



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS DE
UN ROBOT BÍPEDO CON UN MODELO
PARAMETRIZADO CARRO MESA

TESIS

Que para obtener el título de
INGENIERA MECATRÓNICA

P R E S E N T A

MARÍA FERNANDA MERINO MORALES

DIRECTOR DE TESIS

EDMUNDO GABRIEL ROCHA CÓZATL



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Francisco Cuenca Jiménez

Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

Vocal: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

1^{er}. Suplente: M.I. Serafín Castañeda Cedeño

2^{do}. Suplente: M.I. Ana Marissa Juárez Mendoza

Lugar donde se realizó la tesis:
Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

FIRMA

Agradecimientos

A mis padres, María y Javier, que han pasado su vida dándonos la posibilidad de ser mejores a mi hermana y a mí; gracias por su dedicación y esfuerzo por darnos educación y siempre apoyarnos. A mi hermana, por ser mi amiga y mi jalón de orejas cuando lo necesito y estar ahí siempre, aunque sea para pelearnos.

A mis amigos: Gaby, Pablo, Daphne, Juan Carlos y Ulises. Porque con ustedes he pasado los momentos más divertidos de la carrera y me han soportado incluso cuando yo no puedo conmigo. Gracias por sus consejos y apoyo incondicional.

Al dr. Edmundo Rocha por darme la oportunidad de trabajar con él, por su tiempo, paciencia y esfuerzo para orientarme en este trabajo. Gracias por creerme capaz de cosas de las que no creí ser e impulsarme a realizarlas.

A mis sinodales; Ana Marissa, Francisco Cuenca, Paul Maya y Serafín Castañeda; por sus valiosos comentarios para que este trabajo fuera mejor.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) por el financiamiento otorgado para la realización del presente trabajo bajo el nombre “Planeación de trayectorias y control de marcha de un robot bípedo de 12 GDL”, clave IN113915.

Índice general

Lista de Figuras	VI
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Motivación	5
1.3. Objetivos	5
1.4. Estructura del trabajo	5
2. Preliminares	7
2.1. Locomoción Bípeda	7
2.2. Criterio de Estabilidad de la Marcha	11
2.2.1. Marcha estáticamente estable	11
2.2.2. Marcha dinámicamente estable	11
2.3. Cálculo del ZMP con la Dinámica Completa del Robot	15
2.4. Modelo Parametrizado Carro-Mesa	17
3. Descripción del Robot Bípedo Scout®	19
3.1. Arquitectura del Robot Scout	19
3.2. Interfaz gráfica	20
4. Planificación de Trayectorias para la Marcha Bípeda	23
5. Simulaciones e Implementación	26
5.1. Trayectoria I. Línea Recta	27
5.1.1. Posición del ZMP	27
5.1.2. Trayectorias de los pies	27
5.1.3. Trayectoria del Centro de Masa	28
5.1.4. Simulación del Ciclo de Marcha	31
5.1.5. Simulación del Modelo Multicuerpo	31
5.1.6. Implementación de la Trayectoria en el Robot Scout	36
5.2. Trayectoria II. Arco de Circunferencia	37
5.2.1. Posición del ZMP	37
5.2.2. Trayectorias de los pies	38

5.2.3.	Trayectoria del Centro de Masa	38
5.2.4.	Simulación del Ciclo de Marcha	41
5.2.5.	Simulación del Modelo Multicuerpo	42
5.2.6.	Implementación de la Trayectoria II (circular) en el Robot Scout	43
5.3.	Trayectoria III. Caminando Sobre un Plano Inclinado	45
5.3.1.	Trayectorias de los efectores finales	45
5.3.2.	Simulación del Ciclo de Marcha	46
5.3.3.	Implementación de la Trayectoria III en el Robot Scout	46
5.4.	Trayectoria IV. Subiendo un Escalón	48
5.4.1.	Trayectoria de los efectores finales	48
5.4.2.	Simulación del Ciclo de Marcha	48
5.4.3.	Implementación de la Trayectoria IV en el Robot Scout	49
6.	Conclusiones y Trabajo a Futuro	50
	Anexo	54

Lista de Figuras

1.1.	Robot WL-10R, 1983	2
1.2.	(a)Biped Planar, (b)Spring Flamingo, (c)Spring Turkey, (d)3D Biped	2
1.3.	Modelo Péndulo Invertido	4
1.4.	Modelo Nivel de Líquido en 3D	4
2.1.	Ciclo de Marcha, plano sagital	8
2.2.	Ciclo de Marcha (Dekker (2009))	9
2.3.	Típicas formas del polígono de soporte, en gris. (a) Soporte Doble (b)Soporte doble(Fase Pre-Balanceo) (c) Soporte Simple (Dekker (2009))	9
2.4.	Sistema de referencia para describir la marcha bípeda. En este caso, el plano sagital coincide con el medial. (Dekker (2009))	10
2.5.	Diferencia entre marcha estática y dinámicamente estables. Imagen tomada de: (Rioja (2014))	11
2.6.	Representación de las fuerzas actuando sobre el pie de un robot bípedo (M. Vukobratovic (2004))	12
2.7.	Esquema en 3D del robot y del punto P (Dekker (2009))	15
2.8.	Modelo carro-mesa (B. Siciliano (2008))	17
2.9.	Modelo parametrizado carro-mesa (M. Morisawa (2005))	18
3.1.	Modelo simplificado del robot bípedo Scout®(Narváez-Aroche (2010))	20
3.2.	Interfaz gráfica: Interacción directa con Scout®(López-García (2012))	21
3.3.	Interfaz gráfica: Manipulación del bípedo mediante patrones de caminata (López-García (2012))	22
5.1.	Arquitectura de la Planificación de trayectorias dinámicamente estables	26
5.2.	<i>a)</i> Posición deseada de los pies, <i>b)</i> ZMP_X de referencia, <i>c)</i> ZMP_Y de referencia para trayectoria en línea recta	27
5.3.	<i>a)</i> Trayectorias de avance de los pies en el eje Y . <i>b)</i> Trayectorias de avance de los pies en el eje Z para trayectoria en línea recta	28
5.4.	Trayectoria del centro de masa correspondiente al ZMP deseado en el plano frontal (eje Y). Trayectoria en línea recta	29
5.5.	Trayectoria del centro de masa correspondiente al ZMP deseado en el plano sagital (eje X). Trayectoria en línea recta	29

5.6. Trayectoria del centro de masa correspondiente al ZMP deseado en el plano transversal (plano Y-X). Trayectoria en línea recta	30
5.7. Trayectoria del centro de masa en 3D, para trayectoria en línea recta	30
5.8. Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ® para trayectoria en línea recta	31
5.9. ZMP resultante en X (magenta) considerando la dinámica total del robot y el ZMP en X deseado (azul) para trayectoria en línea recta	32
5.10. ZMP resultante en Y (magenta) considerando la dinámica total del robot y el ZMP en Y deseado (azul) para trayectoria en línea recta	32
5.11. ZMP resultante en YX (magenta) considerando la dinámica total del robot y el ZMP en YX deseado (azul) para trayectoria en línea recta	33
5.12. ZMP resultante en X (magenta) considerando la dinámica total del robot compensando el error y el ZMP en X deseado (azul) para trayectoria en línea recta .	34
5.13. ZMP resultante en Y (magenta) considerando la dinámica total del robot compensando el error y el ZMP en Y deseado (azul) para trayectoria en línea recta .	34
5.14. ZMP resultante en YX (magenta) considerando la dinámica total del robot compensando el error y el ZMP en YX deseado (azul) para trayectoria en línea recta	35
5.15. Implementación de la trayectoria en línea recta en el robot Scout®	36
5.16. Posición deseada de los pies y del ZMP de referencia durante la marcha en la trayectria circular	37
5.17. Trayectorias del avance de cada pie a) eje X, b) eje Y, c) eje Z, para la trayectria circular	38
5.18. Movimiento del centro de masa obtenido a partir del ZMP de referencia de la trayectoria circular	39
5.19. ZMP en el eje X de la trayectoria circular	40
5.20. ZMP en el eje Y de la trayectoria circular	40
5.21. Proyección del movimiento del centro de masa obtenido a partir del ZMP de referencia en el plano de la trayectoria circular	41
5.22. Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ® de la trayectoria circular . .	41
5.23. Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ® de la trayectoria circular, vista superior	42
5.24. ZMP y vs x obtenido con la simulación del modelo multicuerpo de la trayectoria circular	42
5.25. ZMP y vs x obtenido con la simulación del modelo multicuerpo con la compensación del error de la trayectoria circular	43
5.26. Funcionamiento del Prototipo Físico de la trayectria circular	44
5.27. Trayectoria del centro de masa. a) Vista Superior. b) Vista Frontal. c) Vista 3D. Trayectoria plano inclinado	46
5.28. a)Trayectorias de avance de los pies a) en el eje Y. b)Trayectorias de avance de los pies en el eje Z. La línea azul muestra el avance del pie derecho y la azul el del izquierdo. Trayectoria plano inclinado	46
5.29. Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ®. Trayectoria plano inclinado .	47

5.30. Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ®, vista lateral. Trayectoria plano inclinado	47
5.31. Robot Scout® subiendo una pendiente de 10°	47
5.32. a) Trayectorias de avance de los pies en el eje Y. b) Trayectorias de avance de los pies en el eje Z. La línea azul muestra el avance del pie derecho y la azul el del izquierdo. Trayectoria para subir un escalón	48
5.33. Trayectoria del centro de masa. a) Vista Superior. b) Vista Frontal. c) Vista 3D. Trayectoria para subir un escalón	48
5.34. Simulación del ciclo de marcha en Mathematica® del robot subiendo un escalón	49
5.35. Robot Scout® subiendo escalón, plano sagital	49
5.36. Robot Scout® subiendo escalón, plano frontal	49

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo de robots humanoides es uno de los campos de interés de la robótica en la actualidad. Desde el inicio de la robótica biológicamente inspirada, los investigadores exploran la posibilidad de que robots interactúen entre sí, desarrollen tareas en comunidad y que coexistan con los seres humanos.

A pesar del interés del hombre en la marcha bípeda desde la antigüedad, la investigación y desarrollo de máquinas que la reproduzcan es muy reciente y un gran reto por sí mismo. Sin embargo, también trae consigo ciertas ventajas como el desplazarse por terrenos irregulares y realizar tareas que otro tipo de locomoción no permite como subir y bajar escaleras.

Este trabajo retoma uno de los desafíos que la robótica bípeda presenta y es la generación de ciclos de marcha dinámicamente estables que permitan al robot tener la capacidad de caminar donde los humanos pueden. El cumplimiento de este objetivo ha llevado a la búsqueda de generar trayectorias que permitan el movimiento vertical de la cadera (centro de masa) del robot.

Se generarán trayectorias estables por medio del modelo parametrizado carro-mesa (hallado en la literatura), que permite la variación de la altura del centro de masa del robot y se implementarán en el robot comercial Scout [®].

1.1. Estado del arte

El camino recorrido para llegar a los resultados que se tienen hoy en día sobre la robótica bípeda se inició en Japón desde la década de los 70's. El equipo de robótica de la Universidad de Waseda desarrolló una gran variedad de robots bípedos y humanoides (C. Chevallereau (2009)); en la figura 1.1 se muestra WL-10R (WL: siglas en inglés que significan Waseda Legged), este robot fue un gran logro en 1983 ya que era capaz de caminar hacia adelante y atrás así como darse la vuelta.

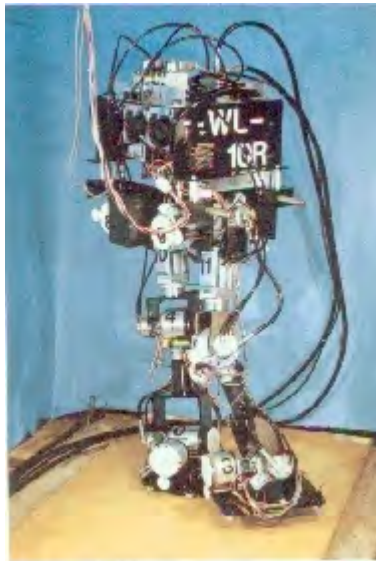


Figura 1.1: Robot WL-10R, 1983

El WL-10R fue el primer robot dinámicamente estable que utilizó el concepto de ZMP (M. Vukobratovic (2004)) (Zero Moment Point); introducido en 1973 por el equipo de Miodir Vukobratovic y es cual es un criterio de estabilidad de la marcha bípeda y será explicado a detalle en el Capítulo 2.

En la década de 1980 el MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts, por sus siglas en inglés) desarrolló robots que podían saltar. Algunos de los primeros robots bípedos capaces de caminar y correr de manera dinámicamente estable fueron Biped Planar, Spring Flamingo, Spring Turkey y 3D Biped (figura 1.2), desarrollados ahí.

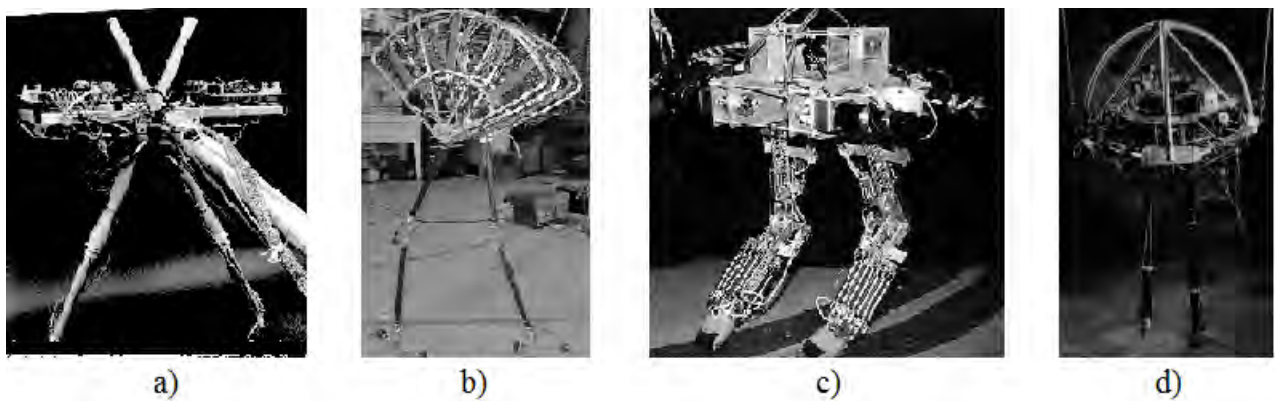


Figura 1.2: (a)Biped Planar, (b)Spring Flamingo, (c)Spring Turkey, (d)3D Biped

Generación de patrones de marcha bípeda

La generación de ciclos de marcha dinámicamente estables es un ámbito que requiere especial atención. El mayor problema acerca de la generación de estos ciclos para un robot humanoide de un número n de articulaciones es hallar las funciones que establecen la posición de cada una de éstas para que el robot pueda desplazarse. En la literatura se pueden encontrar dos enfoques diferentes para la generación de trayectorias para la marcha bípeda: libre del modelo (model-free) y el enfoque clásico o técnico, (Jiménez (2014))

La principal ventaja del enfoque libre del modelo es que, como su nombre lo indica, no es requisito conocer los parámetros físicos del robot y de su ambiente, ya que la forma de generar trayectorias por este método requiere de una exhaustiva sintonización empírica.

En el segundo enfoque se toman en cuenta todos los parámetros para obtener el modelo cinemático y dinámico del robot, la velocidad y aceleración en cada articulación del mismo, y las fuerzas entre el pie y el piso. Todo ello representa una gran carga computacional por lo que se han propuesto modelos simplificados para robots bípedos.

Una parte importante del estudio del planteamiento clásico son los modelos simplificados y los criterios de estabilidad, ya que la generación de patrones de marcha requiere de ciertas condiciones cinemáticas para asegurar el equilibrio. Estos criterios tienen diferente grado de complejidad según las fuerzas y momentos que son tomados en cuenta en los mismos.

Actualmente los principios de estabilidad son el criterio “Ground Projection of the Center of Mass” (Estabilidad Estática), el “Zero Moment Point” (ZMP), que es el criterio de estabilidad más utilizado en investigaciones sobre robótica bípeda; “Foot Rotation Indicator Point” (FRI) (Goswami (1999)) y “Strong and Weak Stability” (H. Hirukawa (2006)).

Los robots humanoides poseen cuerpos complejos con forma y distribución de masa irregular así que para resolver el problema de estabilidad de forma analítica, se obtienen modelos simplificados en concepto y en matemática que describan, de la forma más aproximada posible, la dinámica real del sistema.

Entre los modelos simplificados más comunes son el modelo carro-mesa (S. Kajita (2003)) y péndulo invertido, figura 1.3 (B. Siciliano (2008)), estos son conocidos como modelos de masa concentrada. Describen únicamente el centro de masa del robot (CoM) y con estos se puede llevar a cabo la generación de trayectorias en tiempo real. Otro modelo es el de “nivel de líquido” que describe el movimiento del CoM como el movimiento de líquido en un tanque (N. Chafroud (2013)) (figura 1.4)

Un modelo no tan popular es el modelo parametrizado carro-mesa propuesto por M. Morisawa (2005), que a diferencia del modelo carro-mesa, éste sí permite el movimiento vertical del centro

1.2. Motivación

El desarrollo de la robótica es uno de los campos de oportunidad en el avance tecnológico debido a que posee extensas aplicaciones. Una de ellas es el cuidado de adultos mayores y gente discapacitada, así como el realizar labores domésticas, es decir, robots de servicio para uso profesional y doméstico y el hecho que sean antropomórficos trae consigo la ventaja de que pueden ser bien aceptados por la sociedad humana y tener una buena interacción con ella.

Construir robots que replacen a los seres humanos en actividades peligrosas es una de las motivaciones del desarrollo de la robótica, así como tener máquinas que se muevan rápidamente para realizar labores de rescate y vigilancia. Estas tareas pueden ser llevadas a cabo eficientemente por un ser humano; sin embargo, puede arriesgar su vida en ello por lo que un reemplazo podría ser un humanoide, teniendo así gran campo de aplicación la robótica bípeda.

La comprensión y conocimiento profundo sobre la locomoción humana aplicado en un humanoide, es de gran utilidad para el desarrollo de prótesis médicas. Los robots también pueden ser utilizados para proporcionar asistencia funcional y reeducativa, para ayudar a fortalecer las extremidades debilitadas o ayudar con las sesiones de entrenamiento (C. Chevallereau (2009)).

En general, el estudio y la comprensión de la marcha bípeda trae consigo múltiples aplicaciones y avances, por lo que en este trabajo se busca ampliar la investigación y resultados obtenidos hasta el momento en el grupo de trabajo en el ámbito de planeación de trayectorias.

1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es generar trayectorias dinámicamente estables para un robot bípedo por medio del modelo simplificado parametrizado carro-mesa y con base en el criterio ZMP e implementar las trayectorias planeadas en el robot bípedo Scout.

1.4. Estructura del trabajo

El trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se define el criterio del ZMP y se presenta a detalle el modelo parametrizado carro-mesa, así como el modelo multicuerpo de un robot bípedo.

El Capítulo 3 muestra la descripción de la plataforma bípeda a la cual las trayectorias desarrolladas serán implementadas: el robot bípedo Scout®.

En el Capítulo 4 se presenta el planteamiento del algoritmo para la planeación de trayectorias.

Después, en el Capítulo 5 se desarrollan trayectorias dinámicamente estables con el método presentado en el Capítulo 4 y se muestran las simulaciones y la implementación de las mismas. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones y trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Locomoción Bípeda

La locomoción bípeda puede definirse como la alternación de los movimiento de los miembros pélvicos para producir un desplazamiento. Para describirla se requiere del conocimiento de términos específicos, los cuales serán definidos en esta sección.

Algunos términos clave sobre la locomoción bípeda tomados de (Dekker (2009)) son:

Soporte Doble:

Se caracteriza porque los dos pies se encuentran en contacto con el piso, aunque no es necesario que ambos pies estén completamente apoyados (ver figura 2.3), compartiendo el soporte del cuerpo.

Soporte Simple:

Este término es usado cuando el bípedo tiene sólo una superficie en contacto con el piso. Ocurre cuando el robot está soportado sólo con un pie.

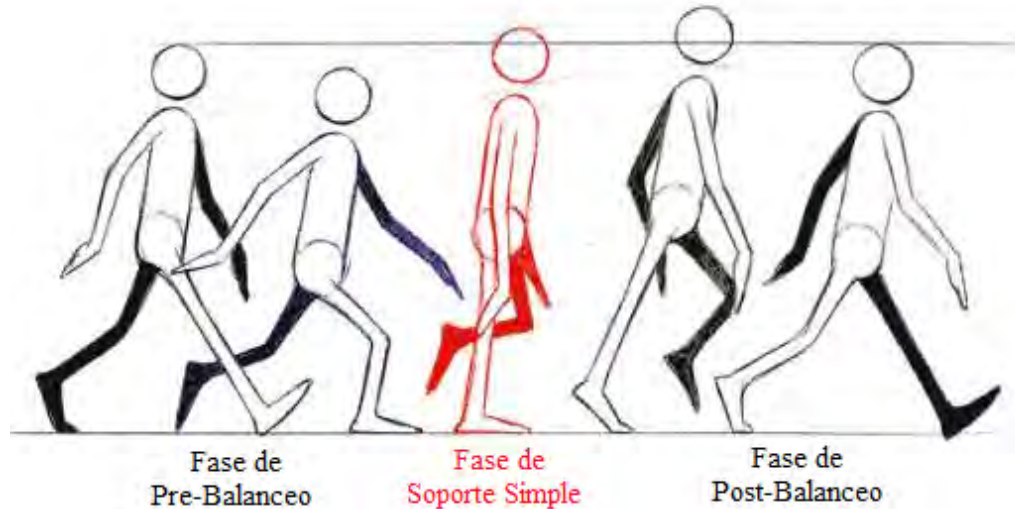


Figura 2.1: Ciclo de Marcha, plano sagital

Fases de la Marcha

Una marcha periódica se divide en cuatro fases (Dekker (2009)):

1. Fase de Soporte Doble: (Double Support Phase, DSP)

Fase donde ambos pies están completamente en contacto con el piso, ilustrada en la figura 2.3 (a).

2. Fase de Pre-balanceo: (Pre-Swing)

En esta fase, el talón del pie trasero se levanta, pero el bípido se encuentra todavía en soporte doble debido a que los dedos de este pie aún están en el suelo como se representa en la figura 2.3 (b).

3. Fase de Soporte Simple: (Single Support Phase, SSP)

Sólo un pie está en contacto con el piso y el otro pie se balancea hacia adelante como puede verse en la figura 2.3 (c).

4. Fase de Post-Balanceo: (Post-Swing)

En esta fase la punta del pie que balanceó se dirige hacia el suelo. El bípido se encuentra en apoyo doble, porque el talón de este pie está en contacto con el piso.

Estas cuatro fases las realiza cada pierna y la periodicidad de estos movimientos genera el ciclo de marcha que se observa en la figura 2.2, mientras que en la figura 2.1 se muestra la secuencia del ciclo de marcha en el plano sagital.

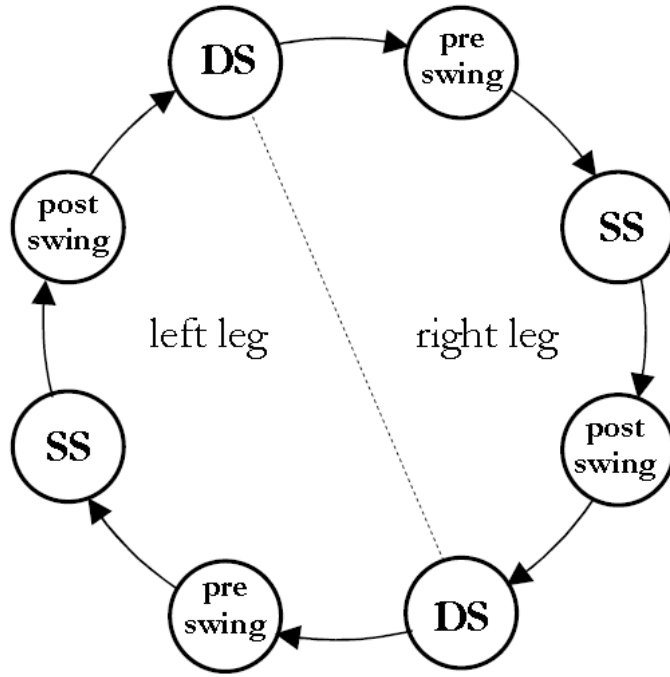


Figura 2.2: Ciclo de Marcha (Dekker (2009))

Polígono de Soporte:

Superficie delimitada por los márgenes externos del apoyo de uno o ambos pies en contacto con el suelo. Cuando el robot se encuentra en el periodo de balanceo o de soporte simple, el polígono de soporte se define por la silueta del pie en contacto con el suelo. Cuando el robot se encuentra en el periodo de soporte doble, el polígono de soporte se forma por los márgenes de ambos pies. Este término se explica en la figura (2.3).

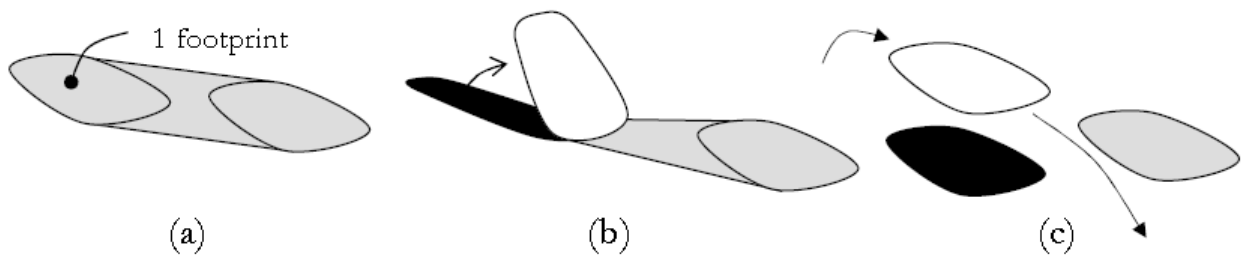


Figura 2.3: Típicas formas del polígono de soporte, en gris. (a) Soporte Doble (b) Soporte doble (Fase Pre-Balanceo) (c) Soporte Simple (Dekker (2009))

Sistema de Referencia:

El movimiento de un robot bípedo y su posicionamiento en el espacio tridimensional lleva consigo utilizar el marco de referencia mostrado en la figura 2.4, que también es usado para describir la marcha humana. Este consta de tres planos perpendiculares entre sí, dos verticales y uno horizontal, los cuales se definen:

Plano Frontal:

Es el plano paralelo al formado por los ejes XZ .

Plano Sagital:

El plano paralelo al plano formado por los ejes YZ es llamado sagital. El plano paralelo al sagital que pasa por el CoM es llamado *Plano Medial*.

Plano Transversal:

Es el plano paralelo al plano formado por los ejes XY .

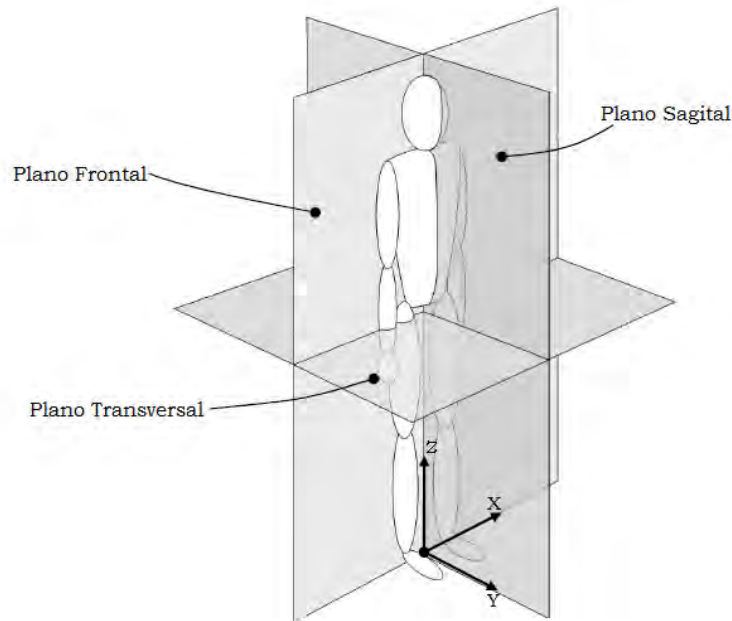


Figura 2.4: Sistema de referencia para describir la marcha bípeda. En este caso, el plano sagital coincide con el medial. (Dekker (2009))

2.2. Criterio de Estabilidad de la Marcha

Para diseñar el movimiento que las articulaciones deben tener (en línea o fuera de línea) y el diseño de controladores para un robot bípedo, existen algunos criterios para verificar que los movimientos y controladores diseñados aseguran la estabilidad del robot, es decir, que el bípedo no caiga o se vuelque durante la marcha.

Por lo tanto, la estabilidad en el sentido de la marcha bípeda puede ser definida como:

La marcha se dice estable si el único contacto entre el bípedo y el piso es el de las suelas del pie, es decir, ninguna otra extremidad del robot está en contacto con el suelo. (Dekker (2009))

Para asegurar la estabilidad de las trayectorias generadas, el criterio utilizado en este trabajo es el ZMP, con este criterio la marcha bípeda puede llevarse a cabo de dos formas diferentes: estáticamente y dinámicamente estable (Rioja (2014)).

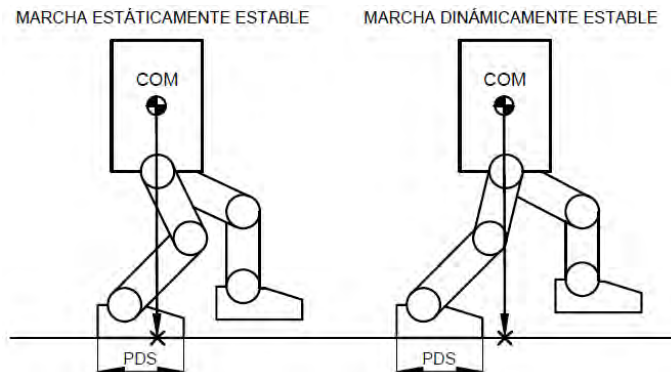


Figura 2.5: Diferencia entre marcha estática y dinámicamente estables. Imagen tomada de: (Rioja (2014))

2.2.1. Marcha estáticamente estable

La proyección del centro de masa en el suelo se mantiene siempre en el centro del polígono de soporte, así que se debe mover el CoM de robot sobre el siguiente pie de soporte antes de que el pie oscilante despeje del suelo. En este tipo de marcha se garantiza la estabilidad pero se limita la longitud del paso y la velocidad. Puesto que la marcha estáticamente estable se realiza a velocidades lentas, la inercia del robot no influye en el equilibrio, por lo que se desprecia la dinámica del mecanismo y solamente se toman en cuenta los efectos gravitatorios.

2.2.2. Marcha dinámicamente estable

En la marcha dinámicamente estable no se limita la proyección del CoM a permanecer dentro del polígono de soporte, solamente el ZMP debe permanecer dentro del polígono de soporte, lo

que incrementa la velocidad de la marcha puesto que la longitud de paso es mayor, el periodo de soporte doble menor, lo que ahorra tiempo.

En la figura 2.5 se muestra la diferencia entre la marcha estáticamente estable y la marcha dinámicamente estable por medio de la comparación de la proyección del CoM durante el periodo de soporte simple.

Noción de ZMP

Todas las articulaciones o juntas de un robot bípedo poseen actuadores, por lo que son directamente controladas; sin embargo, si se considera el contacto del pie con el piso como una junta, ésta no está directamente actuada.

La idea fundamental de este criterio es que toda el área del pie esté en contacto con el piso y no sólo un borde y debido a que el contacto del pie y el suelo no puede ser actuado directamente, M. Vukobratovic (1972) dio a conocer un indicador sobre el cumplimiento de esta condición; el punto de momento cero o ZMP (Zero Moment Point), punto donde la influencia de todas las fuerzas del piso actuando sobre el pie pueden ser reemplazadas por una resultante.

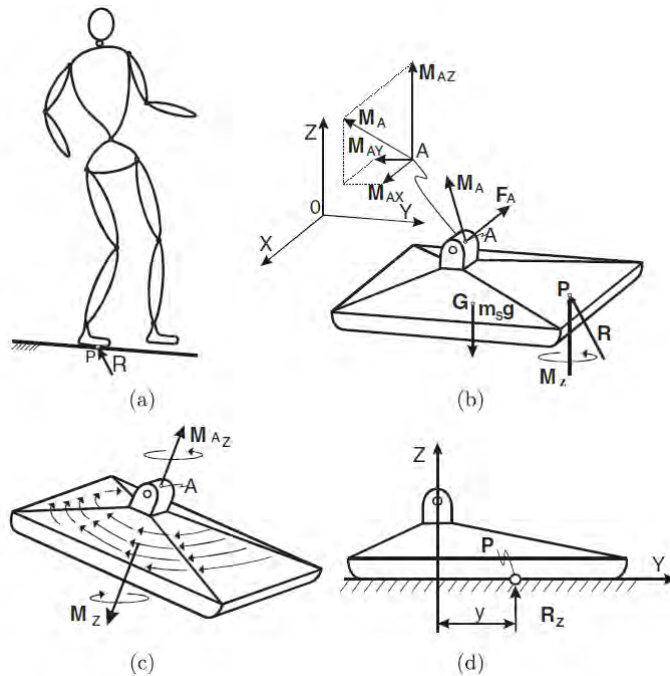


Figura 2.6: Representación de las fuerzas actuando sobre el pie de un robot bípedo (M. Vukobratovic (2004))

En las figuras 2.6(a) y 2.6(b) la letra A representa al punto donde el efecto de todas las fuerzas

interactuando con el mecanismo puede ser reemplazado por el de una sola fuerza. La parte del robot que se encuentra arriba del tobillo se omite, puesto que la fuerza F_A representa la fuerza cuyo efecto reemplaza el efecto de todas las fuerzas interactuando sobre el mecanismo y M_A el momento angular producido por ésta. El peso del pie se encuentra en su centro de gravedad (G) y R es la fuerza de reacción del contacto del piso con la planta del pie y actúa en el punto P (M. Vukobratovic (2004)).

La reacción total del piso sobre la planta del pie consta de la fuerza resultante R (R_x, R_y, R_z) y del momento M (M_x, M_y, M_z).

De la fuerza resultante R , las componentes horizontales R_x y R_y (representan la fuerza de fricción), son las que equilibran las componentes horizontales de la fuerza F_A . M_z representa el momento correspondiente a la fuerza de reacción normal y compensa la componente vertical del momento M_A , así como R_z compensa a la componente vertical de F_A y al peso del pie. Falta considerar el equilibrio de las componentes horizontales del momento debido a la carga del pie; sin embargo, ya que la dirección de la fuerza de reacción inducida por la acción del pie es siempre hacia arriba, las componentes horizontales de todos los momentos activos pueden ser compensados únicamente cambiando de posición la fuerza R dentro del polígono de soporte. Por lo tanto, para balancear la carga adicional, las componentes horizontales del momento M_A provocarán que se desplace la fuerza de reacción R a la posición correspondiente.

El incremento del momento en A será compensado cambiando la posición de la fuerza R dentro del polígono de soporte. Si el polígono de soporte no es lo suficientemente grande para albergar a R , R actuará en el borde del pie y la parte de las componentes horizontales que no puedan ser compensadas causarán que el mecanismo rote con respecto al borde del pie; por lo que para que el mecanismo esté en equilibrio dinámico en el punto P :

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \end{cases}$$

Finalmente, se reduce el efecto de la fuerza de reacción del piso, debida al reposo del pie en este, a una fuerza R y a un momento de componente vertical M_z . El punto P en el que la fuerza de reacción actúa es el ZMP.

La presión entre el pie del robot y el piso siempre puede reemplazarse por una fuerza resultante actuando en el centro de presión (Center of Pressure, CoP). Si esta fuerza resultante balancea todas las fuerzas activas sobre el mecanismo durante el movimiento (fuerzas de gravedad, inercia, centrífugas y momentos), el punto en el cual actúa es el ZMP; por lo tanto en el caso de marcha dinámicamente estable el CoP y ZMP coinciden, en el caso contrario el ZMP no existe dentro del polígono de soporte y la marcha no será estable. (M. Vukobratovic (2004))

Tomando en cuenta que la fuerza de reacción actúa en un determinado número N de puntos de contacto, del piso sobre la planta del pie, p_i ($i = 1, \dots, N$) y que cada vector de fuerza tiene

la siguiente forma: $f_i = [f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}]^T$, el ZMP puede ser calculado como:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^N p_i f_{iz}}{\sum_{i=1}^N f_{iz}} \quad (2.1)$$

Si nombramos a $\alpha_i = \frac{f_{iz}}{\sum_{i=1}^N f_{iz}}$, el punto p queda escrito de la siguiente manera:

$$p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i \quad (2.2)$$

Debido a que $f_{iz} \geq 0$ para $i = 1, \dots, N$ se determina que:

$$\begin{cases} \alpha_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Los puntos que satisfacen la ecuación (2.3) definen el polígono de soporte. Es decir, se está asegurando que el ZMP nunca salga del polígono de soporte debido a la restricción unilateral de la fuerza de reacción.

El momento angular resultante en el ZMP puede ser calculado como:

$$\tau = \sum_{i=1}^N (p_i - p) \times f_i$$

Que puede ser descompuesto en términos de vectores componentes como:

$$\tau_z = \sum_{i=1}^N (p_{ix} - p_x) f_{iy} - \sum_{i=1}^N (p_{iy} - p_y) f_{ix}$$

Debido a la definición de ZMP de la ecuación (2.1), si el piso es horizontal $p_{iz} = p_z$

$$\begin{cases} \tau_x = 0 \\ \tau_y = 0 \end{cases}$$

Por otra parte se debe considerar que la fuerza de fricción crea un momento vertical diferente de cero, por lo que:

$$\tau_z \neq 0$$

(B. Siciliano (2008))

2.3. Cálculo del ZMP con la Dinámica Completa del Robot

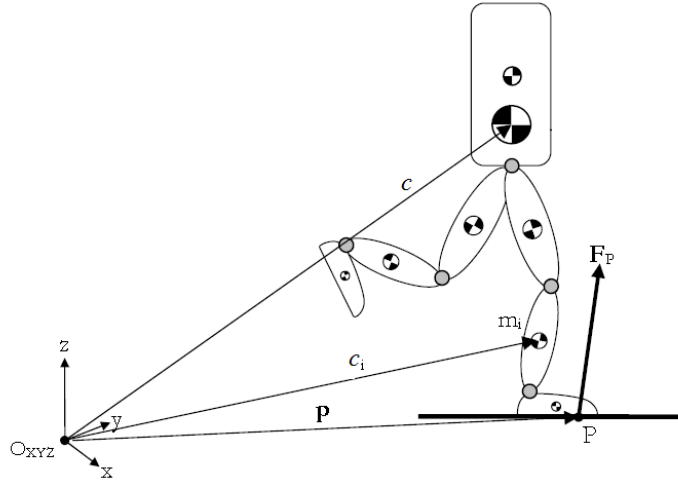


Figura 2.7: Esquema en 3D del robot y del punto P (Dekker (2009))

De acuerdo a Dekker (2009), el cálculo del ZMP (Punto P) considerando todos los eslabones del robot se realiza por medio de cinemática directa y existen varias suposiciones fuertes que deben ser tomadas en cuenta:

- El robot consiste de n eslabones rígidos.
- Se conoce toda la información cinemática.
- El piso es rígido y sin movimiento.
- Los pies no pueden deslizarse sobre la superficie del piso.
- Todas las articulaciones están actuadas.

Después de estas restricciones, lo primero que hay que calcular es la masa total (m_{tot}) del robot así como la posición de su centro de masa (c)

$$m_{tot} = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i c_i}{m_{tot}}$$

donde m_i y c_i son la masa y el CoM del eslabon i .

La cantidad de momentum lineal total está dado por:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{c}_i$$

El momentum angular total \mathcal{L} con respecto al origen se define como:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N [c_i \times (m_i \dot{c}_i) + R_i I_j R_i^T \omega_j] \quad (2.4)$$

donde R_j , I_j y ω_j son la matriz de rotación de 3×3 , el tensor de inercia y la velocidad angular del eslabón j , respectivamente. $R_j I_j R_j^T$ da como resultado el tensor de inercia con respecto al sistema de referencia global.

Con la acción de la fuerza externa \mathbf{F}_P y el momento \mathbf{M}_O , el cambio de la cantidad del momentum lineal y angular es descrito por la Ley de Newton-Euler de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_P = \dot{\mathcal{P}} - m_{tot} \mathbf{g} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathcal{L}} - c \times m_{tot} \mathbf{g} \quad (2.6)$$

Donde $\mathbf{g} = [0, 0, -g]^T$ es el vector de la aceleración de la gravedad.

Suponga que la fuerza \mathbf{F}_P actúa en el ZMP localizado en P .

$$\mathbf{M}_O = P \times \mathbf{F}_P + \boldsymbol{\tau}_{ZMP} \quad (2.7)$$

Y $\boldsymbol{\tau}_{ZMP}$ es el momento en el punto P , que como es el ZMP, las primeras dos componentes de este par son cero.

Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.6) en (2.7) se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau}_{ZMP} = \dot{\mathcal{L}} - c \times m_{tot} \mathbf{g} + (\dot{\mathcal{P}} - m_{tot} \mathbf{g}) \times P \quad (2.8)$$

la primer y segunda componente de (2.8) son:

$$\tau_{ZMP_x} = \dot{\mathcal{L}}_x + m_{tot} g y + \dot{\mathcal{P}}_y p_z - (\dot{\mathcal{P}}_z + m_{tot} g) p_y \quad (2.9)$$

$$\tau_{ZMP_y} = \dot{\mathcal{L}}_y + m_{tot} g x + \dot{\mathcal{P}}_x p_z + (\dot{\mathcal{P}}_z + m_{tot} g) p_x \quad (2.10)$$

donde:

$$\boldsymbol{\tau}_{ZMP} = [\tau_{ZMP_x}, \tau_{ZMP_y}, \tau_{ZMP_z}]^T$$

$$P = [P_x, P_y, P_z]^T$$

$$\mathcal{L} = [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z]^T$$

$$c = [x, y, z]^T$$

El punto P es calculado de (2.9) y (2.10) utilizando la definición: $\tau_{ZMP_x} = \tau_{ZMP_y} = 0$

$$p_x = \frac{m_{tot}gx + p_z\dot{\mathcal{P}}_x - \dot{\mathcal{L}}_y}{m_{tot}g + \dot{\mathcal{P}}_z}, \quad (2.11)$$

$$p_y = \frac{m_{tot}gy + p_z\dot{\mathcal{P}}_y + \dot{\mathcal{L}}_x}{m_{tot}g + \dot{\mathcal{P}}_z}, \quad (2.12)$$

donde p_z es la altura del piso con respecto al marco de referencia, (B. Siciliano (2008)).

2.4. Modelo Parametrizado Carro-Mesa

Para simplificar la dinámica de un robot bípedo en (S. Kajita (2003)) se ha propuesto el modelo carro-mesa el cual representa al bípedo por medio de un carro o esfera que se desplaza sobre la superficie horizontal de una mesa, figura 2.8. La masa del carro y su posición representan la masa y posición del CoM (considerado en la cadera del robot), respectivamente, del robot. La altura del CoM del robot permanece constante en este modelo, sin embargo, si la cadera pudiera moverse hacia arriba y hacia abajo, sería un movimiento más natural, por lo que en (M. Morisawa (2005)) se propone el modelo parametrizado carro-mesa en el cual el carro se desplaza sobre una mesa con una superficie paramétrica como la que se muestra en la figura 2.9.

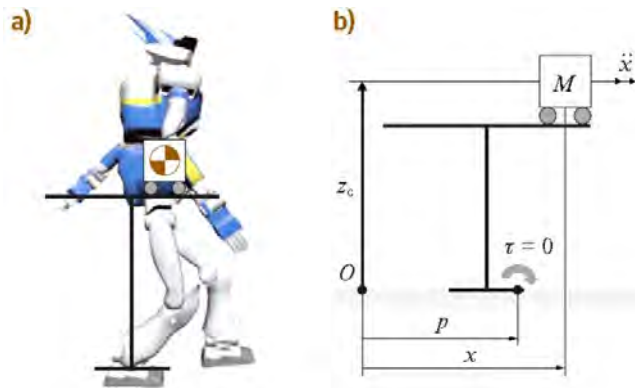


Figura 2.8: Modelo carro-mesa (B. Siciliano (2008))

La generación de trayectorias en el presente trabajo se basa en el modelo parametrizado carro-mesa debido a que las ventajas de éste son importantes, por ejemplo: poder variar la altura del CoM para ampliar o reducir, de la forma más conveniente, la longitud de paso; reducir el impacto de la planta del pie del robot contra el piso para evitar impactos que hagan que el robot pierda el equilibrio. Otra ventaja es que si se propone la superficie adecuada, se pueden generar patrones para que el robot pueda subir y bajar escaleras.

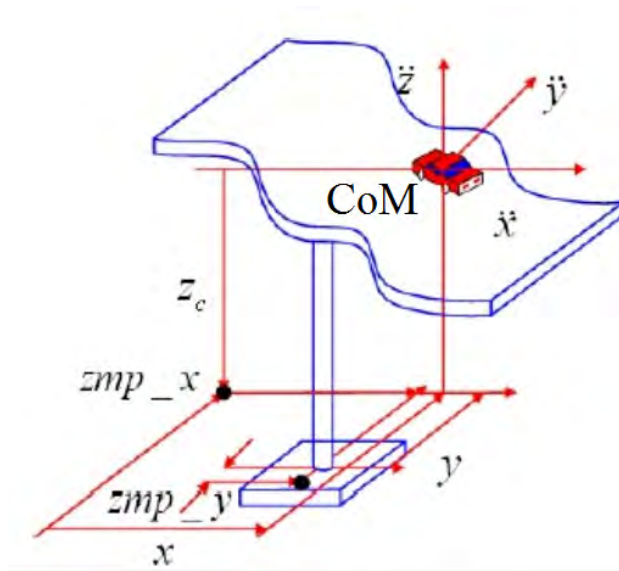


Figura 2.9: Modelo parametrizado carro-mesa (M. Morisawa (2005))

Para definir las ecuaciones que describen este modelo, se calcula el ZMP a partir del modelo tridimensional del robot, con las ecuaciones 2.11 y 2.12, pero al utilizar una dinámica simplificada, se considera que el único eslabón es la cadera.

El momentum angular del CoM sobre el origen está dado por:

$$\mathcal{L} = [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z]^T$$

La trayectoria del CoM es definida como:

$$c = [x_G, y_G, z_G]^T$$

La posición del ZMP puede ser calculada como:

$$p_x = \frac{M(x_G(\ddot{z}_G+g)) - z_G\ddot{x}_G - \dot{\mathcal{L}}_x}{M(g+\ddot{z}_G)} \quad (2.13)$$

$$p_y = \frac{M(y_G(\ddot{z}_G+g)) - z_G\ddot{y}_G + \dot{\mathcal{L}}_y}{M(g+\ddot{z}_G)}$$

En (M. Morisawa (2005)) se supone que la influencia del momentum angular durante la marcha es despreciable por lo que el ZMP podría calcularse como:

$$p_x = x_G - \frac{z_G\ddot{x}_G}{\ddot{z}_G+g} \quad (2.14)$$

$$p_y = y_G - \frac{z_G\ddot{y}_G}{\ddot{z}_G+g}$$

Capítulo 3

Descripción del Robot Bípedo Scout®

3.1. Arquitectura del Robot Scout

El robot bípedo Scout® es un robot comercial desarrollado por Lynxmotion el cual está constituido por seis eslabones en cada pierna y, éstas están unidas entre sí mediante un eslabón central. Sus trece eslabones se conectan en serie a través de juntas rotacionales actuadas por servomotores.

En la Figura 3.1 se muestra el modelo simplificado del robot que fue utilizado por Narváez-Aroche (2010) para obtener el modelo cinemático y dinámico del bípedo, y para reconocer cada eslabón se establece la siguiente nomenclatura:

El eslabón central se identifica con la letra B , y a los eslabones de las piernas con la etiqueta ni , donde $n = 1, \dots, 6$ identifica los eslabones de arriba hacia abajo (comienza en 1 y termina en 6), e i se emplea para identificar la pierna ($i = 1$ para la pierna izquierda e $i = 2$ para la pierna derecha). El movimiento rotacional de cada juntas se identifica por medio de la etiqueta θ_{ni} , donde ni corresponde al eslabón sujeto a su eje y la de su barra correspondiente en el modelo simplificado.

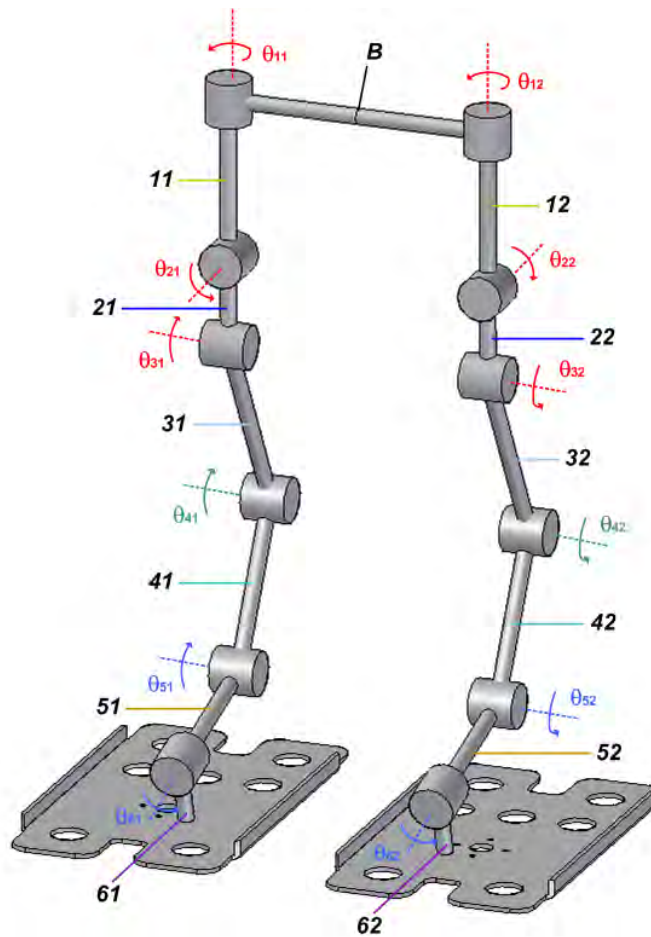


Figura 3.1: Modelo simplificado del robot bípido Scout®(Narváez-Aroche (2010))

La cinemática y dinámica del robot Scout® fue desarrollada en (Narváez-Aroche (2010)) y se tiene la programación de la primera en el software Mathematica®.

3.2. Interfaz gráfica

Como parte del trabajo realizado por (López-García (2012)) se encuentra el desarrollo de una interfaz gráfica que facilite la manipulación del robot.

Esta interfaz fue programada en *LabVIEW* y tiene las siguientes funciones:

- *Interacción directa con Scout®* (Figura 3.2)

Las juntas rotacionales del bípido pueden ser manipuladas de manera directa. Cuenta con un arreglo de doce controles numéricos, cada uno vinculado con la posición angular del servomotor que mueve al eslabón n_i . La posición de los servomotores se puede modificar introduciendo el ángulo deseado en grados o deslizando el cursor sobre las barras.

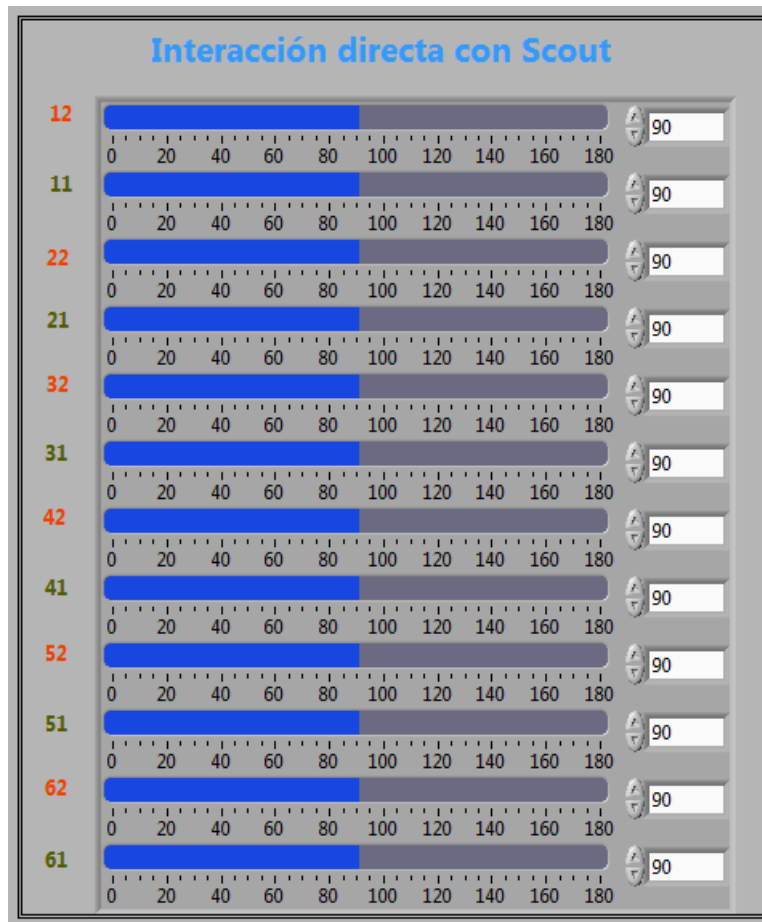


Figura 3.2: Interfaz gráfica: Interacción directa con Scout®(López-García (2012))

- *Manipulación del bípido mediante patrones de caminata*(Figura 3.3)

Por medio de esta función se le envían al robot las trayectorias generadas desde Mathematica® resolviendo la cinemática del mismo. Se selecciona la ruta y nombre del archivo que contiene los datos de cada una de las trayectorias a seguir por los servomotores.

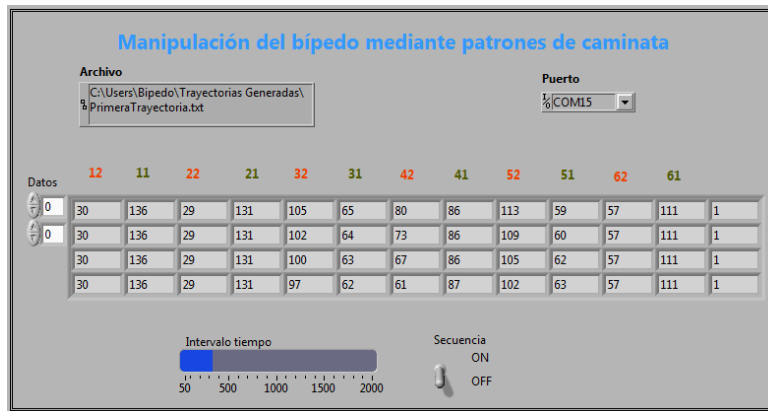


Figura 3.3: Interfaz gráfica: Manipulación del bípido mediante patrones de caminata (López-García (2012))

Uno de los objetivos de la presente tesis es implementar las caminatas propuestas y para ello es necesario el conocimiento del funcionamiento del robot. En este capítulo se presentaron las herramientas básicas para ponerlo en marcha, las cuales son el modelo cinemático del robot Scout ®, por medio del cual se obtienen las posiciones angulares de las juntas rotacionales y el envío de éstas se realiza mediante la interfaz desarrollada en *LabVIEW*.

Capítulo 4

Planificación de Trayectorias para la Marcha Bípeda

La trayectoria que sigue el efector final de un robot, es la secuencia de puntos que lo llevan de un punto inicial a uno final.

El control de movimiento de un robot bípedo se puede dividir en dos partes: la planificación de su movimiento y el seguimiento de mismo. La planificación se centra en la generación de trayectorias y el seguimiento se ocupa de alcanzar la referencia creada en la planificación.

El alcance de esta tesis sólo llega a la planificación de las trayectorias para que el robot bípedo Scout realice una marcha dinámicamente estable.

El algoritmo para generar trayectorias dinámicamente estables se define de la siguiente manera:

Se propone que el robot vaya en cierta dirección o siga una trayectoria predeterminada y por medio de la posición que deben tener los pies en cada instante de tiempo para lograr que el robot la siga, se determina la posición del ZMP objetivo o de referencia. Con base en el modelo de la dinámica del robot (en este caso se representa el modelo dinámico del robot con el modelo parametrizado carro-mesa) y en la posición del ZMP, se determina la trayectoria del centro de masa del robot.

A continuación, se revisa el procedimiento empleado para la generación de la trayectoria del centro de masa del robot, el cual está basado en (M. Morisawa (2005))

Del sistema de ecuaciones (2.14) se observa que se tienen tres variables traslacionales. Ya que el movimiento del CoM no puede ser especificado arbitrariamente, se expresará este movimiento como la superficie paramétrica:

$$\begin{aligned}x_G &= f_x(u(t), v(t)) \\y_G &= f_y(u(t), v(t)) \\z_G &= f_z(u(t), v(t))\end{aligned}\tag{4.1}$$

Donde f_x, f_y y f_z son funciones que caracterizan la forma de la superficie. $u(t)$ y $v(t)$ son parámetros que dependen del tiempo. Si se sustituye x_G y y_G de la ecuación (4.1) en el sistema de ecuaciones (2.14), se tiene que:

$$\begin{aligned}p_x &= f_x - \frac{f_z(f_{xu}\ddot{u} + f_{xv}\ddot{v} + f_{xuu}\dot{u}^2 + 2f_{xuv}\dot{u}\dot{v} + f_{xvv}\dot{v}^2)}{f_{zu}\ddot{u} + f_{zv}\ddot{v} + f_{zuu}\dot{u}^2 + 2f_{zuv}\dot{u}\dot{v} + f_{zvv}\dot{v}^2 + g} \\p_y &= f_y - \frac{f_z(f_{yu}\ddot{u} + f_{yv}\ddot{v} + f_{yuu}\dot{u}^2 + 2f_{yuv}\dot{u}\dot{v} + f_{yvv}\dot{v}^2)}{f_{zu}\ddot{u} + f_{zv}\ddot{v} + f_{zuu}\dot{u}^2 + 2f_{zuv}\dot{u}\dot{v} + f_{zvv}\dot{v}^2 + g}\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde:

$$(\cdot)_u = \frac{\partial(\cdot)}{\partial u}, \quad (\cdot)_v = \frac{\partial(\cdot)}{\partial v}, \quad (\cdot)_{uu} = \frac{\partial(\cdot)^2}{\partial^2 u}, \quad (\cdot)_{vv} = \frac{\partial(\cdot)^2}{\partial^2 v}, \quad (\cdot)_{uv} = \frac{\partial(\cdot)^2}{\partial u \partial v}$$

De esta forma, se tienen las dos ecuaciones para calcular el ZMP representadas en términos de dos variables paramétricas. Aún queda el problema de cómo calcular la trayectoria que siga el CoM, a continuación, se presenta el planteamiento del cálculo del movimiento del mismo.

Discretizando $u(t)$ y $v(t)$ con un tiempo de muestreo Δt y definiendo que el error del ZMP k -ésimo con respecto a un ZMP de referencia está dado por:

$$\begin{aligned}e_x(k) &= p_x^{ref}(k) - p_x(k) \\e_y(k) &= p_y^{ref}(k) - p_y(k)\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$k = 1 \dots N$$

Para generar un movimiento del CoM que satisfaga el ZMP de referencia, el error debe ser cero, por lo que:

$$\begin{aligned}e_x(k) &= w_x(u(k+1), u(k), u(k-1), v(k+1), v(k), v(k-1)) \\e_y(k) &= w_y(u(k+1), u(k), u(k-1), v(k+1), v(k), v(k-1))\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}w_x(u(k+1), u(k), u(k-1), v(k+1), v(k), v(k-1)) &= 0 \\w_y(u(k+1), u(k), u(k-1), v(k+1), v(k), v(k-1)) &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

El vector de error es definido como:

$$E = [w_x^T, w_y^T] \in \mathbb{R}^{2N}$$

El problema de la generación del movimiento del CoM puede ser formulado como:

$$E(\lambda) = 0 \tag{4.6}$$

donde $\lambda = [u^T, v^T] \in \mathbb{R}^{2N}$

La función objetivo para cumplir (4.6) contiene términos no lineales que no pueden resolverse analíticamente, por lo que se la solución numérica de λ por medio del método de Newton queda de la siguiente manera:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} - \left(\frac{\partial E(\lambda_{i-1})}{\partial \lambda_{i-1}} \right)^{-1} E(\lambda_{i-1}) \tag{4.7}$$

Si $\|\lambda_i - \lambda_{i-1}\| \leq \epsilon$ entonces $\lambda = \lambda_i$; si esto no se cumple, $i = i + 1$.
donde:

$$\frac{\partial E(\lambda_i)}{\partial \lambda_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial u} & \frac{\partial E_x}{\partial v} \\ \frac{\partial E_y}{\partial u} & \frac{\partial E_y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

La planificación de la trayectoria se resume a encontrar la función λ que hace que el vector de error E tienda a cero, donde $\lambda = [u^T(k), v^T(k)]$ ya que sustituyendo $u(k)$ y $v(k)$ en la superficie paramétrica definida en la ecuación 4.1 obtenemos el movimiento del centro de masa en cada instante de tiempo k .

Capítulo 5

Simulaciones e Implementación

La arquitectura de la generación de patrones de marcha es la siguiente:

1. Considerando la estructura del robot se determina la longitud del paso y por medio de interpolación segmentaria cuadrática se generan las trayectorias de los pies y con la posición de los mismos se determina la del ZMP basándose en el polígono de soporte.
2. Se genera la trayectoria del CoM del robot con el algoritmo descrito en el capítulo anterior.
3. Obtenidas las trayectorias de los pies y del CoM (los efectores finales) del robot, mediante la cinemática inversa (Narváez-Aroche (2010)) se calculan los ángulos que deben adoptar las juntas para que los efectores finales desempeñen las trayectorias deseadas.
4. Se deben ajustar los ángulos obtenidos a los ángulos correspondientes a cada servomotor para posteriormente enviarlos secuencialmente al robot.

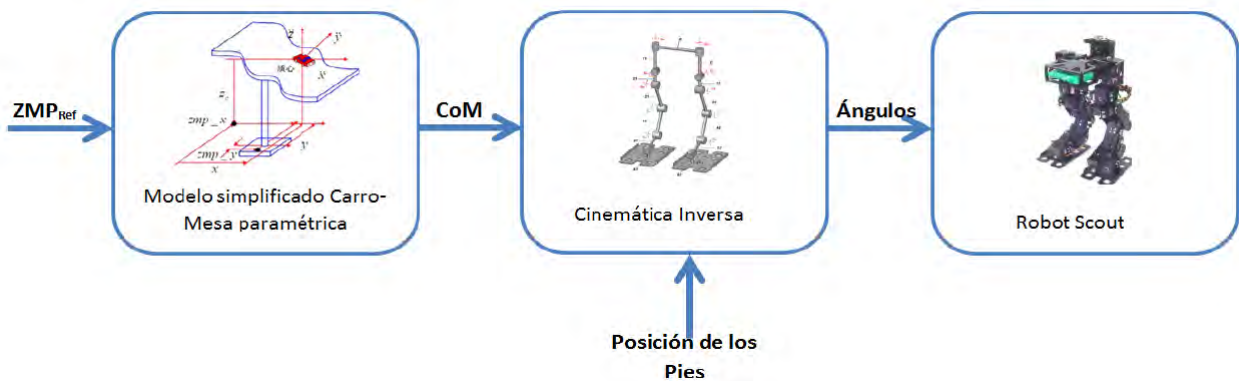


Figura 5.1: Arquitectura de la Planificación de trayectorias dinámicamente estables

Todo lo mencionado anteriormente para la generación de trayectorias, exceptuando el envío de datos a los servomotores, es realizado con el software Mathematica [®] y los programas realizados se muestran en el Anexo.

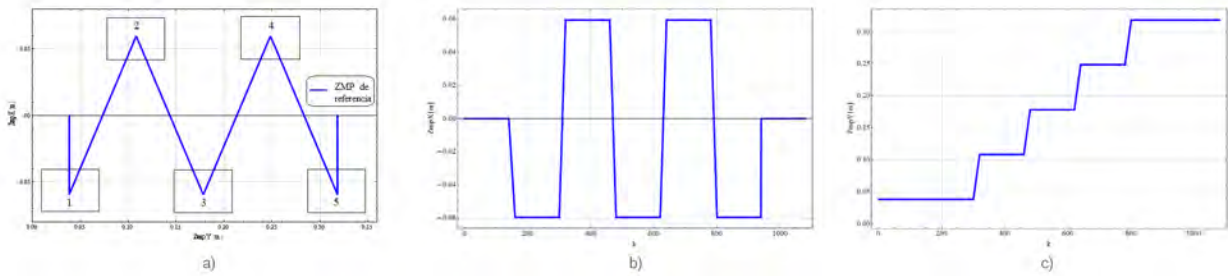


Figura 5.2: a) Posición deseada de los pies, b) ZMP_X de referencia, c) ZMP_Y de referencia para trayectoria en línea recta

Como se mencionó anteriormente, los parámetros para la generación de trayectorias son elegidos con base a la estructura del robot. En (Rioja (2014)) se obtuvo la siguiente relación entre la altura del CoM y la longitud de paso (LP):

$$\begin{aligned}
 17[cm] \leq altura \leq 19[cm] &\rightarrow 5[cm] \leq LP \leq 9[cm] \\
 19[cm] \leq altura \leq 21[cm] &\rightarrow 5[cm] \leq LP \leq 8[cm] \\
 21[cm] \leq altura \leq 23.5[cm] &\rightarrow LP \equiv 5[cm]
 \end{aligned}$$

Para la altura del paso se emplearon indistintamente $3[cm]$ y $5[cm]$, sin tener mayor problema en cuanto a singularidades.

5.1. Trayectoria I. Línea Recta

Los parámetros utilizados para la planeación de la trayectoria son los siguientes: tiempo de muestreo de 5 ms , $N=1080$, $g=9.8\left[\frac{m}{s^2}\right]$, longitud de paso = $0.08[m]$ y ancho de paso = $0.0598[m]$. El periodo de soporte doble elegido es del 12.5% del periodo total de un solo pie (periodo de soporte doble + periodo de soporte simple).

5.1.1. Posición del ZMP

La trayectoria que el robot bípedo debe seguir es una línea recta y por medio de la posición que deben tener los pies en cada instante de tiempo para lograr que el robot la siga, se determinó la posición del ZMP objetivo o de referencia, Figura 5.2

5.1.2. Trayectorias de los pies

Las trayectorias del avance de cada pie, generadas mediante interpolación segmentaria cuadrática, se muestran en las Figura 5.3, donde la línea azul muestra el avance del pie derecho y la

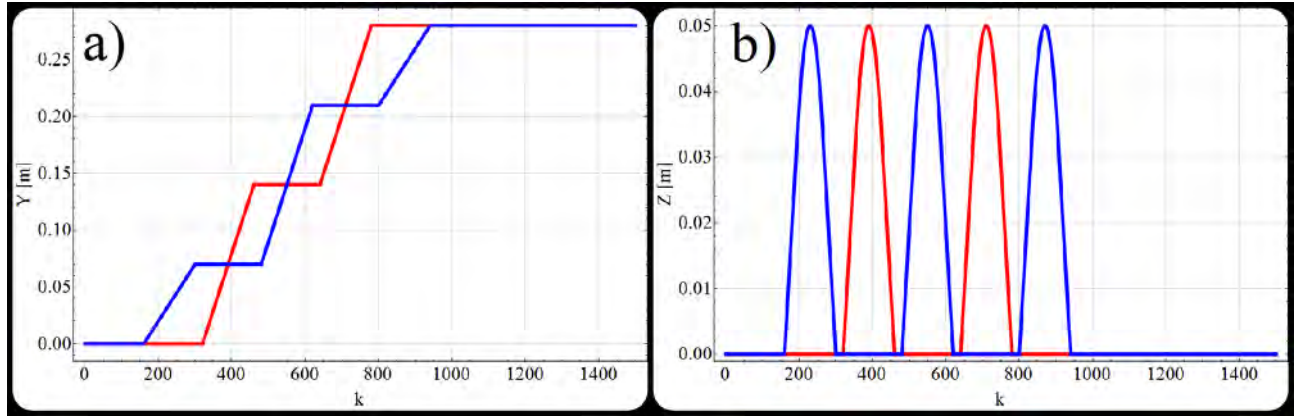


Figura 5.3: a) Trayectorias de avance de los pies en el eje Y. b) Trayectorias de avance de los pies en el eje Z para trayectoria en línea recta

roja el del izquierdo.

5.1.3. Trayectoria del Centro de Masa

En las Figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 se muestran los resultados de la solución por medio del modelo parametrizado carro-mesa y el algoritmo mostrado en el Capítulo 4. La trayectoria azul de cada imagen representa la trayectoria del ZMP deseado, mientras que la trayectoria magenta representa la posición del CoM correspondiente al ZMP deseado.

La superficie paramétrica para la la planeación de esta trayectoria fue definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 f_x(u(t), v(t)) &= u(t) \\
 f_y(u(t), v(t)) &= v(t) \\
 f_z(u(t), v(t)) &= 0.006 \cos\left(\frac{2\pi v(t)}{LP}\right)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

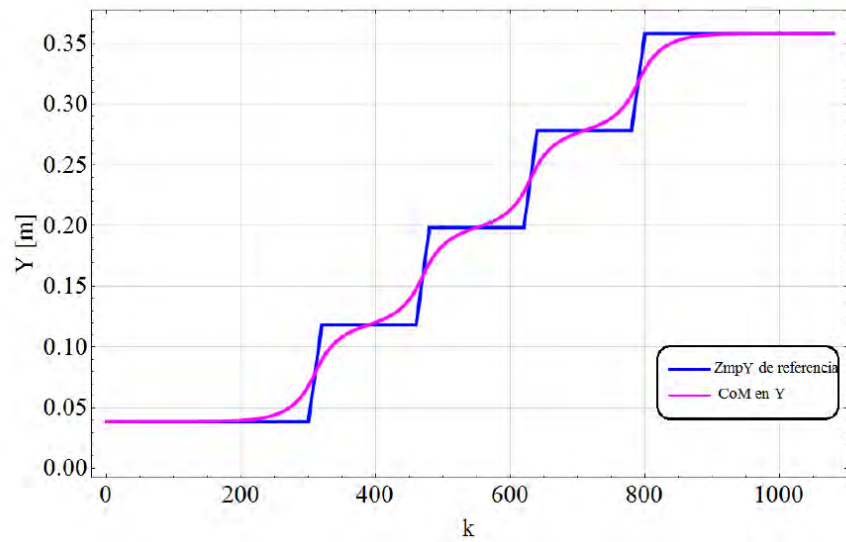


Figura 5.4: Trayectoria del centro de masa correspondiente al ZMP deseado en el plano frontal (eje Y). Trayectoria en línea recta

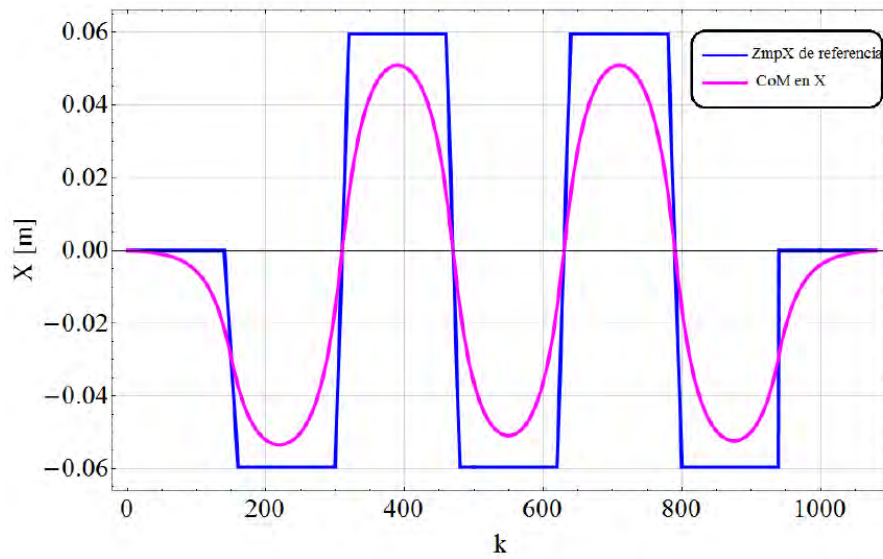


Figura 5.5: Trayectoria del centro de masa correspondiente al ZMP deseado en el plano sagital (eje X). Trayectoria en línea recta

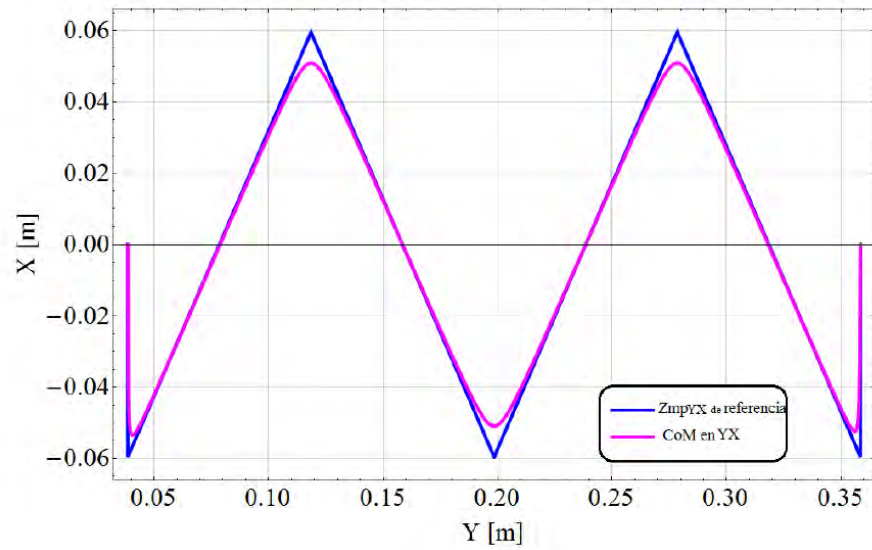


Figura 5.6: Trayectoria del centro de masa correspondiente al ZMP deseado en el plano transversal (plano Y-X). Trayectoria en línea recta

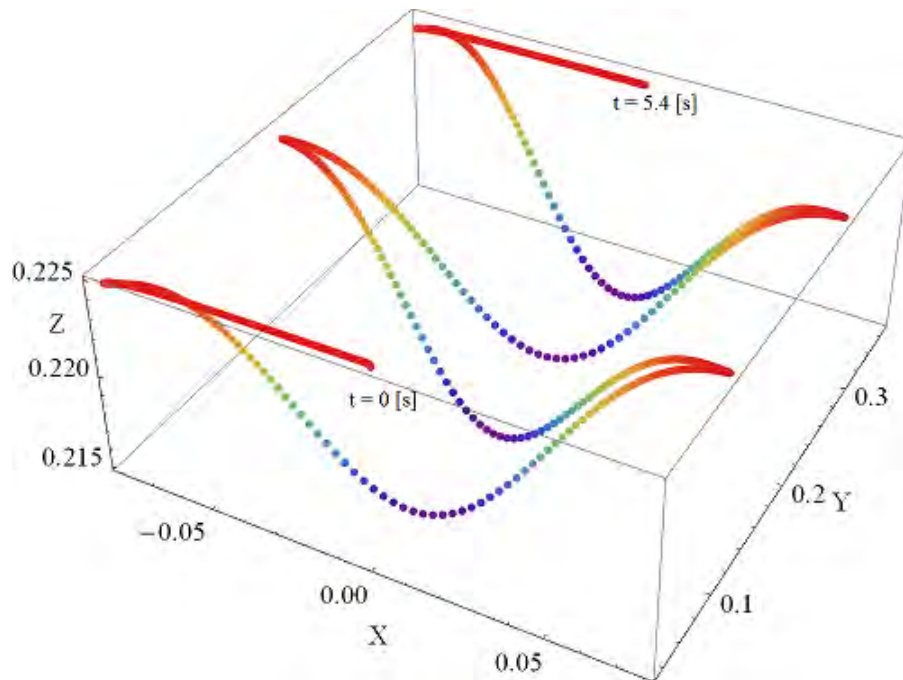


Figura 5.7: Trayectoria del centro de masa en 3D, para trayectoria en línea recta

5.1.4. Simulación del Ciclo de Marcha

Teniendo las trayectorias deseadas de los efectores finales, se soluciona la cinemática inversa para obtener la posición angular necesaria para cada una de las juntas del robot y con ello se realizó la simulación de la marcha mostrada en la Figura 5.8.

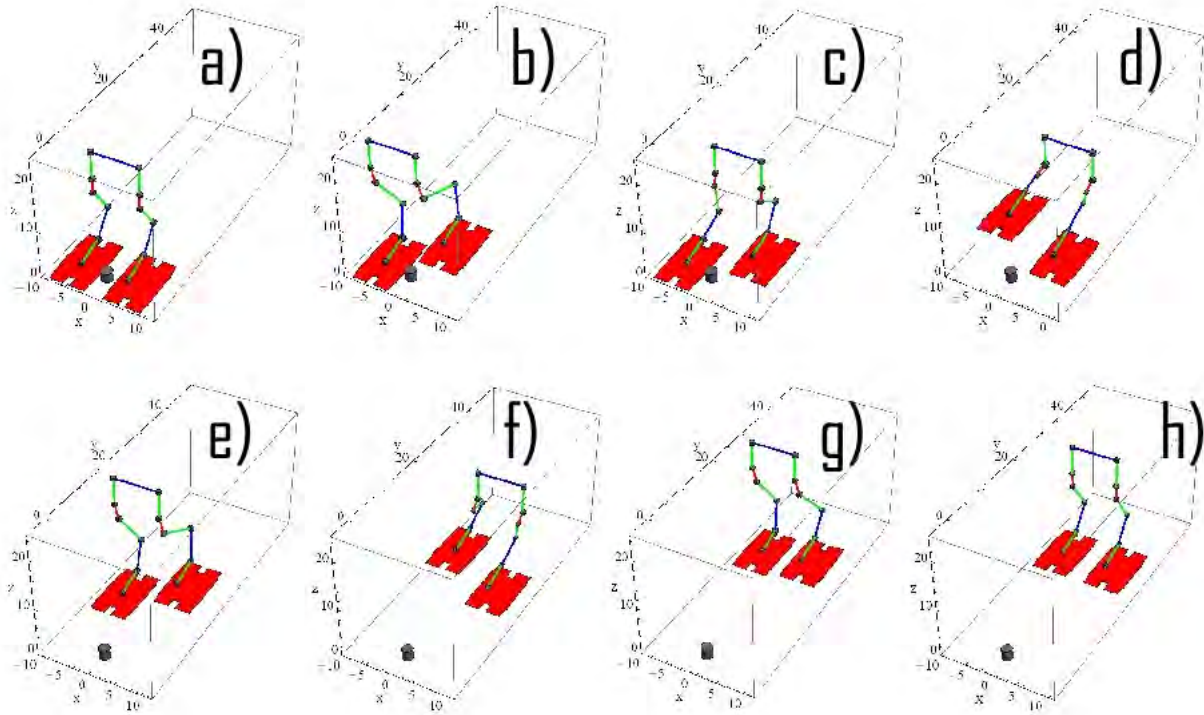


Figura 5.8: Simulación del ciclo de marcha en Mathematica [®] para trayectoria en línea recta

5.1.5. Simulación del Modelo Multicuerpo

En las Figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se muestra la posición del ZMP, calculada a partir de las ecuaciones (2.11) y (2.12), las cuales consideran el modelo completo del robot.

La posición, velocidad y aceleración del CoM para el cálculo del *ZMP* son generados a partir del modelo parametrizado carro-mesa.

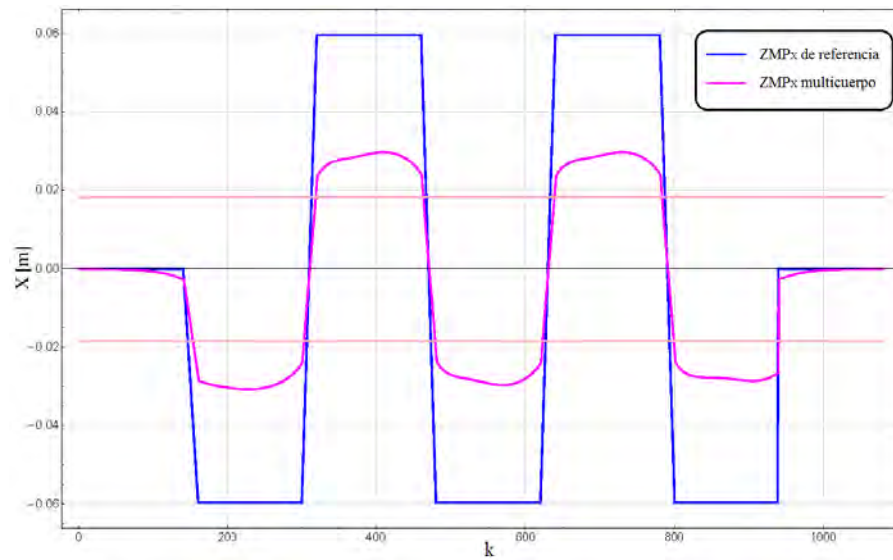


Figura 5.9: ZMP resultante en X (magenta) considerando la dinámica total del robot y el ZMP en X deseado (azul) para trayectoria en línea recta

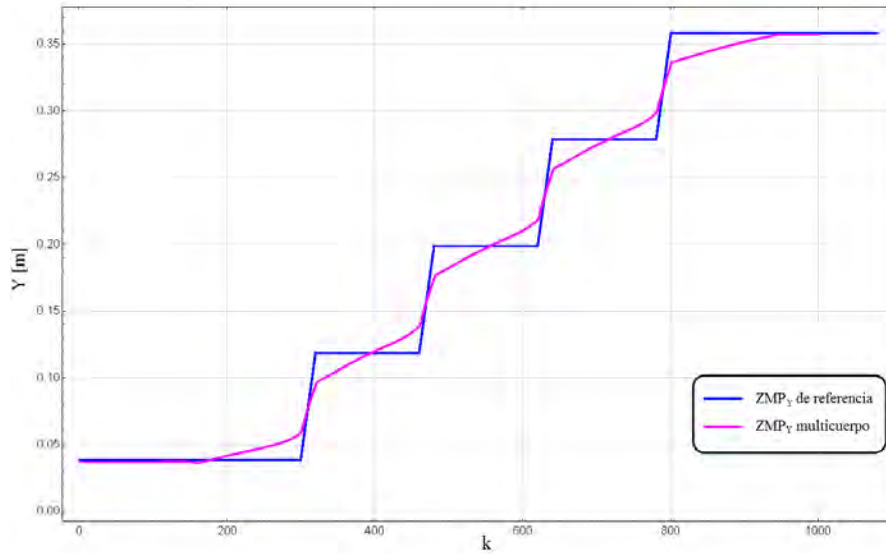


Figura 5.10: ZMP resultante en Y (magenta) considerando la dinámica total del robot y el ZMP en Y deseado (azul) para trayectoria en línea recta

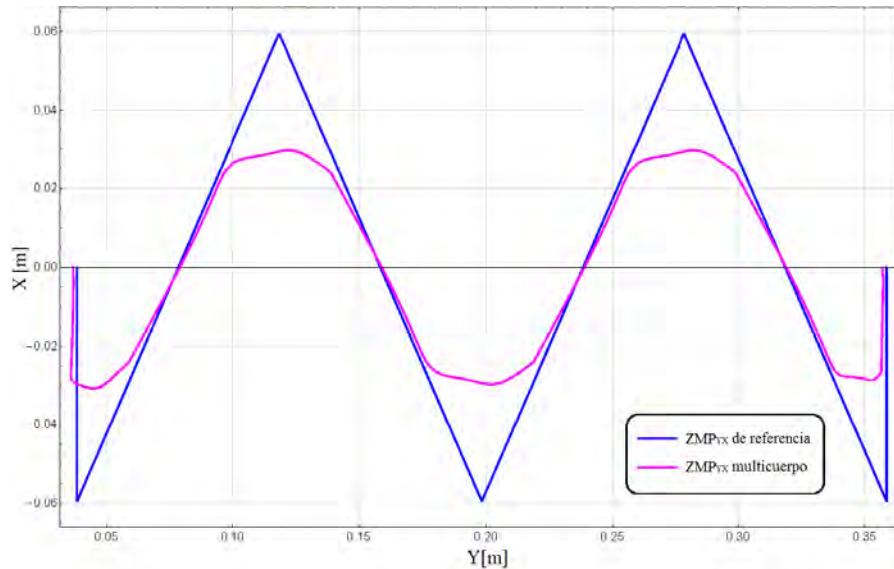


Figura 5.11: ZMP resultante en YX (magenta) considerando la dinámica total del robot y el ZMP en YX deseado (azul) para trayectoria en línea recta

Observando la imagen 5.9 se puede notar que la posición del ZMP durante la marcha se encontraría muy cerca del borde interior del pie, representado por la línea rosa tenue. Y aunque se encuentra dentro del polígono de soporte, la estabilidad de la marcha se vería fácilmente comprometida, por lo que para mejorar el seguimiento del ZMP de referencia, se calcula el error de seguimiento como:

$$e_{ZMP} = ZMP_{ref} - ZMP_{multicuerpo}$$

y se suma al ZMP de referencia y este nuevo ZMP compensado, será utilizado para generar la trayectoria del CoM con el método antes descrito. En las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14, se aprecian los resultados correspondientes a la compensación calculada para el ZMP de las Figuras 5.9, 5.10 y 5.11.

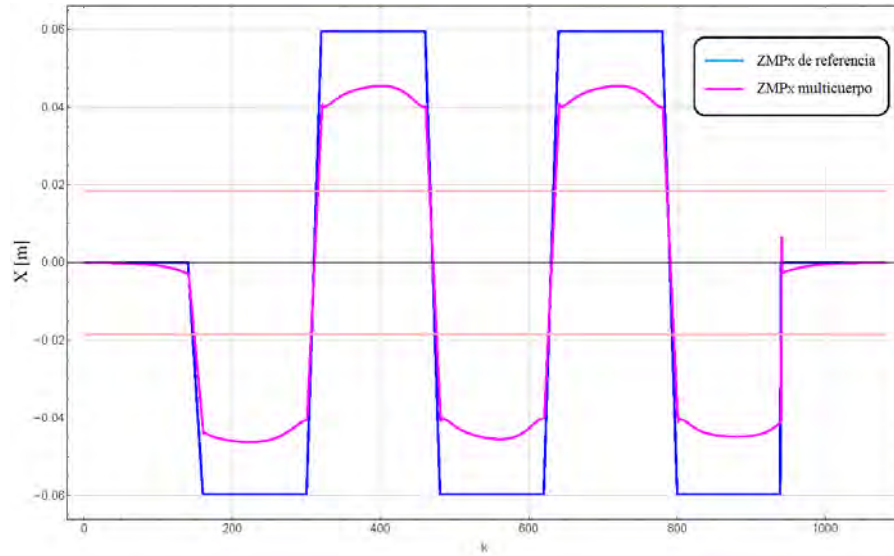


Figura 5.12: ZMP resultante en X (magenta) considerando la dinámica total del robot compensando el error y el ZMP en X deseado (azul) para trayectoria en línea recta

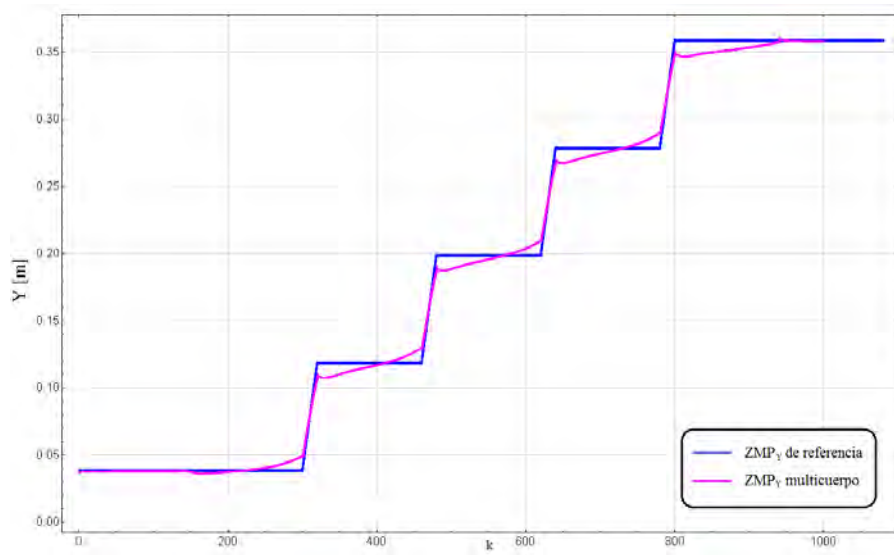


Figura 5.13: ZMP resultante en Y (magenta) considerando la dinámica total del robot compensando el error y el ZMP en Y deseado (azul) para trayectoria en línea recta

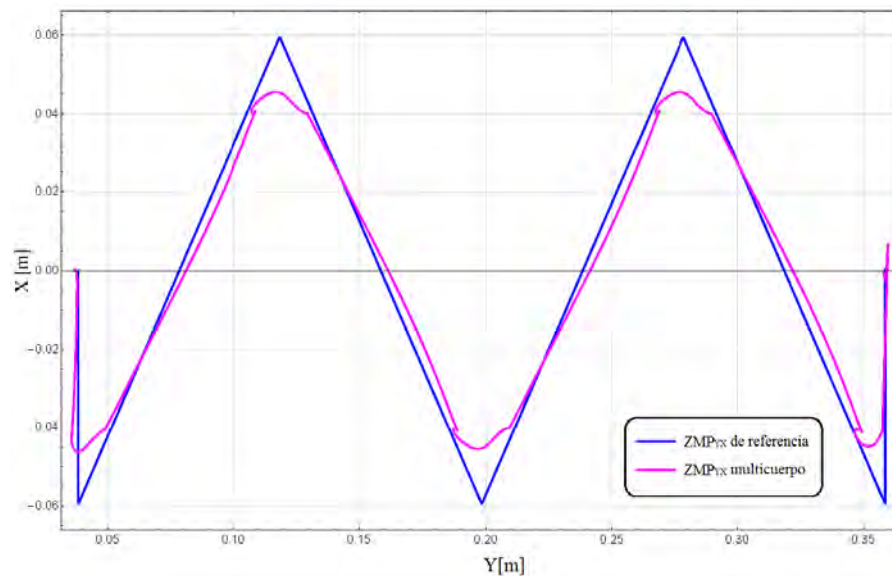


Figura 5.14: ZMP resultante en YX (magenta) considerando la dinámica total del robot compensando el error y el ZMP en YX deseado (azul) para trayectoria en línea recta

La intuición de la compensación del error surge de que el movimiento de la cadera no fue lo suficientemente pronunciado, en el eje X principalmente, para que el pie del robot que se encuentra en soporte simple esté completamente apoyado. Ya que el movimiento del centro de masa obtenido con el modelo simplificado del robot no considera la dinámica del robot y al no considerar inercias, este movimiento del CoM generado no es suficiente para lograr que el pie no esté apoyado sólo del borde o de una parte del pie; así que al sumar el compensar el error, se obtiene un movimiento del CoM más pronunciado hacia el pie de apoyo simple que hará que el ZMP, al considerar la dinámica multicuerpo del robot, se encuentre en el centro del pie, indicando que el pie está completamente apoyado.

Los resultados mostrados en las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14 permiten concluir que la trayectoria compensada implementada en el robot, haría que éste, durante la marcha, siga con mayor fidelidad el ZMP de referencia (idealmente, sin perturbaciones), sin embargo, al calcular la dinámica total del robot para determinar la compensación se consumen demasiados recursos computacionales.

5.1.6. Implementación de la Trayectoria en el Robot Scout

La implementación de la trayectoria puede verse en la Figura 5.15.

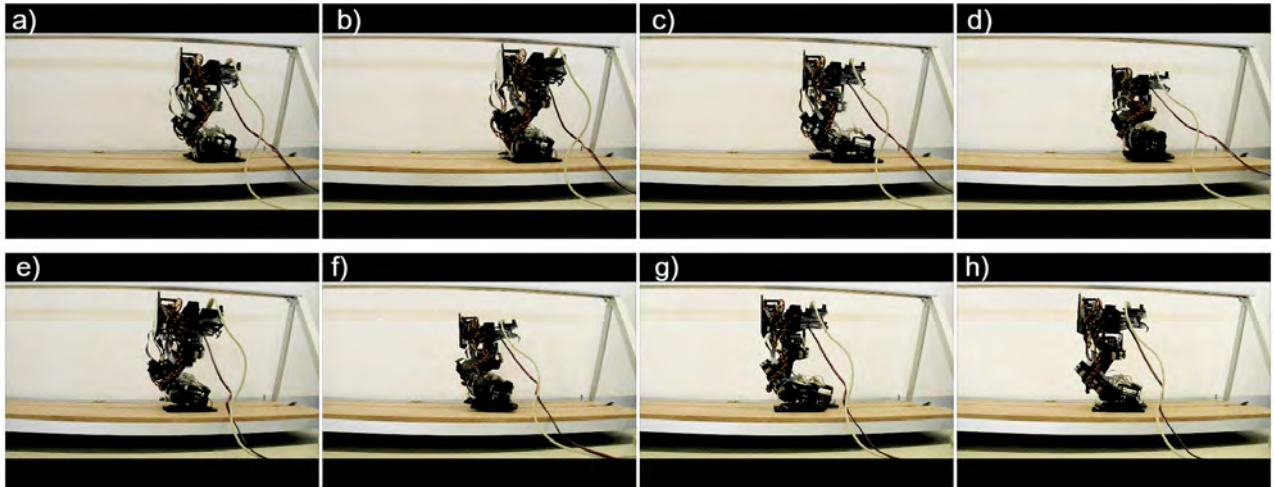


Figura 5.15: Implementación de la trayectoria en línea recta en el robot Scout®

5.2. Trayectoria II. Arco de Circunferencia

El generar sólo caminatas de referencia rectas no es suficiente para que un robot humanoide se adapte al ambiente de la vida diaria; cambiar de dirección y evadir obstáculos son propiedades deseables en este tipo de robots. Actualmente hay diversas líneas de investigación acerca de la generación de trayectorias de referencia para realizar un giro y cambiar de dirección, así como para realizar una marcha a lo largo de una curva. Por ejemplo, en (M. Yilmaz (2012)) se propone un método en el cual se genera una trayectoria recta basada en el criterio de estabilidad “Zero Moment Point” (ZMP) y el cálculo del centro de masa (CoM, por sus siglas en inglés) se lleva a cabo por medio de aproximación por series de Fourier, y habiendo obtenido el movimiento del CoM, esta trayectoria se proyecta por medio de matrices de rotación en un arco de circunferencia.

En ([citeKajKan01]) proponen un modelo de péndulo invertido (Linear Inverted Pendulum Mode, LIPM) y la generación de una marcha a lo largo de un círculo, sin embargo, no muestra resultados de validación experimental.

Por otra parte, en (Jau-Ching Lu (2013)), se estudia el giro de un robot bípedo con dos posibilidades, el giro en un solo lugar o girar mientras avanza. Este estudio se basa en el criterio de ZMP y el modelo LIPM.

Debido a que en (M. Morisawa (2005)), sólo se generan líneas rectas pero el modelo simplificado permite planear un movimiento tridimensional de CoM, en el presente trabajo, se utilizará este método para generar trayectorias curvas también.

5.2.1. Posición del ZMP

La evolución en la posición de los pies se propuso basándose en M. Yilmaz (2012), donde la trayectoria que se desea seguir está dada por un arco de circunferencia principal de radio r_c con un ángulo central ϕ y los pies siguen arcos de circunferencia concéntricos a la trayectoria principal pero de radios $r_c + \sigma$ para el pie izquierdo y $r_c - \sigma$ para el pie derecho.

A partir de la posición deseada de los pies se determina el ZMP de referencia mostrado en la Figura 5.16

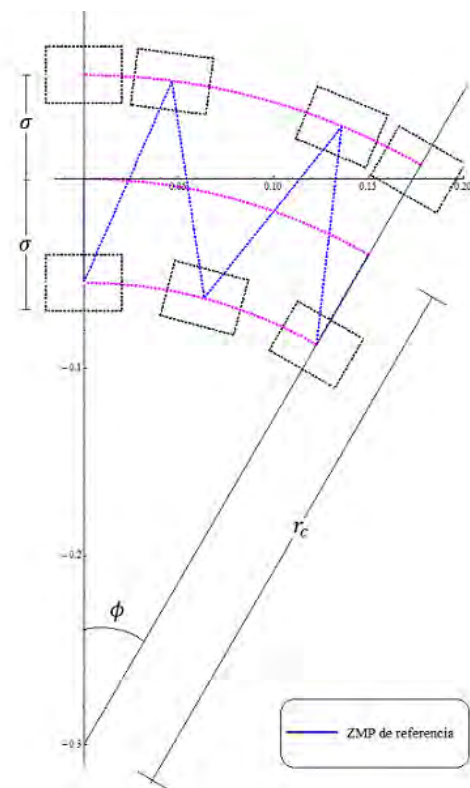


Figura 5.16: Posición deseada de los pies y del ZMP de referencia durante la marcha en la trayectoria circular

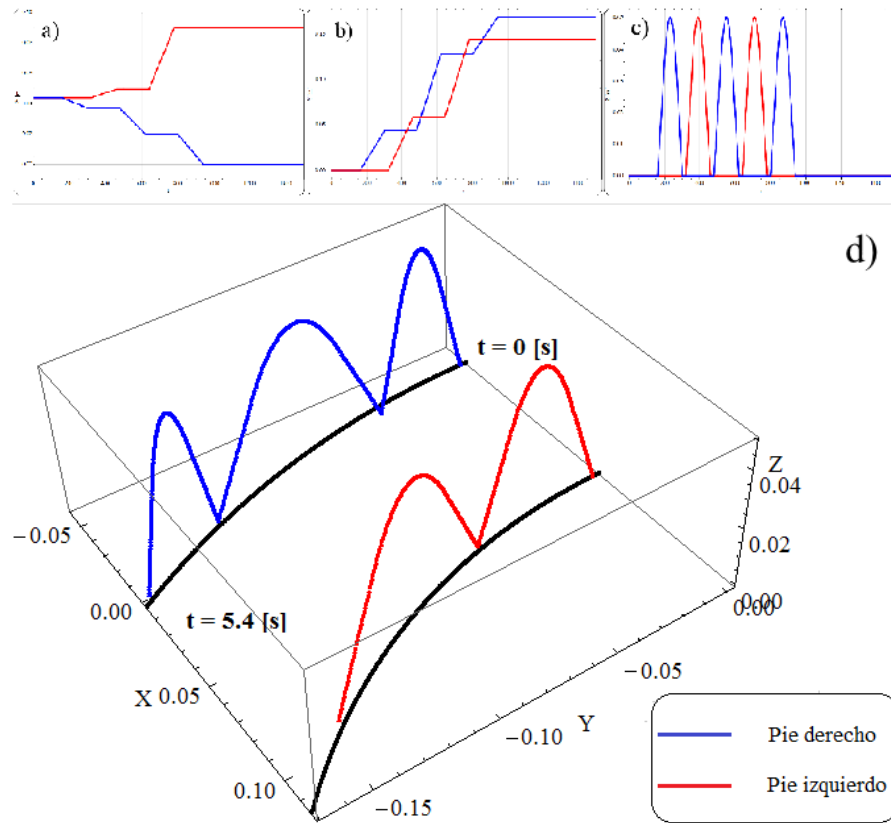


Figura 5.17: Trayectorias del avance de cada pie a) eje X, b) eje Y, c) eje Z, para la trayectoria circular

5.2.2. Trayectorias de los pies

En cuanto a las trayectorias del avance de cada pie se puede observar en la Figura 5.17 la posición de éstos en cada instante de tiempo en X (a), Y (b), Z (c), que son generadas mediante interpolación segmentaria cuadrática. Y en la Figura (d) se muestra la composición de las trayectorias en las tres dimensiones. De la Figura 5.17 (c) se nota que la altura de cada paso es de 5 [cm].

5.2.3. Trayectoria del Centro de Masa

Para la generación de la trayectoria del CoM se propone la siguiente superficie paramétrica, M. Morisawa (2005):

$$\begin{aligned}
 f_x(u(t), v(t)) &= u(t) \\
 f_y(u(t), v(t)) &= v(t) \\
 f_z(u(t), v(t)) &= a \cos\left(\frac{2\pi v(t)}{d_y}\right) + b \sin\left(\frac{2\pi v(t)}{d_x}\right)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

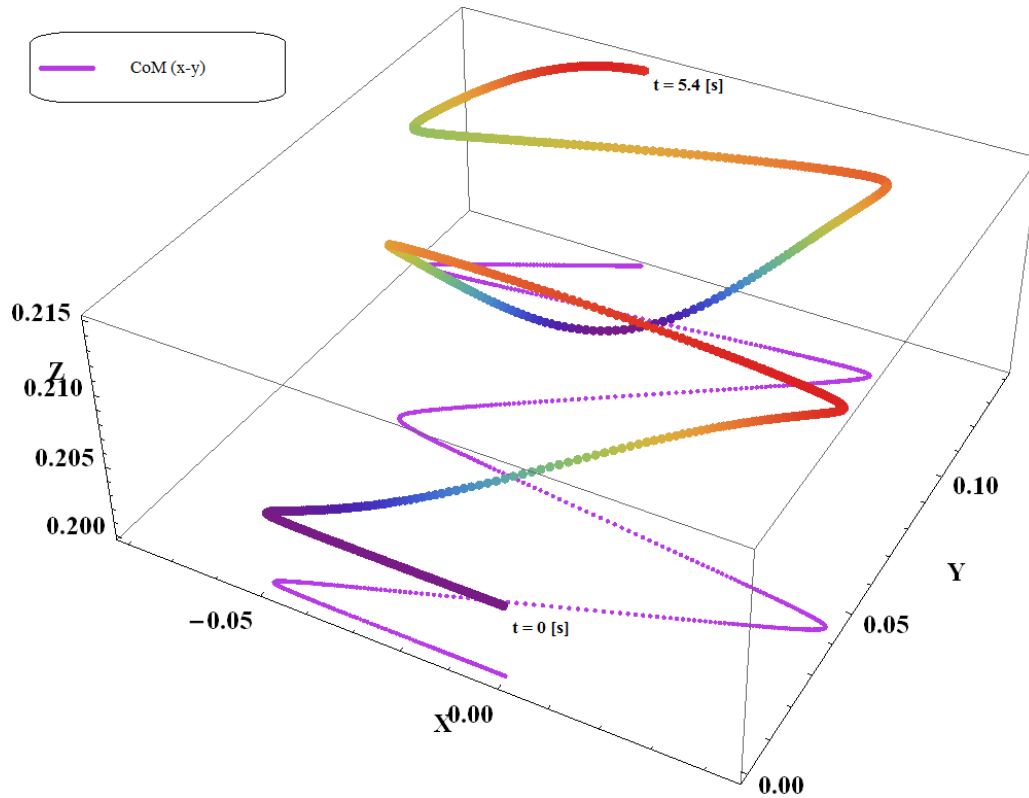


Figura 5.18: Movimiento del centro de masa obtenido a partir del ZMP de referencia de la trayectoria circular

Donde $a=0.006$, $b=0.0006$, $d_y = 0.09$ y $d_x = 0.055$ que son dados de acuerdo a la longitud (la mayor distancia recorrida por el pie en Y) y ancho del paso respectivamente. El periodo de soporte doble elegido es del 12.5% del periodo total de un solo pie (periodo de soporte doble + periodo de soporte simple).

La discretización de $u(t)$ y $v(t)$ se llevó a cabo con un tiempo de muestreo de 5 ms, $N=1080$, $g=9.8[\frac{m}{s^2}]$. El radio de la circunferencia a seguir es de $r_c = 0.30[m]$, $\sigma = 0.055$ y el ángulo central $\phi = 30^\circ$.

La trayectoria del CoM generada se muestra en la Figura 5.18. El ZMP obtenido bajo el modelo simplificado, siguiendo la trayectoria de la Figura 5.18 se observa en las Figuras 5.19 y 5.20 después de dos iteraciones del método de Newton. La línea magenta punteada muestra el resultado del ZMP con el modelo simplificado y se observa un buen seguimiento del ZMP de referencia (línea azul).

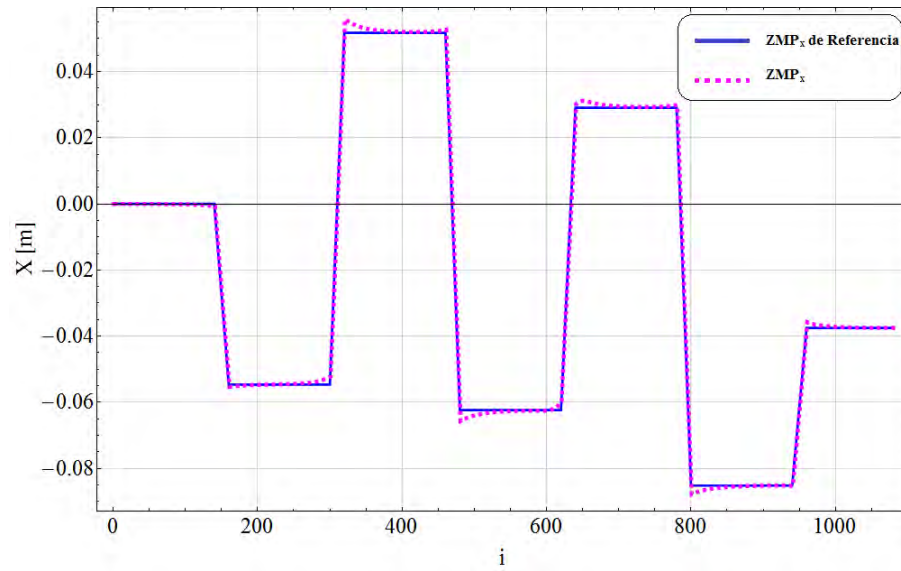


Figura 5.19: ZMP en el eje X de la trayectoria circular

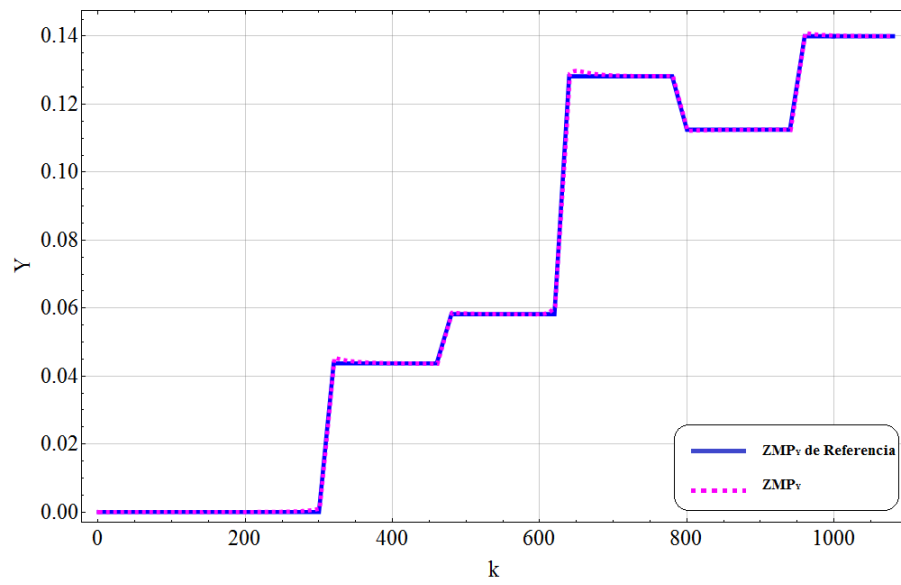


Figura 5.20: ZMP en el eje Y de la trayectoria circular

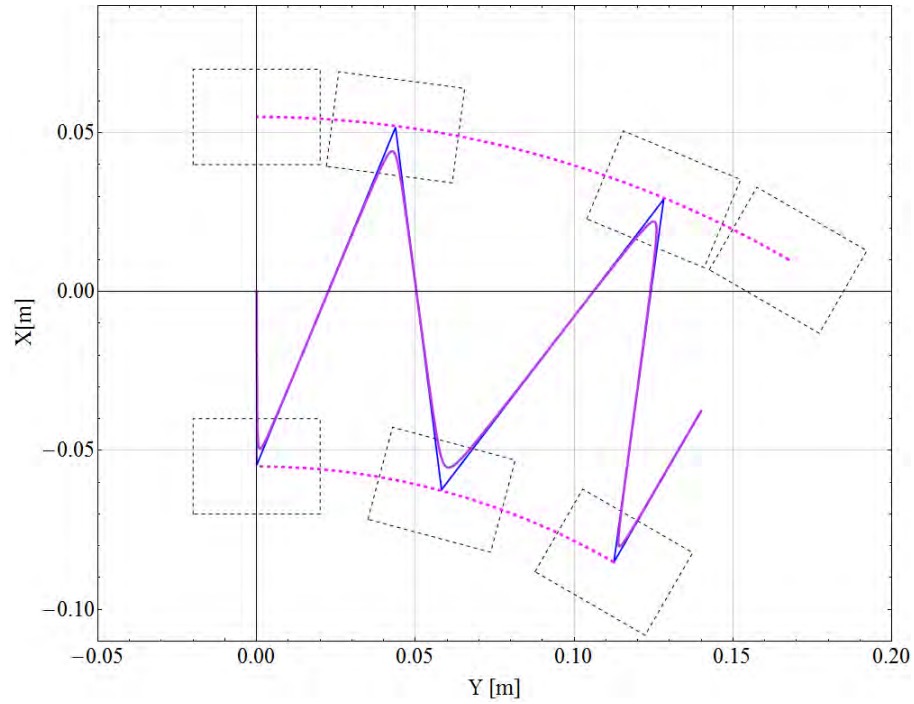


Figura 5.21: Proyección del movimiento del centro de masa obtenido a partir del ZMP de referencia en el plano de la trayectoria circular

5.2.4. Simulación del Ciclo de Marcha

Al igual que en la trayectoria I (en línea recta), teniendo las trayectorias deseadas de los efectores finales, se soluciona la cinemática inversa para obtener la posición angular necesaria para cada una de las juntas del robot y con ello se realizó la simulación de la marcha mostrada en las Figuras 5.22 y 5.23.

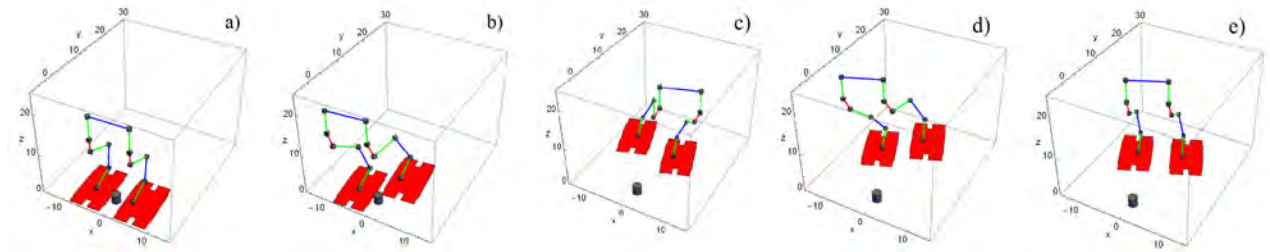


Figura 5.22: Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ® de la trayectoria circular

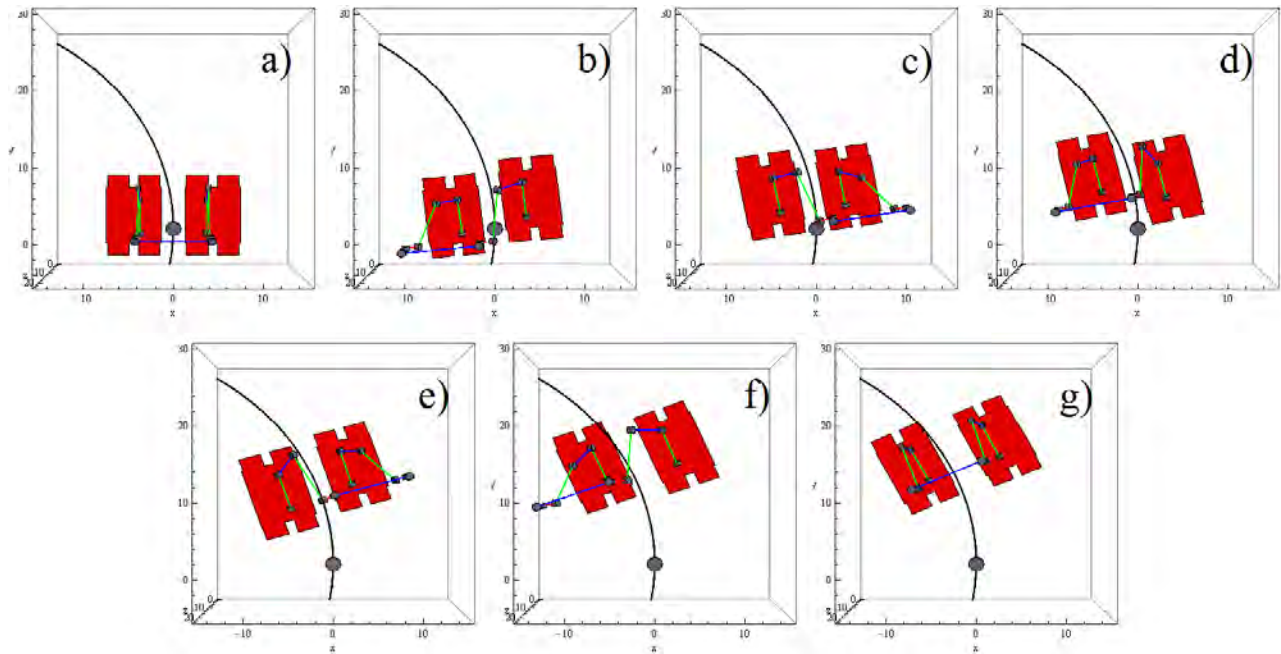


Figura 5.23: Simulación del ciclo de marcha en Mathematica [®] de la trayectoria circular, vista superior

5.2.5. Simulación del Modelo Multicuerpo

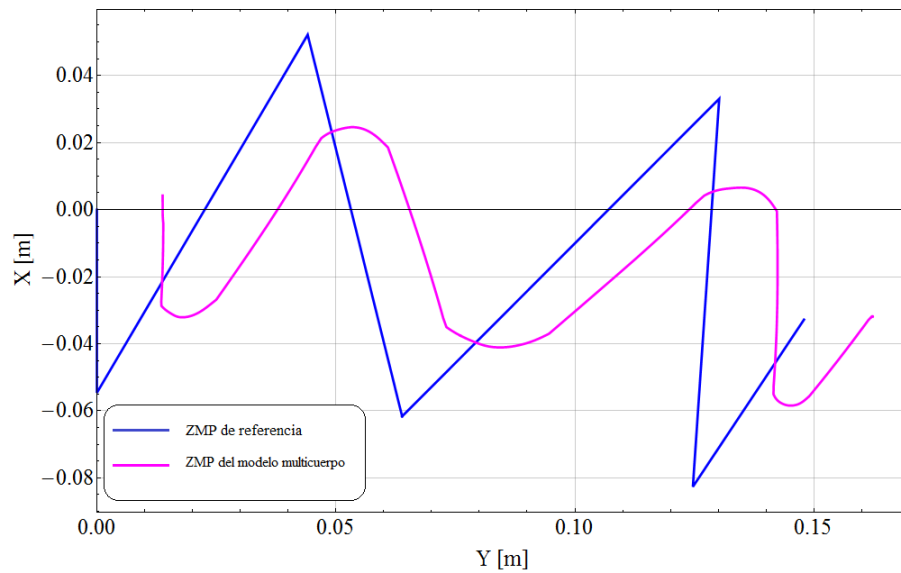


Figura 5.24: ZMP y vs x obtenido con la simulación del modelo multicuerpo de la trayectoria circular

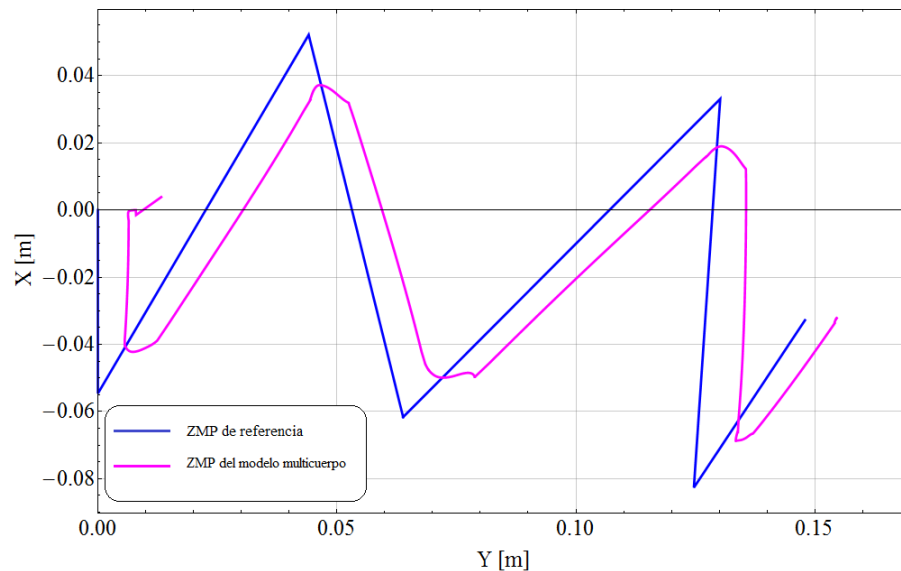


Figura 5.25: ZMP y vs x obtenido con la simulación del modelo multicuerpo con la compensación del error de la trayectoria circular

Uno de los propósitos de esta simulación es verificar la posición que seguiría el ZMP considerando una dinámica más completa del robot. El resultado de esta simulación se presenta en la Figura 5.24, en la que se aprecia el ZMP de referencia en azul y el ZMP obtenido en magenta. Sin embargo, la amplitud del ZMP obtenido no es la deseada y la posición en el eje Y está adelantada.

Que la posición del ZMP en el eje Y se encuentre adelantada se debe a una mala elección del ZMP_Y de referencia. Esto puede mejorarse situando el ZMP_Y ligeramente adelante del que se ha propuesto aquí (justo en el centro del pie), debido a la arquitectura del robot Scout®.

El resultado del ZMP con la dinámica multicuerpo aplicándole la compensación del error, reflejado en la Figura 5.25, muestra que el seguimiento del ZMP mejora.

5.2.6. Implementación de la Trayectoria II (circular) en el Robot Scout

Para la implementación se obtuvieron las posiciones angulares que las articulaciones del robot deben adoptar para que éste siga la trayectoria deseada.

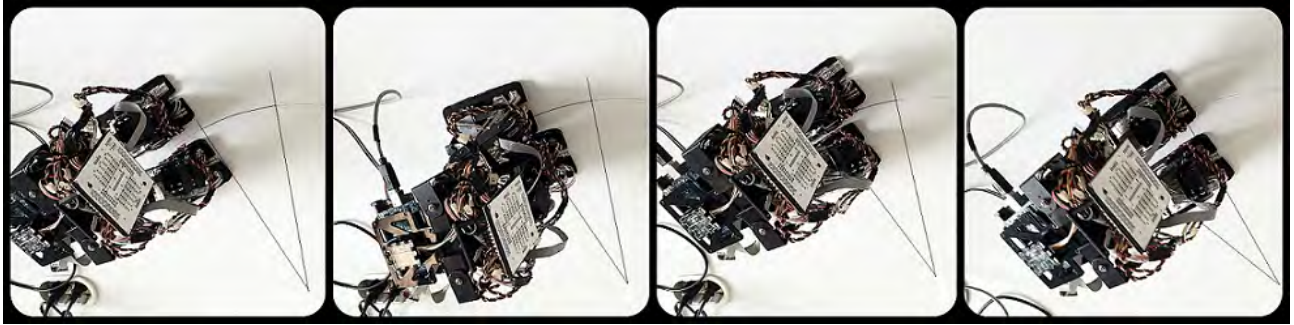


Figura 5.26: Funcionamiento del Prototipo Físico de la trayectoria circular

5.3. Trayectoria III. Caminando Sobre un Plano Inclinado

La motivación de desarrollar una trayectoria para que el bípedo camine en una pendiente y suba un escalón es debido a que es deseable que un robot humanoide se desplace en el ambiente en el que los seres humanos lo hacemos y el poder caminar sobre un suelo irregular es una de las tareas más importante.

Esta trayectoria se ha desarrollado teniendo como base la generada para que el robot siga una línea recta. Obtenidos el movimiento del CoM y el de los pies, se les aplicó una transformación de coordenadas por medio de la matriz de rotación en el eje X .

$$\mathcal{R}_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Donde α es el ángulo a rotar y en este caso $\alpha = 10^\circ$.

Esta forma de planear la trayectoria fue inspirada en W. Huang (2008), sin embargo en este artículo se usa el modelo simplificado carro-mesa y para poder solucionar la trayectoria del centro de masa se propone un cambio de coordenadas mediante el cual las ecuaciones del ZMP queden lineales y de esta forma aplicar técnicas convencionales de planeación de trayectorias como la propuesta en S. Kajita (2003).

El uso de la matriz de rotación, en lugar de definir la trayectoria del ZMP desde el inicio para el plano inclinado y por medio del algoritmo presentado resolver el movimiento del centro de masa, está basada en la idea de optimizar el tiempo de generación de la marcha, pensando en un futuro generarla en tiempo real.

5.3.1. Trayectorias de los efectores finales

Las Trayectorias de los pies y del centro de masa de la sección 5.1 aplicándoles la transformación de coordenadas se muestran en las Figuras 5.27 y 5.28, respectivamente.

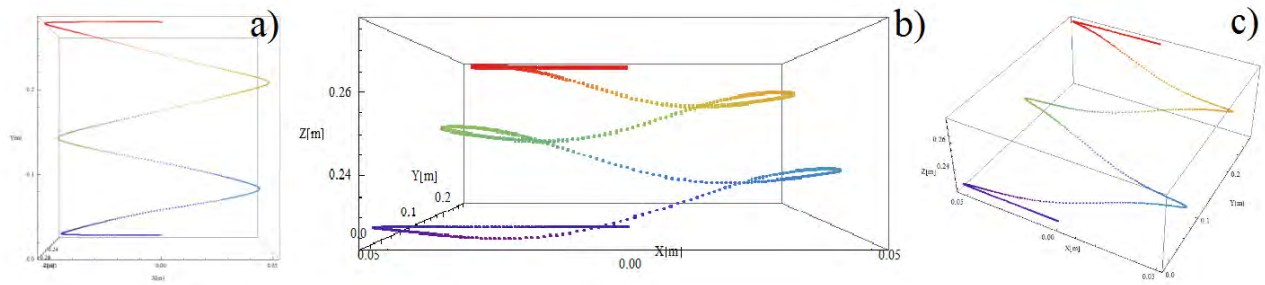


Figura 5.27: Trayectoria del centro de masa. a) Vista Superior. b) Vista Frontal. c) Vista 3D. Trayectoria plano inclinado

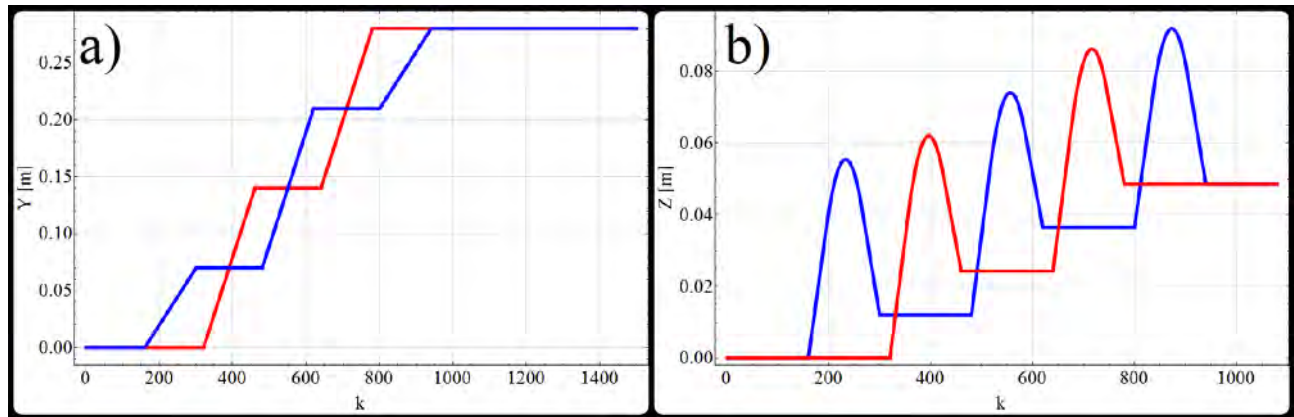


Figura 5.28: a) Trayectorias de avance de los pies en el eje Y. b) Trayectorias de avance de los pies en el eje Z. La línea azul muestra el avance del pie derecho y la azul el del izquierdo. Trayectoria plano inclinado

5.3.2. Simulación del Ciclo de Marcha

Con las trayectorias transformadas de los efectores finales, se soluciona la cinemática inversa para obtener la posición angular necesaria para cada una de las juntas del robot y con ello se realizó la simulación de la marcha mostrada en las Figuras 5.29 y 5.30.

5.3.3. Implementación de la Trayectoria III en el Robot Scout

A pesar de que esta trayectoria no se obtuvo con el método convencional y más bien fue resuelta por medio de una simplificación, se puede observar por medio de la Figura 5.31 que la implementación fue exitosa.

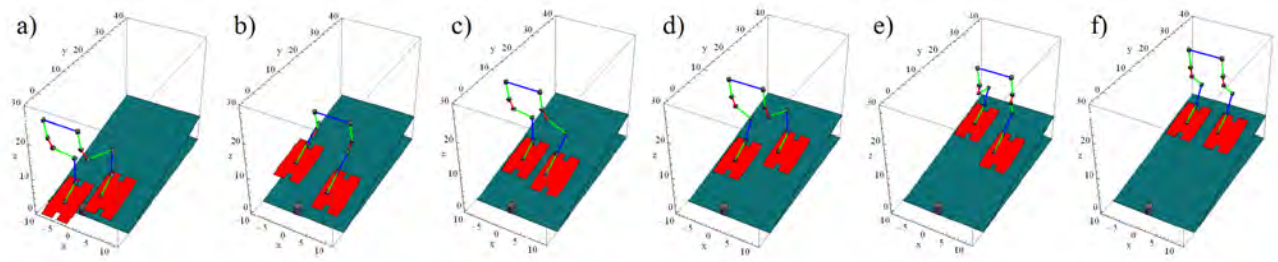


Figura 5.29: Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ®. Trayectoria plano inclinado

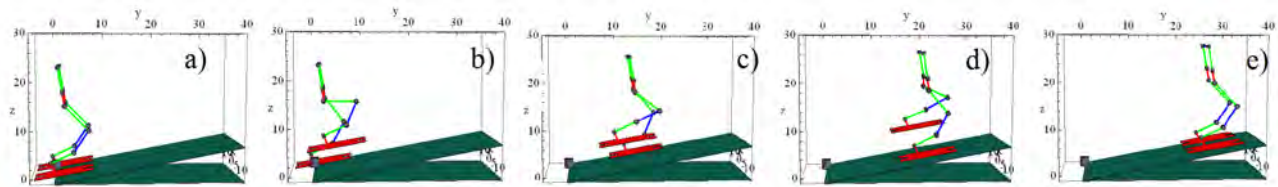


Figura 5.30: Simulación del ciclo de marcha en Mathematica ®, vista lateral. Trayectoria plano inclinado

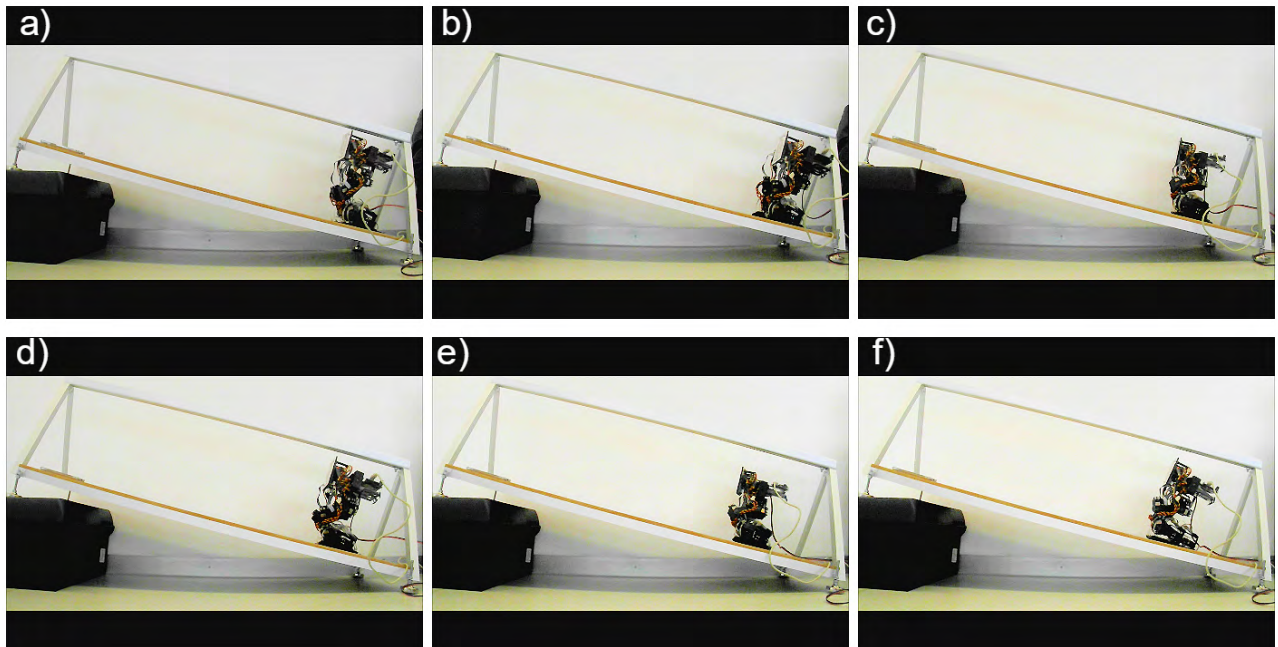


Figura 5.31: Robot Scout® subiendo una pendiente de 10°

5.4. Trayectoria IV. Subiendo un Escalón

En (W. Huang (2008)) proponen que subir escaleras es similar a subir una pendiente; así pues, por medio del método propuesto en la sección 5.3 se planeará la trayectoria para subir un escalón e implementarla en el robot Scout®.

5.4.1. Trayectoria de los efectores finales

Las Trayectorias de los pies y del centro de masa de la sección 5.3, restringidas a sólo un paso por pie (para subir un escalón) se muestran en las Figuras 5.32 y 5.33, respectivamente.

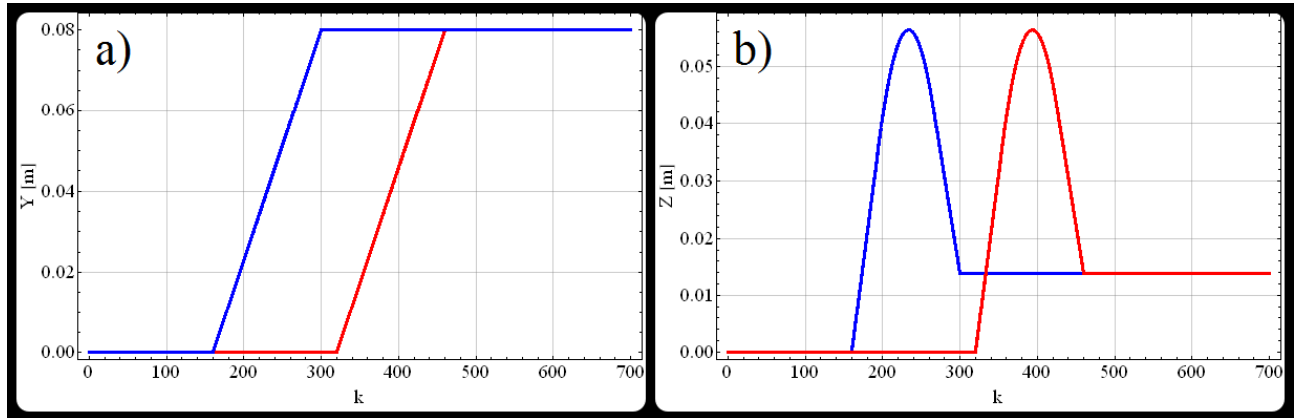


Figura 5.32: *a)* Trayectorias de avance de los pies en el eje Y. *b)* Trayectorias de avance de los pies en el eje Z. La línea azul muestra el avance del pie derecho y la azul el del izquierdo. Trayectoria para subir un escalón

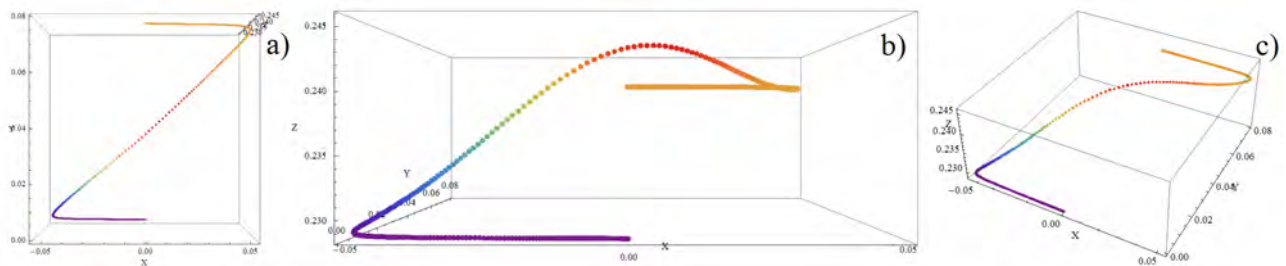


Figura 5.33: Trayectoria del centro de masa. *a)* Vista Superior. *b)* Vista Frontal. *c)* Vista 3D. Trayectoria para subir un escalón

5.4.2. Simulación del Ciclo de Marcha

La simulación del ciclo de marcha se muestra en la Figura 5.34.

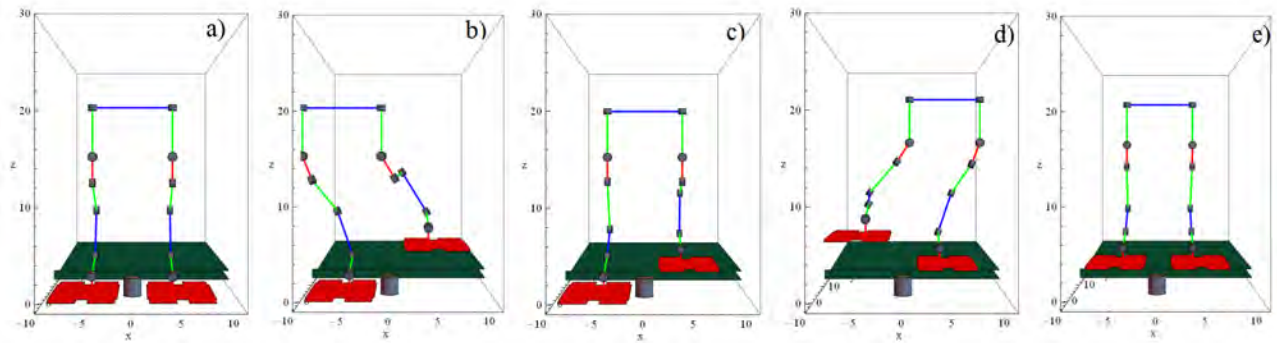


Figura 5.34: Simulación del ciclo de marcha en Mathematica® del robot subiendo un escalón

5.4.3. Implementación de la Trayectoria IV en el Robot Scout

Para la implementación se obtuvieron las posiciones angulares que las articulaciones del robot deben adoptar para que éste siga la trayectoria deseada. El resultado se muestra en las Figuras 5.35 y 5.36.

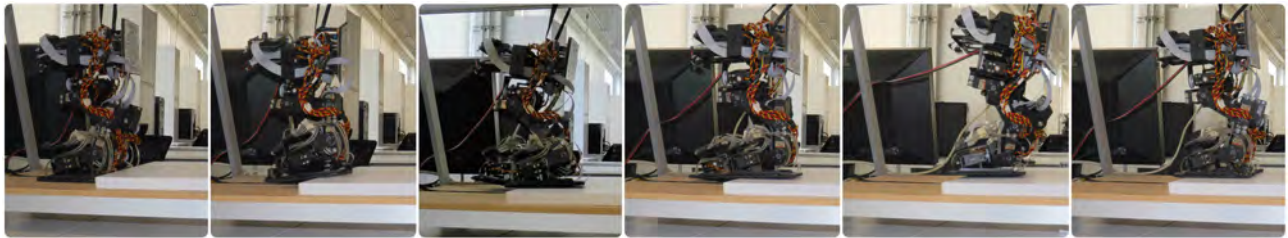


Figura 5.35: Robot Scout® subiendo escalón, plano sagital

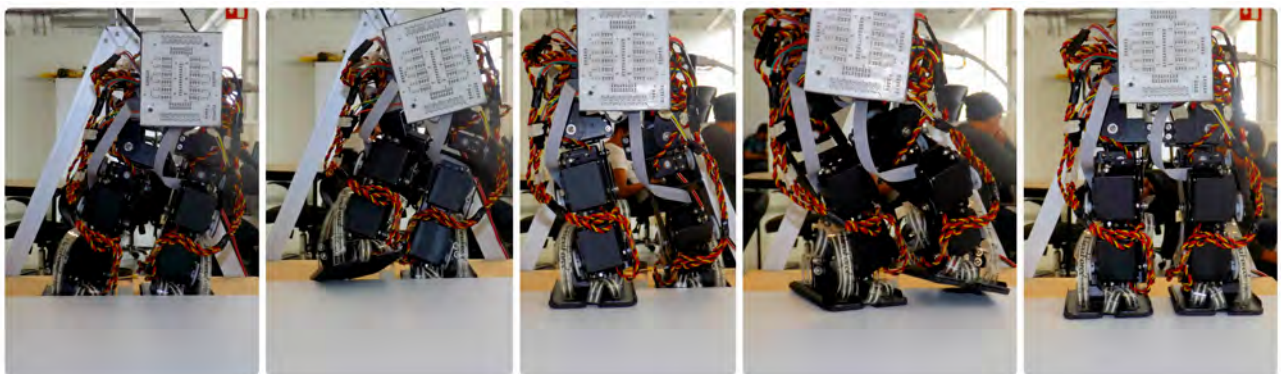


Figura 5.36: Robot Scout® subiendo escalón, plano frontal

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo a Futuro

El problema principal abordado en este trabajo es la planeación de trayectorias para un robot bípedo. El objetivo se logró generando trayectorias del centro de masa del robot por medio de un algoritmo hallado en la literatura, el cual utiliza el modelo simplificado de un robot bípedo que restringe al movimiento del centro de masa a una superficie paramétrica, permitiendo así variación de la altura del mismo y esta forma de generación de trayectorias es hasta ahora novedosa en el grupo de trabajo.

Este modelo simplificado, que durante este trabajo ha recibido el nombre de modelo parametrizado carro-mesa, en la literatura sólo ha sido reportado para generar trayectorias rectas y por medio de otra resolución a la aquí presentada se planean subir escaleras con este modelo; sin embargo, con el desarrollo de esta tesis se comprobó que este algoritmo también es válido para generar otro tipo de trayectorias como la curva.

Por otra parte, la investigación del estado del arte llevó a proponer una simplificación para realizar trayectorias más complejas como subir un escalón y esta simplificación resultó en una implementación exitosa.

Desde el trabajo realizado por (Rioja (2014)) se tiene precedentes de lo importante que es la compensación del error para la generación de trayectorias dinámicamente estables, sin embargo esto consume demasiados recursos computacionales y queda como trabajo a futuro buscar una optimización de recursos sin afectar la estabilidad de las trayectorias resultantes.

Al planear trayectorias existen al menos cinco parámetros que dependen del albedrío del diseñador de trayectorias, que aunque dependen de la arquitectura del robot, se tiene cierto grado de libertad en la elección de estos parámetros; por lo que se propone trabajar en un criterio para la elección de los mismos que optimicen el error de seguimiento del ZMP de referencia.

Un trabajo a futuro es la comparación de las marchas aquí generadas con las que pueden generarse con los métodos propuestos en tesis anteriores y decidir que método hace que la marcha

sea mejor; sin embargo, de ahí surge la pregunta ¿mejor, en qué sentido?, ¿cómo medir que marcha hace que el desempeño del robot sea mejor?; explorar estas cuestiones llevará a proponer un criterio de evaluación de la marcha que permita decidir que acciones deben llevarse a cabo durante la caminata para mejorar el desempeño de la misma.

Las acciones para mejorar el desempeño de la caminata encaminan al desarrollo e implementación de controladores que incrementarían la robustez de la marcha.

En general, la aportación de este trabajo es apenas “un granito de arena” en un proyecto tan complejo como lo es un bípedo y lo aquí logrado son buenos resultados, pero aún existe mucho trabajo a realizar.

Bibliografía

- A. Albert, W. G. (2003). Analytic path planning algorithms for bipedal robots without a trunk. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 36(2):109–127.
- B. Siciliano, O. K. (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer-Verlag.
- C. Chevallereau, G. Bessonnet, G. A. Y. A. (2009). *Bipedal robots: modeling, design and walking synthesis*. Wiley-ISTE.
- Dekker, M. (2009). Zero-moment point method for stable biped walking. In *Internship report*, Eindhoven.
- Goswami, A. (1999). Postural stability of biped robots and the foot-rotation indicator (fri) point. *The International Journal of Robotics Research*, 18(6):523–533.
- H. Hirukawa, S. Hattori, e. a. (2006). A universal stability criterion of the foot contact of legged robots - adios zmp. *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, pages 1976–1983.
- Jau-Ching Lu, Jing-Yi Chen, P.-C. L. (2013). Turning in a bipedal robot. *Journal of Bionic Engineering*, pages 292–304.
- Jiménez, J. J. A. (2014). *Robust Feedback Control of Omnidirectional Biped Gait on the Nao Humanoid Robot*. PhD thesis, Universidad de Murcia.
- López-García, R. (2012). Planificación y optimización de la caminata de un robot bípedo. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.
- M. Morisawa, S. Kajita, e. a. (2005). Pattern generation biped walking constrained on parametric surface. In *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2005*, pages 2405–2410. IEEE.
- M. Vukobratovic, B. B. (2004). Zero-moment point-thirty five years of its life. *International Journal of Humanoid Robotics*, 1(1):157–173.
- M. Vukobratovic, J. S. (1972). On the stability of anthropomorphic systems. *Mathematical Institute Beograd*.

- M. Yilmaz, U. Seven, e. (2012). Circular arc-shaped walking trajectory generation for bipedal humanoid robots. In *2012 12th IEEE Int. Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*. IEEE.
- N. Chafroud, N. Khraief, e. (2013). Dynamic walking control by using the liquid level model and the preview of zero-moment-point. In *International Conference on Individual and Collective Behaviors in Robotics, 2013 IEEE Int. Conf.*
- Narváez-Aroche, O. (2010). Modelo cinemático y dinámico de un robot bípedo de doce grados de libertad internos. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Rioja, U. J. (2014). Equilibrio dinámico de un robot bípedo utilizando el modelo simplificado carro-mesa.
- S. Kajita, F. Kanehiro, e. a. (2003). Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point. *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- S. Shimmyo, T. Sato, K. O. (2010). Biped walking pattern generation by using preview control with virtual plane method. In *Advanced Motion Control, 2010 11th IEEE International Workshop on*, pages 414–419. IEEE.
- W. Huang, C. Chew, e. a. (2008). Patern generation for bipedal walking on slopes and stairs. In *International Conference on Humanoids Robots*.

Anexo

Método de Newton-Raphson Vectorial

Considere la ecuación $\mathbf{F}(X) = 0$, donde \mathbf{F} es una función vectorial de variable vectorial, equivalente al sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ la solución exacta del sistema y X_k una aproximación de ella. Definiendo la distancia que hay entre la solución exacta y la aproximada como:

$$h = X - X_k$$

Entonces:

$$X = X_k + h$$

Haciendo uso del desarrollo de Taylor se tiene que:

$$\mathbf{F}(X) = 0 = \mathbf{F}(X_k + h) \approx \mathbf{F}(X_k) + \mathbf{F}'(X_k)h$$

donde $\mathbf{F}'(X_k)$ es la matriz Jacobiana valuada en X_k , es decir:

$$\mathbf{F}'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

donde

$$h \approx -\mathbf{F}'^{-1}(X_k)\mathbf{F}(X_k)$$

y por tanto:

$$X \approx X_k - \mathbf{F}'^{-1}(X_k)\mathbf{F}(X_k) \tag{6.1}$$

La ecuación 6.1 será la aproximación denotada como X_{k+1} , es decir:

$$X_{k+1} \approx X_k - \mathbf{F}'^{-1}(X_k)\mathbf{F}(X_k)$$

Obsérvese entonces que cada iteración del método de Newton se reduce al cálculo del vector h correspondiente y éste no es más que la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{F}(X_k) + \mathbf{F}'(X_k)h = 0$$

Por lo que se puede observar que la solución de un sistema de ecuaciones no lineales por el método de Newton se reduce, en cada iteración, a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (en h).