



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

ESTIMACIÓN DE VELOCIDAD ANGULAR DE UN
CUBESAT A PARTIR DE PANELES SOLARES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
RENATO GODINES BASTIDA

TUTOR
DR. YU TANG XU
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE DE 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco A. Arteaga Pérez
Secretario: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria
Vocal: Dr. Yu Tang Xu
1er. Suplente: Dr. Marcos A. González Olvera
2o. Suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez

Lugares donde se realizó la tesis:

Posgrado de Ingeniería de la UNAM, Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.
Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, Japón.

TUTOR DE TESIS:

DR. YU TANG XU

FIRMA

.

Abstract

In this work, an algorithm is developed to get an estimate of a CubeSat category satellite's attitude by using exclusively the current measurements obtained from the solar panels. The main contribution of this work is the design of contraction theory-based state observers that estimate the angular velocity of the satellite, that improves the estimation even in the presence of noise in the measurements. Furthermore, a comparison between the observers based on contraction theory and some complementary nonlinear filters is made, in order to evaluate the performance of attitude and angular velocity estimation. Finally, numerical simulations were made to show the performance of a reduced order observer, a full-order observer, a synchronized observer and two complementary filters. An analysis of simulation results are presented and show the effectiveness of the proposed method.

Resumen

En este trabajo se desarrolla un algoritmo para obtener un estimado de la orientación de un satélite que pertenece a la categoría de CubSats a partir exclusivamente de la medición de la corriente generada por los paneles solares. Además, se presenta el diseño de una serie de observadores basados en la teoría de contracción con el fin de obtener un estimado de la velocidad angular de un satélite. Asimismo, se desarrolló un esquema de observadores sincronizados, esto protege el estado estimado de ruido en la medición. Se realiza una comparación entre los observadores diseñados y un filtro complementario no lineal encontrado en la literatura. Finalmente, se muestra mediante simulaciones el desempeño de un observador de orden reducido, uno de orden completo, un observador sincronizado y dos filtros complementarios y se realiza un análisis de resultados en el que se muestra como uso de este método mejora la estimación en comparación con los filtros complementarios.

Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. CubeSats	2
1.2. Metas	5
1.3. Objetivos	5
1.4. Alcances	5
1.5. Contribuciones	6
1.6. Estructura de tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Rotación y su representación por cuaterniones	7
2.1.1. Álgebra de cuaterniones y algunas funciones de utilidad	9
2.2. Modelo dinámico de un CubeSat	9
2.3. Teoría de Contracción	11
2.3.1. Análisis Básico de Contracción	12
2.3.2. Análisis Generalizado de Contracción	14
2.3.3. Contracción Parcial	15
2.4. Sincronización	16
3. Medición de la orientación de un CubeSat a partir de los paneles solares	19
3.1. Obtención del vector de sol (V_s^B) a partir de los paneles solares	20
3.1.1. Modelo matemático de un panel solar	20
3.1.2. Algoritmo Estándar de obtención del vector V_s^B	21
3.2. Obtención del vector de sol referido al sistema inercial (V_s^I)	23
3.2.1. Algoritmo de obtención del vector de sol	24
3.3. Obtención de una medición de la orientación a partir de los vectores de sol V_s^I y V_s^B	25

4. Diseño de Observadores	27
4.1. Observador de Orden Reducido	28
4.1.1. Diseño	28
4.1.2. Implementación	30
4.2. Observador de Orden Completo	31
4.2.1. Diseño	31
4.2.2. Implementación	33
4.3. Sincronización de Observadores	34
4.3.1. Implementación	35
5. Resultados de simulación	37
5.1. Filtros Complementarios	37
5.2. Simulación de Observadores Diseñados por Contracción	39
5.2.1. Observador de Orden Reducido	40
5.2.2. Observador de Orden Completo	41
5.2.3. Sincronización de Observadores	44
5.3. Comparación con Filtros Complementarios	45
5.4. Simulación del algoritmo de obtención de cuaternión a partir de las mediciones de los paneles solares	48
5.5. Análisis de Resultados	51
6. Conclusiones	53
6.1. Conclusiones del trabajo realizado	53
6.2. Trabajo Futuro	54
A. Apéndice	57
A.1. Código en Matlab del algoritmo para la obtención de la orientación (en cuaterniones) a partir de los paneles solares	57
Bibliografía	61

Índice de figuras

1.1. Planteamiento del Problema, q orientación real, η_b ruido en la medición.	3
1.2. Satélites OPAL (al frente) y SHAPIRE (al fondo)	3
1.3. CubeSat	4
2.1. Definición de Cuaternión	8
2.2. Sistemas coordenados de referencia	10
2.3. Dinámica virtual entre dos trayectorias vecinas [1].	12
3.1. Vectores de Sol	20
3.2. Circuito equivalente de una celda solar	21
3.3. Definición de ángulo de incidencia	21
3.4. Proyección del vector de sol en los vectores normales de los paneles [2] .	22
3.5. Vector de posición del sol [3]	23
5.1. Par Aplicado	40
5.2. Orientación q real	41
5.3. Velocidad angular ω real	41
5.4. Medición de q con ruido	42
5.5. Estimado de Velocidad Angular - Reducido sin ruido	42
5.6. Estimado de Velocidad Angular - Reducido con ruido	43
5.7. Estimado de Velocidad Angular - Completo sin ruido	43
5.8. Estimado de Orientación - Completo sin ruido	44
5.9. Estimado de Velocidad Angular - Completo con ruido	44
5.10. Estimado de Orientación - Completo con ruido	45
5.11. Estimado de Velocidad Angular - Observador Sincronizado $N = 10$. . .	46
5.12. Estimado de Orientación - Observador Sincronizado $N = 10$	46
5.13. Estimado de Velocidad Angular - Filtro Complemetario Directo	47
5.14. Estimado de Orientación - Filtro Complemetario Directo	47
5.15. Estimado de Velocidad Angular - Filtro Complemetario Pasivo	48
5.16. Estimado de Orientación - Filtro Complemetario Pasivo	49
5.17. Corrientes medidas de los paneles	49
5.18. Estimado de Velocidad Angular - Sistema Completo	50
5.19. Estimado de Orientación - Sistema Completo	50

Índice de tablas

2.1. Representaciones de la orientación	8
5.1. Comparación del Error RMS de Estimación	51
5.2. Comparación del Error RMS - Observadores Sincronizados	52

Capítulo 1

Introducción

El control de orientación de un cuerpo rígido en el espacio ha sido un problema tratado por varios métodos durante los últimos años, cuya relevancia se destaca en áreas tales como la robótica industrial, control de aeronaves no tripuladas y de vehículos acuáticos, terrestres o aeroespaciales tales como sondas de exploración espacial y satélites.

En particular, el control de orientación de satélites representa un reto debido a que para llevar a cabo una misión satisfactoriamente en la que se involucra el control de apuntamiento, se debe mantener al satélite en una orientación deseada, lo que implica compensar perturbaciones externas así como reducir los efectos de ruido en las mediciones. Para obtener un buen desempeño de los algoritmos de control es necesario obtener un estimado de la velocidad angular y orientación del satélite. Es por ello que es necesario diseñar observadores de velocidad angular y orientación que otorguen un valor estimado de los estados cercano al valor real, pues una correcta medición de estas magnitudes físicas es de gran importancia para el control de la orientación de un satélite.

En el área de los satélites pequeños se encuentra una amplia gama de sensores para la medición de orientación y velocidad angular, entre los que se encuentran acelerómetros, magnetómetros, giróscopos, GPS, sensores de sol y sensores de estrellas. Generalmente la velocidad angular de un satélite es medida mediante giróscopos pero para reducir el consumo de energía del satélite se propone emplear únicamente los paneles solares para determinar la velocidad angular. Por otro lado, para obtener la orientación de un satélite se combinan algunas mediciones de estos sensores.

En general para realizar el control de apuntamiento de un satélite se necesita una medición de la velocidad angular, pero en la literatura encontramos algunos trabajos en donde no es necesaria la medición de esta magnitud física. Por ejemplo, en [4] se expone que no es necesaria una medición de velocidad angular para estabilizar la orientación de un cuerpo rígido en el espacio, y que la medición de velocidad angular puede ser sustituida por un filtro no lineal de la medición de orientación.

En otro enfoque mostrado en [5], para obtener un control preciso de la orientación de cuerpos rígidos donde se desconoce alguna parte de la dinámica o parámetros del sis-

tema, se emplea la construcción de funciones tipo Lyapunov similarmente al algoritmo de control adaptable para robots manipuladores presentado en [6].

En este caso, la principal meta de este trabajo es determinar un estimado de la velocidad angular por lo que los observadores desarrollados pueden ser empleados en esquemas de control que necesiten de un estimado de la velocidad angular.

El método más común para obtener una medición de la orientación de un satélite es obtener vectores de observación empleando sensores como pueden ser con base en magnetómetros, acelerómetros, sensores de estrellas, etc., para después obtener un estimado de la orientación mediante algún algoritmo estadístico como TRIAD o QUEST, y finalmente, obtener una medición de la velocidad angular mediante un giróscopo [7]. A partir de las mediciones de orientación y velocidad angular se diseña un observador con el objetivo de disminuir el efecto del ruido generado por los sensores en la estimación, otorgando un estimado de orientación y velocidad angular del satélite mucho más fiable para posteriormente ser empleada en un esquema de control. Algunos métodos de observación son el filtro de Kalman, empleado para resolver el problema de estimación de la orientación de un satélite en [8], [9] y [10] por citar algunos trabajos. Además, otra técnica es la desarrollada en [11], donde se propone un filtro complementario no lineal del cual ahondaremos en el capítulo 5.

En este trabajo se emplea una metodología de diseño de observadores para satélites pequeños basados en la reciente Teoría de Contracción desarrollada en [1], considerando que la única medición disponible es la corriente generada por los paneles solares. El enfoque es diferente al de filtrado, pues primero se obtiene una medición de la orientación a partir únicamente de los paneles solares y no hay una medición disponible de un giróscopo, después, un observador similar a los desarrollados en [12] y [13] logra reconstruir el vector de velocidad angular sin necesidad de una medición previa de esta magnitud.

En resumen, se diseñó un observador de orden reducido que estima únicamente la velocidad angular, pero debido a que presenta alta sensibilidad ante ruido en la medición, se diseñó otro observador de orden completo que estima tanto orientación como velocidad angular. Además, para disminuir el efecto del ruido se realizó una sincronización de observadores de orden completo empleando la teoría presentada en [14] y en especial el concepto de Contracción Parcial.

1.1. CubeSats

Un CubeSat es un satélite pequeño cuyas dimensiones nominales son de 10cm x 10cm x 10cm y masa menor a 1.33 kilogramos.

La tendencia actual en el desarrollo espacial es diseñar satélites pequeños y baratos. Esto se ha podido hacer realidad gracias al decrecimiento del tamaño de componentes electrónicos, así como el incremento de sus capacidades de procesamiento y la reducción de su consumo energético.

El laboratorio de desarrollo de sistemas espaciales del departamento de aeronáutica

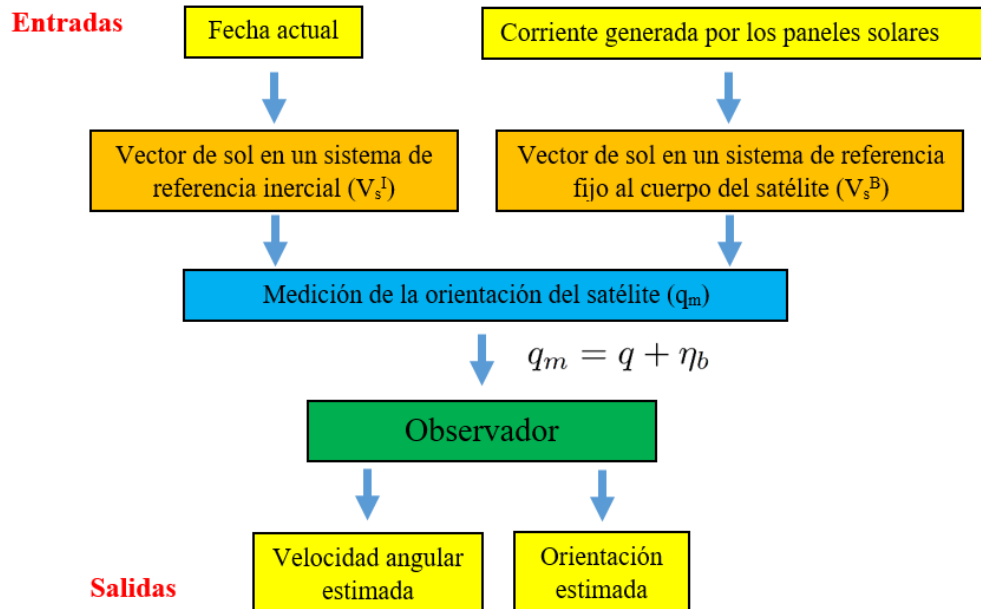


Figura 1.1: Planteamiento del Problema, q orientación real, η_b ruido en la medición.

y astronáutica en la Universidad de Stanford creó un programa de desarrollo satelital con el fin de instruir a sus estudiantes. En 1994, este equipo desarrolló su primer satélite llamado SAPHIRE [15], cuyas dimensiones iniciales fueron de 18 pulgadas de diámetro y una estructura de 12 pulgadas de altura, y un peso de 20 kilogramos, SAPHIRE fue completado en junio de 1998 y lanzado en 2002.

El segundo proyecto de este equipo fue un satélite llamado OPAL (Orbiting Automated PicoSat Launcher) iniciado en 1995 y cuyo objetivo fue el desarrollo de tecnología satelital denominada “Madre-Hija”, donde un satélite llamado “Madre” llevaría varios satélites más pequeños en su interior conocidos como “Hijas” y liberarlos una vez que el satélite “Madre” llegara a su órbita, OPAL fue lanzado en enero del año 2000.

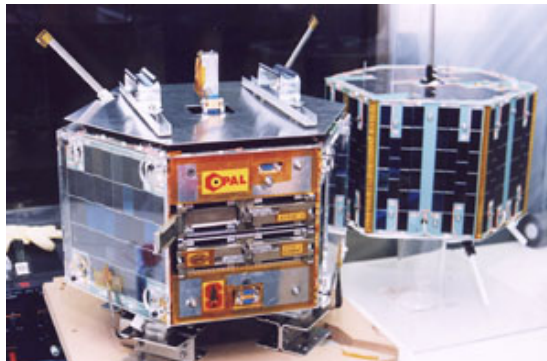


Figura 1.2: Satélites OPAL (al frente) y SHAPHIRE (al fondo)

1. INTRODUCCIÓN

Con el desarrollo de estos proyectos, el equipo de Stanford concluyó que, además de servir como práctica a estudiantes de ingeniería espacial, el desarrollo de estos satélites pequeños servía para probar nuevas tecnologías y llevar a cabo misiones reales, como monitoreo del clima o telecomunicaciones.

Un satélite “Hija” del proyecto OPAL tenía medidas de 4” x 3” x 1”, pero para obtener energía suficiente de los paneles solares se determinó que la mejor forma de un satélite pequeño es la de un cubo de 4” x 4” x 4” o lo que es igual 10cm x 10cm x 10cm. De esta manera fue concebido el concepto de CubeSat.

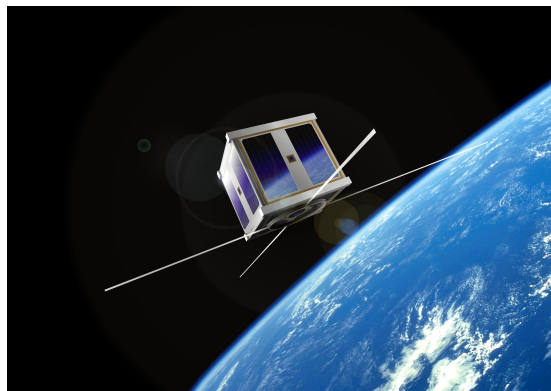


Figura 1.3: CubeSat

De esta manera, el desarrollo de CubeSats se ha expandido en universidades de todo el mundo, a raíz de lo cual la Universidad de Stanford estandarizó las características que debería tener un satélite para ser incluido en la categoría de CubeSat.

Las principales particularidades de un CubeSat son sus dimensiones, pues como se mencionó antes, un CubeSat debe medir nominalmente 10cm x 10cm x 10cm y tener un peso menor a 1.33 kilogramos. Además, se restringió por diseño el costo nominal del satélite desde su diseño hasta su lanzamiento en un máximo de \$250,000 dólares con la limitante de que el producto final debe emplear únicamente componentes comerciales, tanto para la estructura mecánica como los componentes electrónicos. Otra restricción es el bajo consumo energético pues, dado el área de los paneles solares, la potencia disponible es de un Watt.

En general, los satélites pequeños permanecen en la parte baja de la órbita terrestre, los CubeSats orbitan entre 370 a 460 kilómetros sobre la superficie terrestre lo cual coincide con la altura a la que se encuentra la estación espacial internacional.

Para disminuir el peso y el consumo energético se suelen emplear componentes que lleven a cabo más de una función, como por ejemplo, las celdas solares, que además de recolectar la energía solar pueden ser utilizadas como sensores de sol como lo será en este trabajo.

Es por todo esto que los CubeSats representan un campo muy interesante para probar nuevas tecnologías espaciales y en este caso nuevos algoritmos de estimación y control.

1.2. Metas

En primer lugar, se busca obtener una medición de la orientación a partir única y exclusivamente de las mediciones de corriente generada por los paneles solares, esta medición será la entrada de los observadores. Después, se planea diseñar un estimador de velocidad angular del satélite empleando la teoría de contracción que asegure la convergencia exponencial de los estados estimados a los estados reales bajo la suposición de que no hay presencia de ruido en las mediciones, ni perturbaciones y se conocen todos los parámetros del sistema,.

Además, se busca proponer un esquema de sincronización de observadores con el fin de proteger al estimador de la presencia de ruido en las mediciones.

Finalmente, se planea realizar un estudio comparativo de los estimadores diseñados con filtros diseñados en [11] con el fin de cuantificar el desempeño de los estimadores diseñados.

1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo consiste en que a partir exclusivamente de las mediciones de corriente generada por los paneles solares se obtenga un estimado de la velocidad angular del satélite, el cual será utilizado en trabajos futuros para controlar la orientación del satélite. Asimismo, un objetivo secundario es realizar un análisis comparativo de los observadores basados en la teoría de contracción con otros estimadores presentados en la literatura con el fin de evaluar el desempeño de los primeros.

1.4. Alcances

El observador diseñado puede emplearse en general para determinar la velocidad angular de cualquier cuerpo rígido en el espacio siempre cuando la dinámica de este sea modelada por las ecuaciones presentadas en [16], pero con la condición de que se debe de conocer todos los parámetros del sistema; y en caso de no poseer mas que una estimación de los valores de los parámetros del sistema se podría añadir un esquema de observación adaptable.

Por otro lado, este trabajo tiene como un objetivo presentar una aplicación de la teoría de contracción a un sistema no lineal en específico por lo que no se contemplan aspectos que pudieran surgir en la práctica como son perturbaciones o dinámicas no modeladas.

1.5. Contribuciones

Se ha logrado diseñar un sensor virtual de velocidad angular de un CubeSat que emplea únicamente las mediciones de corriente generadas por los paneles solares.

Además, este trabajo presenta una metodología de diseño de observadores basados en la teoría de contracción (contracción y contracción parcial) que puede servir como ejemplo para el diseño de estimadores aplicados a otros sistemas no lineales.

Por último, estos observadores pueden servir como base para el desarrollo de esquemas de control activo.

1.6. Estructura de tesis

El trabajo presentado se organiza de la siguiente manera: En el capítulo dos se muestran algunos conceptos que son la base del trabajo presentado, como son la rotación en tres ejes, su representación en cuaterniones unitarios y algunas propiedades de esta representación. Igualmente, se presenta el modelo dinámico de un satélite en términos de cuaterniones y por último una introducción de la teoría de contracción y sincronización, que es el sustento del diseño de los observadores.

En el capítulo tres se desarrolla un algoritmo mediante el cual a partir de la corriente generada por los paneles solares se obtiene una medición de la orientación, esta medición será la entrada de los observadores diseñados.

En el capítulo cuatro se presenta el diseño de observadores empleando la teoría de contracción siguiendo la metodología “top-down” desarrollada en [17]. Se muestra la dinámica de cada observador, después un análisis de contracción para el estimador y su versión implementable. Al final del capítulo, se realiza la sincronización de observadores para proteger los estados estimados del ruido de los sensores.

De esta manera, en el capítulo cinco se describe de manera breve el concepto de filtro complementario desarrollado en [11] y la implementación de algunos de estos filtros con el fin de realizar una comparación con los estimadores diseñados en el capítulo cuatro. Además, se muestra la simulación del algoritmo desarrollado en el capítulo tres en conjunto con un estimador basado en contracción. Por último, se muestra un análisis cuantitativo de los resultados.

Para finalizar, en el capítulo seis se presentan las conclusiones del proyecto realizado, así como el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas herramientas de análisis y conceptos necesarios para comprender el trabajo realizado. Primero se explica lo que es un cuaternión unitario y como éste describe la rotación de un cuerpo en el espacio. En seguida, se muestra el modelo dinámico de un satélite en términos de cuaterniones y finalmente se presentan los conceptos básicos de la teoría de contracción y sincronización, los cuales son la base del diseño de estimadores en el capítulo cuatro.

2.1. Rotación y su representación por cuaterniones

Existen diversas maneras de representar la orientación de un cuerpo en relación a un sistema coordinado definido. Frecuentemente, para representar la orientación se utilizan tres o cuatro parámetros. Un ejemplo de parametrización empleando tres parámetros son los ángulos de Euler, la cual es cinemáticamente singular dado que la tasa de variación del vector velocidad angular con respecto al tiempo no está definida globalmente. Por otro lado, los parámetros de Rodrigues y los parámetros modificados de Rodrigues son un ejemplo de representación mediante cuatro parámetros que son geoméricamente singulares puesto que no están definidos para una rotación de 180° [18].

En la Tabla 2.1 se muestra una comparación de las características de algunas representaciones de la rotación.

Se observa de la Tabla 2.1 que los cuaterniones unitarios son una representación global de la rotación dado que se evitan singularidades, las cuales son puntos donde una función tiende a infinito o está mal definida en otro sentido. Es por ello que, frecuentemente en aplicaciones prácticas se utilizan los cuaterniones como la representación de la rotación de un cuerpo rígido. Además, esta representación ofrece una eficiencia considerable en su implementación en código [11]. Es por estas razones que en este trabajo se utiliza la representación de la rotación mediante cuaterniones.

Un cuaternión describe la orientación de un cuerpo rígido como una rotación alrededor de un eje, Figura 2.1.

2. PRELIMINARES

Representación	Única	Global
Ángulos de Euler	No	No
Parámetros de Rodrigues	No	No
Cuaterniones	No	Si
Matriz de Rotación	Si	Si

Tabla 2.1: Representaciones de la orientación

Este eje λ es un vector unitario con componentes en un sistema coordenado de referencia $x y z$, por lo que se necesitan cuatro parámetros para describir la orientación de un cuerpo respecto a un sistema coordenado de referencia; tres componentes del vector unitario λ y un ángulo de rotación β .

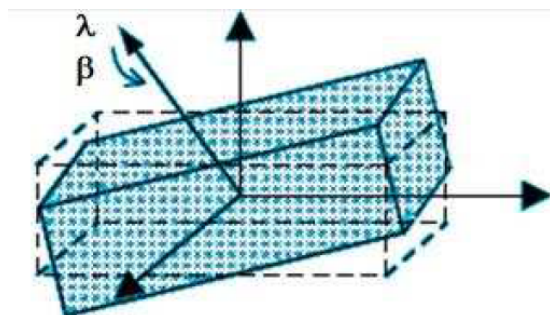


Figura 2.1: Definición de Cuaternión

De esta manera, un cuaternión se compone de una parte escalar η y una vectorial ϵ , definido de la siguiente manera:

$$q = [\eta \ \epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T = [\eta \ \epsilon^T]^T \quad (2.1)$$

En particular, en este trabajo se utilizan cuaterniones unitarios para representar la rotación, un cuaternión unitario es aquel que cumple con la siguiente igualdad.

$$\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = q^T q = 1 \text{ (Norma unitaria)}, \quad (2.2)$$

donde

$$\eta = \cos \frac{\beta}{2} \quad (2.3)$$

$$\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \lambda \quad (2.4)$$

Así, se tiene que η y ϵ expresan una rotación de valor β alrededor de un vector unitario λ .

2.1.1. Álgebra de cuaterniones y algunas funciones de utilidad

El conjunto de cuaterniones unitarios se denota como $Q = \{q = (\eta, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \|q\| = 1\}$. Dados dos cuaterniones, q_a y q_b , el producto entre ambos está definido como:

$$q_a \otimes q_b = \begin{bmatrix} \eta_a \eta_b - \epsilon_a^T \epsilon_b \\ \eta_a \epsilon_b + \eta_b \epsilon_a + \epsilon_a \times \epsilon_b \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

con elemento idéntico $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

La transformación que lleva del espacio de cuaterniones al de matrices de rotación es

$$F : Q \rightarrow SO(3), \quad R(q) := (\eta^2 - \epsilon^T \epsilon)I + 2\epsilon\epsilon^T + 2\eta S(\epsilon), \quad (2.6)$$

donde la función $S(a)$ define una matriz antisimétrica para un vector dado $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ de la siguiente manera

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

entonces, para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$, $S(a)v = a \times v$ es el producto cruz vectorial. El operador $vex : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota la función inversa de $S(a)$, esto es

$$vex(S(a)) = a, \quad a \in \mathbb{R}^3, \quad (2.8)$$

$$S(vex(A)) = A, \quad A = -A^T, \quad (2.9)$$

Otra relación a tener en cuenta es que la rotación (η, ϵ^T) y $(-\eta, -\epsilon^T)$ corresponden a la misma matriz de rotación R .

2.2. Modelo dinámico de un CubeSat

El modelo de un CubeSat y en general de un cuerpo rígido en el espacio está dado por dos ecuaciones, una relacionada con la cantidad de momento angular, mejor conocida como la dinámica del cuerpo rígido, y la otra asociada con la orientación del satélite, conocida como la parte cinemática del modelo.

Dentro de este trabajo se omite el análisis de traslación del satélite dado que éste mantendrá un movimiento natural en su órbita hasta el final de su ciclo de vida, además de que dicho análisis es irrelevante en la estimación de orientación y velocidad angular del satélite.

Se emplea la notación para sistemas de referencia mostrada en la Figura 2.2, donde $\{I\}$ indica un sistema de referencia inercial con centro coincidente con el centro de la tierra y $\{B\}$ denota un marco de referencia fijo en el cuerpo del satélite.

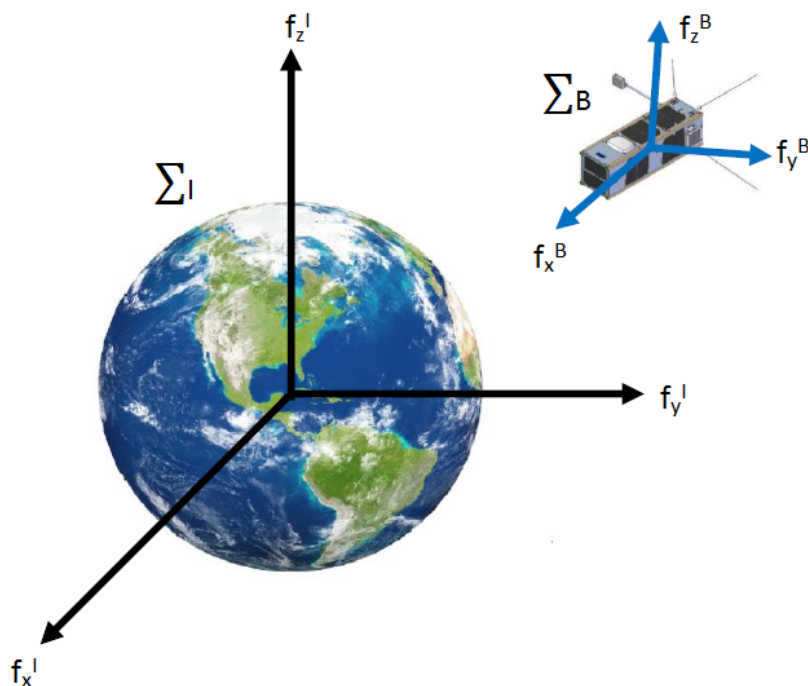


Figura 2.2: Sistemas coordenados de referencia

La ecuación diferencial que describe la dinámica de un cuerpo rígido en el espacio es la siguiente

$$M\dot{\omega} = S(h)\omega + \tau \quad (2.10)$$

Con respecto del marco de referencia $\{I\}$, $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $M = M^T$ es la matriz de inercia, $\omega \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidad angular, y $\tau \in \mathbb{R}^3$ el par de control aplicado, h es el momento angular referido al sistema $\{B\}$.

Si se considera que el par aplicado es producido por ruedas inerciales acopladas al satélite, entonces el momento angular en el sistema de referencia fijo al cuerpo puede ser expresado como $h = R^T h^I$, donde R es la matriz de rotación que transforma del sistema de referencia $\{B\}$ al sistema $\{I\}$, y h^I es el momento angular constante expresado en el sistema de referencia $\{I\}$ [19].

De esta manera, la ecuación dinámica puede ser reescrita como

$$M\dot{\omega} = S(R^T h^I)\omega + \tau \quad (2.11)$$

La ecuación cinemática que describe la relación entre la derivada de una parametrización de la orientación en cuaterniones q y la velocidad angular del satélite ω está dada por

$$\dot{q} = \frac{1}{2}J(q)\omega \quad (2.12)$$

Donde $J(q)$ es el Jacobiano analítico del sistema y definido como

$$J(q) = \begin{bmatrix} -\epsilon^T \\ \eta I_3 + S(\epsilon) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Mientras la orientación esté parametrizada por cuaterniones el Jacobiano $J(q)$ satisface las siguientes propiedades [4].

$$J^T(q)J(q) = I_3 \quad (2.14)$$

$$J^T(q)q = 0 \quad (2.15)$$

En resumen, el modelo dinámico del satélite consta de siete variables de estado, tres para la parte dinámica que corresponde con el vector de velocidad angular ω y cuatro que definen la orientación del satélite en términos de cuaterniones unitarios q , mediante

$$M\dot{\omega} = S(R^T h^I)\omega + \tau \quad (2.16a)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\epsilon^T \\ \eta I_3 + S(\epsilon) \end{bmatrix} \omega \quad (2.16b)$$

2.3. Teoría de Contracción

El análisis por contracción es un resultado derivado de herramientas utilizadas en la mecánica del medio continuo y geometría diferencial.

La teoría de contracción, inspirada por la mecánica de fluidos, está basada en un enfoque distinto al análisis de estabilidad fundamentado en la teoría de Lyapunov. La estabilidad es una propiedad generalmente vista en relación a alguna trayectoria nominal o punto de equilibrio. El análisis por contracción está motivado por el hecho de que hablar sobre estabilidad no requiere el conocer lo que es una trayectoria nominal. Desde este punto de vista, un sistema es estable en alguna región si las condiciones iniciales o perturbaciones temporales son de alguna manera “olvidadas”, esto es, si el comportamiento final del sistema es independiente de las condiciones iniciales. Por lo tanto, esta otra perspectiva de estabilidad se refiere a si las trayectorias del sistema convergen a una trayectoria nominal, a este enfoque de estabilidad se le denomina contracción.

2.3.1. Análisis Básico de Contracción

Considere el sistema determinístico general de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.17)$$

Donde f es una función vectorial no lineal de $n \times 1$. La ecuación (2.17) puede representar la dinámica en lazo cerrado de un sistema controlado por una retroalimentación de estados $u(x, t)$.

Considerando el flujo local en un punto x , se lleva a un análisis de contracción entre dos trayectorias vecinas. Si todas las trayectorias vecinas convergen unas a otras (comportamiento contrayente) entonces la convergencia exponencial y global a una sola trayectoria puede ser concluida.

Asumiendo que $f(x, t)$ es continuamente diferenciable, además, considerando dos trayectorias vecinas en el campo vectorial $\dot{x} = f(x, t)$ y el desplazamiento virtual δx entre ellas definido como un desplazamiento infinitesimal en tiempo fijo, Figura 2.3, la ecuación (2.17) lleva a la siguiente relación diferencial exacta.

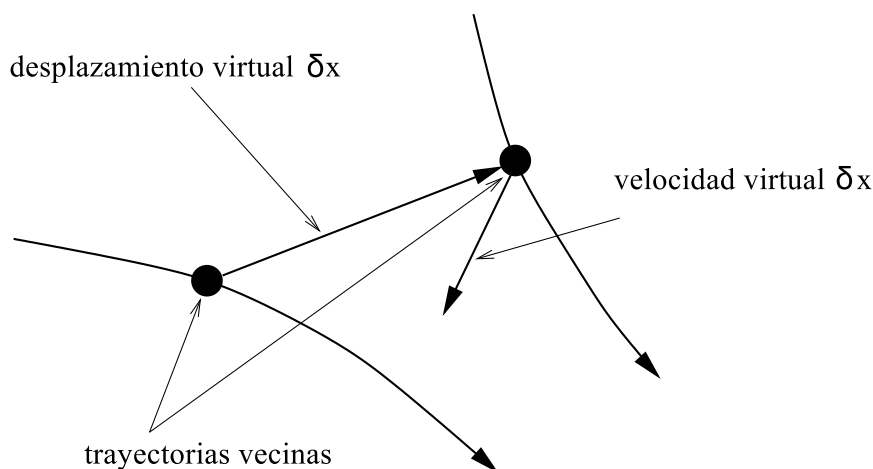


Figura 2.3: Dinámica virtual entre dos trayectorias vecinas [1].

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \delta x \quad (2.18)$$

La norma euclidiana al cuadrado entre estas dos trayectorias puede ser definida como $\delta x^T \delta x$, a partir de la ecuación (2.18) se obtiene la derivada del desplazamiento virtual con respecto al tiempo en la ecuación siguiente.

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) = 2\delta x^T \delta \dot{x} = 2\delta x^T \frac{\partial f}{\partial x} \delta x \quad (2.19)$$

Definiendo $\lambda_{max}(x, t)$ como el valor propio más grande de la parte simétrica del Jacobiano $\frac{\partial f}{\partial x}$, esto es, el valor propio más grande de la parte simétrica del Jacobiano J_s definido como

$$J_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right), \quad (2.20)$$

tenemos que

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) \leq 2\lambda_{max} \delta x^T \delta x \quad (2.21)$$

y, por lo tanto

$$\|\delta x\| \leq \|\delta x_0\| e^{\int_0^t \lambda_{max}(x, t) dt}. \quad (2.22)$$

Si λ_{max} es uniformemente y estrictamente negativo, esto es,

$$\exists \beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \lambda_{max}(x, t) \leq -\beta < 0, \quad (2.23)$$

entonces de la ecuación (2.22) cualquier distancia infinitesimal $\|\delta x\|$ converge exponencialmente a cero. Esto implica que, al integrar sobre toda la trayectoria, las soluciones del sistema (2.17) convergen de forma exponencial a una sola trayectoria, independientemente de las condiciones iniciales. Entonces, se puede establecer la siguiente definición.

Definición 2.3.1 (Región de Contracción) *Dado el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, una región del espacio de estados se dice es una **región de contracción** si el Jacobiano $\frac{\partial f}{\partial x}$ es uniformemente negativo definido en esa región.*

La condición para que $\frac{\partial f}{\partial x}$ sea uniformemente negativo definido es que

$$\exists \beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right) \leq -\beta I < 0 \quad (2.24)$$

Considere ahora una bola de radio constante centrada en una trayectoria dada, de tal manera que la bola permanecerá dentro de una región de contracción para todo tiempo. Debido a que cualquier distancia dentro de la bola decrece exponencialmente, cualquier trayectoria que inicie en la bola permanece en la bola y converge a la trayectoria dada, se permite ahora enunciar el teorema de contracción:

Teorema 2.3.1 (Contracción [1]) *Dado el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, cualquier trayectoria que inicia en una bola de radio constante centrada sobre una trayectoria dada y contenida para todo tiempo en una región de contracción, permanece en esa bola y converge exponencialmente a la trayectoria dada.*

Asimismo, se garantiza convergencia global y exponencial si todo el espacio de estados es una región de contracción.

El Teorema 2.3.1 puede ser extendido empleando una definición general de distancia diferencial.

2.3.2. Análisis Generalizado de Contracción

El vector δx entre dos trayectorias vecinas mostrado en la Figura 2.3 puede ser expresado usando la siguiente transformación de coordenadas

$$\delta z = \Theta \delta x \quad (2.25)$$

En el cual, $\Theta(x, t)$ es una matriz cuadrada e invertible. En este caso, la generalización de la norma euclidiana al cuadrado es la norma inducida por la forma cuadrática de Θ .

$$\delta z^T \delta z = \delta x^T M \delta x \quad (2.26)$$

Donde $M(x, t) = \Theta^T \Theta$ representa una métrica simétrica y continuamente diferenciable.

Dado que la ecuación (2.25) por lo general es no integrable, no podemos esperar encontrar nuevas coordenadas $z(x, t)$, pero δz y $\delta z^T \delta z$ siempre pueden ser definidas, que es lo que se necesita. Asumiendo que M es uniformemente positiva definida, así la convergencia exponencial de δz a cero también implica la convergencia exponencial de δx a cero.

La distancia entre dos puntos P_1 y P_2 con respecto a la métrica M está definida como el camino más corto entre esos dos puntos, esto es el camino donde el valor de la integral $\int_{P_1}^{P_2} \|\delta z\|$ es menor.

De esta manera, una bola con centro en c y radio R está definida como el conjunto de todos los puntos cuya distancia a c respecto a M es estrictamente menor a R .

Empleando la ecuación (2.25), la derivada respecto al tiempo de $\delta z = \Theta \delta x$ puede ser expresada como

$$\frac{d}{dt} \delta z = \dot{\Theta} \delta x + \Theta \delta \dot{x} = \left(\dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Theta^{-1} \delta z = F \delta z \quad (2.27)$$

Donde el Jacobiano Generalizado está definido como

$$F = \left(\dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Theta^{-1} \quad (2.28)$$

Y representa la derivada covariante de f en las coordenadas δz [20].

La derivada de la norma cuadrada $\delta z^T \delta z$ puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} (\delta z^T \delta z) = 2 \delta z^T \frac{d}{dt} \delta z = 2 \delta z^T F \delta z \quad (2.29)$$

Similarmente al razonamiento del Teorema 2.3.1, convergencia exponencial de δz (y por lo tanto de δx) a cero puede ser determinada en regiones donde F es uniformemente negativa definida. Este resultado puede ser una extensión del análisis de eigenvalores en sistemas lineales invariantes en el tiempo y da pie a la siguiente definición.

Definición 2.3.2 (Región de Contracción respecto a una métrica) *Dado el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, una región del espacio de estados se dice es una región de contracción respecto a una métrica $M(x, t) = \Theta^T \Theta$ uniformemente positiva definida, si el equivalente de F de la ecuación (2.28) es uniformemente negativo definido, es decir, se cumple que*

$$\frac{\partial f^T}{\partial x} M + M \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{M} \leq -\beta_M M \quad (2.30)$$

Con

$$\beta_M > 0 \quad (2.31)$$

en esa región.

A partir de esta definición se puede establecer el siguiente teorema

Teorema 2.3.2 (Contracción(Generalizado) [1]) *Dado el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, cualquier trayectoria la cual inicia en una bola de radio constante respecto a la métrica $M(x, t)$, centrada en una trayectoria dada y contenida para todo tiempo en una región de contracción con respecto a $M(x, t)$, permanece en esa bola y converge exponencialmente a la trayectoria dada.*

Además, convergencia exponencial y global a la trayectoria dada se garantiza si todo el espacio de estados es una región de contracción respecto a la métrica $M(x, t)$.

Un estudio más amplio y exhaustivo, así como el análisis de sistemas contrayentes y las propiedades de sistemas resultantes por la combinación de sistemas contrayentes en configuraciones paralelo, cascada, retroalimentación negativa, mapeos no lineales, pequeñas ganancias y teoremas conversos son abordados en [1], [21] y [22].

2.3.3. Contracción Parcial

El siguiente teorema introduce el concepto de convergencia no sólo a trayectorias, sino a variedades o relaciones entre variables de estado, propiedad que se conoce como contracción parcial.

Contracción parcial es una herramienta de análisis general para investigar la estabilidad de sistemas complejos a los que no se tiene acceso a todas las variables además de que puede ser utilizado para el diseño de observadores de estados como veremos más adelante.

El concepto de contracción parcial se deriva del siguiente resultado simple pero no general.

Teorema 2.3.3 (Contracción Parcial [23]) *Considere un sistema no lineal de la forma*

$$\dot{x} = f(x, x, t) \tag{2.32}$$

y asuma que el sistema auxiliar

$$\dot{y} = f(y, x, t) \tag{2.33}$$

*es contrayente con respecto a y . Entonces, si una solución particular del sistema auxiliar y cumple una propiedad específica suave, como puede ser una relación entre variables de estado o a una trayectoria del sistema, entonces todas las trayectorias del sistema original x cumplen esta misma propiedad exponencialmente, por lo que se dice que el sistema original x es **parcialmente contrayente**.*

Demostración: El sistema virtual tipo observador (2.33) tiene dos soluciones particulares, esto es, y para todo t y la solución con la propiedad específica. Dado que todas las trayectorias del sistema (2.33) convergen exponencialmente a una sola trayectoria, esto implica que el sistema original (2.32) cumple la propiedad específica exponencialmente.

Por lo tanto, el sistema auxiliar o virtual (2.33) debe ser contrayente bajo las condiciones del Teorema 2.3.1 o del Teorema 2.3.2, y contener dos soluciones particulares, la primera una solución del sistema original (2.32) $\forall t \geq 0$ y la segunda con alguna propiedad específica.

2.4. Sincronización

El fenómeno de sincronización se encuentra ampliamente en sistemas biológicos y es empleado en otro tipo de sistemas donde se presenta grandes cantidades de ruido, pues por ejemplo en [14] se muestra como la sincronización es un medio para proteger sistemas interconectados de ruido.

La protección ante ruido implica que la respuesta individual de un grupo de sistemas ruidosos idénticos interconectados es cercano a un comportamiento donde el ruido está ausente. A partir de esta idea, en [13] se demuestra como el comportamiento

de un observador individual puede ser mejorado por la interconexión de un grupo de observadores.

Considere un sistema llamado “líder”

$$dy = f_1(y, v)dt, \quad (2.34)$$

$$dv = f_2(y, v)dt, \quad y_i = y + \sigma_\omega \omega_i \quad (2.35)$$

Donde y_i es la i -ésima medición de la salida corrompida por ruido blanco ω_i con intensidad σ_ω , donde $i = 1, \dots, N$, $y \in \mathbb{R}^M$ y $v \in \mathbb{R}^P$, $p \leq m$, representan los estados medibles y no medibles respectivamente.

Defina un observador, “el i -ésimo seguidor” de la forma

$$d\hat{y}_i = (f_1(y_i, \hat{v}_i) - K(t)(\hat{y}_i - y_i) - u_i(\hat{y}_i, \hat{y}_j))dt \quad (2.36)$$

$$d\hat{v}_i = (f_2(y_i, \hat{v}_i) - u_i(\hat{v}_i, \hat{v}_j))dt \quad (2.37)$$

De lo anterior, $u_i(\hat{v}_i, \hat{v}_j) = K_s \sum_j (\hat{v}_i - \hat{v}_j)$ es un término de acoplamiento “todos con todos” en los elementos de la red, $0 < K(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matriz diagonal con elementos positivos y $K_s > 0$. De aquí se deriva el siguiente teorema

Teorema 2.4.1 (Sincronización [13]) *Asuma que el observador libre de ruido*

$$d\hat{y}_i = (f_1(y_i, \hat{v}_i) - K(t)(\hat{y}_i - y_i))dt \quad (2.38)$$

$$d\hat{v}_i = (f_2(y_i, \hat{v}_i))dt \quad (2.39)$$

es contrayente, esto es, que para algún β , la parte simétrica de su Jacobiano cumple con $J_s \leq -\beta I < 0$ uniformemente. Sea $x = [y^T \ v^T]^T$, donde la dinámica promedio \bar{x} es

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{x}_i \quad (2.40)$$

Y \hat{x} el estimado de x , es definido igual que x . Entonces, después de un transitorio exponencial

$$\|\bar{x}(t) - \hat{x}(t)\|^2 \leq \frac{N(N-1)}{4N^2} \frac{H_{bd}(K_{max}^2 + l_F^2)\sigma_\omega^2}{\lambda_f + K_s N} + \frac{(K_{max}^2 + l_f^2)\sigma_\omega^2}{N} \quad (2.41)$$

2. PRELIMINARES

Donde $H_{bd} \geq \lambda_{\max}(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x})$ es una cota superior uniforme de $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, $l_F > 0$ es la constante de Lipchitz de $f(y, \hat{v}) = [f_1^T(y, \hat{v}) \ f_2^T(y, \hat{v})]^T$ y $\sup_{t \geq 0} \text{tr}\{K^T(t)K(t)\} \leq k_{\max}^2$.

De esta manera se asegura que el la dinámica promedio converge a la dinámica real cuando el número de observadores sincronizados tiende a infinito. La demostración de este Teorema se puede encontrar en el apéndice de [13].

En resumen, en este capítulo se presentaron las herramientas básicas que se usan para el diseño de los observadores, primero se explica lo que es una rotación y su representación por cuaterniones, después se muestra el modelo de un satélite considerándolo como un cuerpo rígido en el espacio mediante una parametrización en cuaterniones, después se introducen los conceptos de contracción y sincronización, necesarios para el diseño de los observadores.

Medición de la orientación de un CubeSat a partir de los paneles solares

Como entrada del observador por diseñar se necesita una medición de la orientación que debe obtenerse únicamente a partir de los paneles solares, es por ello que en este capítulo se expone un método con el cual es posible obtener una medición de la orientación empleando como sensor sólo los paneles solares montados al satélite.

Como se ha mencionado antes, en muchos trabajos sobre obtención de la orientación y velocidad angular de satélites miniatura se emplea una gran variedad de sensores, en este caso el objetivo de este trabajo es obtener un estimado de la velocidad angular a partir exclusivamente de paneles solares para evitar emplear un gran número de sensores y con ello disminuir el peso del satélite, así como el consumo energético que en el caso de CubeSats son aspectos de suma importancia.

En este capítulo se desarrolla un algoritmo en el cual, a partir de la fecha actual y la medición de la corriente generada por los paneles solares, determina una medición de la orientación. En el algoritmo propuesto, se busca en primer lugar obtener un vector de sol referido al sistema de referencia fijo en el cuerpo del satélite V_s^B , después obtener el mismo vector de sol referido al sistema de referencia inercial con centro coincidente con el centro de la tierra V_s^I y dada la siguiente relación

$$V_s^I = R V_s^B, \quad (3.1)$$

donde $R \in SO(3)$ es la matriz de rotación que lleva del sistema $\{B\}$ al sistema $\{I\}$, se obtiene R mediante un algoritmo de minimización convexa expuesto en [30], después, la matriz de rotación se convierte a su equivalente en cuaternión que será la entrada del observador a diseñar.

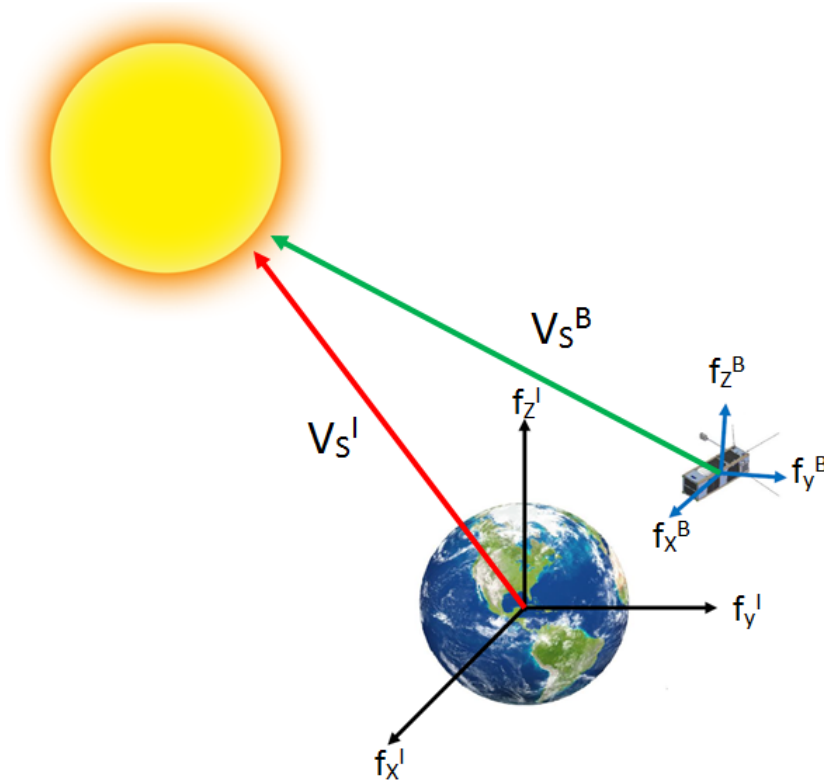


Figura 3.1: Vectores de Sol

3.1. Obtención del vector de sol (V_s^B) a partir de los paneles solares

Dentro de la literatura de estimación de la orientación de satélites, se encuentran varios ejemplos de cómo emplear paneles solares no sólo como fuente de energía, sino que además usarlos como sensor de sol.

Por ejemplo, en [24] se propone un algoritmo llamado “Irradance-based attitude determination” (IRAD), el cual se utiliza para determinar la orientación de un vehículo de exploración planetaria mejor conocido como Rover. IRAD emplea las características y geometría de los paneles solares.

3.1.1. Modelo matemático de un panel solar

En [25] se expone un método para hacer uso de los paneles solares como sensor además de un magnetómetro para la obtención de la orientación de un satélite. En el este trabajo, primero se propone un modelo matemático de un panel solar que permita

calcular el ángulo entre los rayos solares y un panel solar, el cual incluya efectos de temperatura, radiación espacial y efectos del ángulo solar en la curva corriente – voltaje de un panel.

El circuito equivalente de un panel solar de un diodo se muestra en la Figura 3.2 donde se observa se puede medir la corriente I y el votaje V .

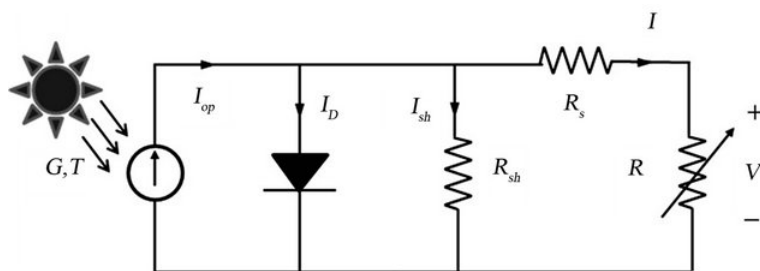


Figura 3.2: Circuito equivalente de una celda solar

La corriente medida i como función del ángulo de incidencia θ es expresada como,

$$i = i_{max} \cos \theta \quad (3.2)$$

donde i_{max} es la corriente máxima que puede ser generada por el panel con $\theta = 0$, esta

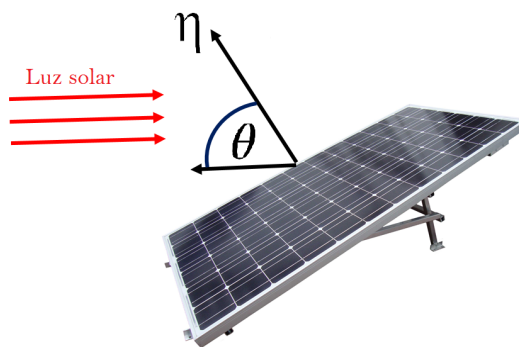


Figura 3.3: Definición de ángulo de incidencia

expresión es válida sólo considerando un panel solar como un sensor de sol ideal, esto es, despreciando los efectos de temperatura y el desgaste propio de los paneles.

Es de esta manera como a partir de la medición de corriente en un panel solar se puede obtener el ángulo de incidencia de los rayos del sol.

3.1.2. Algoritmo Estándar de obtención del vector V_s^B

Para obtener el vector de sol referido al sistema de referencia fijo en el cuerpo del satélite V_s^B se utilizará el algoritmo estándar descrito en [2], considerando que el

3. MEDICIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE UN CUBESAT A PARTIR DE LOS PANELES SOLARES

CubeSat tiene montados por lo menos seis paneles solares, uno en cada cara.

En la Figura 3.4 se muestra la geometría de obtención del vector de sol V_s^B en una configuración donde seis paneles son montados en pares en direcciones opuestas y a lo largo de tres ejes ortogonales. Los paneles solares están representados por sus vectores normales \hat{n}_{ssi} como se muestra en la Figura 3.4.

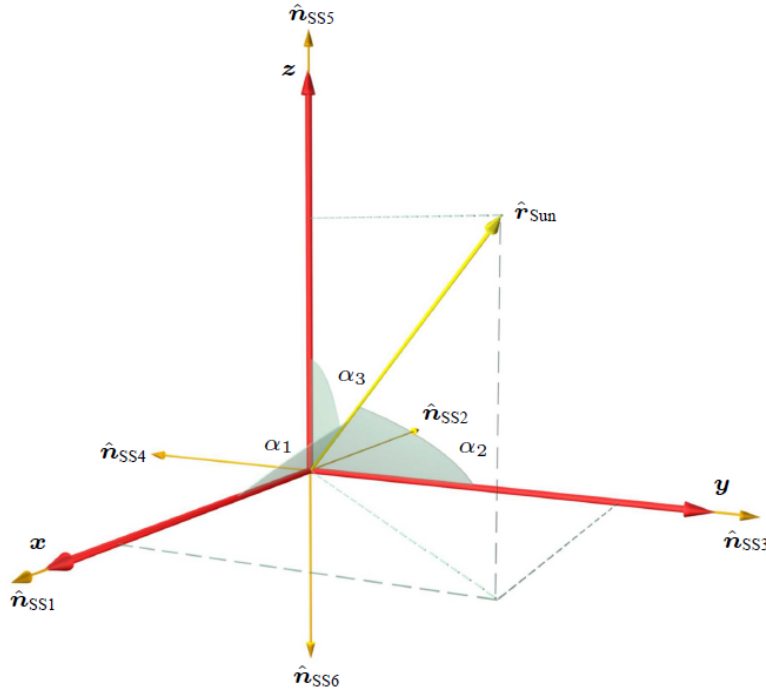


Figura 3.4: Proyección del vector de sol en los vectores normales de los paneles [2]

Normalizando la ecuación (3.2) se tiene

$$\frac{i}{i_{max}} = \cos \sigma, \quad (3.3)$$

La cual es la proyección de V_s^B en \hat{n}_{ssi} . Si el sol se encuentra en la dirección negativa de un eje, entonces la ecuación (3.3) describe la proyección en el eje asociado en dirección negativa. Posteriormente, los elementos estimados del vector de sol pueden ser escritos como

$$\bar{r}_{sun} = \begin{bmatrix} \frac{i_{m1}}{i_{max}} - \frac{i_{m4}}{i_{max}} \\ \frac{i_{m2}}{i_{max}} - \frac{i_{m5}}{i_{max}} \\ \frac{i_{m3}}{i_{max}} - \frac{i_{m6}}{i_{max}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Finalmente, el vector V_s^B se determina normalizando el vector \bar{r}_{sun} .

Como se mencionó antes, este es el algoritmo estándar expuesto en [2], por lo que en la misma referencia se muestran algoritmos para determinar el vector de sol que incorporan efectos como la temperatura en la superficie de los paneles y el albedo de la tierra.

3.2. Obtención del vector de sol referido al sistema inercial (V_s^I)

Para obtener la matriz de rotación R es necesario encontrar un vector de posición de la tierra al sol medido desde un sistema de referencia inercial como se observa en la ecuación (3.1).

Mediciones precisas del vector V_s^I están disponibles gracias al Laboratorio de Propulsión a Chorro (Jet Propulsion Laboratory) de la NASA, sin embargo, es conveniente emplear un algoritmo matemático para poder obtener un estimado del vector de sol en línea, aunque con menor precisión. Es por ello que para obtener el vector V_s^I recurrimos a una técnica desarrollada en el Almanaque Astronómico y expuesta en [3].

Dicha técnica otorga un vector con una precisión de 0.01° y es válida desde el año 1950 hasta el año 2050 debido al truncamiento de la expansión, en la Figura 3.5 se muestra la geometría necesaria para visualizar el problema.

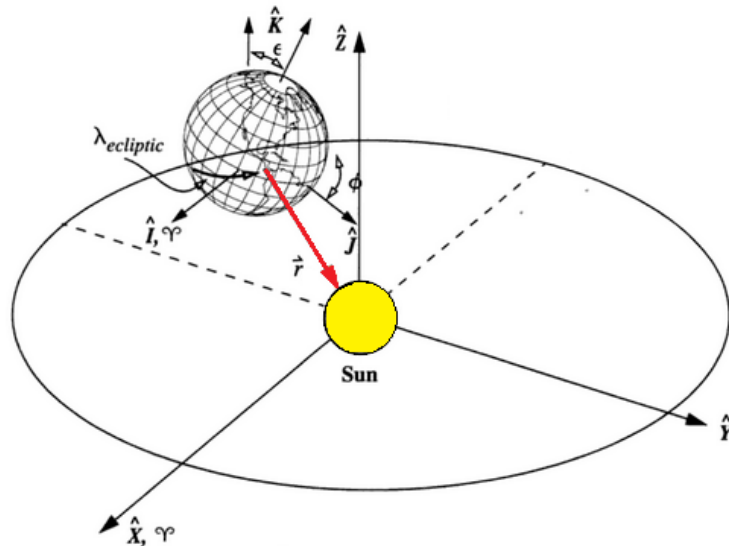


Figura 3.5: Vector de posición del sol [3]

La entrada de este algoritmo es la fecha actual y a partir de ello se obtiene el vector de posición del sol \bar{r}_\odot en unidades astronómicas [UA], que después será normalizado

3. MEDICIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE UN CUBESAT A PARTIR DE LOS PANELES SOLARES

para así obtener el vector de sol que se necesita.

3.2.1. Algoritmo de obtención del vector de sol

En resumen, el algoritmo es el siguiente. Primero, por simplicidad, a partir de la fecha actual se obtiene la fecha Juliana empleando la siguiente expresión [3],

$$JD = 367yr - INT \left\{ \frac{7yr + INT \left(\frac{mo+9}{12} \right)}{4} \right\} + INT \left(\frac{275mo}{9} \right) + d + 1,721,013 + \frac{\left(\frac{seg}{60} \right) + min}{60} + \frac{h}{24}$$

Donde yr, mo, d, h, min y seg son el año, mes, día, hora, minuto y segundo actuales respectivamente y la función INT obtiene la parte entera de un número. Después, se obtiene el número de siglos Julianos T_{UT1} de la siguiente ecuación

$$T_{UT1} = \frac{JD - 2,451,545}{36,525} \quad (3.5)$$

Calculamos la longitud promedio al sol

$$\lambda_{M_{\odot}} = 280.46^{\circ} + 3,600.771 T_{UT1} \quad (3.6)$$

Asumiendo $T_{TDB} = T_{UT1}$ se obtiene la anomalía promedio al sol

$$M_{\odot} = 357.527^{\circ} + 35,999.05 T_{TDB} \quad (3.7)$$

La longitud eclíptica $\lambda_{ecliptic}$ se calcula como

$$\lambda_{ecliptic} = \lambda_{M_{\odot}} + 1.914^{\circ} \sin(M_{\odot}) + 0.01944 \sin(2M_{\odot}) \quad (3.8)$$

La latitud eclíptica del sol nunca excede 0.000333 por lo que se toma igual a cero, esto es

$$\phi_{ecliptic} = 0^{\circ} \quad (3.9)$$

Encontramos la magnitud del vector de posición r_{\odot}

$$r_{\odot} = 0.00014 - 0.016708 \cos(M_{\odot}) - 0.00013958 \cos(2M_{\odot}) \quad (3.10)$$

Se aproxima la oblicuidad de la eclíptica ϵ como

$$\epsilon = 23.439^{\circ} - 0.0130042 T_{TDB} \quad (3.11)$$

Y obtenemos el vector de posición de la Figura 3.5, \bar{r}_{\odot} de la siguiente expresión

$$\bar{r}_{\odot} = \begin{bmatrix} r_{\odot} \cos(\lambda_{ecliptic}) \\ r_{\odot} \cos(\epsilon) \sin(\lambda_{ecliptic}) \\ r_{\odot} \sin(\epsilon) \sin(\lambda_{ecliptic}) \end{bmatrix} [UA] \quad (3.12)$$

Finalmente, para obtener el vector V_s^I se normaliza el vector \bar{r}_{\odot} .

3.3. Obtención de una medición de la orientación a partir de los vectores de sol V_s^I y V_s^B

En general existen varios algoritmos para obtener una medición de la orientación a partir de los vectores de observación, algunos ejemplos de estas técnicas son el método geométrico, método algebraico y algoritmo q expuestos en [26].

Así mismo, un algoritmo muy empleado en la determinación de orientación es TRIAD (Tri-axis attitude determination), el cual utiliza la medición del vector de sol y además una medición del campo magnético [27]. Sin embargo, para el caso del presente trabajo, no se emplea este algoritmo dado que se asume que solo se cuenta con la medición del vector de sol.

Es por ello que para obtener una medición de la orientación del satélite R nos enfocamos en resolver el problema de Wahba planteado en [28] el cual enuncia lo siguiente.

Problema de Wahba 3.3.1 *Dados dos conjuntos de n vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$, encontrar la matriz de rotación R , esto es, la matriz ortogonal con determinante $+1$, la cual brinda la mejor coincidencia en mínimos cuadrados entre el primer conjunto de vectores y el segundo. Esto es, encontrar R que minimiza la siguiente expresión*

$$\sum_{j=1}^n \|v_j^* - R v_j\|^2 \quad (3.13)$$

Existen varios métodos para resolver este problema, por ejemplo realizar una descomposición en valores singulares de una matriz de 3×3 , obtenida de los vectores de observación como se muestra en [29].

En este caso, dado que sólo se cuenta con un vector de observación obtenido a partir de los paneles, se recurre a un método que suple nuestras deficiencias en hardware a costa de un algoritmo cuya implementación requiere mayor capacidad de procesamiento computacional en comparación de otros métodos.

Este método desarrollado en [30] es un algoritmo de optimización convexa en tiempo real, dado que esta técnica involucra temas como programación cuadrática, lo cual está fuera de los alcances de este trabajo, sólo se explicará su implementación dejando de lado el sustento matemático.

De esta manera, el problema es encontrar R_y , tal que minimice la siguiente función.

$$R_y = \arg \min_{R \in SO(3)} (\|V_s^I - R V_s^B\|_2^2) \approx R_B^I \quad (3.14)$$

sujeta a la siguiente restricción

3. MEDICIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE UN CUBESAT A PARTIR DE LOS PANELES SOLARES

$$\det R_y = 1 \quad (3.15)$$

El algoritmo de optimización convexo en tiempo real se implementó en Matlab con ayuda del comando *CVX* de manera similar a la mostrada en [30].

Es así como se obtiene R_y , que es una medición de R a partir de los vectores de sol. Finalmente, se realiza la conversión de está matriz de rotación a cuaterniones, $SO(3) \rightarrow Q$, empleando el siguiente procedimiento.

Definiendo previamente

$$R_y = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

se tiene que

$$\eta_y = \frac{\sqrt{\text{tr}(R) + 1}}{2} \quad (3.17)$$

$$\epsilon_{y1} = \frac{R_{zy} - R_{yz}}{4\omega} \quad (3.18)$$

$$\epsilon_{y2} = \frac{R_{xz} - R_{zx}}{4\omega} \quad (3.19)$$

$$\epsilon_{y3} = \frac{R_{yz} - R_{xy}}{4\omega} \quad (3.20)$$

$$q_m = \frac{1}{\sqrt{\eta_y^2 + \epsilon_{y1}^2 + \epsilon_{y2}^2 + \epsilon_{y3}^2}} \cdot [\eta_y \ \epsilon_{y1} \ \epsilon_{y2} \ \epsilon_{y3}]^T \quad (3.21)$$

Donde q_m es una medición de la orientación del satélite en términos de cuaterniones unitarios, y esta medición es la entrada de los observadores diseñados en el siguiente capítulo.

Diseño de Observadores

En este capítulo se presenta el diseño de varios observadores empleando la teoría de contracción, específicamente en el concepto de contracción parcial [23], con el objetivo de estimar la velocidad angular de un satélite cuya dinámica es modelada por las ecuaciones (2.16) del capítulo dos. Recapitulando, el modelo es el siguiente

$$M\dot{\omega} = S(R^T h^I)\omega + \tau \quad (4.1a)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\epsilon^T \\ \eta I_3 + S(\epsilon) \end{bmatrix} \omega \quad (4.1b)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\eta \in \mathbb{R}$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^3$.

En primer lugar, se propone un observador de orden reducido que logre estimar la velocidad angular dada una medición de la orientación del satélite q_m , además que asegure la convergencia exponencial de los estados estimados a los reales para el caso en el que no se presenta ruido en la medición.

La suposición de mediciones ausentes de ruido es poco realista, pues por ejemplo la medición obtenida de los paneles solares presenta altas cantidades de ruido, lo que deteriora el desempeño del observador de orden reducido. Por esto, en la segunda parte de este capítulo se diseña un observador de orden completo con la finalidad de obtener una mejor estimación a pesar de la presencia de ruido en la medición.

Finalmente, para mejorar el desempeño del observador de orden completo, se realiza una sincronización de observadores como se muestra en [14] y [13], con el fin de que la sincronización proteja el esquema de observación del ruido en las mediciones. Para sincronizar N observadores es necesario obtener N mediciones independientes, lo cual en la práctica es factible dado algunos diseños de CubeSats de tamaño mayor a 1U se coloca más de un panel solar en cada cara del satélite.

Para el diseño de los observadores se emplea la metodología "top-down" [17], en la cual primero se propone una dinámica "simple" del observador, a partir de ésta se realiza el análisis de contracción, asegurando la convergencia exponencial de los estados estimados a los reales. Después, debido a que esta dinámica "simple" del observador contiene variables no medidas, se puede sustituir estas variables por expresiones en

términos de la variable medida q_m , obtenido como resultado una versión implementable del observador.

4.1. Observador de Orden Reducido

4.1.1. Diseño

Considerando la dinámica del satélite (4.1) el observador de orden reducido está dado por

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + K J_f J(\omega - \hat{\omega}) + \tau \quad (4.2)$$

donde $K = K^T > 0$ es una matriz de ganancia y J_f es la matriz Jacobiana filtrada definida como

$$\dot{J}_f = (J - J_f)\Gamma, \quad J_f(0) = J(q(0)), \quad (4.3)$$

además, $\Gamma = \Gamma^T > 0$ una matriz de ganancia del filtro. Por simplicidad se define como $\Gamma = \gamma I_3$, con $\gamma > 0$ y constante. A partir de esto se enuncia el siguiente Teorema.

Teorema 4.1.1 (Observador de Orden Reducido) *El observador de orden reducido (4.2) es contrayente, esto es, para cualquier condición inicial $\hat{\omega}(0)$ sus trayectorias convergen exponencialmente a las trayectorias del sistema (4.1) con la tasa de convergencia definida como $\lambda_1 \triangleq \lambda_{\min}(K) - \sigma_J \lambda_{\max}(K) > 0$ para algún $\sigma_J > 0$.*

Para demostrar el teorema anterior y con esto que la dinámica del observador reducido (4.2) es contrayente se requiere primero demostrar que la diferencia entre $J_f^T J - I_3$ se puede hacer arbitrariamente pequeña con una ganancia de filtrado γ lo suficientemente grande, para ello nos apoyamos del siguiente lema.

Lema 4.1.1 *Considere la matriz Jacobiana filtrada J_f (4.3).*

La matriz Jacobiana filtrada J_f tiende a J cuando $t \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$, esto es $\forall \sigma_J > 0$, $\exists \gamma$ tal que $\gamma \geq \underline{\gamma}$, $\|J_f^T J - I_3\| \leq \sigma_J$.

Para probar esto se parte de la solución general de la ecuación diferencial (4.3)

$$J_f = e^{-\gamma t} J_f(0) + \int_0^t \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} J(\tau) dt, \quad (4.4)$$

multiplicando por $J(t)$

$$J_f^T J(t) = e^{-\gamma t} J_f(0)J(t) + \int_0^t \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} J^T(\tau) dt J(t), \quad (4.5)$$

dado que $J(t)$ es acotado, esto implica que $J_f^T(t)J(t) \rightarrow J^T(t)J(t) = I_3$ cuando $t \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$. Esto demuestra el Lema 4.1.1.

Ahora, con ayuda de la teoría expuesta en capítulo dos, se procede a realizar el análisis de contracción. A partir de (4.2) se obtiene el desplazamiento virtual de la velocidad angular $\delta\omega$.

$$M\delta\dot{\omega} = [S(R^T h^I) - K J_f^T J]\delta\hat{\omega} \quad (4.6)$$

La evolución en el tiempo de su distancia cuadrada bajo la métrica M es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\omega^T M \delta\hat{\omega}) = \delta\hat{\omega}^T M \delta\dot{\omega} \quad (4.7)$$

sustituyendo (4.6) en (4.7) tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\omega^T M \delta\hat{\omega}) = \delta\hat{\omega}^T [S(R^T h^I) - K J_f^T J] \delta\hat{\omega} \quad (4.8)$$

$$= \delta\hat{\omega}^T S(R^T h^I) \delta\hat{\omega} - \delta\hat{\omega}^T K J_f J \delta\hat{\omega} \quad (4.9)$$

dado que para cualquier vector $a \in \mathbb{R}^3$, la matriz $S(a) = -S(a)^T$ antisimétrica al estar multiplicada por una forma cuadrática se cumple lo siguiente

$$\delta\hat{\omega}^T S(R^T h^I) \delta\hat{\omega} = 0 \quad (4.10)$$

por lo que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\omega^T M \delta\hat{\omega}) = -\delta\hat{\omega}^T K J_f J \delta\hat{\omega} \quad (4.11)$$

Por otro lado, se tiene la siguiente igualdad

$$J_f^T J = (J^T + J_f^T - J^T)J \quad (4.12)$$

sustituyendo (4.12) en (4.11)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\omega^T M \delta\hat{\omega}) = -\delta\hat{\omega}^T K [J^T J + (J_f - J)^T J] \delta\hat{\omega} \quad (4.13)$$

de la propiedad (2.14) se sigue

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\omega^T M \delta\hat{\omega}) = -\delta\hat{\omega}^T K \delta\hat{\omega} - \delta\hat{\omega}^T K (J_f - J)^T J \delta\hat{\omega} \quad (4.14)$$

se tiene que

$$\delta\hat{\omega}^T K \delta\hat{\omega} \geq \lambda_{\min}(K) \|\delta\hat{\omega}\|^2, \quad (4.15)$$

y además

$$-\delta\hat{\omega}^T K (J_f - J)^T J \delta\hat{\omega} \leq \lambda_{\max}(K) \|(J_f - J)^T J\| \|\delta\hat{\omega}\|^2 \quad (4.16)$$

para una σ_J dada, se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\omega^T M \delta\hat{\omega}) \leq -(\lambda_{\min}(K) - \sigma_J \lambda_{\max}(K)) \|\delta\hat{\omega}\|^2 \quad (4.17)$$

$$\leq -\frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}(M)} \lambda_{\max}(M) \|\delta\hat{\omega}\|^2 \quad (4.18)$$

$$\leq -\frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}(M)} \delta\hat{\omega}^T M \delta\hat{\omega} \quad (4.19)$$

que lleva a

$$\|\delta\hat{\omega}\|_M^2 \leq e^{-2\frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}(M)} t} \|\delta\hat{\omega}(0)\|^2 \quad (4.20)$$

De esta manera, se demuestra que la dinámica del observador es contrayente y además la convergencia exponencial de los estados estimados a los estados reales.

4.1.2. Implementación

El observador

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + K J_f J (\omega - \hat{\omega}) + \tau, \quad (4.21)$$

no es implementable, debido a que depende explícitamente de ω que es la variable que se desea estimar. Empleando la metodología “top-down” se obtiene una versión implementable de la siguiente manera.

Definiendo

$$y_a \triangleq J_f^T q, \quad (4.22)$$

cuya dinámica es

$$\dot{y}_a = J_f^T J \omega + \Gamma(J - J_f)^T q, \quad (4.23)$$

despejando $J_f^T J \omega$ tenemos

$$J_f^T J \omega = \dot{y}_a - \Gamma(J - J_f)^T q, \quad (4.24)$$

sustituyendo (4.24) en (4.21)

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + K(\dot{y}_a - \Gamma(J - J_f)^T q - J_f^T J \hat{\omega}) + \tau \quad (4.25)$$

se pasa $K\dot{y}_a$ al lado izquierdo

$$M\dot{\hat{\omega}} - Ky_a = [S(R^T h^I) - K\Gamma J_f^T J]\hat{\omega} - K\Gamma(J - J_f)^T q + \tau \quad (4.26)$$

de esta manera

$$\frac{d}{dt}[M\hat{\omega} - Ky_a] = [S(R^T h^I) - K\Gamma J_f^T J]\hat{\omega} - K\Gamma(J - J_f)^T q + \tau \quad (4.27)$$

se realiza el siguiente cambio de variable

$$\bar{\omega} = M\hat{\omega} - Ky_a \quad (4.28)$$

Finalmente, se obtiene la siguiente versión implementable del observador (4.21)

$$\frac{d}{dt}\bar{\omega} = [S(R^T h^I) - K\Gamma J_f^T J]\bar{\omega} - K\Gamma(J - J_f)^T q + \tau \quad (4.29)$$

$$\hat{\omega} = M^{-1}(\bar{\omega} + Ky_a) \quad (4.30)$$

4.2. Observador de Orden Completo

El observador de orden reducido es útil cuando no hay presencia de ruido, debido a que afecta directamente al estimado de velocidad angular en y_a . Es por ello que se diseña un observador de orden completo con el fin de estimar tanto velocidad angular como orientación, y con ello reducir el efecto del ruido en los estados estimados.

4.2.1. Diseño

A partir de la dinámica del satélite (4.1) se propone la siguiente dinámica para el observador de orden reducido agregando un término de error en la estimación.

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + K_{11}J_f^T J(\omega - \hat{\omega}) + K_{12}(q - \hat{q}) + \tau \quad (4.31)$$

$$\dot{\hat{q}} = J\hat{\omega} + K_{21}(\omega - \hat{\omega}) + K_{22}(q - \hat{q}), \quad (4.32)$$

donde las matrices de ganancia K_{11}, K_{12}, K_{21} y K_{22} están definidas de la siguiente manera.

$$K_{11} = K_{11}^T > 0 \quad (4.33)$$

$$K_{22} = K_{22}^T > 0 \quad (4.34)$$

$$K_{12} = [(I_4 - K_{21})J]^T = J^T(I_4 - K_{21}) \quad (4.35)$$

$$K_{21} = K_{21}^T = k_{21}I_4, \quad k_{21} < 1 \quad (4.36)$$

y J_f definida de la misma manera que en (4.3). Ahora, se enuncia el siguiente teorema

Teorema 4.2.1 (Observador de Orden Completo) *El observador de orden completo (4.31) es contrayente sin importar las condiciones iniciales $\hat{\omega}(0)$ y $\hat{q}(0)$, esto significa que sus trayectorias convergen exponencialmente a las trayectorias del sistema (4.1) siempre que $\lambda_1 \triangleq \lambda_{\min}(K_{11}) - \sigma_J \lambda_{\max}(K_{11}) > 0$ para algún $\sigma_J > 0$.*

Para demostrar el teorema anterior, y con ello que el observador (4.31) es contrayente se procede de manera similar que en el caso de orden reducido. Primero, el desplazamiento virtual del observador (4.31) es

$$\mathbb{M}\delta\hat{x} = \begin{bmatrix} S(R^T h^I) - K_{11} J_f^T J & -K_{12} \\ J - K_{21} J & -K_{22} \end{bmatrix} \delta\hat{x} = \mathbb{J}\delta\hat{x} \quad (4.37)$$

donde $\mathbb{M} = \text{diag}[M \ I_4]$ y $\delta\hat{x} = [\delta\hat{\omega}^T \ \delta\hat{q}^T]$, la parte simétrica \mathbb{J}_s de la matriz Jacobiana \mathbb{J} es

$$\mathbb{J}_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(R^T h^I) - K_{11} J_f^T J & -K_{12} \\ J - K_{21} J & -K_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S^T(R^T h^I) - K_{11} J J_f^T & J^T - J^T K_{21} \\ -K_{12}^T & -K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

dado que $S(a) = -S^T(a)$, entonces

$$\mathbb{J}_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -K_{11}(J_f^T J + J J_f^T) & J^T(I_4 - K_{21}) - K_{12} \\ (I_4 - K_{21})J - K_{12}^T & -2K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

como $K_{12} = J^T(I_4 - K_{21})$ y $K_{12}^T = (I_4 - K_{21})J$ se llega a que \mathbb{J}_s es

$$\mathbb{J}_s = - \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{2}(J_f^T J + J J_f^T) & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

por lo que sustituyendo la ecuación (4.40) en (4.37) obtenemos que la evolución del cuadrado de la longitud bajo la métrica \mathbb{M} es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta\hat{x}^T \mathbb{M} \delta\hat{x} = \delta\hat{x}^T \mathbb{M} \delta\dot{\hat{x}} = \delta\hat{x}^T \mathbb{J}_s \delta\hat{x} \leq -\lambda_2 \|\delta\hat{x}\|^2 \quad (4.41)$$

donde

$$\lambda_2 = \min\{\lambda_1, \lambda_{\min}(K_{22})\} \quad (4.42)$$

con λ_1 definido igual que en la ecuación (4.17).

Con lo que se demuestra la convergencia exponencial de los estados estimados del observador de orden completo a los estados reales.

4.2.2. Implementación

De manera similar al caso de orden reducido, el observador de orden completo

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + K_{11}J_f^T J(\omega - \hat{\omega}) + K_{12}(q - \hat{q}) + \tau \quad (4.43)$$

$$\dot{\hat{q}} = J\hat{\omega} + K_{21}(\omega - \hat{\omega}) + K_{22}(q - \hat{q}) \quad (4.44)$$

no es implementable, es por ello que para llegar a su versión implementable se realiza lo siguiente.

Primero, se define y_a de manera similar a (4.22), despejando $J_f^T J\omega$

$$J_f^T J\omega = \dot{y}_a - \Gamma(J - J_f)^T q \quad (4.45)$$

sustituyendo (4.45) en (4.43) y dado que $\dot{q} = J\omega$ se llega a,

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + K_{11}[\dot{y}_a - \Gamma(J - J_f)^T q - J_f^T J\hat{\omega}] + K_{12}(q - \hat{q}) + \tau \quad (4.46)$$

$$\dot{\hat{q}} = J\hat{\omega} + K_{21}[\dot{q} - J\hat{\omega}] + K_{22}(q - \hat{q}) \quad (4.47)$$

se pasa \dot{y}_a y \dot{q} al lado izquierdo de la igualdad, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[M\hat{\omega} - K_{11}y_a] &= [S(R^T h^I) - K_{11}J_f^T J]\hat{\omega} - K_{11}\Gamma(J - J_f)^T q + \\ &\quad + K_{12}(q - \hat{q}) + \tau \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[\hat{q} - K_{21}q] = (J - K_{21}J)\hat{\omega} + K_{22}(q - \hat{q})$$

de manera similar al caso reducido se realizan los siguientes cambios de variable.

$$\bar{\omega} = M\hat{\omega} - K_{11}y_a \quad (4.48)$$

$$\bar{q} = \hat{q} - K_{21}q \quad (4.49)$$

Para disminuir el efecto del ruido en los estados estimados de las variables definidas en (4.48) se despejan los estados estimados $\hat{\omega}$ y \hat{q} y se sustituye la medición q por su estimado, recordando que $y_a = J_f^T \hat{q}$. De esta manera, se llega a la versión implementable del observador de orden completo.

$$\frac{d}{dt}\bar{\omega} = [S(R^T h^I) - K_{11}J_f^T J]\hat{\omega} - K_{11}\Gamma(J - J_f)^T q + K_{12}(q - \hat{q}) + \tau \quad (4.50)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{q} = (J - K_{21}J)\hat{\omega} + K_{22}(q - \hat{q}) \quad (4.51)$$

cuyas entradas son

$$\hat{\omega} = M^{-1}(\bar{\omega} + K_{11}J_f^T \hat{q}) \quad (4.52)$$

$$\hat{q} = \bar{q} + K_{21}q \quad (4.53)$$

donde q es la medición actual del cuaternión y \hat{q} es el estimado anterior. Finalmente, las salidas del observador son

$$\hat{\omega} = M^{-1}(\bar{\omega} + K_{11}J_f^T \bar{q}) \quad (4.54)$$

$$\hat{q} = (1 - k_{21})^{-1} \bar{q} \quad (4.55)$$

4.3. Sincronización de Observadores

En muchos trabajos como por ejemplo en [31], en cada cara de un satélite se utilizan más de un panel solar, esto con el fin de que en caso de que alguna celda falle, la captación de energía solar no se vea disminuida en gran medida. Las mediciones de corriente obtenidas de estos sensores se pueden emplear para realizar una sincronización de observadores, con el fin de proteger los estados estimados del ruido en la medición. En esta sección se realiza una sincronización de observadores basados en el observador de orden completo (4.31) agregando un término de acoplamiento entre los observadores.

4.3.1. Diseño

Cada observador es alimentado por una medición independiente de la orientación del satélite obtenida del i -ésimo panel solar $q_i = q + n_i$, con n_i ruido blanco independiente con media cero.

A partir de (4.31), para $i = 1, 2, \dots, N$ y $J = J(q_i)$ el observador sincronizado está dado por

$$M\dot{\hat{\omega}}_i = S(R^T h^I)\hat{\omega}_i + K_{11}J_f^T J(\omega_i - \hat{\omega}_i) + K_{12}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_j) \quad (4.56)$$

$$\dot{\hat{q}}_i = J\hat{\omega}_i + K_{21}(\omega_i - \hat{\omega}_i) + K_{22}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_j) \quad (4.57)$$

donde N es el número de observadores y $K_s = K_s^T > 0$ es la ganancia de acoplamiento, es de resaltar que $\sum_{j=1}^N (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_j)$ y $\sum_{j=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_j)$ son términos de acoplamiento "todos contra todos" que permiten la sincronización. A partir de esto se establece el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 (Sincronización de Observadores) *Considere el observador sincronizado (4.56). Sea el estado estimado $\hat{x} = [\hat{\omega}^T \ \hat{q}^T]^T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_i$, con $\hat{x}_i = [\hat{\omega}_i^T \ \hat{q}_i^T]^T$. Entonces bajo la misma condición del Teorema 4.2.1, los estados estimados convergen a los estados reales exponencialmente, esto es $(\hat{x} - x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $N \rightarrow \infty$.*

La demostración de este teorema está basada en la dada en [13] y dice lo siguiente. La contracción del observador libre de ruido, correspondiente al observador de orden completo (4.31), es establecida en el Teorema 4.2.1. También, las suposiciones del Teorema 2.4.1 son verificadas por la dinámica (4.1). Empleando el Teorema 2.4.1, tomando en cuenta como la dinámica del sistema líder (4.2.1) y la dinámica del observador sincronizado (4.56).

De esta manera, el Teorema 4.3.1 establece un desempeño teórico límite cuando $N \rightarrow \infty$. En la práctica, el número de sensores de sol es limitado, pero a pesar de esto el desempeño del observador se mejora significativamente agregando el esquema de sincronización [12].

4.3.2. Implementación

El observador sincronizado

$$M\dot{\hat{\omega}}_i = S(R^T h^T)\hat{\omega}_i + K_{11}J_f^T J(\omega_i - \hat{\omega}_i) + K_{12}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_j) + \tau \quad (4.58)$$

$$\dot{\hat{q}}_i = J\hat{\omega}_i + K_{21}(\omega_i - \hat{\omega}_i) + K_{22}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_j) \quad (4.59)$$

es no implementable, es por ello que para obtener su versión implementable se realiza un análisis similar al del observador de orden completo. Primero, se define y_a de manera similar a (4.22) por lo que despejando $J_f^T J\omega_i$

$$J_f^T J\omega_i = \dot{y}_a - \Gamma(J - J_f)^T q_i \quad (4.60)$$

Sustituyendo (4.60) en (4.58) y dado que $\dot{q}_i = J\omega_i$ se llega a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} M\dot{\hat{\omega}}_i &= S(R^T h^T)\hat{\omega}_i + K_{11}[\dot{y}_a - \Gamma(J - J_f)^T q_i - J_f^T J\hat{\omega}_i] + K_{12}(q_i - \hat{q}_i) - \\ &\quad - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_j) + \tau \\ \dot{\hat{q}}_i &= J\hat{\omega}_i + K_{21}[\dot{q}_i - J\hat{\omega}_i] + K_{22}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_j) \end{aligned}$$

se despeja \dot{y}_a y \dot{q}_i al lado izquierdo de la igualdad, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[M\hat{\omega}_i - K_{11}y_a] &= [S(R^T h^T) - K_{11}J_f^T J]\hat{\omega}_i - K_{11}\Gamma(J - J_f)^T q_i + K_{12}(q_i - \hat{q}_i) - \\ &\quad - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_j) + \tau \\ \frac{d}{dt}[\hat{q}_i - K_{21}q_i] &= (J - K_{21}J)\hat{\omega}_i + K_{22}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_j) \end{aligned}$$

de manera similar al caso completo se realizan los siguientes cambios de variable.

$$\bar{\omega}_i = M\hat{\omega}_i - K_{11}y_a \quad (4.61)$$

$$\bar{q}_i = \hat{q}_i - K_{21}q_i \quad (4.62)$$

y la dinámica implementable del observador sincronizado es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\omega}_i &= [S(R^T h^T) - K_{11}J_f^T J]\hat{\omega}_i - K_{11}\Gamma(J - J_f)^T q_i + K_{12}(q_i - \hat{q}_i) - \\ &\quad - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_j) + \tau \\ \frac{d}{dt} \bar{q}_i &= (J - K_{21}J)\hat{\omega}_i + K_{22}(q_i - \hat{q}_i) - K_s \sum_{j=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_j) \end{aligned}$$

cuyas entradas son

$$\hat{\omega}_i = M^{-1}(\bar{\omega}_i + K_{11}J_f^T \hat{q}_i) \quad (4.63)$$

$$\hat{q}_i = \bar{q}_i + K_{21}q_i \quad (4.64)$$

y finalmente, las salidas del observador son

$$\hat{\omega}_i = M^{-1}(\bar{\omega}_i + K_{11}J_f^T \bar{q}_i) \quad (4.65)$$

$$\hat{q}_i = (1 - k_{21})^{-1} \bar{q}_i \quad (4.66)$$

Con esto concluye el diseño de los observadores. En resumen se diseñó un observador de orden reducido y uno de orden completo con ayuda del concepto de contracción parcial, además de que se realizó un esquema de sincronización entre observadores de orden completo para añadir un grado de protección del estado estimado ante presencia de ruido en la medición.

Resultados de simulación

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de la implementación en *Matlab* de los observadores basados en contracción.

Así mismo, se expone un análisis comparativo de estos observadores con dos de los tres filtros complementarios diseñados en [11] con el fin de tener una referencia entre el desempeño de los observadores basados en la teoría de contracción con otros estimadores encontrados en la literatura de determinación de la orientación.

Finalmente, se presentan resultados del algoritmo de obtención de la orientación a partir de los paneles solares diseñados en el capítulo tres en conjunto con uno de los observadores por contracción, lo que llamaremos **Sistema Completo**.

Para realizar la comparación, a continuación se resumirán brevemente los resultados obtenidos en [11] y el concepto de filtro complementario.

5.1. Filtros Complementarios

Como se ha mencionado antes, en [11] se propone una serie de filtros complementarios no lineales para obtener un estimado de orientación y velocidad angular. Estos estimadores se denominan filtros complementarios no lineales debido a que su estructura es similar a la de un filtro complementario clásico.

En resumen, los filtros complementarios son una herramienta para fusionar múltiples mediciones independientes de la misma señal que contienen características espectrales complementarias [32]. Por ejemplo, considérese dos mediciones $y_1 = x + \mu_1$ y $y_2 = x + \mu_2$ de una señal $x(t)$, donde μ_1 es ruido de alta frecuencia y μ_2 es una perturbación de baja frecuencia. Escogiendo un par de funciones de transferencia complementarias $F_1(s) + F_2(s) = 1$ con $F_1(s)$ paso bajas y $F_2(s)$ paso altas, el estimado filtrado está dado por

$$\hat{X}(s) = F_1(s)Y_1 + F_2(s)Y_2 = X(s) + F_1(s)\mu_1(s) + F_2(s)\mu_2(s) \quad (5.1)$$

La señal $X(s)$ contiene todas las frecuencias de la señal original $x(t)$, mientras que las

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

componentes de ruido y perturbaciones son filtradas en alta y baja frecuencia como se desea. Este tipo de filtros es también conocido como filtros sin distorsión dado que la señal $x(t)$ no es distorsionada por el filtro [33].

En este caso, se utilizan tres sensores, giroscopio, acelerómetro y magnetómetro. Un giroscopio mide la velocidad angular en el sistema de referencia $\{B\}$, obteniendo la siguiente medición

$$\omega_y^B = \omega^B + b + \mu \quad (5.2)$$

donde μ es ruido aditivo en la medición y b una constante de bias. Además, se utiliza un acelerómetro el cual mide la aceleración lineal instantánea en $\{B\}$ respecto a $\{I\}$, obteniendo

$$a = R^T(\dot{v} - g_0) + b_a + \mu_a \quad (5.3)$$

b_a y μ_a son un término de desvío y ruido aditivo respectivamente, g_0 es el vector de campo gravitacional, dado que solo interesa la dirección de este vector es común utilizar

$$v_a = \frac{a}{|a|} \approx -R^T e_3 \quad (5.4)$$

como un estimado de baja frecuencia.

Se emplea un magnetómetro para medir el campo magnético otorgando la siguiente medición

$$m = R^T m^I + B_m + \mu_b \quad (5.5)$$

donde m^I es el campo magnético de la tierra en el marco de referencia $\{I\}$, B_m y μ_b son perturbaciones y ruido respectivamente, dado que sólo la dirección del vector de campo magnético es relevante, se define

$$v_m = \frac{m}{|m|} \quad (5.6)$$

así, se utilizan v_a y v_m para construir una medición instantánea de R_y de manera similar a como se muestra en el capítulo tres.

En [11] se realiza el diseño y análisis de estabilidad de los estimadores en el grupo especial ortogonal $SO(3)$, pero, debido a que la implementación de estos observadores es mucho más sencilla empleando cuaterniones unitarios, en el apéndice dos de [11] se presentan las versiones de los filtros complementarios en su representación por cuaterniones. En resumen, las dinámicas de los filtros complementarios, directo y pasivo, son las siguientes.

Sea $\omega \in \{I\}$ la velocidad angular del satélite en el marco de referencia inercial, entonces el cuaternión puro $u(\omega) = [0 \ \omega^T]^T$ está asociado con un cuaternión de velocidad equivalente. Con lo anterior, la ecuación cinemática del satélite (2.16b) puede ser escrita como

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes u(\omega) \quad (5.7)$$

dado q_y es una medición de baja frecuencia de q se considera un sesgo entre q_y y la orientación real q , por lo que $q_y \approx q$, además, se tiene que $\omega_y \approx \omega + b$ es una medición de velocidad angular del giroscopio, con b un término de bias constante, y sea \hat{q} un estimado de q , el cuaternión de error está dado por

$$\tilde{q} = \hat{q}^{-1} \otimes q = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

De esta manera, la representación en cuaterniones de los observadores propuestos en [11] es

Filtro complementario directo

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} \otimes u(\tilde{R}(\omega_y - \hat{b}) + 2k_P\tilde{\eta}\tilde{\epsilon}) \quad (5.9)$$

$$\dot{\hat{b}} = -2k_I\tilde{\eta}\tilde{\epsilon} \quad (5.10)$$

Filtro complementario pasivo

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} \otimes u(\omega_y - \hat{b} + 2k_P\tilde{\eta}\tilde{\epsilon}) \quad (5.11)$$

$$\dot{\hat{b}} = -2k_I\tilde{\eta}\tilde{\epsilon} \quad (5.12)$$

con $k_p > 0$ y $k_I > 0$ ganancias constantes, además, se cumple la siguiente propiedad

$$2\tilde{\eta}\tilde{\epsilon} = \text{vex}(\mathbb{P}_a(\tilde{R})) \quad (5.13)$$

donde $\mathbb{P}_a(\tilde{R})$ es la parte antisimétrica de \tilde{R} y $\tilde{R} = F(\tilde{q})$, con $\text{vex}(\cdot)$ y $F(\cdot)$ funciones definidas en (2.8) y (2.6) respectivamente.

Así, se implementan estos dos filtros con el fin de comparar su desempeño con los observadores basados en contracción.

5.2. Simulación de Observadores Diseñados por Contracción

Para mostrar el desempeño de los observadores diseñados, varias simulaciones con y sin ruido se llevaron a cabo, se considera un CubeSat de órbita baja equipado con tres ruedas inerciales.

Los parámetros de simulación del satélite para todas las simulaciones son los siguientes, considerando un CubeSat estándar: masa del satélite $m = 1.33$ [kg], dimensiones

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

de $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$. Se consideró un momento angular constante en el sistema de referencia inercial $h^I = [\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0]^T$, dadas las medidas del satélite y su geometría, la matriz de inercia es

$$M = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0022 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0022 \end{bmatrix} [Kg - m^2] \quad (5.14)$$

Las condiciones iniciales para el satélite fueron $\omega(0) = [0.1 \ 0.15 \ -0.15]^T [\frac{rad}{seg}]$ y $q(0) = [0.5 \ 0.5 \ 0 \ \sqrt{0.5}]^T$, para los observadores las condiciones iniciales fueron $\hat{\omega}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T [\frac{rad}{seg}]$ y $\hat{q}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. La ganancia de filtro fue $\gamma = 5$, en la figura 5.1 se muestra el Par aplicado cuyo valor es $\tau = [0.001 \sin(0.5 t) \ 0.0005 \sin(0.1 t) \ 0.0003 \sin(0.2 t)]^T$.

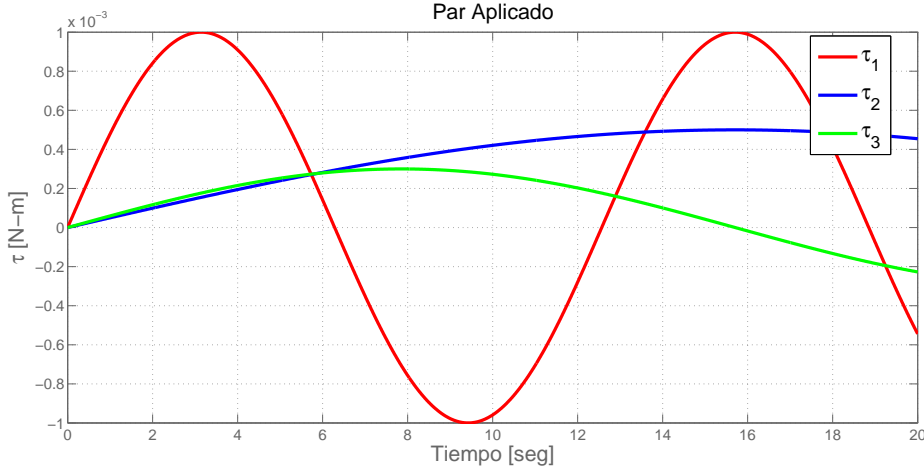


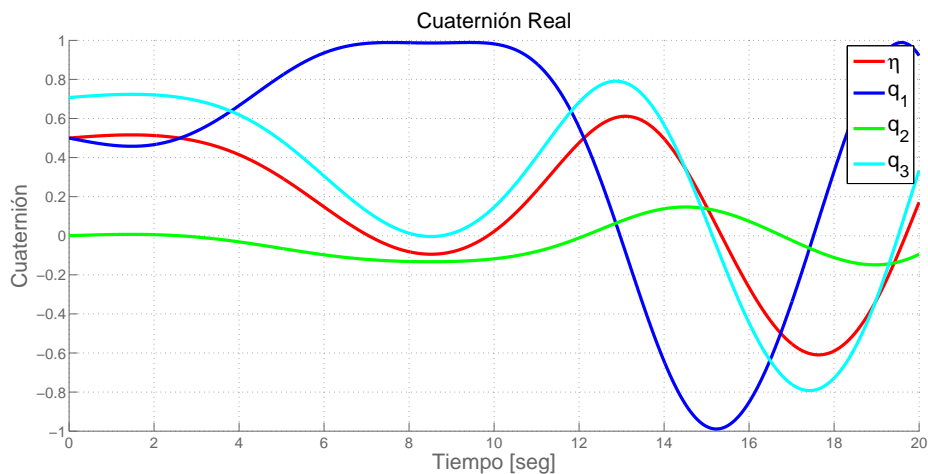
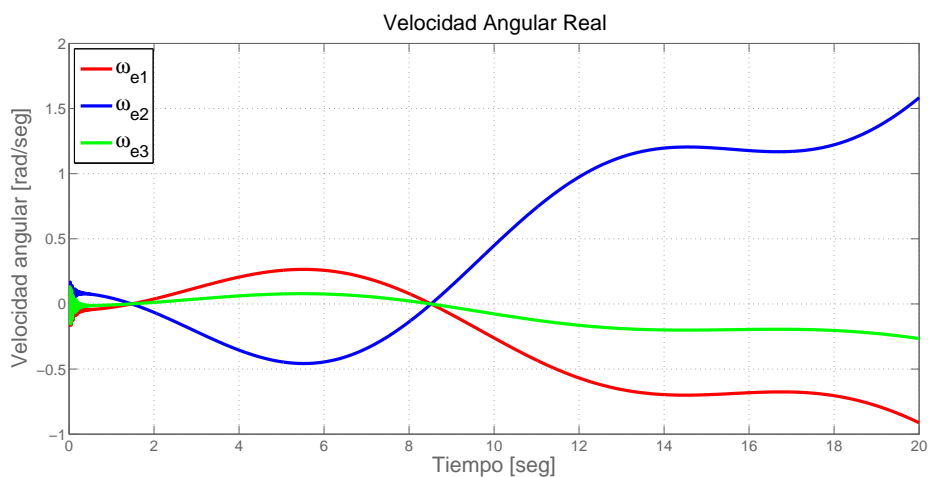
Figura 5.1: Par Aplicado

En la Figura 5.2 se muestra la orientación real del satélite y en la Figura 5.3 la velocidad angular real del satélite.

Asimismo, en la Figura 5.4 se muestra q_m que es la medición de la orientación en cuaterniones para el caso con ruido, esta es la suma de q más ruido blanco gaussiano de varianza 0.01 y media cero.

5.2.1. Observador de Orden Reducido

Primero, a partir de la dinámica del satélite (4.1) se propone el observador (4.2) cuya versión implementable es (4.29), de esta manera en la Figura 5.5 se presenta la simulación del observador de orden reducido para el caso sin ruido, para este observador la entrada es q limpia y la ganancia de observación es $K = 0.1 I_3$, se observa como, en ausencia de ruido, las trayectorias del observador convergen exponencialmente a las del sistema.

Figura 5.2: Orientación q realFigura 5.3: Velocidad angular ω real

Por otro lado, tomando la misma ganancia del observador $K = 0.1$, para el caso con ruido se tomó como entrada q_m mostrada en la Figura (5.4) y el resultado se presenta en la Figura 5.6, se aprecia que el desempeño del observador se deteriora significativamente pues se amplifica el ruido via la ecuación (4.22).

5.2.2. Observador de Orden Completo

De la misma manera, tomando la dinamica del satélite (4.1), se diseñó el observador (4.31) cuya versión implementable es (4.50), el valor de la ganancia del filtro fue $\gamma = 10$, y las matrices de ganancia fueron $K_{11} = 0.1 I_3$, $K_{22} = 100 I_3$ y la ganancia constante

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

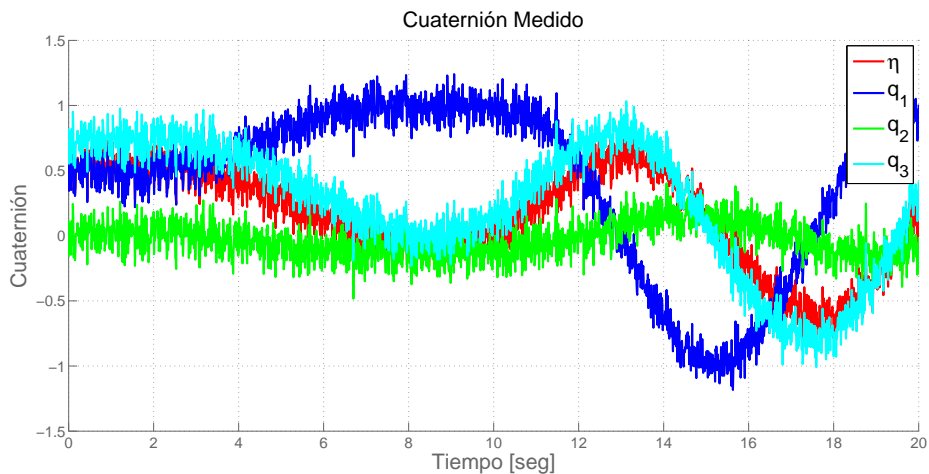


Figura 5.4: Medición de q con ruido

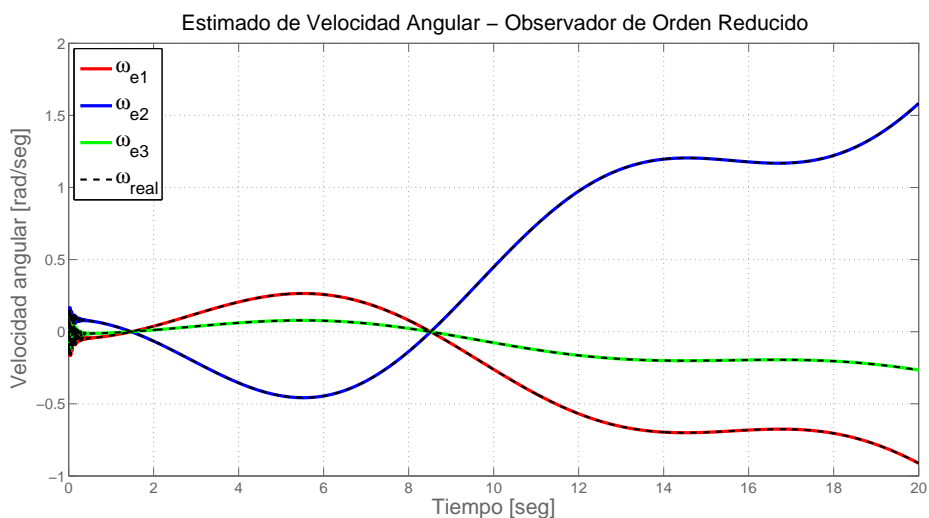
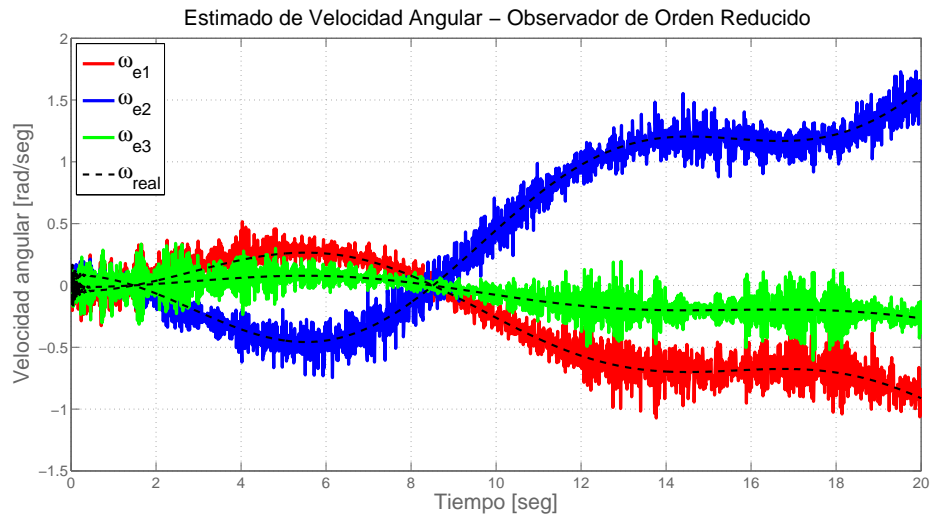
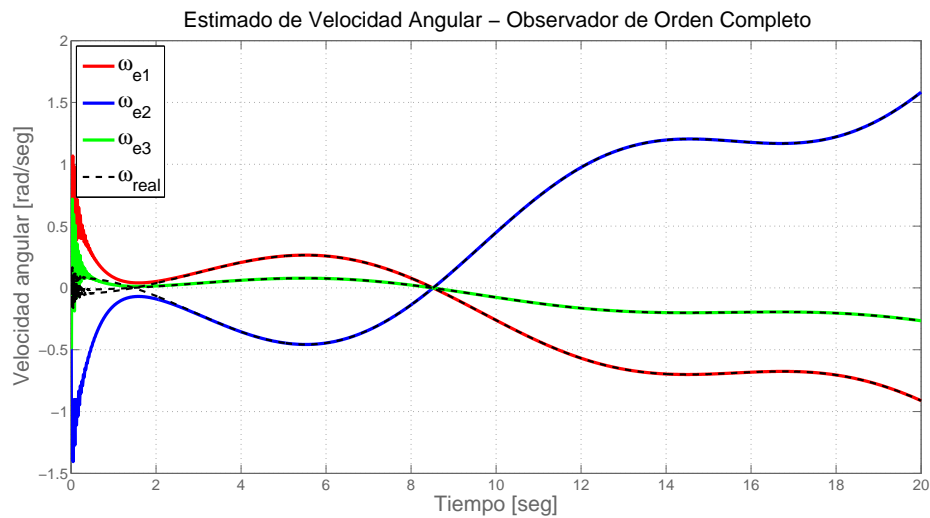


Figura 5.5: Estimado de Velocidad Angular - Reducido sin ruido

$k_{21} = 0.1$.

En la Figura 5.7 se presenta la estimación de velocidad angular del observador de orden completo para el caso sin ruido, se observa que de 0 a dos segundos se presenta un transitorio que no se da en el caso de orden reducido y el cual podría traer problemas en el control, pero después de dos segundos de simulación, se aprecia como las trayectorias estimadas convergen a las reales de manera exponencial.

En la Figura 5.8 se observa el estimado de q por el observador de orden completo para el caso sin ruido, se presenta una estimación rápida, puesto que la convergencia exponencial del cuaternión estimado al real es inmediata.

**Figura 5.6:** Estimado de Velocidad Angular - Reducido con ruido**Figura 5.7:** Estimado de Velocidad Angular - Completo sin ruido

Por otro lado, en la Figura 5.9 se muestra el estimado de velocidad angular obtenido del observador de orden completo para el caso con ruido, se aprecia que el desempeño del estimador se mejora notablemente en comparación con el observador de orden reducido, pero, a pesar de la mejoría, aún se nota el efecto del ruido en la medición.

En la Figura 5.10 se muestra el estimado de orientación del observador de orden completo, aunque se percibe un pequeño rizo en las señales estimadas, la estimación es rápida pues al igual que en el caso sin ruido, la convergencia de los estados estimados

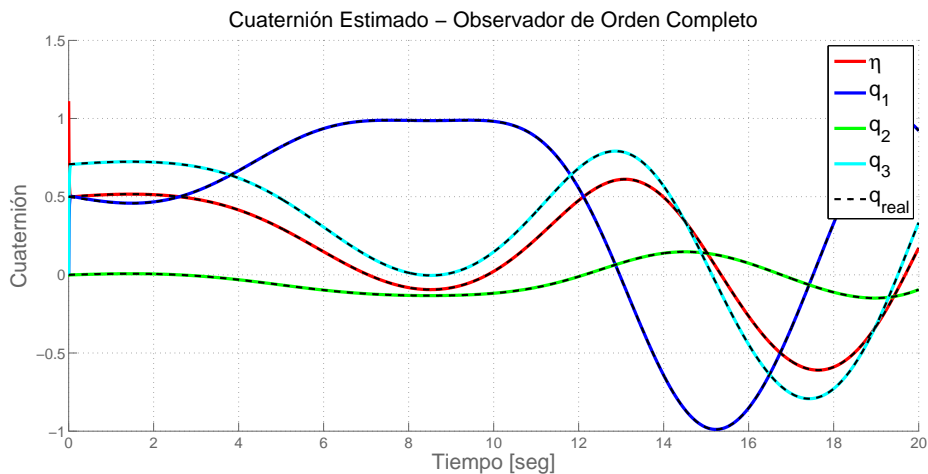


Figura 5.8: Estimado de Orientación - Completo sin ruido

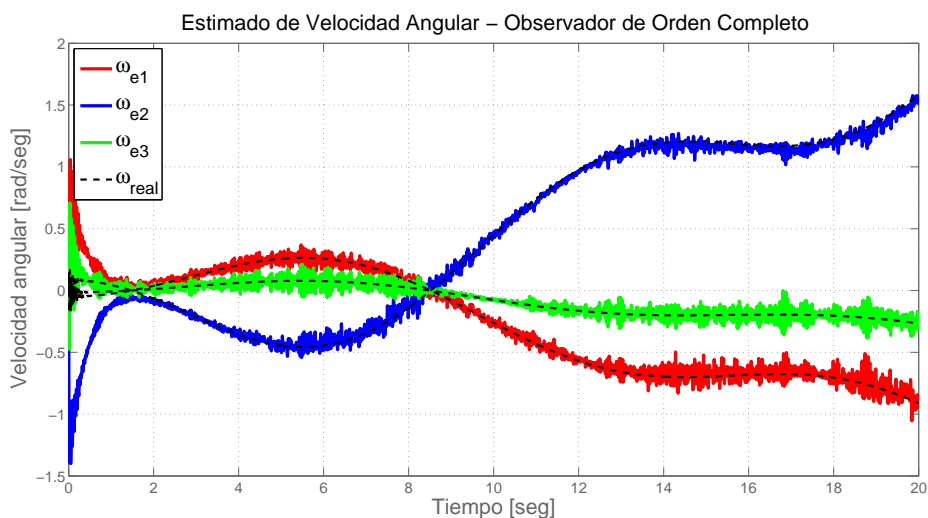


Figura 5.9: Estimado de Velocidad Angular - Completo con ruido

a los reales es instantánea.

5.2.3. Sincronización de Observadores

De igual forma, a partir de la dinámica del observador de orden completo (4.31) se realizó una sincronización de observadores (4.56) cuya versión implementable es (4.63), el valor de la ganancia del filtro fue $\gamma = 5$, y las matrices de ganancia fueron $K_{11} = 0.1 I_3$, $K_{22} = 100 I_3$ y la ganancia constante $k_{21} = 0.1$, la ganancia de sincronización fue $K_s = 100$, se realizó la sincronización de un número variable de observadores

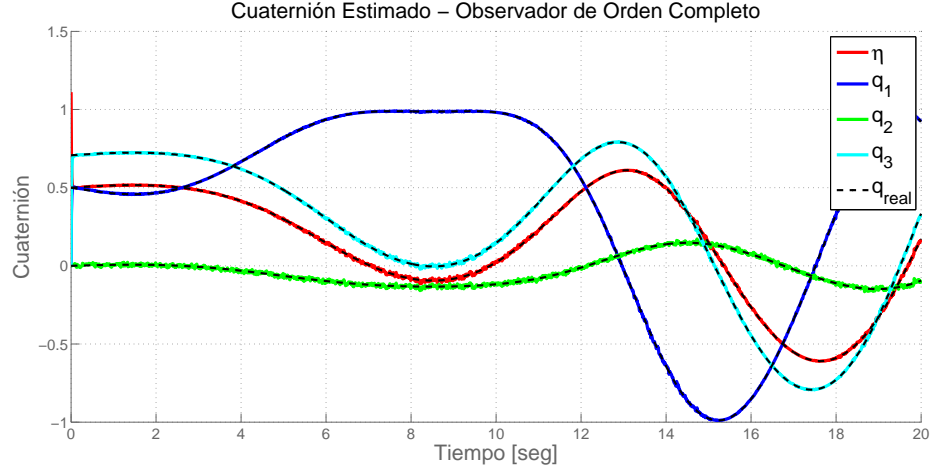


Figura 5.10: Estimado de Orientación - Completo con ruido

($N = 2, 3, 5, 10$), pero para ilustrar las ventajas que este esquema de observadores sincronizados tiene se muestra únicamente la simulación para el caso $N = 10$ observadores sincronizados.

En la Figura 5.11 se presenta la estimación de velocidad angular de 10 observadores de orden completo sincronizados para el caso con ruido, que en comparación con el observador de orden completo se aprecia una notable mejora en el desempeño del observador, pues, a pesar de tener un pequeño rizo, se obtiene una estimación mucho más limpia además de que en casi dos segundos se logra la convergencia de los estados estimados a los reales. Como lo establece el Teorema 4.3.1, teóricamente cuando se sincroniza un número infinito de observadores se logra reconstruir de manera exacta los estados reales, claro que no es realizable pues para ello se necesita un número infinito de sensores además de una gran cantidad de recursos informáticos. A pesar de ello, el observador sincronizado muestra un desempeño excepcional.

En la Figura 5.12 se muestra el estimado de la orientación a partir del observador sincronizado, se puede apreciar no presenta rizo alguno, a diferencia del observador de orden completo, dando como resultado una estimación aceptable.

5.3. Comparación con Filtros Complementarios

En [11], a partir de la dinámica (5.7) se diseñó el filtro complementario directo (5.9), el valor de las ganancias para su implementación fue de $k_P = 5$ y $k_I = 1$ tomando los mismos parámetros de la planta y condiciones iniciales de los estimadores por contracción, el término de bias real fue de $b = [0 \ 0 \ 0]^T$ para realizar una comparación justa con los estimadores por contracción y la condición inicial para el bias estimado $\hat{b}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, se obtuvieron los siguientes resultados únicamente para el caso con

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

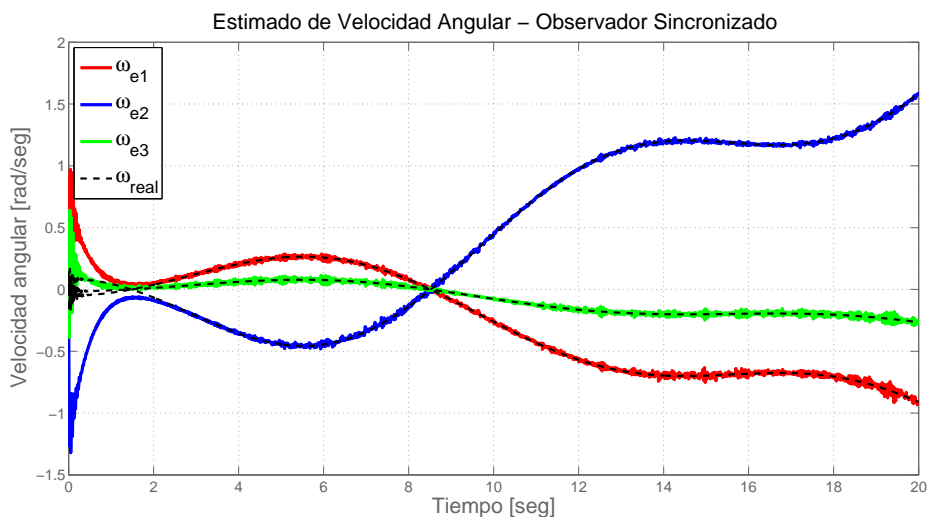


Figura 5.11: Estimado de Velocidad Angular - Observador Sincronizado $N = 10$

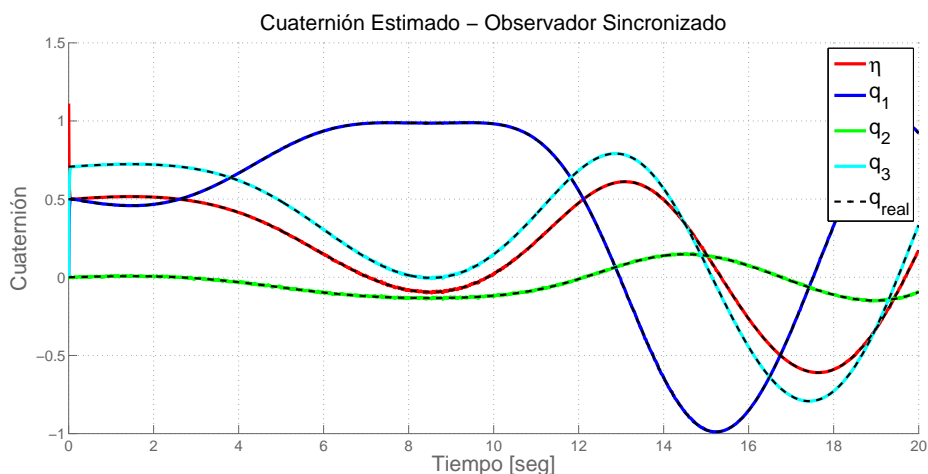


Figura 5.12: Estimado de Orientación - Observador Sincronizado $N = 10$

ruido.

En la Figura 5.13 se observa el desempeño del filtro complementario directo, se aprecia que su desempeño es menor a los observadores completo y sincronizado, y a pesar de que presenta una estimación menos ruidosa que la obtenida con el observador de orden reducido, la convergencia de los estados estimados a los reales es más lenta en comparación con todos los observadores por contracción, pues se observa que es hasta el segundo 10 cuando los estados estimados tienen como centro los estados reales.

En la Figura 5.14 se observa la estimación de la orientación mediante el filtro complementario directo, se aprecia que no se logra una estimación precisa en comparación

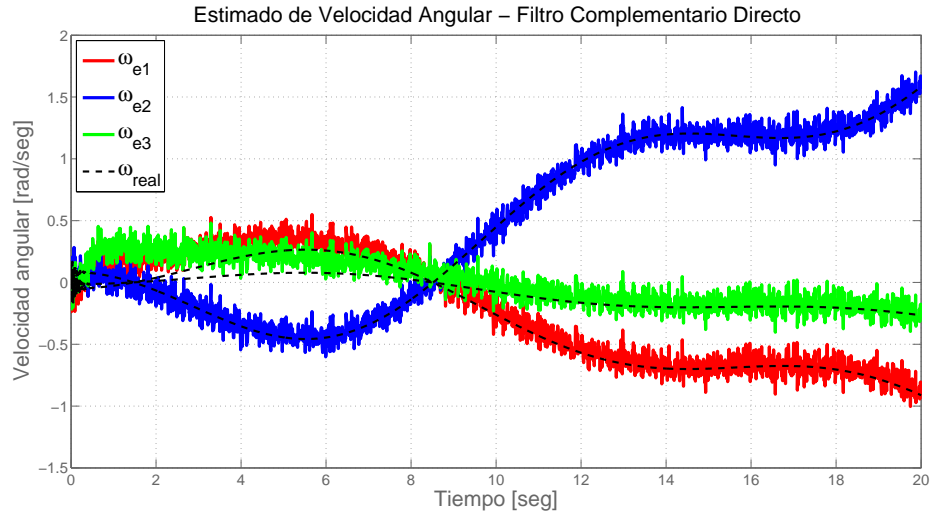


Figura 5.13: Estimado de Velocidad Angular - Filtro Complementario Directo

con los observadores por contracción pues la orientación estimada por este filtro presenta un pequeño error, además de que es notorio el efecto del ruido en la estimación.

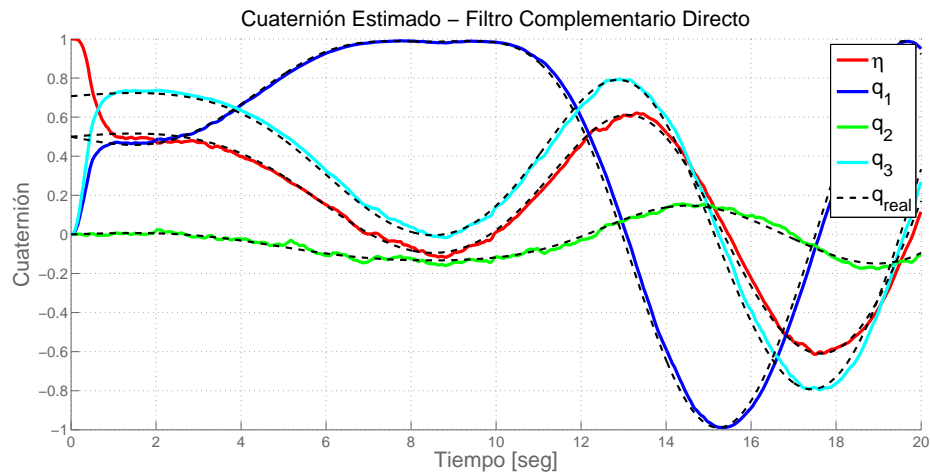


Figura 5.14: Estimado de Orientación - Filtro Complementario Directo

De la misma manera que en el filtro complementario directo, a partir de la dinámica (5.7) se diseñó el filtro complementario pasivo (5.11), el valor de las ganancias para su implementación fue de $k_P = 5$ y $k_I = 1$, y al igual que en el caso anterior, se tomó los mismos parámetros de la planta y condiciones iniciales de los estimadores por contracción, el término de bias real fue de $b = [0 \ 0 \ 0]^T$ para realizar una comparación justa con los estimadores por contracción y como condición inicial para el bias estimado

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

$\hat{b}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, se obtuvieron los siguientes resultados únicamente para el caso con ruido.

En la Figura 5.15 se observa el desempeño del filtro complementario pasivo, se aprecia que su desempeño es ligeramente mejor en comparación con el filtro complementario directo, puesto que en los estados $\hat{\omega}_1$ y $\hat{\omega}_2$ la estimación es más rápida, pero la propagación del ruido es similar en ambos filtros complementarios, de cualquier manera, el desempeño del filtro complementario pasivo con respecto a los observadores diseñados por contracción es menor, solo superando al observador de orden reducido, pues como en el caso anterior, la convergencia de los estados estimados a los reales es mas lenta en comparación con todos los observadores por contracción, en este caso es hasta el segundo 8 aproximadamente cuando los estados estimados tienen como centro los estados reales.

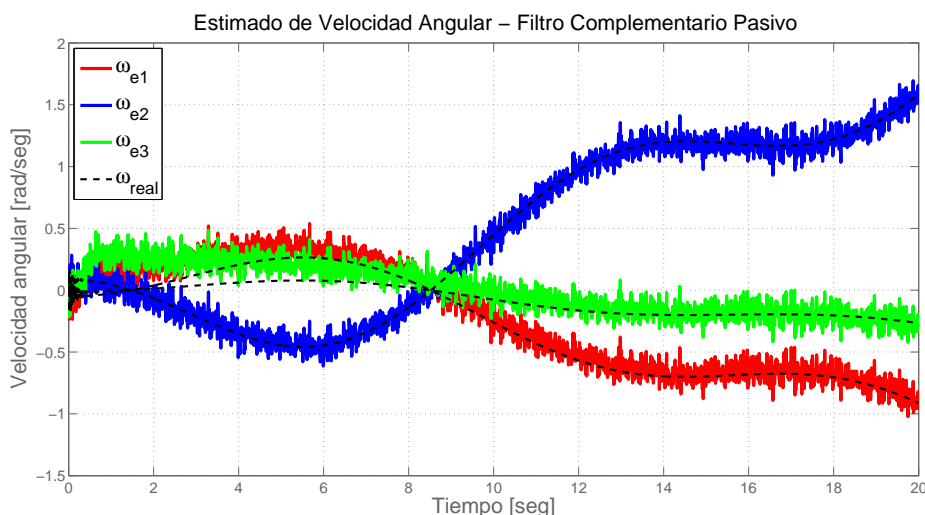


Figura 5.15: Estimado de Velocidad Angular - Filtro Complementario Pasivo

En la Figura 5.16 se muestra el estimado de la orientación por el filtro complementario pasivo, se aprecia que a diferencia del filtro complementario directo, el error de estimación es menor, pero la velocidad de convergencia de los estados estimados a los reales es la misma. En comparación con los estimadores por contracción se tiene una estimación ligeramente ruidosa.

5.4. Simulación del algoritmo de obtención de cuaternión a partir de las mediciones de los paneles solares

En esta sección se muestra el desempeño del algoritmo de estimación de la orientación del satélite propuesto en el capítulo tres y cuyo código de implementación en

5.4 Simulación del algoritmo de obtención de cuaternión a partir de las mediciones de los paneles solares

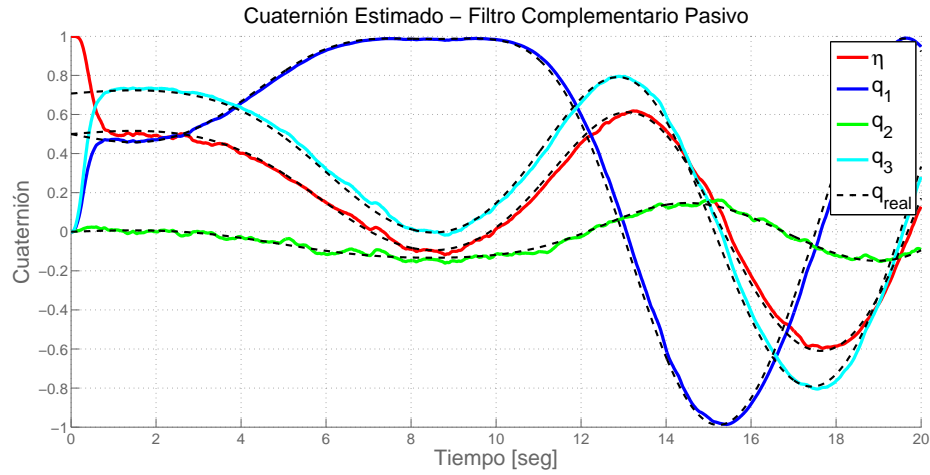


Figura 5.16: Estimado de Orientación - Filtro Complementario Pasivo

Matlab se muestra en el Apéndice 1, después, la salida de este algoritmo q_y es ingresada al observador de orden completo con el fin de obtener un estimado de la velocidad angular y posición a partir de una supesta medición de corriente en los paneles.

Bajo la supocición de que en la Figura 5.17 se muestra la medición ruidosa que se obtiene en cada panel solar, (considerando la medición en los paneles -4,-5,-6 como la parte negativa de estas señales), se toman dichas señales como entrada al algoritmo de estimación de la orientación de un CubeSat propuesto en el capítulo tres, de esta manera se obtiene q_y que es la entrada al observador de orden completo.

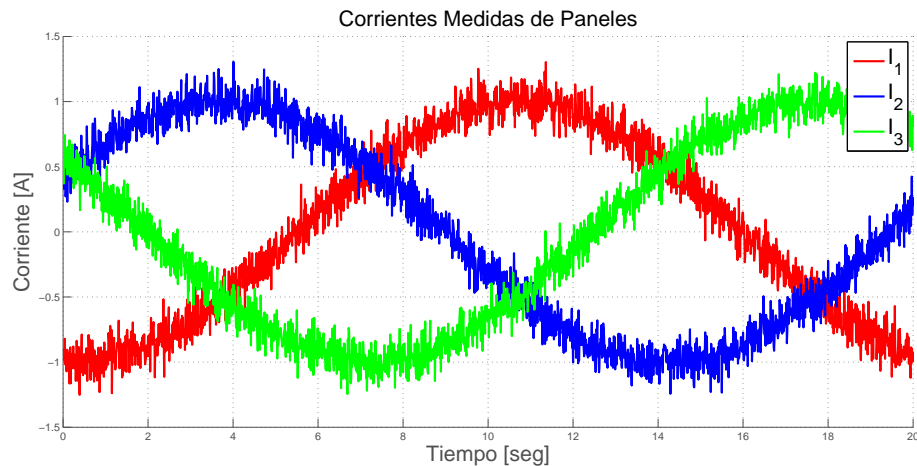


Figura 5.17: Corrientes medidas de los paneles

En la Figura 5.18 se muestra el estimado de velocidad angular obtenido del observador de orden completo, que bajo el argumento de que si las estimaciones obtenidas

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

en la sección anterior eran aceptables, en este caso, no se puede deducir la velocidad angular real dado que las mediciones mostradas en la figura 5.17 no concuerdan con la geometría de un CubeSat, pero a pesar de ello, es razonable considerar que mientras se ingrese un estimado aceptable de la orientación q_y al observador, los estados estimados por el observador son cercanos a los estados reales.

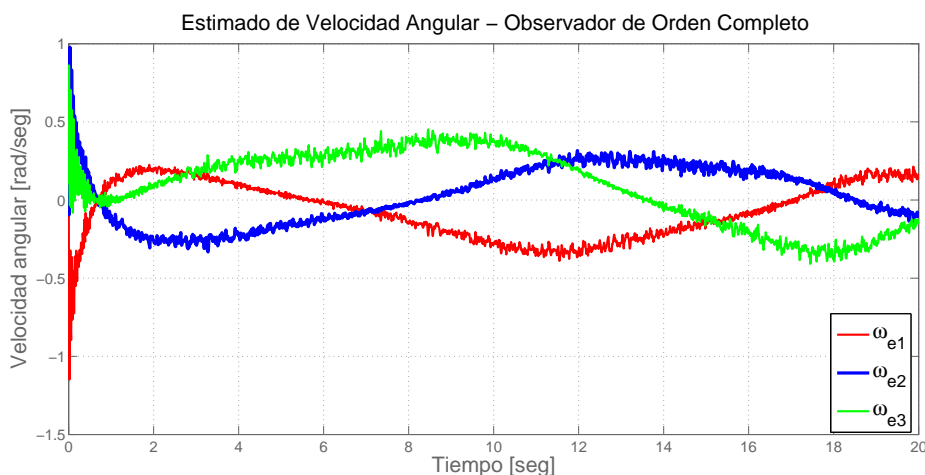


Figura 5.18: Estimado de Velocidad Angular - Sistema Completo

Finalmente, en la Figura 5.19 se muestra la comparación entre el cuaternión estimado por el algoritmo del capítulo tres q_y y el cuaternión estimado a la salida del observador de orden completo. Se aprecia una enorme disminución del efecto del ruido gracias al observador.

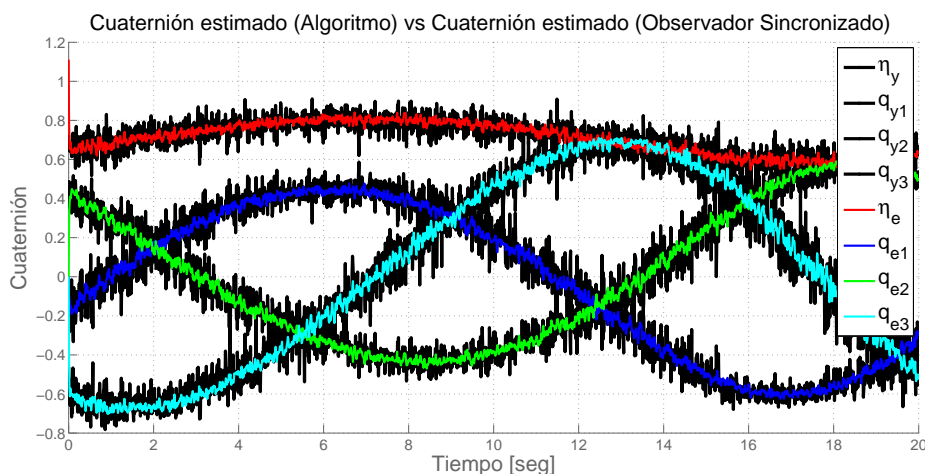


Figura 5.19: Estimado de Orientación - Sistema Completo

5.5. Análisis de Resultados

Para concluir, se realizó un análisis cuantitativo sobre el desempeño de los observadores, en la Tabla 5.1 se muestra el error RMS, con respecto a los estados reales, de cada estimador calculado de la siguiente forma.

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i(t) - \hat{x}_i(t))^2}{N}} \quad (5.15)$$

Observador	Sin ruido		Con ruido	
	$\hat{\omega}$	\hat{q}	$\hat{\omega}$	\hat{q}
Orden reducido	0.0001028	-	0.2046	-
Orden completo	0.0014	0.00006704	0.0512	0.0512
Sincronizado $N = 2$	0.0014	0.00006704	0.0349	0.0371
Filtro complementario directo	-	-	0.1171	0.0497
Filtro complementario pasivo	-	-	0.1248	0.0442

Tabla 5.1: Comparación del Error RMS de Estimación

Se aprecia que para el caso sin ruido el observador de orden reducido presenta un desempeño notable, dado que sólo tiene que reconstruir la velocidad angular, de cualquier manera para este mismo caso el observador de orden completo tiene un buen desempeño, dado que el observador sincronizado protege el esquema de observación del ruido en este caso no tiene sentido emplearlo, pues su desempeño es idéntico al observador de orden completo.

Para el caso con ruido, el observador de orden completo tiene un error *RMS* cuatro veces más grande en la estimación de la velocidad angular que el observador de orden completo, se aprecia que los observadores de orden reducido ante mediciones ruidosas tiene un bajo desempeño en la estimación de los estados reales.

Por el contrario el observador de orden completo presenta un alto desempeño en comparación del observador de orden reducido, además, se observa que al tener sólo dos observadores sincronizados el desempeño aumenta considerablemente con respecto al observador de orden reducido.

En lo que concierne a los filtros complementarios, ambos tienen un valor de error RMS similar, puesto que aunque el error en velocidad angular del filtro complementario directo es menor en estimación de velocidad angular, es mayor en estimación de orientación con respecto al filtro complementario pasivo. En comparación con los observadores por contracción, muestran un desempeño mejor que el observador de orden

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

reducido pero mucho mayor en comparación con los observadores de orden completo y sincronizado.

Esto no es un resultado negativo para los filtros complementarios puesto que para su implementación sólo se ocupa la parte cinemática del modelo del satélite, por lo que no es necesario el conocer los parámetros del sistema como masa, dimensiones y momentos de inercia, caso contrario a los observadores diseñados por contracción, donde es necesario tener un valor confiable de los parámetros del satélite.

Número de Observadores	$ERMS_{\omega}$	$ERMS_q$
$N = 2$	0.0349	0.0371
$N = 3$	0.0287	0.0322
$N = 5$	0.0236	0.0276
$N = 10$	0.0204	0.0241

Tabla 5.2: Comparación del Error RMS - Observadores Sincronizados

Finalmente, en la Tabla 5.2 se presenta el error RMS de varios esquemas de sincronización de observadores, donde la diferencia es el número de observadores sincronizados, se aprecia como incrementando el número de observadores se podría recuperar el desempeño del observador de orden completo para el caso libre de ruido, esto es un caso límite, pues se necesitaría de un número infinito de observadores y por lo tanto un número infinito de sensores, además de toda la carga computacional que conlleva, además de que se llega a un punto en que aumentar el número de observadores no incrementa sustancialmente el desempeño del observador, es por ello que lo correcto es encontrar un equilibrio entre el número de observadores y los recursos con los que se cuenta (hardware y software).

6.1. Conclusiones del trabajo realizado

Se desarrolló un algoritmo de medición de la orientación del satélite que tiene como entrada las corrientes medidas en cada panel solar. Para obtener dicha medición, primero, se deben de obtener dos vectores de sol, uno referido al sistema inercial fijo con centro en la tierra y otro referido al sistema fijo en el cuerpo del satélite, estos vectores se emplean en un algoritmo de minimización convexa con el fin de obtener una medición de la orientación en términos de matriz de rotación. Después con un método sencillo se transforma esa matriz de rotación estimada a su representación en cuaterniones, este estimado de la orientación en cuaterniones es la entrada de los diversos observadores diseñados a lo largo de este trabajo.

Se presentó una metodología de diseño de observadores de estado para la estimación de la velocidad angular del satélite en el caso de orden reducido, orientación y velocidad angular para el caso de orden completo. Además, empleando la teoría de contracción se determinó la naturaleza contrayente de estos estimadores, lo cual implica que todas las trayectorias del observador convergen de manera exponencial a una sola trayectoria. Empleando la teoría de contracción parcial, la trayectoria específica a la que se converge es la solución del sistema real, logrando de esta manera la convergencia exponencial de las trayectorias del observador a las del sistema real.

Asimismo, se realizó un esquema de observación empleando varios observadores de orden completo sincronizados, agregando un término de acoplamiento se logra mejorar de manera notable el desempeño del observador ante la presencia de ruido en las mediciones. Para ello nos apoyamos del hecho de que un esquema de sincronización protege a los estados estimados del ruido en la medición. De esta manera, en el caso teórico de tener un número infinito de observadores sincronizados, o lo que es lo mismo tener un número infinito de sensores, se recupera el comportamiento del observador de orden completo sin la presencia de ruido. Pero, debido a limitaciones en los recursos disponibles (hardware y software) esto es imposible y que dependiendo de la aplicación es necesario determinar hasta qué grado este esquema de sincronización es óptimo.

6. CONCLUSIONES

Por otro lado, se realizó la comparación de los observadores diseñados por contracción con dos filtros complementarios no lineales diseñados por Robert Mahony. El observador de orden reducido presenta un mal desempeño en comparación de estos dos filtros, pero los observadores de orden completo y sincronizado muestran un desempeño muy superior a estos filtros, además de que la convergencia de los estados estimados a los reales es mucho más rápida. Se debe aclarar que en caso de que se tenga incertidumbre sobre el valor de los parámetros del sistema, los estimadores basados en la teoría de contracción pueden disminuir su desempeño, pues su esquema de observación ocupa tanto la parte dinámica y cinemática del modelo del satélite, caso contrario al diseño de los filtros complementarios no lineales que sólo emplean la parte cinemática del modelo, por lo que si no se conocen de manera aproximada los parámetros del satélite, masa, momento de inercia, dimensiones, etc., y dado que no se realizó un análisis de robustez de los observadores por contracción ante incertidumbres paramétricas no es posible asegurar que su desempeño será el mismo en comparación con los filtros complementarios donde no se emplean estos parámetros.

Finalmente, se muestran resultados de la simulación del algoritmo de obtención de la medición de la orientación en conjunto con el observador de orden completo basado en contracción, lo que llamamos **Sistema Completo**. Estos resultados muestran como a partir de mediciones de corriente en los paneles (que en este caso no concuerdan con la geometría del satélite) se logra obtener una medición de la orientación del satélite, la cual es la entrada al observador de orden completo. Asumiendo que la medición de la orientación obtenida por este algoritmo es confiable, con las simulaciones presentadas previamente se asegura que el observador de orden reducido otorga un estimado de orientación y velocidad angular aceptable. De esta manera, se logró el objetivo principal del presente trabajo, a partir de las mediciones de corriente de los paneles solares obtener un estimado de la velocidad angular de un CubeSat.

6.2. Trabajo Futuro

En primer lugar, a partir del resultado obtenido en este trabajo, se puede proponer un esquema de control para la orientación y velocidad angular y analizar el desempeño de observador de orientación y velocidad angular del satélite en conjunto con el esquema de control.

Por otro lado, dado que no se realizó ningún análisis de robustez ante incertidumbre paramétrica de los observadores basados en contracción, es lógico que presenten una baja en su desempeño si no se conocen los parámetros de satélite como se mencionó antes, es por esto que se podría plantear un esquema de observación adaptable con el fin de tolerar un cierto grado de incertidumbre en los parámetros del sistema.

De igual forma, queda para un trabajo futuro la implementación práctica de los algoritmos y observadores diseñados en este trabajo, esto es, diseñar un circuito para obtener las corrientes de los paneles y la programación de los algoritmos y observadores en un satélite real o prototipo que solo cuente con paneles solares y sensores de corriente.

Finalmente, el hecho de que a partir de únicamente los paneles se puede estimar la velocidad angular del satélite no supone que otros métodos como el empleo de sensores de navegación (acelerómetros, giroscopos, magnetómetros, etc.) no sean necesarios, puesto que en un ambiente hostil como lo es el espacio ocurren ocasionalmente fallas en varios de estos sensores e inclusive los paneles solares, por lo que se podría realizar una fusión entre los resultados de este trabajo con la estimación obtenida a partir de otros sensores y técnicas de observación, con el fin de brindar al satélite un grado de protección ante fallas.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Código en Matlab del algoritmo para la obtención de la orientación (en cuaterniones) a partir de los paneles solares

```
1 %% Algoritmo de obtencion de un estimado de cuaternion a partir de la
2 % corriente generada en los paneles solares
3
4 %% Inicializacion de variables
5 qy=[];
6 Vsi=[];
7 Vs=[];
8 Im=[];
9
10 %% Obtencion del vector de sol referido al sistema inercial (Vsi) y
11 % del vector de sol referido al sistema fijo en el cuerpo del
12 % satellite (Vs)
13 for t=0:0.01:20
14 %% Corrientes generadas en paneles
15 I1=sin(0.3*t-1.65)+ wgn(1,1,-20); % Corriente medida en panel 1+ y 4-
16 I2=sin(0.3*t+2*pi/3-1.65)+ wgn(1,1,-20); % Corriente medida en panel
17 % 2+ y 5-
18 I3=sin(0.3*t+4*pi/3-1.65)+ wgn(1,1,-20); % Corriente medida en panel
```

A. APÉNDICE

```
19 % 3+ y 6- 0.1
20 Im=[Im; I1 I2 I3];
21
22
23 %% Fecha y hora
24 dat=clock; % Vector de fecha y hora
25 yr=dat(1); % year
26 mon=dat(2); % mes
27 day=dat(3); % dia
28 hr=dat(4); % hora
29 min=dat(5); % minuto
30 sec=dat(6); % segundo
31
32 %% Conversion de fecha actual a fecha Juliana
33 jd = 367*yr-floor((7*(yr+floor((mon+9)/12))*0.25 )+floor(275*mon/9) ...
34     +day+1721013.5+((sec/60+min)/60+hr)/24;
35
36 %% Algoritmo de obtencion Vsi
37 twopi=2*pi;
38 deg2rad=pi/180;
39 tut1=(jd-2451545)/36525;
40 meanlong=280.46+36000.77*tut1;
41 meanlong=rem(meanlong,360); % deg
42 ttdb=tut1;
43 meananomaly=357.5277233+35999.05034*ttdb;
44 meananomaly=rem(meananomaly*deg2rad,twopi); % rad
45
46 if(meananomaly<0)
47 meananomaly=twopi+meananomaly;
48 end
49
50 eclplong= meanlong+1.914666471*sin(meananomaly) ...
51     +0.019994643*sin(2*meananomaly); % deg
52 eclplong= rem(eclplong,360); %deg
53 obliquity= 23.439291-0.0130042*ttdb; % deg
54 eclplong=eclplong*deg2rad;
```

A.1 Código en Matlab del algoritmo para la obtención de la orientación (en cuaterniones) a partir de los paneles solares

```
55 obliquity=obliquity*deg2rad;
56
57 magr=1.000140612-0.016708617*cos(meananomaly) ...
58     - 0.000139589*cos(2*meananomaly); % en U.A.
59
60 rsun1=magr*cos(eclplong);
61 rsun2=magr*cos(obliquity)*sin(eclplong);
62 rsun3=magr*sin(obliquity)*sin(eclplong);
63
64 Vsi=[Vsi (1/sqrt(rsun1^2+rsun2^2+rsun3^2))*[rsun1 rsun2 rsun3]'];
65 % Normalizacion
66
67
68 %% Algoritmo de obtencion Vs
69 Vs=[Vs (1/sqrt(I1^2+I2^2+I3^2))*[I1 I2 I3]'];
70 % Normalizacion
71 end
72
73
74 %% Obtencion de q a partir de Vs y Vsi
75
76 for(i=1:1:2001)
77     %% Inicializacion de variables
78     vs=Vs(:,i);
79     vsi=Vsi(:,i);
80     %% Algoritmo de optimizacion convexa para obtener
81     % la matriz de Rotacion (R)
82     cvx_begin
83         variable R(3,3)
84         minimize(norm(vsi-R*vs, 2)) % Funcion objetivo
85         subject to
86             norm(R, 2) ≤ 1 % Restriccion
87     cvx_end
88
89 R=R*eye(3);
90
```

A. APÉNDICE

```
91 %% Algoritmo de conversion matriz de rotacion a cuaternion
92 Rxx = R(1,1); Rxy = R(1,2); Rxz = R(1,3);
93 Ryx = R(2,1); Ryy = R(2,2); Ryz = R(2,3);
94 Rzx = R(3,1); Rzy = R(3,2); Rzz = R(3,3);
95
96 w = sqrt( trace( R ) + 1 ) / 2;
97 x = ( Rzy - Ryz ) / (4*w);
98 y = ( Rxz - Rzx ) / (4*w);
99 z = ( Ryx - Rxy ) / (4*w);
100
101 qy = [qy (1/sqrt(w^2+x^2+y^2+z^2))*[w x y z]']; % Cuaternion unitario
102 end
103 cuaternion=double([(0:0.01:20)',qy']); %Se guardan los datos de
104 % orientacion que son la entrada del observador implementado en Simulink
```

Bibliografía

- [1] W. Lohmiller and J.-J. E. Slotine, “On contraction analysis for non-linear systems,” *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 683–696, 1998. [ix](#), [2](#), [12](#), [13](#), [15](#)
- [2] D. D. Bhanderi, *Spacecraft Attitude Determination with Earth Albedo Corrected Sun Sensor Measurements*. Department of Control Engineering, Aalborg university, 2005. [ix](#), [21](#), [22](#), [23](#)
- [3] D. A. Vallado, *Fundamentals of astrodynamics and applications*, vol. 12. Springer Science & Business Media, 2001. [ix](#), [23](#), [24](#)
- [4] F. Lizarralde and J. T. Wen, “Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 41, no. 3, pp. 468–472, 1996. [1](#), [11](#)
- [5] J. Slotine and M. Di Benedetto, “Hamiltonian adaptive control of spacecraft,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 35, no. 7, pp. 848–852, 1990. [1](#)
- [6] J.-J. E. Slotine, W. Li, *et al.*, *Applied nonlinear control*, vol. 199. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. [2](#)
- [7] R. Burton, S. Rock, J. Springmann, and J. Cutler, “Dual attitude and parameter estimation of passively magnetically stabilized nano satellites,” *Acta Astronautica*, vol. 94, no. 1, pp. 145–158, 2014. [2](#)
- [8] D. Choukroun, I. Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman, *et al.*, “Novel quaternion kalman filter,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 1, pp. 174–190, 2006. [2](#)
- [9] M. L. Psiaki, F. Martel, and P. K. Pal, “Three-axis attitude determination via kalman filtering of magnetometer data,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, no. 3, pp. 506–514, 1990. [2](#)
- [10] E. J. Lefferts, F. L. Markley, and M. D. Shuster, “Kalman filtering for spacecraft attitude estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 5, no. 5, pp. 417–429, 1982. [2](#)

- [11] R. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, “Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218, 2008. [2](#), [5](#), [6](#), [7](#), [37](#), [38](#), [39](#), [45](#)
- [12] R. Chávez, Y. Tang, S. Santillan, and H. Ji, “Contraction based angular velocity observer for small satellites,” in *IEEE AeroConf 2016 IEEE Aerospace Conference*, IEEE, 2016. [2](#), [34](#)
- [13] I. Grave and Y. Tang, “A new observer for perspective vision systems under noisy measurements,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 60, no. 2, pp. 503–508, 2015. [2](#), [16](#), [17](#), [18](#), [27](#), [34](#)
- [14] N. Tabareau, J.-J. Slotine, and Q.-C. Pham, “How synchronization protects from noise,” *PLoS Comput Biol*, vol. 6, no. 1, p. e1000637, 2010. [2](#), [16](#), [27](#)
- [15] H. Heidt, J. Puig-Suari, A. Moore, S. Nakasuka, and R. Twiggs, “Cubesat: A new generation of picosatellite for education and industry low-cost space experimentation,” 2000. [3](#)
- [16] S. Salcudean, “A globally convergent angular velocity observer for rigid body motion,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 36, no. 12, pp. 1493–1497, 1991. [5](#)
- [17] W. Lohmiller and J.-J. E. Slotine, “On metric observers for nonlinear systems,” in *Control Applications, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on*, pp. 320–326, IEEE, 1996. [6](#), [27](#)
- [18] N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal, and N. H. McClamroch, “Rigid-body attitude control,” *Control Systems, IEEE*, vol. 31, no. 3, pp. 30–51, 2011. [7](#)
- [19] O. Egeland and J.-M. Godhavn, “Passivity-based adaptive attitude control of a rigid spacecraft,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 4, pp. 842–846, 1994. [10](#)
- [20] D. Lovelock and H. Rund, *Tensors, differential forms, and variational principles*. Courier Corporation, 1975. [14](#)
- [21] I. R. Manchester and J.-J. E. Slotine, “Transverse contraction criteria for existence, stability, and robustness of a limit cycle,” *Systems & Control Letters*, vol. 63, pp. 32–38, 2014. [15](#)
- [22] F. Forni and R. Sepulchre, “A differential lyapunov framework for contraction analysis,” *arXiv preprint arXiv:1208.2943*, 2012. [15](#)
- [23] W. Wang and J.-J. E. Slotine, “On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators,” *Biological cybernetics*, vol. 92, no. 1, pp. 38–53, 2005. [16](#), [27](#)

- [24] S. Ishida and M. Takahashi, "Attitude determination of planetary exploration rovers using solar panels characteristics and accelerometer," *Acta Astronautica*, vol. 105, no. 1, pp. 344–354, 2014. [20](#)
- [25] F. Santoni and F. Bolotti, "Attitude determination of small spinning spacecraft using three axis magnetometer and solar panels data," vol. 7, pp. 127–133, 2000. [20](#)
- [26] G. M. Lerner, "Three-axis attitude determination," *Spacecraft Attitude Determination and Control*, vol. 73, pp. 420–428, 1978. [25](#)
- [27] F. L. Markley, "Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 36, no. 3, pp. 245–258, 1988. [25](#)
- [28] G. Wahba, "A least squares estimate of satellite attitude," *SIAM review*, vol. 7, no. 3, pp. 409–409, 1965. [25](#)
- [29] F. L. Markley, "Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 36, no. 3, pp. 245–258, 1988. [25](#)
- [30] J. Mattingley and S. Boyd, "Real-time convex optimization in signal processing," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 27, no. 3, pp. 50–61, 2010. [19](#), [25](#), [26](#)
- [31] K. Maini Anil and A. Varsha, "Satellite technology: Principles and applications," 2007.
- [32] J. L. Marins, X. Yun, E. R. Bachmann, R. B. McGhee, and M. J. Zyda, "An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors," in *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*, vol. 4, pp. 2003–2011, IEEE, 2001. [37](#)
- [33] R. G. Brown and P. Y. Hwang, "Introduction to random signals and applied kalman filtering: with matlab exercises and solutions," *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions*, by Brown, Robert Grover.; Hwang, Patrick YC New York: Wiley, c1997., vol. 1, 1997. [38](#)
- [34] T. W. Dwyer, "Exact nonlinear control of large angle rotational maneuvers," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 9, pp. 769–774, 1984.
- [35] B. Kading, J. Straub, and R. Marsh, "Openorbiter mechanical design: A new approach to the design of a 1-u cubesat," in *Proceedings of the 2015 AIAA SciTech Conference*, 2014.
- [36] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall New Jersey, 1996.

- [37] Q.-C. Pham, N. Tabareau, and J.-J. Slotine, “A contraction theory approach to stochastic incremental stability,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 4, pp. 816–820, 2009.
- [38] A. Pavlov, N. Van De Wouw, and H. Nijmeijer, “Convergent systems: analysis and synthesis,” in *Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems*, pp. 131–146, Springer, 2005.
- [39] R. Kristiansen, P. J. Nicklasson, and J. T. Gravdahl, “Satellite attitude control by quaternion-based backstepping,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 1, no. 17, pp. 227–232, 2009.
- [40] J. S. Yuan, “Closed-loop manipulator control using quaternion feedback,” *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, vol. 4, no. 4, pp. 434–440, 1988.
- [41] G. Meyer, *Design and global analysis of spacecraft attitude control systems*. National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, 1971.
- [42] J. J. Michalsky, “The astronomical almanac’s algorithm for approximate solar position (1950–2050),” *Solar Energy*, vol. 40, no. 3, pp. 227–235, 1988.
- [43] J. C. Springmann, A. J. Sloboda, A. T. Klesh, M. W. Bennett, and J. W. Cutler, “The attitude determination system of the rax satellite,” *Acta Astronautica*, vol. 75, pp. 120–135, 2012.
- [44] S. E. Allgeier, M. Mahin, and N. G. Fitz-Coy, “Design and analysis of a coarse sun sensor for pico-satellites,” in *Proceedings of the AIAA Infotech at Aerospace Conference and Exhibit and AIAA Unmanned Unlimited Conference*, 2009.
- [45] F. Markley, N. Berman, and U. Shaked, “Deterministic ekf-like estimator for spacecraft attitude estimation,” in *American Control Conference, 1994*, vol. 1, pp. 247–251, IEEE, 1994.
- [46] J.-J. E. Slotine, “Modular stability tools for distributed computation and control,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 17, no. 6, pp. 397–416, 2003.
- [47] J.-Y. Wen and K. Kreutz-Delgado, “The attitude control problem,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 36, no. 10, pp. 1148–1162, 1991.
- [48] P. Fortescue, G. Swinerd, and J. Stark, *Spacecraft systems engineering*. John Wiley & Sons, 2011.