16-D157>.
- [3] E. Hecht. *Optics*. 4ª edición. California, EUA: Addison-Wesley, (2002). Cap. 3.
- [4] B. Edlén. "The refractive index of air". En: *Metrologia* 2 (1966), págs. 71-80.
- [5] C. E. Webb y J. D. C. Jones. *Handbook of laser technology and applications*. Vol. 3. Filadelfia, EUA: Institute of Physics, (2004), pp. 1738-1740.
- [6] O. S. Heavens. *Optical Properties of Thin Solid Films*. Ontario, Canadá: General Publishing Company, Ltd., (1991).
- [7] D. Tentori, J. Camacho y C. López-Famozo. "High accuracy refractometry using reflectometry: practical limitatinos". En: *Opt. Comm.* 103 (1-2 1993), págs. 15-21. DOI: [10.1016/0030-4018\(93\)90635-I](https://doi.org/10.1016/0030-4018(93)90635-I).
- [8] D. E. Aspnes. "The accurate determination of optical properties by ellipsometry". En: E. D. Palik. *Handbook of optical constants of solids*. EUA: Academic Press, 1985. Cap. 4.
- [9] A. D. Rakić y col. "Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices". En: *Appl. Opt.* 37 (22 1998), págs. 5271-5283. DOI: [10.1364/AO.37.005271](https://doi.org/10.1364/AO.37.005271). URL: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-37-22-5271>.
- [10] D. Goldstein. *Polarized Light*. 2ª edición. Nueva York, EUA: Macell Dekker, Inc., (2003). Cap. 8.
- [11] E. Hecht. *Optics*. 4ª edición. California, EUA: Addison-Wesley, (2002). Cap. 4.
- [12] J. R. Reitz, F. J. Milford y R. W. Christy. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. 3ª edición. EUA: Addison-Wesley Iberoamericana, (1986). Cap. 18.
- [13] M. Born y E. Wolf. *Principles of Optics*. 6ª edición. Reino Unido: A. Wheaton & Co. Ltd., (1986). Cap. 14.
- [14] P. B. Johnson y R. W. Christy. "Optical constants of transition metals: Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, and Pd". En: *Phys. Rev. B* 9 (12 1974), págs. 5056-5070. DOI: [10.1103/PhysRevB.9.5056](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.9.5056). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.9.5056>.
- [15] D. Goldstein. *Polarized Light*. 2ª edición. Nueva York, EUA: Macell Dekker, Inc., (2003). Cap. 3.

-
- [16] J. R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis. The study of uncertainties in physical measurements*. 2ª edición. Sausalito, Ca., EUA: University Science Books, (1997). Cap. 3.
- [17] T. M. Apostol. *Calculus. One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. 2ª edición. Vol. 1. Nueva York, EUA: John Wiley & Sons, (1991). Cap. 7.
- [18] N. F. Mott y H. Jones. *The Theory of the Properties of Metals and Alloys*. Londres, Reino Unido: Lowe & Brydone, printers, Ltd., (1945). Cap. 3.
- [19] E. Hecht. *Optics*. 4ª edición. California, EUA: Addison-Wesley, (2002). Cap. 5.
- [20] SCHOTT North America Inc. *Optical Glass Data Sheets*. 2015.