



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA**

**“SISTEMA ELECTROMECAÁNICO LINEAL
APLICADO A UN SISTEMA BIOLÓGICO:
CÉLULAS CILIADAS EXTERNAS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

P R E S E N T A:

JONATHAN RENÉ FLORES LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

CIUDAD DE MEXICO, NOVIEMBRE 2016





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.**

Comunico a usted que al alumno(a) Flores López Jonathan René, con número de cuenta 41100125-0 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 18 del mes de Noviembre de 2016 a las 11:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	BIOL. MARÍA EUGENIA IBARRA HERNÁNDEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
SUPLENTE	DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	M. EN C. FRANCISCO JAVIER ALMAZAN RUIZ

[Handwritten signatures]
Edtson E. Herrera Valencia
Dominga Ortiz Bautista
MARIANO PÉREZ CAMACHO

El título de la tesis que se presenta es: "Sistema electromecánico lineal aplicado a un sistema biológico: células ciliadas externas".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
México, D. F. a 25 de Octubre de 2016. ESTUDIOS

DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ ZARAGOZA
DIRECTOR



Vo.Bo. *[Handwritten signature]*
I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.

RECIBÍ:
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO





Dedicatorias

A mi ángel guardián que lo hace desde el cielo, mi bisabue Paula.

A mis padres Alberto y Guadalupe por todas las herramientas fundamentales, valores, principios, apoyo y educación que me dieron y siguen dando, por cada consejo, regaño, amor, paciencia y disciplina. GRACIAS POR TODO!.

A mis hermanos Mario y Stephanie, el ver que concluir no es fácil, que este sea una motivación para ustedes y sigan creciendo día a día.

A mis amigos de la FES: Arely, Bibian, Evelin, José M., Mariano, Mitzi y todos mis compañeros con los que conviví dentro y fuera de la Facultad.

Muchas gracias a todos ustedes por ser parte de mi vida y sin ustedes esto no se hubiese realizado.





Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por acogerme y brindarme un lugar donde estudiar.

A la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza por permitirme ser un zaragozano de corazón, a los profesores que la conforman y compartir su conocimiento.

A la Biol. María Eugenia Ibarra Hernández por la paciencia invertida en el trabajo, la dedicación y el profesionalismo con el cual aportó conocimiento a esta tesis.

Al Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por el tiempo, los consejos, la enseñanza, las experiencias compartidas tanto escolares, laborales y personales; sobre todo ayudarme para crecer como persona en todos los aspectos. MUCHAS GRACIAS.

A la I.Q. Dominga Ortiz Bautista por las motivaciones generadas, por el conocimiento brindado dentro y fuera de los salones de clases, por cada una de las observaciones a este proyecto y demostrarme que todo se encuentra en “La Base”.

Al Dr. Mariano Pérez Camacho por el conocimiento compartido y aportaciones a este trabajo.

Al M. en C. Francisco Javier Almazan Ruiz por el conocimiento basto y amplio aportado a este trabajo, por compartir experiencias laborales y darme una visión diferente del porqué de las cosas.

Investigación realizada gracias al Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115615>> <<Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos Aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE112716>> <<Material Didáctico Teórico, Protocolos Experimentales y Aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (Cuarto Semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo Semestre) correspondiente al ciclo intermedio y terminal de la Carrera de Ingeniería Química>> Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Trabajo realizado gracias al apoyo del Programa de Vinculación con Egresados de la UNAM y de su Programa de Becas para Titulación Exalumnos de Alto Rendimiento. Agradezco a la DGOAE-UNAM la beca recibida.





Índice

Dedicatorias	III
Agradecimientos	IV
Índice.....	V
Índice de Figuras.....	VIII
Índice de Tablas.....	VIII
Notación.....	IX
Vectores y tensores	X
Variables adimensionales	X
Letras Griegas	XI
Otros Símbolos	XI
Subíndices	XII
Abreviaciones	XII
Resumen.....	XIII
Abstract.....	XIV
Capítulo 1 Introducción	15
1.1 Flexoelectricidad	16
1.2 Membranas flexoeléctricas	20
1.3 Objetivos	22
1.3.1 Objetivos Generales	22
1.3.2 Objetivos Particulares	22
1.4 Hipótesis	22
1.5 Organización del trabajo	23





Capítulo 2 Marco teórico	24
2.1 Fenómenos de transporte	25
2.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.....	25
2.1.2 La ecuación de transporte de energía	26
2.1.3 La ecuación de transporte de masa.....	26
2.2 Ecuaciones constitutivas.....	27
2.2.1 Fluido Newtoniano	27
2.2.2 Fluidos no Newtonianos	28
2.3 Reología.....	32
2.3.1 Fluidos Newtonianos	32
2.3.2 Fluidos no Newtonianos	32
2.3.3 Tensor de esfuerzos	33
2.3.4 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta	33
2.3.5 El tensor rapidez de deformación	34
2.4 Pruebas de flujo	34
2.4.1 Flujo cortante en estado estacionario	34
2.4.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias	36
2.5 Campo eléctrico	39
2.6 Polarización eléctrica	39
2.7 Fisiología del oído.....	40
2.7.1 Región periférica del sistema auditivo	40
2.7.2 La audición	41
2.7.3 Oído externo, anatomía y funcionamiento	42
2.7.4 Oído medio, anatomía y funcionamiento	43
2.7.5 Oído interno, anatomía y funcionamiento	46
2.7.6 Las Células ciliadas externas y su funcionamiento.....	48
2.7.7 Aplicaciones biológicas (CCE).....	48
2.8 Fluidos complejos	49
2.8.1 Cristales líquidos	50
2.8.2. Cristales líquidos biológicos.....	51
2.8.2.1 Tipos de fase en los cristales líquidos	51
2.9 Planteamiento del problema	53





2.9.1 Análisis de proceso.....	54
Capítulo 3 Modelos Matemáticos	55
3.1 Modelos matemáticos electroreológicos	56
3.1.1 Modelo estático.....	56
3.1.2 Modelo viscoso	56
3.1.3 Modelo viscoso no lineal.....	57
3.3.4 Modelo viscoelástico.....	57
3.2 Ecuación de momento y conservación de masa.....	58
3.2.1 Membrana capilar superior:	59
3.2.2 Membrana capilar inferior:	59
3.3 Estado no estacionario.....	61
3.4 Dinámica oscilatoria	63
3.5 Cálculos energéticos.....	65
3.6 Potencia disipada.....	65
3.7 Energía elástica almacenada.....	65
3.8 Factor de selectividad Q	66
Capítulo 4 Análisis de Resultados y Simulaciones Computacionales	67
4.1 Módulos Mecánicos	68
4.2 Potencia Disipada	72
4.3 Flujo Volumétrico Oscilatorio	73
4.4 Flujo Volumétrico Transitorio	75
Conclusiones.....	77
Modelo para estado no estacionario	79
Modelo para la dinámica oscilatoria.....	80
Potencia disipada del sistema.....	80
Glosario.....	81
Bibliografía	83





Índice de Figuras

Figura 1 “Ilustra el comportamiento de las CCE: Células Ciliadas Externas.”	16
Figura 2 “Estructura de la organización del trabajo.”	23
Figura 3. “Esquema que muestra el corte simple en un sistema de placas paralelas.”	34
Figura 4. “Esquema que ilustra el flujo oscilatorio a bajas frecuencias.”	36
Figura 5. “Representación esquemática de la Región periférica del sistema auditivo.”	40
Figura 6. “Representación esquemática del oído externo”	42
Figura 7. “Representación esquemática del oído medio.”	44
Figura 8. “Representación esquemática del oído interno.”	47
Figura 9. “Ordenamiento de las moléculas en la fase nemática.”	52
Figura 10. “Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de temperatura.”	52
Figura 11. “Esquema ilustrativo de la geometría y la membrana flexoeléctrica.”	53
Figura 12. “Ilustra el flujo volumétrico adimensional en función del tiempo del proceso del sistema para diferentes valores de frecuencia adimensional.”	68
Figura 13. “Ilustra el tiempo adimensional en función del flujo volumétrico del sistema para diferentes valores de frecuencia adimensional”	69
Figura 14. “Ilustra el flujo volumétrico adimensional en función del tiempo adimensional para diferentes valores de la frecuencia adimensional”	70
Figura 15. “Ilustra el tiempo adimensional del proceso para diferente valores de frecuencia adimensional del sistema”	71
Figura 16. “Ilustra la potencia disipada del sistema para diferentes valores de frecuencia adimensional”	72
Figura 17. “Ilustra el flujo volumétrico oscilatorio en función de la frecuencia adimensional del sistema para diferentes valores de tiempo”	73
Figura 18. “Ilustra el flujo volumétrico oscilatorio total en función del flujo volumétrico del proceso para diferentes tiempos del sistema”	74
Figura 19. “Ilustra el comportamiento de la frecuencia adimensional del flujo volumetrico transitorio total del sistema para diferentes valores de tiempo”	75
Figura 20. “Ilustra el flujo volumétrico transitorio a diferentes valores de tiempos del sistema”	75

Índice de Tablas

Tabla 1. “Variables aplicables a la ecuación general de transporte”	25
---	----





Notación

a	Radio del capilar [m]
$\{b_i\}; i = 1,2$	Coefficientes viscoso e inercial [1/s, 1/s ²]
$\{c_1, c_2\}$	Coefficientes flexoeléctricos
$C_i(z)$	Constante de integración [1]
C_f	Coefficiente flexoeléctrico de la membrana [C]
$\{E, E_0\}$	Magnitud del campo eléctrico, y amplitud del campo eléctrico aplicado [N/C]
E_m	Energía elástica de almacenamiento de la membrana [J]
$\{dE/dt, d^2E/dt^2\}$	Primera y segunda derivadas temporales del campo eléctrico [N/Cs; N/Cs ²]
F_{membrana}	Fuerza de restauración de la membrana [N]
$\{G_b, G_t\}$	Módulo elástico definido en la región inferior y superior [Pa]
h	Altura del domo esférico [m]
H	Curvatura promedio [1/m]
$\{H_0, H_1\}$	Condiciones iniciales de la curvatura promedio [1/m, 1/m s]
$\{\dot{H}, \ddot{H}\}$	Primera y segunda derivada temporal de la curvatura promedio [1/m s, 1/m s ²]
$\{k_c, \bar{k}_c\}$	Módulos de rigidez y de torsión de la membrana [J]
L	Longitud característica axial del tubo capilar [m]
M	Parámetro elástico de la membrana [Pa]
P	Potencia [J/s]
$p(z, t)$	Presión [Pa]
$\Delta p(z, t)$	Diferencia de presión [Pa]
$\{p_t, p_b\}$	Presión superior ($z = 2L$) e inferior ($z = 0$) [Pa]
P_0	Presión constante en la parte superior e inferior del capilar [Pa]
$\dot{V}(t)$	Flujo volumétrico [m ³ /s]
R	Radio del domo esférico [m]
(r, ϕ, z)	Coordenadas cilíndricas [m, rad, m]
t	Variable temporal [s]
V_z	Velocidad axial [m/s]





Vectores y tensores

D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
F_E	Fuerza eléctrica [1/s]
g	Vector aceleración de la gravedad [m/s ²]
n	Vector director [1]
R	Vector de posición [m]
σ	Tensor de esfuerzo [Pa]

Variables adimensionales

$\{b_1^*, b_2^*\}$	Coeficientes viscosos e inercial [1]
\bar{E}	Campo eléctrico [1]
\bar{E}_m	Energía elástica de la membrana [1]
$\{\bar{G}_b, \bar{G}_t\}$	Módulos elásticos de los fluidos (superior e inferior) [1]
$\{\bar{H}, \bar{H}_{io}, \bar{H}_{oi}, \bar{H}^*\}$	Curvatura promedio, en fase y fuera de fase y compleja [1]
$\{\ddot{\bar{H}}, \dot{\bar{H}}\}$	Primera y segunda derivadas temporales de la curvatura promedio [1]
$\{\bar{H}_0, \bar{H}_1\}$	Condiciones iniciales de la curvatura promedio [1]
k	Radio elástico [1]
k_0	Radio elástico crítico [1]
\bar{M}	Elasticidad de la membrana [1]
\bar{P}	Potencia [1]
\bar{P}_{peak}	Potencia máxima [1]
Q	Factor de selectividad biológico Q [1]
t	Tiempo [1]
ω	Frecuencia [1]
\sum_{η}	Viscosidad total [1]
$\{\sum_{\eta_{min}}, \sum_{\eta_{max}}\}$	Limites inferior y superior de la viscosidad total [1]





Letras Griegas

ε	Parámetro de dimensiones pequeñas [1]
γ_0	Tensión superficial [Pa]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Rapidez de corte [1/s]
$\{\eta_t, \eta_b\}$	Viscosidades inferior y superior [Pa s]
$\bar{\eta}_i; i = \{t, b\}$	Viscosidades adimensionales (superior e inferior) [1]
$\{\rho_t, \rho_b\}$	Densidades de los fluidos (superior e inferior) [kg /m ³]
Σ_G	Suma de la elasticidad de bulo en el sistema [Pa]
Σ_η	Suma de las viscosidades en el sistema [Pa s]
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}$	Componentes del tensor de esfuerzos [Pa]

Otros Símbolos

$\{\sin, \cos\}$	Funciones seno y coseno [1]
$ \cdot $	Determinante [1]
\neq	Diferente of cero [1]
\cong	Factor geométrico [m ²]
$\{>, <\}$	Mayor y menor que [1]
$\{>>, <<\}$	Mucho mayor y mucho menor que [1]
π	Numero irracional pi [1]
$\left\{ \frac{d}{dt} \right\}$	Derivadas con respecto al tiempo [s ⁻¹]
$\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$	Derivada parcial espacial y temporal [m ⁻¹ , s ⁻¹]
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada [1]
$ \cdot $	Valor absoluto [1]





$\det|\cdot|$ Determinante [1]

$\left\{ \int_0^t (\cdot) d\xi \right\}$ Definición de integral [1]

Subíndices

$\{b,t\}$ Refiere a los fluidos en la parte inferior y superior respectivamente [1]

$\{rz, rr, \theta\theta, zz\}$ Refiere a las componentes del tensor de esfuerzos [1]

Abreviaciones

LC Cristal líquido

NLC Cristal líquido nemático

OHC Células ciliadas externas

CCE Células ciliadas externas

$\{LS, LV, FM\}$ Baja simetría, baja viscosidad y membrana suave

$\{LS, LV, SM\}$ Baja simetría, baja viscosidad y membrana rígida

$\{LS, HV, FM\}$ Baja simetría, alta viscosidad y membrana suave

$\{LS, HV, SM\}$ Baja simetría, alta viscosidad y membrana rígida

$\{HS, IV, FM\}$ Alta simetría, viscosidad intermedia y membrana suave

$\{HS, IV, SM\}$ Alta simetría, viscosidad intermedia y membrana rígida





Resumen

La flexoelectricidad en las membranas timpánicas, es un efecto de acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición.

La flexoelectricidad aplicada a las membranas utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno. Motivados por el funcionamiento de la (CCE), en este trabajo se modela la respuesta mecánica oscilatoria de una membrana flexoelectrica circular inmersa entre dos fases viscoelásticas sujetas por un campo eléctrico armónico de pequeña amplitud con frecuencia arbitraria.

El modelo se basa en la integración de:

- I. La ecuación de forma de la membrana flexoelectrica aplicada a una membrana circular unida a la superficie interior de un capilar circular.
- II. El flujo volumétrico acoplado a las fases viscoelásticas de contacto, de tal manera, que el efecto del campo eléctrico produce distorsión en la membrana y la evolución de ella induce un flujo volumétrico, el cual depende completamente de las propiedades viscoelásticas del sistema.

El modelo membrano-dinámico (Viscoelástico/Flexoelectrico) integrado y las aportaciones de este trabajo contribuyen a la búsqueda constante en el entendimiento de los motores biológicos conocidos como células ciliadas externas (Outer Hair Cells), especialmente en el papel fundamental de la deformación de la membrana en la entrega de energía mecánica, a través de electro-motilidad y su conversión en energía dependiente de la frecuencia.

Palabras claves: Membranas flexoelectricas, Modelo electroreológico, Cristales Líquidos, Fenómenos de Transporte.





Abstract

Membrane flexo-electricity is an electromechanical coupling effect between the membrane average curvature and macroscopic electric polarization, which is essential to the physiology of hearing.

Flexoelectric actuation uses an imposed electric field to create membrane bending and is used by the Outer Hair Cells (OHCs) located in the inner ear. Motivated by the functioning of the OHC, in this paper we model the amplitude oscillatory dynamics of a tethered circular membrane immersed in viscoelastic fluid media driven by a small amplitude harmonic electric field of arbitrary frequency.

The model is based on the integration of:

- I. The flexo-electric membrane shape equation applied to a circular membrane attached to the inner surface of a circular capillary.
- II. The coupled capillary flow of the contacting viscoelastic phases, such that the membrane flexo-electric oscillations drive periodic viscoelastic capillary flows.

Key words: Flexoelectric membrane, Electro-rheology model, Liquid Crystals, Transport Phenomena.



Capítulo 1

Introducción

1.1 Flexoelectricidad

La flexoelectricidad es la capacidad que tiene un sistema de cambiar su curvatura por efecto de un agente externo, por agente externo se entiende una fuerza eléctrica que modifica su curvatura.

El modelo membrano-dinámico que describe la evolución de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado, es de segundo orden en las derivadas temporales de la curvatura promedio y del campo eléctrico y bajo ciertas transformaciones algebraicas, se mapea en un modelo de Burgers de la mecánica de sólidos.

El espacio material conformado por la inercia, viscosidad y la elasticidad de la membrana, se utiliza para clasificar y caracterizar la respuesta de la frecuencia del sistema eléctrico-mecánico. La respuesta dinámica del sistema, es típica de un oscilador armónico forzado y puede mostrar curvas resonantes en la potencia total.

La amplitud, la frecuencia y la anchura de las curvas resonantes en la potencia son de relevancia para el funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE), las cuales dependen de la inercia que proviene de las fases viscoelásticas y la relación entre la elasticidad de la membrana y la de los líquidos en contacto.

A continuación se muestra el comportamiento de las CCE.

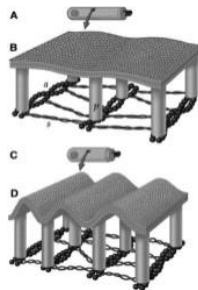


Figura 1 “Ilustra el comportamiento de las CCE: Células Ciliadas Externas.”

Los cristales líquidos nemáticos son materiales multifuncionales viscoelásticos anisotrópicos auto-organizados, los cuales son orientados debido a campos externos como por ejemplo:

- (i) Campos eléctricos.
- (ii) Campos magnéticos.
- (iii) Esfuerzos cortantes.
- (iv) Potenciales químicos.
- (v) Sistemas ópticos. ^[1]

^[1] Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009.





El orden orientacional se define por un vector director \mathbf{n} y las distorsiones elásticas por el tensor $\nabla\mathbf{n}$. [2]

Una propiedad sorprendente y característica de los cristales líquidos nemáticos es conocida como flexoelectricidad [3], la cual describe el acoplamiento entre los mecanismos asociados a los gradientes elásticos y la polarización eléctrica, como aquella producida por un campo eléctrico el cual modifica la curvatura y esto a su vez crea un efecto de polarización en el sistema.

El vector natural de polarización asociado a las deformaciones $\mathbf{S} = \mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{n}$ y el asociado con la orientación de la curvatura $\mathbf{B} = -\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}$ pueden polarizar los cristales líquidos nemáticos. [4]

$$\mathbf{P}_f = c_s \mathbf{S} + c_B \mathbf{B} \quad (1.1)$$

En donde P_f es la polarización asociada a la flexoelectricidad, los coeficientes flexoeléctricos $\{c_s, c_B\}$, están asociados a los mecanismos tipo abanico y a la curvatura y son del orden de 10pCm^{-1} . [5]

La Ec. (1.1) Describe un sensor que cuantifica los mecanismos flexoeléctricos, donde la deformación crea polarización. El efecto de los mecanismos flexoeléctricos, describe una torca asociada a estos, e inducida por el campo eléctrico. [6]:

$$\Gamma_f = \mathbf{n} \times \left\{ (c_s - c_B) [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{n} - \nabla(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})] + (c_s + c_B) (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{E}) \right\} \quad (1.2)$$

Donde Γ_f depende del campo eléctrico y del tensor gradiente de campo eléctrico.

La torca Γ_f está dada por la suma de un tensor de esfuerzos flexoeléctrico y un tensor acoplado flexoeléctrico:

$$\Gamma_f = -\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{T}_f + \nabla \cdot \mathbf{C}_f \quad (1.3)$$

La Ec. (1.2) Indica como el campo eléctrico \mathbf{E} crea un efecto mecánico. Las aplicaciones actuales de los cristales líquidos flexoeléctricos incluyen ahorro de energía, transductores electro-mecánicos y pantallas. [7]

La electro-elasticidad de membranas biológicas y sintéticas pueden ser eficientemente descritas por la teoría de cristales líquidos, usando una aproximación conocida como nemato-membranología.

[2], [3], [4], [5], [6], [7] Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014.





Por ejemplo la elasticidad de una membrana doble bilipida es bien descrita por la conocida ecuación de Helfrich E_H para las energías de flexión y torsión respectivamente.

Matemáticamente se expresa como: [8]

$$E_H = 2k_c H^2 + \bar{k}_c K \quad (1.4)$$

Donde H es la curvatura promedio y K es la curvatura Gaussiana, la cual surge de la ecuación de energía elástica nemática de Frank. [9]

$$E_F = \frac{K_1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 - K_{24} \nabla \cdot (\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}) \quad (1.5)$$

en donde K_1 y K_{24} son constantes de elásticas. Las variables geométricas definidas en este trabajo se pueden estudiar en la literatura especializada en el tema. [10]

La ciencia que estudia las membranas flexoelectricas desde el punto de vista de los cristales líquidos, es conocida como nemato-membranología.

Esta se basa en la premisa de que una membrana es afín a un cristal líquido cuando el vector unitario normal \mathbf{k} , el cual describe cómo cambia la curvatura promedio en una membrana, coincide con el vector director \mathbf{n} que describe la orientación preferencial de los elementos materiales de un cristal líquido, i.e. $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ en Ec. (1.5), y considerando solamente deformaciones tangenciales ∇_s , se obtiene la siguiente ecuación para la energía de Frank. [11]

$$E_F = \left(\frac{K_1}{2} + 4K_{24} \right) H^2 + (-2K_{24}) K \quad (1.6)$$

Si se comparan las Ecs. (1.5) y (1.6) se obtienen las siguientes relaciones:

$$4k_c = (K_1 + 8K_{24}) \quad (1.7)$$

$$\bar{k}_c = -2K_{24} \quad (1.8)$$

El gradiente asociado a la superficie puede ser obtenido por la proyección tangencial del gradiente total $\nabla_s(\cdot) = \mathbf{I}_s \cdot \nabla(\cdot)$; $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}$, en donde las membranas y los cristales líquidos exhiben flexoelectricidad, i.e., un acoplamiento entre la polarización y la curvatura. [12]

[8], [9], [10], [11], [12] Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia E.E. & Rey 2014.





Usando la misma aproximación que se estudió anteriormente, la Ec. (1.1) da la polarización en función de los cambios del vector unitario \mathbf{k} y el gradiente superficial ∇_s :

$$\mathbf{P} = c_f (\nabla_s \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \quad (1.9)$$

En donde C_f es el coeficiente flexoeléctrico de la membrana, el cual puede ser calculado a través de experimentos.

La torca Γ asociado a los efectos flexoeléctricos \mathbf{E} , puede ser descrita de la siguiente manera. ^[13]

$$\Gamma = \mathbf{k} \times \left\{ c_f \left[(\nabla \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}_{//} - \nabla_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \right] \right\} \quad (1.10)$$

Donde la proyección tangencial del campo eléctrico es $\mathbf{E}_{//} = (\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}$. La Ec. (1.10) muestra que los efectos eléctricos se llevan a cabo bajo las siguientes condiciones:

$$c_f > 0, \mathbf{E}_{//} \neq 0, \text{ ó } \nabla_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \neq 0 \quad (1.11)$$

En conclusión parcial, los mecanismos asociados a la flexoelectricidad pueden aplicarse a sensores de tipo biológicos, debido a su acoplamiento entre la polarización y la curvatura como en los cristales líquidos nemáticos.

Esta investigación es motivada por las propiedades flexoeléctricas, i.e., la facilidad que tiene un sistema para modificar su curvatura por efecto de un campo eléctrico aplicado, como aquel encontrado en las células ciliadas externas localizado en el oído interno. ^[14]

^[13], ^[14] Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia E.E. & Rey 2014.





1.2 Membranas flexoelectricas

Las membranas flexoelectricas han sido estudiadas debido a sus capacidades como sensores debido al acoplamiento entre la curvatura promedio y los mecanismos de polarización, los cuales describen a los cristales líquidos nemáticos.

Esta investigación es motivada por las observaciones en membranas biológicas flexoelectricas como las observadas en las células ciliadas externas, las cuales se encuentran en el oído interno y son conocidos como los motores biológicos que amplifican el sonido en el oído humano. [15]

La flexoelectricidad en las membranas tienen un potencial uso debido a sus capacidades como sensores biológicos y debido a esto, es una área de interés en materia suave de materiales. [16]

La flexoelectricidad en materia suave complementa y extiende la aplicación de los materiales piezoelectricos los cuales acoplan la deformación con la polarización en materiales complejos tipo cristales y cerámicos. Muchos materiales, exhiben estructuras complejas como los cristales líquidos, como los encontrados en la proteína producida por las arañas, colágeno y membranas biológicas como las encontradas en las células ciliadas externas. [17]

Durante muchos años, mucho de las investigaciones en materiales flexoelectricos se han centrado en el estudio del cálculo de los coeficientes flexoelectricos en diferentes sistemas de cristales líquidos. Para membranas biológicas tipo cristal líquido, el valor numérico de los coeficientes están en el orden de 3 a 20 pC/m, pero recientemente Harden et al. 2010, han reportado coeficientes flexo electricos hasta del orden 35 nC/m en cristales líquidos tipo banana empleados en transductores mecánico electricos. [18]

Las células ciliadas externas exhiben un comportamiento complejo llamado electro-motilidad. [19]

Las células ciliadas ubicadas en el oído interno, en la cóclea las cuales amplifican el sonido hasta un valor cercano de 50 db la cóclea amplifica y provee a los mamíferos la capacidad de oír en un amplio intervalo de frecuencias. La potencia disipada por las células ciliadas es de mucho interés en los procesos de pérdida auditiva muchas veces causados por el deterioro de estos motores biológicos [20] cuyo entendimiento requiere de teoría de ecuaciones constitutivas viscoelasticas para el entendimiento de la electromotilidad en las células ciliadas externas.

[15], [16], [17] Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014.

[18] Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Harden et al; 2010.

[19], [20] Rabbitts et al. 2009; Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Harden et al; 2010.





Un hecho clave en la amplificación del sonido en las células ciliadas, son la energía disipada y la energía almacenada respectivamente. Así que la descripción y el entendimiento de la electromotilidad es basada en su dependencia con la frecuencia de oscilación, inmersas en medios viscoelásticos debido a campos eléctricos oscilantes. [21]

El campo eléctrico E produce oscilaciones en la membrana elástica a través de efectos mecano eléctricos y flexoeléctricos. [22]

Por otro lado las oscilaciones de la membrana elástica desplazan las fases viscoelásticas a través de los mecanismos elásticos y viscoelásticos respectivamente. [23]

El efecto combinado que permite la conversión de energía eléctrica a mecánica es la integración de los efectos flexo eléctricos y los efectos mecánicos.

Los puntos importantes de la conversión de energía en este dispositivo son:

- (i) Cuanta potencia es liberada por la membrana debido al contacto de las fases viscoelásticas por efecto al campo eléctrico impuesto.
- (ii) Cuanta energía elástica es almacenada en la membrana elástica.
- (iii) En sistemas biológicos las propiedades importantes son las curvas resonantes y su caracterización (frecuencia de resonancia, máximo valor en las curvas resonantes, anchura de las curvas resonantes). [24]

Las células ciliadas externas o CCE, están colocadas en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti. Son células sensoriales con características realmente únicas. Están preparadas para realizar la transducción mecano-eléctrica, como las CCI, pero no transmiten ninguna característica del estímulo sonoro al cerebro.

Al contrario, un mecanismo activo de transducción inversa (electro-mecánico) le permite reenviar la energía para aumentar la sensibilidad y la selectividad frecuencia.

La cóclea humana tiene entre 10.000 y 12.000 de las CCE. [25]

[21] Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Harden et al; 2010; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014.

[22], [23], [24], [25] Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014.





1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Generales

- Obtener un modelo matemático dinámico lineal que describa el flujo volumétrico inducido por una membrana flexoeléctrica en dos medios viscoelásticos en función del campo eléctrico.

1.3.2 Objetivos Particulares

- Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que describen la física del sistema y nos permita analizar las condiciones materiales a través de los límites matemáticos y físicos.
- Estudiar la respuesta mecánica del sistema proponiendo que el campo eléctrico sea una función periódica sencilla, y desacoplar la curvatura en dos módulos de curvatura. Uno de ellos, en fase con el campo eléctrico y otro desfasado del campo eléctrico, a partir de estos calcular la potencia que se disipa debido a las fases viscoelásticas y la energía elástica almacenada por la membrana.
- Obtener bajo qué parámetros materiales se obtienen las curvas resonantes las cuales están íntimamente relacionadas con la curvatura y la amplificación del sonido.

1.4 Hipótesis

Si las propiedades materiales del medio flexoeléctricas y elásticas de la membrana afectan la dinámica lineal del sistema, entonces se verán reflejadas en las pruebas de inicio del flujo y flujo oscilatorio.





1.5 Organización del trabajo

Debido a la búsqueda constante de entender el sistema auditivo humano para poder acceder a aplicaciones científicas y tecnológicas en la búsqueda de nuevos materiales y resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura.

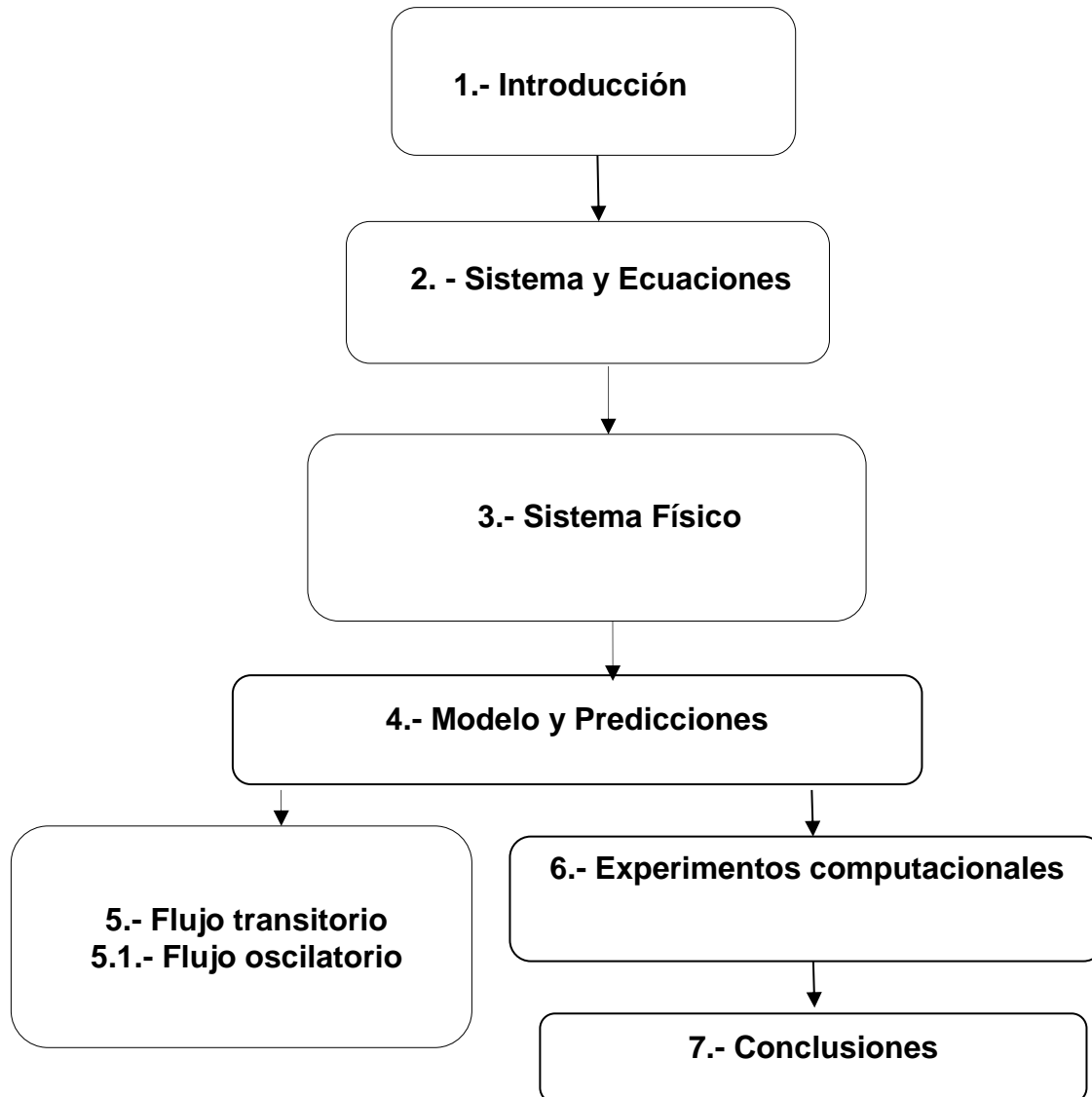


Figura 2 "Estructura de la organización del trabajo."



Capítulo 2

Marco teórico



En este capítulo se protocoliza el fundamento teórico del proyecto para poder tomarlo como herramienta fundamental y tener un mayor entendimiento acerca del mismo.

2.1 Fenómenos de transporte

Los Fenómenos de Transporte, se define como la rama de la Ingeniería Química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular. [26]

La ecuación básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material D/Dt

$$\frac{DX}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Mecanismo de Transporte	X	Y	F
Momento Newton	$\rho \mathbf{V}$	$\Phi = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{T} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - p \mathbf{I} + \sigma$	$\rho \mathbf{g}$
Energía Termodinámica Irreversible	$U = \rho C_p T$	$\mathbf{q} = -k \nabla T$	$\sigma : \mathbf{D}$
Masa Conservación de los moles en un sistema	C_A	$\mathbf{N}_A = -c D_{AB} \nabla x_A + x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	R_A
Continuidad Conservación de la masa	ρ	$\rho \mathbf{V}$	0

Tabla 2.1. “Variables aplicables a la ecuación general de transporte”

El primer término de la Ec. (2.1) representa la derivada material de la propiedad X, la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través de la divergencia del flux Y y por último la fuente f. [27]

2.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de Newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera. [28]

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (2.2)$$

[26], [27], [28] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





En la Ec. (2.2) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, p es la presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante.

Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (2.2) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos. [29]

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (2.3)$$

La Ec. (2.1) es base para el cálculo de la mecánica de fluidos newtonianos.

2.1.2 La ecuación de transporte de energía

La ecuación de energía, se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo si es una variable importante, ya que desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta. [30]

A partir de la tabla se tiene lo siguiente:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.4)$$

La Ec. (2.4) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos. La Ec. (2.4) es punto de partida en los cálculos del perfil de temperatura asociado a los procesos moleculares y los disipativos respectivamente. [31]

2.1.3 La ecuación de transporte de masa

Suponiendo que existe un sistema físico en donde hay intercambio de masa, la ecuación que rige este intercambio, puede ser descrita en términos de la derivada material. [32]

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = c D_{AB} \nabla^2 X_A - \nabla_{X_A} \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - X_A \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + R_A \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5) Describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie A por efecto de los mecanismos difusivos y de las contribuciones de los cambios espaciales a través del movimiento global del fluido.

[29], [30], [31], [32] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





Cuando el movimiento global del fluido se desprecia es decir, los cambios espaciales en el movimiento global del fluido son despreciables y solamente los mecanismos difusivos y el término de generación contribuyen al balance, por lo que la ecuación de conservación se puede escribir como: [33]

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 (cX_A) - k_n^+ C_A^n = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n^- C_A^n \quad (2.6)$$

La Ec. (2.6) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente.

2.2 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos.

Una ecuación constitutiva es una relación entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico: presión, volumen, tensión, deformación, temperatura, densidad, entropía, etc. Cada material o sustancia tiene una ecuación constitutiva específica, dicha relación sólo depende de la organización molecular interna.

En ingeniería, las ecuaciones constitutivas son igualdades que relacionan el campo de tensiones con la de formación, usualmente dichas ecuaciones relacionan componentes de los tensores tensión, deformación y velocidad de deformación.

En física, se usa el término ecuación constitutiva para cualquier relación entre magnitudes tensoriales que no es derivable de leyes de conservación u otro tipo de leyes universales y que son específicas del tipo de problema estudiado.

2.2.1 Fluido Newtoniano

Desde el punto de vista de los fenómenos de transporte y reología, el fluido más sencillo es el newtoniano, llamado así porque su comportamiento sigue la ley de Newton.

El esfuerzo de corte es proporcional al gradiente de velocidad de corte:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\mathbf{D} \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \end{aligned} \quad (2.7)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad y se mide en Pa.s (en el SI) en la práctica se utiliza comúnmente el centipoise (cP). Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (2.1) son no newtonianos. [34]

[33], [34] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





2.2.2 Fluidos no Newtonianos

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades, aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. [35]

La definición más simple y sencilla de un fluido no newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación.

En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme la muestra, la temperatura, la presión, la concentración, el pH entre otras. [36]

2.2.2.1 Modelo de ley de potencia

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de la ley de potencia, o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\text{II}_D) \mathbf{D} = 2K \left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \right)^{n-1} \mathbf{D} \quad (2.8)$$

Donde K y n son parámetros empíricos, K es el índice de consistencia y n es el índice de comportamiento de flujo.

El término entre corchetes se denomina viscosidad aparente y es evidente que no es constante, dependiendo directamente de la velocidad de corte $\dot{\gamma}_{xz}$.

Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentando la velocidad de deformación. [37]

Por el contrario, cuando $n > 1$, la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrozantes al corte).

La mayoría de los fluidos no newtonianos son pseudoplásticos: alimentos (jugo y puré de frutas, salsas) polímeros fundidos (poliestireno, acrilonitrilo, polipropileno, etc.), cosméticos, látex, tinta de imprenta. [38]

Los fluidos engrozantes al corte son los más raros, entre otros el cemento y las suspensiones concentradas (ejemplo: almidón de maíz) siguen este comportamiento.

[35] Herrera et al. (2009); Herrera et al (2010); Bird et al. (1987).

[36], [37], [38] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





A bajas velocidades de corte, el líquido presente llena los espacios libres, a medida que la velocidad de corte aumenta, el material se expande o dilata y comienza a aparecer esfuerzos de interacción sólido-sólido que se traducen en un aumento de la viscosidad aparente. [39]

Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte.

Además el valor de K depende del valor numérico de n , con lo cual valores de K de distintos fluidos no son comparables.

2.2.2.2 Modelo de Ellis

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia.

Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. [40]

La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia.

Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc., el modelo matemático es el siguiente:

$$2\mathbf{D} = \varphi_0 \boldsymbol{\sigma} + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.9)$$

2.2.2.3 Modelo de Maxwell

El modelo de Maxwell, es el modelo más sencillo que describe a los fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal. [41]

Este modelo combina al sólido de Hook, con el fluido newtoniano.

[39], [40] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).

[41] Bird et al. (1987); Calderas et al (2009); Abou-Dakka et al. (2012); Herrera-Valencia & Rey (2014)



El modelo de Maxwell contiene dos parámetros materiales $\{\lambda_0 = \eta_0/G_0, \eta_0\}$, el tiempo característico $\lambda_0 = \eta_0/G_0$ se conoce como el tiempo de relajación del sistema, y es el tiempo que tarde el sistema en alcanzar el equilibrio después de ser sometido a un esfuerzo. [42]

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.10)$$

Cuando el tiempo de relajación λ_0 es cero el sistema se reduce al modelo newtoniano, mientras que a velocidades muy bajas $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$, el sistema puede ser integrado y puede obtener el modelo de Hook.

Las propiedades materiales que intervienen la Ec. (2.10) pueden ser calculadas mediante pruebas de flujo oscilatorio y de flujo en estado estacionario respectivamente.

2.2.2.4 Modelo de Jeffrey

El modelo de Jeffrey, es un modelo viscoelástico que acopla el modelo newtoniano (solvente) con el modelo de Maxwell (polímero).

Suponiendo que el esfuerzo total en el sistema es la suma del esfuerzo del solvente, más el esfuerzo del polímero:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_p = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\sigma}_p + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}_p &= 2\eta_p \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.11 \text{ a-b})$$

Combinando las Ecs. (2.11 a-b), se tiene el modelo de Jeffrey;

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_{Jp} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{D}; \lambda_{Jp} = \left(\frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p}\right) \lambda_p; \eta_0 = \eta_s + \eta_p \quad (2.12)$$

Este modelo contiene tres propiedades materiales las cuales son dos tiempos característicos y una viscosidad a bajo corte $\{\eta_0, \lambda_p, \lambda_{Jp}\}$. La Ec. (2.12) es frecuentemente utilizado en la descripción de polímeros de peso molecular bajo. Esta ecuación constitutiva se reduce al modelo newtoniano cuando el tiempo de Maxwell y Jeffrey tiende a cero, i.e. $\{\lambda_p = \lambda_{Jp} = 0\}$, al modelo de Maxwell cuando $\{\lambda_{Jp} = 0\}$, al modelo de Hook cuando el frente de velocidades es homogéneo, es decir a rapidezces de deformación baja, i.e. $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$

[42] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





2.2.2.5 Modelo de Tanner

Existen en la literatura de fenómenos de transporte y reología muchas ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento a altas rapidezces de deformación, i.e. en el régimen de viscoelásticidad no lineal. [43]

Uno de esos modelos, es la ecuación constitutiva de Tanner, la cual puede ser expresada en términos de la derivada convectiva superior de Maxwell. [44]

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D} \quad (2.13)$$

En donde la derivada convectiva superior de Maxwell se define como:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\sigma} - \left\{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \left\{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right\} \quad (2.14)$$

La función viscosidad puede tomar cualquier forma, en particular, si se combina el modelo de Tanner. [45] con el modelo de Ley de potencia, se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2m \left(\sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})} \right)^{n-1} \mathbf{D} \quad (2.15)$$

Esta ecuación nos describe el comportamiento viscoelástico no lineal para un fluido que presenta propiedades elásticas y adelgazantes al corte respectivamente.

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura, en general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos.

La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniera de nuevos materiales como son:

- (i) Fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial).
- (ii) Polímeros (plásticos).
- (iii) Polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua).
- (iv) Cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería).
- (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos. [46]

En este contexto, los fluidos no-newtonianos involucran conocimientos multidisciplinarios, como la física, química, biología, matemáticas e ingeniera.

[43], [44], [45] Bird et al (1987); Bird et al (2010)

[46] Rey (2005), (2006), (2007), (2008); Rey & Herrera (2012)





2.3 Reología

La reología, es la ciencia que estudia el flujo y la deformación de la materia, es decir, las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros.

Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte.

Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material.

Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo.

En su forma más simple, la viscosidad μ es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo. [47]

2.3.1 Fluidos Newtonianos

Los fluidos newtonianos son el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos.

Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos.

Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. [48]

La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre.

2.3.2 Fluidos no Newtonianos

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos.

La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. [49]

Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

[47], [48], [49] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





2.3.3 Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos.

Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales.

Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. ^[50]

Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen.

La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales. ^[51]

2.3.4 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta

Cuando en un flujo no uniforme existe rotación y cambio de forma lineal y angular.

Los tensores gradiente de velocidad y su traspuesta se definen como: ^[52]

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}; (\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

^[50], ^[51], ^[52] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).



2.3.5 El tensor rapidez de deformación

El tensor rapidez de deformación, es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad por lo que, se puede expresar de la siguiente manera. ^[53]

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación nos da información acerca de la rapidez con la que se deforma el material.

2.4 Pruebas de flujo

2.4.1 Flujo cortante en estado estacionario

En el flujo cortante en estado estacionario, se destruye la estructura con el fin de estudiar la función viscosidad del sistema. ^[54]

En esta prueba mecánica, la muestra es colocada en dos placas paralelas y la placa superior se le aplica una velocidad constante, de tal forma que el momento se transfiere ortogonal a la velocidad y el fluido se deforma continua e irreversiblemente.

La Fig. (3) ilustra la prueba mecánica de flujo cortante en estado estacionario.

El plato superior se mueve a velocidad constante.

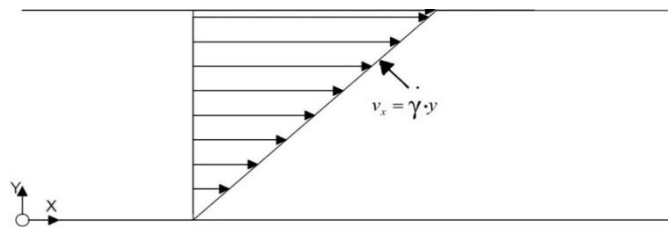


Figura 3. “Esquema que muestra el corte simple en un sistema de placas paralelas.”

^[53], ^[54] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





2.4.1.1 Flujo cortante: Modelo viscoelástico de Maxwell

El flujo cortante simple se genera cuando las fuerzas que actúen en el sistema, quedan fuera de la diagonal principal de la matriz asociada al tensor de esfuerzos. [55]

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Sustituyendo en el modelo de Maxwell se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Desacoplando el sistema se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (2.21)$$

En estado estacionario, este modelo se reduce al newtoniano, i.e.

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} \quad (2.22)$$

La viscosidad en este caso, se define como el cociente entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. [56]

$$\eta \left(\dot{\gamma}_{rz} \right) = \frac{\sigma_{rz}}{\dot{\gamma}_{rz}} = \eta_0 \quad (2.23)$$

Por lo tanto, el modelo de Maxwell en un flujo cortante simple en estado estacionario coincide con el modelo de Newton de los fluidos viscosos.

[55], [56] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).



2.4.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias

En el flujo oscilatorio, se prueba la respuesta mecánica del sistema, i.e., la muestra es colocada en dos placas paralelas y la placa superior comienza a oscilar en torno a una posición de equilibrio. [57]

La Fig. (4) ilustra este experimento de flujo oscilatorio a bajas frecuencias.

Plato superior oscilatorio con baja amplitud.

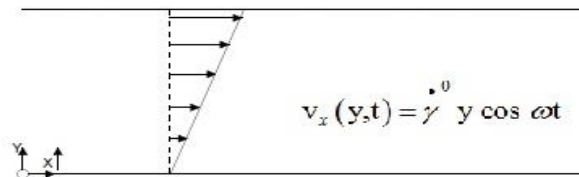


Figura 4. “Esquema que ilustra el flujo oscilatorio a bajas frecuencias.”

2.4.2.1 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias: Modelo viscoelástico de Maxwell

En flujo oscilatorio se estudia la respuesta mecánica del material por lo que el modelo de Maxwell toma la siguiente forma en el espacio de Fourier de las frecuencias.

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{xz}(\omega) = \eta_0 \dot{\gamma}(\omega) \quad (2.24)$$

Dividiendo el esfuerzo y la rapidez de deformación, se obtiene la viscosidad compleja. [58]

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (2.25)$$

Desacoplando la Ec. (2.25) se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1}{1 + i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0\omega}{1 - i\lambda_0\omega} = G_0 \lambda_0 \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} - i \frac{\lambda_0 \omega}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \right\} \quad (2.26)$$

Igualando ambos miembros de la ecuación tenemos lo siguiente:

$$\eta'(\omega) = \frac{G_0 \lambda_0}{1 + \left(\frac{\eta_0}{G_0}\right) \omega^2}; \quad \eta''(\omega) = \frac{\eta_0 \lambda_0 \omega}{1 + \left(\frac{\eta_0}{G_0}\right) \omega^2} \quad (2.27)$$

Y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega \eta'(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega \eta''(\omega)$.

[57]. [58] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006), Barnes et al. (1989).





Por último, igualando las ecuaciones obtenemos. ^[59]

$$G''(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0 \omega}{1 + (\lambda_0 \omega)^2}; G'(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.28)$$

{G', G''} son los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Maxwell.

Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia.

Un hecho importante, es cuando se igualan las dos expresiones: $\lambda_0 = 1/\omega_{int}$ se obtiene el tiempo viscoelástico de Maxwell a frecuencias bajas por lo que este sistema de flujo, permite calcular una propiedad material del líquido en la zona viscoelástica lineal. ^[60]

Por otra parte, al aumentar la frecuencia, i.e.,

$$1 + \left(\frac{\eta_0}{G_0} \right) \omega^2 \cong \left(\frac{\eta_0}{G_0} \right) \omega^2; G''(\omega) = \frac{G_0}{\lambda_0 \omega}; G'(\omega) = G_0 \quad (2.29)$$

Por lo que se tendría el valor del módulo elástico G_0 en la zona donde es independiente de la frecuencia.

A muy baja frecuencia G'' es mucho mayor que G' , por lo que predomina el comportamiento viscoso de un líquido.

Al aumentar la frecuencia, las curvas de G' y G'' se cruzan y empieza a dominar el comportamiento elástico típico de un sólido. A bajas frecuencias hay una región viscosa o terminal en la que $G'' > G'$ y gobierna el flujo.

Al aumentar la frecuencia hay una región de transición al flujo, en la que el punto de corte entre G' y G'' da una frecuencia definida por la inversa del tiempo de relajación en el modelo de Maxwell, luego hay una muestra elastomérica en la que domina G' , la cual puede aumentar ligeramente y, tras una región de transición, en la que G'' vuelve a aumentar más rápidamente que G' hasta que a mayor frecuencia, vuelven a cruzarse ambas, momento a partir del cual se aprecia una región vítrea en la que vuelve a dominar el comportamiento viscoso. ^[61]

^[59], ^[60], ^[61] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006), Barnes et al. (1989).



2.4.2.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias: Modelo viscoelástico de

Jeffrey

La componente r_z del modelo Jeffreys está dado por la siguiente ecuación diferencial parcial. [62]

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma} \quad (2.30)$$

Aplicando el formalismo de Fourier en la se obtiene la siguiente expresión para la función viscosidad. [63]

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0 (1 + \lambda_J i\omega)}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (2.31)$$

Multiplicando por el complejo conjugado del denominador de la Ec.(2.31), y separando las partes real e imaginaria respectivamente. [64]

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1 + i\lambda_J \omega}{1 + i\lambda_0 \omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0 \omega}{1 - i\lambda_0 \omega} = G_0 \lambda_0 \left\{ \frac{1 + \lambda_J \lambda_0 \omega^2}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} - i \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \right\} \quad (2.32)$$

Igualando ambos miembros de la ecuación y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega \eta'(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega \eta''(\omega)$

Por último, igualando las ecuaciones obtenemos:

$$\eta'(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega^2; \quad \eta''(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_J}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega \quad (2.33)$$

$$G''(\omega) = \eta_0 \frac{(\lambda_0 - \lambda_J)}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \omega^2; \quad G'(\omega) = \omega \eta_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.34)$$

{ G' , G'' } son los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Jeffrey.

Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. [65]

[62], [63], [64], [65] Bird et al. (1987); Bird et al. (2006).





2.5 Campo eléctrico

El campo eléctrico es un campo físico que es representado mediante un modelo que describe la interacción entre cuerpos y sistemas con propiedades de naturaleza eléctrica.

Se describe como un campo vectorial en el cual una carga eléctrica puntual de valor q sufre los efectos de una fuerza eléctrica F dada por la siguiente ecuación. ^[66]

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.29)$$

Los campos eléctricos pueden tener su origen tanto en cargas eléctricas como en campos magnéticos variables. ^[67]

Si se tiene una distribución de carga superficial o volumétrica, la Ec. (2.29) se sustituye por la siguiente expresión:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{X}; X = \{\sigma, \rho\} \quad (2.30)$$

La Ec. (2.30) representa el campo eléctrico en una distribución superficial σ y volumétrica de carga ρ .

2.6 Polarización eléctrica

En electromagnetismo clásico la polarización eléctrica, también llamada densidad de polarización, es un campo vectorial que expresa la densidad de los momentos eléctricos dipolares permanentes o inducidos en un material dieléctrico.

El vector de polarización \mathbf{P} se define como el momento dipolar por unidad de volumen. La unidad de medida en el SI es el Cm^{-2} .

La polarización eléctrica es uno de los tres campos eléctricos macroscópicos que describen el comportamiento de los materiales. Los otros dos son el campo eléctrico \mathbf{E} y el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} .

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2.31)$$

En la Ec. (2.31) χ_e es la susceptibilidad eléctrica del medio y ϵ_0 es la permitividad en el vacío. ^[68]

^[66], ^[67], ^[68] Griffiths, (1999)



2.7 Fisiología del oído

La generación de sensaciones auditivas en el ser humano es un proceso extraordinariamente complejo, el cual se desarrolla en tres etapas básicas. [69]

- Captación y procesamiento mecánico de las ondas sonoras.
- Conversión de la señal acústica (mecánica) en impulsos nerviosos, y transmisión de dichos impulsos hasta los centros sensoriales del cerebro.
- Procesamiento neural de la información codificada en forma de impulsos nerviosos.

La captación, procesamiento y transducción de los estímulos sonoros se llevan a cabo en el oído propiamente dicho, mientras que la etapa de procesamiento neural, en la cual se producen las diversas sensaciones auditivas, se encuentra ubicada en el cerebro.

Así pues, se pueden distinguir dos regiones o partes del sistema auditivo: la región periférica, en la cual los estímulos sonoros conservan su carácter original de ondas mecánicas hasta el momento de su conversión en señales electroquímicas, y la región central, en la cual se transforman dichas señales en sensaciones. [70]

En la región central también intervienen procesos cognitivos, mediante los cuales se asigna un contexto y un significado a los sonidos; es decir, permiten reconocer una palabra o determinar que un sonido dado corresponde a un violín o a un piano.

2.7.1 Región periférica del sistema auditivo

El oído o región periférica se divide usualmente en tres zonas, llamadas oído externo, oído medio y oído interno, de acuerdo a su ubicación en el cráneo, como puede observarse en la Fig. (5).



Figura 5. “Representación esquemática de la Región periférica del sistema auditivo.”

[69], [70] Sachs et al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996).





Los estímulos sonoros se propagan a través de estas zonas, sufriendo diversas transformaciones hasta su conversión final en impulsos nerviosos.

Tanto el procesamiento mecánico de las ondas sonoras como la conversión de éstas en señales electroquímicas son procesos no lineales, lo cual dificulta la caracterización y modelado de los fenómenos perceptuales. ^[71]

2.7.2 La audición

El sonido entra al oído por el canal auditivo externo y hace que la membrana del tímpano vibre. Las vibraciones transmiten el sonido en forma de energía mecánica, mediante la acción de palanca de los huesecillos hacia la ventana oval.

Después, esta energía mecánica es transmitida por los líquidos del oído interno a la cóclea, donde se convierte en energía eléctrica que viaja por el nervio vestíbulo-coclear hacia el sistema nervioso central, donde es analizado e interpretado como sonido en su forma final. Durante este proceso de transmisión, las ondas sonoras encuentran protuberancias cada vez más pequeñas, desde el pabellón auricular hasta la pequeña ventana oval, que resultan en incremento de la amplitud (o volumen) del sonido.

Las ondas sonoras transmitidas por la membrana del tímpano a los huesecillos del oído medio llegan al caracol, que es el órgano encargado de la audición situado en el laberinto u oído interno.

Un huesecillo importante es el estribo, que balancea y establece las vibraciones (ondas) en los líquidos contenidos en el laberinto.

Estas ondas líquidas, a su vez, causan el movimiento de la membrana basilar que estimula a las células del órgano de Corti para moverse en forma de onda. Los movimientos de la membrana estabilizan las corrientes eléctricas que estimulan las diversas áreas de la cóclea.

Las células ciliadas inician un impulso nervioso que se codifica y transfiere a la corteza auditiva del cerebro, donde se descodifica en la forma de un mensaje sonoro.

La audición ocurre por dos mecanismos:

- La transmisión de sonidos por el aire en el conducto auditivo externo y medio comprende la conducción aérea.
- La que ocurre por los huesecillos del oído medio es la conducción ósea.

En personas con audición normal, la conducción aérea es más eficaz; sin embargo, los defectos de la membrana timpánica o la interrupción de la cadena osicular alteran la conducción normal del aire y causan pérdida de la proporción sonido-presión y, por tanto, pérdida de la audición.

^[71] (Sachs et.al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996)).



Podemos concluir diciendo que el ruido produce lesiones (trauma sonoro) en principio sólo detectables en registro audiométrico, y si la intensidad y/o tiempo son suficientes, provocará hipoacusia.

Esta disminución de la agudeza auditiva comienza de forma silente y no es percibida por la persona hasta que no se alcanzan las frecuencias conversacionales.

El campo auditivo del hombre está entre los 16 y los 20.000 Hz. Por debajo de este rango no se percibe sonido y sí una sensación de empuje y por encima, la vibración entra en el límite de los ultrasonidos, no captables por el hombre pero sí por la mayoría de los animales.

2.7.3 Oído externo, anatomía y funcionamiento

El oído externo está formado por el pabellón auricular u oreja, el cual dirige las ondas sonoras hacia el conducto auditivo externo a través del orificio auditivo.

El otro extremo del conducto auditivo se encuentra cubierto por la membrana timpánica o tímpano, la cual constituye la entrada al oído medio. La función del oído externo es la de recolectar las ondas sonoras y encauzarlas hacia el oído medio.

Asimismo, el conducto auditivo tiene dos propósitos adicionales: proteger las delicadas estructuras del oído medio contra daños y minimizar la distancia del oído interno al cerebro, reduciendo el tiempo de propagación de los impulsos nerviosos. [72]

En la Fig. (6) se muestra la representación esquemática del oído externo.



Figura 6. “Representación esquemática del oído externo”

[72] Sachs et.al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996).





2.7.3.1 La Oreja

Es la parte del oído visible desde el exterior. Está formada por un sólo cartílago y piel adiposa. Su misión principal es encauzar las ondas sonoras hasta el conducto auditivo y ofrecer protección física al resto del oído.

2.7.3.2 El Cartílago de la Oreja

Es la parte del oído que se proyecta al exterior. Está constituida por una lámina fibrocartilaginosa cubierta de piel que forma numerosos repliegues donde son reflejadas las ondas sonoras hasta que entran en el conducto auditivo externo.

2.7.3.3 El Lóbulo de la Oreja

El lóbulo de la oreja es una parte del oído externo que se encuentra en la parte inferior de la oreja debajo del trago. Está compuesto por tejido adiposo y areolar bastante resistente. Es de lo poco de la oreja que no está compuesto de cartílago.

2.7.3.4 El Conducto Auditivo Externo

Se encuentra en la parte externa y visible del oído. Es una cavidad llena de aire que mide unos 2,5 cm. y que finaliza en la membrana timpánica. En su parte más externa tiene unas formaciones pilosas que protegen al oído de la entrada de objetos extraños. También existen unas glándulas cutáneas ceruminosas que segregan el cerumen, encargado también de proteger al oído de agresiones externas.

2.7.4 Oído medio, anatomía y funcionamiento

El oído medio está constituido por una cavidad llena de aire, dentro de la cual se encuentran tres huesecillos, denominados martillo, yunque y estribo, unidos entre sí en forma articulada. ^[73]

Uno de los extremos del martillo se encuentra adherido al tímpano, mientras que la base del estribo está unida mediante un anillo flexible a las paredes de la ventana oval, orificio que constituye la vía de entrada del sonido al oído interno.

Finalmente, la cavidad del oído medio se comunica con el exterior del cuerpo a través de la trompa de Eustaquio, la cual es un conducto que llega hasta las vías respiratorias y que permite igualar la presión del aire a ambos lados del tímpano. ^[74]

^[73], ^[74] Sachs et.al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996).



En la Fig. (7) se muestra la representación esquemática del oído medio.



Figura 7. "Representación esquemática del oído medio."

2.7.4.1 El Martillo

Es uno de los huesos del oído medio, está conectado con los otros dos huesecillos (yunque- lenticular y estribo) formando una cadena articulada. Se encarga de transmitir al oído interno las vibraciones sonoras que llegan por el aire.

Actúan también como niveladores mecánicos de las mismas, transformando las ondas sonoras en vibraciones mecánicas.

Las ondas sonoras hacen que el tímpano vibre, y estas vibraciones mueven el martillo, que también desplaza al yunque y al estribo que está conectado a la membrana oval y que por lo tanto recibe estas vibraciones aumentadas en 5 decibelios.

2.7.4.2 La Membrana Timpánica

Es una membrana que sirve de separación entre el conducto auditivo externo y la cavidad timpánica o caja del tímpano (lugar donde se encuentra la cadena de huesecillos).

La porción mayor, parte tensa, se encuentra adherida por medio de un anillo fibrocartilaginoso contra la lámina timpánica del hueso temporal; la porción triangular, mucho más pequeña, llamada parte flácida, se encuentra situada en una ubicación anterosuperior entre los pliegues del martillo.

Su misión es transmitir las vibraciones sonoras que llegan a través del aire al interior del oído medio, transformándolas en ondas mecánicas.





2.7.4.3 El Yunque

Es uno de los huesos del oído medio, está conectado con los otros dos huesecillos (martillo y estribo) formando una cadena articulada que se encarga de transmitir al oído interno las vibraciones sonoras que llegan por el aire. Actúan también como niveladores mecánicos de las mismas, transformando las ondas sonoras en vibraciones mecánicas.

2.7.4.4 El Estribo

Es uno de los huesos del oído medio, está conectado con los otros dos huesecillos (martillo y yunque) formando una cadena articulada que se encarga de transmitir al oído interno las vibraciones sonoras que llegan por el aire.

Actúan también como niveladores mecánicos de las mismas, transformando las ondas sonoras en vibraciones mecánicas.

2.7.4.5 El Lenticular

Forma la articulación entre el yunque y el estribo formando parte de la cadena articulada que se encarga de transmitir al oído interno las vibraciones sonoras que llegan por el aire. Actúan también como niveladores mecánicos de las mismas, transformando las ondas sonoras en vibraciones mecánicas.

2.7.4.6 La Trompa de Eustaquio

Es un conducto osteofibromembranoso de unos 4 cm. de longitud revestido por mucosa, que establece comunicación entre la parte anterior y superior del tímpano y la superior de la faringe. Su misión es ajustar la presión del aire de la cavidad timpánica con la del exterior.

2.7.4.7 Propagación del sonido

Los sonidos, formados por oscilaciones de las moléculas del aire, son conducidos a través del conducto auditivo hasta el tímpano.

Los cambios de presión en la pared externa de la membrana timpánica, asociados a la señal sonora, hacen que dicha membrana vibre siguiendo las oscilaciones de dicha señal. Las vibraciones del tímpano se transmiten a lo largo de la cadena de huesecillos, la cual opera como un sistema de palancas, de forma tal que la base del estribo vibra en la ventana oval. ^[75]

^[75] Sachs et. al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996).





Este huesecillo se encuentra en contacto con uno de los fluidos contenidos en el oído interno; por lo tanto, el tímpano y la cadena de huesecillos actúan como un mecanismo para transformar las vibraciones del aire en vibraciones del fluido.

2.7.5 Oído interno, anatomía y funcionamiento

El oído interno representa el final de la cadena de procesamiento mecánico del sonido, y en él se llevan a cabo tres funciones primordiales: filtraje de la señal sonora, transducción y generación probabilística de impulsos nerviosos. [76]

El oído interno se encuentra en la parte lateral del cráneo y dispone de una cavidad ósea llamada laberinto óseo, compuesto de una estructura densa de marfil.

Fisiológicamente las funciones de cada una de sus partes son:

- El sáculo actúa sobre la verticalidad, en especial en la columna vertebral.
- El utrículo organiza los movimientos en el plano horizontal y especialmente en la cabeza.
- Los conductos semicirculares afinan las nociones posturales en el espacio tridimensional e integran las angulaciones anteroposteriores o laterales.

Todo el conjunto vestibular tiene como función medir los desplazamientos de gran amplitud correspondientes a los movimientos corporales. Por tanto, todos los músculos del cuerpo – los de la postura y la verticalidad - dependen del vestíbulo

En el oído interno se encuentra la cóclea o caracol, la cual es un conducto rígido en forma de espiral de unos 35 mm de longitud, lleno con dos fluidos de distinta composición. [77]

El vestíbulo es la parte más arcaica del oído. Está formado por el sáculo y el utrículo, que está coronado por los conductos semicirculares.

El interior del conducto está dividido en sentido longitudinal por la membrana basilar y la membrana de Reissner, las cuales forman tres compartimientos o escalas.

La escala vestibular y la escala timpánica contienen un mismo fluido (perilinfia), puesto que se interconectan por una pequeña abertura situada en el vértice del caracol, llamada helicotrema. [78]

Por el contrario, la escala media se encuentra aislada de las otras dos escalas, y contiene un líquido de distinta composición a la perilinfia (endolinfia).

[76], [77], [78] Sachs et.al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996)).





La base del estribo, a través de la ventana oval, está en contacto con el fluido de la escala vestibular, mientras que la escala timpánica desemboca en la cavidad del oído medio a través de otra abertura (ventana redonda) sellada por una membrana flexible (membrana timpánica secundaria).

Sobre la membrana basilar y en el interior de la escala media se encuentra el órgano de Corti, el cual se extiende desde el vértice hasta la base de la cóclea y contiene las células ciliares que actúan como transductores de señales sonoras a impulsos nerviosos.

Sobre las células ciliares se ubica la membrana tectorial, dentro de la cual se alojan las prolongaciones o cilios de las células ciliares externas. Dependiendo de su ubicación en el órgano de Corti, se pueden distinguir dos tipos de células ciliares: internas y externas.

Existen alrededor de 3500 células ciliares internas y unas 20000 células externas. ^[79]

Ambos tipos de células presentan conexiones o sinapsis con las fibras nerviosas aferentes (que transportan impulsos hacia el cerebro) y eferentes (que transportan impulsos provenientes del cerebro), las cuales conforman el nervio auditivo.

Sin embargo, la distribución de las fibras es muy desigual: más del 90% de las fibras aferentes inervan a las células ciliares internas, mientras que la mayoría de las 500 fibras eferentes inervan a las células ciliares externas. ^[80]

En la Fig. (8) se muestra la representación esquemática del oído interno.

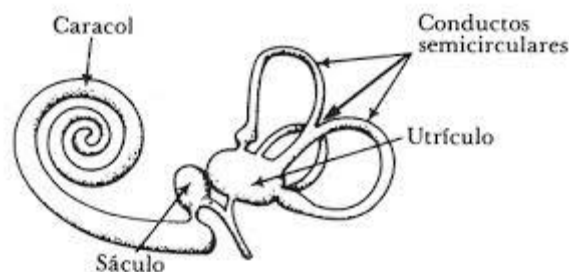


Figura 8. “Representación esquemática del oído interno.”

^[79] Sachs et.al (2009); Messini et. al (2002); Brownell et al. (2001); Oghalai et. al (2000); Thornton & Abbas (1980); Ehrenstein & Iwasa (1996).

^[80] Brownell (1985); Hawkins & Lovett (2004); Spector et al. (2006); Raphael et al. (2000); Rabbits et al. (2009).





2.7.6 Las Células ciliadas externas y su funcionamiento

Las células ciliadas externas o CCE, están colocadas en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti. Son células sensoriales con características realmente únicas. Están preparadas para realizar la transducción mecano-eléctrica, como las CCI, pero no transmiten ninguna característica del estímulo sonoro al cerebro.

Al contrario, un mecanismo activo de transducción inversa (electro-mecánico) le permite reenviar la energía para aumentar la sensibilidad y la selectividad frecuencia y debido a que la cóclea humana tiene entre 10.000 y 12.000 de la CCE es de vital importancia en el funcionamiento del sistema auditivo ya que son consideradas como los motores biológicos del oído.

El funcionamiento de las células ciliadas externas es muy complejo ya que estas poseen una capacidad única de contracción-expansión la cual es la base de la transducción electro-mecánica (electro motilidad) descubierta por Brownell en el año 1985, la cual se activa de la siguiente manera. ^[81]

a) El estímulo eléctrico viaja a través de la escala vestibular en forma de vibraciones mecánicas, excitando la membrana basilar, esta última vibra a una frecuencia de resonancia la cual se acopla con la frecuencia de las vibraciones mecánicas produciendo el efecto de resonancia.

b) La membrana basilar oscila hacia arriba y abajo permitiendo que estas vibraciones muevan las células ciliadas externas, dándole cierto grado de inclinación a los estereocilios que se encuentran en su polo apical, dando lugar a la transducción mecano-eléctrica.

c) El efecto mecano-eléctrico abre los canales que permiten el paso de fluido rico en iones potasio (endolinfa), este fluido a su vez modifica el potencial eléctrico de la célula ciliada, lo cual resulta en una contracción de la membrana plasmática.

d) Finalmente, al regresar a su potencial de equilibrio la célula expande su membrana plasmática, estos cambios de curvatura inducen un flujo volumétrico debido a una potencia de energía liberada, la cual es una medida indirecta de la transducción electro-mecánica. ^[82]

2.7.7 Aplicaciones biológicas (CCE)

De acuerdo con los trabajos de *Sachs y colaboradores (2009)* las CCE usan la electromotilidad de los estereocilios (HB) para vencer la viscosidad y ajustar el efecto de resonancia para maximizar la potencia y disipar la energía.

^[81] Brownell et al. (2001)

^[82] Brownell (1985); Hawkins & Lovett (2004); Spector et al. (2006); Raphael et al. (2000); Rabbits et al. (2009).





El receptor (estereocilios) de las células ciliadas externas activa las oscilaciones permitiendo que se ajusten a la frecuencia de resonancia, para poder disipar la máxima energía y posteriormente mediante otros procesos fisiológicos y fisicoquímicos poder convertirla en impulsos nerviosos.

La respuesta mecánica al campo eléctrico inducido produce las oscilaciones en las CCE que ocurre a la frecuencia del sonido que llega y ajustada a la frecuencia resonante, produciendo una amplificación mecano-eléctrica.

Rabbit y colaboradores (2009) formularon un modelo matemático para las CCE basado en el primer principio (electromotilidad HB) de transducción mecano-eléctrica y ellos analizaron la conversión de potencia en el dominio del espacio de la frecuencia (espacio de Fourier).

Cabe mencionar que en este trabajo se usa la integración de la ecuación de forma de la membrana acoplada con el modelo constitutivo de Maxwell para caracterizar los fluidos viscoelásticos, el cual es un modelo que intenta reproducir el efecto producido por la electromotilidad somática.

Como ha sido demostrado (*Abou-Dakka et al. (2012); Herrera-Valencia & Rey (2014)*) una característica biológica clave es la forma y ubicación del pulso de amplificación de la potencia liberada a los fluidos. El modelo presentado en este trabajo es cualitativamente consistente con el fenómeno biológico que ocurre en las OHC.

2.8 Fluidos complejos

Los fluidos complejos como su nombre lo indica, son aquellos que presentan comportamiento reológicos en estado estacionario y no estacionario, muy interesantes debido a los agentes externos que apliquen en ellos. ^[83]

Algunos ejemplos de fluidos complejos son los sistemas poliméricos, micelares, fluidos biológicos, cristales líquidos, etc.

Los polímeros por ejemplo, son sistemas en donde una unidad llamada monómero se repite y que presentan propiedades físicas complejas debido a las interacciones entre sus cadenas y peso molecular. ^[84]

Los sistemas micelares contienen miles o decenas de miles de agentes tenso activos (un tensoactivo es un sistema que abate la tensión superficial de los líquidos) y que contienen una parte hidrofobia y una hidrofilia (*Rey & Herrera (2012)*).

^[83], ^[84] De Gennes & Prost (1994); Rey & Herrera-Valencia (2012a), Rey & Herrera-Valencia (2012b).





Los sistemas micelares dependen de la concentración y dependiendo de esta, pueden pasar de sistema esféricos a cilíndricos por efecto de un agente estos sistemas micelares dependen de la concentración y por agente externo entiéndase una fuerza que se aplica en una área paralela a la fuerza. [85]

Los cristales líquidos son fluidos anisotrópicos, es decir dependen de la posición y pueden ser orientados a través de campos externos eléctricos y magnéticos. [86]

2.8.1 Cristales líquidos

El cristal líquido es un tipo especial de estado de agregación de la materia que tiene propiedades de las fases líquida y sólida. [87]

Dependiendo del tipo de cristal líquido, es posible, por ejemplo, que las moléculas tengan libertad de movimiento en un plano, pero no entre planos, o que tengan libertad de rotación, pero no de traslación cada molécula consta de un papel que a su vez o sirve y no se llega a una conclusión exacta solo por eso se le llaman líquidos.

Se suele atribuir el descubrimiento de los cristales líquidos al botánico Friedrich Reinitzner que en 1888 encontró una sustancia que parecía tener dos puntos de fusión. [88]

Un año más tarde Otto Lehmann solvento el problema con la descripción de las nano estructuras liótropicas de cristal líquido con la descripción de un nuevo estado de la materia entre un líquido y un cristal.

La principal característica de estos compuestos es que sus moléculas son altamente anisótropas en su forma, pueden ser alargadas, en forma de disco u otras más complejas como forma de piña.

A diferencia de los cristales (orientación a largo alcance y posiciones ordenadas a largo alcance), los cristales líquidos tienen una orientación a largo alcance, pero posiciones ordenadas a corto alcance. Además, contienen intrínsecas propiedades físicas anisótropas. En función de esta forma el sistema puede pasar por una o más fases intermedias (mesofases) desde el estado cristalino hasta el líquido.

En estas mesofases el sistema presenta propiedades intermedias entre un cristal y un líquido.

[85] Rey & Herrera-Valencia (2012a); Rey & Herrera-Valencia (2012b).

[86] De Gennes & Prost (1994); Rey & Herrera-Valencia (2012a), Rey & Herrera-Valencia (2012b).

[87] De Gennes & Prost (1994); Rey & Herrera-Valencia (2012a), Rey & Herrera-Valencia (2012b).

[88] De Gennes and Prost (1994)





2.8.2. Cristales líquidos biológicos

Los cristales líquidos biológicos son abundantes en los seres vivos. Por consiguiente, los cristales líquidos liotrópicos atraen la atención particular en el campo de la química biomimética. En particular, las membranas biológicas y las membranas de las células son una forma de cristal líquido.

Sus moléculas dispuestas en forma de barra (por ejemplo, los fosfolípidos o las lecitinas) son organizadas perpendicularmente a la superficie de la membrana, más la membrana es líquida y elástica.^[89]

Las moléculas del componente pueden fluir fácilmente, pero tienden a no salir de la membrana, y pueden desplazarse de un lado a otro de la membrana con alguna dificultad.

Estas fases del cristal líquido en la membrana pueden recibir e introducir las proteínas importantes como si fuesen libremente receptores "flotantes", o por fuera de la membrana. Muchas otras estructuras biológicas exhiben la conducta de cristal líquido.

Por ejemplo la solución concentrada de la proteína que es arrojada por una araña para generar seda de araña es, de hecho, una fase del cristal líquido.

El orden preciso de las moléculas en la seda es crítico para darle su conocida fuerza. El ADN y muchos polipéptidos conforman fases de cristal líquido.^[90]

2.8.2.1 Tipos de fase en los cristales líquidos

Los cristales líquidos dependen fuertemente de la temperatura ya que estos son una mesofase entre la fase cristal y la fase líquida, una primera clasificación de los cristales líquidos consiste en la temperatura de operación y el grado de ordenamiento.

2.8.2.1.1 Fase nemática

Una de las fases de cristales líquidos más comunes es la nemática.

La palabra nemática viene del griego $\eta\mu\alpha$ (nema), que significa "hilo". Este término se origina de los defectos topológicos que se observan en los cristales líquidos nemáticos, los cuales se denominan formalmente como "disclinaciones".

^[89] Rey & Herrera-Valencia (2012a) Rey & Herrera-Valencia (2012b).

^[90] Rey & Herrera-Valencia (2012a) Rey & Herrera-Valencia (2012b).



Los nemáticos también exhiben defectos topológicos llamados “erizos”. En una fase nemática, las moléculas orgánicas calamíticas o con forma de vara no tienen un orden posicional, pero se alinean automáticamente para tener un orden direccional de largo alcance con sus ejes longitudinales más o menos paralelos; por lo tanto, las moléculas son libres de fluir y el centro de las posiciones de sus masas se distribuyen al azar como en un líquido, pero mantienen su origen direccional de largo alcance.

La mayoría son cristales líquidos nemáticos mono axiales: tienen un eje que es más largo y preferido, con los otros dos siendo equivalentes (pueden aproximarse como cilindros o varillas).

En la Fig. (9) Se ilustra el ordenamiento de las moléculas.

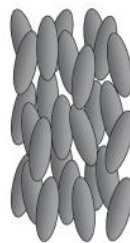


Figura 9. “Ordenamiento de las moléculas en la fase nemática.”

Sin embargo, algunos cristales líquidos son nemáticos biaxiales, lo que significa que, además de la orientación de su eje largo, también se orientan a lo largo de un eje secundario.

Los nemáticos tienen una fluidez similar a la de los líquidos comunes (isotrópicos) pero pueden ser fácilmente alineados por un campo eléctrico o magnético externo.

Los cristales líquidos nemáticos alineados tienen las propiedades ópticas de los cristales mono axiales y esto los hace muy útiles en pantallas de cristal líquido (LCD).

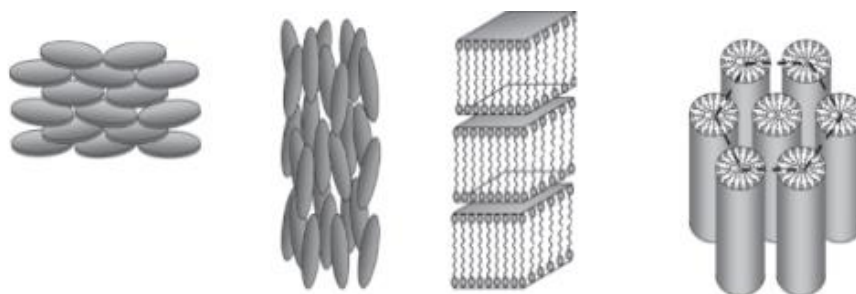


Figura 10. “Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de temperatura.”



2.9 Planteamiento del problema

El sistema físico que se estudia es descrito a continuación: Para modelar el efecto del cambio en la curvatura de la membrana flexoeléctrica por efecto de un campo eléctrico, se propone un capilar de longitud $z = 2L$ y radio $r = a$.

Una membrana flexoeléctrica se coloca en medio del capilar en $z=L$ y la región $(L, 2L)$ se llena de un líquido viscoelástico y en la parte inferior otro líquido viscoelástico en la región $(0, L)$.

Las propiedades materiales son:

- (i) Viscosidad.
- (ii) Tiempo de relajación de Maxwell.
- (iii) Densidad.

Las propiedades materiales para el líquido en la parte superior (Top) son etiquetadas como $\{\eta_t, \lambda_t, \rho_t\}$ y en la parte inferior (Bottom) como $\{\eta_b, \lambda_b, \rho_b\}$, respectivamente.

En este problema se va a considerar que los mecanismos inerciales (Reynolds bajos) y las fuerzas de cuerpo (volumen) son despreciables.

En medio del capilar $z= L$, se adhiere una membrana flexoeléctrica circular, es decir una membrana que por efecto de un campo externo (Eléctrico) se deforma y oscila en torno a una posición de equilibrio.

El radio del capilar es $r = a$ y la presión en la parte superior e inferior es constante e igual a P_0 .

En la siguiente figura se muestra de manera ilustrada el planteamiento de problema.

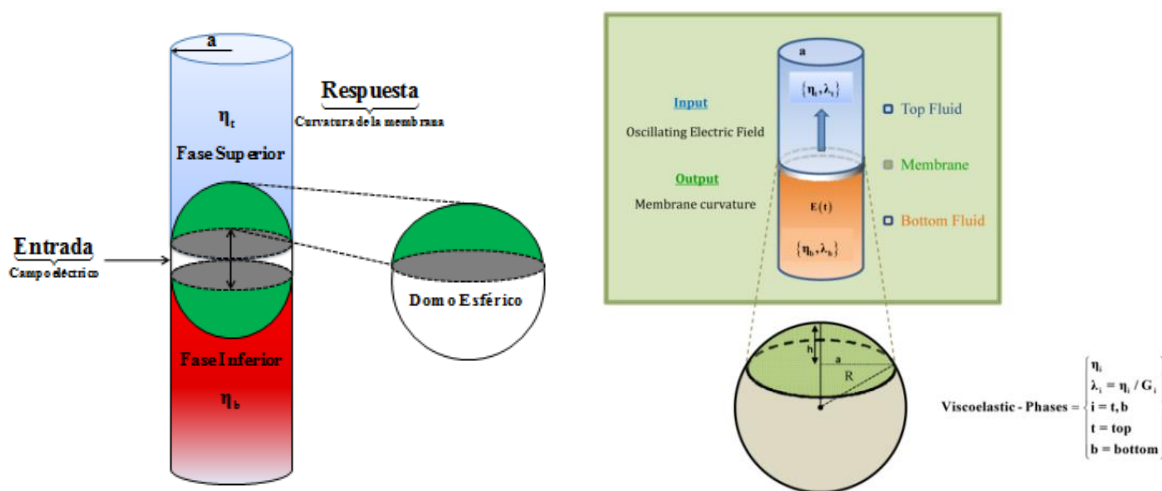


Figura 11. “Esquema ilustrativo de la geometría y la membrana flexoeléctrica.”





En la Fig. (11) se ilustra el capilar de radio $r = a$ y longitud $z = 2L$ con la membrana flexoeléctrica inmersa.

El campo eléctrico E distorsiona la membrana y la evolución de la membrana con el tiempo, induce un flujo volumétrico debido a la dos fases viscosas con viscosidades $\{\eta_t, \eta_b\}$ y densidades $\{\rho_t, \rho_b\}$.

Suponemos que el campo eléctrico aplicado deforma la membrana en forma de domo esférico de altura h y radio $r = R$, como se muestra en la Fig. (11) y crea una oscilación entre las fases viscoelásticas.

Las etapas más importantes de este sistema son descritas a continuación:

- a) El campo eléctrico a través de la fase viscoelásticas inferior induce que la membrana flexoeléctrica oscile lo que implica que su curvatura promedio cambie y genere una diferencia de presión en la membrana.
- b) El decremento en la rapidez de la membrana induce un flujo volumétrico.
- c) El flujo volumétrico es generado por una diferencia de presiones en la parte superior e inferior.

2.9.1 Análisis de proceso

Las siguientes restricciones son impuestas con el fin de modelar el sistema:

- Proceso en estado estacionario o régimen permanente (Ninguna propiedad, atributo o característica del sistema depende del tiempo).
- Fluido incompresible (densidad constante, puesto que no depende de la posición y del tiempo).
- Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .
- El sistema de coordenadas es colocado en el centro del tubo, en donde el eje axial coincide con la velocidad del fluido.
- Simetría cilíndrica (Ningún atributo o característica del sistema depende de la coordenada angular θ , $\forall \theta \neq f(\theta)$).
- La reología y el flujo son caracterizados por el modelo constitutivo de Ellis, el cual es una generalización de los modelos newtonianos y ley de potencia.
- Los mecanismos inerciales de la ecuación de movimiento son despreciables
- El termino convectivo de la ecuación de energía se desprecia.



Capítulo 3

Modelos Matemáticos

En este apartado del proyecto se enlistan los modelos matemáticos electroreológicos, la ecuación de momento y conservación de masa, la dinámica oscilatoria. Los cálculos energéticos, potencia disipada, la energía elástica almacenada y el factor de selectividad Q.

3.1 Modelos matemáticos electroreológicos

3.1.1 Modelo estático

La relación básica entre la curvatura promedio y el campo eléctrico aplicado en membranas flexoelectricas, ha sido presentada y discutida profundamente por Rey (2005, 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008) y Abou-Dakka et al. (2012), matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\left(\frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L} \right) H(t) = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} E(t) \quad (3.1)$$

La Ec. (3.1) es la relación básica para estos sistemas, la cual se basa en la relación entre la curvatura promedio y el campo eléctrico. Nótese que el paréntesis del lado izquierdo de la igualdad, describe la elasticidad de la membrana a través de las propiedades materiales asociados a los módulos de torsión y de flexión $\{k_c, \bar{k}_c\}$, y la tensión interfacial. El miembro derecho de la Ec. (3.1) describe los mecanismos eléctricos a través de la carga en el sistema C_f y variables geométricas $\{L, \mathfrak{S}\}$.

3.1.2 Modelo viscoso

La Ec. (3.1) ha sido base para estudiar el efecto de las membranas flexoelectricas en medios viscosos y viscoelásticos (2005, 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008, Abou-Dakka et al. 2012).

Para estudiar estos sistemas, Rey (2008) y Abou-Dakka et al. (2012), propusieron un capilar de longitud $z = 2L$ y radio $r = a$, la parte superior inmersa con un fluido viscoso de viscosidad η_i y la parte inferior con una viscosidad η_b .

La membrana flexoelectrica es colocada en medio del capilar, en donde la curvatura de la membrana cambia por efecto de un campo eléctrico aplicado a la parte inferior del capilar. ^[91] El modelo resultante, es una ecuación diferencial de primer orden para la curvatura promedio en función del campo eléctrico y las propiedades materiales, i.e.

^[91] Rey 2008, Abou-Dakka et al. (2012).



$$(\eta_t + \eta_b) \frac{dH(t)}{dt} + \left(\frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L} \right) H(t) = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} E(t) \quad (3.2)$$

En la Ec. (3.2), $\Sigma_{\eta} = \eta_t + \eta_b$ es la viscosidad total del sistema y d/dt es el operador derivada temporal, que describe la evolución de la curvatura promedio, y físicamente da información acerca de la rapidez con la que oscila la membrana. ^[92]

3.1.3 Modelo viscoso no lineal

Este modelo fue extendido a un modelo no lineal tomando en cuenta que la longitud L es una función de $h(t)$, i.e., $L = h(t)$, por lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial no lineal, la cual fue resuelta por *Rey (2008)* mediante técnicas perturbativas.

$$2\eta a^2 H(t) \frac{dH(t)}{dt} + (2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}) H(t) = C_f \mathfrak{I} E(t) \quad (3.3)$$

nótese, que la Ec. (3.3) no contiene una longitud característica axial. Aquí se supuso que las dos fases viscosas tienen el mismo valor, por lo que $\Sigma_{\eta} = \eta_t + \eta_b = 2\eta$.

El siguiente paso fue extender el modelo viscoso incorporando los mecanismos elásticos, mediante el modelo de Maxwell. ^[93]

3.3.4 Modelo viscoelástico

Abou-Dakka et al. (2012) analizaron este mismo problema, para dos fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal generando el siguiente modelo de segundo orden lineal de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \left(b_2 \frac{d^2}{dt^2} + b_1 \frac{d}{dt} + b_0 \right) H(t) &= \left(a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) E(t) \\ b_2 &= \eta_t \lambda_b + \eta_b \lambda_t + \lambda_t \lambda_b \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L} \\ b_1 &= \eta_t + \eta_b + (\lambda_t + \lambda_b) \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L} \\ b_0 &= \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L} \\ a_2 &= \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \lambda_t \lambda_b, \quad a_1 = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} (\lambda_t + \lambda_b), \quad a_0 = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \end{aligned} \quad (3.4)$$

^[92] Rey (2008); Rey et al. (2012)

^[93] Abou-Dakka et al. (2012)



Este modelo incluye como casos particulares los modelos anteriores, cuando los tiempos de relajación son cero, i.e., $\lambda_t = \lambda_b = 0$, por lo que se recupera el modelo viscoso. Si los tiempos de relajación y las viscosidades son cero, i.e. $\lambda_t = \lambda_b = 0$; $\eta_t = \eta_b = 0$, se recupera el caso flexoeléctrico. [94]

Por otra parte *Herrera-Valencia & Rey (2014)* demostraron que el modelo viscoelástico de *Abou-Dakka et al. (2012)*, es equivalente a un sistema mecánico y que el sistema físico campo eléctrico-curvatura promedio puede ser representado mediante una función de transferencia compleja con retroalimentación, el cual es gobernado por los mecanismos reológicos y flexoeléctricas a través de las propiedades materiales en el sistema. Además, se demostró que los efectos inerciales con llevan a tener varios picos resonantes como los encontrados en otros sistemas físicos. [95]

Finalmente, los efectos resonantes, son un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas, elásticas de la membrana y flexoeléctricas. Las curvas resonantes, son obtenidas cuando hay un contraste entre las fases viscoelásticas, i.e., una de ellas es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica, la viscosidad de bulto debe ser la máxima en el sistema, la elasticidad de la membrana debe ser pequeña en comparación con la elasticidad de bulto. [96]

3.2 Ecuación de momento y conservación de masa

La membrana es descrita mediante un balance de fuerzas entre las eléctricas, la diferencia de presiones en la membrana y la fuerza restauradora asociada con la elasticidad de la membrana flexoeléctrica.

La ecuación fundamental puede ser descrita de la siguiente manera:

$$(C_f \mathfrak{S}) \mathbf{E}(t) = \Delta p(z = L, t) + \left[2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S} \right] H(t) \quad (3.5)$$

La Ec. (3.5) es un balance de fuerzas entre la fuerza eléctrica, las fuerzas del bulto debido a la disipación y la fuerza elástica del sistema basada en la recuperación de la membrana.

El factor geométrico indica el área deformada debido al campo eléctrico $\mathbf{E}(t)$ aplicado en la dirección axial de la geometría (Fig. 11).

Se sabe que la fuerza eléctrica oscilante $\mathbf{F}_E(t)$ es:

$$\mathbf{F}_E(t) = \left(c_f \mathfrak{S} \right) \mathbf{E}(t) = c_f \left(\frac{8}{a^2} \right) \mathbf{E}(t) \quad (3.6)$$

[94] Abou-Dakka et al. (2012)

[95] Herrera-Valencia & Rey (2014)

[96] Abou-Dakka et al. (2012); Herrera-Valencia & Rey (2014).





Directamente proporcional al campo eléctrico aplicado y un coeficiente C_f el cual, está asociado con las propiedades eléctricas del sistema.

La diferencia de presiones en la membrana i.e., Δp ($z = L$, t), para esto se aplica un balance de presiones entre la parte inferior del capilar y la membrana.

A partir de la ecuación de momento (Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo), se tiene la siguiente expresión matemática para la presión en la parte superior del sistema:

3.2.1 Membrana capilar superior:

$$p_t = p_0 + \left\{ \rho_t \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \eta_t \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right\} (2L-z) \quad (3.7)$$

De la misma manera, para la inferior y la membrana se tiene:

3.2.2 Membrana capilar inferior:

$$p_b = p_0 - \left\{ \rho_b \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \eta_b \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right\} z \quad (3.8)$$

El cambio de presión evaluado en $z = L$, i.e. Δp ($z = L$, t), está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta p = \left\{ \left(\eta_t + \eta_b \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \left(\rho_t + \rho_b \right) \frac{\partial v_z}{\partial t} \right\} L \quad (3.9)$$

Sustituyendo la Ec. (3.9) en el balance de fuerzas (Ec. 3.5).

$$\left(\eta_t + \eta_b \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \left(\rho_t + \rho_b \right) \frac{\partial v_z}{\partial t} = \left(C_f \mathfrak{I} \right) E(t) - \left[2\gamma_0 + \left(2k_c + \bar{k}_c \right) \mathfrak{I} \right] H(t) \quad (3.10)$$

La Ec. (3.10) es una ecuación diferencial parcial que describe los cambios temporales y espaciales de la velocidad en función del campo eléctrico aplicado y la curvatura promedio de la membrana a través de las propiedades flexoeléctricas y elásticas de la membrana.





La rapidez con que evoluciona la membrana por lo que se tiene la siguiente relación:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r dr d\theta = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (3.11)$$

Una vez que la Ec. (3.10) se resuelve suponiendo que los efectos inerciales son despreciables y sustituyendo el resultado en la Ec. (3.11) se tiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para la curvatura promedio:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\bar{\eta}} \frac{dH(t)}{dt} + MH(t) &= \frac{c_f \mathfrak{I}}{4L} E(t) \\ \Sigma_{\bar{\eta}} &= \eta_t + \eta_b \\ 4ML &= (2\gamma_o + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dividiendo por la viscosidad total la ecuación dinámica de la membrana, derivando con respecto al tiempo y multiplicando por $-1/2 \pi a^4$, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \right) + \frac{M}{\Sigma_{\bar{\eta}}} \left(-\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \right) = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{c_f \mathfrak{I} / 4L}{\Sigma_{\bar{\eta}}} \frac{dE(t)}{dt} \quad (3.13)$$

Recordando que el flujo volumétrico; se puede expresar como:

$$Q(t) = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (3.14)$$

Finalmente la ecuación gobernante del flujo volumétrico en función del campo eléctrico está determinada por:

$$\frac{d}{dt} Q(t) + \frac{M}{\Sigma_{\bar{\eta}}} Q(t) = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{c_f \mathfrak{I} / 4L}{\Sigma_{\bar{\eta}}} \frac{dE(t)}{dt} \quad (3.15)$$

Si se define el tiempo característico del sistema como el cociente entre la viscosidad total y la elasticidad de la membrana como: $\lambda = \Sigma_{\bar{\eta}} / M$, la ecuación diferencial toma la forma:

$$\frac{d}{dt} Q(t) + \frac{1}{\lambda} Q(t) = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{c_f \mathfrak{I} / 4L}{\Sigma_{\bar{\eta}}} \frac{dE(t)}{dt} \quad (3.16)$$





El modelo electroreológico que se dedujo en la Ec. (3.16), es válido tomando en cuenta las siguientes restricciones físicas:

- Es válido solamente para campos eléctricos de baja amplitud, debido a que para grandes amplitudes los efectos de compresibilidad juegan un papel importante en el sistema.
- Los mecanismo de transferencia de calor se desprecian por lo que suponemos que el proceso es isotérmico, es decir que ninguna propiedad física o físico-química del sistema es función de la temperatura.
- Es válido para deformaciones bajas, es decir en el régimen de viscoelasticidad lineal.
- Los efectos gravitacionales no se consideran en el balance de momento.
- Los mecanismos inerciales son despreciables.
- El espesor de la membrana es despreciable.

En la siguiente sección, probaremos las bondades de nuestro modelo cuando el campo eléctrico toma la forma más simple que es la de una función sinusoidal.

3.3 Estado no estacionario

Para obtener una solución analítica del problema de valor inicial, se propone la siguiente función para el campo eléctrico $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda} Q(t) = \frac{\pi c_f \mathfrak{I} a^4 / 4LE_0}{2 \Sigma_{\bar{\eta}}} \omega \text{Sen}(\omega t)$$

(3.17)

Multiplicando por el factor integrante:

$$\text{Exp}\left[\frac{t}{\lambda}\right] \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda} Q(t) \text{Exp}\left[-\frac{t}{\lambda}\right] = -\frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \mathfrak{I} E_0}{4L \Sigma_{\bar{\eta}}} \omega \text{Sen}(\omega t) \text{Exp}\left[-\frac{t}{\lambda}\right] \quad (3.18)$$

La expresión anterior se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\text{Exp}\left[\frac{t}{\lambda}\right] Q(t) \right) = \frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \mathfrak{I} E_0}{4L \Sigma_{\bar{\eta}}} \omega \text{Sen}[\omega t] \text{Exp}\left[\frac{t}{\lambda}\right] \quad (3.19)$$

Integrando con respecto al tiempo, se tiene lo siguiente:



$$Q(t) = -\frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \Im E_0}{4L\Sigma_{\eta}^-} \frac{\omega\lambda(\lambda\omega\text{Cos}[t\omega] + \text{Sin}[t\omega])}{1+\lambda^2\omega^2} + C\text{Exp}\left[-\frac{t}{\lambda}\right] \quad (3.20)$$

Aplicando la condición inicial $Q(t=0) = Q_0$, se obtiene el valor de la variable de la constante C:

$$C = Q_0 + \frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \Im E_0}{4L\Sigma_{\eta}^-} \frac{\lambda^2\omega^2}{1+\lambda^2\omega^2} \quad (3.21)$$

Sustituyendo en la Ec. general. Se obtiene la solución particular:

$$Q(t) = -\frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \Im E_0}{4L\Sigma_{\eta}^-} \frac{\omega\lambda(\lambda\omega\text{Cos}[t\omega] + \text{Sin}[t\omega])}{1+\lambda^2\omega^2} + \left(Q_0 + \frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \Im E_0}{4L\Sigma_{\eta}^-} \frac{\lambda^2\omega^2}{1+\lambda^2\omega^2} \right) \text{Exp}\left[-\frac{t}{\lambda}\right] \quad (3.22)$$

Para simplificar la expresión anterior, se propone el siguiente conjunto de variables adimensionales:

$$\omega^* = \lambda\omega$$

$$t^* = t/\lambda$$

$$Q^*(t^*) = \frac{Q(t^*)}{Q_{em}} \quad (3.23 \text{ a-d})$$

$$Q_{em} = \frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \Im E_0}{4L\Sigma_{\eta}^-}$$

En las variables adimensionales se ha utilizado como flujo volumétrico característico:

$$Q_{em} = \frac{\pi}{2} a^4 \frac{c_f \Im E_0}{4L\Sigma_{\eta}^-} \quad (3.24)$$

La expresión para la curvatura en función del tiempo, se puede expresar en término de una curvatura reducida:

$$Q^*(t^*; \omega^*) = \frac{\omega^* (\omega^* \text{Cos}[t^* \omega^*] + \text{Sen}[t^* \omega^*])}{1 + \omega^{*2}} + \left(Q_0^* - \frac{\omega^{*2}}{1 + \omega^{*2}} \right) \text{Exp}[-t^*] \quad (3.25)$$





Esta ecuación contiene dos contribuciones, las cuales se pueden separar en una oscilatoria y otra de tipo exponencial decreciente dominada por un tiempo característico el cual, depende de las propiedades elásticas y viscosas de la membrana y de las fases viscosas respectivamente.

3.4 Dinámica oscilatoria

$$\frac{dQ^*(t^*)}{dt^*} + Q^*(t^*) = \omega^* \text{Sen}(\omega^* t^*) \quad (3.26)$$

Usando las variables adimensionales se tiene lo siguiente:

$$\frac{dQ^*(t^*)}{dt^*} + Q^*(t^*) = \omega^* \text{Sen}(\omega^* t^*) \quad (3.27)$$

Proponiendo que la curvatura se puede descomponer en término de una contribución oscilatoria en fase con el coseno y desfasada del seno, se tiene lo siguiente:

$$Q^*(t^*; \omega^*) = Q_{io}^*(\omega^*) \text{Cos}(\omega^* t^*) + Q_{oi}^*(\omega^*) \text{Sen}(\omega^* t^*) \quad (3.28)$$

Y la derivada de esta función oscilatoria, puede ser descompuesta como:

$$\frac{dQ^*(t^*; \omega^*)}{dt^*} = -\omega^* Q_{io}^*(\omega^*) \text{Sen}(\omega^* t^*) + \omega^* Q_{oi}^*(\omega^*) \text{Cos}(\omega^* t^*) \quad (3.29)$$

Al sustituir la derivada y la función propuesta en la ecuación dinámica por lo que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (Q_{io}^*(\omega^*) + \omega^* Q_{oi}^*(\omega^*)) \text{Cos}(\omega^* t^*) &= -\omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*) \\ (-\omega^* Q_{io}^*(\omega^*) + Q_{oi}^*(\omega^*)) \text{Sen}(\omega^* t^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.30 \text{ a-b})$$

Igualando los coeficientes, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q_{io}^*(\omega^*) + \omega^* Q_{oi}^*(\omega^*) &= -\omega^* \\ -\omega^* Q_{io}^*(\omega^*) + Q_{oi}^*(\omega^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31 \text{ a-b})$$



Resolviendo el sistema algebraico se tiene lo siguiente:

$$Q_{io}^*(\omega^*) = -\frac{\omega^*}{1+\omega^{*2}} \quad (3.32 \text{ a-b})$$
$$Q_{oi}^*(\omega^*) = \frac{\omega^{*2}}{1+\omega^{*2}}$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$Q^*(t^*, \omega^*) = |Q_{io}^*(\omega^*)| \text{Cos}(\omega^* t^*) + |Q_{oi}^*(\omega^*)| \text{Sen}(\omega^* t^*) = \left(\frac{\omega^*}{1+\omega^{*2}}\right) \text{Cos}(\omega^* t^*) + \left(\frac{\omega^{*2}}{1+\omega^{*2}}\right) \text{Sen}(\omega^* t^*) \quad (3.33)$$

Finalmente las expresiones más importantes desarrolladas en el presente trabajo se resumen a continuación.

El modelo dinámico que describe la evolución de la curvatura está dado por:

$$\frac{dQ^*(t^*)}{dt^*} + Q^*(t^*) = -\omega^* \text{Cos}(\omega^* t^*) \quad (3.34)$$
$$Q^*(0) = 0$$

La solución en estado transitorio toma la forma:

$$Q^*(t^*; \omega^*, Q_0^*) = \frac{\omega^* (\omega^* \text{Cos}[t^* \omega^*] + \omega^* \text{Sen}[t^* \omega^*])}{1+\omega^{*2}} + \left(Q_0^* - \frac{\omega^*}{1+\omega^{*2}}\right) \text{Exp}[-t^*] \quad (3.35)$$

La solución oscilatoria dinámica del sistema:





$$Q^*(t^*) = |Q_{io}^*(\omega^*)| \cos(\omega^* t^*) + |Q_{oi}^*(\omega^*)| \sin(\omega^* t^*)$$

$$|Q_{io}^*(\omega^*)| = \frac{\omega^*}{1 + \omega^{*2}} \quad (3.36 \text{ a-c})$$

$$|Q_{oi}^*(\omega^*)| = \frac{\omega^{*2}}{1 + \omega^{*2}}$$

3.5 Cálculos energéticos

A partir de esto se calculan los módulos de curvatura, la potencia disipada y la energía elástica promedio. Se calcula además el factor de selectividad $\bar{Q}(\bar{\omega})$, el cual es un cociente entre la energía elástica y la potencia disipada en el sistema por el contacto de las fases viscoelásticas.

Es importante resaltar, que las cantidades clave para la descripción del sistema son la potencia liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana $\bar{P}(\bar{\omega})$, la energía elástica almacenada por la membrana $\bar{E}(\bar{\omega})$ y la relación de estas cantidades conocido como factor de selectividad $\bar{Q}(\bar{\omega})$.

3.6 Potencia disipada

La potencia liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana puede ser calculada por medio de una integral promediando sobre un periodo, y se define como el producto del campo eléctrico y el flujo volumétrico.

Nótese, que el flujo volumétrico puede ser expresado en términos de la evolución de la curvatura promedio E_c (3.37).

$$P^*(\omega^*) = -\langle E^*(t^*) \cdot Q^*(t^*) \rangle = \langle \cos(\omega^* t^*) (|Q_{io}^*(\omega^*)| \cos(\omega^* t^*) + |Q_{oi}^*(\omega^*)| \sin(\omega^* t^*)) \rangle \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{2} |Q_{io}^*(\omega^*)| = \frac{1}{2} \frac{\omega^*}{1 + \omega^{*2}}$$

3.7 Energía elástica almacenada

La energía elástica promedio almacenada por la membrana se calcula utilizando el teorema del promedio integral sobre un periodo.



Físicamente, la energía elástica de la membrana, indica la cantidad de energía almacenada y se define como el cuadrado de la evolución de la curvatura promedio (Ec. 3.30):

$$E_m^*(\omega^*) = \langle H^*(\omega^*) \cdot H^*(\omega^*) \rangle = \langle H^{*2}(\omega^*) \rangle = \frac{1}{2} (H_{io}^{*2}(\omega^*) + H_{oi}^{*2}(\omega^*)) = \frac{1}{2} (H^*(\omega^*))^2 \quad (3.38)$$
$$H^*(\omega^*) = \sqrt{H_{io}^{*2}(\omega^*) + H_{oi}^{*2}(\omega^*)}$$

3.8 Factor de selectividad Q

El factor de selectividad Q es la relación entre la energía almacenada por la membrana y la potencia liberada hacia los fluidos viscoelásticos y es una medida de la importancia relativa del proceso disipativo y de almacenamiento de energía, este factor depende los mecanismos inerciales, elásticos y volumétricos a través de números adimensionales.

$$Q_B(\omega^*) = \frac{E_m^*(\omega^*)}{P^*(\omega^*)} = \frac{H^{*2}(\omega^*)}{\omega^* H_{oi}^*(\omega^*)} \quad (3.39)$$

La magnitud del factor $Q_B(\omega^*)$ define 3 regiones para las cuales toma el valor de:

$Q_B(\omega^*) > 1$; Almacenamiento elástico de la membrana > Potencia liberada a los fluidos

$Q_B(\omega^*) = 1$; Almacenamiento elástico de la membrana = Potencia liberada a los fluidos

$Q_B(\omega^*) < 1$; Almacenamiento elástico de la membrana < Potencia liberada a los fluidos



Capítulo 4

Análisis de Resultados y Simulaciones Computacionales

En este capítulo se muestra el modelo matemático dinámico lineal simulado en el software Wolfram Mathematica 10.0 y Microsoft Excel 2013 de la paquetería Microsoft Office 2013 para la exportación de los datos y obtención de los gráficos, aplicándolo al flujo volumétrico oscilatorio, módulos mecánicos, potencia disipada y flujo volumétrico transitorio.

4.1 Módulos Mecánicos

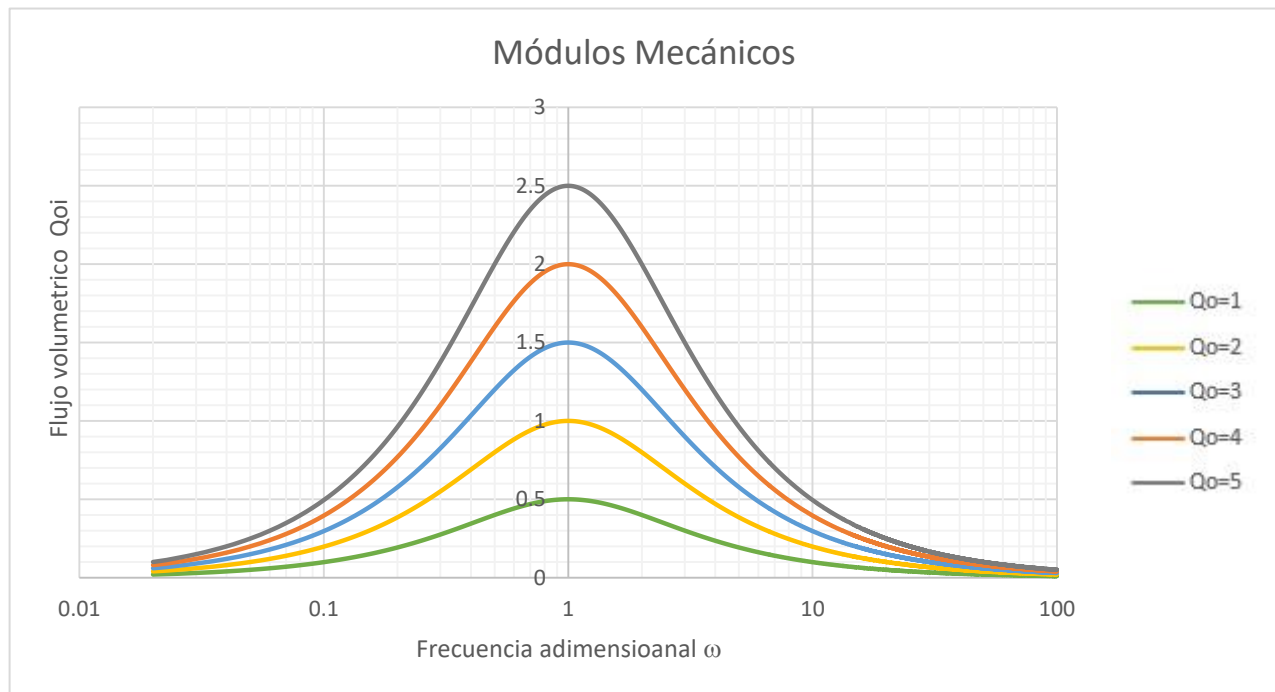


Figura 12. "Ilustra el flujo volumétrico adimensional en función del tiempo del proceso del sistema para diferentes valores de frecuencia adimensional."

La Fig. (12) simula el efecto del flujo oscilatorio en función de la frecuencia adimensional para distintos valores del flujo newtoniano. Matemáticamente, el sistema muestra un comportamiento constante a bajas frecuencias y para un valor crítico el sistema se comporta de manera monótona creciente hasta un valor máximo. Este, se debe a un acoplamiento entre las propiedades materiales en el sistema. A partir de otro valor crítico en la frecuencia, el flujo imaginario decrece monótonamente hasta un valor en donde es constantes e independiente de cualquier valor en la frecuencia adimensional. Nótese, que al aumentar el valor del flujo newtoniano las curvas resonantes aumentan su valor a estados de menor a mayor flujo.

Físicamente, el flujo volumétrico se ve afectado por el flujo newtoniano y el tiempo λ característica del sistema, asociado a los procesos elásticos, flexoeléctricos de la membrana y viscosos del fluido. Al aumentar su valor el flujo imaginario decrece hasta un valor cercano a cero respectivamente. Por último, biológicamente, el efecto del flujo volumétrico está ligado con la rapidez con la que la membrana oscila en los dos medios viscoelásticos.



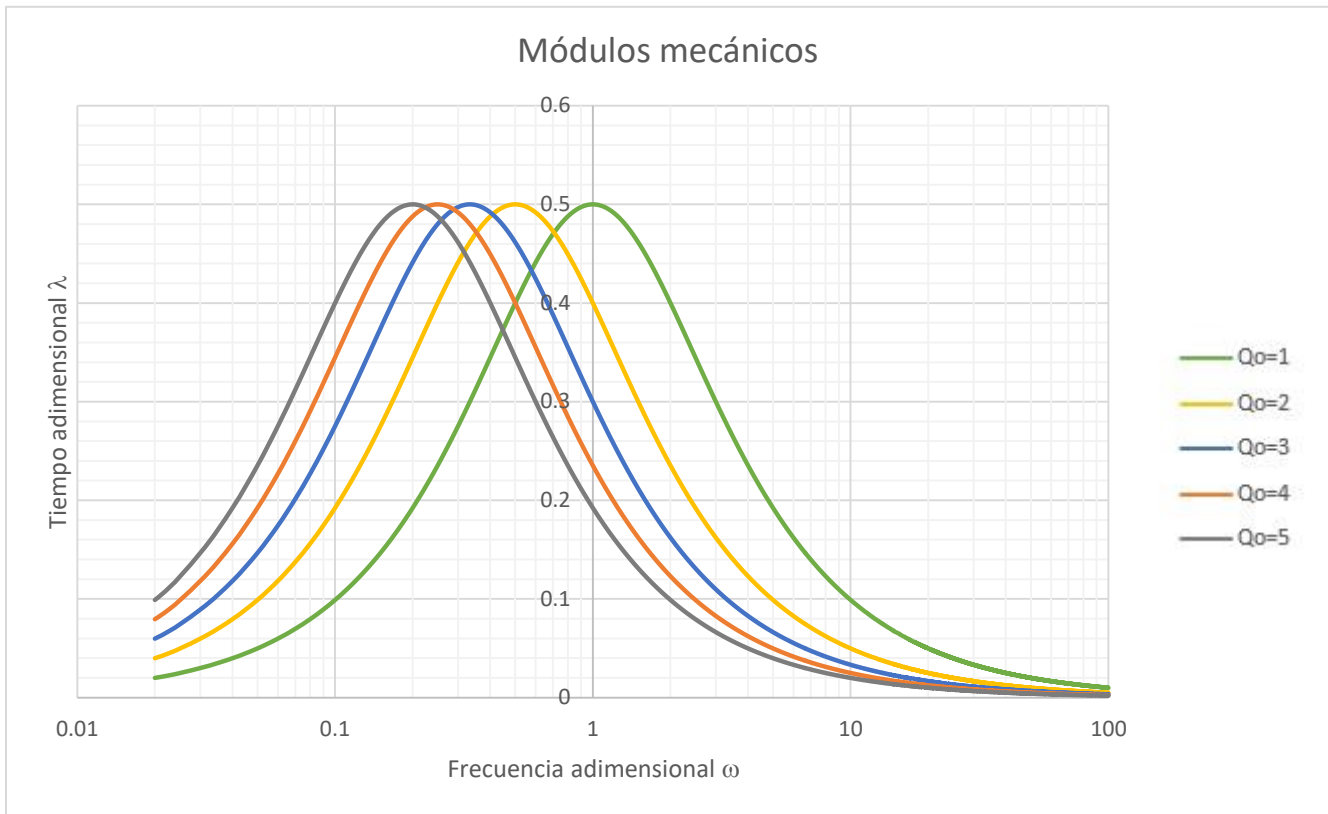


Figura 13. “Ilustra el tiempo adimensional en función del flujo volumétrico del sistema para diferentes valores de frecuencia adimensional”

La Fig. (13) simula el efecto del flujo imaginario en función de la frecuencia adimensional manteniendo el flujo newtoniano constante para distintos valores del tiempo característico del sistema. Básicamente, la descripción matemática es la misma que en la figura anterior (Fig.12). Sin embargo, físicamente la variación del tiempo característico asociado a los mecanismos, traslada las curvas a estados de mayor a menor frecuencia, i.e. el máximo en las curvas resonantes se obtiene a valores mucho menores en la frecuencia. Biológicamente este hecho podría representar una ventaja debido a que el sistema a menores valores en la frecuencia del flujo obtiene la máxima amplificación asociada a la energía resonante la cual, está íntimamente ligada con la amplificación del sonido.



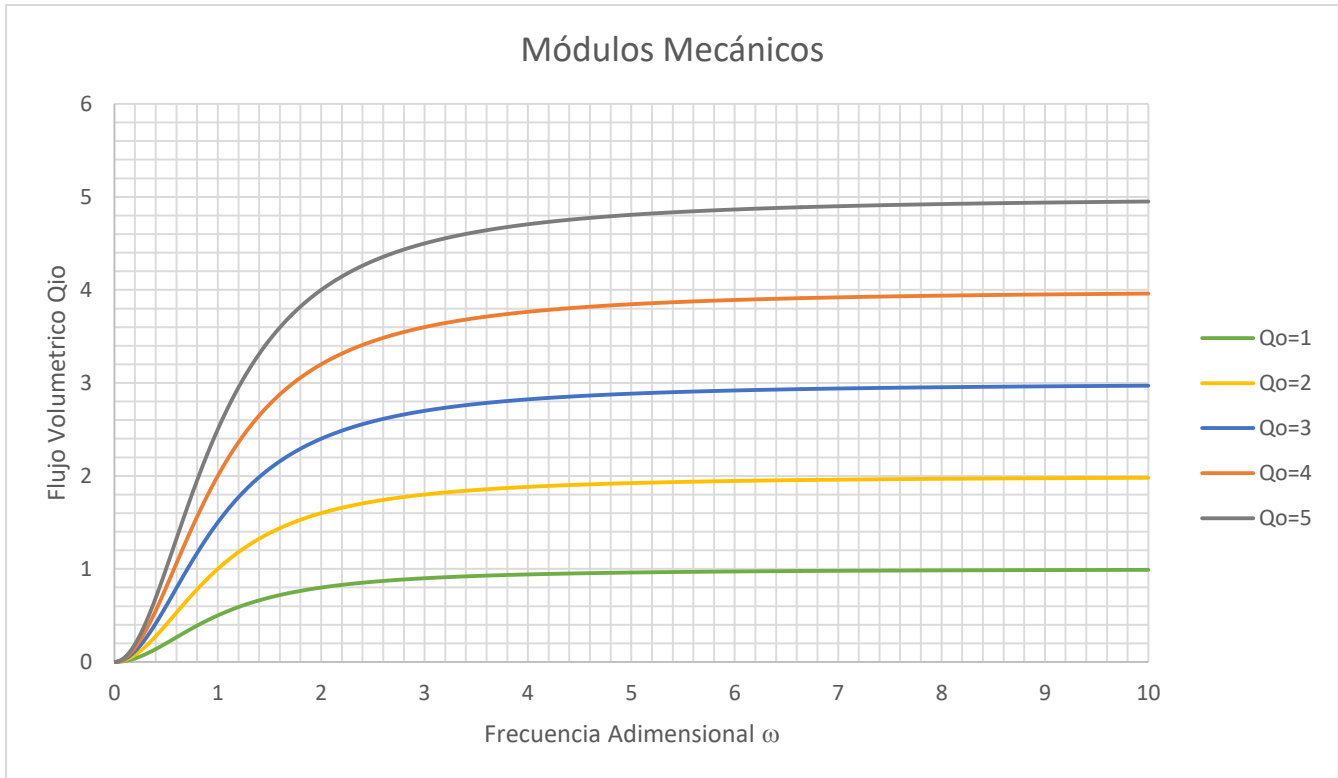


Figura 14. “Ilustra el flujo volumétrico adimensional en función del tiempo adimensional para diferentes valores de la frecuencia adimensional”

La Fig. (14) ilustra el comportamiento del flujo volumétrico oscilatorio real que se relaciona con el tiempo para diferentes valores de frecuencia adimensional. Matemáticamente, el sistema muestra un comportamiento monótono creciente de acuerdo al aumento de la frecuencia adimensional que a su vez varía con el tiempo.

Físicamente, el flujo volumétrico se afecta por la frecuencia adimensional característica del sistema, asociado a los módulos mecánicos del mismo, al aumentar el valor de la frecuencia adimensional el flujo volumétrico real aumenta hasta mantenerse ligeramente creciente.



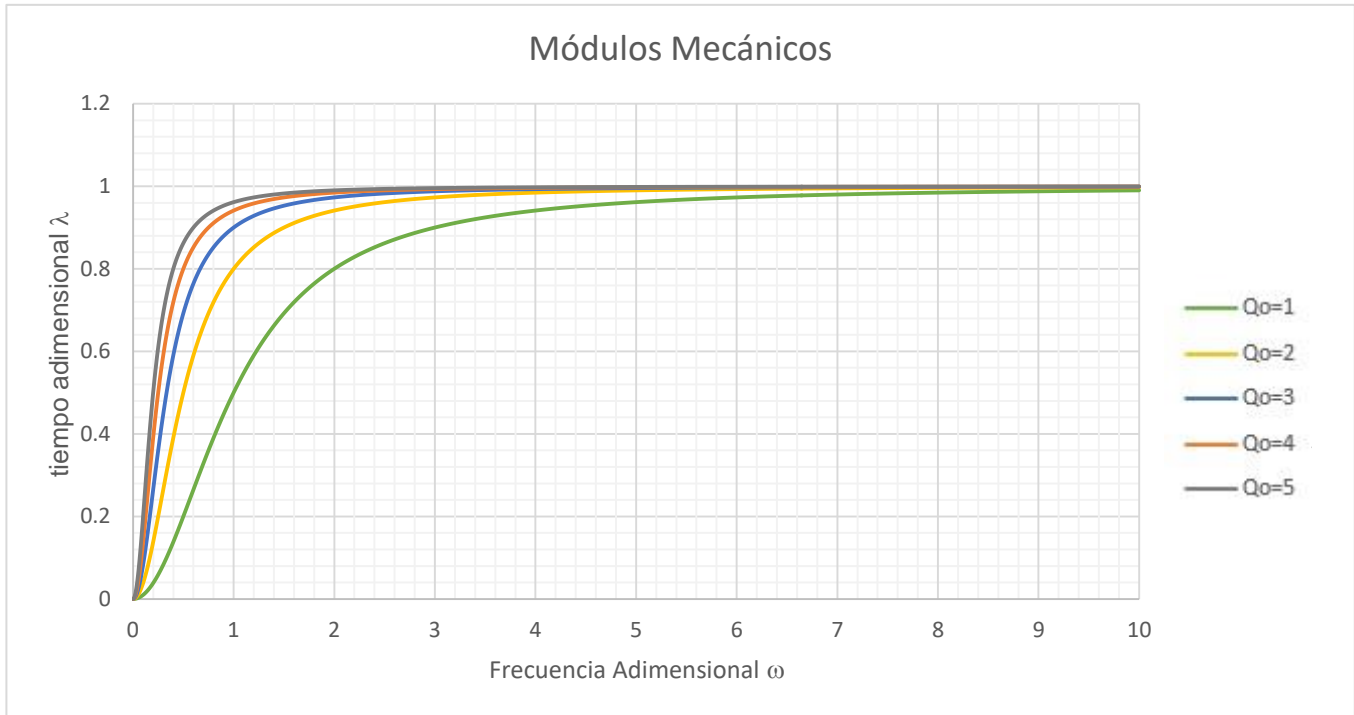


Figura 15. “Ilustra el tiempo adimensional del proceso para diferente valores de frecuencia adimensional del sistema”

La Fig. (15) muestra el comportamiento del tiempo característico adimensional del sistema en variación del flujo volumétrico y la frecuencia adimensional

Se observa que la Fig. (15) tiene un comportamiento creciente cóncavo, las curvas representativas del sistema muestra que con valores de flujo volumétrico bajo la frecuencia no será muy alta pero conforme avance el tiempo irá creciendo lentamente. Conforme se va aumentando el flujo volumétrico la frecuencia adimensional irá disminuyendo de intensidad lo cual hace que conforme pase el tiempo se comportara de manera constante.

4.2 Potencia Disipada

La potencia liberada hacia los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana, resulta del producto del campo eléctrico y el flujo volumétrico. También el flujo volumétrico puede ser expresado en términos de la evolución de la curvatura promedio

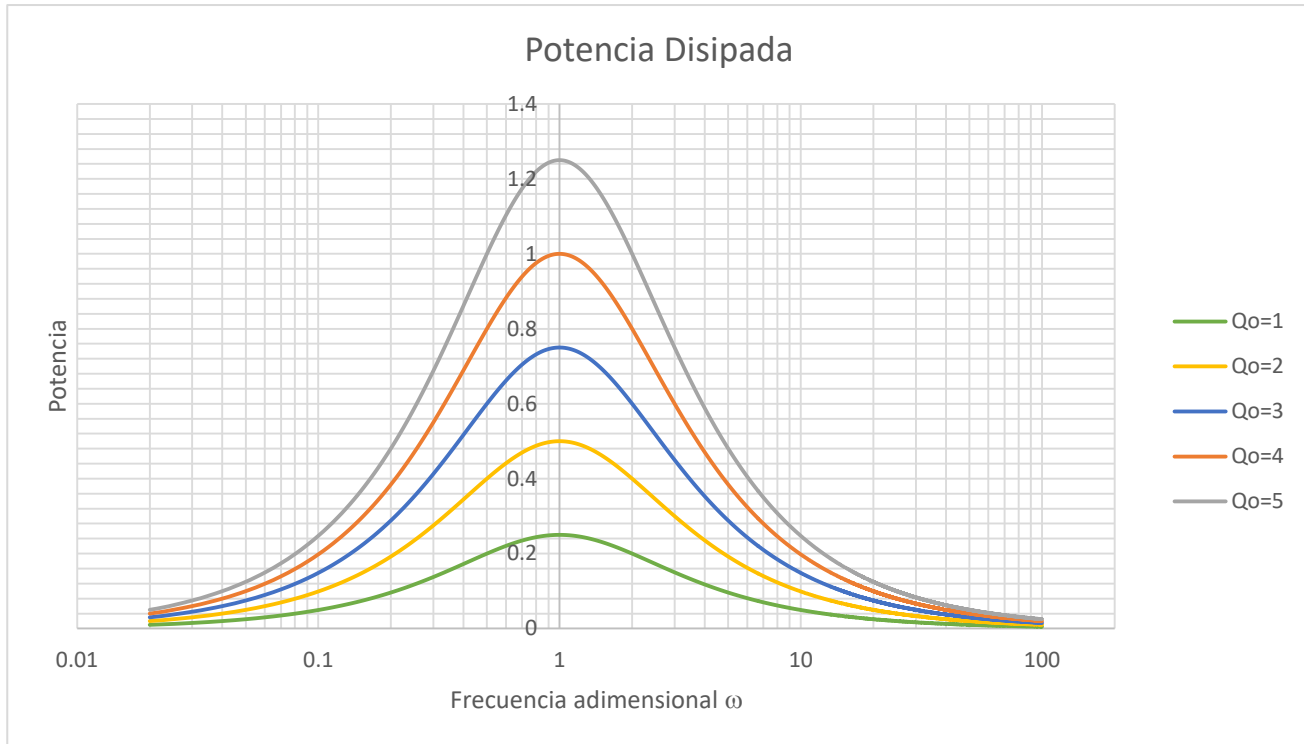


Figura 16. “Ilustra la potencia disipada del sistema para diferentes valores de frecuencia adimensional”

La Fig. (16) muestra el efecto de la potencia disipada para el fluido viscoelástico de la membrana, en efecto, la misma se encuentra en función con la frecuencia adimensional para distintos valores del flujo volumétrico.

Matemáticamente, se observa que conforme va aumentando la frecuencia, el flujo volumétrico va tomando valores ascendentes hasta llegar a un punto máximo, como ya se mencionó en La Fig (13) se debe al acoplamiento de las propiedades materiales del sistema; una vez pasando el punto mayor, la tendencia se vuelve decreciente hasta comportarse constante a bajas frecuencias y el flujo imaginario decrece monótonamente hasta un valor en donde es constantes e independiente de cualquier valor en la frecuencia adimensional.

Físicamente, la potencia disipada para el flujo volumétrico se ve afectado por el flujo newtoniano y el tiempo λ característica del sistema, asociado a los procesos elásticos, flexoeléctricos de la membrana y viscosos del fluido. Al aumentar su valor el flujo imaginario decrece.



4.3 Flujo Volumétrico Oscilatorio

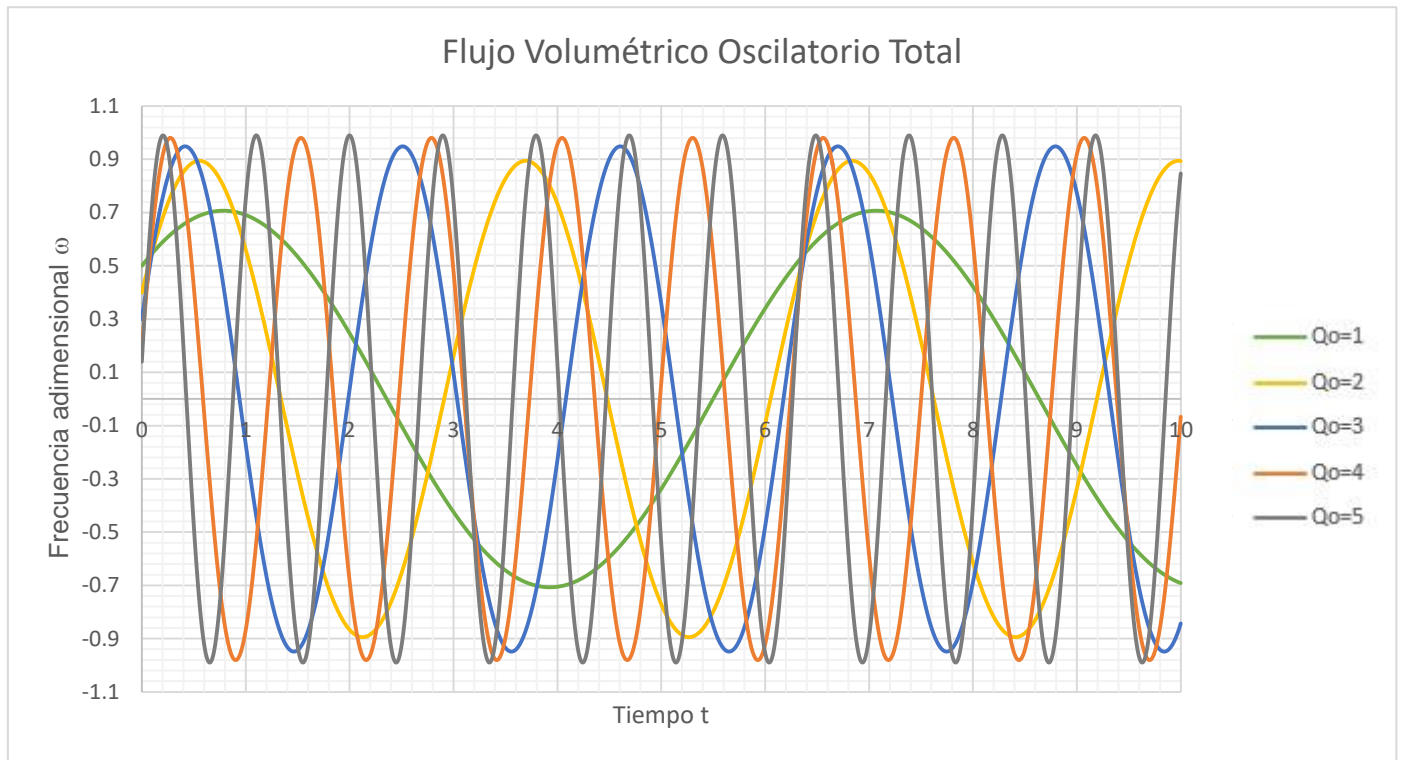


Figura 17. “Ilustra el flujo volumétrico oscilatorio en función de la frecuencia adimensional del sistema para diferentes valores de tiempo”

En la Fig. (17) se simula el efecto de la frecuencia adimensional en el flujo volumétrico oscilatorio total a diferentes valores de tiempo.

Matemáticamente, el sistema de flujo oscilatorio se comporta como una combinación de senos y cosenos, y los valores de las amplitudes están determinados por los módulos mecánicos. El efecto de la frecuencia es el de aumentar el número de ciclos en la ventana de observación que se muestra en la Fig. (17). Los máximos asociados a las amplitudes se deben a un acoplamiento entre las propiedades materiales de la membrana, es decir, los módulos de curvatura, propiedades flexoeléctricas y del medio es decir la viscosidad. Biológicamente, estos efectos combinados muestran la relevancia de las propiedades materiales en la oscilación y evolución de la membrana.



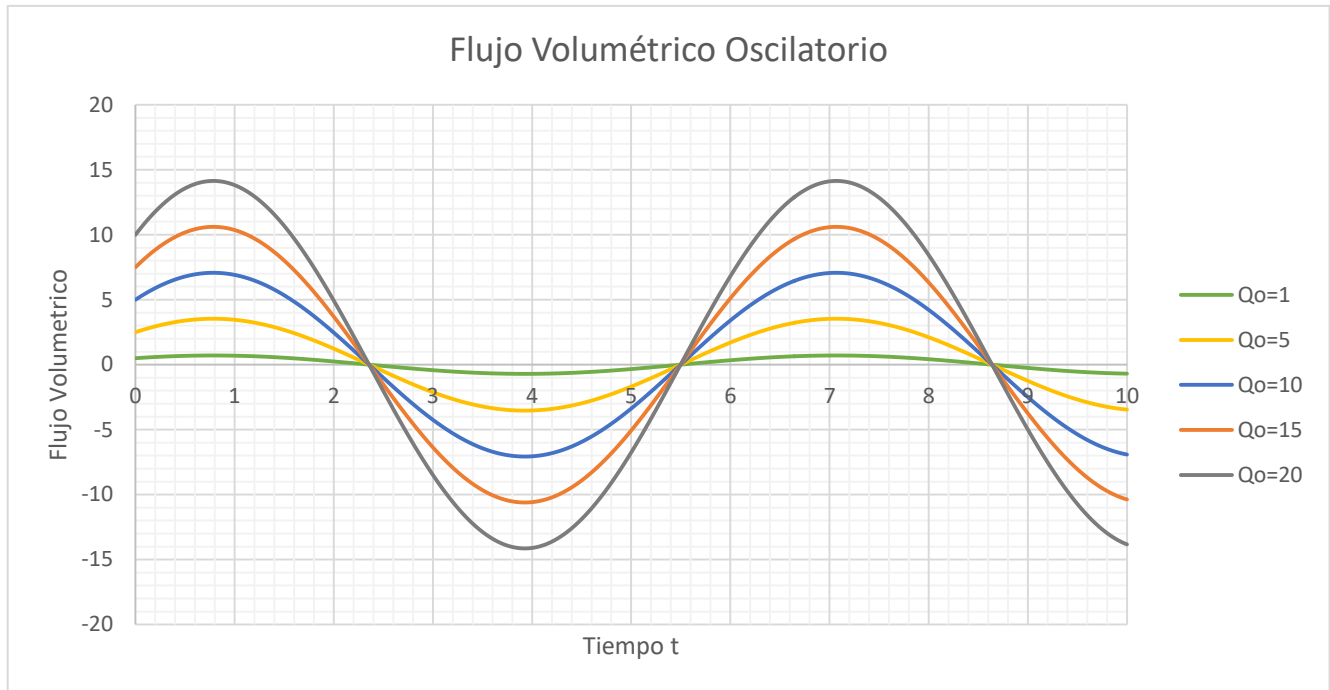


Figura 18. “Ilustra el flujo volumétrico oscilatorio total en función del flujo volumétrico del proceso para diferentes tiempos del sistema”

La Fig. (18) simula el efecto que tiene el flujo volumétrico oscilatorio como función del tiempo característico para una frecuencia adimensional fija.

Como en la Fig. (18), se observa el mismo comportamiento oscilatorio que el de la Fig. (17), sin embargo, se el tiempo característico asociado a los procesos viscosos y elásticos de la membrana. Es claro que para tiempos mayores a uno, el sistema presenta un valor de máximo y del mínimo se intensifica es decir aumenta y disminuye respectivamente. Físicamente, esto quiere decir que los efectos viscosos contribuyen al valor de máximo en las curvas oscilatorias asociadas a la respuesta mecánica. Por otra parte, si es menor de uno, la elasticidad de la membrana se impone a los mecanismos viscosos por lo que la respuesta mecánica en el sistema disminuye lo que visualmente se puede observar en la simulación de la Fig.(18).



4.4 Flujo Volumétrico Transitorio

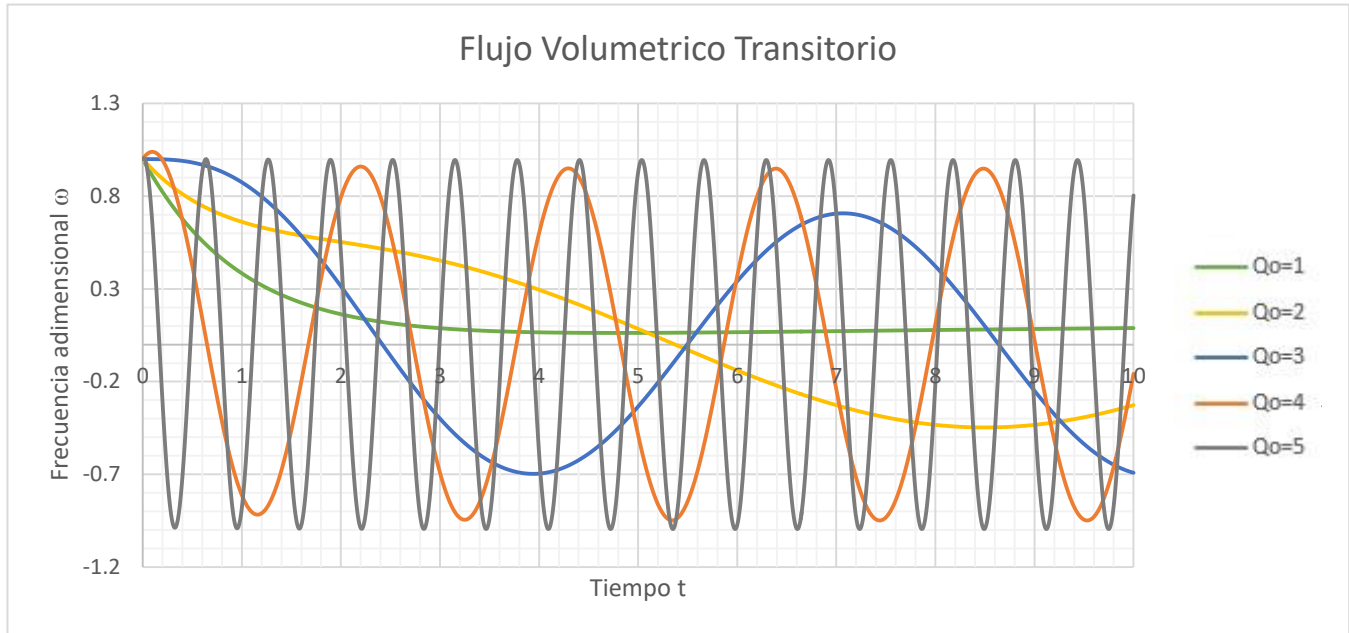


Figura 19. “Ilustra el comportamiento de la frecuencia adimensional del flujo volumetrico transitorio total del sistema para diferentes valores de tiempo”

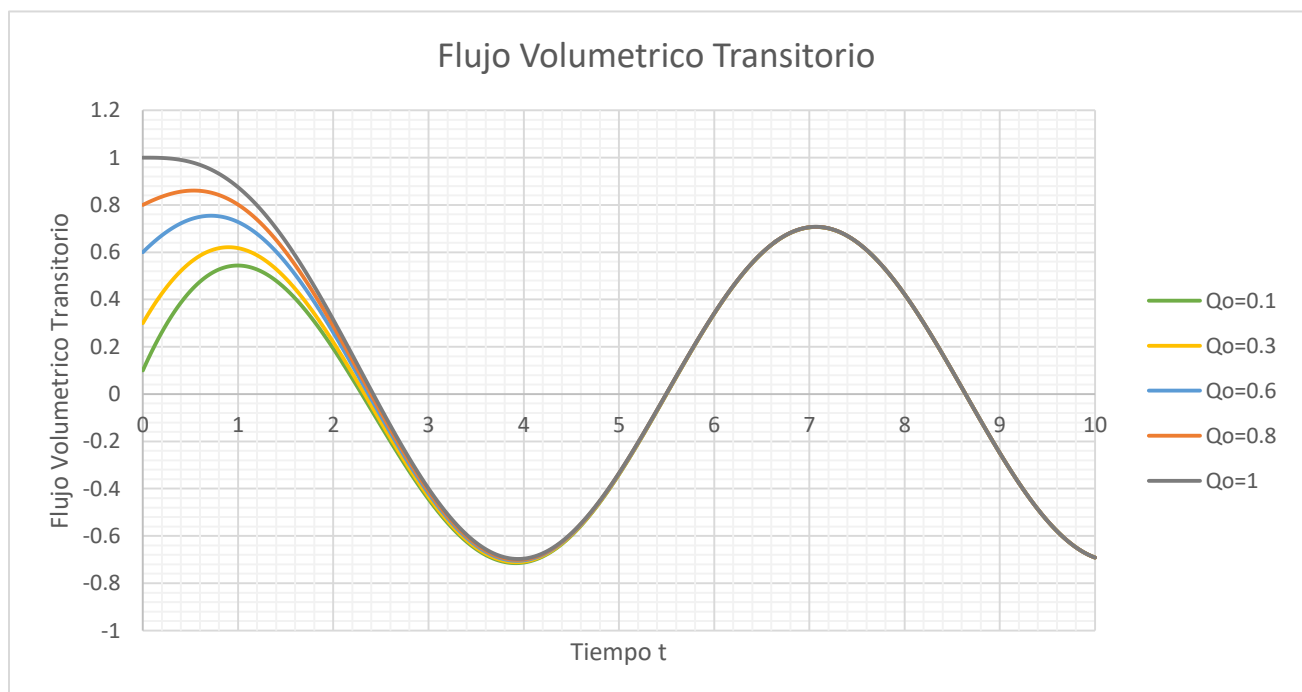


Figura 20. “Ilustra el flujo volumétrico transitorio a diferentes valores de tiempos del sistema”





En la Fig. (19) se simula el efecto de la frecuencia adimensional en el flujo volumétrico transitorio total a diferentes valores de tiempo. Matemáticamente, el sistema de flujo transitorio se comporta con una combinación lineal de senos y cosenos, las amplitudes están determinadas por los módulos mecánicos.

El efecto del campo eléctrico es aumentar el número de ciclos como se observa en la Fig. (19). Las propiedades de los materiales están asociadas a las amplitudes máximas que se deben a un acoplamiento entre sí. Nótese que para ciertos valores de la frecuencia menores a uno, i.e. en el régimen lineal el sistema es dominado por los mecanismos de relajación mientras que, cuando la frecuencia aumenta los efectos oscilatorios dominan lo cual es fácilmente verificable en la simulación de la Fig. (19). Biológicamente, estos efectos combinados muestran la relevancia de las propiedades materiales en el estado transitorio y la evolución del campo eléctrico en la membrana.

En la Fig. (20) se observa el flujo volumétrico transitorio en función del tiempo adimensional para diferentes valores de flujo volumétrico característico Q_0 . Es claro que el efecto de Q_0 solo se presenta a tiempos cortos, mientras que para un cierto valor crítico, todas las curvas colapsan a tiempos medios y altos respectivamente.



Conclusiones



Conclusiones

En este trabajo se utilizó el concepto de flexoelectricidad en cristales líquidos con aplicación a las células ciliadas externas. Para modelar este fenómeno se utilizó un capilar con dos fases viscoelásticas y una membrana flexoeléctrica adherida en el centro del capilar a la cual se le aplicó un campo eléctrico de baja amplitud, lo que provoca que se forme un domo inferior y superior lo cual, induce un flujo volumétrico debido a la diferencia de presiones entre la parte superior e inferior de la membrana demostrado.

A partir de un balance mecánico y la ecuación de forma de la membrana y suponiendo que las fases son viscosas se deducen ecuaciones que describen el cambio de la curvatura promedio y flujo volumétrico en función del campo eléctrico aplicado y las propiedades materiales tales como, viscosos, elásticas y flexoeléctricas del sistema.

Se deduce un modelo matemático dinámico lineal que describe los cambios del flujo volumétrico en función del campo eléctrico aplicado y las propiedades viscosas membrano elásticas y flexoeléctricas de la membrana flexoeléctricas.

Se presenta un método general en el régimen de viscosidad lineal, con el fin de incorporar diferentes mecanismos a través de las ecuaciones constitutivas.

A partir de los resultados obtenidos se complementa un caso particular el modelo membrano dinámico publicado por *Abou-Dakka et al. (2012) [Journal of Non-Newtonian Fluid mechanics]* introduciendo un término que cuantifica los efectos flexoeléctrico acoplados con la membrana.

Matemáticamente, describe una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden la cual se puede interpretar como una clase de oscilador armónico forzado, este modelo contiene una contribución inercial asociado a la segunda derivada de la curvatura con respecto al tiempo, una primera derivada asociada con la disipación y el término constante relacionado con la elasticidad de la membrana.

Para analizar la respuesta mecánica de material, se propuso una función sinusoidal para el flujo volumétrico oscilatorio de las cuales se obtuvieron los módulos mecánicos y la potencia disipada aplicada al sistema. La cual corrige las soluciones en la prueba para los módulos de curvatura que son los puntos de partida en los cálculos de la potencia disipada y energía elástica almacenada por la membrana en función de los parámetros adimensionales.

Simulando las ecuaciones del flujo volumétrico transitorio se observa que el sistema inicial de flujo se comporta con una combinación lineal de senos con cosenos y las amplitudes están determinadas por los módulos mecánicos.





Las coordenadas de este espacio son la viscosidad de bulto, la elasticidad de la membrana y la memoria asociada al producto de los tiempos de relajación respectivamente. Estos modos representan cualquier punto material en el sistema.

Con base al análisis adimensional, se obtiene las siguientes condiciones para las cuales se obtienen las curvas resonantes en donde el sistema trabaja como un amplificador de tipo biológico:

1. La primera de estas condiciones es el contraste en las fases viscoelásticas (asimetría de las fases), una de las fases es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica.
2. La segunda es que la viscosidad de bulto debe ser muy grande es decir cercana a uno. Esto significa que la fase superior e inferior tiene la máxima viscosidad posible.
3. La tercera es que la elasticidad de la membrana se muy pequeña con respecto a la elasticidad de bulto de las fases viscoelásticas.
4. La cuarta condición y la contribución de esta tesis es que los mecanismos flexoeléctricos deben ser del orden del radio elástico de la membrana, i.e. las fuerzas flexoeléctricas deben ser pequeñas en comparación con la elasticidad de bulto del sistema.

Todos los resultados obtenidos en la presente investigación, son analíticos y pueden ser punto de partida para resultados numéricos en el régimen de viscoelasticidad no lineal.

Lo cual hace que nuestra hipótesis se acepte y los objetivos se cumplan

Modelo para estado no estacionario

La ecuación para el flujo volumétrico transitorio contiene dos contribuciones, las cuales se pueden separar en una oscilatoria y otra de tipo exponencial decreciente dominada por un tiempo característico el cual depende de las propiedades elásticas y viscosas de la membrana y de las fases viscosas respectivamente.

$$Q^*(t^*; \omega^*) = \frac{\omega^* (\omega^* \cos[t^* \omega^*] + \text{Sen}[t^* \omega^*])}{1 + \omega^{*2}} + \left(Q_0^* - \frac{\omega^{*2}}{1 + \omega^{*2}} \right) \text{Exp}[-t^*]$$





Modelo para la dinámica oscilatoria

El modelo matemático dinámico lineal que describe el flujo volumétrico inducido por una membrana flexoeléctrica.

$$Q^*(t^*) = |Q_{io}^*(\omega^*)| \cos(\omega^* t^*) + |Q_{oi}^*(\omega^*)| \sin(\omega^* t^*)$$

$$|Q_{io}^*(\omega^*)| = \frac{\omega^*}{1 + \omega^{*2}}$$

$$|Q_{oi}^*(\omega^*)| = \frac{\omega^{*2}}{1 + \omega^{*2}}$$

Este producto de números adimensionales, es el punto de partida en la descripción de las curvas resonantes y de la zona biológica

Potencia disipada del sistema

La potencia disipada liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana puede ser calculada por medio de una integral promediando sobre un periodo.

Nótese, que el flujo volumétrico puede ser expresado en términos de la evolución de la curvatura promedio

$$P^*(\omega^*) = -\langle E^*(t^*) \cdot Q^*(t^*) \rangle = \langle \cos(\omega^* t^*) (Q_{io}^*(\omega^*) \cos(\omega^* t^*) + Q_{oi}^*(\omega^*) \sin(\omega^* t^*)) \rangle = \frac{1}{2} Q_{io}^*(\omega^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^*}{1 + \omega^{*2}}$$





Glosario

Campo eléctrico:	Fuerza eléctrica por unidad de carga
Coordenadas Cilíndricas	Representa los puntos de un espacio euclídeo tridimensional especialmente útil en problemas con simetría axial. $[r, \theta, z]$
Coordenadas Esféricas	Se usan en espacios euclidianos tridimensionales y está formado por tres ejes mutuamente ortogonales que se cortan en el origen. $[r, \theta, \varphi]$
Coordenadas Rectangulares	Se define por dos o tres ejes ortogonales igualmente escalados $[x, y, z]$
Cristal líquido:	Sistema complejo que presenta propiedades entre sólido y líquido que es altamente anisótropico.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación).
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Electromotilidad:	Es el cambio de forma que resulta de la conversión directa de potencial eléctrico a fuerza
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Flexoelectricidad:	Capacidad de un material para modificar su curvatura por acción de un campo eléctrico externo.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo. Mecánica, comprimiendo y expandiendo las CCE.





Membrana:	Elemento biológico o sintético que delimita un espacio físico y puede o no tener actividad biológica.
Modelo de Burgers	Modeliza materiales que presentan componentes de deformación instantánea, viscoelástica y viscoplástica.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva no newtoniana que combina las propiedades elásticas y viscosas del fluido.
Número de Reynolds	Es un número adimensional para caracterizar el movimiento de un fluido
Oscilador Armónico	El oscilador armónico está sometido a una fuerza recuperadora, que tiende a devolverlo al punto de equilibrio estable, con una intensidad proporcional a la separación respecto de dicho punto.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Resonancia:	Fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica cuyo periodo de vibración se acerca al periodo de vibración característico del sistema.
Viscoelásticidad:	Termino que se utiliza para describir materiales que poseen características tanto viscosas como elásticas.





Bibliografía

1. Abou-Dakka M., Herrera-Valencia E.E., Rey D. A. (2002). Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 185-186 1-17.
2. Abou-Dakka, M., Herrera-Valencia, E.E., & Rey, A.D. (2012). Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 185-186 1-17. (doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.07.007)
3. Ager, A. & Lackner, R. (2008). Identification of viscoelastic model parameters by means of cyclic nano indentation testing. *Int. J. Mat. Res.* 99 1-8. (doi: 10.3139/146.101706)
4. Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. (1987). *Dynamics of polymeric liquids*, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
5. Broughton, B.J., Clarke, M.J., Blatch, A.E., & Coles H.J. (2005). Optimized flexoelectric response in a chiral liquid-crystal phase device. *J. Appl. Phys.* 98 034109/1-034109/6. (doi: 10.1063/1.2006227)
6. Brownell, W.E. (1985). Evoked mechanical responses of isolated cochlear outer hair cells. *Science* 227 194-196. (doi: 10.1126/science.3966153)
7. Calderas, F., Sánchez-Solis, A., Maciel, A. & Manero, O. (2009). The transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite, *Macromol Symp. MACROMEX*. pp. 283-284, 354-360. (doi: 10.1002/masy.200950942)
8. Carbone. G, Salter, P., Elton, S.J., Raynes, P., De Sio, L., Ferjani, S., Strangi, G., Umeton, C., Bartolino, R. (2009). Short pitch cholesteric electro-optical device based on periodic polymer structures. *Appl. Phys. Lett.* 95 011102/1-011102-3. (doi:10.1063/1.3159624)
9. De Gennes, P.G. & Prost, J. (1994). *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford, UK: Second Edition, Oxford University Press. PP 1-26, ISBN: 9780198517856
10. D'Errico. M., L. Ibarrola. E, Luque. R, A. Paolett. C. (2008). Reología; fluidos no newtonianos, *Mecánica de Fluidos*, Primera edición, 6-44
11. Ehrenstein, D. & Iwasa, K.H. (1996). Viscoelastic relaxation in the membrane of the auditory outer hair cell. *J. Biophys.* 71 1087-1094. (doi: 10.1016/S0006-3495)





12. Fikus, M. & Pawlowski, P. (1989). Bioelectrorheological model of the cell. 2. Analysis of creep and its experimental verification. *J. Theor. Biol.* 137 365-373. (doi: 10.1016/S0022-5193(89)80035-9)
13. Greenleaf, J.F., Fatemi, M. & Insana, M. (2003). Selected methods for imagine elastic properties of biological tissues. *Ann. Rev. Biomed. Eng.* 5 57-78. (doi: 10.1146/annurev.bioeng.5.040202.121623)
14. Hall. E. John, Guyton. (2015). *Text book of medical physiology*, Elsevier, Thirteen edition, ISBN 9781455770168
15. Harden, J., Chambers, M., Verduzco, R., Luchette, P., Gleeson, J.T., Sprunt, S. & Jákli, A. (2010). Giant flexoelectricity in bent-core nematic liquid crystals elastomers. *Appl. Phys. Lett.* 96 102907/1-102907/3. (doi:10.1063/1.3358391)
16. Harden, J., Teeling, R., Gleeson, J.T., Sprunt, S. & Jákli, A. (2008). Converse flexoelectricity effect in a bent-core nematic liquid crystal. *Phys. Rev. E* 78 031702/1-031702/5. (doi: 10.1103/PhysRevE.78.031702)
17. Hawkins, R.D. & Lovett, M. (2004). The developmental genetics of auditory hair cells. *Hum. Mol. Genet.* 13 R289-R296. (doi: 10.1093/hmg/ddh249)
18. Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. (2010). Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183. (doi: 10.1016/j.jnnfm.2009.11.001)
19. Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. (2009). Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800. (doi:10.1007/s00397-009-0372-x)
20. J.S. Patel, R.B. Meyer, (1987). Flexoelectric electro-optics of cholesteric liquid crystals *Phys. Rev. Lett.* 58 1538-1540. doi:10.1103/PhysRevLett.58.1538
21. Manduca, A., Oliphant, T.E., Dresner, M. A., Mahowald, J. L., Kruse, S.A., Amromin, E., Felmlee, J.P., Greenleaf, J.F. & Ehamn, R.L. (2001). Magnetic resonance elastography: Noninvasive mapping of tissue elasticity. *Med. Image Anal.* 5 237-254. (doi: 10.1016/S1361-8415(00)00039-6)
22. Messini, N., Karabarbounis, A., Philippetis, A.L. & Margaritis, L. H. (2002). Mechanism for action of electromagnetic field on cells. *Biochem. Biophys. Res. Commun.* 298 95-102. (doi:10.1016/S0006-291X(02)02393-8)
23. Meyer, R.B. (1969). Piezoelectric Effects in Liquid Crystals. *Phys. Rev. Lett.* 22, 918-921. (doi: 10.1103/PhysRevLett.22.918)





24. Nguyen, S.T., Dormieux, L., Pape, Y.L. & Sanahuja, J. (2011). A burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid. *Int. J. Damage Mech.* 20 1116-1129. (doi: 10.1177/1056789510395554)
25. Oghalai, J.S., Zhao, H.B., Kutz, J.W. & Brownell, W.E. (2000). Voltage-and tension-dependent lipid mobility in the outer hair cell plasma membranes. *Science* 287 658-661. (doi:10.1126/science.287.5453.658)
26. Panagopoulos, D.J., Messini, N., Karabarbounis, A., Philippetis, A.L & Margaritis, L.H (2000). A mechanism for action of oscillating electric fields on cells. *Biochem. Biophys. Res. Commun.* 272 634-640. (doi: 10.1006/bbrc.2000.2746)
27. Petrov, A. G. (1999). *Thelyotropic state of matter: Molecular Physics and Living Matter Physics*. Amsterdam, The Netherlands: Gordon and Breach Science Publisher.
28. Petrov, A. G. (2001). Flexoelectricity of model and living membranes. *BBA-Biomembranes* 1561, 1-25. (doi: 10.1016/S0304-4157(01)00007-7)
29. Petrov, A. G. (2006). Electricity and mechanics of biomembrane systems: flexoelectricity in living membranes. *Anal. Chim. Acta* 568, 70-83. (doi:10.1016/j.aca.2006.01.108)
30. Qausar, M. (1989). Attenuation properties of viscoelastic material. *Pure Appl. Geophys.* 131 703-713. (doi: 10.1007/BF00876269)
31. R. Quintanilla, R & Rajagopal, K.R. (2006). On Burgers fluids. *Math. Meth. Appl. Sci.* 29 2133-2147. (doi: 10.1002/mma.760)
32. Rabbits, R.D., Clifford, S., Breneman, K.D., Farrell, B. & Brownell, W.E. (2009). Power efficiency of outer hair cell somatic electromotility. *PlosComput.Biol.* 5 1-14. (doi:10.1371/journal.pcbi.1000444)
33. Raphael, R.M., Popel, A.S. & Brownell, W. E. (2000). A membrane-bending model of outer hair cell electromotility. *Biophys. J.* 78 2844-2862. (doi: 10.1016/S0006-3495(00)76827-5)
34. Rey, A. D. (2006b). Liquid crystals model of membrane flexoelectricity. *Virtual J. Biol. Phys. Res.* 12 011710/1-011710/11. (doi: 10.1103/PhysRevE.74.011710)
35. Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. (2012). Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in *Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga). (doi: 10.1002/9781118336632.ch2)





- 36.Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. (2010). Micromechanics model of liquid crystals anisotropic triple lines with applications to contact line self-assembly. *Langmuir* 26 1349-1368. (doi: 10.1021/la1019668)
- 37.Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. (2012). Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. *Biopolymers* 97 374-396. (doi: 10.1002/bip.21723)
- 38.Rey, A.D. (2005). Mechanics of soft solids-liquid crystals interfaces. *Phys. Rev. E* 72 0117061-01170616. (doi:10.1103/PhysRevE.72.011706)
- 39.Rey, A.D. (2006a). Liquid crystals model of membrane flexoelectricity. *Phys. Rev. E* 74 011710/1-011710/11. (doi: 10.1103/PhysRevE.74.011710)
- 40.Rey, A.D. (2006c). Polar fluid model of viscoelastic membranes and interfaces. *J. Coll. Int. Sci.*304 226-238. (doi: 10.1016/j.jcis.2006.08.027)
- 41.Rey, A.D. (2007). Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. *Soft Matter* 2 1349-1368. (doi: 10.1039/B704248P)
- 42.Rey, A.D. (2008). Linear Viscoelastic Model for Bending and Torsional Modes in Fluid Membranes. *Rheol.Acta*47 861-871. (doi: 10.1007/s00397-008-0259-2)
- 43.Rey, A.D. (2008). Nonlinear actuator model for flexoelectric membranes. *Int. J. of Design Nature Ecodynam.*3 28-38. (doi: 10.2495/DNE-V3-N1-28-38)
- 44.Rey, A.D. (2010). Liquid crystals models of biological materials and processes. *Soft Matter* 6 3402-3429. (doi: 10.1039/B921576J)
- 45.Rey, A.D. MojdehGolmohammad I & Herrera-Valencia, E.E. (2011). A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles. *Soft Matter* 5002-5009. (doi: 10.1039/c1sm05113j)
- 46.Sachs, F., Brownell, W.E. & Petrov A.G. (2009). Membrane electromechanics in biology, with a focus on hearing. *MRS Bull* 34 665-670. (doi: 10.1557/mrs2009.178)
- 47.Sachs, F., Brownell, W.E. & Petrov A.G. (2009). Membrane electromechanics in biology, with a focus on hearing. *MRS Bull* 34 665-670. (doi: 10.1557/mrs2009.178)
- 48.Sachs, F., Brownell, W.E. & Petrov, A.G. (2009). Membrane electromechanics in biology, with a focus on hearing. *MRS Bull.* 34 1-14. (doi: 10.1557/mrs2009.178)





49. Salter, P.S., Elston S.J., Raynes, E.P. & Parry-Jones, L.A. (2009). Alignment of the Uniform Lying Helix Structure in Cholesteric Liquid Crystals. *Jpn. J. Appl. Phys.*48 101302/1-101302/5. (doi:10.1143/JJAP.48.101302)
50. Spector, A.A., Deo, N. Ratnanather, J.T. & Raphael, R.M. (2006). Electromechanical models of the outer hair cell composite membrane. *J. Membr. Biol.*209 135-152. (doi: 10.1007/s00232-005-0843-7)
51. Thornton, A.R. & Abbas, P.J. (1980). Low-frequency hearing loss: Perception of filtered speech psychophysical tuning curves, and masking. *J. Acoust. Soc. Am.*67 638-643. (doi: 10.1121/1.383888)
52. Yucel, U. & Kazakia, J. Y. 2004 Viscoelastic effects in pressure transduction. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*123 59-66. (doi:10.1016/j.jnnfm.2004.06.008)

