Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ESPACIOS MÉTRICOS DE TRAYECTORIAS Y CONVERGENCIA A DIFUSIONES

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTADA POR:

Jorge Calderón Espinosa de los Monteros

TUTOR

DRA. María Emilia Caballero Acosta

Ciudad Universitaria, CDMX 2016

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno.	
Apellido Paterno	Calderón
Apellido Materno	Espinosa de los Monteros
Nombre(s)	Jorge
Teléfono	55 22 57 38 68
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de Cuenta	305026459
2. Datos del tutor.	
Grado	Doctora
Nombres(s)	María Emilia
Apellido Paterno	Caballero
Apellido Materno	Acosta
3. Datos del sinodal 1.	
Grado	Doctor
Nombres(s)	Jorge Marcos
Apellido Paterno	Martínez
Apellido Materno	Montejano
4. Datos del sinodal 2.	
Grado	Doctor
Nombres(s)	Ramsés Humberto
Apellido Paterno	Mena
Apellido Materno	Chávez
5. Datos del sinodal 3.	
Grado	Doctor
Nombres(s)	Sergio Iván
Apellido Paterno	López
Apellido Materno	Ortega
6. Datos del sinodal 4.	
Grado	Maestria
Nombres(s)	Osvaldo
Apellido Paterno	Angtuncio
Apellido Materno	Hernández
Datos del trabajo escrito.	
Título	Espacios métricos de trayectorias y convergencia a difusiones
Número de páginas	91
Año	2016

Dedico esta tesis a:

Alicia Dorantes Bravo

Citali Calderón Espinosa de los Monteros

Guillermina Calderón Argueta

Jorge Calderón Argueta

Maria Cruz Espinosa de los Monteros Lopez

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, por su apoyo y por estar ahí siempre que los eh necesitado durante todos estos años.

Al Profesor Jorge Marcos Martínez Montejano, por haber sido una guía en el área de Topología, así como por sus observaciones, las cuales mejoraron la presentación de este trabajo.

A mi Asesora María Emilia Caballero Acosta por su paciencia y haber sido una guía durante la elaboración de la Tesis.

Al Profesor Javier Páez Cárdenas, por haberme dado una visión diferente de cómo se pueden escribir las matemáticas.

A la Profesora María Concepción González Enríquez por haberme introducido inicialmente al mundo de las matemáticas formales.

Por ultimo a mis sinodales: Osvaldo Angtuncio Hernández, Ramsés Humberto Mena Chávez, Sergio Iván López Ortega por sus observaciones, las cuales sin duda mejoraron la presentación de la Tesis.

Índice general

Introducción

En esta tesis, se estudiarán algunos espacios métricos de trayectorias; específicamente empezaremos con el espacio de la funciones continuas con dominio en $[0,\infty)$ de valores reales, con una métrica que extiende a la del supremo. Normalmente, la métrica del supremo está definida para funciones que son acotadas. Así que, tendremos que hacerle algún ajuste para que pueda ser aplicada a todas las funciones continuas con dominio $[0,\infty)$ de valores reales y veremos algunas propiedades importantes en el sentido de la convergencia.

En el capítulo 2, nos adentraremos en el espacio de las funciones continuas con dominio $[a, b]$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$ con p-variación finita, definimos tal concepto y comenzamos estudiando el caso cuando $p = 1$, las cuáles simplemente llamaremos funciones de variación acotada. Mostraremos que el espacio de las funciones de variación acotada contiene a las funciones monótonas y de derivada continua, para las cuáles existen formas sencillas de calcular su correspondiente 1-variación. A continuación pasaremos a ver la relación entre ser de variación acotada y la Lipschitz continuidad, finalmente daremos una función continua que no es de variación acotada.

Dada una función continua con dominio $[0, T]$ que toma valores en $\mathbb{R}^n$ con p-variación finita, estudiaremos como va cambiando su p-variación, si vamos modificando el tamaño del intervalo. A esta función le llamaremos la función p-variación. Probaremos que es súper-aditiva, no decreciente, continua y un control. Además, veremos algunos resultados un poco más fuertes, para el caso cuando $p = 1$. La finalidad de esto es conocer mejor el comportamiento de la p-variación, lo cual, puede ayudarnos a mostrar que el espacio de funciones continuas de p-variación finita: es un espacio de Banach.

Veremos también, con un sencillo ejemplo, porque la p-variación no define una norma en el espacio de las funciones continuas con dominio $[a, b]$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$ con p-variación finita, pero con una pequeña modificación; en efecto, se obtiene una norma, más aún veremos que con esta nueva norma, se obtendrá un espacio de Banach.

Es natural preguntarse para qué nos podría servir conocer el espacio de las funciones continuas de p-variación finita. Para contestar esta pregunta, una aplicación interesante para el espacio de la funciones de p-variación finita es la teoría de rough paths, siendo creada por F.Lyons en 1990, la cual es puramente determinista, pero ofrece una alternativa conveniente al cálculo de Itô. El espacio de las rough paths es un subconjunto de las funciones continuas de p-variación finita; por eso, conocer este espacio es importante para la teoría.

En esta teoría, las ecuaciones diferenciales estocásticas que dependen del movimiento Browniano resultan un caso particular, pues el movimiento Browniano resulta ser una rough path, de hecho las semimartingalas resultan ser p-rough paths para $2<p<3$. Por lo que esta teoría, también generaliza a las ecuaciones construidas a partir de estos procesos, con la ventaja, de permitir definir ecuaciones diferenciales por trayectorias muy irregulares, procesos que no son semimartingalas. En este caso, la teoría de Itô no puede ser aplicada; y la teoría de Lyons es el único camino para definir y estudiar tales ecuaciones. Esta puede consultarse en las referencias [2],[3].

En el capítulo 3, estudiaremos el espacio de las funciones càdlàg de valores reales, es decir, las funciones que tienen límites por la izquierda y son continuas por la derecha. Nos concentraremos más, cuando el dominio es un intervalo $[a, b]$ con $a \geq 0$. Primero veremos un poco como se comportan estas funciones en el sentido de sus discontinuidades, o dicho de otra manera, en sus saltos. La métrica que definiremos para este espacio, será una métrica que extienda la métrica del supremo; pero que nos permita aproximar funciones, si sus saltos van siendo cada vez más parecidos; funciones que saltan no pueden estar cerca en la métrica del supremo; ya que se perdería la convergencia puntual, si los saltos se acercan por la derecha o por la izquierda. El propósito de la métrica es justo lograrlo permitiendo una pequeña variación en la posición, la cual será controlada por un homeomorfismo estrictamente creciente. Se incluirá un ejemplo donde se vea bien cómo es este tipo de movimiento.

Veremos sus propiedades más importantes en el sentido de la convergencia, además este espacio resultará separable y no completo, el hecho de que el espacio no resulte completo, será la motivación de la última parte de este capítulo. Definiremos una métrica distinta de la inicial, donde el espacio resulte completo, pero que a su vez termine generando la misma topología que la primera.

El espacio de las funciones càdlàg de valores reales con dominio $[a, b]$, $a \geq 0$, resulta ser el adecuado para estudiar los procesos estocásticos y así, justificar el porqué algunos procesos continuos pueden ser aproximados por una sucesión de procesos de saltos.

El resultado más conocido es el teorema de Donsker, el cual afirma que el movimiento Browniano es límite de caminatas aleatorias en su versión càdlàg, es decir, si el proceso es X_n, entonces lo pasamos a su versión cadlag haciendo $X_{[nt]}$. Por supuesto, esto es a muy a grandes rasgos: lo que se hace es tomar una caminata aleatoria simple y simétrica, a la que le iremos modificando la unidad de tiempo, así como el tamaño de los saltos. Si graficamos las trayectorias que nos van quedando y las rellenamos con la función máximo entero, intuitivamente cuando llevamos este proceso al infinito, resulta natural encontrarle semejanza al movimiento Browniano.

Nosotros solo enunciaremos este resultado debido a que ya es muy conocido. Lo que haremos, será mostrar otros ejemplos de procesos, que también son límite de procesos discretos en su versión càdlàg. Veremos que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es el límite de cadenas de Ehrenfest, y también como se aproxima la difusión de Wright-Fisher. La primera tiene una interpretación física y la segunda se usa para modelos de genética; también el primer proceso puede ser utilizado en finanzas, en un modelo de reversión a la media. Por supuesto, ver procesos continuos como límite de procesos discretos da pie a que puedan hacerse fácilmente simulaciones.

La forma de ver estas convergencias, será a partir de una metodología explicada en el apéndice de convergencia a difusiones, el cuál contiene un teorema que es útil, para poder establecer condiciones y así decir si una sucesión converge a una solución de una ecuación diferencial estocástica. De tal forma, que si el lector es lo suficientemente creativo, pueda definir procesos discretos y ver si éstos llevan a una solución de una ecuación diferencial estocástica que resulte interesante.

Es importante decir, es recomendable para leer esta tesis, tener conocimientos previos en las áreas de: Topología, Análisis Matemático, Probabilidad y Procesos Estocásticos. Lo que vendría siendo equivalente haber tomado los cursos de Topología I, Análisis Matemático I, Probabilidad I y II, Procesos Estocásticos I y II impartidos por la Facultad de Ciencias de la UNAM. Se recomienda leer el Apéndice definiciones preliminares, con el objetivo de tener una lectura mas fluida.

.

Capítulo 1

El espacio $\mathbb{C}[0,\infty)$.

Empecemos definiendo la métrica que vamos a estudiar.

***Definición* 1.1** *: Sea* $\mathbb{C}[0,\infty) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \mid f\, \textit{es continua}\}$.

Ahora definimos d_u*:* $\mathbb{C}[0,\infty) \times \mathbb{C}[0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d_u(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) - g(t) \|_n}{2^n}$$

donde $\| f(t) - g(t) \|_n = \sup_{0 \le t \le n} | f(t) - g(t) |$ *entonces* d_u *es una métrica en* $\mathbb{C}[0,\infty)$.

Verifiquemos que en efecto es una métrica:

$*$ Sean $f, g \in \mathcal{C}[0,\infty)$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que $\dfrac{1 \wedge \| f(t) - g(t) \|_n}{2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$, por otro lado $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Entonces, por el criterio de comparación de series, tenemos que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) - g(t) \|_n}{2^n}$ converge. Esto nos dice que d_u está bien definida.

Ahora, procedamos con verificar las 3 propiedades de métrica.

i)

$$\begin{aligned}
d_u(f,g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) - g(t) \|_n}{2^n} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1 \wedge \| f(t) - g(t) \|_n}{2^n} = 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}^+ \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \wedge \| f(t) - g(t) \|_n = 0 \ \text{ para toda } n \in \mathbb{N}^+ \\
&\Leftrightarrow \quad \| f(t) - g(t) \|_n = \sup_{0 \le t \le n} | f(t) - g(t) | = 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}^+ \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Para cualesquiera } n \in \mathbb{N}^+ \text{y } t \in [0,n] \ \text{ se tiene que } \ f(t) = g(t) \\
&\Leftrightarrow \quad f = g.
\end{aligned}$$

ii)

$$d_u(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\wedge \parallel f(t)-g(t)\parallel_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\wedge \parallel g(t)-f(t)\parallel_n}{2^n}=d_u(g,f).$$

iii)

Sean $f,g,h\in\mathcal{C}[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^+$ y $t\in[0,n]$. Por la desigualdad del triángulo de los números reales:

$$\sup_{0\le t\le n}\mid f(t)-g(t)\mid\ \le\ \sup_{0\le t\le n}\mid f(t)-h(t)\mid+\sup_{0\le t\le n}\mid h(t)-g(t)\mid.$$

Además, se cumple $a\wedge 1\le b\wedge 1+c\wedge 1$ para cualesquiera $a,b,c\in\mathbb{R}$ tal que $a\le b+c$.

De lo anterior se sigue que:

$1\wedge\parallel g(t)-f(t)\parallel_n\le 1\wedge\parallel f(t)-h(t)\parallel_n+1\wedge\parallel h(t)-g(t)\parallel_n$. Dividiendo en ambos lados se llega:

$\dfrac{1\wedge\parallel g(t)-f(t)\parallel_n}{2^n}\le\dfrac{1\wedge\parallel f(t)-h(t)\parallel_n}{2^n}+\dfrac{1\wedge\parallel h(t)-g(t)\parallel_n}{2^n}$ para toda $n\in\mathbb{N}^+$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\wedge\parallel g(t)-f(t)\parallel_n}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\wedge\parallel f(t)-h(t)\parallel_n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\wedge\parallel h(t)-g(t)\parallel_n}{2^n}\ .$$

Por lo tanto $d_u(f,g)\le d_u(f,h)+d_u(h,g)$. Con esto concluimos que d_u es una métrica en $\mathcal{C}[0,\infty)$.

1.1. Caracterización de la convergencia.

El siguiente resultado, nos da una caracterización de la convergencia en el espacio $\mathbb{C}[0,\infty)$. Se observa que la convergencia se puede inducir por la métrica d_u, que es una métrica que generaliza la métrica del supremo en un intervalo acotado.

***Proposición* 1.2** *: Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}[0,\infty)$. Entonces $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a f si solo si $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en todo intervalo acotado $I\subseteq[0,\infty)$.*

Prueba: ($\Rightarrow$) Sea I $\subseteq$ [0,∞] un intervalo acotado. Entonces existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que I $\subseteq$ [0,m_0].
Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesion en $\mathcal{C}$[0,∞] tal que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a f.

Dado $\varepsilon>0$ existe $\varepsilon^*>0$ tal que $\varepsilon^*<1\wedge\varepsilon$, aplicando la d_u-convergencia de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ a f, tenemos que existe M $\in\mathbb{N}$ tal que si m $\ge$ M entonces $d_u(f_m,f)<\dfrac{\varepsilon^*}{2^{m_0}}$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\wedge\parallel f_m(t)-f(t)\parallel_n}{2^n}<\frac{\varepsilon^*}{2^{m_0}}\ .$$

De modo que para m_0, tenemos que $\dfrac{1\wedge\parallel f_m(t)-f(t)\parallel_{m_0}}{2^{m_0}}<\dfrac{\varepsilon^*}{2^{m_0}}$ se sigue $1\wedge\parallel f_m(t)-f(t)\parallel_{m_0}<\varepsilon^*$.

Dado que $\varepsilon^* < 1$ entonces $\sup\limits_{0\leq t\leq m_0} \mid f_m(t) - f(t) \mid = \| f_m(t) - f(t) \|_{m_0} < \varepsilon^*$. De aquí concluimos que:

$\mid f_m(t) - f(t) \mid < \varepsilon$ para toda $t \in \mathrm{I} \subseteq [0, m_0]$ y m $\geq$ M. Así $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en I.

($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\varepsilon^* < 1 \wedge \varepsilon$, como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisface:

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^*}{2}.$$

Ahora consideremos el intervalo acotado $[0, n_0]$. Por hipótesis $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en $[0,n_0]$, por lo que existe M $\in \mathbb{N}$ tal que si m $\geq$ M se cumple $\sup\limits_{t\in[0,n_0]} \mid f_m(t) - f(t) \mid < \frac{\varepsilon^*}{2}$. Sea m $\geq$ M entonces

$$\begin{aligned}
d_u(f_m, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f_m(t) - f(t) \|_n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1 \wedge \| f_m(t) - f(t) \|_n}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f_m(t) - f(t) \|_n}{2^n} \\
&< \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\frac{\varepsilon^*}{2}}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon^*}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{\varepsilon^*}{2}(1) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{2} = \varepsilon^* < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos que si m $\geq$ M entonces $d_u(f_m, f) < \varepsilon$. Por lo tanto $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a f. ∎

1.2. Convergencia de la suma y multiplicación por escalar.

Los resultados concernientes a esta sección, nos dicen que en este espacio métrico, la suma de sucesiones convergentes es convergente y que al multiplicar por un escalar tambien obtenemos una sucesión convergente.

***Proposición* 1.3** *: Sean $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathcal{C}[0,\infty)$ tales que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a f y $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a g. Entonces $(f_m + g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a $f + g$.*

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$. Por la d_u-convergencia de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si m $\geq M_1$ entonces d$(f_m,f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la d_u-convergencia de $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que si m $\geq M_2$ entonces d$(g_m,g) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea M=máx$\{M_1,M_2\} \in \mathbb{N}$ si m $\geq$ M entonces:

$d_u(f_m + g_m,\ f + g) \leq d_u(f_m + g_m,\ f + g_m) + d_u(f + g_m,\ f + g) = d_u(f_m,\ f) + d_u(g_m,\ g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto $(f_m + g_m)_{m\,\in\,\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a $f + g$ ∎

***Proposición* 1.4** *: Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}[0,\infty)$ tal que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u convergente a f y $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces $(\lambda f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a λf.*

Prueba: (Haremos la prueba por casos)

Caso 1: Supongamos $\mid \lambda \mid\geq 1$.
Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando la d_u-convergencia de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ a f, tenemos que existe una M$\in\mathbb{N}$, tal que si $m \geq$ M entonces $d_u(f_m, f) < \dfrac{\varepsilon}{\mid \lambda \mid}$ es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \parallel f_m(t) - f(t) \parallel_n}{2^n} < \frac{\varepsilon}{\mid \lambda \mid} .$$

Por otra parte para $m \geq$ M tenemos que:

$$d_u(\lambda f_m, \lambda f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \parallel \lambda f_m(t) - \lambda f(t) \parallel_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \mid \lambda \mid\parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n}{2^n}.$$

Además sabemos que si $b, a \geq 0$ y $b \geq 1$ entonces $b(1 \wedge a) = 1 \wedge ab$. De esto se sigue que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \mid \lambda \mid\parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid \lambda \mid (1 \wedge \parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n)}{2^n} &= \mid \lambda \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n}{2^n} \\ &= \mid \lambda \mid d_u(f_m, f) < \mid \lambda \mid \frac{\varepsilon}{\mid \lambda \mid} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Entonces $d_u(\lambda f_m, \lambda f) < \varepsilon$. Por lo tanto $(\lambda f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a λf.

Caso 2: $0 < \mid \lambda \mid< 1$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a f, tenemos que existe M $\in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq$ M se cumple $d(f_m, f) < \varepsilon \mid \lambda \mid$. Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \parallel f_m(t) - f(t) \parallel_n}{2^n} < \varepsilon \mid \lambda \mid .$$

Por otra parte para $m \geq$ M tenemos que:

$$\mathrm{d}(\lambda f_m, \lambda f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \parallel ((\lambda f)_m(t) - \lambda f(t)) \parallel_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \mid \lambda \mid\parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n}{2^n}.$$

Además sabemos que si $a, b \geq 0$ y $b \leq 1$ entonces $(1 \wedge b) \leq \dfrac{1}{b}(1 \wedge a)$. De esto se sigue que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \mid \lambda \mid\parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\mid \lambda \mid}(1 \wedge \parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n)}{2^n} &= \frac{1}{\mid \lambda \mid} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \parallel (f_m(t) - f(t)) \parallel_n}{2^n} \\ &= \frac{1}{\mid \lambda \mid} d(f_m, f) < \frac{1}{\mid \lambda \mid} \varepsilon \mid \lambda \mid= \varepsilon.\end{aligned}$$

Entonces $d(\lambda f_m, \lambda f) < \varepsilon$. Por lo tanto $(\lambda f)_{m\in\mathbb{N}}$ es d_u-convergente a λf. El caso $\lambda = 0$ es trivial ∎

1.3. El espacio $\mathbb{C}[0,\infty)$ no es normado.

Aunque el espacio $\mathbb{C}[0,\infty)$ se comporta bien en la convergencia de la suma de sucesiones y multiplicación por escalar, resulta ser que este espacio no puede ser inducido por una norma, ya que si esto pasara, debería cumplirse que $\| \lambda f \| = | \lambda | \| f \|$ donde $\| f \| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) \|_n}{2^n}$, para cualquier valor de λ, pero esto no siempre ocurre. Para notar esto presentamos el siguiente contraejemplo.

***Ejemplo* 1.5** *: Sea $f \in \mathbb{C}[0,\infty)$, $f \equiv 2$ y $\lambda = 2$. Notemos que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) \|_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\ \wedge 2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \text{ entonces: } | \lambda | \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) \|_n}{2^n} = | 2 | \, (1) = 2.$$

Por otra parte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| \lambda f(t) \|_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\ \wedge 4}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \text{ de modo que: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| \lambda f(t) \|_n}{2^n} \neq | \lambda | \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge \| f(t) \|_n}{2^n},$$

para $f \equiv 2$ y $\lambda = 2$.

Capítulo 2

Trayectorias con p-variación finita.

El primero que realizó estudios sobre la variación acotada fue Jordán en el año de 1881, quien introdujo el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, y que hoy en día juega un papel muy importante en el análisis.

El objetivo de este capítulo es estudiar a las funciones de p-variación acotada. Tal concepto fue introducido por Wiener en el año de 1924, el cual es una generalización de variación acotada.

***Definición* 2.1** *: Sea $a \leq b$ y σ:$[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Decimos que σ tiene p-variación finita para $p \in [0, \infty)$ si la p-variación σ en $[a, b]$ definida por:*

$$\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = \begin{cases} 0 \quad si\ a = b, \\ \Big[\sup\limits_{\pi \in \Pi[a,b]} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \ si\ a < b, \end{cases}$$

es finita, Es decir es un número real. Al espacio de las funciones σ:$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con p-variación finita, lo denotaremos como $\mathcal{C}^{p-var}_{([a,b],\mathbb{R}^n)}$.

En el caso en que σ tenga 1-variación finita, diremos que σ es de variación acotada.

2.1. Casos más simples de la 1-variación.

A continuación presentamos algunos resultados para poder calcular la 1-variación, el siguiente teorema nos dice comó calcular la 1-variación, cuando la función es de clase C^1. Recordar que una función es de clase C^1, si existen todas sus derivadas parciales y adémas estas son continuas.

***Teorema* 2.2** *: Sea $f \colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $[a, b] \subseteq \Omega$ donde Ω es abierto. Entonces*

$$\sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| = \int_a^b \|f'(x)\| \, dx.$$

Prueba:

Sea Π una partición de $[a, b]$. Entonces $\Pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ donde $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$. Denotamos a la por coordenadas como $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Nos fijamos ahora en:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\|f(t_{k+1})-f(t_k)\| &= \sum_{k=0}^{m-1}\|(f_1(t_{k+1})-f_1(t_k),\ldots,f_n(t_{k+1})-f_n(t_k))\| \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\|(f_1^{'}(t_k^{(1)})(t_{k+1}-t_k),\ldots,f_n^{'}(t_k^{(n)})(t_{k+1}-t_k))\|\end{aligned}$$

donde $t_k^{(1)},....,t_k^{(1)}\in[t_k,t_{k+1}]$. Esta última igualdad, es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. Como $f^{'}$ es continua en $[a,b]$, entonces $f_i^{'}$ es continua en $[a,b]$ para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. Esto implica que $f_i^{'}$ es acotada en $[a,b]$ para cada $i\in\{1\ldots n\}$, por lo cual existen $M_1,\ldots,M_n>0$ tales que $\mid f_i^{'}(x)|\leq M_i$ para toda $x\in[a,b]$ y $i\in\{1,\ldots,n\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\|(f_1^{'}(t_k^{(1)})(t_{k+1}-t_k),\ldots,f_n^{'}(t_k^{(n)})(t_{k+1}-t_k))\| &= \sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)\|(f_1^{'}(t_k^{(1)}),\ldots,f_n^{'}(t_k^{(n)}))\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)\sqrt{M_1^2+\ldots+M_n^2} \\ &= \sqrt{M_1^2+\ldots+M_n^2}\,\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k) \\ &= \sqrt{M_1^2+\ldots+M_n^2}\,(b-a).\end{aligned}$$

Por lo tanto para toda π partición de $[a,b]$, ocurre que $\sum_{k=0}^{m-1}\|f(t_{k+1})-f(t_k)\|\leq\sqrt{M_1^2+\ldots+M_n^2}\,(b-a)$.

Concluimos asi que $\sup_{\pi\in\Pi[a,b]}\sum_{k=0}^{m-1}\|f(t_{k+1})-f(t_k)\|\in\mathbb{R}$.

Nos falta probar que $\sup_{\pi\in\Pi[a,b]}\sum_{k=0}^{m-1}\|f(t_{k+1})-f(t_k)\|=\int_a^b\|\sigma^{'}(x)\|dx$.

Vamos a utilizar los siguientes dos resultados de Cálculo Integral:

Resultado 1: Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, tal que para cualquier partición π de $[a,b]$ con $\mid\pi\mid<\delta$ y cualquiera $\overline{t_k}\in[t_k,t_{k+1}]$ entonces:

$$\left|\int_a^b f-\sum_{k=0}^{m-1}f(\overline{t_k})(t_{k+1}-t_k)\right|<\varepsilon.\text{ Recordemos que }\mid\pi\mid=\max_{k=0,\ldots m}t_{k+1}-t_k$$

Resultado 2: Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ es continua en $[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $\|f(t)-(f_1(s_1),\ldots,f_n(s_n))\|<\varepsilon$ para cualesquiera $t,\ s_1,\ldots,s_n\in[a,b]$ que cumplen $\mid t-s_i\mid<\delta$, $i=1,\ldots,n$.

Ambos resultados pueden ser consultados en [11].

Procedamos a la demostración. Sea $\varepsilon>0$.

Para $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$, podemos aplicar el Resultado 1 a $\|f^{'}\|$, ya que esta es continua en $[a,b]$, por la hipótesis de que f es de clase C^1. Por lo cual existe $\delta_1 > 0$, tal que si $\mid \pi \mid < \delta_1$ se cumple que:

$$\left| \int_a^b \| f^{'} \| - \sum_{k=0}^{m-1} \| f^{'}(\overline{t_k}) \| (t_{k+1} - t_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para cualquier } \overline{t_k} \in [t_{k+1}, t_k].$$

Para $\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)} > 0$, podemos aplicar el Resultado 2 ya que $f^{'}$ es continua en $[a,b]$, por la hipótesis de que f es de clase C^1, por lo cual existe $\delta_2 > 0$ tal que: $\| f^{'}(t) - (f_1^{'}(s_1), \ldots, f_n^{'}(s_n)) \| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ para cualesquiera t, $s_1, \ldots, s_n \in [a,b]$ que cumplen $\mid t - s_i \mid < \delta_2$, $i = 1, \ldots, n$.

Para $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$, existe $\pi_1 = \{t_0^1, \ldots, t_{m_1}^1\}$ donde $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_{m_1} = b$ una partición de $[a,b]$ tal que

$$\sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{k=0}^{m_1-1} \|f(t_{k+1}^1) - f(t_k^1)\|.$$

Tenemos que $\displaystyle\int_a^b \| f^{'} \|$ existe porque $\|f^{'}\|$ es continua en $[a,b]$, por lo tanto integrable. Definamos:

$$\mathrm{L} = \sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|.$$

Por lo anterior, podemos escoger una partición π^* tal que $|\pi^*| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $\pi_1 \subseteq \pi^*$, donde $\pi^* = \{t_0, \ldots, t_{m_*}\}$ y $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$. Entonces, si llamamos:

$$\begin{aligned} L_{\pi^*} &= \sum_{k=0}^{m_*-1} \|(f(t_{k+1}) - f(t_k))\| \\ &= \sum_{k=0}^{m_*-1} \|(f_1^{'}(t_k^{(1)})(t_{k+1} - t_k), \ldots, f_n^{'}(t_k^{(n)})(t_{k+1} - t_k))\|. \end{aligned}$$

donde $t_k^{(1)}, \ldots, t_k^{(n)} \in [t_k, t_{k+1}]$ para $k = 1, 2, \ldots, m_* - 1$. Esta última igualdad es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. Sean cualesquiera $\overline{t_0}, \ldots, \overline{t_{m_*-1}}$ que cumplen $\overline{t_k} \in [t_k, t_{k+1}]$ para $k = 1, 2, \ldots, m_* - 1$. Llamemos:

$$S_{\pi^*} = \sum_{k=0}^{m_*-1} \| f^{'}(\overline{t_k}) \| (t_{k+1} - t_k)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} |S_{\pi^*} - L_{\pi^*}| &= \left| \sum_{k=0}^{m_*-1} \| f^{'}(\overline{t_k}) \| (t_{k+1} - t_k) - \sum_{k=0}^{m_*-1} \|(f_1^{'}(t_k^{(1)})(t_{k+1} - t_k), \ldots, f_n^{'}(t_k^{(n)})(t_{k+1} - t_k)) \| \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{m_*-1} [\ \| f^{'}(\overline{t_k}) \| - \|(f_1^{'}(t_k^{(1)}), \ldots, f_n^{'}(t_k^{(n)}))\|\ ](t_{k+1} - t_k) \right| \\ &< \sum_{k=0}^{m_*-1} \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(t_{k+1} - t_k) \ \text{ porque } \mid \pi_* \mid < \delta_2 \\ &= \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{k=0}^{m_*-1} (t_{k+1} - t_k) = (b-a)\frac{\varepsilon}{3(b-a)} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|S_{\pi^*} - L_{\pi^*}| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ya de aquí concluimos que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \| f' \| - L\right| &= \left|\int_a^b \| f' \| - S_{\pi_*} + S_{\pi_*} - L_{\pi_*} + L_{\pi_*} - L\right| \\
&\leq \left|\int_a^b \| f' \| - S_{\pi_*}\right| + |S_{\pi_*} - L_{\pi_*}| + |L_{\pi_*} - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto para toda $\varepsilon > 0$, ocurre que $\left|\int_a^b \| f' \| - L\right| < \varepsilon$. Asi, $\left|\int_a^b \| f' \| - L\right| = 0$. Es decir: $\int_a^b \| f' \| = \mathrm{L}$ ∎

Las siguientes dos proposiciones, nos dicen como calcular la 1-variación para funciones monótonas.

***Proposición* 2.3** *: Sea σ:$[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que para cualesquiera (t_1,$t_2$$\in$$[a,b]$, $t_1$$\leq$$t_2$, entonces $\sigma(t_1)$$\leq$$\sigma(t_2)$). Es decir σ es monotona creciente, entonces $\| \sigma \|_{1-var[a,b]} = \sigma(b) - \sigma(a)$.*

Prueba:

Si $a = b$ entonces por definición, $\| \sigma \|_{1-var[a,b]}$=0 y $\sigma(b) - \sigma(a) = 0$. Así $\| \sigma \|_{1-var[a,b]} = \sigma(b) - \sigma(a)$.

Para $a < b$ tomemos $\pi \in \Pi[a, b]$, entonces π=$\{t_0, \ldots ,t_m\}$ donde $t_0 = a$ <t_1<. . .<$t_m = b$. Ahora:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\sigma(t_{k+1}) \text{ - } \sigma(t_k)| = \sum_{k=0}^{m-1} [\sigma(t_{k+1}) \text{ - } \sigma(t_k)].$$

Porque $t_{k+1}$$\geqslant$$t_k$ y la hipótesis implica que $\sigma(t_{k+1})$$\geqslant$$\sigma(t_k)$. Ahora desarrollamos la suma

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} [\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)] &= [\sigma(t_1) - \sigma(t_0)] + [\sigma(t_2) - \sigma(t_1)] + \ldots + [\sigma(t_m) - \sigma(t_{m-1})] \\
&= [\sigma(t_m) - \sigma(t_0)] = \sigma(b) - \sigma(a).
\end{aligned}$$

Entonces $\sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} |\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)|$=$\sigma(b) - \sigma(a)$. Por lo tanto $\| \sigma \|_{1-var[a,b]}$= $\sigma(b) - \sigma(a)$ ∎

***Proposición* 2.4** *: Sea σ:$[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que para cualesquiera (t_1, $t_2$$\in$$[a,b]$, $t_1$$\leq$$t_2$ entonces $\sigma(t_2)$$\leq$$\sigma(t_1)$). Es decir σ es monotona decreciente entonces $\| \sigma \|_{1-var[a,b]}$= $\sigma(a) - \sigma(b)$.*

Prueba:

Si $a = b$ entonces por definición, $\| \sigma \|_{1-var[a,b]} = 0$ y $\sigma(a) - \sigma(b) = 0$. Así $\| \sigma \|_{1-var[a,b]} = \sigma(a) - \sigma(b)$.

Para $a < b$, tomemos $\pi \in \Pi[a, b]$ entonces π=$\{t_0, \ldots ,t_m\}$ donde $t_0 = a$ <t_1< . . . <$t_m = b$. Ahora:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\sigma(t_{k+1}) \text{ - } \sigma(t_k)| = \sum_{k=0}^{m-1} [\sigma(t_k) \text{ - } \sigma(t_{k+1})]$$

Porque $t_{k+1} \geqslant t_k$ y la hipótesis implica que $\sigma(t_{k+1}) \leq \sigma(t_k)$. Ahora desarrollamos la suma

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} [\sigma(t_k) - \sigma(t_{k+1})] &= [\sigma(t_0) - \sigma(t_1)] + [\sigma(t_1) - \sigma(t_2)] + \ldots + [\sigma(t_{m-1}) - \sigma(t_m)] \\ &= [\sigma(t_0) - \sigma(t_m)] = \sigma(a) - \sigma(b).\end{aligned}$$

Así para toda $\pi \in \Pi[a,b]$ se cumple $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} |\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)| = \sigma(a) - \sigma(b)$.

Entonces $\displaystyle\sup_{\pi \in \Pi} \sum_{k=0}^{m-1} |\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)| = \sigma(a) - \sigma(b)$. Por lo tanto. $\| \sigma \|_{1-var[a,b]} = \sigma(a) - \sigma(b)$. ∎

2.2. Lipschitz continuidad y variación acotada.

Como vamos a ver en esta sección, una función Lipschitz continua es de variación acotada. Damos además un ejemplo en donde se exhibe que el regreso no es necesariamente cierto.

***Proposición* 2.5** *: Si σ:$[a,b] \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz continua, entonces $\sigma \in \mathcal{C}^{1-var}_{([a,b],\mathbb{R}^n)}$.*

Prueba: Sea $\pi \in \Pi[a,b]$. Entonces $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ donde $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$. Como σ es Lipschitz continua, existe C>0 tal que $\| \sigma(x) - \sigma(y) \| \leq \mathrm{C} | x - y |$ para cualesquiera $x, y \in [a,b]$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}|t_{k+1} - t_k| = \mathrm{C} \sum_{k=0}^{m-1} [t_{k+1} - t_k] = \mathrm{C}(b-a).$$

Por lo tanto $\displaystyle\sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| \leq \mathrm{C}(b-a)$ es decir $\| \sigma \|_{1-var[a,b]}$ es finita. ∎

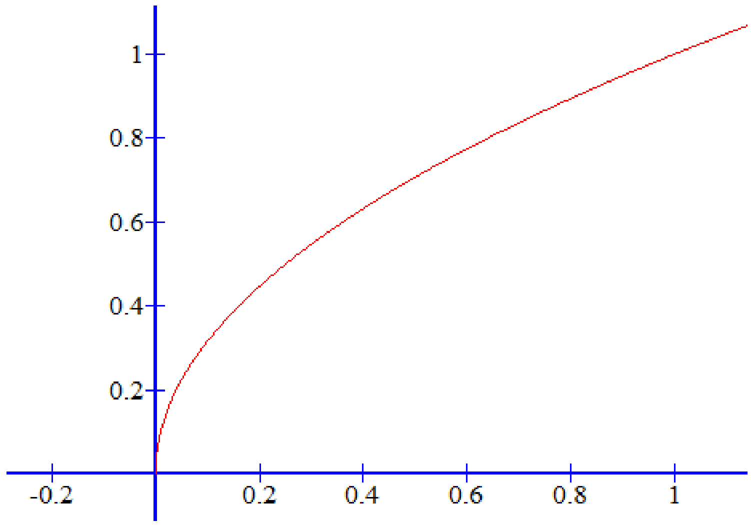
***Ejemplo* 2.6** *: La función σ:$[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\sigma(t) = \sqrt{t}$, no es Lipschitz continua y es de variación acotada. Aún más ocurre que $\| \sigma \|_{1-var[0,1]} = 1$.*

Prueba: (Por contradicción) Supongamos que σ es Lipschitz continua. Entonces, existe $\mathrm{C} > 0$ tal que

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \mathrm{C}|x - y|$ para cualesquiera $x, y \in [0,1]$. Definamos $C^* = \max\{1, C\}$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C^*|x - y|$ para cualesquiera $x, y \in [0,1]$. Sean $x_0 = \dfrac{1}{9(C^*)^2}$ y $y_0 = \dfrac{1}{4(C^*)^2}$. Es evidente que $x_0, y_0 \in [0,1]$ y que

$$\left| \sqrt{\frac{1}{9(C^*)^2}} - \sqrt{\frac{1}{4(C^*)^2}} \right| \leq C^* \left| \frac{1}{9(C^*)^2} - \frac{1}{4(C^*)^2} \right|$$

Simplificando $\dfrac{1}{6C^*} \leq C^* \dfrac{5}{36(C^*)^2}$ esto implica que $\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{5}{36}$, lo cual es absurdo.



Por tanto σ no es Lipschitz continua. Asi por la Proposición 2.3 $\| \sigma \|_{1-var[0,1]} = 1$ ∎

La siguiente proposición, generaliza la versión para Lipschitz continua que ya teníamos para las funciones α-Hölder.

***Proposición* 2.7** *: Si σ:$[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es α-Hölder, entonces σ tiene $\frac{1}{\alpha}$ variación finita.*

Prueba:

Sea $\pi \in \Pi[a,b]$. Entonces π=$\{t_0,\ldots,t_m\}$ donde $t_0 = a < t_1 <\ldots< t_m = b$. Como σ es α-Hölder, existe $C > 0$ tal que $\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq C \mid x - y \mid^\alpha$ para cualesquiera $x, y \in [a,b]$. De forma que si elevamos a la potencia $\frac{1}{\alpha}$ la expresión anterior, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sum_{k=0}^{m-1} C^{\frac{1}{\alpha}} \mid t_{k+1} - t_k \mid = C^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{m-1} \mid t_{k+1} - t_k \mid = C^{\frac{1}{\alpha}}(b-a).$$

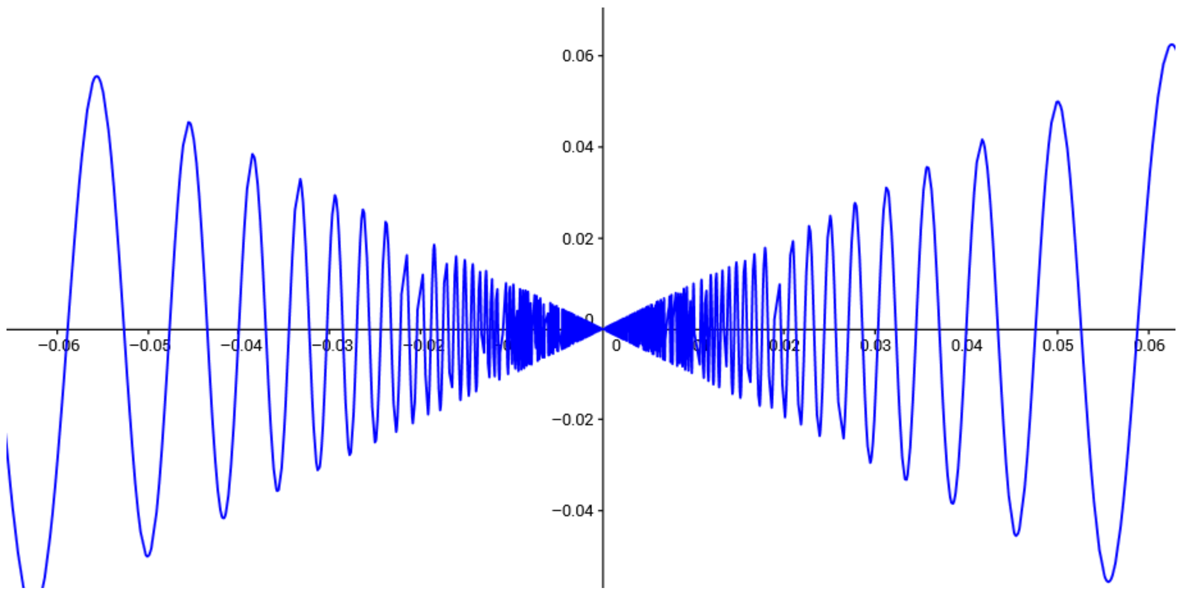
Por lo tanto $\sup\limits_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^{\frac{1}{\alpha}} \leq C^{\frac{1}{\alpha}}(b-a)$. De esto se sigue que :
$\left[\sup\limits_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^{\frac{1}{\alpha}}\right]^\alpha = \| \sigma \|_{\frac{1}{\alpha}-var[a,b]}$ es finito, es decir σ tiene $\frac{1}{\alpha}$ variación finita. ∎

2.3. Una función que no es de variación acotada.

***Ejemplo* 2.8** *: Sea σ: $[0,1] \to \mathbb{R}$. Dada por:*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t \ \cos\left(\frac{\Pi}{2t}\right) & si \ t \neq 0, \\ 0 & si \ t = 0. \end{cases}$$

Entonces σ es continua y no es de variación acotada.



Prueba: Es claro que si $t \neq 0$, la función σ es continua en t. Veamos entonces que σ es continua en $t = 0$. $|\cos\left(\frac{\Pi}{2t}\right)| \leq 1$ para toda $t \in (0{,}1]$ es decir $-1 \leq \cos\left(\frac{\Pi}{2t}\right) \leq 1$ para toda $t \in (0{,}1]$. Multiplicando por t la desigualdad tenemos que: $-t \leq t\cos\left(\frac{\Pi}{2t}\right) \leq t$ para toda $t \in (0{,}1]$. Tomando límite ocurre que:

$$0 = \lim_{t\to 0} -t \leq \lim_{t\to 0} t\,\cos\left(\tfrac{\Pi}{2t}\right) \leq \lim_{t\to 0} t = 0$$

Entonces $\lim_{t\to 0} t\,\cos\left(\frac{\Pi}{2t}\right) = \lim_{t\to 0} \sigma(t) = 0$. Como $\sigma(0) = 0$ tenemos que $\lim_{t\to 0} \sigma(t) = \sigma(0)$, por tanto σ es continua en $t = 0$. Esto demuestra la continuidad de σ.

Pasemos ahora a ver que σ no es de variación acotada. Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$ definamos entonces la siguiente partición de [0,1]:

$\pi = \{t_0,\, t_1,\, t_2, \ldots,\, t_{2n-2},\, t_{2n-1},\, t_{2n}\}$. Donde $t_0{=}0$, $t_1 = \frac{1}{2n}$, $t_2 = \frac{1}{2n-1}$, $\ldots$, $t_{2n-2} = \frac{1}{3}$, $t_{2n-1} = \frac{1}{2}$, $t_{2n}{=}1$.

Esta partición divide a [0,1] en $2n$ subintervalos. Ahora

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \|\,\sigma\,(t_{k+1}) - \sigma\,(t_k)\| = \|\,\sigma\,\left(\tfrac{1}{2n}|\right) - \sigma\,(0)\| + \|\,\sigma\,\left(\tfrac{1}{2n-1}\right) - \sigma\left(\tfrac{1}{2n}\right)\| + \ldots + \|\sigma(1) - \sigma\left(\tfrac{1}{2}\right)\|$$

$$= \left|\tfrac{1}{2n}\cos\left(\tfrac{\Pi}{2(\frac{1}{2n})}\right)\right| + \left|\tfrac{1}{2n-1}\cos\left(\tfrac{\Pi}{2(\frac{1}{2n-1})}\right) - \tfrac{1}{2n}\cos\left(\tfrac{\Pi}{2(\frac{1}{2n})}\right)\right| + \ldots\ldots + \left|1\cos\left(\tfrac{\Pi}{2(1)}\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\Pi}{2(\frac{1}{2})}\right)\right|$$

$$= \left|\tfrac{1}{2n}\cos(n\Pi)\right| + \left|\tfrac{1}{2n-1}\cos\left(\tfrac{2n-1}{2}\right)\Pi - \tfrac{1}{2n}\cos(n\Pi)\right| + \left|\tfrac{1}{2n-2}\cos\left(\tfrac{2n-2}{2}\right)\Pi - \tfrac{1}{2n-1}\cos\left(\tfrac{2n-1}{2}\right)\Pi\right|$$

$$+ \quad \left|\tfrac{1}{2n-3}\cos\left(\tfrac{2n-3}{2}\right)\Pi - \tfrac{1}{2n-2}\cos\left(\tfrac{2n-2}{2}\right)\Pi\right| + \ldots\ldots + \left|\,\tfrac{1}{2}\,\right| + \left|\,\tfrac{1}{2}\,\right|$$

$$= \quad \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n-2} + \tfrac{1}{2n-2} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{2n} + \tfrac{2}{2n-2} + \ldots\ldots + \tfrac{2}{2} = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n-1} + \ldots\ldots + 1.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \|\,\sigma\,(t_{k+1}) - \sigma\,(t_k)\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{para } \pi = \{t_0{=}0\,,\ t_1 = \tfrac{1}{2n}\,,\ t_2 = \tfrac{1}{2n-1}\,,\ \ldots,\ t_{2n-1} = \tfrac{1}{2}\,,\ t_{2n}{=}1\}.$$

Por lo tanto $\sup\limits_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\| \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ para toda $n \in \{1,2,\ldots\}$. Sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ entonces $\sup\limits_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\| = \infty$ lo cual nos dice que σ no es de variación acotada. ∎

2.4. La función p-variación es continua, súper-aditiva y es un control.

Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. En esta sección estudiaremos las propiedades de la función $(a,b) \to \|\sigma\|^p_{p-var[a,b]}$. Demostraremos que es continua, súper-aditiva, y finalmente que es un control, la definición concerniente a esto viene a continuación.

***Definición* 2.9** *: Una función ω:$\{(a,b)|\ 0 \leq a \leq b \leq T\}\to[0,\infty)$, es llamada súper-aditiva si*

$$\omega(a,c)+\omega(c,b) \leq \omega(a,b) \text{ para cualesquiera } a \leq c \leq b.$$

Si además ω es continua y $\omega(t,t) = 0$ para toda $t \in [0,T]$, diremos que ω es un control.

Diremos que la función continua σ:$[0,T]\to\mathbb{R}$ está controlada por un control, ω si existe $C > 0$ tal que:

$$\|\sigma(b)-\sigma(a)\|\leq C\omega(a,b) \text{ para cualesquiera } 0 \leq a \leq b \leq T.$$

***Lema* 2.10** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Si $0 \leq a \leq b \leq T$ entonces $\|\sigma\|_{p-var[a,b]}$ es finita.*

Prueba: Si $a=b$ se cumple trivialmente. Supongamos entonces que $a<b$. Sea $\pi \in \Pi[a,b]$, π=$\{t_0,\ldots,t_m\}$ donde $t_0 = a < t_1 <\ldots< t_m = b$. Vamos a suponer además que $0 < a$ y $b <$ T, ya que para los casos que estamos excluyendo, bastará hacer un ligero cambio en la demostración. Una vez dicho esto definamos $\pi^* = \{y_0,\ldots,y_{m+2}\}$, donde $y_0 = 0$, $y_i = t_{i-1}$ para $i = 1,\ldots,m+1$, $y_{m+2} = T$, es claro que π^* es partición de [0,T]. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p \leq \sum_{k=0}^{m} \|\sigma(y_{k+1})-\sigma(y_k)\|^p \leq \|\sigma\|^p_{p-var[0,T]}.$$

Por tanto $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p \leq \|\sigma\|^p_{p-var[0,T]}$ para cualquier $\pi \in \Pi[a,b]$, π=$\{t_0,\ldots,t_m\}$.

Concluimos que $\|\sigma\|^p_{p-var[a,b]} \leq \|\sigma\|^p_{p-var[0,T]}$ es decir es finita. ∎

Los dos teoremas siguientes tienen que ver con la súper-aditividad de la función p-variación, el primero será para el caso particular $p=1$, donde obtendremos una propiedad mas fuerte que la súper-aditividad, ya que mostraremos una igualdad. Para el caso general no tendremos tal igualdad, pero la super-aditividad se seguirá cumpliendo.

***Teorema* 2.11** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{1-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. La función $(a,b) \to \|\sigma\|_{1-var[a,b]}$ es súper-aditiva. Más aún, si $0 \leq a \leq b \leq u \leq T$ entonces $\|\sigma\|_{1-var[a,b]} + \|\sigma\|_{1-var[b,u]} = \|\sigma\|_{1-var[a,u]}$.*

Prueba: Claramente la función esta bien definida debido al Lema 2.10.

Sean $a, b, u \in$ [0,T] tales que $0 \leq a \leq b \leq u \leq$ T. Lo primero que haremos será ver los casos más fáciles. Si $a = u$ o $a = b$ o $b = u$ es inmediato que $\| \sigma \|_{1-var[a,u]} = \| \sigma \|_{1-var[a,b]} + \| \sigma \|_{1-var[b,u]}$. Podemos suponer sin problemas que $0 \leq a < b < u \leq$ T.

Sea $\pi \in \Pi[a, u]$, π=$\{t_0, \ldots, t_m\}$ donde t_0 =a$< t_1 <\ldots<t_m = u$.

Caso 1: b $\in \pi$ en este caso. Notemos que $\pi \cap [a, b] \in \Pi[a, b]$ y $\pi \cap [b, u] \in \Pi[b, u]$. Tenemos que existe $m_0 \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $t_{m_0} = b$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| + \sum_{k=m_0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| \\ &\leq \| \sigma \|_{1-var[a,b]} + \| \sigma \|_{1-var[b,u]} \ .\end{aligned}$$

Por tanto $\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| \leq \| \sigma \|_{1-var[a,b]} + \| \sigma \|_{1-var[b,u]}$.

Caso 2: $b \notin \pi$. En este caso, análogamente, consideraremos a $\pi \cap [a, b]$ y $\pi \cap [b, u]$, solo que en este caso no nos quedan particiones de $[a, b]$ y $[b, u]$ respectivamente. Lo único que hay que hacer es pegar b, es decir: $\pi \cap [a, b] \cup \{b\}$ y $\pi \cap [b, u] \cup \{b\}$ las cuales sí son particiones de $[a, b]$ y $[b, u]$ respectivamente.

Notemos que existe $m_0 \in \{0, \ldots, m-1\}$, tal que $t_{m_0} = \text{máx } \{\pi \cap [a, b]\}$. Pensemos en el caso más elaborado, que es cuando $m_0 \notin \{0, m-1\}$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| = \sum_{k=0}^{m_0-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| + \|\sigma(t_{m_0+1}) - \sigma(t_{m_0})\| + \sum_{k=m_0+1}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m_0-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| + \|\sigma(b) - \sigma(t_{m_0})\| + \sum_{k=m_0+1}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| + \|\sigma(t_{m_0+1}) - \sigma(b)\|$$

$$\leq \| \sigma \|_{1-var[a,b]} + \| \sigma \|_{1-var[b,u]}.$$

Note que si m_0=0 o $m-1$ basta hacer un ligero cambio, para llegar a la misma desigualdad, por tanto

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\| \leq \| \sigma \|_{1-var[a,b]} + \| \sigma \|_{1-var[b,u]} \ .$$

Ya que la partición fue arbitraria, de los dos casos concluimos que:

$$\| \sigma \|_{1-var[a,u]} \leq \| \sigma \|_{1-var[a,b]} + \| \sigma \|_{1-var[b,u]} \ .$$

Demostremos la otra desigualdad.

Sea $\pi_1 \in \Pi[a, b]$, π=$\{x_0, \ldots, x_{m_1}\}$ donde $x_0 = a < x_1 <\ldots<x_{m_1} = b$ y $\pi_2 \in \Pi[b, u]$, π=$\{y_0, \ldots, y_{m_2}\}$ donde $t_0 = b < t_1 <\ldots<t_{m_2} = u$. Es claro que $\pi_1 \cup \pi_2$ es una partición de $[a, u]$. Entonces:

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1})-\sigma(x_k)\| + \sum_{k=0}^{m_2-1} \|\sigma(y_{k+1})-\sigma(y_k)\| \leq \| \sigma \|_{1-var[a,u]} .$$

Esto último es porque el lado izquierdo de la desigualdad es justo la suma correspondiente a la partición $\pi_1 \cup \pi_2$. Es decir para cualesquiera $\pi_1 \in \Pi[a,b]$, π=$\{x_0,\ldots,x_{m_1}\}$ y $\pi_2 \in \Pi[b,u]$, π=$\{y_0,\ldots,y_{m_2}\}$ se cumple que

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1})-\sigma(x_k)\| \leq \| \sigma \|_{1-var[a,u]} - \sum_{k=0}^{m_2-1} \|\sigma(y_{k+1})-\sigma(y_k)\|.$$

Lo cual implica $\| \sigma \|_{1-var[a,b]} \leq \| \sigma \|_{1-var[a,u]} - \sum_{k=0}^{m_2-1} \|\sigma(y_{k+1})-\sigma(y_k)\|$.

Para $\pi_2 \in \Pi[b,u], \pi=\{y_0,\ldots,y_{m_2}\}$. Es decir $\sum_{k=0}^{m_2-1} \|\sigma(y_{k+1})-\sigma(y_k)\| \leq \| \sigma \|_{1-var[a,u]} - \| \sigma \|_{1-var[a,b]}$.

Concluimos entonces:

$\| \sigma \|_{1-var[b,u]} \leq \| \sigma \|_{1-var[a,u]} - \| \sigma \|_{1-var[a,b]}$, es decir $\| \sigma \|_{1-var[b,u]} + \| \sigma \|_{1-var[a,b]} \leq \| \sigma \|_{1-var[a,u]}$ ∎

***Teorema* 2.12** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. La función $(a,b) \to \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]}$ es súper-aditiva, es decir para $0 \leq a \leq b \leq u \leq T$ ocurre que $\| \sigma \|^p_{p-var[a,b]} + \| \sigma \|^p_{p-var[b,u]} \leq \| \sigma \|^p_{p-var[a,u]}$.*

Prueba: Observe que basta hacer un ligero cambio en la demostración pasada, para obtener esta desigualdad.

***Corolario* 2.13** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. La función Φ:$[0,T] \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(t)$=$\| \sigma \|^p_{p-var[0,t]}$ es no decreciente.*

Este resultado es inmediato del Teorema 2.12. ∎

Note que el caso anterior es la función p-variación pero restringida a una variable t, el siguiente teorema demostrará la continuidad de esta última. Y esto será útil para probar la continuidad en el caso general de la función p-variación.

***Teorema* 2.14** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. La función Φ:$[0,T] \to \mathbb{R}$ definida como $\Phi(t)$=$\| \sigma \|^p_{p-var[0,t]}$ es continua.*

Prueba: (Solo probaremos el caso cuando $p=1$, la prueba general se puede consultar en [3]).

Para demostrar que Φ es continua en $[0,T]$, usaremos sucesiones.
Sea $t_0 \in [0,T]$. Tomemos ahora $(r_q)_{q=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,T]$ tal que $r_q \to t_0$. Consideremos primero:

Caso 1 $t_0 \in (0,T)$. Por demostrar que $\Phi(r_q) \to \Phi(t_0)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $\pi_1 \in \Pi[t_0$,T],
π=$\{t_0 = x_0 < \ldots < x_{m_1} = T\}$ y $\pi_2 \in \Pi[0,t_0]$, π=$\{0 = y_0 < \ldots < y_{m_2} = t_0\}$ tales que:

$$\| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=0}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)\| \quad \text{y} \quad \| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=0}^{m_2-1} \|\sigma(y_{k+1}) - \sigma(y_k)\|.$$

Para $\text{mín}\{| \pi_1 |^-, | \pi_2 |^-\} > 0$, donde $| \pi_1 |^- = \text{mín}\ \{x_{k+1} - x_k : k = 0, .., m_1 - 1\}$ y análogamente

$| \pi_2 |^- = \text{mín}\ \{y_{k+1} - y_k : k = 0, \ldots, m_2 - 1\}$.

Como $r_q \to t_0$ existe $Q_1 \in \mathbb{N}$, tal que si q $\geq Q_1$ entonces $| r_q - t_0 | < \text{mín}\{| \pi_1 |^-, | \pi_2 |^-\}$. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, como $\sigma(r_q) \to \sigma(t_0)$, esto último por la continuidad de σ, existe $Q_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $q \geq Q_2$ entonces $\| \sigma(r_q) - \sigma(t_0) \| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definamos a Q= $\text{máx}\ \{Q_1, Q_2\}$. Afirmamos que si $q \geq$ Q entonces $| \Phi(r_q) - \Phi(t_0) | < \varepsilon$. Procedamos a verficar esto último, sea $q \geq Q$, nos fijamos en el correspondiente r_q, veremos los distintos casos, si $r_q = t_0$ es inmediato que $| \Phi(r_q) - \Phi(t_0) | < \varepsilon$. Por lo que ese caso es trivial. Veamos entonces que pasa si $t_0 < r_q$, en este caso nos fijamos en π_1, como q $\geq Q_1$, tenemos que $| r_q - t_0 | < | \pi_1 |^-$, lo cuál implica que $| r_q - t_0 | < x_1 - x_0$ de esto se sigue que $x_0 < r_q < x_1$, Veamos ahora la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} - \frac{\varepsilon}{2} &< \sum_{k=0}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)\| = \sum_{k=1}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)\| + \| \sigma(x_1) - \sigma(x_0) \| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)\| + (\| \sigma(x_1) - \sigma(r_q) \| + \| \sigma(r_q) - \sigma(x_0) \|) \\
&< \sum_{k=1}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)\| + \| \sigma(x_1) - \sigma(r_q) \| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Notemos que π_1^q=$\{r_q, x_0, \ldots, x_{m_1} = T\} \in \Pi[r_q$,T], lo cual implica que:

$$\sum_{k=1}^{m_1-1} \|\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)\| + \| \sigma(x_1) - \sigma(r_q) \| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \| \sigma \|_{1-var[r_q,T]} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto $\| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} - \frac{\varepsilon}{2} < \| \sigma \|_{1-var[r_q,T]} + \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $\| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} - \| \sigma \|_{1-var[r_q,T]} < \varepsilon$.

Aplicando el Teorema 2.11 : $\| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} + \| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} = \| \sigma \|_{1-var[0,T]}$

$$\| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} + \| \sigma \|_{1-var[r_q,T]} = \| \sigma \|_{1-var[0,T]}$$

entonces: $\| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} + \| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} = \| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} + \| \sigma \|_{1-var[r_q,T]}$.

Lo cual implica $\| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} - \| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} = \| \sigma \|_{1-var[t_0,T]} - \| \sigma \|_{1-var[r_q,T]} < \varepsilon$ por el Corolario 2.13 la función es no decreciente, por tanto $| \Phi(r_q) - \Phi(t_0) | = \left| \| \sigma \|_{p-var[0,r_q]}^p - \| \sigma \|_{p-var[0,t_0]}^p \right| < \varepsilon$.

Falta ver el caso $r_q < t_0$, en este caso nos fijamos en π_2, como q $\geq Q_2$ tenemos que $| r_q - t_0 | < | \pi_2 |^-$, lo cual implica que $| r_q - t_0 | < y_{m_2} - y_{m_2-1}$ de esto se sigue que $y_{m_2-1} < r_q < y_{m_2}$, Veamos ahora la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} - \frac{\varepsilon}{2} &< \sum_{k=0}^{m_2-1} \|\sigma(y_{k+1}) - \sigma(y_k)\| = \sum_{k=0}^{m_2-2} \|\sigma(y_{k+1}) - \sigma(y_k)\| + \| \sigma(y_{m_2}) - \sigma(y_{m_2-1}) \| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m_2-2} \|\sigma(y_{k+1}) - \sigma(y_k)\| + (\| \sigma(y_{m_2}) - \sigma(r_q) \| + \| \sigma(r_q) - \sigma(y_{m_2-1}) \|) \\
&< \sum_{k=0}^{m_2-2} \|\sigma(y_{k+1}) - \sigma(y_k)\| + \| \sigma(y_{m_2-1}) - \sigma(r_q) \| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Notemos que $\pi_2^q = \{y_0, \ldots, y_{m_2-1}, r_q\} \in \Pi[0, r_q]$, lo cual implica que:

$$\sum_{k=0}^{m_2-2} \|\sigma(y_{k+1}) - \sigma(y_k)\| + \| \sigma(y_{m_2-1}) - \sigma(r_q) \| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto $\| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} - \frac{\varepsilon}{2} < \| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} + \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $\| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} - \| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} < \varepsilon$.

Como la función es no decreciente, entonces $| \Phi(t_0) - \Phi(r_q) | = \| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} - \| \sigma \|_{1-var[0,r_q]} < \varepsilon$.

Concluimos de todos los casos que si $q \geq$ Q, entonces $| \Phi(t_0) - \Phi(r_q) | < \varepsilon$, es decir $\Phi(r_q) \to \Phi(t_0)$. Por tanto Φ es continua para todo $t_0 \in (0, T)$. Los casos $t = 0$ ó $t = T$ se obtienen de manera muy parecida a la que acabamos de hacer. ∎

***Teorema* 2.15** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. La función $(a, b) \to \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]}$ es continua.*

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$. En el Teorema 2.14 vimos que Φ:[0,T] $\to \mathbb{R}$, definida como $\Phi(t) = \| \sigma \|^p_{p-var[0,t]}$ es continua, por tanto uniformemente continua, de modo que para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $| x - y | < \delta$ entonces $| \Phi(x) - \Phi(y) | < \frac{\varepsilon}{2}$. Supongamos entonces que $\| (a_1, b_1) - (a_2, b_2) \| < \delta$.

Así $| a_1 - a_2 | < \delta$ y $| b_1 - b_2 | < \delta$,de modo que $| \Phi(a_1) - \Phi(a_2) | < \frac{\varepsilon}{2}$ y $| \Phi(b_1) - \Phi(b_2) | < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}
\left| \| \sigma \|^p_{p-var[a_1,a_2]} - \| \sigma \|^p_{p-var[b_1,b_2]} \right| &\leq \| \sigma \|^p_{p-var[a_1,a_2]} + \| \sigma \|^p_{p-var[b_1,b_2]} \\
&\leq \| \sigma \|^p_{p-var[0,a_2]} - \| \sigma \|^p_{p-var[0,a_1]} + \| \sigma \|^p_{p-var[0,b_2]} - \| \sigma \|^p_{p-var[0,b_1]} \\
&= | \Phi(a_1) - \Phi(a_2) | + | \Phi(b_1) - \Phi(b_2) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto la función $(a, b) \to \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]}$ es uniformemente continua, lo cual implica que es continua. ∎

Finalmente el siguiente resultado nos dice que la función p-variación, resulta ser un control.

***Corolario* 2.16** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Entonces $\omega(a, b) = \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]}$ es un control, tal que para cada $a \leq b$ se tiene que $\| \sigma(a) - \sigma(b) \| \leq \omega(a, b)^{\frac{1}{p}}$.*

Prueba: Por el Lema 2.10 $\omega(a,b)$ esta bien definida. Sea $t \in [0,T]$, es claro por la definición que $\omega(t,t)$=0, también es imediato ver que $\parallel \sigma(a)-\sigma(b) \parallel \leq \omega(a,b)^{\frac{1}{p}}$, además por el Teorema 2.15 ω es continua y también por el Teorema 2.12 ω es súper-aditiva. Por lo tanto ω es un control. ∎

***Proposición* 2.17** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ y ω:$\{(a,b)|\ 0 \leq a \leq b \leq T\} \to [0,\infty)$ un control, tal que si 0 $\leq a \leq b \leq T$, se cumple $\parallel \sigma(b) - \sigma(a) \parallel \leq C\,\omega(a,b)^{\frac{1}{p}}$ con $C>0$. Entonces $\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]} \leq C\,\omega(a,b)^{\frac{1}{p}}$.*

Prueba:

$$\begin{aligned}
\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]} &= \Big[\sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big[\sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} C^p\omega(t_{k+1},t_k)\Big]^{\frac{1}{p}} \text{ esta desigualdad se sigue de la hipótesis.} \\
&= (C^p)^{\frac{1}{p}}\Big[\sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \omega(t_{k+1},t_k)\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\Big[\sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \omega(a,b)\Big]^{\frac{1}{p}} \text{ esta desigualdad es porque } \omega \text{ es súper-aditiva por ser un control.} \\
&= C\Big[\ \omega(a,b)\Big]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. ∎

***Teorema* 2.18** *: Sea $\sigma \in \mathcal{C}^{1-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Entonces existe Y:$[0,1] \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz continua y $\phi:[0,1] \to [0,1]$ una función continua no decreciente, tal que $\sigma = Y \circ \phi$.*

Prueba: Supongamos el caso interesante que es cuando $\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,T]} \neq 0$, y consideremos $\phi:[0,T] \to [0,1]$ dada por $\phi(t) = \dfrac{\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,t]}}{\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,T]}}$, por el Lema 2.10, Corolario 2.13, Teorema 2.14 que ya probamos ϕ está bien definida, es continua y no decreciente. Probaremos ahora que ϕ es suprayectiva. Supongamos que no es suprayectiva, si valuamos los extremos tenemos que:

$$\phi(0) = \frac{\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,0]}}{\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,T]}}{=}0, \quad \phi(T) = \frac{\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,T]}}{\parallel \sigma \parallel_{1-var[0,T]}}{=}1 \text{ es decir } \{0,1\} \subseteq \phi([0,T]).$$

Como estamos suponiendo que ϕ no es suprayectiva, existe $t \in [0,1]$ tal que $t \notin \phi([0,T])$, lo cual implica que $t \in (0,1)$. Así definimos $[0,t)$ y $(t,1]$ abiertos en $[0,1]$, como ϕ es continua, entonces $\phi^{-1}[0,t)$ y $\phi^{-1}(t,1]$ son abiertos en [0,T], además son no vacíos ya que $0 \in \phi^{-1}[0,t)$ y T$\in \phi^{-1}(t,1]$ y también cumplen que $\phi^{-1}[0,t) \cup \phi^{-1}(t,1]$=[0,T], $\phi^{-1}[0,t) \cap \phi^{-1}(t,1]=\emptyset$, lo cual implica que [0,T] es disconexo, lo cual es absurdo por tanto ϕ es suprayectiva.

Ahora procederemos a definir Y:$[0,1] \to \mathbb{R}^n$, dada por: $Y(y)$=$\sigma(\text{mín}\ \phi^{-1}(\{y\}))$. Y. Esta bien definida ya que como ϕ es sobre y continua, $\phi^{-1}(\{y\})$ es un cerrado no vacío de $[0,1]$ y por tanto tiene elemento mínimo.

Afirmamos ahora que $\sigma = Y \circ \phi$. Sea $t \in [0,T]$, entonces $Y \circ \phi(t)$=$Y(\phi(t))$= $\sigma(\text{mín } \phi^{-1}(\{\phi(t)\}))$ como $t \in \phi^{-1}(\{\phi(t)\})$, esto ultimo implica que mín $\phi^{-1}(\{\phi(t)\}) \leq t$. Si $\text{mín}\, \phi^{-1}(\{\phi(t)\}) = t$ entonces $\sigma(\text{mín}\, \phi^{-1}(\{\phi(t)\}))$=$\sigma(t)$. Por tanto $Y \circ \phi(t)$=$\sigma(t)$.

Si tenemos que $\text{mín}\, \phi^{-1}(\{\phi(t)\}) < t$, entonces definimos π=$\{t_0$= $\text{mín}\, \phi^{-1}(\{\phi(t)\})$,$t_1 = t\}$, lo cual implica que $\| \sigma(t_1) - \sigma(t_0) \| \leq \| \sigma \|_{1-var[t_0,t_1]}$, pero $\phi(t_0) = \phi(t_1)$ entonces $\| \sigma \|_{1-var[0,t_0]} = \| \sigma \|_{1-var[0,t_1]}$ y por la super-aditividad tenemos que $\| \sigma \|_{1-var[t_0,t_1]}$= 0, es decir $\| \sigma(t_1) - \sigma(t_0) \| = 0$. Concluimos entonces que $\sigma(\text{mín } \phi^{-1}(\{\phi(t)\}))$=$\sigma(t)$. Por tanto $Y \circ \phi(t)$=$\sigma(t)$.

Por lo tanto $\sigma = Y \circ \phi$. Solo falta probar que Y es Lipschitz continua. Sean $y_1, y_2 \in [0,1]$, entonces $\| Y(y_1) - Y(y_2) \| = \| Y(\phi(y_1^*)) - Y(\phi(y_2^*)) \|$ para algunos y_1^*, $y_2^* \in$ [0,T], ya que ϕ es suprayectiva. De donde $\| Y(\phi(y_1^*)) - Y(\phi(y_2^*)) \|$=$\| \sigma(y_1^*) - \sigma(y_2^*) \|$, justo por lo que acabamos de demostrar.

Si $y_1^* \leq y_2^*$ entonces $\| \sigma(y_1^*) - \sigma(y_2^*) \| \leq \| \sigma \|_{1-var[y_1^*,y_2^*]}$$=\dfrac{\| \sigma \|_{1-var[0,y_2^*]} - \| \sigma \|_{1-var[0,y_1^*]}}{\| \sigma \|_{1-var[0,T]}} \| \sigma \|_{1-var[0,T]}$

$$= \left[\frac{\| \sigma \|_{1-var[0,y_2^*]}}{\| \sigma \|_{1-var[0,T]}} - \frac{\| \sigma \|_{1-var[0,y_1^*]}}{\| \sigma \|_{1-var[0,T]}} \right] \| \sigma \|_{1-var[0,T]} = [\phi(y_2^*) - \phi(y_1^*)] \| \sigma \|_{1-var[0,T]}$$

$$=[y_2 - y_1] \| \sigma \|_{1-var[0,T]}.$$

Si llamamos C=$\| \sigma \|_{1-var[0,T]} > 0$ entonces $\| Y(y_1) - Y(y_2) \| \leq$ C $| y_1 - y_2 |$.

Si $y_2^* < y_1^*$ entonces $\| \sigma(y_2^*) - \sigma(y_1^*) \| \leq \| \sigma \|_{1-var[y_2^*,y_1^*]}$$=\dfrac{\| \sigma \|_{1-var[0,y_1^*]} - \| \sigma \|_{1-var[0,y_2^*]}}{\| \sigma \|_{1-var[0,T]}} \| \sigma \|_{1-var[0,T]}$

$$= \left[\frac{\| \sigma \|_{1-var[0,y_1^*]}}{\| \sigma \|_{1-var[0,T]}} - \frac{\| \sigma \|_{1-var[0,y_2^*]}}{\| \sigma \|_{1-var[0,T]}} \right] \| \sigma \|_{1-var[0,T]} = [\phi(y_1^*) - \phi(y_2^*)] \| \sigma \|_{1-var[0,T]}$$

$$=[y_1 - y_2] \| \sigma \|_{1-var[0,T]}.$$

Si llamamos C=$\| \sigma \|_{1-var[0,T]} > 0$ entonces $\| Y(y_1) - Y(y_2) \| \leq$C$| y_1 - y_2 |$.

Por tanto para C=$\| \sigma \|_{1-var[0,T]} > 0$, $\| Y(y_1) - Y(y_2) \| \leq$ C$| y_1 - y_2 |$ para cualesquiera $y_1, y_2 \in [0,1]$.

Concluimos que Y es Lipschitz continua.

Falta ver el caso cuando $\| \sigma \|_{1-var[0,T]}$= 0; este caso es mucho más simple. Basta notar que $\sigma \equiv \hat{c}$ para algun $\hat{c} \in \mathbb{R}^n$, Así tomemos ϕ=Id y Y=$\hat{c}$. ∎

2.5. El espacio $\mathcal{C}^{p-var}_{([a,b],\mathbb{R}^n)}$ con $\| \sigma \|_{p-var[a,b]}$ no es normado.

El espacio de las trayectorias de p-variación finita con $\| \sigma \|_{p-var[a,b]}$ no resulta un espacio normado. Para notar esto veamos el siguiente ejemplo:

***Ejemplo* 2.19** *: Sea σ: $[a,b]: \to \mathbb{R}^n$, dada por $\sigma(t) = \hat{c}$ para toda $t \in [a,b]$. Entonces $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = 0$.*

Prueba:

$$\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = \Big[\sup_{\pi\epsilon\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \| \hat{c} - \hat{c} \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \blacksquare$$

Conclusión del ejemplo:

$\| \sigma \|_{p-var[a,b]}$ no es una norma en $\mathcal{C}^{p-var}_{([a,b],\mathbb{R}^n)}$, ya que existe una función distinta de la constante cero, tal que $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = 0$.

Ya vimos que si una trayectoria σ cumple que $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = 0$, no necesariamente es la función constante cero, pero si podemos caracterizar a las funciones que cumplen esta propiedad y en este sentido va la siguiente proposición. Justamente las trayectorias que cumplen esto resultan ser las trayectorias constantes.

***Proposición* 2.20** *: Sea σ: $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = 0$ si y solo si σ es constante.*

Prueba:

($\Rightarrow$) Supongamos que $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = 0$

Si $a = b$, es evidente que σ es constante entonces supongamos que $a < b$, así definamos $\pi = \{t_0 = a, t_1 = b\}$ partición de $[a,b]$, entonces $\| \sigma(t_0) - \sigma(t_1))\|^p \leq \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]} = 0$. Pero $\| \sigma(t_0) - \sigma(t_1))\| = \| \sigma(a) - \sigma(b))\|$, así $\| \sigma(a) - \sigma(b))\| = 0$, es decir $\sigma(a) = \sigma(b)$ de esta forma Llamemos $\hat{c} = \sigma(a) \in \mathbb{R}^n$. Por demostrar que para toda $t \in (a,b)$, se tiene que $\sigma(t) = \hat{c}$.

Sea $t \in (a,b)$. Entonces $\| \sigma \|^p_{p-var[a,t]} + \| \sigma \|^p_{p-var[t,b]} \leq \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]}$, definamos $\pi = \{t_0 = a, t_1 = t\}$ partición de $[a,t]$ entonces $\| \sigma(a) - \sigma(t) \|^p \leq \| \sigma \|^p_{p-var[a,t]} \leq \| \sigma \|^p_{p-var[a,b]} = 0$, es decir $\| \sigma(a) - \sigma(t) \|$=0, por lo tanto $\sigma(t) = \sigma(a) = \hat{c}$, es lo que queriamos probar por lo cual $\sigma \equiv \hat{c}$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que σ es constante.

Siguiendo la misma prueba que en el Ejemplo 2.19 ya acabamos. $\blacksquare$

Aunque el espacio de las trayectorias con p-variación finita con $\| \sigma \|_{p-var[a,b]}$ no resulta ser un espacio normado, esta última proposición da pie a que con una modificación, podríamos definir una función que sí lo sea y que dependa de la p-variación, tal como veremos en la sección siguiente de este capítulo. Antes de hacer eso vamos a notar que no todos los valores de p son interesantes, ¿qué pasa si p<1?. En este sentido va la siguiente proposición:

***Proposición* 2.21** *: Sea σ: $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua con p-variación finita, tal que $p < 1$. Entonces σ es constante.*

Prueba:

Si $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} = 0$ ya acabamos, debido a la Proposición 2.20, así supongamos $\| \sigma \|_{p-var[a,b]} > 0$.

Sean $t \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Para ε^*=$\left[\dfrac{\varepsilon}{\| \sigma \|^p_{p-var[a,b]}} \right]^{\frac{1}{1-p}} > 0$, como σ es continua en $[a,b]$ tenemos que σ

es uniformemente continua en $[a,b]$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que si $\mid x-y \mid < \delta$.

Entonces $\parallel \sigma(x)-\sigma(y) \parallel < \varepsilon^*$, sea π^* una partición de $[a,b]$ tal que $t \in \pi^*$ y $\mid \pi^* \mid < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\| &= \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^{1-p}\|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p \\
&\leq \max_{k=0,\ldots,m-1}\|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^{1-p}\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p
\end{aligned}$$

Si $k \in \{0,\ldots,m-1\}$, y $t_{k+1}-t_k < \delta$ se tiene que $\|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k) \| < \varepsilon^*$, como $p < 1$ se sigue que $\|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k) \|^{1-p} < (\varepsilon^*)^{1-p}$ de modo que $\max\limits_{k=0,\ldots,m-1}\|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^{1-p} < (\varepsilon^*)^{1-p}$. Resumiendo:

$$\begin{aligned}
\parallel \sigma(a)-\sigma(t) \parallel &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\| \\
&\leq \max_{k=0,\ldots,m-1}\|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^{1-p}\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p \\
&< (\varepsilon^*)^{1-p}\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p \leq (\varepsilon^*)^{1-p} \sup_{\pi\in\Pi[a,b]} \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^p \\
&= (\varepsilon^*)^{1-p} \parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}^p = \left[\left(\frac{\varepsilon}{\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}^p}\right)^{\frac{1}{1-p}}\right]^{1-p} \parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}^p \\
&= \frac{\varepsilon}{\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}^p} \parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}^p = \varepsilon
\end{aligned}$$

Para toda $\varepsilon > 0$, se cumple que $\parallel \sigma(a)-\sigma(t) \parallel < \varepsilon$, es decir $\sigma(a)=\sigma(t)$ para toda $t \in [a,b]$, por tanto σ es constante ∎

Por lo visto en las últimas proposiciones, podemos tener una idea de cómo definir una norma en el espacio de las trayectorias con p-variación finita, y en que casos resulta interesante estudiar este espacio. Antes de hacer eso, veamos que entre más grande el valor p más chico resulta el espacio.

Proposición 2.22 *: Sea σ:$[a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua. Si $p \leq p'$ entonces: $\parallel \sigma \parallel_{p'-var[a,b]} \leq \parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}$ en consecuencia tenemos que $\mathcal{C}^{p-var}_{([a,b],\mathbb{R}^n)} \subseteq \mathcal{C}^{p'-var}_{([a,b],\mathbb{R}^n)}$.*

Prueba: Si $\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}=\infty$, es evidente la desigualdad. Supongamos entonces que $\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}^p$ es finito, si $p < 1$ por la Proposición 2.21 tenemos que σ es constante y por la Proposición 2.20 $\parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}=\parallel \sigma \parallel_{p'-var[a,b]}=0$, el caso interesante es cuando $p \geq 1$ y σ es de p-variación finita.

Tomemos π particion de $[a,b]$, $\pi=\{a=t_0,\ldots,t_m=b\}$. Así tenemos lo siguiente:

$$\left[\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^{p'}\right]^{1/p'} \leq \left[\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)\|^{p}\right]^{1/p} \leq \parallel \sigma \parallel_{p-var[a,b]}$$

La primera desigualdad es una propiedad de la norma p. Concluimos entonces que:
$\| \sigma \|_{p'-var[a,b]} \leq \| \sigma \|_{p-var[a,b]}$, lo cúal implica el resultado. ∎

2.6. El espacio $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ con $\| \sigma(0) \| + \| \sigma \|_{p-var[0,T]}$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.23 *: Sea $p \geq 1$. El espacio $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ con la norma: $\| \sigma(0) \| + \| \sigma \|_{p-var[0,T]}$ es un espacio de Banach.*

Prueba: $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)} \subseteq \mathcal{C}([0,T])$, como $\mathcal{C}([0,T])$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$, basta ver que $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ es un subespacio de $\mathcal{C}([0,T])$, para demostrar que este es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$.

(1) Sea $\sigma \equiv \hat{0}$. Como σ es constante entonces por la Proposición 2.20 $\| \sigma \|_{p-var[0,T]} = 0$, por lo tanto: $\sigma \equiv \hat{0} \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$.

(2) Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ ocurre $\| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]}, \| \sigma_2 \|_{p-var[0,T]} \in \mathbb{R}$.

Sea $\pi \in \Pi\ [0,T]$ donde π=$\{t_0, \ldots, t_m\}$. Entonces:

$$\Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|[\sigma_1 + \lambda\sigma_2)(t_{k+1}) - (\sigma_1 + \lambda\sigma_2)(t_k)]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| [\sigma_1(t_{k+1}) + \lambda\sigma_2(t_{k+1})] - [\sigma_1(t_k) + \lambda\sigma_2(t_k)] \|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) + \lambda\sigma_2(t_{k+1}) - \lambda\sigma_2(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big[\sum_{k=0}^{m-1} (\| \sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) \| + \| \lambda\sigma_2(t_{k+1}) - \lambda\sigma_2(t_k) \|)^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \lambda\sigma_2(t_{k+1}) - \lambda\sigma_2(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} + | \lambda | \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \sigma_2(t_{k+1}) - \sigma_2(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]} + | \lambda | \| \sigma_2 \|_{p-var[0,T]}.$$

De modo que: $\Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|[\sigma_1 + \lambda\sigma_2)(t_{k+1}) - (\sigma_1 + \lambda\sigma_2)(t_k)]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]} + | \lambda | \| \sigma_2 \|_{p-var[0,T]}$.

Como $\pi \in \Pi\ [0,T]$ es arbitrario entonces: $\| \sigma_1 + \lambda\sigma_2 \|_{p-var[0,T]} \leq \| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]} + \| \lambda\sigma_2 \|_{p-var[0,T]}$.

Es decir $\sigma_1 + \lambda\sigma_2 \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Concluimos entonces que $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}([0,T])$, por tanto espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$.

El siguiente paso es probar que: $\| \sigma(0) \| + \| \sigma \|_{p-var[0,T]}$, define una norma en $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. En este caso es claro que la norma está bien definida, por lo cual pasemos a demostrar las propiedades de norma.

i) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\| \sigma \| = 0$ entonces $\| \sigma(0) \| = 0$ y $\| \sigma \|_{p-var[0,T]} = 0$, esto implica que σ es constante por la Proposición 2.20 y como $\| \sigma(0) \| = 0$, tenemos $\sigma(0) = \hat{0}$. Concluimos que $\sigma \equiv \hat{0}$.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\sigma \equiv \hat{0}$, esto implica que $\sigma(0) = \hat{0}$, por lo cual $\| \sigma(0) \| = 0$, además como σ es constante por la Proposición 2.20, tenemos que $\| \sigma \|_{p-var[0,T]} = 0$, por tanto $\| \sigma \| = 0$.

ii) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\| \lambda\sigma \| = \| \lambda\sigma(0) \| + \| \lambda\sigma \|_{p-var[0,T]} &= | \lambda | \| \sigma(0) \| + | \lambda | \| \sigma \|_{p-var[0,T]} \\
&= | \lambda | [\| \sigma(0) \| + \| \sigma \|_{p-var[0,T]}] \\
&= | \lambda | \| \sigma \|
\end{aligned}$$

iii) Sean σ_1, $\sigma_2 \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Entonces:

$\| \sigma_1 + \sigma_2 \| = \| (\sigma_1 + \sigma_2)(0) \| + \| \sigma_1 + \sigma_2 \|_{p-var[0,T]} = \| \sigma_1(0) + \sigma_2(0) \| + \| \sigma_1 + \sigma_2 \|_{p-var[0,T]}$

$\leq \| \sigma_1(0) \| + \| \sigma_2(0) \| + \| \sigma_1 + \sigma_2 \|_{p-var[0,T]}$. Veamos que pasa con el segundo termino.

Sea $\pi \in \Pi$ [0,T] donde $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|[(\sigma_1 + \sigma_2)(t_{k+1}) - (\sigma_1 + \sigma_2)(t_k)]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} &= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| [\sigma_1(t_{k+1}) + \sigma_2(t_{k+1})] - [\sigma_1(t_k) + \sigma_2(t_k)] \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) + \sigma_2(t_{k+1}) - \sigma_2(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big[\sum_{k=0}^{m-1} (\| \sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) \| + \| \sigma_2(t_{k+1}) - \sigma_2(t_k) \|)^p \Big]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \sigma_1(t_{k+1}) - \sigma_1(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \sigma_2(t_{k+1}) - \sigma_2(t_k) \|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]} + \| \sigma_2 \|_{p-var[0,T]}.$$

Concluimos entonces que: $\| \sigma_1 + \sigma_2 \|_{p-var[0,T]} \leq \| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]} + \| \sigma_2 \|_{p-var[0,T]}$. Esto implica que:

$$\begin{aligned}
\| \sigma_1(0) \| + \| \sigma_2(0) \| + \| \sigma_1 + \sigma_2 \|_{p-var[0,T]} &\leq \| \sigma_1(0) \| + \| \sigma_2(0) \| + \| \sigma_1 \|_{p-var[0,T]} + \| \sigma_2 \|_{p-var[0,T]} \\
&= \| \sigma_1 \| + \| \sigma_2 \|
\end{aligned}$$

Entonces $\| \sigma_1 + \sigma_2 \| \leq \| \sigma_1 \| + \| \sigma_2 \|$.

Por lo tanto $\| \sigma(0) \| + \| \sigma \|_{p-var[0,T]}$ define una norma en $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Es decir $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ es un espacio normado. Visto esto lo que faltaría por demostrar es que $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ es completo.

Sea $(\sigma_q)_{q=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Tomemos ahora $t \in$ [0,T] fijo. Afirmamos entonces que

$(\sigma_q(t))_{q=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Sea $\varepsilon > 0$ como es $(\sigma_q)_{q=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy, existe $Q \in \mathbb{N}$ tal que si $q_1, q_2 \geq$ Q entonces $\| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \| < \varepsilon$, es decir:

$$\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \|_{p-var[0,T]} < \varepsilon$$

Si $t = 0$, entonces $\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(t) \| = \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| = \| \sigma_{q_1}(0) - \sigma_{q_2}(0) \| < \varepsilon \quad$ si $\quad q_1, q_2 \geq$ Q.

Si $t = T$, sea $\pi = \{$0,T$\}$. Tenemos que $\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(T) - (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| \leq \| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \|_{p-var[0,T]}$.

Ahora $\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(T) \| = \| \sigma_{q_1}(T) - \sigma_{q_2}(T) \| = \| \sigma_{q_1}(T) - \sigma_{q_2}(T) - (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) + (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \|$

$\leq \| \sigma_{q_1}(T) - \sigma_{q_2}(T) - (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| \leq \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \|_{p-var[0,T]}$

Por lo tanto $\| \sigma_{q_1}(T) - \sigma_{q_2}(T) \| < \varepsilon \quad$ si $\quad q_1, q_2 \geq$ Q.

Si $t \in$ (0,T) entonces $\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(t) \| = \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(t) - (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) + (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \|$

$\leq \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(t) - (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| \leq \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \|_{p-var[0,t]}$

$\leq \| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \|_{p-var[0,T]} < \varepsilon$. Por lo tanto $\| \sigma_{q_1}(t) - \sigma_{q_2}(t) \| < \varepsilon \quad$ si $\quad q_1, q_2 \geq$ Q.

En conclusión de esta parte, para $\varepsilon > 0$ existe $Q \in \mathbb{N}$ tal que si $q_1, q_2 \geq$ Q entonces $\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(t) \| < \varepsilon$ para toda $t \in$ [0,T], esto implica que: $(\sigma_q(t))_{q=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, que era la afirmación que teníamos, pero también implica que $(\sigma_q)_{q=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en C[0,T]. Como $\mathbb{R}^n$ es completo, para cada $t \in$ [0,T] existe $\hat{t} \in \mathbb{R}^n$ tal que: $\lim\limits_{q\to\infty} \sigma_q(t) = \hat{t}$, de esta forma definimos σ: [0,T]$\to\mathbb{R}^n$ como $\sigma(t) = \hat{t}$. Como C[0,T] también es completo, esto nos asegura que σ es una función continua.
Lo que queremos hacer ahora es probar que $\| \sigma \|_{p-var[0,T]}$ es finito, para hacer esto primero notemos la siguiente afirmación.

Afirmamos ahora que: $\sup\limits_{q=1,2,\ldots} \| \sigma_q \|_{p-var[0,T]} \in \mathbb{R}$, procedamos entonces a la prueba de esta afirmación.
Tomemos $\varepsilon = 1$, como $(\sigma_q)_{q=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Tenemos que existe Q $\in \mathbb{N}$, tal

que si $q_1, q_2 \geq$ Q entonces $\| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \| < 1$. Sea $M_0 = \max \{\| \sigma_q \|$: q=1,. . . ,$Q\}$. Así definamos M=$M_0$+1 > 0, sea $q = 1, 2, \ldots,$ si $q \leq$ Q. Entonces $\| \sigma_q \| \leq M_0$, por tanto $\| \sigma_q \| \leq$ M, por otra parte si q $>$ Q entonces $\| \sigma_q \| = \| \sigma_q - \sigma_Q + \sigma_Q \| \leq \| \sigma_q - \sigma_Q \| + \| \sigma_Q \| < 1 + M_0 =$ M entonces $\| \sigma_q \| \leq$ M

Por lo tanto para toda $q = 1, 2 \ldots$, tenemos $\| \sigma_q \| \leq$ M pero $\| \sigma_q \| = \| \sigma_q(0) \| + \| \sigma_q \|_{p-var[0,T]}$.

Lo cual implica $\| \sigma_q \|_{p-var[0,T]} \leq$ M para toda $q = 1, 2 \ldots$. Por tanto $\sup\limits_{q=1,2,\ldots} \| \sigma_q \|_{p-var[0,T]} \in \mathbb{R}$. Una vez dicho es-
to pasemos a ver que $\| \sigma \|_{p-var[0,T]}$ es finito. Sea π una partición de [0,T] donde $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^p &= \sum_{k=0}^{m-1} \| \lim_{q\to\infty} \sigma_q(t_{k+1}) - \lim_{q\to\infty} \sigma_q(t_k)\|^p \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \| \lim_{q\to\infty} [\sigma_q(t_{k+1}) - \sigma_q(t_k)]\|^p \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \lim_{q\to\infty} \|\sigma_q(t_{k+1}) - \sigma_q(t_k)\|^p \\
&= \lim_{q\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma_q(t_{k+1}) - \sigma_q(t_k)\|^p \leq \lim_{q\to\infty} \| \sigma_q \|^p_{p-var[0,T]} \\
&\leq \lim_{q\to\infty} \sup_{q=1,2,\dots} \| \sigma_q \|^p_{p-var[0,T]} \;=\; \sup_{q=1,2,\dots} \| \sigma_q \|^p_{p-var[0,T]} \; .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\|^p \leq \sup_{q=1,2,\dots} \| \sigma_q \|^p_{p-var[0,T]}$ y de la afirmación pasada se sigue que $\| \sigma \|_{p-var[0,T]}$ es finito. De modo que $\sigma \in \mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$.

Por demostrar que $\sigma_q \to \sigma$ en el sentido de la norma que definimos.

Sea $\varepsilon > 0$. Para $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existe Q $\in \mathbb{N}$ tal que si $q_1, q_2 \geq$ Q entonces $\| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \| < \frac{\varepsilon}{3}$, es decir

$$\| (\sigma_{q_1} - \sigma_{q_2})(0) \| + \| \sigma_{q_1} - \sigma_{q_2} \|_{p-var[0,T]} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea $q \geq$ Q. Hay que fijarnos $\| \sigma_q - \sigma \| = \| (\sigma_q - \sigma)(0) \| + \| \sigma_q - \sigma \|_{p-var[0,T]}$, para el primer término de esta suma tenemos:

$$\| (\sigma_q - \sigma)(0) \| = \| \sigma_q(0) - \sigma(0) \| = \| \sigma_q(0) - \lim_{r\to\infty} \sigma_r(0) \| = \lim_{r\to\infty} \| \sigma_q(0) - \sigma_r(0) \|.$$

De modo que si $r \geq$ Q entonces $\| \sigma_q(0) - \sigma_r(0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$, esto implica que $\lim_{r\to\infty} \| \sigma_q(0) - \sigma_r(0) \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, es decir $\| (\sigma_q - \sigma)(0) \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Ya pudimos acotar el primer término. Sea $\pi \in \Pi$ [0,T] donde π=$\{t_0, \dots, t_m\}$. Entonces:

$$\Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|(\sigma_q - \sigma_r)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma_r)(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \| \sigma_q - \sigma_r \|_{p-var[0,T]} < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ si } r \geq \mathrm{Q}.$$

Aplicando límites: $\lim_{r\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|(\sigma_q - \sigma_r)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma_r)(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$.

Desarrollando el límite de la izquierda.

$$\lim_{r\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|(\sigma_q - \sigma_r)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma_r)(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\lim_{r\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \|(\sigma_q - \sigma_r)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma_r)(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \lim_{r\to\infty} \|(\sigma_q - \sigma_r)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma_r)(t_k)\|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \lim_{r\to\infty} [(\sigma_q - \sigma_r)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma_r)(t_k) \ ]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \| \lim_{r\to\infty} \sigma_q(t_{k+1}) - \lim_{r\to\infty} \sigma_r(t_{k+1}) - \lim_{r\to\infty} \sigma_q(t_k) - \lim_{r\to\infty} \sigma_r(t_k) \ ]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|\sigma_q(t_{k+1}) - \sigma(t_{k+1}) - \sigma_q(t_k) - \sigma(t_k) \ ]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|(\sigma_q - \sigma)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma)(t_k) \ ]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}}$$

Es decir para toda π una partición de $[0,T]$, se cumple $\Big[\sum_{k=0}^{m-1} \|(\sigma_q - \sigma)(t_{k+1}) - (\sigma_q - \sigma)(t_k) \ ]\|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Por tanto $\| \sigma_q - \sigma \|_{p-var[0,T]} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. juntando todo lo que llevamos, obtenemos la siguiente desigualdad:

$\| \sigma_q - \sigma \| = \| (\sigma_q - \sigma)(0) \| + \| \sigma_q - \sigma \|_{p-var[0,T]} \leq \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ es decir si $q \geq$ Q, entonces $\| \sigma_q - \sigma \| < \varepsilon$.

Que es justo la definición de que $\sigma_q \to \sigma$

Finalmente tenemos que $\mathcal{C}^{p-var}_{([0,T],\mathbb{R}^n)}$ es un espacio de Banach. ∎

Capítulo 3

El espacio D

3.1. Preliminares.

El espacio D es el conjunto de las funciones càdlàg, es decir las funciones continuas por la derecha y con limites por la izquierda. Resulta conveniente en ciertos contextos trabajar con funciones de este estilo, por ejemplo si nos interesa estudiar las trayectorias de un proceso de Poisson, en este caso, sería necesario definir una métrica distinta a la del supremo, que nos permita de alguna manera poder aproximar los saltos. En este texto pensaremos al espacio D con dominio en $[a,b]$ o $[0,\infty)$, sin embargo, muchos de los resultados aquí presentados, se pueden generalizar, cuando el dominio es un espacio métrico completo y separable. Antes de proceder a definir la métrica en D, conozcamos un poco como se comportan los saltos en este espacio.

***Definición* 3.1 :**
$D[0,\infty)$=$\{f : [0,\infty)\to\mathbb{R} \mid f$ es continua por la derecha en x y $\lim\limits_{t\to x^-} f(t)$ existe para toda $x \in [0,\infty)\}$.

***Proposición* 3.2 :** *Si $f \in D[0,\infty)$ entonces f tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.*

Prueba:

Sea $f \in$ D$[0,\infty)$. Entonces para $n = 1, 2, \ldots$ definimos A_n=$\{x > 0 \mid \mid f(x) - \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid > \frac{1}{n}\}$. Luego disc$(f)$=$\{x \in [0,\infty) \mid f$ es discontinua en $x\}$= $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, verifiquemos esta última igualdad.

$\subseteq$ Sea $x \in$ disc(f). Entonces $\lim\limits_{t\to x^-} f(t)\neq f(x)$ y $x \neq 0$ porque $\lim\limits_{t\to x^+} f(t)$=$f(x)$ por la continuidad por la derecha de x, pero $\lim\limits_{t\to x^-} f(t) \in \mathbb{R}$ de modo que $\mid f(x)- \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \mid f(x)- \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid$, lo cual nos dice que $x \in A_{n_0}$. Por lo tanto $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\supseteq$ Sea $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Así existe una n_0 tal que $x \in A_{n_0}$ de modo que $\dfrac{1}{n_0} < \mid f(x)- \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid$, entonces $\mid f(x)- \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid > 0$ es decir $f(x)\neq \lim\limits_{t\to x^-} f(t)$. Por la tanto $x \in$ disc(f).

Afirmamos ahora que A_n es numerable para toda $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Veamos que en efecto eso se cumple: Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $x \in A_n$, entonces: $\mid f(x)- \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid > \dfrac{1}{n}$, como f es continua en x por la derecha, entonces para $\varepsilon = \dfrac{1}{2n} > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que si $0 \leq y - x \leq \delta_x$ entonces $\mid f(y) - f(x) \mid < \dfrac{1}{2n}$.

Ahora sea $y \in (x, x+\delta_x)$. Luego si $t \in (x, y)$, $0 < t- \ x < \delta_x$ entonces $\mid f(t) - f(x) \mid < \dfrac{1}{2n}$ es decir:

$$-\frac{1}{2n} + f(x) < f(t) < \frac{1}{2n} + f(x) \text{ si } x < t < y.$$

Ahora aplicamos límites en la desigualdad: $-\dfrac{1}{2n} + f(x) < \lim\limits_{t\to y^-} f(t) < \dfrac{1}{2n} + f(x)$

Lo cual implica que $\mid f(x) - \lim\limits_{t\to y^-} f(t) \mid \leq \dfrac{1}{2n}$ y entonces

$$\mid f(y) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid \leq \mid f(y) - f(x) \mid + \mid f(x) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Por lo cual para toda $y \in (x, x+\delta_x)$, se tiene que $\mid f(y) - \lim\limits_{t\to y^-} f(t) \mid < \dfrac{1}{n}$, lo cual nos dice que $y \notin A_n$. De esta forma para cada $x \in A_n$, existe una $\delta_x > 0$ tal que $(x, x+\delta_x) \cap A_n = \emptyset$. Ahora escojamos:

$q_x \in (x, x+\delta_x) \cap \mathbb{Q}$. Es claro que Ψ: $A_n \to \mathbb{Q}$ dada por Ψ(x)=q_x es inyectiva. Por lo tanto A_n es numerable. Concluimos entonces que disc(f)=$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable. ∎

En la primera definición estamos pensando a D con dominio $[0,\infty)$, y vimos que una función en este espacio, a lo más tiene una cantidad numerable de discontinuidades. Ahora haremos las definición concerniente, para pensar a D con dominio compacto $[a, b]$, donde $a \geq 0$. Del mismo modo obtendremos que una función aquí, tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades, podríamos hacerlo evidente del resultado anterior, pero lo probaremos nuevamente independiente del resultado anterior. La razón de esto, es que la demostración será un poco más fina, ya que al tener como dominio $[a, b]$ al momento de definir los conjuntos A_n de la proposición pasada, podremos no solo mostrar que son numerables, más aun probaremos que son finitos.

***Definición* 3.3 :**
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a < b$. Entonces definimos $D[a, b]$=$\{f$: $[a, b] \to \mathbb{R} \mid f$ es continua por la derecha en x y $\lim\limits_{t\to x^-} f(t)$ existe para toda $x \in [a, b]\}$.

***Proposición* 3.4 :** *Si $f \in D[a, b]$ entonces f tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.*

Prueba:

Sea $f \in$ D$[a, b]$. Entonces para $n = 1, 2, \ldots$ defino A_n=$\{x \in [a, b] \mid \mid f(x) - \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid > \frac{1}{n}\}$. Luego disc($f$)=$\{x \in [a, b] \mid f$ es discontinua en $x\}$= $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, verifiquemos esta última igualdad.

$\subseteq$ Sea $x \in$ disc(f). Entonces $\lim\limits_{t\to x^-} f(t) {\neq} f(x)$ y $x \neq$ a porque $\lim\limits_{t\to x^+} f(t)$=$f(x)$, por la continuidad por la derecha de x, pero $\lim\limits_{t\to x^-} f(t) \in \mathbb{R}$ de modo que $\mid f(x) - \lim\limits_{t\to x^-}$ f$(t) \mid > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \mid f(x) - \lim\limits_{t\to x^-} f(t) \mid$, lo cual nos dice que $x \in A_{n_0}$. Por lo tanto $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\supseteq$ Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe una n_0 tal que $x \in A_{n_0}$ de modo que $\frac{1}{n_0} <\mid f(x) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid$ entonces $\mid f(x) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid > 0$ es decir $f(x) \neq \lim_{t\to x^-} f(t)$ por la tanto $x \in \text{disc}(f)$.

Afirmamos ahora que A_n es finito para toda $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Veamos que en efecto eso se cumple:
Sea $n \in \{1,2,\ldots\}$ y $x \in A_n$ entonces: $\mid f(x) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid > \frac{1}{n}$ como f es continua en x por la derecha entonces:

Para $\varepsilon = \frac{1}{2n} > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que si $0 \leq y - x \leq \delta_x$ entonces $\mid f(y) - f(x) \mid < \frac{1}{2n}$

Ahora sea $y \in (x, x + \delta_x)$. Luego si $t \in (x, y)$, $0 < t - x < \delta_x$ entonces $\mid f(t) - f(x) \mid < \frac{1}{2n}$ es decir:

$$-\frac{1}{2n} + f(x) < f(t) < \frac{1}{2n} + f(x) \text{ si } x < t < y$$

Ahora aplicamos límites en la desigualdad $-\frac{1}{2n} + f(x) < \lim_{t\to y^-} f(t) < \frac{1}{2n} + f(x)$.
Lo cual implica que $\mid f(x) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid \leq \frac{1}{2n}$. Juntando las desigualdades tenemos:

$$\mid f(y) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid \leq \mid f(y) - f(x) \mid + \mid f(x) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Por lo cual para toda $y \in (x, x + \delta_x)$, se tiene que $\mid f(y) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid < \frac{1}{n}$ lo cual nos dice que $y \notin A_n$.
De esta forma para cada $x \in A_n$, existe una $\delta_x > 0$ tal que $(x, x + \delta_x) \cap A_n = \emptyset$. Notemos que hasta aquí la prueba es análoga al caso D$[0, \infty)$. Pero al tener dominio compacto seremos más detallistas.

Sea $x \in A_n$. Entonces: $\mid f(x) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid > \frac{1}{n}$, como $\lim_{t\to x^-} f(t)$ existe entonces:

Para $\varepsilon = \frac{1}{2n} > 0$, existe $\delta_x^* > 0$ tal que si $-\delta_x^* < y - x < 0$ entonces $\mid f(y) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid < \frac{1}{2n}$

Ahora sea $y \in (x - \delta_x^*, x)$. Luego si $t \in (x - \delta_x^*, y)$, $-\delta_x^* < t - x < 0$ entonces $\mid f(t) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid < \frac{1}{2n}$

$$\text{Es decir: } -\frac{1}{2n} + \lim_{t\to x^-} f(t) < f(t) < \frac{1}{2n} + \lim_{t\to x^-} f(t) \text{ si } x - \delta_x^* < t < y.$$

Aplicamos límites en la desigualdad $-\frac{1}{2n} + \lim_{t\to x^-} f(t) < \lim_{t\to y^-} f(t) < \frac{1}{2n} + \lim_{t\to x^-} f(t)$.
Lo cual implica que $\mid \lim_{t\to x^-} f(t) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid \leq \frac{1}{2n}$. Juntando las desigualdades tenemos:

$$\mid f(y) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid \leq \mid f(y) - \lim_{t\to x^-} f(t) \mid + \mid \lim_{t\to x^-} f(t) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Entonces $\mid f(y) - \lim_{t\to y^-} f(t) \mid < \frac{1}{n}$, lo cual nos dice que $y \notin A_n$. De esta forma para cada $x \in A_n$, existe una $\delta_x^* > 0$ tal que $(x - \delta_x^*, x) \cap A_n = \emptyset$.

En conclusión: Para cada $x \in A_n$, existen δ_x, $\delta_x^* > 0$ tales que $(x - \delta_x^*, x + \delta_x) \cap A_n = \{x\}$. Dicho de otra manera todos los puntos de A_n son puntos aislados, es decir $A_n' = \emptyset$, luego $\overline{A_n} = A_n \cup A_n' = A_n \cup \emptyset =$

A_n, A_n es cerrado pero A_n también es acotado, lo cual implica que es compacto.

Además $A_n \subseteq \bigcup\limits_{x \in A_n} (x - \delta_x^*, x + \delta_x)$, por lo que existen $x_1,\ldots,x_m \in A_n$ tales que: $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (x_i - \delta_{x_i}^*, x_i + \delta_{x_i})$

De modo que $A_n = \{x_1,\ldots,x_m\}$, por lo tanto A_n es finito. Concluimos entonces $\mathrm{disc}(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable. ■

De aquí en adelante nos concentraremos en D con dominio $[a, b]$ no negativo. Para poder definir la métrica de Skorohod en D, es necesario conocer un conjunto de parámetros al cual llamaremos Λ, y está definido de la forma siguiente:

***Definición* 3.5** *: Definamos al conjunto* $\Lambda = \{\lambda : [a, b] \to [a, b] \mid \lambda$ *es continua, estrictamente creciente tal que* $\lambda(a) = a$ *y* $\lambda(b) = b\}$.

***Definición* 3.6** *: Definamos al conjunto* $\Lambda' = \{\lambda : [a, b] \to [a, b] \mid \lambda$ *es un homeomorfismo estrictamente creciente*$\}$.

La siguiente proposición, nos dice que ambos conjuntos son iguales, lo cual nos ayuda a comprender mejor quienes son las funciones que pertenecen a Λ, y dependiendo del caso podemos usar la definición que más nos convenga. Recordemos que un homeomorfismo es una función continua y de inversa continua.

***Proposición* 3.7** *:* $\Lambda = \Lambda'$.

Prueba:

($\subseteq$) Sea $\lambda \in \Lambda$. Primero veamos que es sobre. Para esto supongamos que no lo es, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que para todo $z \in [a, b]$, se tiene que $\lambda(z) \neq x$. Como $\lambda(a) = a$ y $\lambda(b) = b$, sucede que $x \in (a, b)$. Ahora hay que fijarnos en $[a, x)$ y $(x, b]$ abiertos de $[a, b]$, luego como λ es continua, entonces $\lambda^{-1}[a, x)$ y $\lambda^{-1}(x, b]$ son abiertos de $[a, b]$, además $\lambda^{-1}[a, x) \cap \lambda^{-1}(x, b] = \emptyset$ y también se cumple $\lambda^{-1}[a, x) \cup \lambda^{-1}(x, b] = [a, b]$, es decir $[a, b]$ es disconexo lo cual es una contradicción. Por tanto λ es sobre.

Ahora notemos que λ es inyectiva. Sean $x, y \in [a, b]$ tales que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x < y$, como λ es estrictamente creciente $\lambda(x) < \lambda(y)$. Por lo tanto $\lambda(x) \neq \lambda(y)$, concluimos que λ es inyectiva, se sigue entonces que λ es biyectiva.

Faltaría demostrar que λ^{-1} es continua. Sea $y_0 \in (a, b)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ entonces $\lambda^{-1}(y_0) \in (a, b)$.

Nombremos $x_0 = \lambda^{-1}(y_0)$, definamos ahora $\varepsilon^* = \mathrm{mín}\left\{\varepsilon, \dfrac{b - x_0}{2}, \dfrac{x_0 - a}{2}\right\} > 0$.

De esto se sigue que $(x_0 - \varepsilon^*)$, $(x_0 + \varepsilon^*) \in (a, b)$. Lo que haremos ahora será tomar:

$\delta = \mathrm{mín}\ \{\lambda(x_0) - \lambda(x_0 - \varepsilon^*), \lambda(x_0 + \varepsilon^*) - \lambda(x_0)\} > 0$ porque λ es estrictamente creciente.

Si $\mid y - y_0 \mid < \delta$ es decir $\mid y - y_0 \mid < \mathrm{mín}\ \{\lambda(x_0) - \lambda(x_0 - \varepsilon^*), \lambda(x_0 + \varepsilon^*) - \lambda(x_0)\}$. Como $\lambda(x_0) = \lambda(\lambda^{-1}(y_0)) = y_0$ tenemos que $\mid y - y_0 \mid < y_0 - \lambda(x_0 - \varepsilon^*)$ y $\mid y - y_0 \mid < \lambda(x_0 + \varepsilon^*) - y_0$.

Se sigue entonces que $\lambda(x_0 - \varepsilon^*) < y$ y que $y < \lambda(x_0 + \varepsilon^*)$. Ahora aplicamos inversa a la desigualdad y como λ es estrictamente creciente llegamos a $x_0 - \varepsilon^* < \lambda^{-1}(y)$ y que $\lambda^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon^*$. Por lo tanto $| \lambda^{-1}(y) - x_0 | < \varepsilon^*$, además como $x_0 = \lambda^{-1}(y_0)$ y $\varepsilon^* \leq \varepsilon$, llegamos a que $| \lambda^{-1}(y) - \lambda^{-1}(y_0) | < \varepsilon$.

Concluimos entonces que λ^{-1} es continua en y_0. Haciendo un cambio muy sencillo a esta demostración, se llega a que λ^{-1} es continua en $y = a$ y $y = b$. Por lo tanto λ^{-1} es continua. Demostramos entonces que λ es un homeomorfismo es decir $\lambda \in \Lambda^{'}$.

($\supseteq$) Sea $\lambda \in \Lambda^{'}$, lo único que hay que verificar es que $\lambda(a) = a$ y $\lambda(b) = b$, pero eso es una consecuencia inmediata de que λ es sobre y estrictamente creciente. Por tanto $\lambda \in \Lambda$. ■

Es necesario para poder definir la métrica de Skorohod, ver que toda función en D es acotada. Como las funciones en D no son continuas necesariamente, no podemos asegurar tan fácilmente que son acotadas, pero en este sentido nos ayuda la siguiente proposición.

***Proposición* 3.8** *: Sea $f \in D[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a,b]$ tales que: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ y además $\sup\limits_{s,r \in [t_{j-1}, t_j)} | f(s) - f(r) | < \varepsilon$ para toda $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Prueba:

Sea $f \in$ D$[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Procedamos a definir el siguiente conjunto:

$$\alpha = \{t \in [a,b] \mid \text{existen } t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a,t] \text{ tales que } a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$$
$$\text{y ademas } \sup_{s,r \in [t_{j-1}, t_j)} | f(s) - f(r) | < \varepsilon \quad \text{para toda } j \in \{1, 2, ..., m\} \ \}.$$

La demostración puede volverse un poco complicada, pero es una técnica clásica. Lo que haremos será verificar que este conjunto tiene supremo, después mostraremos que ese supremo debe ser b y por ultimo veremos que el supremo pertenece al conjunto. (Lo cual nos da justo lo que queremos demostrar).

Es claro que α es acotado superiormente. Veamos ahora que α es no vacío. Como f es continua por la derecha en a, para $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 \leq s - a < \delta_1$ entonces $| f(s) - f(a) | < \frac{\varepsilon}{4}$. Llamemos $t_1 = a + \delta_1 \in [a,b]$ y $t_0 = a$, por como los definimos $t_0, t_1 \in [a, t_1]$.

Sean $s, r \in [t_0, t_1)$. Es decir $s, r \in [a, a + \delta_1)$ se sigue que $0 \leq s - a < \delta_1$ y $0 \leq r - a < \delta_1$ entonces

$$| f(s) - f(a) | < \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } | f(r) - f(a) | < \frac{\varepsilon}{4}, \ | f(s) - f(r) | \leq | f(s) - f(a) | + | f(a) - f(r) | < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica que $\sup\limits_{s,r \in [t_0, t_1)} | f(s) - f(r) | \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto $t_1 = a + \delta_1 \in \alpha$ es decir $\alpha \neq \phi$, concluimos que sup $\alpha \in \mathbb{R}$, más aun sup $\alpha > a$ ya que $a < t_1 = a + \delta_1 \in \alpha$. En conclusión hasta aquí $a <$ sup $\alpha \leq b$.

Ya dimos el primer paso, ahora toca como dijimos mostrar que el supremo debe ser b.

Supongamos ahora que sup $\alpha < b$, para de esta forma llegar a una contradicción. Sabemos que el límite por la izquierda de f aplicado a sup α existe, es decir, para $\frac{\varepsilon}{4} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si:
$-\delta_2 < s -$ sup $\alpha < 0$ entonces $| f(s) - \lim\limits_{t \to \sup \alpha^-} f(t) | < \frac{\varepsilon}{4}$.

Como sup $\alpha < b$ entonces f es continua por la derecha en sup α, para $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existe $\delta_3 > 0$ tal que si

$0 \leq s-$ sup $\alpha < \delta_3$ entonces $\mid f(s) - f(\sup\ \alpha) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ y sup $\alpha + \delta_3 \in [a, b]$.

Por otra parte, existe $t^* \in \alpha$ tal que sup $\alpha - \delta_2 < t^*$, dado que $t^* \in \alpha$ existen $t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a, t^*]$ tales que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t^*$ y $\displaystyle\sup_{s,r \in [t_{j-1}, t_j)} \mid f(s) - f(r) \mid < \varepsilon$ para toda $j \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Caso: sup $\alpha \neq t^*$

Sean $s, r \in [t_m, \sup\ \alpha)$. Tenemos $-\delta_2 < s-$ sup $\alpha < 0$ y $-\delta_2 < r-$ sup $\alpha < 0$ entonces:

$\mid f(s) - \displaystyle\lim_{t \to \sup\ \alpha^-} f(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ y $\mid f(r) - \displaystyle\lim_{t \to \sup\ \alpha^-} f(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ de modo que $\mid f(s) - f(r) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto $\displaystyle\sup_{s,r \in [t_m, \sup\ \alpha)} \mid f(s) - f(r) \mid < \varepsilon$.

Sean $s, r \in [\sup\ \alpha, \sup\ \alpha + \delta_3)$. Es decir $0 \leq s-$ sup $\alpha < \delta_3$ y $0 \leq r-$ sup $\alpha < \delta_3$ entonces:

$\mid f(s) - f(\sup\ \alpha) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ y $\mid f(r) - f(\sup\ \alpha) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ de modo que $\mid f(s) - f(r) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto

$\displaystyle\sup_{s,r \in [\sup\ \alpha, \sup\ \alpha + \delta_3)} \mid f(s) - f(r) \mid < \varepsilon$ por lo que en este caso llegamos a que sup $\alpha + \delta_3 \in \alpha$.

Caso sup $\alpha = t^*$

Este caso es más sencillo que al anterior, ya que solo hay que corroborar un supremo en vez de dos.

Sean $s, r \in [\sup\ \alpha, \sup\ \alpha + \delta_3)$. Es decir $0 \leq$ s$-$ sup $\alpha < \delta_3$ y $0 \leq r-$ sup $\alpha < \delta_3$ entonces:

$\mid f(s) - f(\sup\ \alpha) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ y $\mid f(r) - f(\sup\ \alpha) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ de modo que $\mid f(s) - f(r) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto $\displaystyle\sup_{s,r \in [\sup \alpha, \sup \alpha + \delta_3)} \mid f(s) - f(r) \mid < \varepsilon$.

Por tanto sup $\alpha + \delta_3 \in \alpha$. En ambos casos llegamos a que sup $\alpha + \delta_3 \in \alpha$, pero esto es absurdo, con esto concluimos que sup $\alpha = b$.

Ya que sabemos que sup $\alpha = b$, lo último que probaremos para completar la demostración es que sup $\alpha \in \alpha$, sabemos que el límite por la izquierda de b existe, por lo que para $\dfrac{\varepsilon}{4} > 0$ existe $\delta_4 > 0$ tal que si $-\delta_4 < s - b < 0$ entonces $\mid f(s) - \displaystyle\lim_{t \to b^-} f(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Por otro lado existe $t^+ \in \alpha$, tal que sup $\alpha - \delta_4 < t^+ \leq$ b, dado que $t^+ \in \alpha$ existen $t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a, t^+]$ tales que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t^+$ y ademas $\displaystyle\sup_{s,r \in [t_{j-1}, t_j)} \mid f(s) - f(r) \mid < \varepsilon$ para toda $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
Si $t^+ = b$ pues ya acabamos. Entonces podemos suponer sin problemas que $t^+ < b$ entonces:

Sean $s, r \in [t_+, b)$. Entonces $-\delta_4 <$ s$-$ $b < 0$ y $-\delta_4 <$ r$-$ $b < 0$ esto implica que:

$\mid f(s) - \displaystyle\lim_{t \to b^-} f(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ y $\mid f(r) - \displaystyle\lim_{t \to b^-} f(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{4}$ de modo que $\mid f(s) - f(r) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto $\displaystyle\sup_{s,r \in [t_m, b)} \mid f(s) - f(r) \mid < \varepsilon$. Lo cual implica que $b \in \alpha$ y esto termina la prueba de esta proposición. ■

***Proposición* 3.9** *: Si $f \in D[a,b]$ entonces f es acotada.*

Prueba: Sea $f \in$ D$[a,b]$ y ε=1. Aplicando la Proposición 3.8 tenemos que existen $t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a,b]$ tales que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ y $\sup\limits_{s,r \in [t_{i-1}, t_i)} |\, f(s) - f(r)| < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

$$\text{Definamos: M}=|\, f(a)\,| + m + m^* > 0, \text{ donde } m^* = \sum_{i=1}^{m} |\, f(t_i) - \lim_{t \to t_i^-} f(t)\,|.$$

Es claro que $|\, f(t)\,| \leq$ M para toda $t \in [a,b]$. Por tanto f es acotada. ■

3.2. Topología de Skorohod.

Dos funciones f y g están cerca una de la otra en la topología uniforme, si la gráfica de $f(t)$ se puede llevar a la gráfica de $g(t)$ por una pequeña perturbación de manera uniforme de las ordenadas, manteniendo fijas las abscisas. Por uniforme entendemos que la perturbacion en las ordenadas, varia en un rango, que siempre es el mismo sin importar que abscisa fijemos.

En D, permitimos también una pequeña deformación uniforme de la escala de tiempo. Físicamente, esto equivale al reconocimiento de que no podemos medir el tiempo con una precisión perfecta más allá de lo que podemos posicionar. La siguiente topología, ideada por Skorohod, está inspirada en esa idea.

La sección del capítulo anterior, nos da las herramientas necesarias para poder definir la métrica de D, la cual por supuesto induce una topología, a la que nos referiremos como la topología de Skorohod.

***Definición* 3.10** *: Definamos la metrica d_{sk}: $D[a,b] \times D[a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:*

$$d_{sk}(f,g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(\lambda(t))| + \sup_{t \in [a,b]} |t - \lambda(t)| \right\}$$

a $\tau_{d_{sk}}$, la topología inducida por la métrica d_{sk} se le conoce como: "Topología de Skorohod".

*Verifiquemos que en efecto d_{sk} define una métrica en D$[a,b]$. Lo primero que veremos es porqué d_{sk} está bien definida. Sean $f, g \in$ D$[a,b]$. Por un lado sabemos que $Id_{[a,b]} \in \Lambda$, es decir Λ es no vacío, además es claro que $f - (g \circ \lambda) \in$ D$[a,b]$ y por la Proposición 3.9 $f - (g \circ \lambda)$ es acotada, esto implica que:

$$\emptyset \neq \left\{ \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(\lambda(t))| + \sup_{t \in [a,b]} |t - \lambda(t)| \text{ tal que } \lambda \in \Lambda \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Además es claro que este conjunto está acotado inferiormente por 0. Por tanto d_{sk} está bien definida y $d_{sk}(f,g) \geq 0$

Ahora procedamos a verificar las tres propiedades de métrica.

i) Por demostrar que $d_{sk}(f,g)=0$ si solo si $f=g$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f=g$, sea $\lambda \equiv Id_{[a,b]}$ entonces

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t-\lambda(t)\mid = \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-f(t)\mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t-t\mid = 0$$

esto implica $d_{sk}(f,g)=0$ por ser el ínfimo y porque ya vimos que $d_{sk}(f,g)\geq 0$.

($\Rightarrow$). Supongamos ahora que $d_{sk}(f,g)=0$. Sea $t_0\in[a,b]$. Demostremos que $f(t_0)=g(t_0)$.

Caso 1: t_0=a.

Sea $\varepsilon>0$. Como $d_{sk}(f,g)=0$ existe $\lambda\in\Lambda$ tal que: $\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t-\lambda(t)\mid < \varepsilon$ entonces $\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid<\varepsilon$, en particular para $t_0=a$ tenemos que: $\mid f(a)-g(\lambda(a))\mid<\varepsilon$ pero $\lambda(a)=a$ entonces $\mid f(t_0)-g(t_0)\mid = \mid f(a)-g(a)\mid<\varepsilon$. Por tanto $f(t_0)$=$g(t_0)$.

Caso 2: t_0=b.

Sea $\varepsilon>0$. Como $d_{sk}(f,g)=0$ existe $\lambda\in\Lambda$ tal que: $\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t-\lambda(t)\mid < \varepsilon$ entonces $\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid<\varepsilon$, en particular para $t_0=b$ tenemos que: $\mid f(b)-g(\lambda(b))\mid<\varepsilon$ pero $\lambda(b)=b$ entonces $\mid f(t_0)-g(t_0)\mid = \mid f(b)-g(b)\mid<\varepsilon$ por tanto $f(t_0)$=$g(t_0)$.

Caso 3: $t_0\in(a,b)$ y g es continua en t_0.

Sea $\varepsilon>0$. Como g es continua en t_0 existe $\delta>0$ tal que si $\mid y-t_0\mid<\delta$ entonces $\mid g(y)-g(t_0)\mid<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ahora para $\delta'=\text{mín}\left\{\delta,\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}>0$, como $d_{sk}(f,g)=0$ existe $\lambda\in\Lambda$ tal que:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t-\lambda(t)\mid < \delta'$$

Es decir $\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid<\delta'$ y $\sup_{t\in[a,b]} \mid t-\lambda(t)\mid<\delta'$ en particular para t_0 tenemos que:

$\mid f(t_0)-g(\lambda(t_0))\mid<\delta'$ y $\mid t_0-\lambda(t_0)\mid<\delta'$ esta última parte implica la siguiente desigualdad:

$$\mid f(t_0)-g(t_0)\mid \leq \mid f(t_0)-g(\lambda(t_0))\mid + \mid g(\lambda(t_0))-g(t_0)\mid < \delta' + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Entonces $\mid f(t_0)-g(t_0)\mid<\varepsilon$. Por tanto $f(t_0)$=$g(t_0)$.

Caso 4: $t_0\in(a,b)$ y g no es continua en t_0.

Para $n=1$, existe $t_1\in(t_0,t_0+1)\cap\text{cont}(g)$, porque ya vimos en la Proposición 3.4 que los puntos de discontinuidad en g son a lo mas numerables. De hecho para $n\geq1$, existe $t_n\in(t_0,t_0+\frac{1}{n})\cap\text{cont}(g)$, por la misma razón de que los puntos de discontinuidad en g son a lo más numerables: Con esto definimos una sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq[a,b]$, la cual cumple $t_0<t_n$ para toda $n\geq1$. Ademas $t_n\to t_0$, como g es continua por la derecha en t_0 entonces $g(t_n)\to g(t_0)$. Además la sucesión es tal que $(t_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\text{cont}(g)$ entonces por el caso 3 $(g(t_n))_{n=1}^{\infty}=(f(t_n))_{n=1}^{\infty}$, como f tambien es continua por la derecha en t_0, llega-

mos a que $f(t_n) \to f(t_0)$, pero como hablamos de la misma sucesión esto implica que $f(t_0)$=$g(t_0)$.

Se concluye de todos los casos que $f = g$.

ii) Por demostrar que $d_{sk}(f,g) = d_{sk}(g,f)$. Sean $f, g \in \mathrm{D}[a,b]$ y $\lambda \in \Lambda$. Afirmo entonces que:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid = \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid \text{ y } \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda(t) \mid = \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda^{-1}(t) \mid$$

Es claro que si $\lambda \in \Lambda$, tenemos $\lambda^{-1} \in \Lambda$. Sea $t \in [a,b]$ entonces $\lambda(t) \in [a,b]$ de modo que:

$$\mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid = \mid f(\lambda^{-1}(\lambda(t))) - g(\lambda(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid$$

Esto implica que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid$.

Sea $t \in [a,b]$. Entonces $\lambda^{-1}(t) \in [a,b]$ de modo que:

$$\mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid = \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(\lambda(\lambda^{-1}(t))) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid$$

Por lo tanto: $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid = \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid$.

Hasta aquí hemos probado la primera parte de la afirmación, procedamos a demostrar la segunda parte de la afirmación.

Sea $t \in [a,b]$. Entonces $\lambda(t) \in [a,b]$ de modo que:

$$\mid t - \lambda(t) \mid = \mid \lambda(t) - \lambda^{-1}(\lambda(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda^{-1}(t) \mid$$

Esto implica que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda(t) \mid \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda^{-1}(t) \mid$.

Sea $t \in [a,b]$. Entonces $\lambda(t)^{-1} \in [a,b]$ de modo que:

$$\mid t - \lambda^{-1}(t) \mid = \mid \lambda^{-1}(t) - \lambda(\lambda^{-1}(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda(t) \mid$$

Por lo tanto $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda^{-1}(t) \mid \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda(t) \mid$.

Esto termina de probar la afirmación.

Aplicando la afirmación llegamos a que para toda $\lambda \in \Lambda$ se cumple:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda(t) \mid = \sup_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda^{-1}(t) \mid$$

Se sigue que para toda $\lambda \in \Lambda$ tenemos:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda(t) \mid \geq d_{sk}(g,f)$$

Esto implica que $d_{sk}(f,g) \geq d_{sk}(g,f)$, dado que f y g fueron arbitrarias se concluye que:

$d_{sk}(f,g) = d_{sk}(g,f)$.

iii) Por demostrar que para cualesquiera $f, g, \varphi \in \mathrm{D}[a,b]$ entonces se tiene:

$$d_{sk}(f,\varphi) \leq d_{sk}(f,g) + d_{sk}(g,\varphi)$$

Para probar esto afirmamos que para cualesquiera $f, g, \varphi \in \mathrm{D}[a,b]$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ se cumple:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - \varphi(\lambda_1 \circ \lambda_2)(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid g(t) - \varphi(\lambda_1(t)) \mid$$

Probemos ahora la afirmación. Sean $f, g, \varphi \in \mathrm{D}[a,b]$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. También tomemos $t \in [a,b]$, es claro que $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda$ entonces:

$$\begin{aligned}
|f(t) - \varphi(\lambda_1 \circ \lambda_2(t))| = |f(t) - \varphi(\lambda_1(\lambda_2(t)))| &= |f(t) - g(\lambda_2(t)) + g(\lambda_2(t)) - \varphi(\lambda_1(\lambda_2(t)))| \\
&\leq |f(t) - g(\lambda_2(t)) \mid + \mid g(\lambda_2(t)) - \varphi(\lambda_1(\lambda_2(t)))| \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(\lambda_2(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid g(t) - \varphi(\lambda_1(t))|
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - \varphi(\lambda_1 \circ \lambda_2)(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid g(t) - \varphi(\lambda_1(t)) \mid$$

Una vez demostrada esta afirmación, hagamos una segunda afirmación.

Afirmamos ahora que para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ entonces se tiene

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_1 \circ \lambda_2)(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_1(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_2(t)) \mid$$

Probemos ahora la afirmación. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. También tomemos $t \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}
|t - (\lambda_1 \circ \lambda_2(t))| = |t - (\lambda_1(\lambda_2(t)))| &= |t - \lambda_2(t) + \lambda_2(t) - \lambda_1(\lambda_2(t))| \\
&\leq |t - \lambda_2(t) \mid + \mid \lambda_2(t) - \lambda_1(\lambda_2(t))| \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} |t - \lambda_2(t) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda_1(t)|
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_1 \circ \lambda_2)(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_1(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_2(t)) \mid$$

En resumen para cualesquiera $f, g, \varphi \in \mathrm{D}[a,b]$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - \varphi(\lambda_1 \circ \lambda_2)(t))| + \sup_{t\in[a,b]} |t - (\lambda_1 \circ \lambda_2)(t))| &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(\lambda_2(t))| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t) - \varphi(\lambda_1(t))| \\
&+ \sup_{t\in[a,b]} |t - (\lambda_1(t))| + \sup_{t\in[a,b]} |t - (\lambda_2(t))|
\end{aligned}$$

Esto implica que:

$$d_{sk}(f,\varphi) \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid g(t) - \varphi(\lambda_1(t))|$$

$$+ \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_1(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_2(t)) \mid$$

Esto nos dice que para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$

$$d_{sk}(f,\varphi) - [\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t))| + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_2(t)) \mid]$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \mid g(t) - \varphi(\lambda_1(t))| + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_1(t)) \mid$$

Llegamos entonces a que para cualquier $\lambda_2 \in \Lambda$

$$d_{sk}(f,\varphi) - [\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t))| + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_2(t)) \mid] \leq d_{sk}(g,\varphi)$$

De modo que para cualquier $\lambda_2 \in \Lambda$

$$d_{sk}(f,\varphi) - d_{sk}(g,\varphi) \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t))| + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_2(t)) \mid$$

Por lo tanto $d_{sk}(f,\varphi) - d_{sk}(g,\varphi) \leq d_{sk}(f,g)$, despejando $d_{sk}(f,\varphi) \leq d_{sk}(f,g) + d_{sk}(g,\varphi)$, que es lo que queríamos demostrar. Concluimos que en efecto d_{sk} define una métrica en $\mathrm{D}[a,b]$.

3.3. Convergencia en la topología de Skorohod.

El siguiente resultado, nos da una caracterización de la convergencia en D con la topología de Skorohod en términos de la convergencia uniforme. A grosso modo lo que nos dice es que la convergencia en D, es una convergencia uniforme pero parametrizada por funciones que también convergen uniformemente.

Por simple notacion entendamos $\rightarrow_{sk}$ como converger pero con la metrica de Skorohod de igual forma $\rightarrow_u$, converger uniformemente.

***Proposición* 3.11** *: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D[a,b]$ y $f \in D[a,b]$. Entonces: $f_n \rightarrow_{sk} f$ si solo si existe $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Λ tal que $f_n \circ \lambda_n \rightarrow_u f$ y $\lambda_n \rightarrow_u Id_{[a,b]}$.*

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea $n \geq 1$, entonces, para $\dfrac{1}{n} > 0$ existe $\lambda_n \in \Lambda$ tal que:

$$d_{sk}(f,f_n) \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - f_n(\lambda_n(t))| + \sup_{t\in[a,b]} \mid t - (\lambda_n(t)) \mid < d_{sk}(f,f_n) + \frac{1}{n}$$

de este modo hemos construido la sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ en Λ.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, como $f_n \rightarrow_{sk} f$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \mathrm{N}$ entonces $d_{sk}(f,f_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ahora sea $N^* = \text{máx}\,\{N, n_0\}$, es claro que $N^* \in \mathbb{N}$, de tal forma que si $n \geq N^*$ nos fijamos en su correspondiente λ_n. Así se cumple que:

$$d_{sk}(f,f_n) \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(\lambda_n(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} |t - (\lambda_n(t))| \quad < \quad d_{sk}(f,f_n) + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto implica que $\mid f(t) - f_n(\lambda_n(t)) \mid < \varepsilon$ y $\mid t - \lambda_n(t) \mid < \varepsilon$ si $n \geq N^*$ para toda $t \in [a,b]$. Por lo tanto

$f_n \circ \lambda_n \to_u f$ y $\lambda_n \to_u Id_{[a,b]}$.

($\Leftarrow$) Supongamos entonces que existe $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Λ tal que $f_n \circ \lambda_n \to_u f$ y $\lambda_n \to_u Id_{[a,b]}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \circ \lambda_n \to_u f$ entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ se cumple $\mid f(t) - f_n(\lambda_n(t)) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in [a,b]$, esto implica que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f(t) - f_n(\lambda_n(t)) \mid \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Como también tenemos que: $\lambda_n \to_u Id_{[a,b]}$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ entonces $\mid t - \lambda_n(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Lo cual implica que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda_n(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (En este caso si podemos hablar de la desigualdad estricta ya que la continuidad nos dice máx = sup).

Sea n^*=máx $\{n_1, n_2\}$. Es claro que $n^* \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq n^*$ entonces se cumple que:

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(\lambda_n(t))\ | + \sup_{t\in[a,b]} |t - (\lambda_n(t))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De esto se sigue $d_{sk}(f, f_n) < \varepsilon$ si $n \geq n^*$. Por lo tanto $f_n \to_{sk} f$. ∎

El lema que viene a continuación es muy simple, pero será muy útil para poder definir las parametrizaciones adecuadas en la demostración de los teoremas, así como en algunos ejemplos.

Lema 3.12 *: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que: $a < b$, $c < d$, $a \leq c$, $b \leq d$, $c - a < \varepsilon$, $d - b < \varepsilon$. Así definimos: $f : [a,b] \to [c,d]$ dada por $f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$ entonces $\mid f(x) - x \mid < 2\varepsilon$.*

Prueba:

Sea $x \in [a,b]$.

Como $d - b < \varepsilon$, $a < b$ y $a \leq c$, se tiene que $\dfrac{d-c}{b-a} < \dfrac{\varepsilon + b - c}{b-a} \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a} + 1$. Entonces:

$$\frac{d-c}{b-a}(x-a) \leq \left(\frac{\varepsilon}{b-a} + 1\right)(x-a) = \frac{x-a}{b-a}\,\varepsilon + (x-a) \leq \varepsilon + (x-a)$$

Sumando c en la desigualdad anterior, tenemos:

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \leq \varepsilon + (c-a) + x < 2\varepsilon + x$$

Como $c - a < \varepsilon$, $a < b$ y $b \leq d$, se tiene que $-\dfrac{\varepsilon}{b-a} + 1 \leq \dfrac{d-a}{b-a} - \dfrac{\varepsilon}{b-a} < \dfrac{d-c}{b-a}$. Entonces:

$$-\varepsilon + (x-a) \leq -\frac{x-a}{b-a}\,\varepsilon + (x-a) = \left(-\frac{\varepsilon}{b-a} + 1\right)(x-a) \leq \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

Sumando c en la desigualdad anterior, tenemos:

$$-2\varepsilon + x < -\varepsilon + (c-a) + x \leq \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c = f(x)$$

Por lo tanto $| f(x) - x |< 2\varepsilon$ ∎

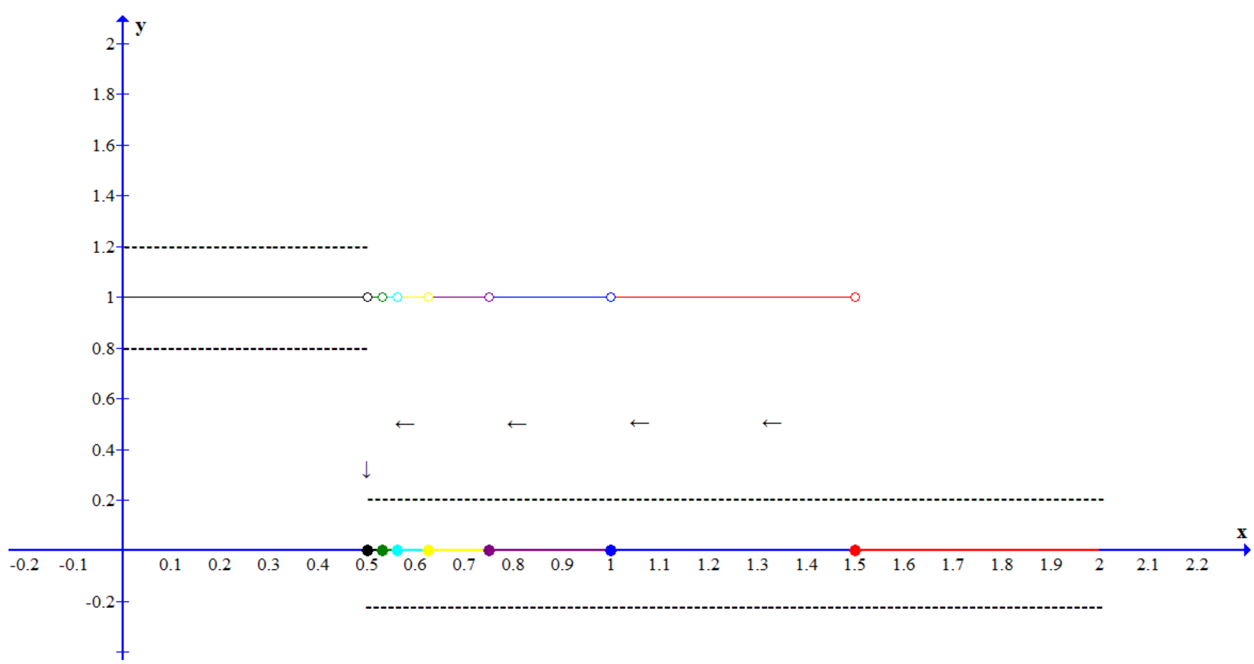
La siguiente proposición, va en el sentido de que la convergencia en Skorohod abarca la convergencia uniforme, eso es bueno puesto que el objetivo de esta topología es mantener la convergencia que ya conocíamos, pero además permitir otro tipo de convergencias que no podrían ocurrir con funciones que tienen saltos, ya que como sabemos, la métrica del supremo es muy restrictiva.

***Proposición* 3.13** *: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D[a,b]$ y $f \in D[a,b]$. Si f_n converge uniformemente a f entonces f_n converge a f en el sentido de Skorohod.*

Prueba: Supongamos que f_n converge uniformemente a f. Defino $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Λ como $\lambda_n{=}Id_{[a,b]}$ para toda $n \geq 1$ entonces $f_n{\circ}\lambda_n{=}f_n$ para toda $n \geq 1$, de esto se sigue que $(f_n{\circ}\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformente a f, además es evidente que $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $Id_{[a,b]}$ entonces por la Proposición 3.11, tenemos que f_n converge a f en el sentido de Skorohod. ∎

El recíproco de esta proposición no se cumple necesariamente, para ver esto veamos el siguiente ejemplo, que además es muy clarificador de cómo se comporta la convergencia en la Topología de Skorohod.

***Ejemplo* 3.14** *: Consideremos $D[0,2]$, tomemos $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D[0,2]$ definida como sigue: $f_n = 1_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$. Afirmamos entonces que $f_n \rightarrow_{sk} 1_{[0,\frac{1}{2})}$ pero $f_n \nrightarrow 1_{[0,\frac{1}{2})}$ puntualmente.*



En la figura se muestra la sucesión de funciones y se observa como entre más grande la n, el salto se va aproximando al salto de la función que propusimos como límite del dibujo, es claro que en el punto $1/2$ la sucesión de funciones no converge puntualmente a nuestra función propuesta como límite, por lo que mucho menos converge uniformemente, es aquí cuando se ve la utilidad de la topología de Skorohod, al ser menos restrictiva nos permite hacer este tipo de movimientos, solo haciendo una reparametrización de los intervalos.

Prueba: Para cada n construyamos λ_n: [0,2]$\to$ [0,2] de la siguiente manera:

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \frac{n+2}{n}t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \frac{3n-2}{3n}t + \frac{4}{3n} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

Tomemos $t \in [0, \frac{1}{2})$, $1(t)_{[0,\frac{1}{2})}$=1 y por construcción $\lambda_n(t) \in [0, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$ por lo que $1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$=1, es decir:

$$\mid 1(t)_{[0,\frac{1}{2})} - 1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \mid = \mid 1 - 1 \mid = 0.$$

Si ahora tomamos $t \in [\frac{1}{2}, 2]$, $1(t)_{[0,\frac{1}{2})}$=0 y de nuevo por construcción $\lambda_n(t) \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 2]$, $1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$=0.

$$\mid 1(t)_{[0,\frac{1}{2})} - 1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \mid = \mid 0 - 0 \mid = 0.$$

Concluimos entonces que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} |1(t)_{[0,\frac{1}{2})} - 1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \mid = 0.$

Ya vimos que un supremo vale cero, trabajemos con el otro. Sea $t \in [0, \frac{1}{2})$ entonces:

$$\mid t - \lambda_n(t) \mid = \left| t - \frac{n+2}{n}t \right| = t\left|1 - \frac{n+2}{n}\right| = \frac{2t}{n} < \frac{1}{n}.$$

Ahora sea $t \in [\frac{1}{2}, 2]$, para este caso tenemos:

$$\mid t - \lambda_n(t) \mid = \left| t - \frac{3n-2}{3n}t - \frac{4}{3n} \right| = \left| \frac{2t}{3n} - \frac{4}{3n} \right| = \frac{4-2t}{3n} \leq \frac{1}{n}.$$

Por tanto $\sup\limits_{t\in[a,b]} |1(t)_{[0,\frac{1}{2})} - 1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \mid + \sup\limits_{t\in[a,b]} |t - \lambda_n(t) \mid < \dfrac{2}{n}$ para cualquier n.

De aquí ya es muy fácil mostrar que $f_n \to_{sk} 1_{[0,\frac{1}{2})}$, ya que dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. De forma que si $n \geq n_0$ entonces:

$$d_{sk}(1_{[0,\frac{1}{2})}, f_n) = d_{sk}(1_{[0,\frac{1}{2})}, 1_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}) \leq \sup_{t\in[a,b]} |1(t)_{[0,\frac{1}{2})} - 1(\lambda_n(t))_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \mid + \sup_{t\in[a,b]} |t - \lambda_n(t) \mid < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Ya probamos que $f_n \to_{sk} 1_{[0,\frac{1}{2})}$, falta ver que $f_n \nrightarrow 1_{[0,\frac{1}{2})}$ puntualmente, pero eso es muy fácil ya que $f_n(\frac{1}{2})$=$1(\frac{1}{2})_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$=1 para toda n y $1(\frac{1}{2})_{[0,\frac{1}{2})}$=0. ■

Ya vimos que convergencia en Skorohod, ni siquiera implica convergencia puntual, las siguientes proposiciones nos dice en qué casos si se cumple que la convergencia en Skorohod implica convergencia puntual o uniforme.

***Proposición* 3.15** *: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D[a,b]$ y $f \in D[a,b]$ tal que f_n es $d_{sk}-$ convergente a f. Entonces $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(z)$ para todo $z \in$ Cont(f).*

Prueba: Tomemos $z \in \text{Cont}(f)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en z existe $\delta > 0$ tal que si $\mid z - y \mid < \delta$ entonces $\mid f(z) - f(y) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Me fijo en $\delta' = \text{mín}\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, por la $d_{sk}-$ convergencia de f_n tenemos entonces que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \mathbb{N}$ se cumple que $d_{sk}(f_n, f) < \delta'$. Sea $n \geq \mathbb{N}$ entonces se cumple que $d_{sk}(f_n, f) < \delta'$, por lo que existe

$\lambda_n \in \Lambda$ tal que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f_n(t) - f(\lambda_n(t)) \mid + \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda_n(t)\mid < \delta'$

Entonces $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f_n(t) - f(\lambda_n(t)) \mid < \delta'$ y $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda_n(t)\mid < \delta'$

En particular para z tenemos que: $\mid f_n(z) - f(\lambda_n(z)) \mid < \delta'$ y $|z - \lambda_n(z)| < \delta'$

Después por la continuidad en z se sigue que $\mid f(z) - f(\lambda_n(z)) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ahora nos fijamos en:

$$\mid f_n(z) - f(z) \mid \leq \mid f_n(z) - f(\lambda_n(z)) \mid + \mid f(z) - f(\lambda_n(z)) \mid < \delta' + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto si $n \geq \mathbb{N}$ entonces $\mid f(z) - f(\lambda_n(z)) \mid < \varepsilon$, concluimos que $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(z)$. ∎

***Proposición* 3.16** *: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D[a,b]$ y $f \in C[a,b]$ tal que f_n es $d_{sk}-$ convergente a f. Entonces f_n converge uniformemente a f.*

Prueba: Como $f \in \text{C}[a,b]$, tenemos que f es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua existe una $\delta > 0$ tal que si $\mid x - y \mid < \delta$ entonces $\mid f(x) - f(y) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Me fijo en $\delta' = \text{mín}\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, por la $d_{sk}-$ convergencia de f_n tenemos entonces que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \mathbb{N}$ se cumple que $d_{sk}(f_n, f) < \delta'$. Sea $n \geq \mathbb{N}$ entonces se cumple que $d_{sk}(f_n, f) < \delta'$, por lo que existe

$\lambda_n \in \Lambda$ tal que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f_n(t) - f(\lambda_n(t)) \mid + \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda_n(t)\mid < \delta'$

Entonces $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f_n(t) - f(\lambda_n(t)) \mid < \delta'$ y $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid t - \lambda_n(t)\mid < \delta'$

Esto implica que para toda $t \in [a,b]$ se cumple $\mid f_n(t) - f(\lambda_n(t)) \mid < \delta'$ y $\mid t - \lambda_n(t)\mid < \delta'$

Sea $t \in [a,b]$ entonces $\mid f(t) - f(\lambda_n(t)) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ahora nos fijamos en:

$$\mid f_n(t) - f(t) \mid \leq \mid f_n(t) - f(\lambda_n(t)) \mid + \mid f(t) - f(\lambda_n(t)) \mid < \delta' + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto para toda $t \in [a,b]$ si $n \geq \mathbb{N}$ entonces $\mid f(t) - f(\lambda_n(t)) \mid < \varepsilon$, concluimos que f_n converge uniformemente a f. ∎

En resumen: Si la función a la que se converge es una función continua entonces si es cierto que convergencia Skorohod coincide con la convergencia uniforme.

***Corolario* 3.17** *: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D[a,b]$ y $f \in C[a,b]$. Entonces: $f_n \to_{sk} f$ si solo si $f_n \to_u f$.*

Se sigue de las Proposiciones 3.13 y 3.16. ∎

Recordemos el siguiente resultado de Topología. El cual puede ser consultado en la referencia [6].

Proposición: Sea (X,τ) espacio topológico 1^{ro} numerable entonces:
$U \subseteq$ X es abierto si y solo si para todo $x \in U$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \to x$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple que $x_n \in U$.

***Corolario* 3.18** *: La topología inducida por la métrica d_∞ en $C[a,b]$, coincide con la topología inducida de la métrica en $C[a,b] \subseteq D[a,b]$ que se obtiene de la métrica d_{sk}.*

Este resultado se sigue del Corolario 3.17 y la Proposición anterior mencionada y del hecho de que todo espacio métrico es 1^{ro} numerable. ∎

En palabras más concretas, si nos restringimos a las funciones continuas, la topología de Skorohod es exactamente la misma que se obtiene con la métrica del supremo.

***Proposición* 3.19** *: Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $D[a,b]$ tales que $f_n \to_{sk} f$ y $g_n \to_{sk} g$. Además g es continua entonces $(f_n + g_n) \to_{sk} f + g$.*

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $[a,b]$ entonces g es uniformemente continua en $[a,b]$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $\mid g(x) - g(y) \mid < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Como $f_n \to_{sk} f$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $d_{sk}(f_n, f) < \text{mín}\ \{\frac{\varepsilon}{6}, \delta\}$, ademas $g_n \to_{sk} g$ y g es continua por lo que g_n converge uniformemente a g, por lo que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $\mid g_n(t) - g(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{6}$ para toda $t \in [a,b]$.

Tomemos $N = \text{máx}\ \{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ y $n \geq$ N entonces $d_{sk}(f_n, f) < \min\{\frac{\varepsilon}{6}, \delta\}$.

De esto se sigue que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(\lambda(t))| + \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid \lambda(t) - t| \leq \text{mín}\ \{\frac{\varepsilon}{6}, \delta\}$.

Lo cual implica que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(\lambda(t))| \leq \dfrac{\varepsilon}{6} \wedge \delta$ y $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid \lambda(t) - t| \leq \dfrac{\varepsilon}{6} \wedge \delta$.

Sea $t \in [a,b]$.

$$
\begin{aligned}
\mid (f_n + g_n)(t) - (f+g)(\lambda(t)) \mid &= \mid f_n(t) + g_n(t) - f(\lambda(t)) - g(\lambda(t)) \mid \\
&\leq \mid f_n(t) - f(\lambda(t)) \mid + \mid g_n(t) - g(\lambda(t)) \mid \\
&\leq \mid f_n(t) - f(\lambda(t)) \mid + \mid g_n(t) - g(t) \mid + \mid g(t) - g(\lambda(t)) \mid \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid (f_n + g_n)(t) - (f+g)(\lambda(t)) \mid \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ ademas $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid \lambda(t) - t| \leq \dfrac{\varepsilon}{6}$.

De modo que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} \mid (f_n + g_n)(t) - (f + g)(\lambda(t)) \mid + \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid \lambda(t) - t| < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Por lo tanto $(f_n + g_n) \rightarrow_{sk} f + g$. ∎

3.4. D$[a, b]$ con la métrica de Skorohod es separable pero no es completo.

El teorema a continuación se puede resumir: Diciendo que las funciones escalonadas que toman valores en los racionales, es un subconjunto denso en D$[a, b]$ con la topología de Skorohod.

Teorema* 3.20 *: *(D$[a, b]$, τ_{sk}) es separable.*

Prueba:

Definimos F $\subseteq$ D$[a, b]$ de la siguiente manera:

F$=\{f \in$ D$[a, b] \mid$ existe $k \in \mathbb{N}$ y $q_1, \ldots, q_{k+1} \in \mathbb{Q}$ tales que $f(x)=q_i$ si $x \in \Big[a + \frac{(i-1)(b-a)}{k}, a + \frac{i(b-a)}{k}\Big)$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $f(b)=q_{k+1}\}$. Es claro que F es numerable.

Por demostrar que F es denso en D$[a, b]$. Sea $U \subseteq$ D$[a, b]$ abierto no vacío de D$[a, b]$. Sea $f \in U$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_{sk}}(f, \varepsilon) \subseteq U$. Lo que haremos será construir un elemento de F, que se encuentre en $B_{d_{sk}}(f, \varepsilon)$.

Para $\dfrac{\varepsilon}{8}$ >0 y f, aplicamos la Proposición 3.8 entonces tenemos que existen $t_0, \ldots, t_m \in [a, b]$ tales que $a = t_0 < t_1 <\ldots< t_m = b$ y además $\sup\limits_{s,r\in[t_{j-1},t_j)} \mid f(s) - f(r) \mid < \dfrac{\varepsilon}{8}$ para toda $j \in \{1,2,\ldots,m\}$.
$\pi=\{t_0,\ldots,t_m\}$ es una partición de $[a, b]$, así que podemos pensar en la norma de la partición denotada por $|\pi|$.

Para $\text{mín}\Big\{\frac{\varepsilon}{8(b-a)}, \frac{|\pi|}{b-a}\Big\} > 0$, por la propiedad arquimediana existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \text{mín}\Big\{\frac{\varepsilon}{8(b-a)}, \frac{|\pi|}{b-a}\Big\}$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, m - 1\}$, defino $t^*_j = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \Big\{a + \frac{(i-1)(b-a)}{k} | a + \frac{(i-1)(b-a)}{k} \leq t_j\Big\}$ si $j = 0$, definimos $t^*_0 = a$ y $t^*_m = b$ respectivamente. Notemos que $\{t^*_0,\ldots,t^*_m\}$ define una partición en $[a, b]$.

Si $j \in \{1, \ldots, m + 1\}$, tenemos que $f(t_{j-1}) \in \Big(-\dfrac{\varepsilon}{8} + f(t_{j-1}), \dfrac{\varepsilon}{8} + f(t_{j-1})\Big)$.

Entonces existe $q_{j-1} \in \mathbb{Q} \cap \Big(-\dfrac{\varepsilon}{8} + f(t_{j-1}), \dfrac{\varepsilon}{8} + f(t_{j-1})\Big)$.

Con esto definamos una función de la siguiente manera: Ψ: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donde:

$$\Psi(x) = \begin{cases} q_{j-1} & \text{si } x \in [t^*_{j-1}, t^*_j) \text{ con } j = 1, .., m \\ q_m & \text{si } x = t^*_m = b \end{cases}$$

Es claro que $\Psi \in$ F. Afirmamos entonces que $\Psi \in B_{d_{sk}}(f,\varepsilon)$. Para demostrar esto lo que haremos será definir una función λ: $[a, b] \rightarrow [a, b]$ de la siguiente forma:

$$\lambda(t) = t_{j-1} + \frac{(t_j - t_{j-1})(t - t^*_{j-1})}{t^*_j - t^*_{j-1}} \quad \text{si } t \in [t^*_{j-1} , t^*_j]$$

Es claro que $\lambda(a) = a$, $\lambda(b) = b$, λ es estrictamente creciente y continua es decir $\lambda \in \Lambda$. Tomemos ahora $t \in [a, b]$ si $t \neq b$ existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $t \in [t^*_{j-1}, t^*_j)$ entonces $\Psi(t) = q_{j-1}$ y $\lambda(t) \in [t_{j-1}, t_j)$.

Así $|\Psi(t) - f(\lambda(t))| = |q_{j-1} - f(\lambda(t))| \leq |q_{j-1} - f(t_{j-1})| + |f(t_{j-1}) - f(\lambda(t))\ | \leq \dfrac{\varepsilon}{8} + \dfrac{\varepsilon}{8} = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Si $t = b$ entonces $|\Psi(t) - f(\lambda(t))| = |q_m - f(b))| < \dfrac{\varepsilon}{8}$ se sigue que para toda $t \in [a, b]$ se cumple: $|\Psi(t) - f(\lambda(t))| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, con esto llegamos a que: $\sup\limits_{t\in[a,b]} |\Psi(t) - f(\lambda(t))| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Falta ver que λ está muy cerca de la función identidad. Sea $t \in [a, b]$. Existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $t \in [t_{j-1}\ ,\ t_j]$ además $t_{j-1} - t^*_{j-1} < \dfrac{\varepsilon}{8}$ y $\ t_j - t^*_j < \dfrac{\varepsilon}{8}$, por el Lema 3.12 se sigue que $|\ t - \lambda(t)\ | < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Llegamos entonces a que para toda $t \in [a, b]$ se cumple $|\ t - \lambda(t)\ | < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Por lo que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |t - \lambda(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Por lo tanto $\sup\limits_{t\in[a,b]} |\Psi(t) - f(\lambda(t))| + \sup\limits_{t\in[a,b]} |\ t - \lambda(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ es decir $d_{sk}(\Psi, f) < \varepsilon$. Lo cual prueba nuestra afirmación. De la afirmación es inmediato que $\Psi \in U$, por lo que $U \cap \mathrm{F} \neq \emptyset$

Por lo tanto F es denso en $(\mathrm{D}[a, b],\ \tau_{sk})$ concluimos entonces que $(\mathrm{D}[a, b],\ \tau_{sk})$ es separable. ∎

Realmente hasta aquí no habíamos tenido problemas en cómo habíamos definido la métrica de Skorohod, pero aquí nos enfrentamos a uno. Nos hubiera gustado que el espacio métrico que definimos resultase completo, pero no es así, como lo veremos a continuación.

***Proposición* 3.21** *: (D$[a, b]$, τ_{sk}) no es completo.*

Prueba: $\dfrac{b-a}{2} > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{b-a}{2}$ esto implica que $\dfrac{1}{n_0} + \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{b-a}{2} + \dfrac{a+b}{2} = b$. De modo que si $n \geq n_0$ entonces $\dfrac{1}{n} + \dfrac{a+b}{2} < b$.

Esta última cuenta solo es para definir bien las funciones en D$[a, b]$. Asi definamos la siguiente sucesión de funciones:

$f_1 {=} 1_{[\frac{b+a}{2}, \frac{b+a}{2} + \frac{1}{n_0})}$, $f_2 {=} 1_{[\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2} + \frac{1}{n_0+1})}, \ldots,\ f_n {=} 1_{[\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2} + \frac{1}{n_0+n-1})}, \ldots$. Por demostrar $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

Sean $n, m \geq 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \leq m$ entonces $\dfrac{1}{n_0 + m - 1} \leq \dfrac{1}{n_0 + n - 1}$.

Ahora $f_n {=} 1_{[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n_0+n-1})}$, $f_m {=} 1_{[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n_0+m-1})}$. Toca definir $\lambda \in \Lambda$, definamos λ:$[a, b] \to [a, b]$ como:

$$\lambda(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right) \\[2ex] \frac{a+b}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{n_0+n-1}\right)\left(t - \frac{b+a}{2}\right)}{\frac{1}{n_0+m-1}} & \text{si } t \in \left[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n_0+m-1}\right] \\[2ex] \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n_0+n-1} + \dfrac{\left(\frac{b-a}{2} - \frac{1}{n_0+n-1}\right)\left(t - \frac{b+a}{2} - \frac{1}{n_0+m-1}\right)}{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{n_0+m+1}} & \text{si } t \in \left[\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n_0+m-1}, b\right] \end{cases}$$

A pesar de la aparente dificultad de la expresión anterior, es la misma que hemos usado anteriormente.

Ahora $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{b+a}{2}=0$,$-\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{n_0+m-1}\right)+\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{n_0+n-1}\right)=\dfrac{1}{n_0+n-1}-\dfrac{1}{n_0+m-1}$.

El Lema 3.12 nos diria que si

$$t\in\left[\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n_0+m-1}\right] \text{ entonces } \mid\lambda(t)-t\mid<2\left(\frac{1}{n_0+n-1}-\frac{1}{n_0+m-1}\right)$$

Del mismo modo $b-b=0$, $\left(\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{1}{n_0+n-1}\right)-\left(\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{1}{n_0+m-1}\right)=\dfrac{1}{n_0+n-1}-\dfrac{1}{n_0+m-1}$.

De nuevo el Lema 3.12 nos dice que si

$$t\in\left[\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n_0+m-1},b\right] \text{ entonces } \mid\lambda(t)-t\mid<2\left(\frac{1}{n_0+n-1}-\frac{1}{n_0+m-1}\right)$$

Así concluimos que $\mid\lambda(t)-t\mid<2\left|\dfrac{1}{n_0+n-1}-\dfrac{1}{n_0+m-1}\right|$ para cualquier $t\in[a,b]$ se sigue que

$$\sup_{t\in[a,b]}\mid\lambda(t)-t\mid\leq 2\left|\frac{1}{n_0+n-1}-\frac{1}{n_0+m-1}\right|$$

y por la forma en la que definimos $\lambda\in\Lambda$, es inmediato que:

$\sup\limits_{t\in[a,b]}\mid f_m(t)-f_n(\lambda(t))\mid=0$. Así $\sup\limits_{t\in[a,b]}\mid\lambda(t)-t\mid+\sup\limits_{t\in[a,b]}\mid f_m(t)-f_n(\lambda(t))\mid\leq 2\left|\dfrac{1}{n_0+n-1}-\dfrac{1}{n_0+m-1}\right|$

Por lo tanto $d_{sk}(f_n,f_m)\leq 2\left|\dfrac{1}{n_0+n-1}-\dfrac{1}{n_0+m-1}\right|$ para cualesquiera $n,m\geq 1$.

De lo anterior se sigue que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en D$[a,b]$.

Afirmamos ahora que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge en D$[a,b]$, demostremos esto por contradicción, es decir supongamos que existe $f\in$ D$[a,b]$ tal que $f_n\to_{sk} f$.

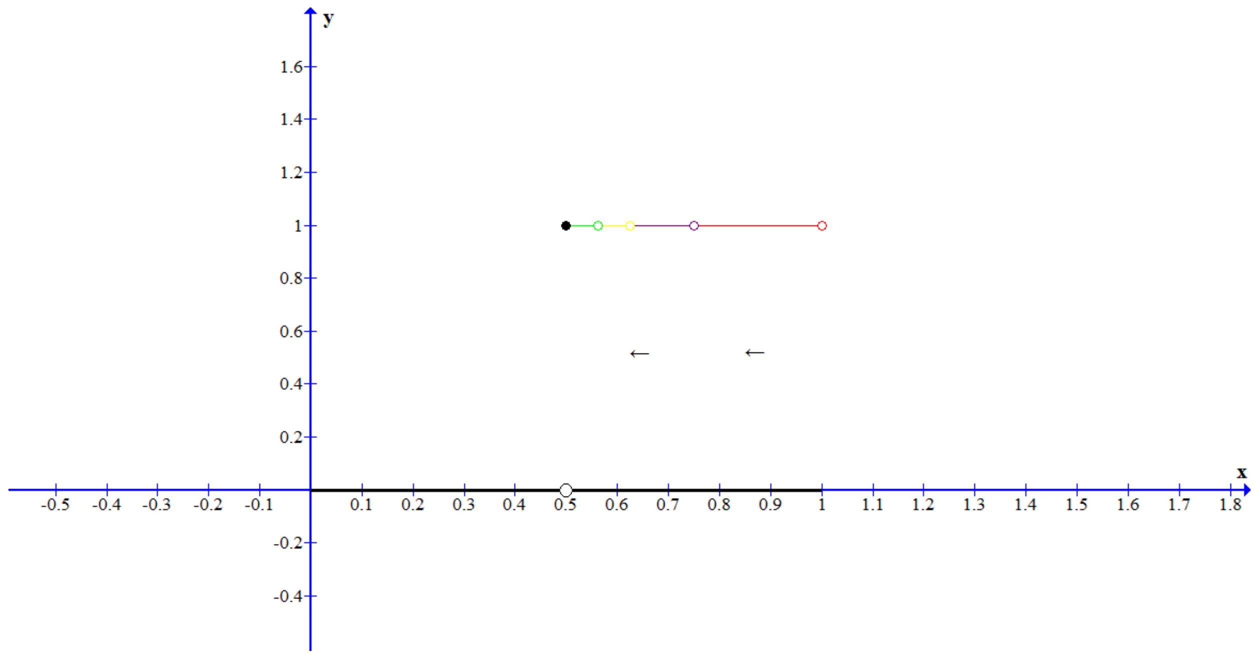
Sea $t_0\in(\frac{b+a}{2},b]$ y $\varepsilon>0$. Entonces $t_0-\dfrac{b+a}{2}>0$, por la propiedad arquimediana existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_1}<t_0-\dfrac{b+a}{2}$. Para $\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}>0$, donde $\varepsilon'=t_0-\dfrac{b+a}{2}-\dfrac{1}{n_1+n_0-1}$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces $d_{sk}(f,f_n)<\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}$, esto último porque $f_n\to_{sk} f$. Nos fijamos ahora en

N^*=$\text{máx}\{N,n_1\}$,como $N^*\geq N$ tenemos que $d_{sk}(f,f_{N^*})<\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}$ por lo cual existe $\lambda\in\Lambda$ tal que:

$$\sup_{t\in[a,b]}\mid\lambda(t)-t\mid+\sup_{t\in[a,b]}\mid f(t)-f_{N^*}(\lambda(t))\mid<\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}.$$

Lo cual implica que $\sup\limits_{t\in[a,b]}\mid\lambda(t)-t\mid<\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}$ y $\sup\limits_{t\in[a,b]}\mid f(t)-f_{N^*}(\lambda(t))\mid<\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}$.
En particular para t_0, tenemos $\mid\lambda(t_0)-t_0\mid<\text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon'\}$ y $\mid f(t_0)-f_{N^*}(\lambda(t_0))\mid<\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}$.

Esto último implica que $\dfrac{1}{N^*+n_0-1}+\dfrac{b+a}{2}<\lambda(t_0)$, esto nos dice que $f_{N^*}(\lambda(t_0))$=0, por la forma en que definimos la sucesión. De esto se sigue que $\mid f(t_0)\mid<\varepsilon$. Mostramos entonces que si $t_0\in(\frac{b+a}{2},b]$



La gráfica representa a la sucesión de Cauchy que construimos en el caso particular D[0,1]. Para probar que no converge en Skorohod, lo haremos por contradicción, pero el argumento como se ve en la gráfica es que si convergiera, tendría que ser a la función pintada de negro pero esa función no es continua por la derecha.

entonces $\mid f(t_0) \mid < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto si $t_0 \in (\frac{b+a}{2}, b]$ entonces $f(t_0)$=0.

Hasta aquí lo que probamos es que si $t_0 \in (\frac{b+a}{2}, b]$ entonces $f(t_0)$=0, queremos ver que pasa con los otros puntos. Como f es continua por la derecha entonces $f(\frac{b+a}{2})$=0, tomemos ahora $t_0 \in [a, \frac{b+a}{2})$, $\varepsilon > 0$ para $\text{mín}\{\varepsilon, \frac{b+a}{2} - t_0\} > 0$, por la convergencia en Skorohod tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d_{sk}(f, f_n)$< $\text{mín}\{\varepsilon, \frac{b+a}{2} - t_0\}$ por lo que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid \lambda(t) - t \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - f_N(\lambda(t)) \mid < \text{mín}\{\varepsilon, \tfrac{b+a}{2} - t_0\} \text{ lo que implica que}$$

En particular para t_0 tenemos $\mid \lambda(t_0) - t_0 \mid < \dfrac{b+a}{2} - t_0$ y $\mid f(t_0) - f_N(\lambda(t_0)) \mid < \varepsilon$.

Esto último implica que $\lambda(t_0) < \dfrac{b+a}{2}$ por lo que $f_N(\lambda(t_0))$=0 finalmente $\mid f(t_0) \mid < \varepsilon$.

Por lo tanto $f(t_0)$=0. Como ya hicimos todos los casos concluimos que $f \equiv$0. La función constante cero es continua en $[a, b]$, en particular para $\dfrac{b+a}{2}$ por la Proposición 3.15, $f_n(\frac{a+b}{2}) \to f(\frac{a+b}{2})$=0 pero $f_n(\frac{a+b}{2})$=1

para toda n lo que implica que $f_n(\frac{a+b}{2}) \to$ =1, pero esto es una contradicción ya que el límite es único.

La contradicción vino de suponer que $(f_n)_{\infty}^{n=1}$ converge en D$[a, b]$, por lo que esta sucesión no converge.

Por tanto (D$[a, b]$, τ_{sk}) no es completo. ∎

3.5. D$[a, b]$ se puede completar conservando la misma topología.

Vamos a ajustar la métrica de Skorohod para que nos resulte un espacio métrico completo, pero que siga induciendo la Topología de Skorohod. Para hacer esto tenemos que cambiar nuestro espacio de parámetros Λ.

La idea en la definición es exigir que el tiempo en la deformación λ, sea parecido a la función identidad; es decir que cumpla que la pendiente $(\lambda(t) - \lambda(s))/(t - s)$ este cerca de 1, o lo que es lo mismo y analíticamente más conveniente, que su logaritmo se encuentre, o esté cerca de 0 .

***Definición* 3.22** *: Definamos al conjunto* $\Lambda' = \left\{\lambda \in \Lambda \Big| \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right| \in \mathbb{R} \right\}$.

Una vez cambiado Λ por Λ', procederemos a mostrar unos cuantos lemas que vamos a utilizar.

***Lema* 3.23** *: Sea $\lambda \in \Lambda$. Entonces* $\sup_{t\in[a,b]} |\lambda(t) - t| = \sup_{t\in(a,b]} (t-a)\left|\frac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a} - 1\right|$

Prueba:

Sea $t \in (a, b]$. Entonces $t - a > 0$ luego

$$(t-a)\ |\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a} - 1| = (t-a)\left|\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)-t+a}{t-a}\right| = (t-a)\left|\tfrac{\lambda(t)-a-t+a}{t-a}\right| = (t-a)|\tfrac{\lambda(t)-t}{t-a}| = |\lambda(t) - t\ |$$

Es decir si $t \in (a, b]$ entonces $(t-a)\ \left|\frac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a} - 1\right| = |\lambda(t) - t\ |$. Esto implica que:

$$\sup_{t\in(a,b]} (t-a)\ \left|\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a} - 1\right| = \sup_{t\in(a,b]} |\lambda(t) - t\ |$$

Si $t = a$ entonces $|\lambda(t) - t\ | = |\lambda(a) - a\ | = 0$. Concluimos:

$$\sup_{t\in[a,b]} |\lambda(t) - t| = \sup_{t\in(a,b]} (t-a)\left|\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a} - 1\right| \quad \blacksquare$$

***Lema* 3.24** *: Para toda $\lambda \in \Lambda'$ se tiene que* $\sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left|ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| \geq \sup_{t\in(a,b]} \left|ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|$.

Prueba: Sea $t \in (a, b]$ con $a \neq t$. Tenemos que $\left|ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right| \leq \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left|ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|$.

Por tanto tenemos lo que queríamos $\sup_{t\in(a,b]} \left|ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right| \leq \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left|ln\dfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| \quad \blacksquare$

***Lema* 3.25** *: Para toda $\lambda \in \Lambda'$ se cumple* $\sup_{t\in[a,b]} |\lambda(t) - t\ | \leq (b-a)\left[\exp\left(\sup_{t\in(a,b]}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right) - 1\right]$

Prueba: Por el Lema 3.23 tenemos que $\sup_{t\in[a,b]} |\lambda(t) - t| = \sup_{t\in(a,b]} (t-a)\left|\frac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a} - 1\right|$, Sabemos además que para $u > 0$ se cumple $|\ u - 1\ | \leq \exp(|\ ln\, u\ |) - 1$, aplicando esto a lo anterior nos queda.

$$\sup_{t\in(a,b]} (t-a)\left|\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}-1\right| \leq \sup_{t\in(a,b]} (t-a)\left[\exp\left(\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right]\leq \sup_{t\in(a,b]} (b-a)\left[\exp\left(\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right]$$

Por último $\sup_{t\in(a,b]} (b-a)\left[\exp\left(\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right]= (b-a)\left[\exp\left(\sup_{t\in(a,b]}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right]$ ∎

Ahora si, pasemos a definir la métrica que hará completo a D, pero que al mismo tiempo induzca la topología de Skorohod.

***Definición* 3.26** *: Definamos la métrica d_c: $D[a,b] \times D[a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:*

$$d_c(f,g) \;=\; \inf_{\lambda\in\Lambda'}\left\{\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(\lambda(t))| + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right\}.$$

Lo primero que vamos a hacer es verificar que es métrica, pero para eso, demostremos la siguiente desigualdad.

***Proposición* 3.27** *: Para cualesquiera $f,g\in D[a,b]$ se tiene que $d_{sk}(f,g)\leq [b-a+1][\exp(d_c(f,g))-1]$.*

Prueba:

Sean $f,g\in$ D$[a,b]$. Recordemos que $x\leq e^x-1$, así tenemos:

$$\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(\lambda(t))|\leq \exp(\sup_{t\in[a,b]}\mid f(t)-g(\lambda(t))\mid)-1 \quad \text{para cualquier } \lambda\in\Lambda.$$

Después apliquemos el Lema 3.25 entonces:

$$\sup_{t\in[a,b]}|\lambda(t)-t|\leq (b-a)\left[\exp\left(\sup_{t\in(a,b]}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right] \quad \text{para cualquier } \lambda\in\Lambda'.$$

Ahora juntemos las desigualdades:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[a,b]}\mid f(t)-g(\lambda(t))\mid + \sup_{t\in[a,b]}\mid \lambda(t)-t\mid \quad &\leq \quad [\exp(\sup_{t\in[a,b]}\mid f(t)-g(\lambda(t))\mid)-1]\\ &+\quad (b-a)\left[\exp\left(\sup_{t\in(a,b]}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right]\end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que:

$$d_{sk}(f,g)\leq(b-a+1)\left[\exp\left(\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(\lambda(t))|+\sup_{t\in(a,b]}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(a)}{t-a}\right|\right)-1\right] \quad \text{para cualquier } \lambda\in\Lambda'.$$

Apliquemos ahora el Lema 3.24

$$d_{sk}(f,g)\leq(b-a+1)\left[\exp\left(\sup_{t\in[a,b]}\mid f(t)-g(\lambda(t))\mid \;+\sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right)-1\right] \quad \text{para cada } \lambda\in\Lambda'.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
d_{sk}(f,g) &\leq \inf_{\lambda\in\Lambda'}\left\{(b-a+1)\left[\exp\left(\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid \ + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right)-1\right]\right\}\\
&= (b-a+1)\left[\exp\left(\inf_{\lambda\in\Lambda'}\left\{\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t)-g(\lambda(t))\mid \ + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right\}\right)-1\right]\\
&= (b-a+1)[\exp(d_c(f,g))-1]
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

**Recordemos que todo esto lo hicimos para ver que d_c define una métrica en D$[a,b]$. Empecemos entonces a verificar cada una de las propiedades de métrica.

Es claro por la Proposición 3.9 y de la definición de d_c que está bien definida y que $d_c \geq 0$.

(i) Por demostrar que $d_c(f,g)$=0 si y solo si $f=g$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f=g$. Tomemos λ=$Id_{[a,b]}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(\lambda(t))| + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| &= \sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)| + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \mid ln\tfrac{t-s}{t-s}\mid\\
&= 0
\end{aligned}$$

Por ser $d_c(f,g)$ el ínfimo, concluimos que $d_c(f,g)$=0

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $d_c(f,g)$=0, justo por la Proposición 3.27 tenemos entonces que $d_{sk}(f,g)$=0 por tanto $f=g$.

(ii) Por demostrar que $d_c(f,g)$=$d_c(g,f)$. Sean $f,g\in$ D$[a,b]$.

Sea $\lambda\in\Lambda'$. Entonces $\lambda\in\Lambda$, recordemos que cuando probamos que d_{sk} vimos que:

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t)\mid = \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t))\mid$$

Afirmamos entonces que: $\displaystyle\sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| = \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right|$.

Se hará por casos.

($\geq$) Subcaso 1:

$$\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} \geq 1$$

Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right| = ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} &= ln\left(\frac{t-s}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\right)^{-1} = -ln\frac{t-s}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\\ &= \left|ln\frac{t-s}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\right| = \left|ln\frac{\lambda(\lambda^{-1}(t))-\lambda(\lambda^{-1}(s))}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\right|\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|$.

Subcaso 2:

$$\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} \leq 1$$

Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right| = -ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} &= -ln\left(\frac{t-s}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\right)^{-1} = ln\frac{t-s}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\\ &= \left|ln\frac{t-s}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\right| = \left|ln\frac{\lambda(\lambda^{-1}(t))-\lambda(\lambda^{-1}(s))}{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}\right|\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|$.

De ambos casos se sigue que: $\sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|$
Esto nos dice tambien que $\lambda^{-1}\in \Lambda'$.

($\leq$) Subcaso 1:

$$\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \geq 1$$

Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| = ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} &= ln\left(\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)}\right)^{-1} = -ln\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)}\\ &= \left|ln\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)}\right| = \left|ln\frac{\lambda^{-1}(\lambda(t))-\lambda^{-1}(\lambda(s))}{\lambda(t)-\lambda(s)}\right|\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s}\right|$.

Subcaso 2:

$$\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \leq 1$$

Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left| ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right| = -ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} &= -ln\left(\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)}\right)^{-1} = ln\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)} \\
&= \left| ln\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)} \right| = \left| ln\frac{\lambda^{-1}(\lambda(t))-\lambda^{-1}(\lambda(s))}{\lambda(t)-\lambda(s)} \right|
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left| ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} \right|$.

De ambos casos llegamos a que: $\sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} \right| \geq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right|$.

Esto prueba nuestra afirmación, en conclusión tenemos lo siguiente. Si $\lambda \in \Lambda'$ entonces $\lambda^{-1} \in \Lambda$ y además

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(\lambda^{-1}(t)) - g(t) \mid + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\tfrac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(s)}{t-s} \right| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(\lambda(t))| + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\tfrac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right|$$

Esto implica que $d_c(g,f) \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda(t)) \mid + \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right|$ para toda $\lambda \in \Lambda'$.

De modo $d_c(g,f) \leq d_c(f,g)$ para cualesquiera $f,g \in \mathrm{D}[a,b]$. Por tanto $d_c(g,f)$=$d_c(f,g)$.

(iii) Por demostrar que para cualesquiera $f,g,\varphi \in \mathrm{D}[a,b]$ entonces $d_c(f,\varphi) \leq d_c(f,g) + d_c(g,\varphi)$.

Sean $f,g,\varphi \in \mathrm{D}[a,b]$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda'$. Ya habíamos visto que $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda$ y

$$\sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - \varphi(\lambda_1\circ\lambda_2)(t)) \mid \leq \sup_{t\in[a,b]} \mid f(t) - g(\lambda_2(t)) \mid + \sup_{t\in[a,b]} \mid g(t) - \varphi(\lambda_1(t)) \mid$$

Afirmamos $\sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_1\circ\lambda_2(t)-\lambda_1\circ\lambda_2(s)}{t-s} \right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_1(t)-\lambda_1(s)}{t-s} \right| + \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s} \right|$

Pasemos a probar esta afirmación. Sean $s,t \in [a,b]$ con $s \neq t$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left| ln\tfrac{\lambda_1\circ\lambda_2(t)-\lambda_1\circ\lambda_2(s)}{t-s} \right| = \left| ln\tfrac{\lambda_1(\lambda_2(t))-\lambda_1(\lambda_2(s))}{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}\tfrac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s} \right| &= \left| ln\tfrac{\lambda_1(\lambda_2(t))-\lambda_1(\lambda_2(s))}{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)} + ln\tfrac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s} \right| \\
&\leq \left| ln\tfrac{\lambda_1(\lambda_2(t))-\lambda_1(\lambda_2(s))}{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)} \right| + \left| ln\tfrac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s} \right| \\
&\leq \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\tfrac{\lambda_1(t)-\lambda_1(s)}{t-s} \right| + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\tfrac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s} \right|
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_1\circ\lambda_2(t)-\lambda_1\circ\lambda_2(s)}{t-s} \right| \leq \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_1(t)-\lambda_1(s)}{t-s} \right| + \sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s} \right|$

Una consecuencia inmediata de esto es que $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda^{'}$. De la desigualdad que ya teníamos y de la afirmación es inmediato que $d_c(f,\varphi) \leq d_c(f,g) + d_c(g,\varphi)$.

Hemos mostrado que d_c define una métrica en $\mathrm{D}[a,b]$. ■

Lo que haremos ahora es ver que d_c induce la misma topología que d_{sk}, para esto necesitaremos la siguiente definición, así como las siguientes dos proposiciones.

***Definición* 3.28** *: Sea $f \in D[a,b]$ y $0 < \delta < b-a$. Definimos:*

$$\omega^{'}_f(\delta) = \inf_{\pi\in\Theta} \max_{i=1,\ldots,m} \omega_f[t_{i-1},t_i) \text{ tal que } \omega_f[t_{i-1},t_i) = \sup_{s,r\in[t_{i-1},t_i)} |\, f(s) - f(r)|$$

$$\text{donde } \Theta = \{\pi \ \in \Pi[a,b] : t_i - t_{i-1} > \delta, i = 1,2,\ldots,m\}.$$

Observación: Si $f \in \mathrm{D}[a,b]$ entonces $\omega^{'}_f(\delta)$ está bien definida.

***Proposición* 3.29** *: Sea $f \in D[a,b]$. Entonces $\lim_{\delta\to 0^+} \omega^{'}_f(\delta){=}0$*

Prueba:

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 3.8 entonces existen $t_0,\ldots,t_m \in [a,b]$ tales que $a = t_0 <,\ldots,< t_m = b$ y además $\sup_{s,r\in[t_{i-1},t_i)} |\, f(s) - f(r)| < \varepsilon$ para $i = 1,\ldots,m$. Ahora $\pi = \{t_0,\ldots,t_m\}$ es una particion de $[a,b]$. Definamos $\Delta = \min_{i\in\{1,..m\}} |\, t_i - t_{i-1}| > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \Delta$ entonces $\pi \in \Theta$ además $\omega_f[t_{i-1},t_i) = \sup_{s,r\in[t_{i-1},t_i)} |\, f(s) - f(r)| < \varepsilon$ para $i = 1,\ldots,m$. Así $\max_{i=1,\ldots,m} \omega_f[t_{i-1},t_i){<}\ \varepsilon$.

Por lo tanto $\inf_{\pi\in\Theta} \max_{i=1,\ldots,m} \omega_f[t_{i-1},t_i) \leq \max_{i=1,\ldots,m} \omega_f[t_{i-1},t_i){<}\ \varepsilon$ es decir $\omega^{'}_f(\delta) < \varepsilon$. ■

***Proposición* 3.30** *: Si $d_{sk}(f,g) < \delta^2$ y $\delta < \frac{1}{4} \wedge (b-a)$ entonces $d_c(f,g) \leq 6\delta + \omega^{'}_f(\delta)$.*

Prueba:(La condición $\delta < b-a$ solo es para que $\omega^{'}_f(\delta)$ este bien definida.) Sea $0{<}\ \varepsilon < \delta$. Entonces existe q $\in \Theta$ donde q$=\{t_0,\ldots,t_r\}$, con $t_0 = a < \ldots < t_r = b$ y $t_i - t_{i-1} > \delta$ con $i = 1,\ldots,r$ tal que:

$$\max_{i=1,\ldots,m} \omega_f[t_{i-1},t_i) < \omega^{'}_f(\delta) + \varepsilon$$

Esto último solo es por la definición de ínfimo. Por otra parte como $d_{sk}(f,g) < \delta^2$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que:

$$\sup_{t\in[a,b]} |\ f(t) - g(\lambda(t))\ | < \delta^2 \text{ y } \sup_{t\in[a,b]} |\ \mathrm{t} - \lambda(t)\ | < \delta^2.$$

Necesitamos ajustar λ a otra que este en $\Lambda^{'}$, para esto vamos a hacer la parametrización que ya hemos ocupado varias veces. Vamos a definir λ^{*}: $[a,b] \to [a,b]$ dada por:

$$\lambda^{*}(t) = \lambda(t_{i-1}) + \frac{\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) \text{ si } t \in [t_i, t_{i-1}] \text{ con } i = 1,\ldots,r.$$

Consideremos ahora $\lambda^{-1} \circ \lambda^*$: $[a,b] \to [a,b]$. Notemos que tiene las siguiente propiedades:

1) Es estrictamente creciente.
2) $\lambda^{-1} \circ \lambda^*(t_i) = t_i$ con $i = 0, \ldots, r$.
3) Para toda $t \in [a,b)$ se tiene que t, $\lambda^{-1} \circ \lambda^*(t) \in [t_i, t_{i-1})$ para alguna $i = 0, \ldots, r$.

No olvidemos que queremos acotar a d_c, para eso debemos acotar dos supremos, empecemos con el primero. Sea $t \in [a,b]$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|f(t) - g(\lambda^*(t))| &\leq |f(t) - f(\lambda^{-1}(\lambda^*(t)))| + |f(\lambda^{-1}(\lambda^*(t))) - g(\lambda^*(t))| \\
&< \omega_f[t_{i-1}, t_i) + \delta^2 \quad \text{para alguna} \quad i = 0, \ldots, r. \\
&< \omega'_f(\delta) + \varepsilon + \delta^2 < \omega'_f(\delta) + \delta + \delta^2 < \omega'_f(\delta) + \frac{5}{4}\delta < \omega'_f(\delta) + 2\delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(\lambda^*(t))| \leq \omega'_f(\delta) + 2\delta$. Lo que haremos ahora será acotar el otro supremo, para esto consideremos la siguiente afirmación:

Afirmamos que para cualesquiera $s, t \in [a,b]$ se cumple $\mid [\lambda^*(t) - \lambda^*(s)] - (t-s) \mid \leq 2\delta \mid t - s \mid$.

Sean $s, t \in [a,b]$. Si $s = t$ la desigualdad se cumple trivialmente, lo interesante es cuando $s \neq t$, sin pérdida de generalidad supongamos que $s < t$. Separando en casos:

Caso: $s = t_{i-1}$ y $t = t_i$ para alguna $i = 1, \ldots, r$, para este caso tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mid [\lambda^*(t) - \lambda^*(s)] - (t-s) \mid = \mid [\lambda^*(t_i) - \lambda^*(t_{i-1})] - (t_i - t_{i-1}) \mid &\leq \mid [\lambda^*(t_i) - t_i] \mid + \mid (\lambda^*(t_{i-1}) - t_{i-1}) \mid \\
&\leq \mid [\lambda(t_i) - t_i] \mid + \mid (\lambda(t_{i-1}) - t_{i-1}) \mid \\
&< \delta^2 + \delta^2 = 2\delta^2 \\
&< 2\delta(t_i - t_{i-1}) = 2\delta \mid t - s \mid
\end{aligned}$$

Hicimos este primer caso para que nos ayude a probar un caso más general.

Caso: (Están en la misma subdivisión) es decir $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ para alguna $i = 1, \ldots, r$, por como construimos λ^* se cumple $\dfrac{\lambda^*(t) - \lambda^*(s)}{t-s} = \dfrac{\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ de esto se sigue la siguiente igualdad

$$\left| \frac{[\lambda^*(t) - \lambda^*(s)] - (t-s)}{t-s} \right| = \left| \frac{[\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})] - (t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| = \frac{\mid [\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})] - (t_i - t_{i-1}) \mid}{(t_i - t_{i-1})}$$

Aplicando el caso que ya probamos a la igualdad tenemos que $\left| \dfrac{[\lambda^*(t) - \lambda^*(s)] - (t-s)}{t-s} \right| < 2\delta$. Con esto mostramos que $\mid [\lambda^*(t) - \lambda^*(s)] - (t-s) \mid \leq 2\delta \mid t - s \mid$. Ya probamos un caso más general que el primer caso. Usaremos este caso para mostrar el caso que falta.

Caso: (Están en distintas subdivisiones) es decir $s \in [t_{i-1}, t_i]$ para alguna $i = 1, \ldots, r$ y $t \in [t_{j-1}, t_j]$ para alguna $j = 1, \ldots, r$ y $i \neq j$, como $s < t$ tenemos que $i < j$, haciendo cuentas:

$$\begin{aligned}
\mid [\lambda^*(t) - \lambda^*(s)] - (t-s) \mid &= \mid \lambda^*(t) - \lambda^*(s) + \lambda^*(t_i) - \lambda^*(t_i) + \ldots + \lambda^*(t_{j-1}) - \lambda^*(t_{j-1}) - (t-s) \\
&\quad + t_i - t_i + \ldots + t_{j-1} - t_{j-1} \mid . \\
&\leq \mid \lambda^*(t_i) - \lambda^*(s) - (t_i - s) \mid + \mid \lambda^*(t_{i+1}) - \lambda^*(t_i) - (t_{i+1} - t_i) \mid + \ldots + \\
&\quad \mid \lambda^*(t) - \lambda^*(t_{j-1}) - (t - t_{j-1}) \mid . \text{ Aplicando el caso anterior:} \\
&\leq 2\delta \mid t_i - s \mid + 2\delta \mid t_{i+1} - t_i \mid + \ldots + 2\delta \mid t - t_{j-1} \mid . \\
&\leq 2\delta(t_i - s) + 2\delta(t_{i+1} - t_i) + \ldots + 2\delta(t - t_{j-1}). \text{ Por suma telescópica:} \\
&= 2\delta(t-s) = 2\delta \mid t - s \mid .
\end{aligned}$$

Ya con este caso terminamos de probar la afirmación. Recordemos que nuestro objetivo es acotar el segundo supremo, por lo que tomemos $s, t \in [a,b]$ con $s{\neq}t$. De la afirmación que probamos y de que $2\delta{<}1/2$.

$$ln(1-2\delta) \leq ln\frac{\lambda^*(t) - \lambda^*(s)}{t-s} \leq ln(1+2\delta)$$

Recordemos el siguiente resultado $\mid ln(1 \pm u) \mid \leq 2 \mid u \mid$ si $\mid u \mid \leq \frac{1}{2}$. Usando este resultado en la desigualdad anterior obtenemos:

$$-4\delta \leq ln(1-2\delta) \leq ln\frac{\lambda^*(t) - \lambda^*(s)}{t-s} \leq ln(1+2\delta) \leq 4\delta$$

Esto implica que $\sup\limits_{s,t \in [a,b] \wedge s \neq t} \left| ln\frac{\lambda^*(t) - \lambda^*(s)}{t-s} \right| \leq 4\delta$ y como ya habíamos dado cota para el otro supremo concluimos que: $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(\lambda^*(t))| + \sup\limits_{s,t \in [a,b] \wedge s \neq t} \left| ln\frac{\lambda^*(t) - \lambda^*(s)}{t-s} \right| < \omega_f'(\delta) + 6\delta$. ∎

***Corolario* 3.31** *:* $\tau_{d_{sk}} = \tau_{d_c}$.

Prueba: De las Proposiciones 3.27, 3.29, 3.30, podemos llegar a que $f_n \to_{sk} f$ si y solo si $f_n \to_c f$ y usando el mismo argumento que en el Corolario 3.18, tenemos lo deseado. ∎

Hasta aquí vamos bien, ya propusimos una nueva métrica en D que induce la topología de Skorohod, pero más aún, vamos a mostrar que con esta métrica el espacio si nos resulta completo.

***Proposición* 3.32** *: Sea (X,d) un espacio métrico y $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Si $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesion de $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $X_{n_k} \to \ell$. Entonces $X_n \to \ell$.*

Prueba:

Sea $\varepsilon > 0$. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ como $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$ entonces $\mathrm{d}(X_m, X_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, ahora para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ como $X_{n_k} \to \ell$ tenemos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_2$ entonces $\mathrm{d}(X_{n_k}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$. Definamos ahora $\mathrm{N} = \max\{N_1, N_2\}$, Sea $k \geq \mathrm{N}$. Entonces $N_1,\ N_2 \leq \mathrm{N} \leq k \leq n_k$, por lo cual $\mathrm{d}(X_k, X_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mathrm{d}(X_{n_k}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalmente:

$$\mathrm{d}(X_k, \ell) \leq \mathrm{d}(X_k, X_{n_k}) + \mathrm{d}(X_{n_k}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto $X_n \to \ell$ ∎

***Teorema* 3.33** *: ($D[a,b]$,d_c) es un espacio métrico completo.*

Prueba: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathrm{D}[a,b]$. Por la Proposición 3.32, basta mostrar que existe $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_k} \to f$ para algun $f \in \mathrm{D}[a,b]$.

Para ε=$\frac{1}{2}$, como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1$ entonces $d_c(f_n, f_m) < \frac{1}{2}$.

Para ε=$\frac{1}{4}$, como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_2$ entonces $d_c(f_n, f_m) < \frac{1}{4}$.

Sea n_2=$\max\{N_2, n_1 + 1\}$. Por definición $n_1 \leq n_2$ y además si $n, m \geq n_2$ entonces $d_c(f_n, f_m) < \frac{1}{4}$. Supongamos que hemos definido $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k$, con la propiedad de que si $n, m \geq n_k$ entonces $d_c(f_n, f_m) < \frac{1}{2^k}$ y ahora construyamos n_{k+1}.

Para ε=$\frac{1}{2^{k+1}}$, como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy existe $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_{k+1}$ entonces $d_c(f_n, f_m) < \frac{1}{2^{k+1}}$ y así defino n_{k+1}=$\max\{N_{k+1}, n_k + 1\}$, es claro por construcción que n_{k+1} cumple lo requerido entonces por el teorema de la recursión hemos definido $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que cumple $d_c(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ para toda k. Claro que lo que queremos hacer es mostrar que esta subsucesión converge. Pero para ello tenemos que notar más cosas.

Sea k fija. Como $d_c(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ tenemos que existe $\lambda_k \in \Lambda'$ que satisface:

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(\lambda_k(t))| < \frac{1}{2^k} \text{ y } \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln\frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(s)}{t-s} \right| < \frac{1}{2^k}.$$

Hemos definido la sucesión $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ en Λ', una vez hecho esto, hagamos la siguiente afirmación:

Afirmamos que $\sup_{t\in[a,b]} |\lambda_{k+m+1} \circ \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t)|= \sup_{t\in[a,b]} |\lambda_{k+m+1}(t) - t|$ para cualesquiera $m, k \geq 1$. Pasemos entonces a probar esta afirmación, veamos la primera desigualdad

$(\leq)$ Sea $t \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}
|\lambda_{k+m+1}\circ\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)| &= |\lambda_{k+m+1}(\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t))-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)|\\
&\leq \sup_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}(t)-t|
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sup\limits_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}\circ\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}(t)-t|$

($\geq$) Sea $t\in[a,b]$. Sabemos que $\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k$ es sobre, por lo que existe $z\in[a,b]$ tal que:

$$\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(z)=t$$

De esta forma tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\lambda_{k+m+1}(t)-t| &= |\lambda_{k+m+1}(\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(z))-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(z)|\\
&\leq \sup_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}(\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t))-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)|
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sup\limits_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}(t)-t| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}\circ\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)|$.

Hemos probado la afirmación. Es evidente que $\lambda_{k+m+1}\circ\ldots\circ\lambda_k$ y $\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k\in\Lambda^{'}$ para cualesquiera $k,m\geq 1$. Esto es, porque cuando probamos la desigualdad del triangulo vimos que la composición es cerrada en $\Lambda^{'}$.

Ahora por los, Lemas 3.24 y 3.25 llegamos a la siguiente desigualdad.

$$\sup_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}(t)-t|\leq(b-a)\left[\exp\left(\sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda_{k+m+1}(t)-\lambda_{k+m+1}(s)}{t-s}\right|\right)-1\right].$$

Además también tenemos:

$$0\leq\sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\frac{\lambda_{k+m+1}(t)-\lambda_{k+m+1}(s)}{t-s}\right|<\frac{1}{2^{k+m+1}}<\frac{1}{2}.$$

Recordando el siguiente resultado que dice $e^x-1\leq 2x$ si $0\leq x\leq\frac{1}{2}$.

Finalmente podemos llegar a $\sup\limits_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}(t)-t|\leq\frac{b-a}{2^{k+m}}$.

En conclusión: $\sup\limits_{t\in[a,b]}|\lambda_{k+m+1}\circ\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)|\leq\frac{b-a}{2^{k+m}}$. Para toda $k,m\geq 1$.

Una vez visto esto, sea $k\geq 1$ entonces definamos, $(\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k)_{m=1}^{\infty}$, la cual es una sucesión en C$[a,b]$. Por demostrar que $(\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k)_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (C$[a,b]$,d_∞).

Sea $\varepsilon>0$. Entonces existe M $\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^M}<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Tomemos ahora $m_1,m_2\geq$ M. Si son iguales entonces $d_\infty((\lambda_{k+m_1}\circ\ldots\circ\lambda_k),(\lambda_{k+m_2}\circ\ldots\circ\lambda_k))=0<\varepsilon$.

Así podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $m_1 < m_2$. Por lo que tenemos lo siguiente:

$$\sup_{t\in[a,b]} |\lambda_{k+m_2} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m_1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda_{k+m_2} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) + \lambda_{k+m_2-1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t)$$
$$- \lambda_{k+m_2-1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) + \ldots + \lambda_{k+m_1+1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m_1+1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m_1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t)|$$
$$\leq \frac{b-a}{2^{k+m_2-1}} + \ldots + \frac{b-a}{2^{k+m_1}}.$$

Esto último se sigue de la conclusión de arriba, haciendo las cuentas:

$$\frac{b-a}{2^{k+m_2-1}} + \ldots\ldots + \frac{b-a}{2^{k+m_1}} = \frac{(b-a)(2^{m_2-m_1}-1)}{2^{k+m_2-1}} < \frac{(b-a)(2^{m_2-m_1})}{2^{k+m_2-1}} = \frac{(b-a)}{2^{k-1+m_1}} \leq \frac{(b-a)}{2^{m_1}}$$
$$\leq \frac{(b-a)}{2^M} < \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\sup_{t\in[a,b]} |\lambda_{k+m_2} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m_1} \circ \ldots \circ \lambda_k(t)| < \varepsilon$. Y esto implica que:

$d_\infty(\lambda_{k+m_2} \circ \ldots \circ \lambda_k, \lambda_{k+m_1} \circ \ldots \circ \lambda_k) < \varepsilon$. Acabamos de mostrar que: $(\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k)_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (C$[a,b]$,d_∞) , como (C$[a,b]$,d_∞) es completo, existe $\lambda_k^* \in$ C$[a,b]$ tal que $\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k \to_\infty \lambda_k^*$. Ya sabemos que eso es equivalente a decir que: $\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k$ converge uniformemente a λ_k^*.

Hagamos observaciones muy fáciles sobre λ_k^*.

1)λ_k^* es continua.
2)$\lambda_k^*(a)$=a y $\lambda_k^*(b) = b$.
3)λ_k^* es no decreciente.

Lo difícil es ver que λ_k^* es estrictamente creciente. El primer paso que haremos será trabajar una desigualdad, entonces hagamos las cuentas pertinentes: Sean $s, t \in [a,b]$ con $s \neq t$ y $m \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\left|ln\tfrac{\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(s)}{t-s}\right| &\leq \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(t)-\lambda_{k+m}\circ\ldots\circ\lambda_k(s)}{t-s}\right| \\
&\leq \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda_{k+m}(t)-\lambda_{k+m}(s)}{t-s}\right| + \ldots + \sup_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t}\left|ln\tfrac{\lambda_k(t)-\lambda_k(s)}{t-s}\right| \\
&< \tfrac{1}{2^{k+m}} + \tfrac{1}{2^{k+m-1}} + \ldots + \tfrac{1}{2^k} = \tfrac{1}{2^{k-1}} - \tfrac{1}{2^{k+m}} < \tfrac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

Obtuvimos la desigualdad: $\left|ln\dfrac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s}\right| < \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

Además de la desigualdad necesitamos verificar que: $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} > 0$.

Para ver esto procedamos por contradicción, supongamos que:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} = 0$$

el caso menor no se puede dar ya que λ_k^* es no decreciente.

Así tomemos $\varepsilon = e^{-2} > 0$. Entonces, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si m $\geq M_1$ entonces

$$\frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} < e^{-2}.$$

Ahora aplicamos logaritmo natural a la desigualdad, por lo que

$$ln \frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} < -2 \text{ entonces } \left| ln \frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} \right| > 2$$

Recordemos que la parte de la izquierda ya la habiamos acotado al principio de la demostración, asi $\frac{1}{2^{k-1}} > 2$, lo cual es absurdo. Por tanto concluimos que $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} > 0.$

Esta parte del límite es para justificar rigurosamente el intercambio de la función logaritmo natural y el límite que viene a continuación. Pero además implica que λ_k^* es estrictamente creciente.

$$\lim_{m\to\infty} \left| ln \frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} \right| = \left| ln \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(t) - \lambda_{k+m} \circ \ldots \circ \lambda_k(s)}{t-s} \right| = \left| ln \frac{\lambda_k^*(t) - \lambda_k^*(s)}{t-s} \right|$$

Probamos entonces que si $s, t \in [a, b]$ con $s \neq t$ se cumple $\left| ln \frac{\lambda_k^*(t) - \lambda_k^*(s)}{t-s} \right| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

Por lo tanto $\sup\limits_{s,t\in[a,b]\wedge s\neq t} \left| ln \frac{\lambda_k^*(t) - \lambda_k^*(s)}{t-s} \right| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, es decir $\lambda_k^* \in \Lambda'$, es claro que $\lambda_k^* = \lambda_{k+1}^* \circ \lambda_k$.

Afirmamos ahora: $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_{n_k}([\lambda_k^*]^{-1}(t)) - f_{n_{k+1}}([\lambda_{k+1}^*]^{-1}(t))| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(\lambda_k(t))|$.

Concentrémonos por el momento en probar esta parte. Como $\lambda_k^* = \lambda_{k+1}^* \circ \lambda_k$, $[\lambda_k^*]^{-1} = \lambda_k^{-1} \circ [\lambda_{k+1}^*]^{-1}$.

Sea $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}([\lambda_k^*(t)]^{-1}(t)) - f_{n_{k+1}}([\lambda_{k+1}^*]^{-1}(t))| &= |f_{n_k}(\lambda_k^{-1} \circ [\lambda_{k+1}^*]^{-1}(t)) - f_{n_{k+1}}([\lambda_{k+1}^*]^{-1}(t))| \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} |f_{n_k}(\lambda_k^{-1}(t)) - f_{n_{k+1}}(t)| \\
&= \sup_{t\in[a,b]} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(\lambda_k(t))|
\end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. Se sigue que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_{n_k}([\lambda_k^*]^{-1}(t)) - f_{n_{k+1}}([\lambda_{k+1}^*]^{-1}(t))| < \frac{1}{2^k}$. Haciendo algo muy similar a lo que hicimos arriba, se concluye que $(f_{n_k} \circ [\lambda_k^*]^{-1})_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (B$[a, b]$,d_∞), el cual es completo, es decir, existe $g \in$ B$[a, b]$ tal que $f_{n_k} \circ [\lambda_k^*]^{-1} \to_\infty g$. Es fácil ver que $g \in$ D$[a, b]$.

Finalmente probemos que $f_{n_k} \to_c g$ y esto completaría la prueba del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_{n_k} \circ [\lambda_k^*]^{-1} \to_\infty g$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$ entonces

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_{n_k}([\lambda_k^*]^{-1}(t)) - g(t))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otra parte, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_2$ entonces $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Además, recordemos que ya habíamos notado $\left| ln \dfrac{\lambda_k^*(t) - \lambda_k^*(s)}{t-s} \right| = \left| ln \dfrac{[\lambda_k^*]^{-1}(t) - [\lambda_k^*]^{-1}(s)}{t-s} \right|$.

Tomemos k_3=máx $\{k_1, k_2\} \in \mathbb{N}$, sea $k \geq k_3$.

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_{n_k}([\lambda_k^*]^{-1}(t)) - g(t))| + \left| ln \frac{[\lambda_k^*]^{-1}(t) - [\lambda_k^*]^{-1}(s)}{t-s} \right| < \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $d_c(f_{n_k}, g) < \varepsilon$ si $k \geq k_3$. Es decir $f_{n_k} \to_c g$.

Y así concluimos que (D$[a,b]$,d_c) es un espacio métrico completo.

En este capítulo definimos el espacio D, las funciones càdlàg dotándolas de la topología de Skorohod, estudiamos cómo se comporta la convergencia, de forma que pudiera darnos una idea del concepto de cercanía en esta topología, vimos que este concepto de cercanía, extiende la idea que hay detrás de la métrica del supremo, en efecto lo que converja en el sentido uniforme seguirá convergiendo en esta nueva topología, pero además otro tipo de aproximaciones están permitidas.

La razón de permitir otro tipo de aproximaciones, se ilustra en el Ejemplo 3.14, donde parece razonable pensar que si los saltos entre una función y otra se van acercando, deberíamos poder decir que estas funciones están cerca, lo cual sabemos que no se podría argumentar con la métrica del supremo, ya que ni siquiera tendríamos la convergencia puntual.

La importancia de la topología de Skorohod, radica justamente en darnos una forma de determinar, si funciones que tienen saltos están cerca o no una de la otra. En el capítulo 4 veremos algunas aplicaciones que ilustren la potencia que esta nueva topología.

Capítulo 4

Aplicación del espacio D en convergencia a difusiones.

En este capítulo se presentaran algunas aplicaciones que tiene la topología de Skorohod, empezando por el resultado mas conocido: Teorema de Donsker. Luego veremos cómo podemos definir procesos, de tal forma que estos puedan converger débilmente en Skorohod a una difusión.

4.1. Preliminares.

Vamos a empezar dando algunas definiciones que son de gran importancia, como lo son la definición de convergencia débil y tensión en un espacio métrico.

***Definición* 4.1** *: Sea (S,d) un espacio métrico. Denotaremos por $\beta(S)$, a la mínima sigma algebra generada por la topología inducida por la métrica d.*

***Definición* 4.2** *: Sea $(\mathbb{P}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas de probabilidad en (S,$\beta(S)$) donde S es un espacio métrico. Diremos que $\mathbb{P}_n$ converge débilmente a $\mathbb{P}$, una medida de probabilidad en (S,$\beta(S)$), y lo denotaremos $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$, si para toda f: S$\to\mathbb{R}$ continua y acotada se cumple $\int_S f d\mathbb{P}_n \to \int_S f d\mathbb{P}$.*

***Definición* 4.3** *: Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias en (S,$\beta(S)$) donde S es un espacio métrico. Diremos que X_n converge débilmente a X, una variable aleatoria en (S,$\beta(S)$), y lo denotaremos $X_n \Rightarrow X$ si $\mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X$. Recordando que dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $\mathbb{P}_X$ es la medida de probabilidad en (S,$\beta(S)$) inducida por la variable aleatoria X.*

***Teorema* 4.4** *: (Caracterizaciones de la convergencia débil). Las siguientes incisos son equivalentes a la convergencia débil de variables aleatorias, $X_n \Rightarrow X$ en S un espacio métrico.*

a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X)$ *para toda función* f: $S \to \mathbb{R}$ *continua y acotada.*
b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X)$ *para toda función* f: $S \to \mathbb{R}$ *uniformemente continua y acotada.*
c) $\lim_{n\to\infty} \sup\ \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$ *para todo* F *cerrado en S.*
d) $\lim_{n\to\infty} \inf\ \mathbb{P}(X_n > \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ *para todo* G *abierto en S.*
e) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$ *para todo conjunto* $A \in \mathbb{B}(S)$ *tal que* $\mathbb{P}(X \in FrA) = 0$
f) $f(X_n) \Rightarrow f(X)$ *en* $\mathbb{R}$ *para toda función* f: $S \to \mathbb{R}$ *continua y acotada.*
g) $f(X_n) \Rightarrow f(X)$ *en* $\mathbb{R}$ *para toda funcion* f: $S \to \mathbb{R}$ *uniformemente continua y acotada.*

La demostración de este resultado puede consultarse en la referencia [7], no presentaremos la demostración porque nuestro objetivo solo es introducir el concepto de convergencia débil en un espacio métrico, ya que este será usado más adelante. Proseguiremos con el concepto de tensión.

***Definición* 4.5** *: Sea S un espacio métrico. Decimos que una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, es tensa en (S,$\beta(S)$) si para toda $\varepsilon >$ 0 existe K un compacto tal que $\mathbb{P}(K) > 1-\varepsilon$.*

***Teorema* 4.6** *: Si S es un espacio métrico completo y separable entonces cualquier medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es tensa en (S,$\beta(S)$).*

Prueba: Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad en (S,$\beta(S)$) y $\varepsilon > 0$. Como S es separable, entonces existe $D \subseteq$ S tal que $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$. De esta manera para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión $(A_k^n)_{n=1}^{\infty}$, donde $A_k^n = B_{\frac{1}{k}}(d_n)$ la bola con centro en d_n y radio $\dfrac{1}{k}$. Es claro que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^n$=S. Asi $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^n\right) = 1$.

Por un argumento de continuidad de la probabilidad, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{n_k} A_k^n\right) > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2^k}$.

Así definamos el siguiente conjunto B=$\displaystyle\bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{n=1}^{n_k} A_k^n\right)$, es fácil verificar que B es un conjunto totalmente acotado en S, de esto se sigue que B es relativamente compacto, definimos K=$\overline{B}$ el cual es un conjunto compacto en S, de modo que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{n=1}^{n_k} A_k^n\right)}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{n=1}^{n_k} A_k^n\right)\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\left(\bigcup_{n=1}^{n_k} A_k^n\right)^c\right) \\
&\geq 1 - \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{n_k} A_k^n\right)^c \\
&> 1 - \sum_{k\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^k} = 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Con esto concluimos la prueba. ∎

***Definición* 4.7** *: Sea S un espacio métrico. Decimos que una familia Π de medidas de probabilidad en (S,$\beta(S)$), es tensa si para toda $\varepsilon >$ 0 existe K un compacto tal que $\mathbb{P}(K) > 1-\varepsilon$ para toda $\mathbb{P} \in \Pi$.*

Notemos que esta última definición generaliza a la primera, cuando nos tomamos una familia de una sola medida de probabilidad. Este concepto es de suma importancia para poder garantizar convergencia débil.

4.2. Teorema de Donsker.

El teorema de Donsker quizás sea la aplicación más conocida de la topología de Skorohod y por tal razón la mencionaremos, pero no la estudiaremos a fondo en esta tesis. Su uso más común es la simulación computacional del movimiento Browniano, de hecho la existencia del movimiento Browniano es una consecuencia del teorema de Donsker.

En palabras simples lo que dice el teorema de Donsker, es que el movimiento Browniano es límite de caminatas aleatorias. Detallemos un poco esto último.

Consideremos una caminata aleatoria simple, simétrica, sobre los enteros, que inicia en el origen, es decir $X_0 = 0$ y $X_n = \varsigma_1 + \varsigma_2 + \ldots + \varsigma_n$ en donde $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $\mathbb{P}(\varsigma = 1) = \mathbb{P}(\varsigma = -1) = \frac{1}{2}$. Por lo cual $\mathbb{E}(\varsigma) = 0$ y $\mathrm{Var}(\varsigma) = \mathbb{E}(\varsigma^2) = 1$. Lo que haremos ahora, es suponer que la unidad de tiempo en la variable es ahora de longitud $\triangle t = \frac{1}{N}$ con N un natural, de lo que se trata es de hacer $\triangle t$ cada vez más pequeño. También hara falta hacer un cambio en la escala de los saltos, en vez de ser unitarios ahora serán de longitud $\sqrt{\triangle t}$. Así definimos la caminata aleatoria:

$$W_{n\triangle t} = \sqrt{\triangle t}\varsigma_1 + \sqrt{\triangle t}\varsigma_2 + \ldots + \sqrt{\triangle t}\varsigma_n$$

Es claro que para esta nueva caminata aleatoria $\mathbb{E}(W_{n\triangle t}) = 0$ y que la $\mathrm{Var}(W_{n\triangle t}) = n \triangle t$

Con estos ajustes lo que se trata de hacer es lograr una similitud con el movimiento Browniano estándar, en una versión discreta, pero esto se arregla simplemente completando las trayectorias con la función máximo entero. Justamente el teorema de Donsker establece que cuando $\triangle t \to 0$ esta caminata aleatoria converge al movimiento Browniano estándar.

Recordemos que el movimiento Browniano también es conocido como proceso de Wiener, la razón es porque Norbert Wiener en el año 1923, fue quien demostró la existencia de un proceso que cumpliera las características del fenómeno físico "Movimiento Browniano".

Más formalmente el resultado del que estamos hablando es el siguiente:

***Teorema* 4.8** *: Sea W el proceso de Wiener. Sean $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3, \ldots$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, con esperanza cero y varianza $\sigma^2 < \infty$. Sea $S_n = \varsigma_1 + \ldots + \varsigma_n$ con $S_0 = 0$. Si*

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \; \text{ y } \; t \geq 0$$

entonces la sucesión X_n converge débilmente a W sobre el espacio de Skorohod.

La demostración de este resultado puede consultarse en la referencia [4].

4.3. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

El modelo fue propuesto por Uhlenbeck y Ornstein para modelar la velocidad del movimiento difuso de una partícula en periodos de tiempo pequeños.

***Definición* 4.9** *: Sean α y σ dos constantes positivas. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t$$

$$X_0 = x_0$$

La variable X_t representa la velocidad de una partícula al tiempo t. La fuerza de fricción está representada por la parte determista $-\alpha X_t$, mientras que σdB_t es un ruido aleatorio.

Por como está definido el proceso, se esperaría que al avanzar el tiempo el proceso sufriera un decaimiento debido al factor de fricción.

Cabe decir que existe una definición más general del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, pero para motivos de esta tesis, bastara estudiar el anterior definido.

***Proposición* 4.10** *: El proceso de Ornstein-Uhlenbeck cumple las condiciones del teorema de existencia y unicidad. (Teorema B.3, este es mencionado en el apéndice, sección ecuaciones diferenciables estocásticas)*

Prueba: En este caso $b(t,x) = -\alpha x$ y $\sigma(t,x) = \sigma$, así proponemos $K > 0$ como $K = \max\{\alpha^2, \sigma^2\}$

$$\begin{aligned}
\mid b(t,x) - b(t,y) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid^2 &= \mid -\alpha x + \alpha y \mid^2 + \mid \sigma - \sigma \mid^2 \\
&= \alpha^2 \mid x - y \mid^2 \leq K \mid x - y \mid^2
\end{aligned}$$

Acabamos de verificar la condición de Lipschitz para la variable x.

$$\begin{aligned}
\mid b(t,x) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) \mid^2 &= \mid -\alpha x \mid^2 + \mid \sigma \mid^2 \\
&= \alpha^2 \mid x \mid^2 + \sigma^2 \leq K \mid x \mid^2 + K = K(\mid x \mid^2 + 1)
\end{aligned}$$

Con esto último probamos la condición de crecimiento de x. Así se cumplen las condiciones de existencia y unicidad, la solución que nos garantiza el teorema es en el sentido fuerte. ∎

***Proposición* 4.11** *: La solución a la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t$$

$$X_0 = x_0$$

Esta dada por $X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s$

Prueba: Supongamos un proceso de la forma:

$$X_t = a(t) \left[x_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right]$$

en donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones diferenciables. Derivando y usando la fórmula de Itô tenemos:

$$\begin{aligned}
dX_t &= a'(t) \left[x_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right] dt + a(t)b(t)dB_t \\
&= \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t)dB_t
\end{aligned}$$

Comparando con la ecuación a la que queremos que sea solución, si pasara lo siguiente:

$$-\alpha = \frac{a(t)}{a'(t)} \qquad \text{y} \qquad \sigma = a(t)b(t)$$

Podríamos concluir que soluciona la ecuación diferencial estocástica. Por lo que bastaría proponer funciones $a(t)$ y $b(t)$ diferenciables que cumplan las igualdades anteriores.

Simplemente notemos que $a(t)$=exp$(-\alpha t)$ y $b(t)$=σexp(αt) cumplen lo deseado. ∎

***Proposición* 4.12 :** *Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck se cumple lo siguiente:*

a) $\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}$

b) $\text{Var}(X_t) = \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)$

c) $\text{Cov}(X_t, X_s) = \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}\right)$

Prueba:

a) Tomando esperanza a la solución tenemos:

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right] = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right] = x_0 e^{-\alpha t}$$

Esto último porque la integral es una martingala que inicia en cero. b)

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= Var\left(X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right) \\
&= \sigma^2 Var\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right) \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right)^2 \\
&= \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds \quad \text{esto último debido a la isometría de Itô} \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t} \left[\frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha s}\right|_0^t \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})
\end{aligned}$$

c) Sean s, t con $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) &= \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_s) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dB_u\right)\left(X_0 e^{-\alpha s} + \sigma \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} dB_u\right)\right] - X_0^2 e^{-\alpha(t+s)} \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dB_u \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} dB_u\right) \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\alpha u} dB_u \int_0^s e^{\alpha u} dB_u\right) \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s e^{\alpha u} dB_u + \int_s^t e^{\alpha u} dB_u\right)\left(\int_0^s e^{\alpha u} dB_u\right)\right] \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E}\left(\int_0^s e^{\alpha u} dB_u\right)^2 \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \int_0^s e^{2\alpha u} du \quad \text{esto último por isometría de Itô} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha(t-s)} + e^{-\alpha(t+s)}\right)
\end{aligned}$$

Concluimos la proposición. ∎

La razón por la que nos interesó el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es porque en la siguiente sección, mostraremos como una sucesión de cadenas de Ehrenfest tiene como límite un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

4.4. Convergencia de cadenas de Ehrenfest al proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

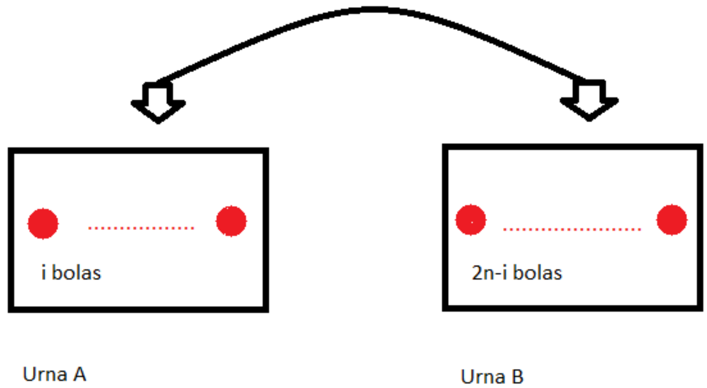
La idea en esta sección, como el título lo menciona, es a partir de una sucesión de cadenas de Ehrenfest, obtener en el limite el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Es importante mencionar, que la metodología que usaremos aquí, está contenida en el apéndice en la sección de Convergencia a Difusiones, así que es recomendable darle un vistazo para entender lo que se va hacer a continuación. En términos simples, lo que haremos será usar el Teorema C.1 del apéndice, el cual nos da condiciones suficientes, para que una sucesión de procesos converja débilmente a la solución de una ecuación diferencial estocástica.

Para cada n natural, empecemos por describir la cadena de Ehrenfest estandar, y después iremos haciendo las modificaciones necesarias, para que converja al proceso de Ornstein-Uhlenbeck:

Cadena de Ehrenfest

Aquí, el sistema físico es una caja llena de aire y se divide por la mitad por un plano con un pequeño agujero en él. Las particulas van cambiando de sección al pasar del tiempo. Nosotros modelaremos esto matemáticamente por 2 urnas que contienen un total de $2n$ bolas, lo que nosotros consideraremos como las moléculas de aire. En cada tiempo tomamos una bola de las $2n$ de manera aleatoria y la cambiamos de urna, lo que consideraríamos como una molécula de aire pasar por el agujero.



Así la cadena de Ehrenfest es el proceso $(W_m^n)_{m=1}^{\infty}$, donde W_m^n representa el número de bolas en la urna izquierda al tiempo m, notemos que el súper índice n solo hace referencia a que estamos trabajando con $2n$ bolas. También para simplificar las cosas vamos a suponer que W_0^n=n, es decir empezamos con n bolas en cada urna. Lo que haremos ahora, es modificar la cadena de Ehrenfest para así aproximarnos al proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

De esta manera, primero consideremos Z_m^n =$W_m^n - n$, es decir el número de bolas en el tiempo m en la urna izquierda menos n, $(Z_m^n)_{m=1}^{\infty}$ en esencia sigue siendo una cadena de Ehrenfest, solo bajamos el espacio de estados de $\{0, \ldots, 2n\}$ a $\{-n, \ldots, n\}$.

Ya modificamos los estados que toma el proceso, pero eso no va a ser suficiente, ahora modificaremos la longitud de los tiempos en que salta la cadena, así como el tamaño de sus saltos de la siguiente manera:

$$Y_{m/n}^{1/n} = Z_m^n/\sqrt{n}$$

Es decir en vez de ser 1 la unidad de tiempo ahora será $1/n$ y en vez de subir o bajar 1 ahora el proceso subirá o bajará $1/\sqrt{n}$. El espacio de estados queda $S_{1/n} = \{k/\sqrt{n} : -n \leq k \leq n\}$. Ahora pasaremos a calcular la correspondiente matriz de transición de probabilidades de este nuevo proceso.

Como definimos la cadena de Ehrenfest $(W_m^n)_{m=1}^{\infty}$ su matriz de transición está dada por:

$$P_{x,y} = \begin{cases} \dfrac{x}{2n} & y = x - 1 \\ \\ \dfrac{2n - x}{2n} & y = x + 1 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así el proceso $Y_{m/n}^{1/n}$=$Z_m^n/\sqrt{n}$ tiene la siguiente matriz de transición de probabilidades:

$$P_{x,y}^{1/n} = \begin{cases} \dfrac{n+x\sqrt{n}}{2n} & y = x - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \\ \dfrac{n-x\sqrt{n}}{2n} & y = x + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una vez hecha esta construcción, nos interesa la convergencia de la sucesión de procesos $(Y_{m/n}^{1/n})_{n=1}^{\infty}$.

Como se puede notar, construimos una sucesion de procesos discretos, pero nosotros queremos convergencia al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, el cual es un proceso continuo. Para arreglar esto, simplemente convertiremos cada proceso discreto en su version cadlag. Es decir:

$$X_t^{1/n} = Y_{[nt]/n}^{1/n}$$

***Teorema 4.13** : Se cumple la convergencia débil $X_t^{1/n} \Rightarrow X_t$ en $D[0,1]$ donde X_t es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con $\alpha = \sigma = 1$ y condición inicial $X(0) = 0$.*

Prueba: Para demostrar este resultado, como ya habíamos mencionado antes, usaremos el Teorema C.1 del apéndice. Así que iremos verificando que se cumplen cada una de las hipótesis requeridas.

(A) Primero que nada, empecemos diciendo que el problema de la Martingala que vamos a considerar en este caso es con $a(x) = 1$ y $b(x) = -x$. El cual está bien definido por que ya vimos que:

$$dX_t = -X_t dt + dB_t \quad \text{tiene solución única en distribución.}$$

(Ver la parte del apéndice del problema de la Martingala, Proposición D.1)

Una vez dicho esto pasemos a verificar (i),(ii),(iii) del Teorema C.1 del apéndice.

(iii)

Sea $\varepsilon > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $x \in S_{1/n}$. Así tenemos lo siguiente:

$$\Delta_\varepsilon^{1/n}(x) = K_{1/n}(x, B(x,\varepsilon)^c) = \frac{P^{1/n}(x, B(x,\varepsilon)^c)}{1/n} = nP^{1/n}(x, B(x,\varepsilon)^c) = \mathbb{P}\left(Y_{(m+1)/n}^{1/n} \in B(x,\varepsilon)^c / Y_{m/n}^{1/n} = x\right)$$

Conocemos la matriz de transición de probabilidades de este proceso, así que en un tiempo los únicas posibilidades que tienen probabilidad positiva es cuando se pasa a $x + 1/\sqrt{n}$ ó $x - 1/\sqrt{n}$, como $\varepsilon > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tenemos que $x + 1/\sqrt{n}, x - 1/\sqrt{n} \in B(x,\varepsilon)$. Así llegamos a que $\mathbb{P}\left(Y_{(m+1)/n}^{1/n} \in B(x,\varepsilon)^c / Y_{m/n}^{1/n} = x\right) = 0$

Con esto lo que notamos es que si $\varepsilon > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ entonces $\Delta_\varepsilon^{1/n}(x) = 0$ para todo $x \in S_{1/n}$

De esto último es claro que se cumple (iii) del teorema C.1, es decir para cualquier $\varepsilon > 0$ y R $< \infty$

$$\lim_{1/n \to 0} \sup_{|x| \leq R} \Delta_\varepsilon^{1/n}(x) = 0$$

(i), (ii)

Sea $x \in S_{1/n}$. Nos interesa ahora calcular $a^{1/n}(x)$, por la definición tenemos que:

$$a^{1/n}(x) = \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)(y-x)K_{1/n}(x,dy) = \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)^2 \frac{P_{x,y}^{1/n}}{1/n} = n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)^2 P_{x,y}^{1/n}$$

Desarrollando la integral:

$$n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)^2 P_{x,y}^{1/n} = n \left[\left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - x \right)^2 \frac{n + x\sqrt{n}}{2n} + \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - x \right)^2 \frac{n - x\sqrt{n}}{2n} \right] = 1$$

Pero también nos interesa calcular $b^{1/n}(x)$, por la definición tenemos que:

$$b^{1/n}(x) = \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)K_{1/n}(x,dy) = \int_{|y-x|\leq 1} (y-x) \frac{P_{x,y}^{1/n}}{1/n} = n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x) P_{x,y}^{1/n}$$

Desarrollando la integral:

$$n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x) P_{x,y}^{1/n} = n \left[\left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - x \right) \frac{n + x\sqrt{n}}{2n} + \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - x \right) \frac{n - x\sqrt{n}}{2n} \right] = -x$$

Por lo tanto si $x \in S_{1/n}$ entonces $a^{1/n}(x) = 1$ y $b^{1/n}(x) = -x$

Nuestros coeficientes en este caso para el problema de la Martingala son $a(x) = 1$ y $b(x) = -x$. Así que para cualquier R $< \infty$ se verifica (i), (ii) es decir:

$$\lim_{1/n \to 0} \sup_{|x|\leq R} | a^{1/n}(x) - a(x)| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{1/n \to 0} \sup_{|x|\leq R} | b^{1/n}(x) - b(x)| = 0$$

Lo único que falta para poder aplicar el Teorema C.1 que viene en la parte del apéndice de difusiones es:

$$\lim_{h \to 0} (X_0^h = x_h) = 0$$

Pero eso es obvio, ya que las cadenas las supusimos que empezaban en cero, pero podemos notar que esta condición puede ser manipulada, simplemente definiendo las cadenas de Ehrenfest de tal forma que este límite exista en la posición inicial.

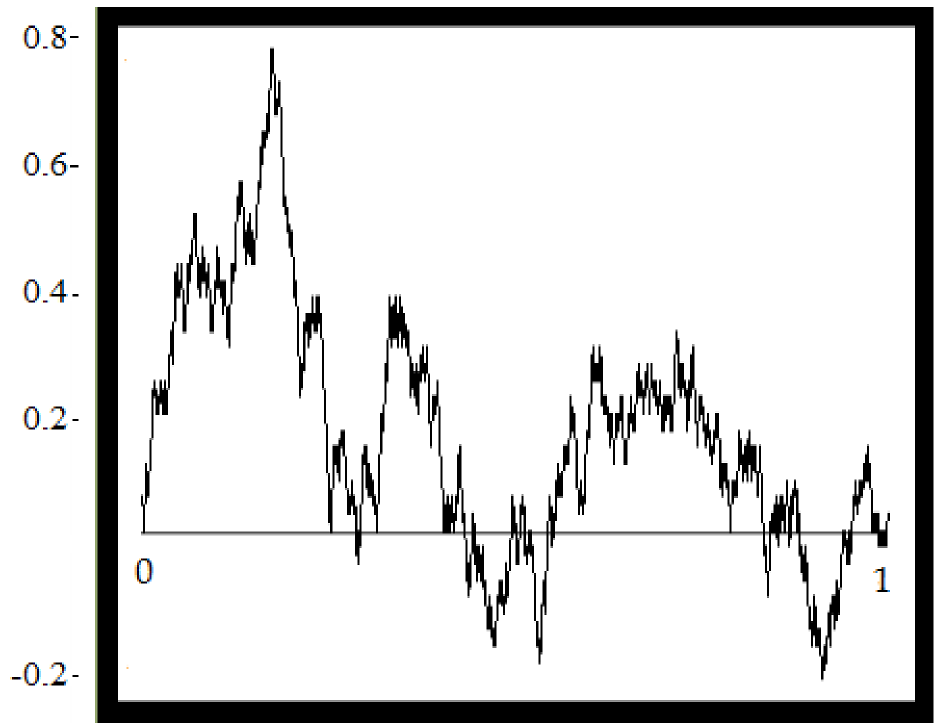
Así aplicando el teorema hemos mostrado que $X_t^{1/n}$ converge débilmente en D[0,1] a la solución del problema de la Martingala con $a(x) = 1$ y $b(x) = -x$ con $X_0 = 0$. Así por el Teorema D.3 del apéndice converge débilmente al proceso de Ornstein Uhlenbeck con $\alpha = \sigma = 1$ con condición inicial $X_0 = 0$. ∎

4.5. Simulación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Ya mostramos en la sección pasada que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con $\alpha = \sigma = 1$, es límite de cadenas de Ehrenfest, por lo que resulta razonable simularlo con el siguiente código en R.

Si corremos el código nos arrojara una trayectoria del siguiente estilo:

```
n<-1000
m<-1000
U<-runif(m)
X<-0
for(i in 2:m){
            aux<-tail(X,1)
            if(aux==-n/sqrt(n)){X<-c(X,(-n+1)/sqrt(n))}
            else if (aux==n/sqrt(n)){X<-c(X,(n-1)/sqrt(n))}
            else {X<-c(X,aux+(1/sqrt(n))-(2/sqrt(n))*(U[i]<((aux*sqrt(n)+n)/(2*n))))}
            }
plot(X,type="l")
```



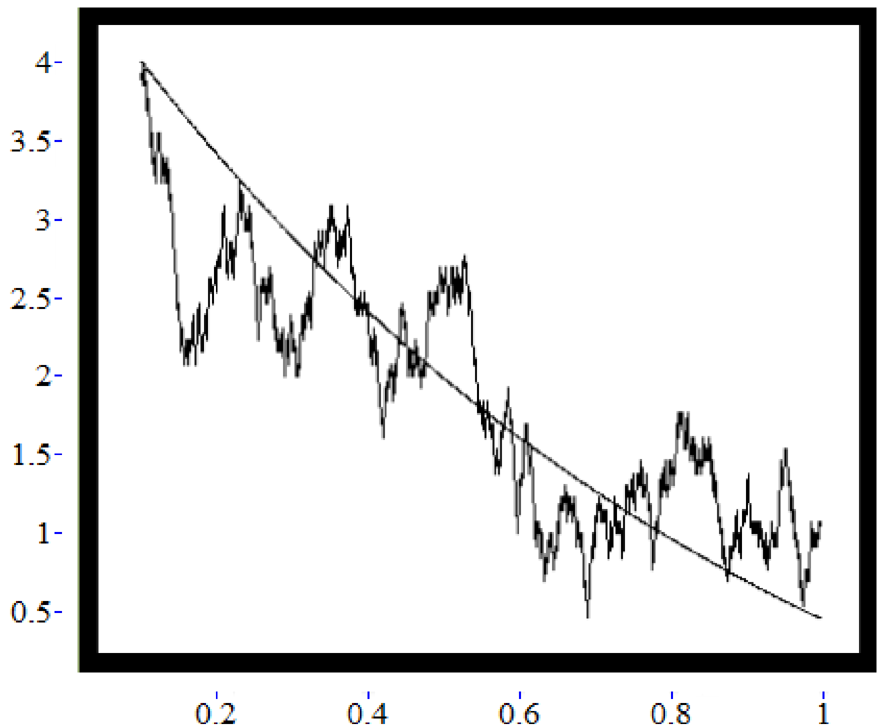
Simulación 1

Este es justo como el Teorema 4.13, ya que proponemos como condición inicial cero. Pero como notamos no es importante el punto donde se comience, siempre y cuando mantengamos la propiedad de que los puntos en la cadena de Ehrenfest tengan límite, hagamos otra simulación (ver Simulación 2) pero cambiando el punto de inicio a 4.

Podemos notar en ambas simulaciones, el proceso va oscilando alrededor de su media con el pasar del tiempo, a esta propiedad se le conoce como reversión en la media. Cabe decir que esta es una propiedad importante en finanzas, y por esta razon este proceso es utilizado para un modelo de reversión en la media.

Para dejar esto un poco más en claro digamos lo siguiente:

La tendencia de algunas variables financieras, como pueden ser las acciones, tiende a volver a sus valores medios en el largo plazo; cuando influye la suerte y ocurre un evento excepcional, se produce una modificación en la tendencia que tiende a regresar a la media cuando los hechos vuelven a ser normales, ya que bajan las probabilidades de que se repita el evento excepcional.



Simulación 2

La reversión a la media en bolsa es comun cuando sucede un evento excepcional, lo más normal es que el evento excepcional no vuelva a pasar y la cotización vuelva a sus niveles previos medios o reversión a la media. Estos cambios son propios de un mercado de oferta y demanda; hay valores que fluctúan de forma no comun como por ejemplo, cuando hay rumores de fusiones, son valores de moda o el mercado considera que algunos eventos afectarán a la cotización. Pero si no es un evento excepcional y lo que ocurre es un sensible cambio de los fundamentales de la empresa, la cotización seguirá una evolución en función de la nueva realidad.

En bolsa pueden suceder determinados eventos que separen los precios de los títulos de su valor fundamental y se alejen de su tendencia media, los seguidores de la teoría de la total aleatoriedad del mercado consideran que se dará el efecto péndulo y con el tiempo el precio volverá a su media. Como estamos en un mercado que se rige en la oferta y demanda y al mercado llegan muchas noticias (verdaderas o falsas), en momentos puntuales la cotización de una acción puede tener cambios bruscos y alejarse temporalmente de la media; pero no siempre es así por lo que tendremos que analizar los datos para ver si las divergencias son transitorias o pueden continuar alejadas de la media. Esta falsa analogía con la ciencia, al suponer que se producirá el efecto péndulo, nos llevará a creer que todas las empresas son buenas y solo son fluctuaciones del mercado que se corrigen a largo plazo; la realidad es que el largo plazo es mas razonable de lo que creemos y premia a las buenas empresas y castiga a las que no han creado ventajas competitivas.

No vamos a desarrollar el modelo, pues que el objetivo de esta observación solo es ejemplificar como podemos aplicar el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y que utilidad podemos tener al poder hacer simulaciones de este.

4.6. Convergencia a la difusión Wright-Fisher.

Ya vimos que podemos aproximarnos al proceso de Ornstein-Uhlenbeck a partir de cadenas de Ehrenfest, ahora desarrollaremos un segundo ejemplo donde una sucesión de cadenas de Markov a tiempo discreto, pueden aproximarse a un proceso continuo, en este caso a la difusión de Wright-Fisher.

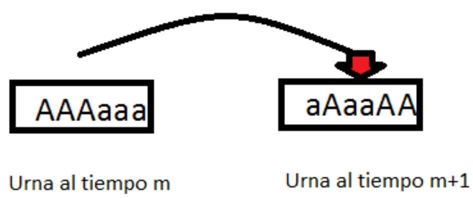
La forma en la que vamos a mostrar esto es de forma muy similar, al ejemplo anterior, usaremos la metodología que se encuentra en el apéndice en la sección de convergencia a difusiones, solo que esta vez nos apoyaremos en el Lema C.2 que nos dejara más fácilmente probar las condiciones (i), (ii), (iii) que necesita el Teorema C.1 para garantizar la convergencia.

Empecemos a desarrollar el ejemplo:

La motivación para este ejemplo proviene de la genética, pero sin problemas vamos a suponer que tenemos una urna con n letras las cuales pueden ser "A" o "a". (En genética cada letra representaría un tipo de gen). La urna al tiempo $m+1$ será construida a partir de la urna al tiempo m de la siguiente manera:

Para escoger la i-esima letra de la urna al tiempo $m+1$, se escogerá aleatoriamente una letra de la urna al tiempo m, aquí tendremos la opción de escoger lo que nos haya salido o ignorar el resultado y con probabilidad α/n escoger una "a" o con probabilidad β/n escoger una "A".

Ilustremos como podría ser una posible construcción de la urna al tiempo $m+1$.



En la elección de la primera letra se escogió una "a" de la urna al tiempo m y se escogió para colocar en la urna al tiempo $m+1$.

En la elección de la segunda letra se escogió una "A" de la urna al tiempo m y se escogió para colocar en la urna al tiempo $m+1$.

En la elección de la tercera letra se escogió una "A" de la urna al tiempo m se ignoro y se coloco una "a" en la urna al tiempo $m+1$. (Mutación)

En la elección de la cuarta letra se escogió una "a" de la urna al tiempo m se ignoro y se coloco una "a" en la urna al tiempo $m+1$. (Mutacion)

En la elección de la quinta letra se escogió una "a" de la urna al tiempo m se ignoro y se coloco una "A" en la urna al tiempo $m+1$. (Mutación)

En la elección de la sexta letra se escogió una "A" de la urna al tiempo m se ignoro y se coloco una "A" en la urna al tiempo $m+1$. (Mutación)

En genética los últimos eventos corresponden a las mutaciones. Sea Z_m^n el número de A's en la urna al tiempo m. Si j es el número de A's presentes en la urna al tiempo m es decir $Z_m^n = j$ entonces la probabilidad de que la selección de la i-esima letra para la urna al tiempo $m+1$ sea una A esta dada por:

$$p_n = \frac{j}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + \left(1 - \frac{j}{n}\right)\frac{\beta}{n}$$

Notemos ahora que si $Z_m^n = j$ entonces la distribución de Z_{m+1}^n es la misma que la de $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, donde $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \{0, 1\}$ son independientes idénticamente distribuidas con $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p_n$.
Así:

$\mathbb{E}(Z_{m+1}^n \mid Z_m^n = j) = np_n$

$\mathrm{Var}(Z_{m+1}^n \mid Z_m^n = j) = np_n(1 - p_n)$

Al proceso que tenemos se le hará una rescala en los saltos ahora en vez de subir o bajar 1 subirá o bajara $1/n$, de igual manera se cambiara la escala en el tiempo en vez de 1 será $1/n$ y finalmente se tomara una versión continua de este es decir:

Definimos $X_t^{1/n} = Y_{1/n[tn]}^{1/n}$ donde $Y_{m/n}^{1/n} = Z_m^n/n$. Para términos prácticos supondremos adicionalmente que $Z_0^n = 0$ para todo n natural.

Teorema 4.14 *: $X_t^{1/n}$ converge débilmente en Skorohod a la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$dX_t = (-\alpha X_t + \beta(1 - X_t))dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)}dB_t; \qquad X_0 = 0$$

Donde $X_t \in [0, 1]$, conocida como difusión de Wright-Fisher.

Prueba:

Mostraremos esto usando el Teorema C.1 del apéndice, así que vayamos viendo que se cumplen las condiciones.

(A) Lo primero que hay que identificar es cuál es el problema de la martingala $\mathrm{MP}(b, a)$ en cuestión y justificar porque está bien definido, en este caso el problema de la martingala que nos interesa es cuando $a(x) = x(1 - x)$ y $b(x) = -\alpha x + \beta(1 - x)$.

Para justificar esto, vamos a usar teoremas de existencia y unicidad contenidos en la parte del apéndice sección de ecuaciones diferenciales estocasticas y el problema de la Martingala.

Así empecemos mostrando que la difusión de Wright-Fisher tiene unicidad trayectorial, usemos el Teorema B.4. Para poder usar el Teorema B.4 necesitamos proponer las funciones k, ρ adecuadas.

Propongamos $k(x) = (\alpha + \beta)x$ y $\rho(x) = \sqrt{2x}$. Es claro que ρ es continua y estrictamente creciente, también que k es cóncava y estrictamente creciente con $k(0) = 0$ y $\rho(0) = 0$.

$$\mid b(x) - b(y) \mid = \mid -\alpha x + \beta(1 - x) - (-\alpha y + \beta(1 - y)) \mid = \mid (-\alpha - \beta)(x - y) \mid = (\alpha + \beta) \mid (x - y) \mid$$

Por lo tanto $\mid b(x)-b(y)\mid = k(\mid x-y\mid)$

Sea $\varepsilon>0$ calculemos $\displaystyle\int_0^{\varepsilon}\frac{du}{k(u)}=\int_0^{\varepsilon}\frac{du}{(\alpha+\beta)u}=\frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^{\varepsilon}\frac{du}{u}=\frac{1}{\alpha+\beta}\lim_{h\to 0^+}(\ln\varepsilon-\ln h)=\infty$

$$\text{Por otra parte } \int_0^{\varepsilon}\frac{du}{(\rho(u))^2}=\int_0^{\varepsilon}\frac{du}{2u}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}(\ln\varepsilon-\ln h)=\infty$$

$$(\sigma(x)-\sigma(y))^2=(\sqrt{x(1-x)})-\sqrt{y(1-y)})^2=x(1-x)-2\sqrt{xy(1-x)(1-y))}+y(1-y)$$

Supongamos ahora que $x\leq y$ entonces:

$$\begin{aligned}
x(1-x)-2\sqrt{xy(1-x)(1-y))}+y(1-y) &\leq y(1-x)-2\sqrt{x^2(1-y)^2}+y(1-x)\\
&= y(1-x)-2x(1-y)+y(1-x)\\
&= 2(y-x)=2\mid x-y\mid
\end{aligned}$$

Si $x>y$ es analogo.

$$\begin{aligned}
x(1-x)-2\sqrt{xy(1-x)(1-y))}+y(1-y) &\leq x(1-y)-2\sqrt{y^2(1-x)^2}+x(1-y)\\
&= x(1-y)-2y(1-x)+x(1-y)\\
&= 2(x-y)=2\mid x-y\mid
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mid\sigma(x)-\sigma(y)\mid\leq\rho(\mid x-y\mid)$.

Así hemos mostrado todas las condiciones del Teorema B.4 ,por lo tanto hemos exhibido unicidad trayectorial. Los coeficientes $b(x),\sigma(x)$ son continuos, además su dominio lo estamos tomando como [0,1] así que resultan acotadas. Así que por la Proposición D.2 de la sección del problema de la Martingala, resulta que M(b,a) tiene solución. Concluimos por el Teorema B.5 y la Proposición D.1, que el problema de la Martingala está bien definido. Aquí en vez de probar (i), (ii), (iii) del teorema del apéndice vamos a mostrar las condiciones (a), (b), (c) del Lema C.2 del apéndice el cual nos garantiza que estas son suficientes.

(a), (b) Sea $x=j/n$. Calculemos: $\hat{a}^{1/n}(x)$, $\hat{b}^{1/n}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}^{1/n}(x) = \int (y-x)(y-x)K_{1/n}(x,dy) &= \int (y-x)^2 \frac{P^{1/n}_{x,y}}{1/n} \\
&= n\int (y-x)^2 P^{1/n}_{x,y} \\
&= n\sum_{i=0}^{n} (i/n - j/n)^2 \mathbb{P}(Y^{1/n}_{(m+1)/n} = i/n \mid Y^{1/n}_{m/n} = j/n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} (i-j)^2 \mathbb{P}(Z^n_{m+1} = i \mid Z^n_m = j) \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}((Z^n_{m+1} - j)^2 \mid Z^n_m = j) \\
&= \frac{1}{n}[\mathbb{E}((Z^n_{m+1})^2 \mid Z^n_m = j) - 2j\mathbb{E}(Z^n_{m+1} \mid Z^n_m = j) + j^2] \\
&= \frac{1}{n}[np_n(1-p_n) + [np_n]^2 - 2jnp_n + j^2] \\
&= p_n - p_n^2 + np_n^2 - 2jp_n + \frac{j^2}{n}
\end{aligned}
$$

Aquí las cuentas nos van a quedar más largas así que las haremos aparte:

$p_n = x - \frac{\alpha x}{n} + \frac{\beta}{n} - \frac{x\beta}{n}$

$$
\begin{aligned}
-p_n^2 &= -[x(1-\tfrac{\alpha}{n})]^2 + 2x(1-\tfrac{\alpha}{n})(1-x)\tfrac{\beta}{n} - [(1-x)\tfrac{\beta}{n}]^2 \\
&= -x^2 + \tfrac{2\alpha x^2}{n} - \tfrac{\alpha^2 x^2}{n^2} - \tfrac{2x\beta}{n} + \tfrac{2x^2\beta}{n} + \tfrac{2x\alpha\beta}{n^2} - \tfrac{2x^2\alpha\beta}{n^2} - \tfrac{\beta^2}{n^2} + \tfrac{2x\beta^2}{n^2} - \tfrac{x^2\beta^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
np_n^2 &= n[x(1-\tfrac{\alpha}{n})]^2 + 2x(1-\tfrac{\alpha}{n})(1-x)\tfrac{\beta}{n} + [(1-x)\tfrac{\beta}{n}]^2 \\
&= nx^2 - 2\alpha x^2 + \tfrac{\alpha^2 x^2}{n} + 2x\beta - 2x^2\beta - \tfrac{2x\alpha\beta}{n} + \tfrac{2x^2\alpha\beta}{n} + \tfrac{\beta^2}{n} - \tfrac{2x\beta^2}{n} + \tfrac{x^2\beta^2}{n}
\end{aligned}
$$

$-2jp_n = -2nx(x - \frac{\alpha x}{n} + \frac{\beta}{n} - \frac{x\beta}{n}) = -2nx^2 + 2x^2\alpha - 2\beta x + 2x^2\beta$

$\frac{j^2}{n} = nx^2$

Sumando todo tenemos que:
$p_n - p_n^2 + np_n^2 - 2jp_n + \dfrac{j^2}{n} = x - x^2 + \Phi_n(x)$

Donde:

$\Phi_n(x) =$

$-\frac{\alpha x}{n} + \frac{\beta}{n} - \frac{x\beta}{n} + \frac{2\alpha x^2}{n} - \frac{2x\beta}{n} + \frac{2x^2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 x^2}{n} - \frac{2x\alpha\beta}{n} + \frac{2x^2\alpha\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n} - \frac{2x\beta^2}{n} + \frac{x^2\beta^2}{n} - \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{2x\alpha\beta}{n^2} - \frac{2x^2\alpha\beta}{n^2} - \frac{\beta^2}{n^2} + \frac{2x\beta^2}{n^2} - \frac{x^2\beta^2}{n^2}$

Así $\hat{a}^{1/n}(x) = x - x^2 + \Phi_n(x)$, recordemos que $a(x) = x(1-x)$

Concluimos que: $\lim\limits_{1/n\to 0} \sup\limits_{\|x\|\le R} |\, \hat{a}^{1/n}_{ij}(x) - a_{ij}(x)| = \lim\limits_{1/n\to 0} \sup\limits_{\|x\|\le R} |\, \Phi_n(x)| = 0 \ldots\ldots$ (a)

$$\begin{aligned}
\hat{b}^{1/n}(x) = \int (y-x) K_{1/n}(x,dy) &= \int (y-x)\frac{P^{1/n}_{x,y}}{1/n} = n\int (y-x)P^{1/n}_{x,y} \\
&= n\sum_{i=0}^{n}(i/n - j/n)\mathbb{P}(Y^{1/n}_{(m+1)/n} = i/n \mid Y^{1/n}_{m/n} = j/n) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(i-j)\mathbb{P}(Z^n_{m+1} = i \mid Z^n_m = j) \\
&= \mathbb{E}(Z^n_{m+1} - j \mid Z^n_m = j) = np_n - j = -\alpha x + (1-x)\beta
\end{aligned}$$

Así $\hat{b}^{1/n}(x) = -\alpha x + (1-x)\beta$, recordemos que $b(x) = -\alpha x + (1-x)\beta$

Concluimos que: $\lim\limits_{1/n\to 0} \sup\limits_{\|x\|\le R} |\, \hat{b}^{1/n}_i(x) - b_i(x)| = 0 \ldots\ldots$ (b)

Hasta aquí hemos probado que se cumplen las condiciones (a) y (b), pero nos hace falta la condición (c), de modo que verifiquemos que también se va a satisfacer con $p = 4$.

$$\begin{aligned}
\gamma^{1/n}_4(x) = \int (y-x)^4 K_{1/n}(x,dy) &= \int (y-x)^4\frac{P^{1/n}_{x,y}}{1/n} = n\int (y-x)^4 P^{1/n}_{x,y} \\
&= n\sum_{i=0}^{n}(i/n - j/n)^4\mathbb{P}(Y^{1/n}_{(m+1)/n} = i/n \mid Y^{1/n}_{m/n} = j/n) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n}(i-j)^4\mathbb{P}(Z^n_{m+1} = i \mid Z^n_m = j) \\
&= \frac{1}{n^3}\mathbb{E}((Z^n_{m+1} - j)^4 \mid Z^n_m = j) \\
&= \frac{1}{n^3}[\mathbb{E}((Z^n_{m+1})^4 \mid Z^n_m = j) - 4j\mathbb{E}((Z^n_{m+1})^3 \mid Z^n_m = j) \\
&+ 6j^2\mathbb{E}((Z^n_{m+1})^2 \mid Z^n_m = j) - 4j^3\mathbb{E}(Z^n_{m+1} \mid Z^n_m = j) + j^4] \ldots\ldots (*)
\end{aligned}$$

Ya habíamos notado que $Z^n_{m+1} \mid Z^m_0 = j$ tiene la misma distribución que $S_n \sim$ binomial (n, p_n). Recordemos además los primeros cuatro momentos de la binomial (n, p_n).

$\mathbb{E}(S_n) = np_n$

$\mathbb{E}(S_n^2) = n^2p_n^2 + np_n(1-p_n)$

$\mathbb{E}(S_n^3) = n(n-1)(n-2)p_n^3 + 3n(n-1)p_n^2 + np_n$

$\mathbb{E}(S_n^4) = n(n-1)(n-2)(n-3)p_n^4 + 6n(n-1)(n-2)p_n^3 + 7n(n-1)p_n^2 + np_n$

Así por (*) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\gamma_4^{1/n}(x) &= \frac{1}{n^3}[n(n-1)(n-2)(n-3)p_n^4 + 6n(n-1)(n-2)p_n^3 + 7n(n-1)p_n^2 + np_n \\
&- 4j[n(n-1)(n-2)p_n^3 + 3n(n-1)p_n^2 + np_n] + 6j^2[n^2p_n^2 + np_n(1-p_n)] - 4j^3[np_n] + j^4] \\
&= \frac{1}{n^3}[n(n-1)(n-2)(n-3)p_n^4 + n(n-1)(n-2)(6-4j)p_n^3 + n(n-1)(7-12j+6j^2)p_n^2 \\
&+ n(1-4j+6j^2-4j^3)p_n + j^4]
\end{aligned}$$

Hagamos las cuentas correspondientes:

$j = nx$

$p_n = x - \frac{\alpha x}{n} + \frac{\beta}{n} - \frac{x\beta}{n}$

$p_n^2 = x^2 - \frac{2\alpha x^2}{n} + \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{2x\beta}{n} - \frac{2x^2\beta}{n} - \frac{2x\alpha\beta}{n^2} + \frac{2x^2\alpha\beta}{n^2} + \frac{\beta^2}{n^2} - \frac{2x\beta^2}{n^2} + \frac{x^2\beta^2}{n^2}$

$$\begin{aligned}
p_n^3 &= x^3 - \frac{3\alpha x^3}{n} + \frac{3\alpha^2 x^3}{n^2} - \frac{x^3\alpha^3}{n^3} + \frac{3x^2\beta}{n} - \frac{6x^2\alpha\beta}{n^2} + \frac{3x^2\alpha^2\beta}{n^3} - \frac{3x^3\beta}{n} + \frac{6x^3\alpha\beta}{n^2} - \frac{3x^3\alpha^2\beta}{n^3} + \frac{3x\beta^2}{n^2} - \frac{6x^2\beta^2}{n^2} + \frac{3x^3\beta^2}{n^2} \\
&- \frac{3x\alpha\beta^2}{n^3} + \frac{6x^2\alpha\beta^2}{n^3} - \frac{3x^3\alpha\beta^2}{n^3} + \frac{\beta^3}{n^3} - \frac{3x\beta^3}{n^3} + \frac{3x^2\beta^3}{n^3} - \frac{x^3\beta^3}{n^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_n^4 &= x^4 - \frac{4\alpha x^4}{n} + \frac{6\alpha^2 x^4}{n^2} - \frac{4x^4\alpha^3}{n^3} + \frac{x^4\alpha^4}{n^4} + \frac{4x^3\beta}{n} - \frac{12x^3\alpha\beta}{n^2} + \frac{12x^3\alpha^2\beta}{n^3} - \frac{4x^3\alpha^3\beta}{n^4} - \frac{4x^4\beta}{n} + \frac{12x^4\alpha\beta}{n^2} - \frac{12x^4\alpha^2\beta}{n^3} \\
&+ \frac{4x^4\alpha^3\beta}{n^4} + \frac{6x^2\beta^2}{n^2} - \frac{12x^2\alpha\beta^2}{n^3} + \frac{6x^2\alpha^2\beta^2}{n^4} - \frac{12x^3\beta^2}{n^2} + \frac{24x^3\alpha\beta^2}{n^3} - \frac{12x^3\alpha^2\beta^2}{n^4} + \frac{6x^4\beta^2}{n^2} - \frac{12x^4\alpha\beta^2}{n^3} + \frac{6x^4\alpha^2\beta^2}{n^4} \\
&+ \frac{4x\beta^3}{n^3} - \frac{4x\alpha\beta^3}{n^4} - \frac{12x^2\beta^3}{n^3} + \frac{12x^2\alpha\beta^3}{n^4} + \frac{12x^3\beta^3}{n^3} - \frac{12x^3\alpha\beta^3}{n^4} - \frac{4x^4\beta^3}{n^3} + \frac{4x^4\alpha\beta^3}{n^4} + \frac{\beta^4}{n^4} - \frac{4x\beta^4}{n^4} + \frac{6x^2\beta^4}{n^4} \\
&- \frac{4x^3\beta^4}{n^4} + \frac{x^4\beta^4}{n^4}
\end{aligned}$$

Luego sustituyamos, va a quedar una ecuación muy grande pero no hay que espantarse, solo hay que agrupar de forma conveniente los términos que no se irían a cero y ver que se anulan:

$$
\begin{aligned}
\gamma_4^{1/n}(x) \;=\;& \Big[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}\Big]\Big[\tfrac{6\alpha^2x^4}{n^2} - \tfrac{4x^4\alpha^3}{n^3} + \tfrac{x^4\alpha^4}{n^4} - \tfrac{12x^3\alpha\beta}{n^2} + \tfrac{12x^3\alpha^2\beta}{n^3} - \tfrac{4x^3\alpha^3\beta}{n^4} + \tfrac{12x^4\alpha\beta}{n^2} \\
-& \tfrac{12x^4\alpha^2\beta}{n^3} + \tfrac{4x^4\alpha^3\beta}{n^4} + \tfrac{6x^2\beta^2}{n^2} - \tfrac{12x^2\alpha\beta^2}{n^3} + \tfrac{6x^2\alpha^2\beta^2}{n^4} - \tfrac{12x^3\beta^2}{n^2} + \tfrac{24x^3\alpha\beta^2}{n^3} - \tfrac{12x^3\alpha^2\beta^2}{n^4} + \tfrac{6x^4\beta^2}{n^2} \\
-& \tfrac{12x^4\alpha\beta^2}{n^3} + \tfrac{6x^4\alpha^2\beta^2}{n^4} + \tfrac{4x\beta^3}{n^3} - \tfrac{4x\alpha\beta^3}{n^4} - \tfrac{12x^2\beta^3}{n^3} + \tfrac{12x^2\alpha\beta^3}{n^4} + \tfrac{12x^3\beta^3}{n^3} - \tfrac{12x^3\alpha\beta^3}{n^4} - \tfrac{4x^4\beta^3}{n^3} + \tfrac{4x^4\alpha\beta^3}{n^4} \\
+& \tfrac{\beta^4}{n^4} - \tfrac{4x\beta^4}{n^4} + \tfrac{6x^2\beta^4}{n^4} - \tfrac{4x^3\beta^4}{n^4} + \tfrac{x^4\beta^4}{n^4}\Big] + \Big[\frac{11n-6}{n^2}\Big]\Big[x^4 - \tfrac{4\alpha x^4}{n} + \tfrac{4x^3\beta}{n} - \tfrac{4x^4\beta}{n}\Big] - 6\Big[-\tfrac{4\alpha x^4}{n} \\
+& \tfrac{4x^3\beta}{n} - \tfrac{4x^4\beta}{n}\Big] + \Big[\frac{n(n-1)(n-2)(6-4nx)}{n^3}\Big]\Big[\tfrac{3\alpha^2x^3}{n^2} - \tfrac{x^3\alpha^3}{n^3} - \tfrac{6x^2\alpha\beta}{n^2} + \tfrac{3x^2\alpha^2\beta}{n^3} + \tfrac{6x^3\alpha\beta}{n^2} \\
-& \tfrac{3x^3\alpha^2\beta}{n^3} + \tfrac{3x\beta^2}{n^2} - \tfrac{6x^2\beta^2}{n^2} + \tfrac{3x^3\beta^2}{n^2} - \tfrac{3x\alpha\beta^2}{n^3} + \tfrac{6x^2\alpha\beta^2}{n^3} - \tfrac{3x^3\alpha\beta^2}{n^3} + \tfrac{\beta^3}{n^3} - \tfrac{3x\beta^3}{n^3} + \tfrac{3x^2\beta^3}{n^3} - \tfrac{x^3\beta^3}{n^3}\Big] \\
+& \Big[\frac{6(n^2-3n+2)}{n^2}\Big]\Big[-\tfrac{3\alpha x^3}{n} + \tfrac{3x^2\beta}{n} - \tfrac{3x^3\beta}{n}\Big] + \Big[\frac{6x^3(2-3n)}{n^2}\Big] + \Big[\frac{-4x(2-3n)}{n}\Big]\Big[-\tfrac{3\alpha x^3}{n} + \tfrac{3x^2\beta}{n} \\
-& \tfrac{3x^3\beta}{n}\Big] - \tfrac{8x^4}{n} + \Big[\frac{(n-1)(7-12nx+6n^2x^2)}{n^2}\Big]\Big[\tfrac{\alpha^2x^2}{n^2} - \tfrac{2x\alpha\beta}{n^2} + \tfrac{2x^2\alpha\beta}{n^2} + \tfrac{\beta^2}{n^2} - \tfrac{2x\beta^2}{n^2} + \tfrac{x^2\beta^2}{n^2}\Big] \\
+& \Big[\frac{7(n-1)}{n^2}\Big]\Big[x^2 - \tfrac{2\alpha x^2}{n} + \tfrac{2x\beta}{n} - \tfrac{2x^2\beta}{n}\Big] - \Big[\frac{12x(n-1)}{n}\Big]\Big[-\tfrac{2\alpha x^2}{n} + \tfrac{2x\beta}{n} - \tfrac{2x^2\beta}{n}\Big] + \tfrac{12x^3}{n} \\
-& 6x^2\Big[-\tfrac{2\alpha x^2}{n} + \tfrac{2x\beta}{n} - \tfrac{2x^2\beta}{n}\Big] + \Big[\frac{1-4nx}{n^2}\Big]\Big[x - \tfrac{\alpha x}{n} + \tfrac{\beta}{n} - \tfrac{x\beta}{n}\Big] + 6x^2\Big[-\tfrac{\alpha x}{n} + \tfrac{\beta}{n} - \tfrac{x\beta}{n}\Big] - 6x^4 \\
+& nx^4 - 4\alpha x^4 + 4x^3\beta - 4x^4\beta + 6x^3 + 12x^4 - 4nx^4 + 12\alpha x^4 - 12x^3\beta + 12x^4\beta - 12x^3 - 6x^4 \\
+& 6nx^4 - 12\alpha x^4 + 12\beta x^3 - 12\beta x^4 + 6x^3 - 4nx^4 + 4\alpha x^4 - 4\beta x^3 + 4x^4\beta + nx^4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\|x\|\leq R} \gamma_4^{1/n}$=0, ya que si observamos la primera parte converge uniformemente a cero y los términos del final que son los que podrían no irse a cero se anulan entre sí.

Así hemos mostrado que se cumplen (a),(b),(c) del Lema del C.2 del apéndice de difusiones, asi se cumplen (i), (ii), (iii) del Teorema C.1

Recordemos que $Z_0^n = 0$, por lo que es evidente:

$$\lim_{h\to 0}(X_0^h = x_h) = 0$$

Así aplicando el Teorema C.1 hemos mostrado que X_t converge débilmente en D[0,1] a la solución del problema de la Martingala con $a(x) = x(1-x)$ y $b(x) = -\alpha x + \beta(1-x)$ con condición inicial $X_0 = 0$

Por la Proposición D.1 identificamos que la ecuación diferencial estocástica correspondiente a MP(b, a) es la difusión de Wright Fisher. ∎

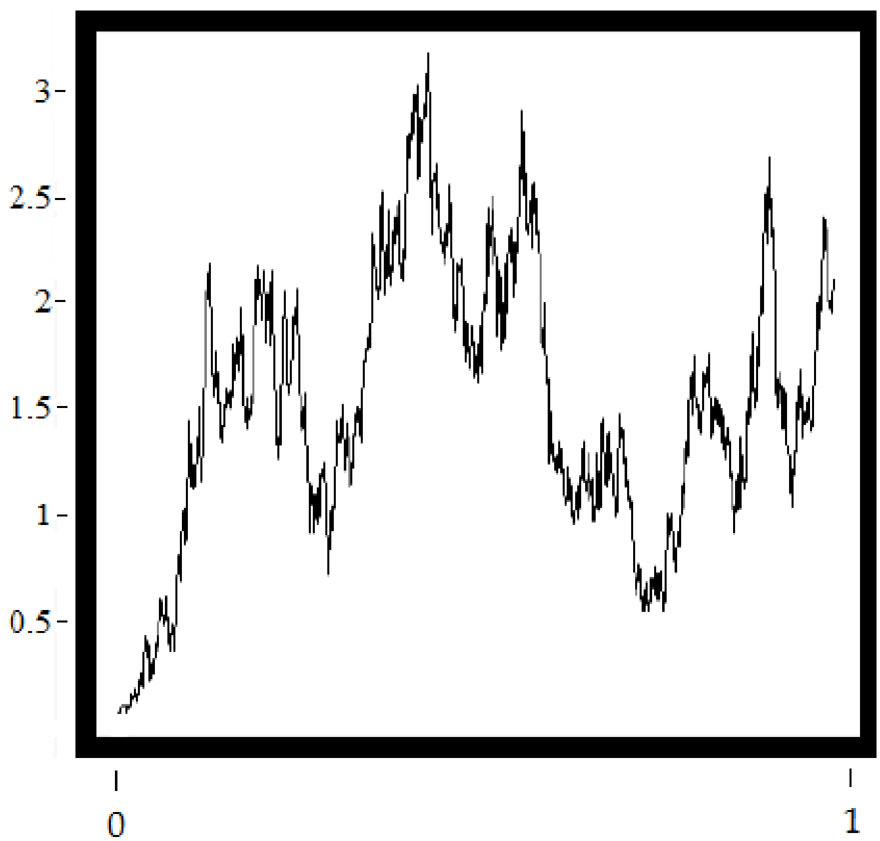
4.7. Simulación de la difusión de Wright-Fisher.

Ya mostramos en la sección pasada que la difusión de Wright-Fisher, es límite de cadenas de Markov, especificadas en la sección anterior, por lo que resulta razonable simularlo con el siguiente código en R.

```
n<-1000
m<-1000
X<-0
a<-.3
b<-.4

for(i in 2:m){
            aux<-tail(X,1)
            {X<-c(X,rbinom(1, 1000, (aux/n)*(1-(a/n))+ (1-(aux/n))*(b/n) ))}
            }
plot(X/n,type="l")
```

Si corremos el código nos arrojara una trayectoria del siguiente estilo:



Hay que decir que en esta simulación empezamos en el origen y usamos $\alpha = .3$ y $\beta = .4$, pero estos pueden ser fácilmente modificados en el código si se quiere otra simulación con diferentes parámetros.

Apéndice A

Definiciones preliminares.

En esta sección, se introducirán algunas definiciones, que se ocuparan a lo largo del desarrollo de la tesis. Puede que el lector ya este familiarizado con las siguientes definiciones, en ese caso puede omitir esta sección.

***Definición* A.1** *: Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Denotaremos al minimo de s y t de las siguientes maneras:*

$$\text{mín}\{s,t\} \textit{ o bien } s \wedge t.$$

***Definición* A.2** *: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Denotamos por $\Pi[a,b]$ al conjunto de particiones del intervalo $[a,b]$ donde $\Pi[a,b]=\{\pi \mid \pi=\{t_0,\ldots,t_m\}$ con $m = 1,2,\ldots$ y $t_0 = a < t_1 <\ldots< t_m = b\}$.*

***Definición* A.3** *: Sea π es una partición de $[a,b]$, donde $\pi = \{t_0,\ldots,t_m\}$ y $t_0 = a < t_1 <\ldots< t_m = b$. Definimos la norma de la partición como $\mid \pi \mid = \text{máx}\ \{t_{k+1} - t_k \mid k = 0,\ldots,m-1\}$.*

***Definición* A.4** *: Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz continua. Si existe $C>0$ tal que:*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq C \mid x - y \mid \textit{ para cualesquiera } x, y \in A.$$

***Definición* A.5** *: Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es α-Hölder. Si existe $C>0$ tal que:*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq C \mid x - y \mid^{\alpha} \textit{ para cualesquiera } x, y \in A.$$

Notemos que esta definición incluye a las Lipschitz continuas.

***Definición* A.6** *: Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es un homeomorfismo. Si f es continua, biyectiva y su inversa es continua.*

***Definición* A.7** *: Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es acotada. Si existe $M > 0$ tal que $\mid f(x) \mid < M$ para cualquier $x \in A$.*

***Definición* A.8** *: Sea función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$. Definimos los conjuntos:*

$$cont(f) = \{x \in A \mid f \textit{ es continua en } x\} \textit{ y } disc(f) = \{x \in A \mid f \textit{ es discontinua en } x\}.$$

***Definición* A.9** *: Una función f: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con Ω abierto es de clase C^1. Si todas sus derivadas parciales de primer orden existen y son continuas.*

***Definición* A.10** *: Sea X un conjunto. Definimos a la funcion indicadora como 1: $A \to \{0,1\}$ dada por:*

$$1(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A, \\ 0 & si\ X \notin A, \end{cases}$$

***Definición* A.11** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $x \in X$. Si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

***Definición* A.12** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

***Definición* A.13** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que X es Completo si toda sucesión convergente es de Cauchy.*

***Definición* A.14** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que X es Separable. Si existe $D \subseteq X$ denso numerable, es decir, todo abierto no vacio de X intersecta a D y la cardinalidad de D es a lo mas la de los naturales.*

***Definición* A.15** *: Un espacio normado que es completo con la métrica inducida por su norma se llama un espacio de Banach.*

***Definición* A.16** *: Definimos al espacio métrico $(B[a, b], d_{\infty})$, donde $B[a, b]$ es el conjunto de funciones acotadas, con dominio en $[a, b]$ de valores reales y d_{∞} es la métrica del supremo.*

***Definición* A.17** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que $A \subseteq X$ compacto, si toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.*

***Definición* A.18** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que $A \subseteq X$ es relativamente compacto, si su cerradura es compacto.*

***Definición* A.19** *: Sea (X, d) espacio métrico. Decimos que $A \subseteq X$ es totalmente acotado, si para toda $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que: $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \varepsilon)$.*

***Definición* A.20** *: Sea X un espacio topológico y $x \in X$ una base local en x, $\mathcal{B}(x)$ es un conjunto de abiertos que tienen al punto x que satiface: Dado cualquier abierto que tenga al punto x existe un elemento de $\mathcal{B}(x)$ que se queda contenido en él.*

***Definición* A.21** *: Un espacio topológico X es 1^{ro} númerable si todo punto $x \in X$ tiene una base local númerable.*

Apéndice B

Ecuaciones diferenciales estocásticas.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano unidimensional adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

***Definición* B.1** *: Sean $b(t, X_t)$ y $\sigma(t, X_t)$ dos funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Una ecuación estocástica es una ecuación de la forma:*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \ldots\ldots\ldots *$$

definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$ y con condición inicial la variable aleatoria X_0, que se presupone $\mathcal{F}_0$-medible e independiente del movimiento Browniano. La ecuación de arriba se interpreta como la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

en donde la primera es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso $(X_t)_{t\geq 0}$. Se le llama proceso de Itô.

Los elementos que se conocen en esta ecuación son los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ junto con la variable aleatoria inicial X_0. Lo que se desconoce es el proceso (X_t). A la función $b(t, x)$ se le conoce como coeficiente de tendencia (drift en inglés). A la función $\sigma(t, x)$ se le conoce como coeficiente de difusión. El proceso solución tiene la siguiente interpretación:

Es el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación (la tendencia), pero alterado por un ruido auditivo dado por la integral estocástica (la difusión).

Para que una ecuación estocástica tenga solución se le deben pedir ciertas condiciones a los coeficientes, así como en el caso de ecuaciones diferenciales deterministas, existen teoremas básicos que hablan de existencia y unicidad los cuales piden condiciones de regularidad sobre los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$, como por ejemplo el siguiente teorema.

***Definición* B.2** *Una ecuación diferencial estocástica tiene solución fuerte si tiene solución y esta es única en el sentido de la distinguibilidad o dicho de otra manera hay unicidad trayectorial.*

***Teorema* B.3** *: (Teorema de existencia y unicidad) Si los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ cumplen la propiedad del lipschitz en la variable x,*

$$\mid b(t,x) - b(t,y) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid^2 \leq K \mid x - y \mid^2$$

y la condición de crecimento en x,

$$\mid b(t,x) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) \mid^2 \leq K(1 + \mid x \mid^2)$$

Para alguna constante K > 0, entonces existe un proceso estocástico (X_t) solución de la ecuacion estocástica * que es adaptado a la filtración, tiene trayectorias continuas, es uniformemente acotado en $L^2(P)$, es decir, $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ y además hay unicidad trayectorial.

Para ver la demostración consultar referencia [8]

El teorema anterior nos da criterios para establecer existencia y unicidad de una ecuación estocástica, mas no nos dice una solución explicita, pero aun así resulta bastante útil.

***Teorema* B.4** *: Supongamos que existe una función ρ continua estrictamente creciente que satisface: $\mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid \leq \rho(\mid x - y \mid)$ donde $\rho(0) = 0$ y para toda $\varepsilon >$ 0*

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{du}{\rho^2(u)} = \infty$$

y que además hay una función k cóncava estrictamente creciente tal que $\mid b(x) - b(y) \mid \leq k(\mid x - y \mid)$ donde $k(0) = 0$ y para toda $\varepsilon >$ 0

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{du}{k(u)} = \infty$$

entonces existe unicidad en trayectoria.

Hay que decir que este teorema no nos garantiza existencia en las soluciones. La demostración de este resultado puede ser consultada en el referencia [10].

***Teorema* B.5** *: Si hay unicidad en trayectoria entonces hay unicidad en distribución. Este resultado puede consultarse en* [10].

La siguiente proposición es conocida como Isometría de Itô.

***Proposición* B.6** *Para un proceso X_s medible y adaptado tal que $\mathbb{P}\left(\int_0^t |X_s|^2 ds < \infty\right) = 1$ se cumple:*

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t X_s dB_s\right|^2 = \mathbb{E}\int_0^t |X_s|^2 ds.$$

La demostración puede consultarse en [12].

Apéndice C

Convergencia a difusiones.

En tiempo discreto la información básica es una sucesión de probabilidades de transición, $\pi_h(x, dy)$ para una cadena de Markov Y_{mh}^h, $m = 0, 1, 2, \ldots$ que toma valores en $S_h \subseteq \mathbb{R}^d$ es decir:

$$\mathbb{P}(Y_{(m+1)h}^h \in A / Y_{mh}^h = x) = \pi_h(x, A) \text{ para } x \in S_h,\ A \subseteq \mathbb{R}^d$$

En este caso nosotros definimos X_t^h=$Y_{h[t/h]}^h$, es decir hacemos X_t^h constante en el intervalo [mh,(m+1)h).

En el caso continuo la información básica es una sucesión de tasas de transición $Q_h(x, dy)$, para una cadena de Markov Y_t^h, $t \geq 0$ que toma valores en $S_h \subseteq \mathbb{R}^d$ es decir:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(X_t^h \in A / X_0^h = x) = Q_h(x, A) \text{ para } x \in S_h,\ A \subseteq \mathbb{R}^d, \text{ con } x \notin A$$

Observamos que, aunque se excluye $x \in A$ de la interpretación vamos a permitir $Q(x, \{x\}) > 0$, en cuyo caso los saltos de x a x (que son invisibles) ocurren con una tasa positiva. Para tener una cadena de Markov de buen comportamiento nosotros supondremos que:

(B) Para cualquier compacto K se cumple $\sup\limits_{x \in K} Q_h(x, \mathbb{R}^d) < \infty$

En palabras, nuestro teorema de convergencia establece que si la media infinitesimal y la covarianza de la cadena de Markov convergen a aquellos de una difusión para la cual el problema de la martingala este bien definido, y nosotros tenemos una condición para los saltos en el límite, entonces tenemos convergencia débil. Para poder precisar el resultado nosotros necesitaremos introducir alguna notación. Para ambos casos introduciremos el concepto de Kernel.

$$K_h(x, dy) = \begin{cases} \pi_h(x, dy)/h & \text{en tiempo discreto} \\ Q_h(x, dy) & \text{en tiempo continuo} \end{cases}$$

Y definimos:

$$a_{ij}^h(\mathrm{x}) = \int_{\|y-x\| \leq 1} (y_i - x_i)(y_j - x_j) K_h(x, dy)$$

$$b_i^h(x) = \int_{\|y-x\|\leq 1} (y_i - x_i) K_h(x, dy)$$

$$\Delta_\varepsilon^h(x) = K_h(x, B(x,\varepsilon)^c \text{ donde } B(x,\varepsilon) = \{y : \| y - x \| < \varepsilon\}$$

.

(A) a_{ij} y b_i son coeficientes continuos para el cual el problema de la Martingala está bien definido, es decir para cada x existe una única medida $\mathbb{P}_x$ en $(C, \mathcal{C})$ tal que las funciones coordenadas $X_t(\omega) = \omega(t)$ satisface $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ y

$$X_t^i - \int_0^t b_i(x_s)ds \text{ y } X_t^i X_j^t - \int_0^t a_{ij}(x_s)ds \text{ son martingalas locales.}$$

***Teorema* C.1** *: Supongamos que en tiempo continuo se satisface* (B) *y en ambos casos que* (A) *se cumple además para cada* $i, j \in \mathbb{N}$ *y* $R < \infty$, $\varepsilon > 0$

(i) $\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\leq R} | a_{ij}^h(x) - a_{ij}(x)| = 0$

(ii) $\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\leq R} | b_i^h(x) - b_i(x)| = 0$

(iii) $\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\leq R} \Delta_\varepsilon^h(x) = 0$

Si $X_0^h = x_h \to x$ *entonces tenemos que* $X_t^h \Rightarrow X_t$ *la solución del problema de la Martingala con* $X_0 = x$.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [10].

Observaciones: $(\Rightarrow)$ denota convergencia en $(\mathrm{D}[0,1], \mathbb{R}^d)$ pero el resultado puede trivialmente ser generalizado para obtener convergencia en $(\mathrm{D}[0,T], \mathbb{R}^d)$ para $T < \infty$.
En (i),(ii),(iii) el supremo solo se toma sobre los puntos $x \in S_h$.

Definamos ahora:

$$\hat{a}_i^h(x) = \int (y_i - x_i)(y_j - x_j) K_h(x, dy)$$

$$\hat{b}_i^h(x) = \int (y_i - x_i) K_h(x, dy)$$

$$\gamma_p^h(x) = \int \| (y - x) \|^p K_h(x, dy)$$

***Lema* C.2** *: Si* $p \geq 2$ *y para cualesquiera* $R, i, j < \infty$ *se cumple:*

(a) $\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\leq R} | \hat{a}_{ij}^h(x) - a_{ij}(x)| = 0$

(b) $\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\leq R} | \hat{b}_i^h(x) - b_i(x)| = 0$

(c)$\lim\limits_{h\to 0}\sup\limits_{\|x\|\le R}\gamma_p^h$ *=0*

Entonces se cumplen (i),(ii) y (iii) del Teorema C.1

Prueba: Empecemos por probar (ii)

$$\begin{aligned}
\left|\hat{b}_i^h(x)-b_i^h(x)\right| &= \left|\int (y_i-x_i)K_h(x,dy)-\int_{\|y-x\|\le 1}(y_i-x_i)K_h(x,dy)\right| \\
&= \left|\int_{\|y-x\|>1}(y_i-x_i)K_h(x,dy)\right| \\
&\le \int_{\|y-x\|>1} |\,(y_i-x_i)\,|\,K_h(x,dy) \\
&\le \int_{\|y-x\|>1} \|\,y-x\,\|^p\,K_h(x,dy) \\
&\le \gamma_p^h(x)
\end{aligned}$$

Ahora por la desigualdad del triangulo

$$|\,b_i^h(x)-b_i(x)|\le|\,b_i^h(x)-\hat{b}_i^h(x)|+|\,\hat{b}_i^h(x)-b_i(x)|$$

Tomando límites y supremos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\sup_{\|x\|\le R}|\,b_i^h(x)-b_i(x)| &\le \lim_{h\to 0}\sup_{\|x\|\le R}|\,b_i^h(x)-\hat{b}_i^h(x)|+\lim_{h\to 0}\sup_{\|x\|\le R}|\,\hat{b}_i^h(x)-b_i(x)| \\
&\le \lim_{h\to 0}\sup_{\|x\|\le R}\hat{\gamma}_p^h(x)=0
\end{aligned}$$

Lo cual demuestra (ii)

Pasemos a probar (i)

$$\begin{aligned}
|\,\hat{a}_{ij}^h(x)-a_{ij}^h(x)\,| &= \left|\int (y_i-x_i)(y_j-x_j)K_h(x,dy)-\int_{\|y-x\|\le 1}(y_i-x_i)(y_j-x_j)K_h(x,dy)\right| \\
&= \left|\int_{\|y-x\|>1}(y_i-x_i)(y_j-x_j)K_h(x,dy)\right| \\
&\le \int_{\|y-x\|>1} |\,(y_i-x_i)(y_j-x_j)\,|\,K_h(x,dy) \\
&\le \int_{\|y-x\|>1} \|\,y-x\,\|^2\,K_h(x,dy) \\
&\le \gamma_p^h(x)
\end{aligned}$$

Tomando limites y supremos

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} | a_{ij}^h(x) - a_{ij}(x)| &\le \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} | a_{ij}^h(x) - \hat{a}_{ij}^h(x)| + \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} | \hat{a}_{ij}^h(x) - a_{ij}(x)| \\
&\le \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} \gamma_p^h(x) = 0
\end{aligned}
$$

Lo cual demuestra (i)

Ya lo único que falta verificar es que en efecto se cumple (iii)

$$
\begin{aligned}
\gamma_p^h(x) &= \int \| (y-x) \|^p \, K_h(x,dy) \\
&\ge \int_{\|(y-x)\|\ge\varepsilon} \| (y-x) \|^p \, K_h(x,dy) \\
&\ge \varepsilon^p \int_{\|(y-x)\|\ge\varepsilon} K_h(x,dy) = \varepsilon^p K_h(x, B(x,\varepsilon)^c) = \varepsilon^p \Delta_\varepsilon^h(x)
\end{aligned}
$$

Despejando, sacando límites y supremos tenemos que:

$$
\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} \Delta_\varepsilon^h(x) \le \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} \hat{\gamma}_p^h(x)\varepsilon^{-p} \le \varepsilon^{-p} \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} \hat{\gamma}_p^h = 0
$$

lo cual prueba (iii) ∎

***Lema* C.3** *: Si para toda $R < \infty$ tenemos:*

(a)$\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} | \hat{a}_{ij}^h(x)|$=*0*

(b)$\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} | \hat{b}_i^h(x) - b_i(x)|$=*0*

Entonces se cumplen (i),(ii) y (iii) del Teorema C.1 con $a_{ij}(x)$=0

Prueba: Estamos asumiendo que $a_{ij}(x)$=0 por lo que (a) y (b) de este lema implican (a) y (b) del Lema C.2, solo faltaría ver que se cumple (c) del lema pasado para poder concluir, así tomemos $p = 2$.

$$
\sum_i \hat{a}_{ii}^h(x) = \sum_i \int (y_i - x_i)^2 K_h(x,dy) = \int \sum_i (y_i - x_i)^2 K_h(x,dy) = \int \| y - x \|^2 \, K_h(x,dy) = \gamma_2^h(x)
$$

$$
\text{Así tenemos} \qquad \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} \gamma_2^h(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|\le R} \sum_i \hat{a}_{ii}^h(x)
$$

Luego

$$
\sup_{\|x\|\le R} \sum_i \hat{a}_{ii}^h(x) = \sup_{\|x\|\le R} \sum_i | \hat{a}_{ii}^h(x) | = \sum_i \sup_{\|x\|\le R} | \hat{a}_{ii}^h(x) | = d(\sup_{\|x\|\le R} | \hat{a}_{ii}^h(x) |)
$$

sacando límites

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\|x\| \leq R} \sum_i \hat{a}_{ii}^h(x) = \lim_{h \to 0} d(\sup_{\|x\| \leq R} \mid \hat{a}_{ii}^h(x) \mid) = 0 \quad \text{Esto último por (a) de la hipotesis}$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\|x\| \leq R} \gamma_2^h(x) = 0$$

Así probamos (c) del Lema C.2 y eso concluye la prueba. ∎

Apéndice D

El problema de la Martingala.

En la sección de convergencia a difusiones establecimos la condición:

(A) a_{ij} y b_i son coeficientes continuos para el cual el problema de la martingala está bien definido es decir, para cada x existe una única medida $\mathbb{P}_x$ en $(C, \mathcal{C})$ tal que las funciones coordenadas $X_t(\omega) = \omega(t)$ satisface $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ y

$$X_t^i - \int_0^t b_i(x_s)ds \text{ y } X_t^i X_j^t - \int_0^t a_{ij}(x_s)ds \text{ son martingalas locales.}$$

Nosotros diremos simplemente que (X_t) es solucion al problema de la martingala para a_{ij} y b_i coeficientes continuos y lo denotaremos por (X_t) soluciona MP(b, a) si para cada i y j,

$$X_t^i - \int_0^t b_i(x_s)ds \text{ y } X_t^i X_j^t - \int_0^t a_{ij}(x_s)ds \text{ son martingalas locales.}$$

Observacion: Por comodidad nosotros asumiremos siempre que a_{ij} y b_i son coeficientes continuos, pero esta definición es más general.

A continuación establezcamos la relación que hay en encontrar soluciones para el problema de la martingala y soluciones de una ecuación diferencial estocástica.

***Proposición* D.1** *: Sea MP(b, a) el problema de la martingala, y σ localmente acotada tal que $a = \sigma\sigma^{\perp}$. Consideremos entonces SDE(b, σ) entonces:*

a) Existe una correspondencia 1-1 entre las distribuciones de las soluciones de SDE(b, σ) y las soluciones del problema de la martingala.

b) Hay unicidad en distribución para SDE (b, σ) si y solo si MP(b, a) tiene solución única.

Este resultado puede consultarse en [9].

***Proposición* D.2** *: Si $\sigma(x)$ y $b(x)$ son continuas y acotadas entonces existe solución para el problema de la Martingala MP(b, a).*

Este resultado puede consultarse en [9]

***Teorema* D.3** *: Sea* (X_t) *una solución para MP*(b,a) *tal que* $a = \sigma\sigma^{\perp}$. *Entonces existe un movimiento Browniano* B_t *posiblemente definido en una ampliación del original espacio de probabilidad tal que (X,B) resuelve SDE*(b,σ).

Este resultado puede consultarse en [9] y [10].

Bibliografía

[1] Tom Apostol, Análisis Matemático, Editorial Reverte, España, 1976.

[2] Baudoin Fabrice, Diffusion Processes and Stochastic calculus, European Mathematical Society, Germany, 2014.

[3] Peter K. Friz, Nicolas B. Victoir, Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications. Mathematics at TU-Berlin, 2009.

[4] Patrick Billingsley, Convergence of probability mesures, J. Wiley, New York, 1968.

[5] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz, Markov Processes: Characterization and Convergence, Wiley-Interscience, USA, 1986.

[6] Stephen Willard, General Topology, Addison-Wesley series in mathematics, USA, 1970.

[7] Ward Witt, Stochastic-Process Limits, Springer, USA, 2002.

[8] Luis Rincón. Introducción a los procesos estocásticos, Las prensas Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2012.

[9] Tudor Constantine, Procesos estocásticos, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 2, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

[10] Richard Durrett, Stochastic Calculus: A Practical Introduction, CRC press, New York, 1996.

[11] Norman B Hasser, Joseph P LaSalle, Joseph A Sullivan, Análisis matemático curso intermedio, Editorial Trillas, México, 2003.

[12] Bernt Oksendal, Stochastic Diferential Equations An Introduction with Applications, Springer, New York, 2000.