



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

LA DEFINICIÓN DE CURVA Y EL  
TEOREMA DE HAHN-MAZURKIEWICZ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
M A T E M Á T I C A  
P R E S E N T A:  
L E T I C I A A G U I L A R P A S C U A L

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. MIGUEL LARA APARICIO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2016





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>3</b>
<b>1. Imágenes continuas</b>	<b>7</b>
1.1. Curva en el sentido de Jordan . . . . .	8
1.1.1. Curva de Peano . . . . .	10
1.1.2. La curva de Peano es una curva según Jordan . . . . .	14
1.1.3. Representación de la imagen de $\varphi^*$ , la curva $P^*$ . . . . .	15
1.1.4. La curva sinusoidal o del topólogo . . . . .	16
<b>2. Características de las curvas según Jordan</b>	<b>19</b>
2.1. Conexidad y compacidad . . . . .	19
2.2. Espacios de Peano . . . . .	29
2.2.1. Características de la función $f$ . . . . .	29
<b>3. Curva según Jordan en <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>33</b>
3.1. Propiedades de una curva según Jordan . . . . .	34
3.1.1. Compacidad de una curva según Jordan . . . . .	43
3.1.2. Aplicación de $C^*$ en un conjunto $K$ compacto contenido en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	45
3.1.3. Aplicación continua del intervalo $[0, 1]$ en un conjunto compacto $cpt$ y $lcpt$ . . . . .	47
<b>A. Conjuntos compactos y conexos</b>	<b>51</b>
A.1. Teoremas de convergencia . . . . .	51
A.2. Cadena de Peano en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	52
A.2.1. Conjuntos compactos . . . . .	53
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Prefacio

En cursos introductorios para estudiantes de licenciaturas como lo son Actuaría, Matemáticas, Ciencias de la Computación, Física, se imparte la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, aunque varios de los temas tratados en éstos son conocidos por casi todos los estudiantes desde el bachillerato, el análisis de los contenidos es mucho más exhaustivo y se extiende a espacios de dimensión mayor.

En dichos cursos, el concepto de curva se trata de manera no rigurosa, si es el caso que se llega a tratar y la definición en el sentido en que lo hace Camille Jordan es la comúnmente utilizada. No se considera la posibilidad de que exista otra definición, o alguna razón por la que podría existir otra, pero se tiene un primer acercamiento intuitivo y formal de lo que podemos entender por curva.

La definición de Jordan requiere de la continuidad de una función vectorial, sin embargo la representación geométrica de una función tal no aporta elementos que permitan apreciar el por qué podría considerarse otra posibilidad de definirla, como tampoco se considera la relevancia de conceptos o resultados que muestren las cualidades de una u otra definición.

Aunque varios de los conceptos y resultados que se utilizarán aquí, no forman parte de esas materias básicas que hemos mencionado, una intención de este texto, es buscar que éstos sean lo más accesible posible para la caracterización de una curva según Jordan, definición que es la única que se contempla aquí.

Para distinguir el final de la demostración de una proposición o teorema utilizaremos el símbolo ■

# Capítulo 1

## Imágenes continuas

La trayectoria que describe un cuerpo en movimiento es comúnmente utilizada para referirse a una curva; también lo son tanto las gráficas de funciones reales de variable real, como las imágenes de funciones en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$  cuyo dominio son los reales. Una de las primeras definiciones de curva se atribuye a Camille Jordan,<sup>2</sup> ésta requiere únicamente que sea la imagen de una función o aplicación continua en cada punto de un intervalo  $[a, b]$ . Es muy utilizada en diferentes cursos de Cálculo o Geometría Diferencial pues el concepto de continuidad es bastante accesible, aunque desafortunadamente sólo en algunos casos se mencionan los inconvenientes que podría traer el adoptar tal definición. Tal es el caso de la *Curva de Peano*, cuya imagen es una región cuadrada del plano, y para su construcción no utiliza resultados como los necesarios para su definición precisa. Del mismo modo, para demostrar la continuidad de la función asociada a ella, los resultados que se utilizarán no son tan accesibles como la idea de continuidad.

En contraste, se presenta la curva sinusoidal  $S^*$  o *curva del topólogo*, subconjunto del plano con apariencia de curva, y que sin embargo, no cumple con la definición de Jordan como se verá más adelante.

Algunos resultados y propiedades que se describen a lo largo del texto, son válidos en general para espacios topológicos más generales pero únicamente se enuncian para espacios métricos.

## 1.1. Definición de curva en el sentido de Jordan

Cabe distinguir la siguiente definición del término comúnmente utilizado para “*curva de Jordan*”, que se refiere a una *curva cerrada simple* en el plano, es decir en este texto no se considera el caso donde la función de aplicación  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua e inyectiva en  $(a, b)$  y donde  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Blumenthal y Menger,<sup>2</sup> utilizan el término *curva de Jordan* para lo que aquí hemos llamado *curva en el sentido de Jordan*. En adelante la condición que se incluye en la función asociada a la curva, es que ésta sea continua aunque puede no ser inyectiva, como podrá verse en los ejemplos siguientes.

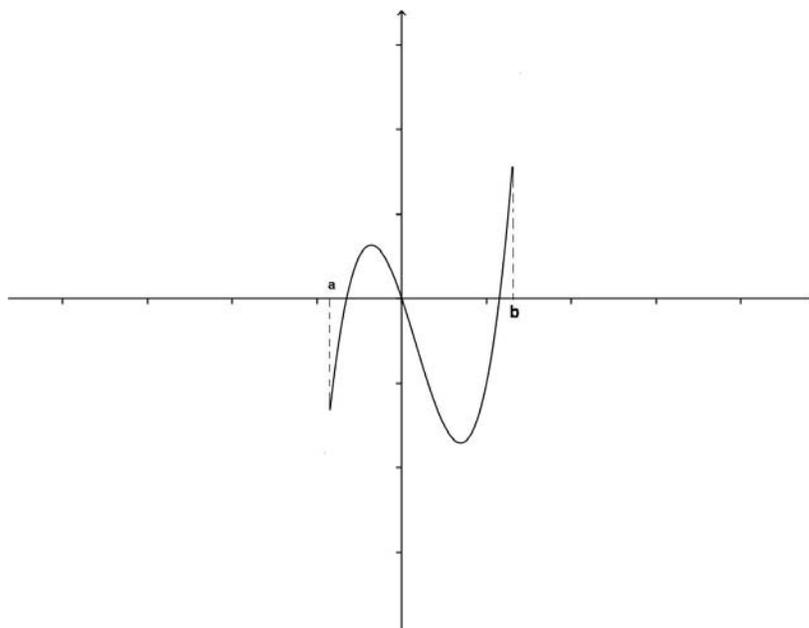


Figura 1.1:

**Definición 1.1.1.** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Un conjunto  $J \subset X$ , con  $X$  espacio métrico, es una curva en el sentido de Jordan si existe  $\varphi: [a, b] \rightarrow X$ , donde  $\varphi$  es continua para todo  $x \in [a, b]$ ,  $J = \{\varphi(x) \in X : x \in [a, b]\}$  y  $J$  se compone de más de un punto.

**Ejemplo 1.1.2.** En la figura 1.1 se muestra un conjunto  $G \subset \mathbb{R}^2$  donde  $G = \{(x, f(x)) : f \text{ es continua, } x \in [a, b]\}$ ,  $G$  es una curva en el sentido de Jordan.

**Ejemplo 1.1.3.** La parametrización de una curva en  $G \subset \mathbb{R}^2$  o  $G \subset \mathbb{R}^3$ , descrita por  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  en  $\mathbb{R}^3$  donde cada  $\alpha_i(t)$  es continua, es una curva en el sentido de Jordan. (Es claro que la inyectividad no se cumple en algunos casos)

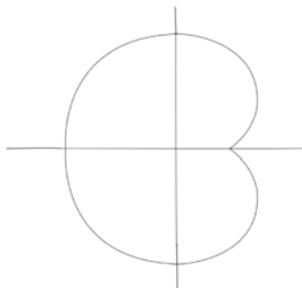


Figura 1.2:

El ejemplo de la figura 1.2 cumple con la definición clásica de Jordan, mientras que la que se muestra en la figura 1.1 es lo que denominamos aquí *curva según Jordan*. Sin embargo, en el siguiente caso no es cerrada ni simple, basta observar el punto  $(0, 0)$ .

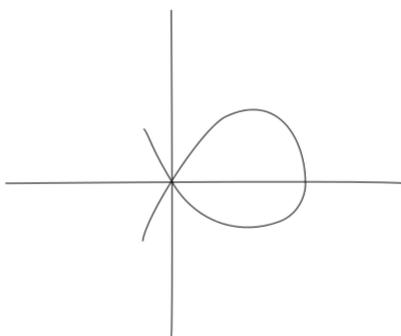


Figura 1.3:

La definición de Jordan, excluye todas aquellas gráficas e imágenes de funciones  $f$  no continuas, donde  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  aun cuando su representación coincide con la idea intuitiva de curva.

**Ejemplo 1.1.4.** La curva en el sentido de Jordan llamada *curva de Peano*, basa su construcción en una sucesión de funciones continuas definidas a partir de particiones del intervalo  $[0, 1]$  cuya norma tiende a cero; tal sucesión converge y el límite es una función continua.

Su construcción y propiedades, así como la demostración de que su imagen es, efectivamente, una curva en el sentido de Jordan, se enuncian a continuación.

### 1.1.1. Curva de Peano

Se construye la función  $\varphi_0$ , para después definir  $\varphi_k$  a partir de  $\varphi_{k-1}$ .

#### A. Construcción de $\varphi_0$ .

Considérese el intervalo  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y el cuadrado  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ; la función  $\varphi_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\varphi_0([0, 1])$  es una diagonal del cuadrado  $Q$  (entiéndase como diagonal a la línea recta que une los vértices opuestos del cuadrado). La función puede describirse como sigue:

$$\varphi_0(x) = (x, x)$$

$\varphi_0$  es la cadena de Peano de orden cero.

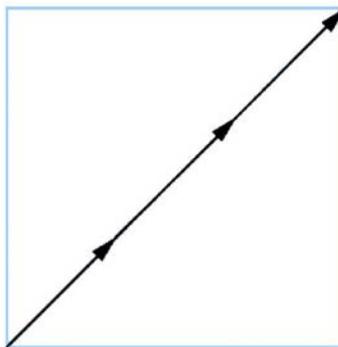


Figura 1.4:

Para la construcción de la función  $\varphi_1$  se considera lo siguiente.

El cuadrado  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  se divide en 9 cuadrados congruentes entre sí, es decir se define una partición 3 regular de  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Al igual que en el intervalo  $I$  la partición 9 regular define 9 subintervalos congruentes entre sí. La función  $\varphi_1$  es la poligonal de 9 lados tal que  $\varphi_1\left(\left[\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9}\right]\right)$  es una diagonal del cuadrado  $Q_i$  para  $i = 1, \dots, 9$ .

A cada cuadrado  $Q_i$  le corresponde un único lado de la poligonal que es la imagen de  $\varphi_1$ , como se muestra en la figura 1.5,

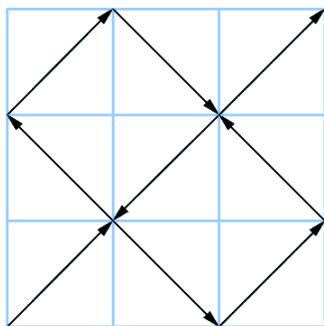


Figura 1.5:

En el caso de la función  $\varphi_2$ , cada uno de los 9 cuadrados en que se subdivide a  $Q$ , se subdividen a su vez en 9 cuadrados congruentes entre sí. Esto es, se define una partición  $3^2$  regular en el cuadrado  $Q$  a igual que en el intervalo  $I$  se tiene una partición  $9^2$  regular, se tienen  $Q_i$  cuadrados para  $i = 1, 2, \dots, 81$ . A cada subintervalo de la forma  $\left[\frac{i-1}{9^2}, \frac{i}{9^2}\right]$  le corresponde uno de los 9 subcuadrados  $Q_i$  para  $i = 1, \dots, 9^2$ .

La función  $\varphi_2$  es la poligonal de  $9^2$  lados tal que  $\varphi_2\left(\left[\frac{i-1}{9^2}, \frac{i}{9^2}\right]\right)$  es diagonal del cuadrado  $Q_i$  para  $i = 1, \dots, 81$ . La representación de la cadena  $\varphi_2$ , en uno de los cuadrados se muestra en la figura 1.7. Este comportamiento se reproduce en cada cuadrado  $Q_i$ .

**B. Construcción de la función  $\varphi_k$  dada  $\varphi_{k-1}$ .**

Ahora definiremos inductivamente la sucesión  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

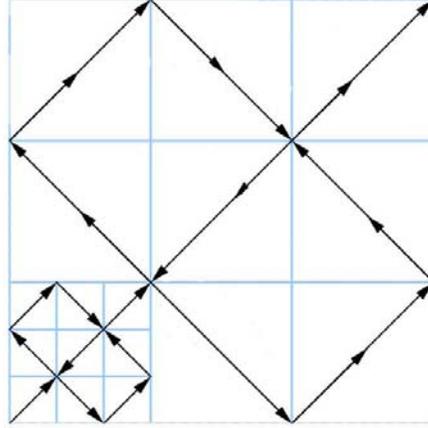


Figura 1.6:

Recordemos que la partición  $3^k$ -regular de  $C_1$  es la obtenida al dividir cada lado de  $C_1$  en  $3^k$  partes iguales. A los subcuadrados de esta partición los denotamos como  $Q_i^k$  para  $1 \leq i \leq 9^k$ .

La función  $\varphi_0: [0, 1] \rightarrow C_1$  se definió como la parametrización de una diagonal de  $C_1$ .

Sea  $k \geq 1$  y supongamos que  $\varphi_{k-1}: [0, 1] \rightarrow C_1$  es la poligonal tal que para cada  $1 \leq i \leq 9^{k-1}$ , se tiene que  $\varphi_{k-1} \Big|_{\left[\frac{i-1}{9^{k-1}}, \frac{i}{9^{k-1}}\right]}$  es una diagonal de un solo cuadrado de la partición  $3^{k-1}$ -regular de  $C_1$ . Damos una numeración a estos subcuadrados de modo que  $\varphi_{k-1} \Big|_{\left[\frac{i-1}{9^{k-1}}, \frac{i}{9^{k-1}}\right]}$  es una diagonal de  $Q_i^{k-1}$ , ésta diagonal mide  $\frac{\sqrt{2}}{3^{\frac{k-1}{2}}}$  para cualquier  $i = 1, \dots, 9^{k-1}$ .

Para cada  $1 \leq i \leq 9^{k-1}$  se divide el intervalo  $\left[\frac{i-1}{9^{k-1}}, \frac{i}{9^{k-1}}\right]$  en 9 partes iguales y el cuadrado  $Q_i^{k-1}$  en 9 cuadrados congruentes. Obtenemos, los intervalos  $\left[\frac{i-1}{9^k}, \frac{i}{9^k}\right]$  de la partición  $9^k$ -regular de  $[0, 1]$  y los  $9^k$  cuadrados de la partición regular correspondiente  $R_k$ .

Definimos  $\varphi_k: [0, 1] \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^2$  como una poligonal tal que:

- i) Para  $1 \leq i \leq 9^{k-1}$  y  $9(i-1) \leq j \leq 9i$ ,  $\varphi_k \Big|_{\left[\frac{j-1}{9^k}, \frac{j}{9^k}\right]}$  es una diagonal de uno solo de los 9 subcuadrados congruentes en que se dividió  $Q_i^{k-1}$  y
- ii)  $\varphi_k \left( \frac{9(i-1)}{9^k} \right) = \varphi_{k-1} \left( \frac{i-1}{9^{k-1}} \right)$ , y  $\varphi_k \left( \frac{9i}{9^k} \right) = \varphi_{k-1} \left( \frac{i}{9^{k-1}} \right)$ .

Por tanto,

$$\varphi_k \left( \left[ \frac{j-1}{9^k}, \frac{j}{9^k} \right] \right) \cup \varphi_{k-1} \left( \left[ \frac{i-1}{9^{k-1}}, \frac{i}{9^{k-1}} \right] \right) \subset Q_i^{k-1}$$

si  $1 \leq i \leq 9^{k-1}$  y  $9(i-1) \leq j \leq 9i$ .

Observamos que si  $1 \leq i \leq 9^{k-1}$  y  $t \in \left[ \frac{i-1}{9^{k-1}}, \frac{i}{9^{k-1}} \right]$ , entonces  $t \in \left[ \frac{i-1}{9^k}, \frac{i}{9^k} \right]$  para algun  $9i-9 \leq j \leq 9i$ . Entonces

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\| < \frac{\sqrt{2}}{3^{k-1}} \text{ si } t \in \left[ \frac{i-1}{9^{k-1}}, \frac{j}{9^{k-1}} \right]$$

para  $1 \leq i \leq 9^{k-1}$

A  $\varphi_k$  se le define como la *Cadena de Peano de orden k*. Se considera a la sucesión de funciones  $\{\varphi_k\}$ , y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi^*$  será la curva de Peano. Para mostrar que es efectivamente una curva según Jordan, es necesario describir varios resultados previos.

**Proposición 1.1.5.** *La sucesión  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión uniformemente de Cauchy.*

*Demostración.* De la construcción de  $\varphi_k(t)$  a partir de  $\varphi_{k-1}(t)$ , dado cualquier punto  $t$  en  $[0, 1]$  se cumple que  $\|\varphi_{k-1}(t) - \varphi_k(t)\| < \frac{\sqrt{2}}{3^{k-1}}$ . Entonces, para la expresión  $\|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\|$  donde  $m > n$ , se cumple:

$$\begin{aligned} \|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\| &\leq \|\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)\| + \|\varphi_{m-1}(t) - \varphi_{m-2}(t)\| + \cdots + \\ &\quad + \|\varphi_{m-(m-n)-1}(t) - \varphi_{m-(m-n)}(t)\| \\ &< \frac{\sqrt{2}}{3^{m-1}} + \frac{\sqrt{2}}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{3^{n-1}} = \sum_{j=n-1}^{m-1} \frac{\sqrt{2}}{3^j} \end{aligned}$$

Esta suma es la diferencia de 2 sumas parciales de la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{3^j}$  que es convergente, puede garantizarse entonces que dada cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que cualesquiera  $m, n$  números naturales tales que para  $m > n_0$  y  $n > n_0$ , se tiene que  $\|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon$ . ■

Utilizaremos dos resultados conocidos para mostrar la convergencia de la sucesión de cadenas de Peano y que además es una curva según Jordan.

**Teorema 1.1.6.** Sea  $\mathbb{X}$  espacio métrico, y  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones definidas en un conjunto  $U \subset \mathbb{X}$ . Existe una función  $f$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $U$  si y sólo si  $\{f_n\}$  es una sucesión uniforme de Cauchy.

Con este teorema puede garantizarse entonces que la siguiente es una buena definición.

**Definición 1.1.7.** Sea  $\varphi_n$  una cadena de Peano de orden  $n$ , la curva de Peano  $\varphi^*$  se define como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi^*.$$

### 1.1.2. La curva de Peano es una curva según Jordan

Para mostrar que la curva de Peano es una curva según Jordan, debe mostrarse que el límite de tales cadenas es efectivamente una función continua, de modo que se recuerda la definición de continuidad y dos de sus formulaciones equivalentes.

**Definición 1.1.8.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos con las distancias  $d_X$  y  $d_Y$  definidas respectivamente en cada espacio. Una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua en  $x_0$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x_0, y)$  es menor que  $\delta$ , entonces  $d_Y(f(x_0) - f(y)) < \varepsilon$ .

Esta definición es equivalente a la afirmación siguiente:

1. Una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua en  $x_0$ , si para cada sucesión  $\{x_n\}$  que converge a  $x_0$ , la sucesión  $f(x_n)$  converge a  $f(x_0)$ .

o bien

Una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua si lo es en cada punto, esto equivale a

2. Una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua, si para cada abierto  $A \subset Y$ , donde  $f: X \rightarrow Y$ , ocurre que  $f^{-1}(A)$  es un abierto en  $X$ .

El teorema siguiente es de gran utilidad para lo que se pretende mostrar en la curva de Peano.

**Teorema 1.1.9.** Si una sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  en un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y cada  $f_n$  es continua en un punto  $c$  de  $U$ , entonces la función  $f$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  es continua en  $c$ .

Se concluye entonces de este teorema, que la cadena de Peano cumple lo siguiente.

**Corolario 1.1.10.** *Dada la sucesión  $\{\varphi_k\}$  de cadenas de Peano, el  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi^*$  es una función continua.*

### 1.1.3. Representación de la imagen de $\varphi^*$ , la curva $P^*$

Para poder representar al conjunto descrito por las cadenas de Peano, se utiliza el resultado siguiente.

**Lema 1.1.11.** *La unión  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k([0, 1])$  es denso <sup>1</sup> en el cuadrado unitario  $C_1$ .*

*Demostración.* Sea  $(x, y) \in C_1$ , y  $\mathcal{V}_r$  una vecindad alrededor de este punto, de radio  $r$ . Existe  $k$  tal que  $\frac{\sqrt{2}}{3^{k_0}} < r$  si  $k_0 > k$ . Por otro lado como  $(x, y)$  es un punto del cuadrado  $C_1$ , existe entonces para  $x$  una  $i$  tal que  $\frac{i-1}{3^{k_0}} < x < \frac{i}{3^{k_0}}$ , del mismo modo, existe una  $j$  tal que,  $\frac{j-1}{3^{k_0}} < y < \frac{j}{3^{k_0}}$ , donde  $\frac{i-1}{3^{k_0}}, \frac{i}{3^{k_0}}, \frac{j-1}{3^{k_0}}, \frac{j}{3^{k_0}}$  son cada uno elementos de la partición  $3^{k_0}$  regular.

Cualquier punto  $a$  que se encuentre en  $\varphi_{k_0}([0, 1])$  y en el cuadrado  $[\frac{i-1}{3^{k_0}}, \frac{i}{3^{k_0}}] \times [\frac{j-1}{3^{k_0}}, \frac{j}{3^{k_0}}]$ , dista de  $(x, y)$  menos o igual que  $\frac{\sqrt{2}}{3^{k_0}}$  y por tanto  $a \in \mathcal{V}_r$ .

Se tiene entonces que la  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k([0, 1])$  es denso en  $C_1$ . ■

Por otro lado el conjunto formado por la curva de Peano es un subconjunto del cuadrado unitario, esto es  $P^* \subset C_1$ .

$P^*$  es un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^2$  ya que es la imagen continua bajo  $\varphi^*$  de un conjunto compacto (los detalles de esta afirmación se demuestran en el capítulo 2).

De la prueba del lema anterior y la convergencia uniforme de  $\varphi_k$ , dado un punto  $(x, y) \in C_1$  y  $r > 0$ , existe  $K$  tal que para  $k > K$  se cumple  $\|(x, y) - \varphi_k(t_k)\| < \frac{r}{2}$  para algún  $t_k$  y  $\|\varphi_k(t) - \varphi^*(t)\| < \frac{r}{2}$  para toda  $t \in [0, 1]$ . Por tanto, si  $k > K$ , entonces  $\|(x, y) - \varphi^*(t_k)\| < r$ , es decir  $C_1 \subset \overline{\varphi^*([0, 1])}$ .

Como  $\varphi^*([0, 1])$  es un conjunto compacto, es un conjunto cerrado, se tiene  $C_1 \subset \varphi^*([0, 1])$ . De donde  $C_1 = \varphi^*([0, 1])$ .

En consecuencia la representación de  $P^*$  en el plano es el cuadrado  $C_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ .

---

<sup>1</sup>Dados dos conjuntos  $A$  y  $D$ ,  $A$  es denso en  $D$ , si la cerradura de  $A$  es igual al conjunto  $D$ .

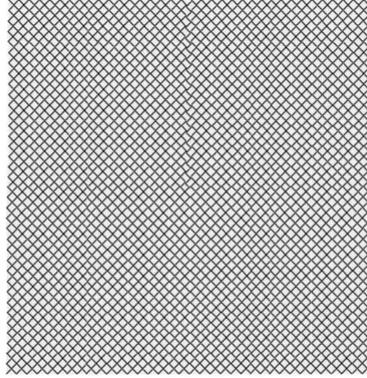


Figura 1.7:

#### 1.1.4. La curva sinusoidal o del topólogo

La definición de Jordan que hemos utilizado aquí, incluye entre las curvas a regiones como el cuadrado unitario  $C_1$ ; de modo semejante también puede incluirse un cubo en el caso de una construcción análoga a la de Peano considerando el espacio  $\mathbb{R}^3$  (ver apéndice 1). La curva siguiente que se muestra en la figura 1.8 no es una curva según Jordan, no obstante que su apariencia, es decir su representación en el plano  $\mathbb{R}^2$ , coincide con la idea intuitiva que se tiene de curva.

**Ejemplo 1.1.12.** Sea  $S^* = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in \left( 0, \frac{1}{\pi} \right] \right\} \cup \{ (0, y) : y \in [-1, 1] \}$  a este conjunto se le conoce como *curva del topólogo* o simplemente se le denomina *curva sinusoidal*

El conjunto  $\left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in \left( 0, \frac{1}{\pi} \right] \right\}$  es la gráfica de una función que no puede extenderse continuamente a  $\left[ 0, \frac{1}{\pi} \right]$

Considérese la sucesión  $\{x_k\} = \left\{ \frac{2}{(k+1)\pi} \right\}$  que converge al punto 0. Si tomamos  $a_k = \left\{ \frac{2}{(4k+1)\pi} \right\}_{k=1, \dots}$  y  $b_k = \left\{ \frac{2}{(4k+3)\pi} \right\}_{k=0, \dots}$ , subsucesiones de la misma, puede observarse que  $f(a_k) = \sin \left( \frac{1}{\frac{2}{(4k+1)\pi}} \right) = \sin \left( \frac{(4k+1)\pi}{2} \right) = 1$

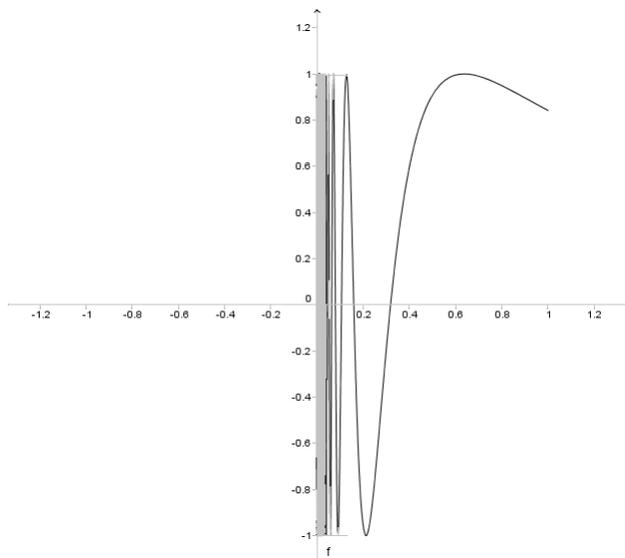


Figura 1.8:

para todo  $k = 1, \dots$ , del mismo modo  $f(b_k) = \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\frac{2}{(2k+3)\pi}} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{(4k+3)\pi}{2} \right) = -1$  para todo  $k = 0, \dots$ . Es decir existen dos subsucesiones de  $\{x_k\}$  cuyas imágenes convergen a valores distintos.

De aquí que tal función no puede ser definida de manera que sea continua. En el capítulo siguiente se describen conceptos que permiten mostrar que la curva sinusoidal  $S^*$  definida anteriormente no es una curva según Jordan.

Considerar la idea de imagen continua puede no ser suficiente para un concepto como el de curva; sin embargo debe tenerse en cuenta que esta definición es una de las más usuales para referirse a una curva. El concepto de *continuidad* en la definición de Jordan, permite desarrollar un análisis más cualitativo de las imágenes continuas de un intervalo  $[a, b]$  e incluso de las imágenes de un conjunto cerrado en un espacio métrico. La conexidad y la compacidad del conjunto  $[a, b]$  son conceptos que permiten caracterizar a los subconjuntos de un espacio métrico que son curvas según Jordan.

# Capítulo 2

## Algunas características de las Curvas según Jordan

### 2.1. Conexidad y compacidad

Entre las características de una curva según Jordan se encuentran las que se derivan de la continuidad de la función  $\varphi$  y las relacionadas con las del conjunto  $[a, b]$  subconjunto de  $\mathbb{R}$ , dominio de dicha función.

Después de observar el caso de la curva de Peano  $P^*$ , se vuelve particularmente importante considerar la condición de continuidad de la función  $\varphi$  y lo que ocurre con su imagen, esto es, considerar cuáles condiciones del intervalo  $[a, b]$  se conservan después de aplicar la función  $\varphi$ , y cuáles características tiene como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

Un resultado que se relaciona con la definición de Jordan es el siguiente.

**Proposición 2.1.1.** *Si  $E \subset X$ ,  $X$  espacio métrico,  $E$  conexo, y  $f: E \rightarrow f(E) \subset Y$ , donde  $Y$  es un espacio métrico, y  $f$  continua, entonces  $f(E)$  es conexo.*

*Demostración.* Supóngase que  $f(E)$  es no conexo, entonces existen  $S_1, S_2$  conjuntos cerrados en  $f(E)$  no vacíos, ajenos entre sí, con  $f(E) = S_1 \cup S_2$ .

Considérese  $S_1^*, S_2^*$ , como sigue:

$$S_1^* = \{x \in E : f(x) \in S_1\}$$

$$S_2^* = \{x \in E : f(x) \in S_2\}.$$

Puede observarse que  $S_1^* \neq \emptyset$  y  $S_2^* \neq \emptyset$  (es claro que  $S_1^* = f^{-1}(S_1)$ , y  $S_2^* = f^{-1}(S_2)$ ); como  $f$  es continua, los conjuntos  $S_1^*$  y  $S_2^*$  son conjuntos cerrados en  $E$ . Por otro lado,  $S_1^* \cap S_2^* = \emptyset$  y  $E = S_1^* \cup S_2^*$ .

De aquí se tiene que  $E$  es desconexo lo que es una contradicción al hecho de que  $E$  es conexo.

Por tanto  $f(E)$  es conexo ■

Otra de las características del conjunto  $[a, b]$  es la compacidad. En cursos de cálculo y análisis es común demostrar el resultado que se enuncia a continuación. La demostración puede verse en,<sup>1</sup> es sencilla y concreta.

**Teorema 2.1.2.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos  $E \subset X$  y  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua. Si  $E$  es un conjunto compacto en  $X$ , entonces  $f(E)$  es compacto en  $Y$ .*

La compacidad y conexidad de una curva según Jordan se cumplen en el caso de la curva de Peano  $\varphi^*$  y en cualquier imagen continua de  $[0, 1]$  en  $X$ . Estas características se vuelven relevantes para buscar condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de un espacio métrico sea una curva según Jordan.

Por otro lado, al considerar la curva sinusoidal  $S^*$ , pueden distinguirse características que contribuyen a observar el hecho de que  $S^*$  no es una curva según Jordan mientras que la curva de Peano sí lo es<sup>1</sup>. Es conveniente entonces, observar lo que ocurre en esta curva con relación a las propiedades de compacidad y conexidad.

Así, una curva según Jordan es un conjunto compacto y conexo y además subconjunto de un espacio métrico  $X$ , estas propiedades pueden describirse en términos de lo que se conoce como *continuo*<sup>2</sup>.

Una curva según Jordan  $J$ , es imagen de una función  $\varphi: [a, b] \rightarrow X$  continua,  $J = \{\varphi(x) \in X : x \in [a, b]\}$ . Si el conjunto  $J$  tiene más de un punto, es un conjunto *continuo*.

De los teoremas anteriores se tiene que si  $\varphi: [a, b] \rightarrow X$  es continua, entonces:

1. La imagen  $\varphi([a, b])$  es un subconjunto conexo de  $X$

---

<sup>1</sup>El conjunto descrito por la sinusoidal  $S^* = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, \frac{1}{\pi}]\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$  es un ejemplo comúnmente utilizado en Topología. En "Topology" Hocking-Young la denominan la "topologist sine curve"

<sup>2</sup>Esto es, dado  $X$  un espacio métrico, y  $C \subset X$ ,  $C$  es un continuo si es un conjunto conexo y compacto tal que contiene más de un punto.

2. La imagen  $\varphi([a, b])$  es un subconjunto compacto de  $X$

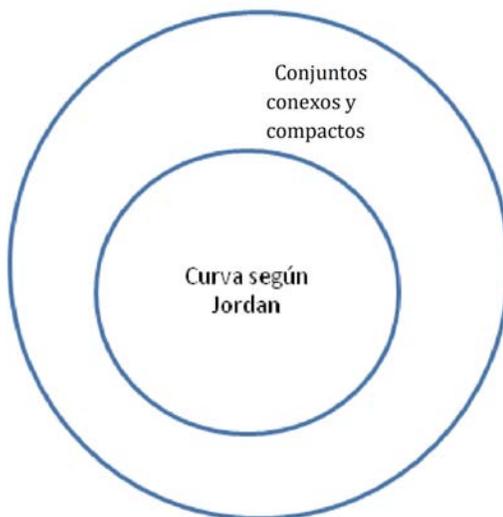


Figura 2.1:

**Teorema 2.1.3.** Sean  $X, Y$  espacios métricos,  $C \subset X$  un conjunto continuo y una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  continua, si  $\varphi(C)$  no consta de un solo punto, entonces  $\varphi(C) \subset Y$  es un conjunto continuo

Una curva  $C$  en el sentido de Jordan es un conjunto continuo, en el caso de la sinusoidal  $S^*$ , se trata de un conjunto que no es una curva según Jordan, sin embargo es un conjunto conexo y compacto (ver apéndice 2).

En la representación de esta curva  $S^* = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in \left( 0, \frac{1}{\pi} \right] \right\} \cup \left\{ (0, y) : y \in [-1, 1] \right\}$ <sup>3</sup> (figura 2.2), se observa que la discontinuidad en el punto  $(0,0)$  indica un comportamiento de esta “curva” en un vecindad  $\mathcal{V}_r$  de este punto, muy distinto del que ocurre en otros puntos de  $S^*$ . Las diferencias entre estos puntos, sirven de ejemplo para conceptos que se relacionan con la definición de conexidad, algunos de ellos se verán a continuación.

Dado un punto  $\bar{x}_0$  en el conjunto  $S^*$ , puede observarse lo siguiente:

<sup>3</sup>En algunos textos de Topología se consideran diferentes versiones de esta curva, se considera al conjunto  $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1, 1] \right\}$ , o bien se considera  $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in (-1, 0] \right\}$ .

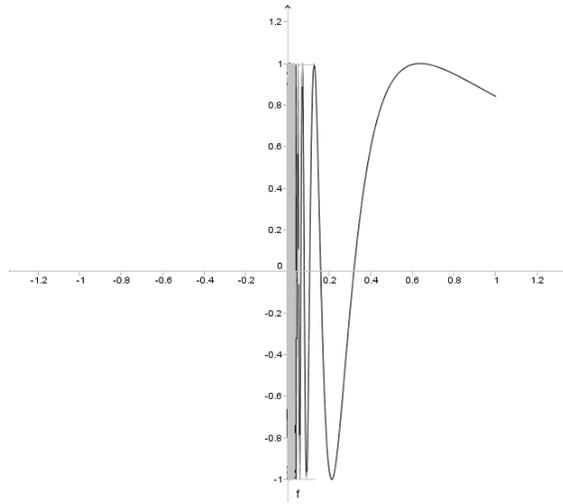
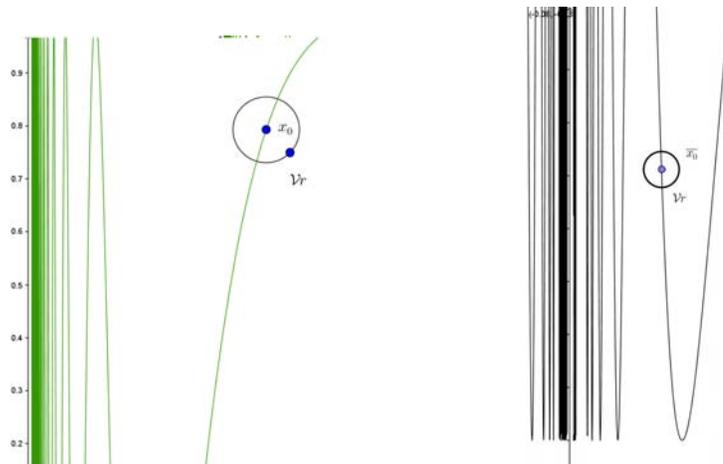


Figura 2.2: Curva del topólogo

a) El punto  $\bar{x}_0 = (x, \sin \frac{1}{x})$  con  $x \in (\frac{1}{(k+2)\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{k\frac{\pi}{2}})$  donde  $k$  es un número impar, cumple que, dada  $\mathcal{V}_r$  una bola con centro en  $\bar{x}_0$  y radio  $r$ , el conjunto  $A = \mathcal{V}_r \cap S^*$  es en general un conjunto no conexo.



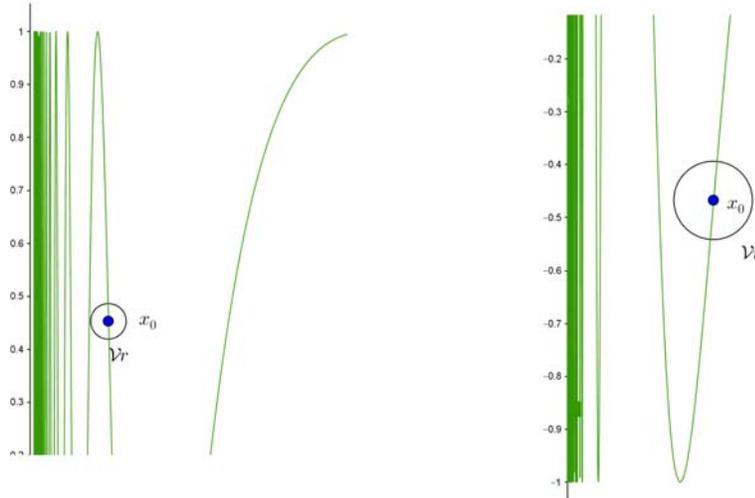


Figura 2.3:

Es posible encontrar una vecindad contenida en  $\mathcal{V}_r$  alrededor de este punto que sea un conjunto conexo. Sea

$$r^* < \min \left\{ r, \text{distancia} \left( x, \frac{1}{(k+2)\frac{\pi}{2}} \right), \text{distancia} \left( x, \frac{1}{k\frac{\pi}{2}} \right) \right\}.$$

La intersección  $\mathcal{V}_{r^*} \cap S^*$  para  $\mathcal{V}_{r^*}$  una vecindad de radio  $r^*$  alrededor de  $\bar{x}_0$ , es un conjunto conexo contenido en  $\mathcal{V}_r \cap S^*$  (figura 2.4).

- a) Para  $x \in \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{\pi} \right]$  se toma  $r^* < \left( \min r, d\left(x, \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right), d\left(x, \frac{1}{\pi}\right) \right)$
- b) En el caso en el cual  $x_0 = \left( x, \sin \frac{1}{x} \right)$  donde  $x = \frac{1}{k\frac{\pi}{2}}$  para una cierta  $k$  impar, dada la vecindad  $\mathcal{V}_r$  de  $x_0$ , si se considera un radio

$$r^* < \min \left\{ r, \text{distancia} \left( x, \frac{1}{(k-1)\frac{\pi}{2}} \right), \text{distancia} \left( x, \frac{1}{(k+1)\frac{\pi}{2}} \right) \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces, la intersección de una vecindad de radio  $r^*$  alrededor de dicho punto con  $S^*$ , es un conjunto conexo contenido en  $\mathcal{V}_r \cap S^*$ . (figura 2.5).

- c) Cuando  $x = (0, y)$  con  $y \in [-1, 1]$ , dada cualquier vecindad  $\mathcal{V}$  de este punto, la intersección de esta vecindad con  $S^*$ , es siempre un conjunto no conexo en  $\mathbb{R}^2$ .

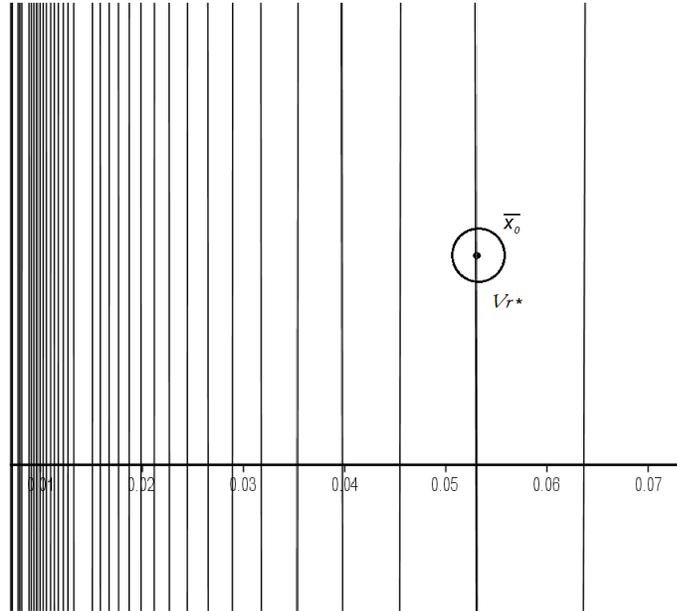
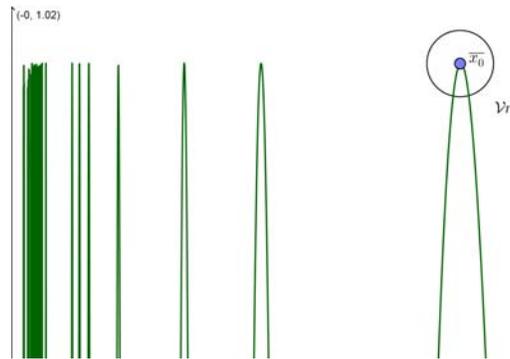


Figura 2.4:



Las diferencias entre los puntos que se han descrito, se relacionan con el concepto de conexidad local<sup>4</sup>, su definición se precisa en dos casos que se distinguen en algunos textos de Topología y en otros no. En<sup>3</sup> se muestra

<sup>4</sup>Blumenthal-Menger, “*Studies in Geometry*” distinguen “localmente conexo” de “fuertemente localmente conexo” entendiendo a la primera definición como el término *im kleinen* y que representa un concepto más débil.

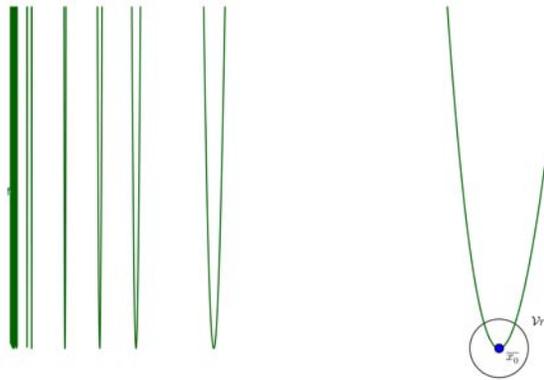


Figura 2.5:

un particular interés en observar que ambos casos definen conceptos que coinciden cuando se trata de una curva según Jordan, algunos ejemplos sobre estas definiciones y estas dos distinciones se describen en el apéndice de este capítulo.

**Definición 2.1.4.** Un espacio  $S$  es *localmente conexo en un punto  $q$* , si para todo conjunto abierto  $U$  que contiene a  $q$ , existe  $V \subset U$ , donde  $V$  es un conjunto conexo y abierto que contiene a  $q$ .

Ahora conviene notar qué es lo que ocurre con el concepto de conexidad local para el caso de la curva de Peano  $P^*$  y en general para una curva según Jordan. Una de las observaciones importantes que se mencionan en Topología, es el hecho de que un conjunto puede ser conexo, pero no localmente conexo, y un ejemplo de ello es el caso de la curva sinusoidal  $S^*$ .

En el caso de la curva de Peano, dado un punto  $x$  en  $P^*$ , cualquier vecindad  $\mathcal{V}$  en  $P^*$  de dicho punto, es un conjunto conexo en  $\mathbb{R}^2$ ;  $P^*$  es entonces un conjunto localmente conexo en todos sus puntos (figura 2.7)<sup>5</sup>.

Este concepto permite distinguir algunos conjuntos dentro de los que son conexos y compactos y que, caracterizan a las curvas en el sentido de Jordan. La definición y teoremas siguientes, se describen también en el apéndice correspondiente, la demostración del teorema es la que se describe en.<sup>9</sup>

<sup>5</sup>En este sentido, este argumento puede extenderse al concepto de *variedad* y preguntarse lo qué puede ocurrir con éstas en el caso de que sean un conjunto localmente conexo, conexo y compacto. Éste análisis requeriría de un desarrollo semejante al hecho hasta aquí para el caso de una curva en el sentido de Jordan.

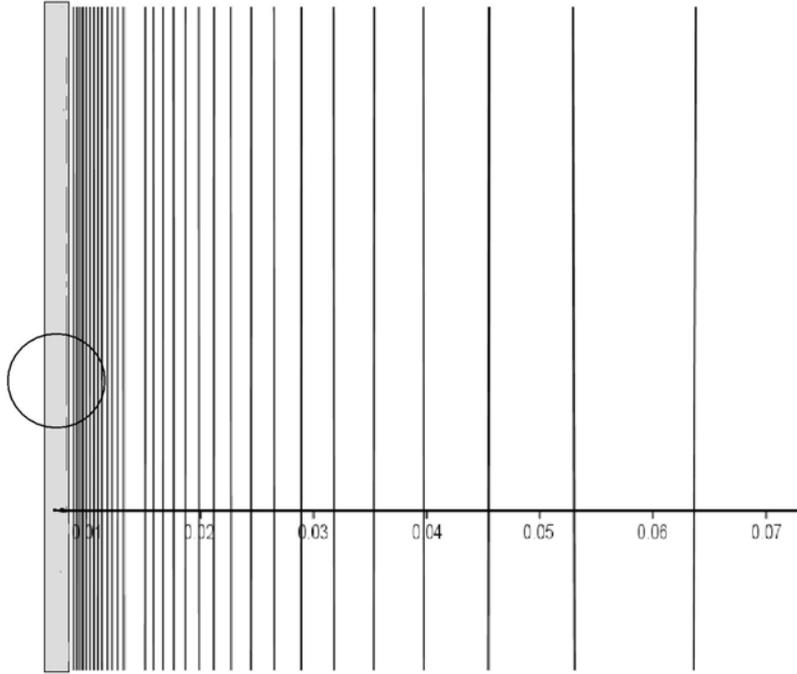


Figura 2.6:

**Definición 2.1.5.** Dados  $X$  y  $Y$ , espacios métricos y una aplicación  $f: X \rightarrow Y$ , la aplicación  $f$  es cerrada si  $f(N)$  es un conjunto cerrado en el espacio  $Y$  para todo conjunto  $N$  cerrado en  $X$ .

**Teorema 2.1.6.** Sea  $X$  espacio métrico, si  $S$  es un conjunto en  $X$  localmente conexo y  $f: S \rightarrow T$  es una aplicación cerrada, entonces  $f(S)$  es localmente conexo en  $T$ <sup>6</sup>.

**Teorema 2.1.7.** Dada  $\varphi: K \rightarrow H$  una aplicación continua,  $K$  un espacio compacto y  $H$  un espacio de Hausdorff entonces  $\varphi$  es una aplicación cerrada.

Estos resultados sugieren que, un conjunto  $B$  puede ser imagen de un cierto conjunto  $A$  cerrado bajo una aplicación continua y ser además un

<sup>6</sup>La demostración de este teorema puede verse en.<sup>5</sup>

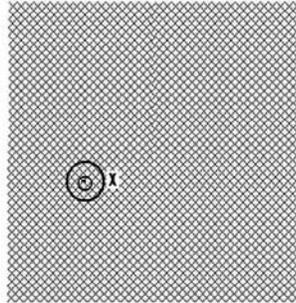


Figura 2.7:

conjunto no cerrado. Análogamente, el conjunto  $B$  puede ser un conjunto que no es localmente conexo cuando el conjunto  $A$  es un conjunto localmente conexo.<sup>7</sup>

En el caso de una función continua  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o en general  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es claro que se cumple el Teorema 2.1.7, de modo que la aplicación  $\varphi$  será una aplicación cerrada, y en consecuencia la imagen del conjunto  $[a, b]$  será un conjunto localmente conexo en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^n$ .

Así, toda curva según Jordan es localmente conexo.

**Teorema 2.1.8.** *Si  $\varphi: [a, b] \rightarrow X$ , donde  $X$  es espacio métrico y  $\varphi$  es una función continua, entonces  $\varphi([a, b])$  es un conjunto localmente conexo.*

La definición dada por Jordan para referirse a una curva es suficiente para garantizar que ésta es compacta, conexa y localmente conexa, pues la propiedad de ser localmente conexo se conserva después de aplicar una función  $f$  continua. Así el conjunto  $f([a, b])$ , será un conjunto localmente conexo, compacto y conexo en  $\mathbb{R}^n$ .

Estas características corresponden a lo que se conoce como *conjunto o espacio de Peano*.

---

<sup>7</sup>Conviene observar lo que significa una aplicación cerrada, ejemplos al respecto, así como uno relativo a un conjunto localmente conexo, pueden verse en el apéndice que corresponde a este capítulo. Por otro lado, cuando el codominio es un espacio de Hausdorff, toda aplicación  $f: [a, b] \rightarrow H$  continua es cerrada, es decir toda aplicación  $f: [a, b] \rightarrow H$  continua tiene como imagen un conjunto localmente conexo en  $H$ .

Otra definición que se utiliza también para referirse a una curva, es el concepto de *arco*.<sup>8</sup> En algunos texto se parte de esta definición, en *Geometría Diferencial*, Pogorélov escribe: “Definamos la curva elemental. Un conjunto  $\gamma$  de puntos en el espacio se llamará curva elemental si es la imagen en el espacio de una aplicación topológicas obtenida de un segmento abierto de la recta” donde antes define: “Sea  $\phi$  una aplicación inyectiva y continua de un conjunto  $M$ , si la aplicación  $\phi^{-1}$  del conjunto  $\phi(M)$  también es continua, se dice que  $\phi$  es una aplicación topológica” y precisa: “Un conjunto  $\gamma$  de puntos del espacio se llamará curva simple si este conjunto es conexo y si para todo punto  $x$  del mismo existe una vecindad tal que la parte de  $\gamma$  comprendida en él constituye una curva elemental”.<sup>9</sup>

“Un conjunto  $\gamma$  de puntos se denominará curva general, si este conjunto es la imagen obtenida por una aplicación localmente topológica de una curva simple en el espacio”.

Diremos que la aplicación  $f_1$  de una curva simple  $\gamma_1$  y la aplicación  $f_2$  de una curva simple  $\gamma_2$  determinan una misma curva general  $\gamma$ , si entre los puntos de las curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  puede establecerse una correspondencia topológica tal que coincidan en la curva  $\gamma$  las imágenes de los puntos correspondientes de estas curvas.

En lo que se ha desarrollado hasta aquí, se considera la definición de Jordan como subconjunto de un espacio métrico  $X$ <sup>10</sup>, cabe mencionar que en particular el concepto se define también como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , al igual que se consideran otras posibles definiciones<sup>11</sup>. Por otro lado, la propiedad de que una función  $f: [a, b] \rightarrow X$  sea una *aplicación cerrada* está implícita en el concepto de curva según Jordan.

---

<sup>8</sup>Sea  $f: [0, 1] \rightarrow X$  un homomorfismo sobre su imagen donde  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$  para dos puntos  $x, y$  en el espacio  $X$ , se dice que  $f$  y  $f([0, 1])$  son un *arco* desde  $x$  hasta  $y$ .

<sup>9</sup>Pogorélov también describe: “La imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto o de una circunferencia, es una curva simple.”

<sup>10</sup>La definición de curva que se considera en algunos libros de Geometría Diferencial como es el caso del texto de Pogorélov, implica considerar que la función inversa de la  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , o bien de  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es también continua, condición que en este texto no se aborda como parte de la definición de curva.

<sup>11</sup>Si una función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homomorfismo, también es una aplicación cerrada, lo que garantiza que manda conjuntos localmente conexos en conjuntos localmente conexos después de aplicarse.

## 2.2. Espacios de Peano

Como puede verse, la definición de un espacio de Peano  $P$  está relacionada con la definición de curva según Jordan, de hecho en algunos algunos textos se parte de esta definición para referirse a una curva. En<sup>5</sup> se define al iniciar el capítulo, lo que denomina *una curva plana de Peano* utilizando el concepto de curva de Peano.<sup>12</sup>

**Definición 2.2.1.** Dado un espacio métrico  $X$ , un conjunto  $P$  de Peano es un conjunto compacto, conexo y localmente conexo.

Puede concluirse entonces de la Proposición 2.1.1, del Teorema 2.1.2 y del Teorema 2.1.8, que la imagen  $f([a, b])$  donde  $f: [a, b] \rightarrow X$ , es un conjunto de Peano en  $\mathbb{R}^2$ , si  $f$  es continua. O sea una curva según Jordan es un conjunto de Peano.

Se explica así que, para referirse a una curva según Jordan, también se utilice la definición de conjunto de Peano salvo una “*transformación topológica*” o un homeomorfismo. De este modo es factible también considerar la posibilidad de que un conjunto sea un arco *por pedazos*, lo que se refiere al concepto de arco-conexo y que no se abordará aquí. Análogamente puede considerarse la posibilidad de que un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  sea una curva según Jordan *por pedazos*, y que describe otro concepto que se verá en el capítulo siguiente. Cabe reiterar que ambos conceptos están estrechamente relacionados cuando se trata de un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

Por otro lado, considerar que una misma representación en el plano  $\mathbb{R}^2$  puede corresponder a distintas funciones de la forma  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , explica de cierto modo el hecho de considerar una relación de equivalencia en la definición de curva según Jordan.

### 2.2.1. Características de la función $f$

El concepto de conjunto de Peano, integra tres de las condiciones de una curva según Jordan (figura 2.8), el caso de la sinusoidal  $S^*$  es un ejemplo de un conjunto conexo, compacto que no es localmente conexo

---

<sup>12</sup>En el texto “*Elementary Differential Geometry*”, Guggenheimer comenta: “We will see that different branches of differential geometry deal with different notions of a curve. . .” y define: “A plane Peano curve is a continuous map of the interval  $[0, 1] = I$  into the plane”. y considera a la definición de Jordan una clase de equivalencia.

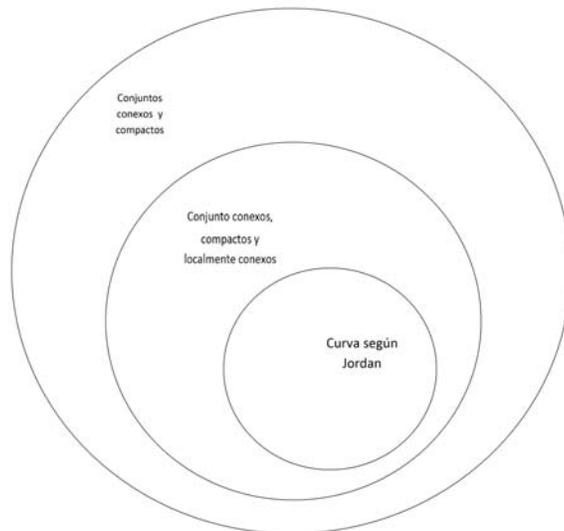


Figura 2.8:

En general, si se tiene un subconjunto  $M$  de un espacio métrico  $X$ , que es además un conjunto de Peano, puede preguntarse si esta condición es suficiente para garantizar que sea también la imagen de una aplicación  $\varphi: [0, 1] \rightarrow M$  continua.<sup>13</sup> Se abordará aquí el caso en el cual  $M$  es subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , para determinar condiciones que garanticen la existencia de tal aplicación.

En el caso de la curva de Peano  $P^*$ , la función  $\varphi^*$  que la define es continua, suprayectiva, pero no es inyectiva. Efectivamente, de serlo, dado un punto  $\bar{x}_0$  que esté en el cuadrado  $Q$ , tal que  $\varphi^*(t_0) = \bar{x}_0$  para un punto interior  $t_0$  de  $[0, 1]$ , se tiene que  $\varphi^{*-1}(Q - \{\bar{x}_0\})$  debiera ser un conjunto conexo, lo cual es falso, (ver figura 2.9) ya que

$$(\varphi^*)^{-1}(Q - \{\bar{x}_0\}) = [0, 1] \setminus t_0 = [0, t_0) \cup (t_0, 1]$$

es un conjunto desconexo.

Inversamente, dado un conjunto que cumpla con la condición de ser una curva según Jordan en un espacio métrico, que denotaremos por la letra  $J$ <sup>14</sup>,

<sup>13</sup>Esto corresponde a una parte del Teorema de Hahn Mazurkiewicz, que se abordará en el capítulo siguiente.

<sup>14</sup>En<sup>9</sup> se hace una precisión sobre la definición de Jordan: “Incidentally, instead of Peano

surge la pregunta sobre la posibilidad de construir una función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cuya imagen sea el conjunto  $J$ .<sup>15</sup>

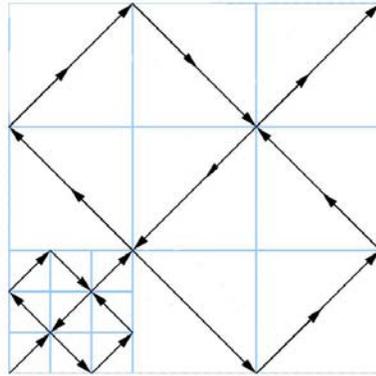


Figura 2.9:

A partir de la construcción de la curva de Peano, puede considerarse el caso de definir alguna función análoga  $f: [0, 1] \rightarrow M$  donde el conjunto  $M$  se parezca a un cuadrado de  $\mathbb{R}^2$  (a un cubo de  $\mathbb{R}^3$ , y considerar el caso de llevar tal construcción para un subconjunto  $C^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  de  $\mathbb{R}^n$ ). Es decir, determinar si es posible dar una función definida de  $[0, 1]$  sobre  $M$  que sea continua si el conjunto  $M$  es un espacio métrico, conexo, compacto y localmente conexo.

---

space many authors use the term continuous curve, wich is a more logical name but is less often used". En el caso de la curva conocida como *Curva de Peano*, ésta debe su nombre a la definición anterior.

<sup>15</sup>En<sup>9</sup> se enuncia: "... dado un espacio topológico  $X$  siempre es posible definir una función de valor real sobre el espacio topológico, aún cuando la función sea constante, pero ¿éstas pueden dar información suficiente sobre el espacio  $X$ ?

## Capítulo 3

# Curva según Jordan en $\mathbb{R}^2$

En el capítulo anterior se mostró que una curva según Jordan es un conjunto conexo, compacto y localmente conexo con más de un punto, lo que corresponde a la definición de un conjunto de Peano.

En la búsqueda de una caracterización para una curva según Jordan, Hahn y Mazurkiewicz describen, en forma independiente,<sup>2</sup> en el teorema que lleva el nombre de ambos<sup>1</sup>, las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio  $M$  sea la imagen de una aplicación continua definida en  $[0, 1]$ , donde  $M$  es un subespacio más general que uno de  $\mathbb{R}^2$ .

La demostración del teorema de Hahn-Mazurkiewicz utiliza resultados que se cumplen en general para cualquier espacio topológico y que en particular se cumplen para  $\mathbb{R}^n$ , el enunciado general puede verse en.<sup>5</sup> En este sentido, las propiedades geométricas de una curva de Peano contenida en un espacio métrico como  $\mathbb{R}^2$ , permiten garantizar la existencia de una función  $f: [0, 1] \rightarrow P^*$ .

En el caso de un espacio topológico general  $M$  que cumple con las propiedades de Peano, existen resultados que son de gran utilidad para determinar que la función buscada  $f: [0, 1] \rightarrow M$  sea continua, y si además  $M$  es un espacio de Hausdorff o métrico, los argumentos son más contundentes. La existencia de una función  $f: [0, 1] \rightarrow P$ , reducida al caso de un subconjunto  $P \subset \mathbb{R}^2$ , puede utilizar aquéllos resultados relativos al espacio  $\mathbb{R}^2$ .

---

<sup>1</sup>En la búsqueda de caracterizaciones para este concepto, en<sup>2</sup> los autores refieren que la primera definición intrínseca de continuos que son imágenes continuas del conjunto  $[0, 1]$ , por la propiedad de localmente conexo, fué dada en forma independiente por H.Hahn y Stefan Mazurkiewicz.

### 3.1. Algunas propiedades de una curva según Jordan

Si se considera únicamente la condición de conexidad para referirse a una curva, la definición de Jordan incluiría conjuntos como la curva sinusoidal  $S^*$ . Por otro lado, al referirse al concepto de conexidad, en algunos textos de Topología, como en<sup>7</sup> y,<sup>12</sup> se refieren a esta propiedad como una definición *negativa*<sup>2</sup> lo que en su momento también da pie a la definición de conceptos como el que se describe a continuación y que será de utilidad para la caracterización de una curva según Jordan en un espacio métrico.

**Definición 3.1.1.** Un espacio  $X$  es conexo por trayectorias (*cpt*) si y sólo si para todo par de puntos  $x, y$  en el espacio  $X$ , existe una función  $f: [0, 1] \rightarrow X$  continua, tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .

Se llamará tanto a  $f$  como a  $f([0, 1])$  la *trayectoria desde  $x$  hasta  $y$* . Puede considerarse a esta definición como la propiedad de ser curva según Jordan por *pedazos*. El ejemplo del conjunto  $S^*$  muestra, que un conjunto puede ser conexo y no ser conexo por trayectorias. Otro de los resultados usuales en cursos de topología básicos, y cuya demostración puede verse en [12, 27.6], es el siguiente:

**Teorema 3.1.2.** *Si un conjunto  $X$  es *cpt*, entonces es conexo.*

El inverso de este resultado, como ya se mencionó, no se cumple. Considérese nuevamente el caso de la sinusoidal  $S^*$ , la función  $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  está definida en  $(0, \frac{1}{\pi}]$ , su gráfica es un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^2$  y su cerradura  $S^*$  es por tanto conexa.

Supongamos que existe una trayectoria que une a dos puntos  $a$  y  $b$  de  $S^*$ ,  $a = (0, 0)$  y  $b = (\frac{1}{\pi}, \text{sen}(\frac{1}{\pi}))$ , dada por  $f: [0, 1] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f(0) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ ,  $f(1) = (0, 0)$ , donde  $f$  es continua, y  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ , es decir cada una de estas funciones es continua.

Sea el conjunto  $\mathcal{C} = \{t \in [0, 1] : f_1(t) = 0\}$ , este conjunto es no vacío y está acotado inferiormente, así que existe el ínfimo de  $\mathcal{C}$ , sea  $\text{ínf } \mathcal{C} = \mathcal{D}$ . El conjunto  $\mathcal{C}$  es cerrado, ya que  $f$  es continua, entonces podemos afirmar que  $\mathcal{C}$

---

<sup>2</sup>En<sup>9</sup> se hace referencia al concepto de conexidad: *The definition of connectedness is negative in nature; it provides for the non-existence of a certain kind of splitting of the space. A more positive approach to the same sort of problem is provide by pathwise (or arcwise) connectedness*

es un conjunto compacto, de modo que  $\inf \mathcal{C} = \mathcal{D} = \min \mathcal{C}$ , y éste es positivo, ya que  $f_1(0) = 1$ .

Como  $f$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f(t) - f(c)\| < \frac{1}{2}$  si  $|t - c| < \delta$ . Tomemos  $0 < t_0 < c$  con  $c - t_0 < \delta$ . Entonces  $f_1(t_0) > 0$ ,  $f_1(c) = 0$ , y por el teorema del valor intermedio se cumple que  $[f_1(c), f_1(t_0)] \subset f_1([t_0, c])$ .

Para todo  $n$  suficientemente grande se cumple que  $\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}$  están ambos en  $[0, f_1(t_0)]$ . Así existen  $t_1, t_2 \in [t_0, c]$  tales que  $f_1(t_1) = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$  y  $f_1(t_2) = \frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}$  y tenemos  $|t_1 - c| < \delta$ ,  $|t_2 - c| < \delta$ , entonces

$$\|f(t_1) - f(c)\| \geq |f_2(t_1) - f_2(c)| = |1 - f_2(c)|$$

y

$$\|f(t_2) - f(c)\| \geq |f_2(t_2) - f_2(c)| = |-1 - f_2(c)|$$

Si  $f_2(c) \leq 0$ , entonces,  $\|f(t_1) - f(c)\| > 1$ . Si  $f_2(c) > 0$ , entonces,  $\|f(t_2) - f(c)\| > 1$ .

Lo que contradice que  $\|f(t) - f(c)\| < \frac{1}{2}$  si  $|t - c| < \delta$ .

Esto muestra que la sinusoidal  $S^*$  es un conjunto que no es *cpt*.

En,<sup>14</sup> aparece una forma de considerar que el inverso del teorema 3.1.2 pueda cumplirse, e introduce, antes de definir la propiedad de ser localmente conexo, un concepto análogo a éste. En consecuencia la definición dada a continuación, se describe en,<sup>14</sup> antes de hablar de un espacio de Peano.

En el capítulo anterior se definió *localmente conexo*, en forma análoga se enuncia ahora la siguiente definición para un espacio métrico  $M$ .

**Definición 3.1.3.**  $M$  es localmente conexo por trayectorias (*lcpt*) en un punto  $q$ , si para todo conjunto abierto  $U$  que contiene a  $q$ , existe  $V \subset U$ , donde  $V$  es un conjunto conexo por trayectorias y abierto que contiene a  $q$ .

En forma semejante, un espacio localmente conexo por trayectorias (*lcpt*), se define como un conjunto en donde cada punto tiene una base de vecindades que se compone de conjuntos conexos por trayectorias.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>En<sup>14</sup> se dice que esta definición vista como una aproximación a la definición de conexidad, es particularmente muy socorrida para estudiar “*propiedades de conectividad desde un punto de vista algebraico, es decir via la teoría de homotopía.*”

En<sup>7</sup> se comenta sobre la definición dada por G. Cantor en 1883 para un conjunto conexo, también se dieron definiciones por Jordan en 1893, A. Schoenflies, 1904 y por S. Mazurkiewicz en 1920, la cual es la conocida hasta la actualidad.

**Ejemplo 3.1.4.** Sea  $B^*$  la union de los segmentos que unen al punto.

$$(1, 0) \text{ con los puntos } \left\{ (0, 0), (0, 1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), \dots, (0, \frac{1}{n}) \right\} .^4$$

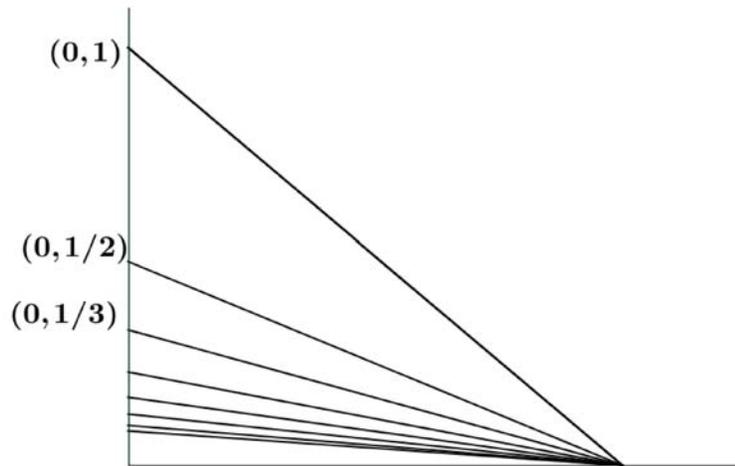


Figura 3.1:

Al igual que el ejemplo que se describirá inmediatamente después, este conjunto es una unión de segmentos de recta que satisfacen condiciones que permiten ver que no es localmente conexo en muchos de sus puntos.

Dado un subconjunto  $M$  de un espacio métrico  $X$ , un conjunto  $C$  es abierto en  $M$  si  $C = M \cap U$ , donde  $U$  es un conjunto abierto en  $X$ . Análogamente  $C$  será un conjunto cerrado en  $M$  si  $C = M \cap F$  y  $F$  es un subconjunto cerrado en  $X$ .

Considérese ahora lo siguiente:

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A \neq \emptyset$  conjuntos cualquiera,  $U$  un subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ , y  $F \subset A$  un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , tales que

i)  $U \cap F \neq \emptyset$

ii)  $U \cap F \neq U \cap A$

---

<sup>4</sup>Este ejemplo está tomado de [9, pag. 109]. Una versión general también puede verse en [12, pag 201].

iii) Si  $y \in U \cap F$ , existe  $r > 0$  tal que  $V_r(y) \cap A \subset F$  donde  $V_r(y)$  es el disco de radio  $r$  alrededor de  $y$ .

**Proposición 3.1.5.** *Si se tienen conjuntos con las propiedades anteriores entonces el conjunto  $U \cap A$  es desconexo.*

*Demostración.* El conjunto  $U \cap A$  es cerrado en  $U \cap A$  ya que  $U \cap F = U \cap A \cap F$  y  $F$  es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ .

Dado  $y$  en  $U \cap F$  existe  $r > 0$  tal que  $V_r(y) \cap A \subset F$  de donde  $V_r(y) \cap U \cap A \subset U \cap F$  entonces  $U \cap F$  es abierto en  $U \cap A$ , y como  $U \cap F \neq \emptyset$  y  $U \cap F \neq U \cap A$ , entonces  $U \cap A$  es desconexo. ■

Es claro que  $B^*$  es conexo por trayectorias, pues todo punto de  $B^*$  está conectado a  $(0, 1)$  por una trayectoria. Por la misma razón  $B^*$  es localmente conexo por trayectorias en el punto  $(1, 0)$ .

Aplicaremos la proposición anterior para ver que en todo punto de la forma  $(x, 0)$ , con  $0 < x < 1$ , el espacio  $A = B^*$  no es localmente conexo y por tanto, tampoco localmente conexo por trayectorias.

Sea  $U$  cualquier abierto en  $\mathbb{R}^2$  con  $(x, 0) \in U$  y contenido en la franja vertical abierta  $G$  limitada por las rectas  $x = 0$  y  $x = 1$ . Veremos que  $U \cap A$  es desconexo. Así, la vecindad  $G \cap A$  del punto  $(x, 0)$  no contiene ninguna vecindad abierta en  $A$  de  $(x, 0)$  que sea conexa.

Existe  $\delta > 0$  tal que  $V_\delta((x, 0)) \subset U$ . Para  $N$  suficientemente grande tenemos que para cada  $m \geq N$ , el segmento cerrado  $F_m$  que une a  $(1, 0)$  con  $(0, \frac{1}{m})$  interseca a  $V_\delta((x, 0))$ . Por tanto  $U \cap A$  contiene una infinidad de trozos de dichos segmentos. Llamemos  $F$  al segmento cerrado que une  $(1, 0)$  con  $(0, \frac{1}{N})$ . Entonces  $F \subset A$  es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ ,  $U \cap F \neq \emptyset$  y  $U \cap F \neq U \cap A$ . Los extremos de  $F$  no pertenecen a  $U$  y por tanto si  $y \in U \cap F$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $V_r(y) \cap A \subset F$ . Por la Proposición 3.1.5,  $U \cap A$  es desconexo.

También puede usarse esta proposición en el caso de que  $A$  sea la curva sinusoidal  $S^*$ , para ver que ella no es un conjunto localmente conexo en  $(0, y)$  con  $-1 \leq y \leq 1$ .

Si  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^2$  con  $(0, y) \in U$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta((0, y)) \subset U$ , existe un número natural  $N$  para el que la gráfica del  $\sin(\frac{1}{x})$  sobre el intervalo cerrado  $\left[\frac{2}{(4n+3)\pi}, \frac{2}{(4n+1)\pi}\right]$  interseca a  $B_\delta((0, y))$  si  $n \geq N$ . Por tanto,  $U \cap A$  contiene una infinidad de trozos de la gráfica. Llamemos  $F$  a la gráfica de  $\sin(\frac{1}{x})$  sobre el intervalo cerrado  $\left[\frac{2}{(4n+3)\pi} + \varepsilon, \frac{2}{(4n+1)\pi} - \varepsilon\right]$ ,

donde  $\varepsilon > 0$  es tan pequeño que garantice que  $U \cap F \neq \emptyset$ . Entonces,  $F \subset A$  es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ ,  $U \cap F \neq \emptyset$ . y  $U \cap F \neq U \cap A$ . Si  $y \in F$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $B_r(y) \cap A \subset F$ . Por tanto  $U \cap A$  es desconexo. Así,  $A$  no contiene ninguna vecindad abierta en  $A$  que además sea conexa en el punto  $(0, y)$ .<sup>5</sup>.

**Ejemplo 3.1.6.** Sea  $F^*$  la unión de los segmentos de la forma  $L_{mn}$  donde:

$$L_0 = (x, 0), \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Para  $n = 1$

$$L_{mn} = \left(x, -\frac{1}{m} \left(x - \frac{1}{n}\right)\right), \text{ para todo } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n, m = 1, 2, \dots. \text{ Esto es:}$$

$L_{m1} = \left(x, -\frac{1}{m} (x - 1)\right)$ , para todo  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , así para  $n = 1$ , se tienen los siguientes segmentos:

$$L_{11} = (x, -1(x - 1)),$$

$$L_{21} = \left(x, -\frac{1}{2}(x - 1)\right),$$

$$L_{31} = \left(x, -\frac{1}{3}(x - 1)\right), \dots$$

Para  $n = 2$

$$L_{m2} = \left(x, -\frac{1}{m} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \text{ para todo } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right],$$

$$L_{12} = \left(x, \left(x - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$L_{22} = \left(x, -\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$L_{32} = \left(x, -\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \dots$$

Para  $n = 3$ ,

$$L_{m3} = \left(x, -\frac{1}{m} \left(x - \frac{1}{3}\right)\right), \text{ para todo } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \text{ etc.}$$

El espacio  $F^*$  es conexo por trayectorias, por tanto también es conexo, pues cualquiera de sus puntos está conectado por una trayectoria a un punto de la forma  $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$  y cualesquiera dos de estos puntos están conectados entre sí por un segmento en  $F^*$

El espacio  $F^*$  no es localmente conexo y por tanto, tampoco es localmente conexo por trayectorias, en cualquier punto de la forma  $(x, 0)$  con  $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ . Sea  $U$  cualquier abierto no vacío en  $\mathbb{R}^2$  contenido en la franja vertical abierta  $G$  limitada por las rectas  $x = \frac{1}{n+1}$  y  $x = \frac{1}{n}$ . Veremos que  $U \cap A$  es desconexo.

---

<sup>5</sup>La definición de **conexo im kleinen**. dice: Sea  $X$  espacio métrico, un conjunto  $B \subset X$  es conexo *im kleinen* en un punto  $p$ , si para cada  $\mathcal{V}$  abierta que contiene al punto  $p$ , existe  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  conjunto abierto que también contiene a  $p$  y que además para cualquier otro punto  $y \in \mathcal{U}$ , existe  $C_p$  subconjunto conexo de  $\mathcal{U}$  tal que  $p \cup y$  está en  $C_p$

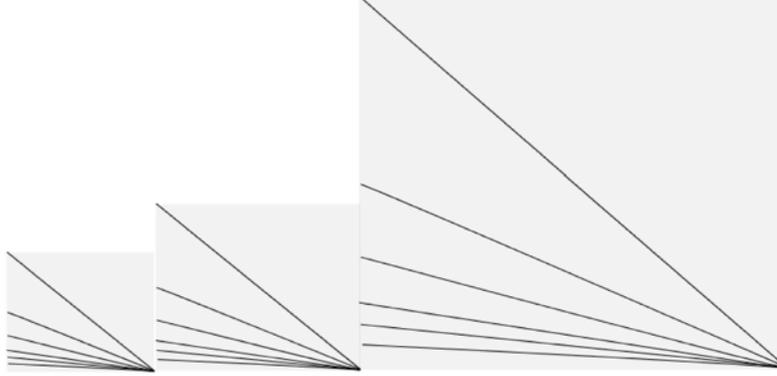


Figura 3.2:

Existe  $\delta > 0$  tal que  $V_\delta((x, 0)) \subset U$ . Hay un natural  $N$  tal que el segmento cerrado que une a  $(\frac{1}{n}, 0)$  con  $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{mn(n+1)})$  interseca a  $V_\delta((x, 0))$  para cada  $m \geq N$ . Por tanto  $U \cap A$  contiene una infinidad de trozos de dichos segmentos. Llamemos  $F$  al segmento cerrado que une  $(\frac{1}{n}, 0)$  con  $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{N(n(n+1))})$ . Entonces  $F \subset A$ , es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ ,  $U \cap F \neq \emptyset$ , y  $U \cap F \neq U \cap A$ . Los extremos  $F$  no pertenecen a  $U$ . Si  $y \in U \cap F$ , existe  $r > 0$  tal que  $V_r(y) \cap A \subset F$ . Por la proposición 3.1.5,  $U \cap A$  es desconexo.

En  $(0,0)$  el espacio  $F^*$  es localmente conexo *im kleinen*, pero no es localmente conexo.

Para probar la primera afirmación, tomemos un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  con  $(0,0) \in U$  y un cuadrado abierto  $Q \subset U$  con centro en  $(0,0)$ . Existe un natural  $N$  tal que  $n \geq N$  implica que  $(\frac{1}{n}, 0)$  y todas las cerdas que parten de este punto están en  $Q$ . Entonces, la unión  $C$  del intervalo  $[0, \frac{1}{N}]$  con el conjunto formado por las cerdas que parten de puntos  $(\frac{1}{n}, 0)$ , con  $n \geq N$  es un conjunto conexo por trayectorias y por tanto conexo, contenido en  $Q$  y por consiguiente en  $U$ . Además el abierto  $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \cap F^*$ , con  $0 < \delta < \frac{1}{N+1}$ , que es abierto de  $F^*$ , es una vecindad del punto  $(0,0)$  en  $F^*$  contenida en  $C$ . Con esto queda probada la primera afirmación.

Para probar la segunda, veremos que si  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $(0,0) \in U$  y  $(\frac{1}{n}, 0) \notin U$  para algún  $n \geq 1$ , entonces  $U \cap F^*$  es desconexo. De este modo  $V_{\frac{1}{2}}(0,0) \cap F^*$  no contiene ningún abierto conexo.

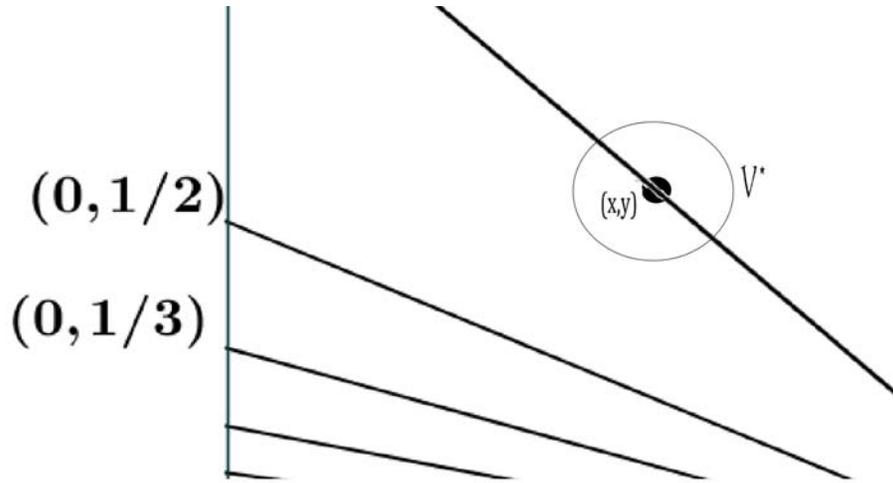


Figura 3.3:

Sea entonces  $N$  el mayor número natural tal que  $(\frac{1}{N}, 0) \notin U$ , éste existe por lo supuesto para  $U$ , y puesto que  $(\frac{1}{n}, 0) \rightarrow (0, 0)$ . Tomemos  $\delta > 0$  tal que  $V_\delta(\frac{1}{N+1}, 0) \subset U$ . Existe un número natural  $M$  tal que el segmento cerrado que une a  $(\frac{1}{N}, 0)$  con  $(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{mN(N+1)})$  interseca a  $V_\delta((x, 0))$  siempre que  $m \geq M$ . Por tanto  $U \cap A$  contiene una infinidad de trozos de dichos segmentos. Llamemos  $F$  al segmento cerrado que une a  $(\frac{1}{N}, 0)$  con  $(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{mN(N+1)})$ . Entonces  $F \subset F^*$  es cerrado de  $\mathbb{R}^2$ ,  $U \cap F \neq \emptyset$ , y  $U \cap F \neq U \cap F^*$ . El extremo  $(\frac{1}{N}, 0)$  de  $F$  no pertenece a  $U$ . Si  $y \in U \cap F$ , existe  $r > 0$  tal que  $V_r(y) \cap F^* \subset F$ . Por la proposición 3.1.5, con  $A = F^*$  se concluye que  $U \cap F$  es disconexo. ■

Hasta aquí, puede observarse que una curva según Jordan es también un conjunto conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Si un espacio es de Peano y además se cumplen estas dos propiedades, existe la posibilidad de que sea además una curva según Jordan.

**Teorema 3.1.7.** *Un espacio  $X$  conexo y lcpt, es un conjunto cpt.*

*Demostración.* Considérese el conjunto de los puntos  $y \in X$  tales que están unidos a un punto  $a \in X$  por una trayectoria. Esto es:

$T_a = \{y \in X : y \text{ está unido al punto } a \text{ por alguna trayectoria}\}$ . Es claro que  $T_a \neq \emptyset$  pues al menos el punto  $a \in T_a$ . Ocurre entonces que, si  $T_a$

es un conjunto abierto y cerrado al mismo tiempo,  $T_a$  es todo  $X$ , por ser  $X$  conexo. Veremos que esto es así.

1.  $T_a$  es un conjunto abierto. Dado un punto  $y \in T_a$ , como  $X$  es localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad  $\mathcal{V}$  del punto  $y$  que es un conjunto conexo por trayectorias. Entonces cualquier punto  $b \in \mathcal{V}$  puede unirse al punto  $y$  por una trayectoria, y a su vez  $y$  está unido al punto  $a$  por medio de una trayectoria, en consecuencia el punto  $b$  puede unirse al punto  $a$  por medio de una trayectoria, es decir,  $\mathcal{V} \subset T_a$ , por tanto  $T_a$  es un conjunto abierto.
2.  $T_a$  es un conjunto cerrado. Sea  $y$  un punto cualquiera en la cerradura del conjunto  $T_a$ , tomemos una vecindad  $\mathcal{V}$  del punto  $y$ , donde  $\mathcal{V}$  es un conjunto conexo por trayectorias, se tiene que  $\mathcal{V} \cap T_a \neq \emptyset$ . Sea un punto  $z \in \mathcal{V} \cap T_a$ , entonces el punto  $z$  puede unirse al punto  $y$  por una trayectoria y  $z$  a su vez está unido al punto  $a$  por una trayectoria, en consecuencia se tiene una trayectoria desde  $y$  hasta  $a$ . Es decir  $y \in T_a$ , por tanto  $T_a$  es un conjunto cerrado.

■

**Corolario 3.1.8.** *Un subconjunto conexo y abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es  $cpt$ .*

Este resultado se sigue de que toda bola abierta de  $\mathbb{R}^n$  es conexa por trayectorias.

■

En el caso del espacio  $\mathbb{R}$ , los conjuntos conexos son intervalos, entonces los intervalos abiertos  $(a, b)$  serán además un conjunto  $cpt$ . En resumen, para garantizar que un conjunto  $S$  sea  $cpt$ , es suficiente entonces que sea conexo y además  $lcpt$ .

No puede garantizarse con los resultados que se han descrito hasta aquí, que un conjunto de Peano, sea conexo por trayectorias. Tampoco puede garantizarse que dicho conjunto pueda verse, localmente, como una curva según Jordan.

Antes de intentar determinar condiciones que permitan garantizar parcialmente lo anterior, se describe a continuación una propiedad que caracteriza a un conjunto localmente conexo, para ello se considera el concepto de *componente*.

**Definición 3.1.9.** Dado un punto cualquiera  $x$  en un espacio métrico  $X$ , el subconjunto conexo más grande que contiene al punto  $x$ , denotado por  $C_x$ , se llama *componente de  $x$* .

El conjunto *componente* de un punto  $x$  es la unión de todos los subconjuntos conexos del espacio  $X$  que contienen a  $x$ .

La condición de que un conjunto sea conexo por trayectorias, es necesaria para que sea imagen continua de  $[0, 1]$ , esto es un resultado válido para cualquier espacio topológico  $X$ . En el caso particular de un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  y de una curva según Jordan, la condición de ser localmente conexo puede sustituirse por la de ser localmente conexo por trayectorias. La definición anterior tiene su homóloga:

**Definición 3.1.10.** Dado un punto cualquiera  $x$  en un espacio métrico  $X$ , el subconjunto conexo por trayectorias (*cpt*) más grande de  $X$  que contiene al punto  $x$ , denotado por  $C_x$ , se llama componente conexa por trayectorias de  $x$ .

Se darán resultados análogos a los teoremas 2.1.6 y 2.1.8, lo que permite la caracterización, en este caso, de un conjunto *lcpt*.

**Teorema 3.1.11.** *Un espacio métrico  $X$  es localmente conexo por trayectorias (*lcpt*) si y sólo si cada componente *cpt* de un conjunto abierto  $U$  de  $X$ , es también un conjunto abierto.*

*Demostración.* Sea  $P$  una componente *cpt* de  $U$ , y  $x \in P$ . Existe una vecindad  $V \subset U$  de  $x$ , tal que es *cpt*, entonces  $x \in P \cup V$  y  $P \cup V$  es *cpt*. Como  $P$ , es componente conexa de  $U$ ,  $P \cup V = P$ , es decir  $V \subset P$ , por tanto  $P$  es un conjunto abierto en  $X$ .

Inversamente, dados  $x \in X$  y  $U$  una vecindad abierta de  $x$ . Sea  $P \subset U$  la componente *cpt* en  $U$  de  $x$ . Por hipótesis  $P$  es un conjunto abierto de  $X$ , y también es *cpt*, entonces  $X$  es *lcpt* en  $x$ . ■

Al igual que en el caso de un conjunto localmente conexo, un conjunto que es *lcpt*, conserva esta propiedad después de aplicar una función continua, el siguiente teorema es de utilidad para demostrar la afirmación.

**Teorema 3.1.12.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, suprayectiva, si  $C$  es una componente *cpt* de  $Y$ , entonces  $f^{-1}(C)$  es una unión de componentes *cpt* de  $X$ .*

*Demostración.* Dada una componente *cpt*  $C$  de  $Y$ , se tiene que  $f^{-1}(C)$  está contenido en la unión de las componentes *cpt*  $Q_x$  en  $X$  de cada  $x \in f^{-1}(C)$  o sea,  $f^{-1}(C) \subset \cup Q_x$  con  $x \in f^{-1}(C)$ .

Debido a que  $f(Q_x) \cap C \neq \emptyset$  y  $f(Q_x)$  es *cpt* entonces  $f(Q_x) \subset C$ , es decir, para cada  $x$ ,  $Q_x \subset f^{-1}(C)$ . Por tanto  $f^{-1}(C) = \cup Q_x$ . ■

**Teorema 3.1.13.** *Dada una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  una función continua, cerrada y sobre, si  $X$  es lpct, entonces  $Y$  también lo es.*

*Demostración.* Sea  $U$  un conjunto abierto de  $Y$ , y  $P \subset U$  una componente *cpt* de  $U$ , entonces  $\varphi^{-1}(U)$  es un conjunto abierto en  $X$ , y  $\varphi^{-1}(P)$  es una unión de componentes *cpt* de  $\varphi^{-1}(U)$ , de aquí que  $\varphi^{-1}(P)$  es abierto en  $X$ . Como  $\varphi$  es sobre, se tiene que  $\varphi(\varphi^{-1}(P)) = P$ , entonces  $\varphi(\varphi^{-1}(Y \setminus P)) = \varphi(X \setminus \varphi^{-1}(P)) = Y \setminus P$ , es un conjunto cerrado en  $Y$ , y  $P$  es abierto en  $Y$ , de aquí  $Y$  es *lcpt* en  $x$ . ■

En consecuencia, ya que el intervalo  $[0, 1]$  es *cpt* y *lcpt*, se han encontrado dos características más de una curva según Jordan.

**Corolario 3.1.14.** *Si un espacio métrico  $X$  es la imagen continua del intervalo  $[0, 1]$ , entonces es un conjunto *cpt* y *lcpt*.*

En lo desarrollado anteriormente, se han considerado las propiedades de conexidad, conexidad local, y conexidad local por trayectorias, si además se toma en cuenta la propiedad de compacidad, pueden obtenerse otros resultados importantes que permiten encontrar condiciones suficientes para que un conjunto sea curva según Jordan.

### 3.1.1. Compacidad de una curva según Jordan

Si queremos encontrar una función cuyo dominio sea el intervalo  $[0, 1]$  y la imagen sea un conjunto  $P$  que cumpla con las propiedades de Peano y además que  $P$  sea *cpt* y *lcpt*, es necesario relacionar estos conceptos con el de compacidad, la definición siguiente será de gran utilidad.

**Definición 3.1.15.** Un espacio métrico  $X, (X, d)$ , se llama uniformemente localmente conexo por trayectorias (*ulcpt*) si satisface cualesquiera de las dos condiciones siguientes, equivalentes entre sí:

- a) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que si  $d(x, y) < \delta$ , entonces existe un conjunto  $P(x, y)$ , que denotaremos simplemente como  $P$ , tal que  $x \in P, y \in P$ , es *cpt*, y  $\text{diam}(P) < \varepsilon$ ,
- b) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que si  $d(x, y) < \delta$ , hay una trayectoria que une a  $x$  con  $y$  y que está contenida en  $V_\varepsilon(x) \cap V_\varepsilon(y)$ .

Puede observarse que si se cumple a) entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que si  $d(x, y) < \delta$ , existe una trayectoria  $\gamma$ , tal que  $\gamma \subset P$  que une  $x$  con  $y$ , donde  $\text{diam}(P) < \varepsilon$ . De este modo, cualquier punto  $u \in \gamma$ , cumple que  $d(u, x) < \varepsilon$  y también  $d(u, y) < \varepsilon$ , es decir,  $\gamma \subset V_\varepsilon(x) \cap V_\varepsilon(y)$ .

Recíprocamente, si se satisface b), dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$  tal que si  $d(x, y) < \delta$ , entonces existe una trayectoria que une a  $x$  con  $y$  y que está contenida en  $V_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) \cap V_{\frac{\varepsilon}{3}}(y)$ . Sea el conjunto  $P = \gamma([0, 1])$ , entonces  $x, y \in P$  y  $\text{diam}(P) < \varepsilon$ .

**Proposición 3.1.16.** *Si el espacio métrico  $(X, d)$  es lcpt y compacto, entonces es ulcpt.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , para cada  $x \in X$ , considérese  $V_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$  bola abierta de  $x$ . Para cada  $x \in X$  existe una vecindad  $V_x$  de  $x$  que es *cpt* tal que  $V_x \subset V_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$ , entonces, el  $\text{diam}(V_x) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ . Puede observarse que las vecindades  $V_x$  forman una cubierta de  $X$ , sea  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \varepsilon$ , un *número de Lebesgue*<sup>6</sup> para ésta. De aquí  $d(x, y) < \delta$  implica que existe una  $z \in X$ , tal que  $x, y$  son elementos ambas de  $V_z$  y el conjunto  $P$  dado como  $P = V_z$  cumple la condición a). ■

Como el corolario 3.1.14 muestra que la imagen continua del intervalo  $[0, 1]$  es un conjunto *cpt* y *lcpt*; si esa imagen es además un conjunto de Peano, entonces es *ulcpt*. Veremos que si un conjunto compacto cumple esas condiciones es posible construir la función que nos permita garantizar que es una curva según Jordan. Para esto se utilizará el hecho de que existe una función continua del conjunto de Cantor  $C^*$  en cualquier conjunto compacto, métrico y no vacío.<sup>7</sup> Lo probaremos para compactos de  $\mathbb{R}^2$ .

---

<sup>6</sup>Dado un conjunto  $K$  compacto en  $\mathbb{R}$ , sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  una cubierta abierta de  $K$ . Se define  $\lambda$  *número de Lebesgue* denotado por  $\lambda(K, \mathcal{U})$ , para  $K$  y  $\mathcal{U}$ , como un número tal que, para cualesquiera par de puntos  $x_1, x_2$  en  $K$ , si  $d(x_1, x_2) < \lambda$  entonces existe un elemento  $U$  de  $\mathcal{U}$  que contiene ambos puntos

<sup>7</sup>Este resultado que la mayoría de las ocasiones se conoce como el *teorema de Hausdorff*, se demostró en forma paralela e independiente por Hausdorff y Alexandroff. Ambos publicaron esto en 1927, en el caso de Hausdorff en la segunda edición alemana del libro “*Nociones básicas de la teoría de conjuntos*”, y Alexandroff lo hizo en un artículo publicado en los anales matemáticos “*Mathematischen Annalen*”.<sup>12</sup>

### 3.1.2. Aplicación de $C^*$ en un conjunto $K$ compacto contenido en $\mathbb{R}^2$

Dado cualquier conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$ , es posible dar un cuadrado de  $\mathbb{R}^2$ ,  $Q = [a, b] \times [a, b]$  tal que  $K \subset Q$ . Por otro lado puede tomarse en  $Q$  una partición  $2^k$  regular de  $[a, b] \times [a, b]$ , el conjunto  $K$  estará contenido como se muestra en la figura 3.4

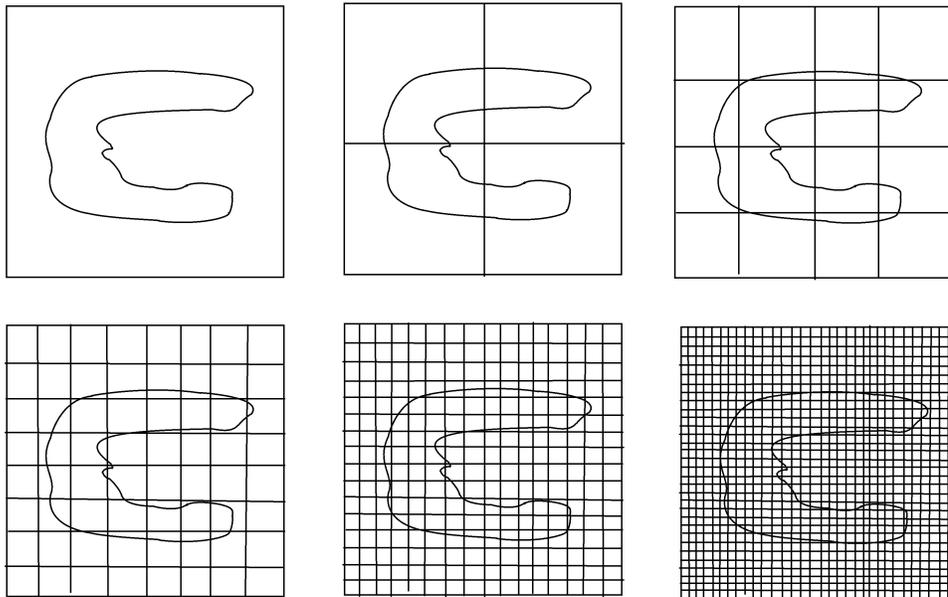


Figura 3.4:

La intersección de  $K$  con algunos  $Q_i$  será igual al vacío para algunos valores de  $i$ , y en los restantes será distinta del vacío. Si  $K \cap Q_i^s = \emptyset$  para algún cuadrado de la partición  $2^s$  regular de  $Q$ , entonces  $K \cap Q_i^r = \emptyset$  para cualquier cuadrado  $Q_j^r$  de la partición  $2^r$  regular con  $r > s$ , tal que  $Q_j^r \subset Q_i^s$ .

Sean  $I^i$ , con  $1 \leq i \leq 4$ , los cuatro intervalos que no han sido suprimidos en el paso 2 de la construcción del conjunto de Cantor  $C^*$  y  $R^i$ , con  $1 \leq i \leq 4$ , los cuatro subcuadrados de la partición 2-regular del cuadrado  $Q$ .

Definimos  $\eta_1 : \cup I^i \rightarrow Q$  del modo siguiente:  $\eta_1 | I^i$  es una función constante cuyo valor se escoge arbitrariamente en  $K \cap R^i$  si esta intersección es no vacía y en caso contrario  $\eta_1 | I^i$  es una función constante cuyo valor es un punto

$x_0 \in K$  escogido arbitrariamente. Así, la imagen de  $\eta_1$  está contenida en  $K$ .

Para  $k \geq 2$  puede definirse inductivamente la función  $\eta_k$  a partir de  $\eta_{k-1}$ .

Supongamos que  $I^i$  con  $1 \leq i \leq 4$ , son los intervalos que no han sido suprimidos en el paso  $2(k-1)$  de la construcción del conjunto de Cantor  $C^*$  y que  $\eta_{k-1}: \cup I^i \rightarrow Q$  es una función constante en cada  $I^i$  y cuya imagen está contenida en  $K$ .

Cada intervalo  $I^i$  contiene cuatro intervalos  $I_j^i$  con  $1 \leq j \leq 4$ , que no han sido suprimidos en el paso  $2k$  de la construcción del conjunto de Cantor. De hecho  $I_j^i$  con  $1 \leq i \leq 4^{k-1}$  y  $I_j^i$  con  $1 \leq j \leq 4$  son todos los intervalos suprimidos en ese paso.

De modo similar, al dividir cada subcuadrado  $R^i$  en cuatro subcuadrados iguales  $R_j^i$ ,  $1 \leq j \leq 4$  obtenemos todos los cuadrados de la partición  $2^k$  -regular del cuadrado  $Q$ .

Definimos  $\eta_k: \cup I^i \rightarrow Q$  del modo siguiente: si  $K \cap R_j^i \neq \emptyset$ , entonces  $\eta_k|_{I_j^i}$  es una función constante cuyo valor es un punto en  $K \cap R_j^i$  escogido arbitrariamente, y si  $K \cap R_j^i = \emptyset$ , entonces  $\eta_k|_{I_j^i}$  es una función constante cuyo valor coincide con el de  $\eta_{k-1}|_{I^i}$ .

Hacemos las siguientes observaciones:

- i) Si  $K \cap R_j^i \neq \emptyset$ , entonces  $\eta_k(t) \in K \cap R_j^i$  para todo  $t \in I_j^i$ . En particular, en este caso siempre existe  $t \in C^*$  tal que  $\eta_k(t) \in K \cap R_j^i$ ,
- ii) Para cada  $k \geq 2$  y  $t \in C^*$  tenemos que  $\eta_{k-1}(t)$  y  $\eta_k(t)$  están en un mismo subcuadrado de la partición  $2^{k-1}$  -regular del cuadrado  $Q$ .

Para demostrar que la sucesión  $\eta_k$  converge, y que es además una sucesión de funciones continuas, se utilizará el resultado siguiente el cual puede consultarse también en.<sup>14</sup>

**Proposición 3.1.17.** Sean  $F_1, F_2, \dots, F_n$  conjuntos cerrados en  $\mathbb{R}$  y  $f_i: F_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua para cada  $1 \leq i \leq n$ . Si  $f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$  para  $1 \leq i, j \leq n$ . Entonces la función combinada  $f: \bigcup_{i=1}^n F_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida como  $f(x) = f_i(x)$  si  $x \in F_i$ , es continua.

Cada  $\eta_k$  está definida en la unión de  $4^k$  subintervalos  $I_i$ ,  $1 \leq i \leq 4^k$  donde  $\eta_k|_{I_i}$  es constante, es decir  $\eta_k^i = \eta_k|_{I_i}$  es una función continua y el conjunto  $I_i$  es cerrado para  $i = 1, \dots, 4^k$ . Por otro lado,  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para cada  $i \neq j$  y por tanto  $\eta_k$  es una función continua.

Recordemos que para cada  $k \geq 2$  y  $t \in C^*$  tenemos que  $\eta_{k-1}(t)$  y  $\eta_k(t)$  están en un mismo subcuadrado de la partición  $2^{k-1}$ -regular del cuadrado  $Q$ , por tanto

$$\|\eta_{k-1}(t) - \eta_k(t)\| < \frac{\sqrt{2}(b-a)}{2^{k-1}}$$

Como la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$  converge, tenemos que la sucesión  $(\eta_k)$  satisface una condición uniforme de Cauchy en  $C^*$  y por tanto converge uniformemente en  $C^*$  a una función continua  $\eta$ .

Afirmamos que  $\eta(C^*)$  es denso en  $K$ . Sea  $\bar{x} \in K$ . Para cada  $k \geq 1$  existe un subcuadrado  $R$  de la partición  $2^k$ -regular de  $Q$  tal que  $\bar{x} \in Q$ . Recordemos que como  $K \cap R \neq \emptyset$ , entonces  $\eta_k(t)$  para algún  $t \in C^*$ . Así

$$\|\eta_k(t) - \bar{x}\| < \frac{\sqrt{2}(b-a)}{2^k}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Escojamos  $k$  suficientemente grande para que

$$\frac{\sqrt{2}(b-a)}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y para todo  $s \in C^*$

$$\|\eta_k(s) - \eta(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces

$$\|\eta(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$$

y queda probada la afirmación. De donde

$$\eta(C^*) \subset K \subset \overline{\eta(C^*)}$$

Y como  $\eta(C^*)$  es cerrado por ser compacto, concluimos que  $\eta(C^*) = K$ .

### 3.1.3. Aplicación continua del intervalo $[0, 1]$ en un conjunto compacto *cpt* y *lcpt*.

**Teorema 3.1.18.** *Si el espacio métrico  $X$ , es compacto, cpt y lcpt, entonces es imagen continua de  $[0, 1]$ .*

*Demostración.* Por la proposición anterior, el espacio  $X$  es *ulcpt*, de donde, para cada  $n \geq 1$  existe  $0 < \mu_n < \frac{1}{n}$ , tal que si  $d(x, y) < \mu_n$ , entonces hay una trayectoria que denotaremos como  $\gamma_n(x, y)$  que une  $x$  con  $y$  y que está contenida en  $V_{\frac{1}{n}}(x) \cap V_{\frac{1}{n}}(y)$ .

Por otro lado, existe una función continua  $g: C^* \rightarrow X$  tal que  $g$  es continua. Por la compacidad de  $C^*$ , tal función es uniformemente continua. Así, existe una sucesión estrictamente decreciente  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de reales positivos que converge a cero, y que además, si  $|s - t| < \delta_n$  y  $s, t \in [0, 1]$ , entonces  $d(g(s), g(t)) < \mu_n < \frac{1}{n}$ .

Por tanto, dados  $s, t$  en el conjunto de Cantor  $C^*$  que cumplen con  $0 < s - t < \delta_n$ , existe la trayectoria  $\gamma_n(g(s), g(t))$ . Esta trayectoria puede parametrizarse en el intervalo  $[s, t]$ .

Sean  $(a_k, b_k)$ ,  $k \geq 1$ , los intervalos eliminados en la construcción del conjunto de Cantor  $C^*$ . Si  $|b_k - a_k| < \delta_n$ , para algún natural  $n \geq 1$ , entonces denotaremos como  $n_k$  al mayor número natural que cumple tal condición.

Considérese el conjunto  $K = \{k : |b_k - a_k| < \delta_n \text{ para algún } n \geq 1\}$ . Entonces, para cada  $h \in k$  existe la trayectoria  $\gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))} : [a_k, b_k] \rightarrow X$ , y cumple además la condición de que

$$|\gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))}(t) - g(a_k)| < \frac{1}{n_k},$$

para cada  $t \in [a_k, b_k]$

Para cada  $k \notin K$ , sea  $\gamma(g(a_k), g(b_k))$  una trayectoria en  $X$  que une a los puntos  $g(a_k)$  y  $g(b_k)$ , parametrizada además en el intervalo  $[a_k, b_k]$ .

Se define una función  $f: [0, 1] \rightarrow X$  como:

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in C^* \\ \gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))} & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ con } k \in K \\ \gamma(g(a_k), g(b_k)) & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ con } k \notin K \end{cases}$$

Ya que cada  $(a_k, b_k)$  es abierto y además ambas  $\gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))}$  y  $\gamma(g(a_k), g(b_k))$  son continuas para todo  $k$ , entonces se observa que la función  $f$  es también continua en todo punto que no está en el conjunto de Cantor  $C^*$ . En los puntos que están en  $C^*$  también es continua, como ahora veremos.

Sean  $t \in C^*$ , y  $\varepsilon > 0$ .

1. Supóngase que  $t = a_{k_0}$  para algún  $k_0$ . La función  $f$  es continua en  $t$  por la derecha pues  $f|_{[a_{k_0}, b_{k_0}]}$  es una trayectoria.

Y para demostrar la continuidad por la izquierda, procedamos de la siguiente manera. Existe  $a_{k_1}, b_k$  tal que  $0 < a_{k_0} - a_{k_1} < \delta_{n_0}$  donde  $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{3}$ .

Obsérvese que si  $a_{k_1} < s < a_{k_0}$ , entonces hay dos posibilidades:

a)  $s \in C^*$ , en este caso

$$d(f(s), f(a_{k_0})) = d(g(s), g(a_{k_0})) < \mu_{n_0} < \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{3}$$

b)  $s \notin C^*$  entonces  $s \in (a_k, b_k) \subset (a_{k_1}, a_{k_0})$ ; de donde,

$$b_k - a_k < a_{k_0} - a_{k_1} < \delta_{n_0},$$

por tanto,  $k \in K$ ,  $n_0 < n_k$  y además la función  $f$  cumple

$$d(f(s), f(a_k)) = d(\gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))}(s), g(a_k)) < \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{3}$$

pues

$$f = \gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))}$$

en el intervalo  $[a_k, b_k]$

Por otro lado  $|a_k - a_{k_1}| < a_{k_0} - a_{k_1} < \delta_{n_0}$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} d(f(a_k), f(a_{k_1})) + d(f(a_{k_1}), f(a_{k_0})) &= \\ &= d(g(a_k), g(a_{k_1})) + d(g(a_{k_1}), g(a_{k_0})) < 2\mu_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d(f(s), f(a_{k_0})) &\leq d(f(s), f(a_k)) + d(f(a_k), f(a_{k_1})) \\ &\quad + d(f(a_{k_1}), f(a_{k_0})) < \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  es continua por la izquierda en  $t = a_{k_0}$ .

1. Si  $t = b_{k_0}$  para algún  $k_0$  se prueba de modo semejante al caso 1, que la función  $f$  es continua en  $t$

2. Supongamos que  $t \in C^*$  no es un punto extremo de ninguno de los intervalos  $(a_k, b_k)$ . Llamamos  $\mathcal{C}_n$  a la colección de los subintervalos cerrados de  $[0, 1]$  que no han sido suprimidos en el paso  $n$  de la construcción del conjunto de Cantor  $C^*$

Existe un intervalo  $[a, b] \in \mathcal{C}_n$  tal que  $t \in (a, b)$  y  $b - a < \delta_{n_0}$  para  $n_0$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Puede observarse que  $a, b \in C^*$ .

Para los puntos  $a < s < b$ , existen dos posibilidades:

- a)  $s \in C^*$ , en este caso  $d(f(s), f(t)) = d(g(s), g(t)) < \mu_{n_0} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$
- b)  $s \notin C^*$ , entonces  $s \in (a_k, b_k) \subset (a, b)$  para alguna  $k$ ; de modo que  $b_k - a_k < b - a < \delta_{n_0}$ . Esto significa que  $k \in K$ ,  $n_0 \leq n_k$  y

$$d(f(s), f(a_k)) = d(\gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))}(s), g(a_k)) < \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ya que

$$f = \gamma_{n_k, (g(a_k), g(b_k))}$$

en  $[a_k, b_k]$ .

Además  $|a_k - a| < b - a < \delta_{n_0}$  y  $|a - t| < \delta_{n_0}$ . De donde,

$$\begin{aligned} d(f(a_k), f(a)) + d(f(a), f(t)) &\leq d(g(a_k), g(a)) + d(g(a), g(t)) \\ &< 2\mu_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(f(s), f(t)) \leq d(f(s), f(a_k)) + d(f(a_k), f(a)) + d(f(a), f(t)) < \varepsilon.$$

Esto prueba que la función  $f$  es continua por la izquierda en  $t$ . ■

# Apéndice A

## Conjuntos compactos y conexos

### A.1. Teoremas de convergencia

**Definición A.1.** La sucesión  $\{f_n\}$ , donde  $f_n$  está en el espacio de las funciones continuas  $f_n: A \rightarrow \mathbb{Y}$  con  $A \subset X$ ,  $X$  y  $Y$  son espacios métricos, converge uniformemente en  $A$  a una función límite  $\varphi$ , si para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $N(\varepsilon)$  un entero (que depende sólo de  $\varepsilon$ ) tal que  $d(f_n(x), \varphi(x)) < \varepsilon$  para todo número natural  $n > N(\varepsilon)$  y para toda  $x \in A$ .

**Teorema A.2.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ . Existe una función  $f$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $k(\varepsilon)$  (que depende sólo de  $\varepsilon$ ) tal que  $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$  para cada  $m, n > k$  y para todo  $x \in A$ .

A una sucesión  $\{f_n\}$  que cumple con estas condiciones se le llama *sucesión de Cauchy*.

*Demostración.* Dada  $\varepsilon > 0$ , se demostrará que existe un entero positivo  $k(\varepsilon)$  (que depende de  $\varepsilon$ ), tal que  $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$  para cada  $m, n > k$  y para toda  $x \in A$ .

Si  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , entonces existe un entero  $N(\varepsilon)$  tal que  $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , si  $n, m > N(\varepsilon)$  y para todo  $x \in A$ .

Por otro lado  $n, m \geq N$  y  $x \in A$  implica que

$$\|f_n(x) - f(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y ya que

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m(x) - f(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\|,$$

entonces

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$$

Si una sucesión es de Cauchy; se tiene que  $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$  para cada  $x \in A$  donde  $m, n > k(\varepsilon)$ , de donde  $(f_n)$  converge puntualmente en  $A$ . Sea  $f$  la función límite puntual de la sucesión  $\{f_n\}$ . Al hacer tender  $m \rightarrow \infty$ , obtenemos que para todo  $n > N$  se cumple que  $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ , y para todo  $x \in A$ .

La sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  en  $A$  ■

**Teorema A.3.** *Supóngase que  $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge uniformemente a  $f$  en  $A$ . Si cada  $f_n$  es continua en un punto  $c$  de  $A$ , entonces la función límite  $f$  también es continua en  $c$ .*

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_n(a) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$  para todo  $n > k$  y  $a \in A$ . Como  $f_n$  es continua en  $c$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f_n(x) - f_n(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$  para cada  $x \in \mathcal{V}_\delta(c)$  (vecindad contenida en  $A$ ), entonces

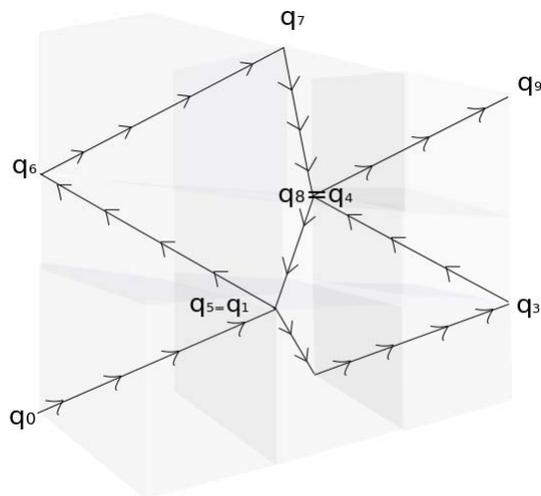
$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &< \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f(a)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto la función  $f$  es continua en el punto  $a$ . ■

En la anterior demostración se puede utilizar cualquier métrica en lugar de la dada por la norma usual en  $\mathbb{R}^n$ .

## A.2. Cadena de Peano en $\mathbb{R}^3$

Una construcción análoga en el caso del espacio  $\mathbb{R}^3$ , se basa en la división del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  en  $27 = (3)^3$  cubos congruentes entre sí, y en forma sucesiva dividir cada cubo obtenido en 27 cubos congruentes. El intervalo  $[0, 1]$  se subdivide entonces en 27 intervalos de la forma  $(\frac{i}{27}, \frac{i+1}{27})$  la regla de correspondencia es la misma de modo que la trayectoria que se describe para el caso de la cadena de orden 1, se tienen 27 poligonales



### A.2.1. Conjuntos compactos

Una familia de conjuntos  $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}$  es una cubierta abierta de un conjunto  $M$  en un cierto espacio métrico  $X$ , si todos los elementos  $U_\alpha$  son abiertos y  $M \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ . Una subcubierta abierta finita de  $\mathcal{F}$  es una subfamilia finita de  $\mathcal{F}$  de la forma  $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  donde la unión (finita) de los  $U_{\alpha_i}$  contiene al conjunto  $M$ .

**Teorema A.2.1.** *Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en el espacio  $\mathbb{R}$ , sean dos puntos  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq x_n \leq b$ , entonces existe un punto de contacto  $c$  de la sucesión  $\{x_n\}$  y  $a \leq c \leq b$ .*

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos el ínfimo en el conjunto  $C_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Entonces  $c_n \leq c_{n+1} \leq \dots$ ; de tal modo que esta nueva sucesión  $\{c_n\}$  es creciente y una cota superior de ella es  $b$ ; entonces converge. Sea  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , dicho límite cumple que  $a \leq c \leq b$ .

El punto  $c$  es un punto de contacto de  $\{x_n\}$ , pues la sucesión  $\{c_n\}$  converge al punto  $c$ , es decir dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m > N$  tal que  $|c_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por otro lado como  $c_m$  es el ínfimo de los números  $x_k$  existe un  $k > m$  tal que  $|x_m - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Entonces para  $k > N$ ,  $|x_k - c| \leq |x_k - c_m| + |c_m - c| < \varepsilon$ , por tanto  $c$  es punto de contacto de  $x_n$ . ■

Una definición alternativa en un espacio métrico de un conjunto compacto  $K$ , es:

**Definición A.2.2.** Un subconjunto  $K$  de un espacio métrico es compacto si todo subconjunto infinito de  $K$  tiene un punto de acumulación en  $K$ .

Esto es equivalente a decir que un conjunto  $K$  compacto es aquél donde toda sucesión en  $K$  tiene una subsucesión convergente cuyo límite está en  $K$ .

**Teorema A.2.3.** *Un subconjunto cerrado de un compacto es un conjunto compacto.*

*Demostración.* Sea  $S \subset K$ ,  $K$  un conjunto compacto, y  $S$  es un conjunto cerrado. Dado un conjunto infinito  $T \subset S$ , tiene un punto de acumulación  $a$  en  $K$  y ya que  $S$  es cerrado, entonces  $a \in S$ .

Por tanto  $S$  es compacto. ■

Considerando estas observaciones, se puede dar la siguiente caracterización para los compactos.

**Teorema A.2.4.** *Un conjunto es compacto en  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si es un cerrado y acotado.*

*Demostración.* Sea un compacto  $K$  y un punto  $u$  en la cerradura de  $K$ . Puede darse una sucesión  $\{x_n\}$  que converja a  $u$ , en consecuencia existe una subsucesión de ésta que converge en  $K$  (el límite es único y debe estar en  $K$ ), entonces  $u \in K$ , como esto ocurre para todo  $u \in \overline{K}$ , el conjunto es cerrado.

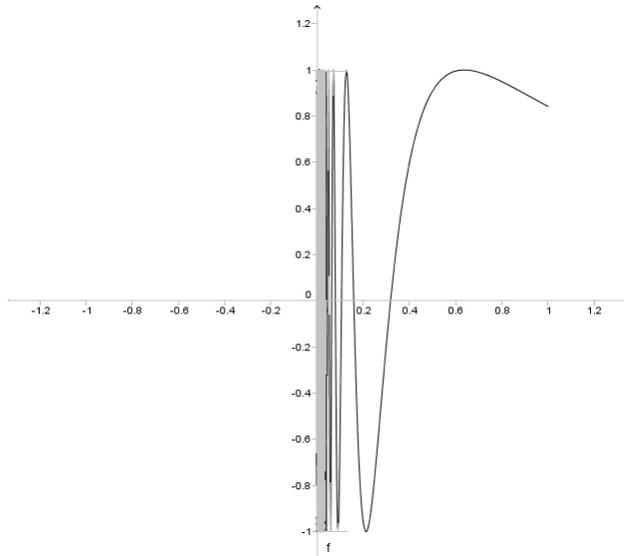
Si el conjunto  $K$  no es acotado, entonces existe una sucesión de puntos distintos  $\{x_n\}$  que satisface  $\|x_n\| > n$ . Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  no tiene un punto de acumulación en  $K$ . Sea  $v \in \mathbb{R}^n$  y tomemos  $m > \|v\| + 1$ , entonces  $\|x_m - v\| \geq \|x_m\| - \|v\| \geq m - \|v\| > 1$ .

Lo que nos dice que  $x_m$  no está cerca de  $v$  para un número infinito de  $m$ 's,  $K$  no tiene puntos de acumulación. Por tanto se tiene que  $K$  es acotado.

Supóngase ahora que el conjunto  $K$  es cerrado y acotado, existe un  $c > 0$  tal que  $\|x\| < c$  para todo  $x \in K$ . Toméase entonces el intervalo  $I = [-c, c]$  en  $\mathbb{R}$ , entonces  $K \subseteq I \times I \times \dots \times I$ , es decir está contenido en un compacto y por el teorema anterior,  $K$  es compacto. ■

Un ejemplo es la curva sinusoidal  $S^* = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, \frac{1}{\pi}]\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$

Este conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^2$  está contenido en el cuadrado  $[a, b] \times [c, d]$  donde  $a < 0, b > 1, c < -1$  y  $d > 1$ , entonces es un conjunto compacto.



**Definición A.2.5.** Sea  $X$  un espacio métrico, un conjunto  $C$  es conexo si  $C \not\subseteq A \cup B$  para cualesquiera  $A, B$  cerrados en  $X$ , ajenos entre sí tales que  $A \cap C \neq \emptyset$  y  $B \cap C \neq \emptyset$

En el caso de la curva sinusoidal, se tiene lo siguiente.

El conjunto de puntos  $S = \left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\}$  es la imagen continua del intervalo  $(0, 1]$  entonces es un conjunto conexo. Por otro lado, si un conjunto  $C$  es conexo, su cerradura  $\overline{C}$  también es un conjunto conexo.

La cerradura del conjunto  $S$ , dada por

$$S^* = \left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$$

es entonces un conjunto conexo.

# Bibliografía

- [1] Apóstol A., Tom, Análisis Matemático, *Editorial Reverté*, S.A. 1979.
- [2] Blumenthal, Leonard M. y Menger Karl, Studies in Geometry, *Freeman and Company*, 1970
- [3] Casarrubias Segura F., Tamariz Mazcarúa A. Elementos de Topología General, *Aportaciones Mat. Soc. Mat. Mexicana*, Ser. Textos **37** 2012.
- [4] J. Charatonik, W. J. Charatonik, S. Miklos and P. Spyrou, On open mappings of locally connected continua onto arcs, *Houston J. Math.*, Textos **24** (1998), 21-43 ngs.
- [5] García Maynez, A., Tamariz Ángel, Topología General, *Editorial Porrúa*, 1988.
- [6] Guggenheimer, Elementary Differential Geometry, *Dover books on Mathematics*, 1977.
- [7] Hocking G, John y Gail S. Young, Topology, *Adisson-Wesley Publishing*, 1961
- [8] Kupers, A. P. M., *On space-filling curves and the Hahn-Mazurkiewicz Theorem*, Notes for a Stanford SUMO talk on space filling curves. Spring 2012.
- [9] Lang, Serge, Análisis Matemático, *Adisson-Wesley Iberoamérica*, 1972
- [10] Pozuelo, P. L., Aplicaciones del Conjunto de Cantor en Topología y Análisis Funcional, 2014.
- [11] Pogórelov, Geometría Diferencial, *Mir*, Moscú Segunda edición.

- [12] Rudin, Análisis Matemático, *McGraw Hill*, Interamericana de México, Tercera edición.
- [13] Sprecher, David A., *Elements of real analysis*, Dover publications. inc. New York, 1987
- [14] Willard, S. General Topology, *Adisson-Wesley Publishing Company*, 1972