



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMULACIÓN DE DISCOS DE
ACRECIÓN EN RELATIVIDAD
GENERAL PSEUDO-COMPLEJA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

MIGUEL MOISÉS ALGALÁN BELTRÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente: Dr. Hernando Quevedo Cubillos
Vocal: Dr. Sergio Mendoza Ramos
Secretario (Tutor): Dr. Peter Otto Hess Bechstedt
Suplente: Dr. Mariano Chernicoff Minsberg
Suplente: Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar

Datos del trabajo escrito

Título: Simulación de discos de acreción en
relatividad general pseudo-compleja
Número de páginas: 117 p
Realizado en: Instituto de Ciencias Nucleares (UNAM)
Año: 2016

Miguel Moisés Algalán Beltrán
Facultad de Ciencias (UNAM)
mmab@ciencias.unam.mx

Agradecimientos

Quiero agradecer primero al Dr. Peter Hess, por guiarme en mi primer encuentro formal con la investigación de un tema concreto dentro del orbe de la física. Fue muy enriquecedor para mí a lo largo de esta trayectoria tener la oportunidad de discutir con el una gran cantidad de conceptos del contenido expuesto en la tesis. Quiero enfatizar que su genuina postura inquisitiva como científico tuvo un impacto sobresaliente en esta etapa de mi formación profesional; además, su cordialidad mostrada en cada una de nuestras citas me permitió trabajar en todo momento con plenitud. Incursionar en este proyecto ha sido lo más excitante en mi desarrollo intelectual.

Agradezco también a todos los miembros de mi jurado, sus comentarios constructivos y las correcciones sugeridas han depurado el contenido de este trabajo. De particular provecho fue el tener la oportunidad de exponer este trabajo ante el grupo del Dr. Hernando Quevedo, agradezco las observaciones de todos los participantes en el seminario. También quiero mencionar que el recibimiento positivo para la propuesta presentada en este trabajo por parte del Dr. Sergio Mendoza ha sido bastante motivante.

A pesar de la distancia que nos separa, la posibilidad de adentrarme en esta maravillosa experiencia es gracias al noble esfuerzo de mi familia, su incesante apoyo es el pedestal sobre el cual reposa este logro. Quiero agregar también que la aventura emprendida para construir mi concepción científica del mundo, ha sido privilegiada por los extraordinarios profesores que tuve. Paralelamente ha sido de especial provecho mi constante colaboración con Angélica Carrillo, gracias a nuestra convicción por aprender y a nuestra entrañable relación hemos hecho de este proyecto una experiencia inolvidable.

Finalmente, no puedo olvidar expresar mi sincero sentimiento de orgullo universitario para todos aquellos que conforman honorablemente el baluarte cultural que representa la UNAM; este trabajo es mi aportación para enriquecer el acervo de nuestra querida casa de estudios.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM «IN100315» «Sistemas extremos en la física». Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

¡Gracias a todos los que hicieron posible esto!

Resumen

El presente trabajo consiste en estudiar las consecuencias que se derivan de aplicar la teoría de la Relatividad General pseudo-compleja a la modelación de un disco de acreción en el entorno de una estrella compacta considerando los términos de corrección que aparecen en la teoría. Algunas diferencias que aparecen en la nueva teoría respecto a la Relatividad General estándar son: la posibilidad que tienen las partículas orbitando en el disco de alcanzar un máximo en la velocidad angular y como consecuencia la predicción de un anillo oscuro, la modificación en el concepto de ISCO permitiendo a las partículas acercarse más al objeto compacto y la posibilidad de evitar el corrimiento al rojo infinito. Estas modificaciones implican que un disco de acreción en la teoría pseudo-compleja luce siempre más brillante, lo cual es comprobado mediante la implementación de una simulación numérica.

El contenido de este trabajo se distribuye a lo largo de 3 capítulos:

En el Capítulo 1 se da una presentación básica de la teoría estándar de la relatividad. Se comienza con una sección que da un breve panorama histórico tanto de la evolución de la teoría como del origen del problema de los agujeros negros. En la siguiente sección se da un resumen de la teoría de la Relatividad Especial, pues si bien esta no es de utilidad en el entorno de objetos compactos sí presenta una serie de conceptos que sirven como primer acercamiento a una teoría que revolucionó nuestra interpretación de fenómenos físicos, se exponen además algunas consecuencias de construir esta teoría respetando el principio de invariancia de la velocidad de la luz. La siguiente sección trata finalmente algunos conceptos de la teoría geométrica de la gravedad, se introducen primero los principios de equivalencia que fundamentan a la Relatividad General, posteriormente se dan algunas herramientas de la geometría diferencial para poder entender el carácter geométrico de las ecuaciones de campo de Einstein. Más adelante se exhiben someramente las soluciones estacionarias más relevantes en función de sus parámetros característicos, haciendo luego énfasis en describir la estructura geométrica de los escenarios asociados a las soluciones neutras de Schwarzschild y Kerr. Se finaliza el capítulo con una exposición acerca de la formación de agujeros negros estelares.

El capítulo 2 es de vital importancia para la comprensión del modelo físico para discos de acreción. Primeramente se da un esbozo de la formación de estas estructuras y una serie de fenómenos que las caracterizan al ocurrir en condiciones

extremas. En la siguiente sección se presentan las hipótesis fundamentales del modelo de Page y Thorne para discos de acreción, así como la expresión para el flujo de energía según dicho modelo, éste último resultado será de utilidad en la interpretación de las simulaciones de los discos. Como parte de esta misma sección, se analiza la mecánica de partículas sujetas a un potencial efectivo, el estudio se hace considerando potenciales cada vez más complejos, para comprender finalmente la contribución de cada término en el potencial de Kerr. Dos conceptos de relevancia que se mencionan en esta sección son el de arrastre relativista y el de ISCO, éste último se deriva del estudio de la estabilidad de órbitas. En la sección final de este capítulo se desarrolla el concepto de corrimiento al rojo gravitacional como manifestación de la dilatación del tiempo, se desarrollan algunos cálculos con el fin de comprender este efecto para la emisión cuya fuente se encuentra en el disco de acreción.

En el capítulo 3 se encuentran los resultados más importantes de este trabajo. Se presentan primero las razones por las cuáles la consideración de una extensión algebraica pseudo-compleja de la Relatividad General tiene sentido. En la primera sección se explica la manera de operar con variables pseudo-complejas, se presenta también un nuevo principio variacional que propone hacer uso de los divisores de cero para obtener las ecuaciones de campo de la teoría. En las siguientes secciones se desarrolla la física de las partículas que orbitan en el disco de acreción de una estrella compacta cuyo espacio-tiempo exterior corresponde a la solución de Kerr pseudo-compleja. En el análisis se utilizan algunas de las hipótesis del modelo de Page y Thorne, con el cual se puede obtener la velocidad angular como observable; sin embargo, se deben incorporar al modelo las correcciones que se derivan de resultados característicos en la nueva teoría, en particular la aparición de un máximo en la velocidad angular implica considerar una modificación para la distribución de la energía en el disco. Otra observable analizada en este capítulo es el corrimiento al rojo, efecto que también presentará un comportamiento distinto respecto al caso de la teoría estándar presentado en el capítulo 2. Finalmente, aplicando el formalismo de Hamilton-Jacobi se obtienen las ecuaciones de evolución que serán integradas por un algoritmo de ray-tracing para obtener las simulaciones de discos de acreción.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Introducción	1
1. Teoría Estándar	3
1.1. Un poco de historia	3
1.2. Resumen de Relatividad Especial	6
1.2.1. Resultados fundamentales en el espacio-tiempo de Minkowski	8
1.2.2. Cinemática relativista	12
1.3. Resumen de Relatividad General	14
1.3.1. Geometría y gravedad	15
1.3.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein	21
1.3.2. Principales soluciones de tipo estacionario	23
1.3.2.1. Estructura de las soluciones neutras ($Q = 0$)	27
1.3.3. Formación de Agujeros Negros	33
2. Discos de acreción	37
2.1. El modelo de Page y Thorne	39
2.2. Órbitas circulares	41
2.2.1. El campo central Newtoniano	42
2.2.2. Potenciales con captura relativista	44
2.3. Corrimiento al rojo gravitacional	52
3. Teoría Pseudo-Compleja	57
3.1. Análisis en el contexto Pseudo-Complejo	58
3.2. Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo	62
3.2.1. Velocidad angular en órbitas geodésicas circulares	66
3.2.2. Corrimiento al rojo de la radiación emitida en el disco de acreción	72
3.2.3. El potencial efectivo pseudo-complejo	74
3.3. Ray-tracing	81
3.3.1. Aplicación del formalismo de Hamilton-Jacobi	83

ÍNDICE GENERAL

Conclusiones	95
Apéndice	97
A. Matemática elemental pseudo-compleja	97
B. Cálculos complementarios de Capítulo 4	100
B.1. Obtención de Hamiltoniano	100
B.2. Expresiones para E^2 y L_z^2	101
B.3. Extremo para potencial efectivo pseudo-complejo	103
B.4. Determinante de la métrica pseudo-compleja	107
Bibliografía	109

Introducción

If it disagrees with experiment it is wrong, in that simple statement is the key to science.

Richard Phillips Feynman

La motivación básica que justifica aplicar una propuesta a extensión de la teoría de la Relatividad General es de carácter filosófico, pues se busca prevenir la existencia de regiones excluidas del universo observable, esto significa que se debe evitar la aparición de horizontes de eventos, y no sólo eso, eliminar las singularidades que estos contienen. La existencia de ambas¹ situaciones en la teoría estándar podrían indicar que esta puede ser una teoría incompleta. La Relatividad General pseudo-compleja pretende ser una extensión algebraica efectiva de la teoría estándar; por supuesto, como esta teoría busca generalizar, entonces recupera las predicciones ya conocidas en el campo débil, y propone una posible solución en campos extremadamente fuertes. Un cambio importante en la extensión pseudo-compleja, es que esta incorpora (debido a un principio variacional modificado) una contribución de *energía oscura* en las ecuaciones de campo; así, el colapso gravitacional que lleva a la formación de un agujero negro, es interrumpido por dicha energía que funciona como una fuerza anti-gravitacional, obteniendo como único posible resultado la formación de una *estrella oscura* muy densa sin un horizonte de eventos. Esta extensión es propuesta en 2009 por el Dr. Peter Hess y el Dr. Walter Greiner.

Se tienen ya distintas aplicaciones con estructura pseudo-compleja que pueden ser interesantes (las cuales no serán tratadas en este trabajo), algunas de interés cosmológico y otras en teoría cuántica de campos. En el primer caso se enfoca en el estudio de la singularidad encontrada para tiempos tempranos del Universo, hablamos del Big Bang. Al aplicar esta extensión al modelo de Robertson-Walker, se predice un Universo que podría dejar de acelerarse a tiempos muy remotos; en el segundo caso, se cuenta con una longitud mínima que permite una teoría sin

¹ Como bien es sabido, la Relatividad General predice la existencia de agujeros negros, lo cual desafortunadamente implica la existencia de un horizonte de eventos, limitando de esta manera el estudio de la región del espacio-tiempo que este delimita. Más aún, la teoría predice en algunos casos que el espacio-tiempo se curva infinitamente en el entorno local de una singularidad, siendo imposible evitar esto aún usando cualquier cambio de coordenadas.

infinidades, resultando en una teoría más simple.

Es necesario considerar que el Principio de Equivalencia de Einstein y algunas predicciones de la Relatividad General han sido corroboradas mayoritariamente en campos gravitacionales débiles, estos resultados son de gran importancia para la astrofísica del sistema solar. Diversos experimentos en éste límite han sido exitosos (84): “Eot-Wash” , “Lunar Laser Ranging” , “Hughes–Drever” , entre otros. De hecho, en el contexto del formalismo post-Newtoniano parametrizado (PPN¹) se han propuesto diversos parámetros para clasificar diversas teorías métricas de la gravedad, dos de ellos asociados a las pruebas clásicas de la Relatividad General¹¹. En campos gravitacionales que no son débiles también se tienen ahora dos evidencias que no descartan a la Relatividad General como un modelo efectivo: el descubrimiento y análisis del sistema binario Hulse-Taylor y la reciente detección por el proyecto LIGO de las ondas gravitacionales (1) (lo cual era esperado por una gran parte de las teorías de la gravedad). Por supuesto, la extensión pseudo-compleja también predice la existencia de ondas gravitacionales (un estudio de este fenómeno puede ser encontrado en (68)), por lo cual sería interesante poder aplicar la teoría en modelaciones numéricas.

A pesar de las evidencias y experimentos que hemos citado, la Relatividad General no ha sido probada en las cercanías de un horizonte de eventos (¡aún no se ha probado la existencia de estos!), pues con observaciones directas no se han logrado estudiar regiones muy cercanas al radio de Schwarzschild, quedando de esta manera una incógnita acerca de la física alrededor de objetos muy compactos, en cuyo entorno local el campo gravitacional es muy fuerte. Las observaciones directas de estas regiones en el futuro serán una prueba para cualquier teoría que propone explicar la física en esas condiciones extremas. El interés de este trabajo se localiza en este rango extremo para el campo gravitacional, por tanto la motivación es predecir la apariencia del entorno de un objeto compacto haciendo uso de la teoría pseudo-compleja. El objetivo de este trabajo es en gran medida obtener los resultados esenciales que permitirán describir a dichas regiones, las cuales se encuentran en las cercanías de un objeto que usualmente es identificado como agujero negro. La simulación de un disco de acreción correspondiente a un objeto compacto que rota es la clave para lograrlo, y por tanto los resultados teóricos a desarrollar se concentrarán en la física de partículas orbitando en el disco. La simulación se realiza con la ayuda de un código computacional (79) basado en el método de ray-tracing y cuyo sustento yace en el formalismo de Hamilton-Jacobi. La métrica asociada al espacio-tiempo de interés corresponde al exterior de un objeto con espín, identificada como la solución de Kerr pseudo-compleja, esta métrica es considerada en la simulación.

¹ Por sus siglas en inglés, PPN: Parametrized Post-Newtonian.

¹¹ Las tres pruebas clásicas de la Relatividad General son: dilatación del tiempo, deflexión de la luz y la precesión en el perihelio de Mercurio.

Teoría Estándar

Spacetime tells matter how to move, matter tells spacetime
how to curve.

John Archibald Wheeler

1.1. Un poco de historia

La teoría de la Relatividad Especial se dió a conocer en el año milagroso¹ para Albert Einstein, 1905. Con este logro se concretó la investigación de grandes científicos del momento, como lo fueron principalmente: el físico holandés Antoon Lorentz, el matemático francés Henri Poincaré y el geómetra ruso-alemán Hermann Minkowski. Por un lado, ésta teoría ofrecía ya suficientes ideas revolucionarias y poco evidentes, ya que se exhiben por primera vez transformaciones que mezclan el espacio y el tiempo, de tal manera que éstos no parecen tener una naturaleza del todo distinta. Es en base al análisis de la relación que existe entre sistemas inerciales que las transformaciones se derivan, y por lo cual cobran sentido físico, pero cabe agregar, que la idea original detrás de éstas residía en conseguir una manera de dejar invariantes a las leyes del electromagnetismo ante cualquier observador inercial. Y aunque fueron estudiadas antes por Lorentz y Poincaré (26); ellos no lograron interpretar el impacto que estas tenían en la concepción del tiempo y el espacio.

Einstein decidió incorporar las transformaciones de Lorentz a la teoría especial, ya que cumplen los dos postulados primordiales que exigía en su modelo físico, el *Principio de Relatividad* y la *Universalidad de la velocidad de la luz*; más aún, se percató de que dichas transformaciones llevaban consigo información acerca de la simetría entre el espacio y el tiempo, la cual no era incorporada en la Relatividad de Galileo. Esta conexión conceptual es en gran medida el aporte que hizo

¹En 1905 Albert Einstein publicó cuatro artículos en la revista científica *Annalen der Physik* que revolucionaron la física del momento, estos trataron nuevos conceptos como el [efecto fotoeléctrico](#), el [movimiento Browniano](#), la [Relatividad Especial](#) y la [equivalencia masa-energía](#).

1. TEORÍA ESTÁNDAR

Einstein a la Relatividad Especial; no obstante, aún faltaba una consideración importante acerca del espacio-tiempo, la geometría de éste. Esto fue resuelto tres años después, en 1908, debido a que Minkowski propone la idea de representar a los eventos físicos en una variedad plana de cuatro dimensiones dotada con una métrica Lorentziana (una variedad pseudo-Riemanniana con signatura $(1,3)$) (26), la cual conocemos ahora como espacio-tiempo de Minkowski.

La teoría de la relatividad elaborada hasta entonces no incluía un ingrediente muy importante...un campo gravitacional. La proposición que sirvió para encontrar el camino hacia la Relatividad General se atribuyó únicamente a Einstein: “las leyes de la física deben permanecer invariantes no sólo para observadores inerciales, esto debería suceder también para observadores acelerados”. La clave se encontraba en una idea que parece muy simple: “una persona estando en caída libre no siente su propio peso”. Como consecuencia de sus pensamientos, posteriormente propuso que la física en un sistema acelerado debe diferir de aquella en un sistema inercial únicamente por la presencia de un campo gravitacional efectivo, asentándose de esta manera una equivalencia entre la concepción de aceleración y campo gravitacional, el *principio de equivalencia*. El concepto de sistemas inerciales en presencia de un campo gravitacional entonces se redefinió como aquellos asociados a observadores que no se sienten acelerados; es decir, se encuentran en caída libre.

Uniendo las piezas disponibles hasta ese momento, Einstein se percató que era necesario distorsionar el espacio-tiempo de Minkowski para incluir los detalles atribuidos a un campo gravitacional; es decir, necesitaba crear una teoría de la gravedad en un espacio-tiempo curvo. Afortunadamente en el siglo XIX Karl F. Gauss y Georg F. Riemann ya habían desarrollado las herramientas necesarias para construir la teoría de la Relatividad General, la geometría de espacios curvos. Después de una década de arduo trabajo Einstein publicó en noviembre de 1915 su obra maestra: “Zur allgemeinen Relativitätstheorie”. En ésta se expone la generalización a la teoría de 1905 y se dan a conocer las ecuaciones que describen a un campo gravitacional. Un año después (en 1916) se establecieron las llamadas *pruebas clásicas de la Relatividad General*, afortunadamente para Einstein dos de las tres pruebas se corroboraron antes de su muerte (26): la precesión en el perihelio de Mercurio y el efecto de deflexión que sufre la luz en las proximidades del campo gravitacional del Sol. La tercera prueba acerca del corrimiento al rojo gravitacional tuvo que esperar hasta 1959 para ser confirmada.

Paralelamente al interés mostrado respecto a la confirmación experimental de la Relatividad General, diversos esfuerzos en el ámbito teórico se estaban gestando, uno de los cuales trataba del estudio del colapso gravitacional de una estrella. Las consecuencias de éste fenómeno ya se habían estudiado casi dos siglos atrás, a finales del siglo XVIII y con conocimiento únicamente de la teoría de la gravitación de Newton, J. Michell concibió la idea de que estrellas muy masivas podrían ejercer suficiente atracción gravitacional en su entorno como para evitar que incluso la luz fuera incapaz de escapar. El problema fue resuelto analíticamente una década después (en 1796) por P. Laplace (36); la idea consiste en proveer a una partícula de una energía cinética inicial de tal forma que logre superar al potencial gravitacional debido a un objeto esférico de masa M y radio R ; es decir,

el problema se convierte en encontrar la velocidad de escape v_{esc} . Considerando la conservación de la energía, la solución para un objeto esférico con distribución de masa uniforme está dada por

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad (1.1)$$

donde se ha escrito en forma explícita a la constante de gravitación G para contextualizar el cálculo en la teoría Newtoniana.

Asumiendo que podemos considerar a nuestro planeta como un objeto esférico, con la solución dada en 1.1 se puede estimar la velocidad de escape (en unidades del SI) de la Tierra en $v_{esc} \simeq 11.2 \frac{km}{s}$. Si se comprime al planeta de tal manera que la velocidad de escape sea la de la luz, entonces ¡el radio terrestre debería ser de un centímetro! (36). Este resultado expone de manera concisa la razón por la cual la comunidad científica prestaba poca atención al problema de los agujeros negros cuando la Relatividad General era una teoría recién conocida, no se conocía objeto alguno suficientemente masivo y compacto.



Figura 1: Publicación (de dominio público) de Schwarzschild en las memorias de la Academia Prusiana de Ciencias. Una traducción al inglés se encuentra en [arXiv](#).

Fue en enero de 1916 que el físico alemán Karl Schwarzschild encontró la primera solución a las ecuaciones de campo de la Relatividad General, esta describe la geometría del espacio-tiempo para una partícula puntual con masa y sin rotación (ver **Figura 1**). Dos años después Hans Reissner y Gunnar Nordström encuentran otra solución, la cual extiende la solución de Schwarzschild permitiendo que el cuerpo masivo tenga carga eléctrica. No obstante, el evento que inaugura la *época dorada de la física de los agujeros negros*¹ es la obtención en 1963 por el matemático neozelandés Roy Kerr de una métrica que describe a un agujero negro con espín, su propuesta es para muchos la solución exacta más importante a una ecuación de la física; además, en el campo de la astrofísica es la más prometedora dado que se sabe que las estrellas rotan.

Desde el descubrimiento en 1962 de la primera fuente compacta¹¹ de rayos X, así como

¹ Se llama así al periodo de importantes avances en el entendimiento de la física alrededor de objetos compactos, culmina con la predicción de la *radiación de Hawking*. Más información en el [sitio](#) del departamento de Física y Astronomía de la Universidad de Canterbury.

¹¹ **Scorpius X-1** es la segunda fuente de rayos X más brillante en el cielo (después del Sol) y la primera en ser descubierta fuera del Sistema Solar. Se trata de un sistema binario en el cual se han detectado pulsos de rayos X (QPO's) cuya duración no supera unos pocos minutos y

1. TEORÍA ESTÁNDAR

la observación del primer *quasar* y *pulsar* en 1963 y 1968 respectivamente (72), el estudio de objetos compactos se ha convertido indudablemente en un tema de interés astrofísico tanto teóricamente como en el campo de la observación.

1.2. Resumen de Relatividad Especial

La Relatividad Especial (RE) es una teoría que logra exhibir por primera vez simetría entre espacio y tiempo; sin embargo, como no se considera a la gravedad, no logra establecer la conexión que existe entre esta y la geometría del espacio, y por tanto se limita al estudio de la física en un espacio-tiempo plano dotado con una forma de medir distinta a la Euclidiana. Sin embargo, muchos conceptos que surgen en ésta, serán de utilidad al momento de ser generalizados en la Relatividad General. De hecho, para estudiar el Sistema Solar (por citar sólo un ejemplo), se tiene en este caso una teoría de campo débil^I; es decir, se puede concebir como una teoría con un campo tensorial $h_{\mu\nu}$ en un espacio-tiempo muy parecido al de Minkowski (el espacio-tiempo en RE).

Creemos que la física en RG se reduce a la de RE cuando el espacio es localmente plano (localmente inercial). De hecho, existe una relación entre esta afirmación y un resultado^{II} en el campo de la geometría diferencial, este último asegura que toda variedad diferenciable Riemanniana es localmente plana; sin embargo, Einstein sólo se enteró de la existencia de dicho teorema después de haber postulado su equivalente físico. Esta relación nos lleva a citar un concepto básico para desarrollar la RE, el cual es el de *sistema inercial*. Este concepto es un artificio muy idealizado, el cual sólo puede concebirse para hacer física en entornos donde existe un campo gravitacional muy débil.

Supongamos que un observador del espacio-tiempo puede corroborar las siguientes características en su entorno:

- I Cualquier par de objetos que permanecen en reposo relativo uno respecto al otro, la distancia entre ellos es constante en el tiempo.
- II Cualquier par de relojes que están sincronizados, si permanecen en reposo relativo uno respecto al otro, entonces seguirán sincronizados.
- III La geometría del espacio a cualquier tiempo constante t_0 es Euclideana.

Un sistema inercial de coordenadas es aquel que determina un observador que verifica las propiedades **I-III** en su entorno (71), y en RE siempre pensaremos que son sistemas bien definidos.

con frecuencias cercanas a 1 Hz.

^I Para construir una teoría de campo débil, se supone que podemos escribir a la métrica en dicho caso como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $h_{\mu\nu}$ es una perturbación muy pequeña ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$).

^{II} Localmente una variedad diferenciable se puede ver como la imagen de una parte del espacio tangente correspondiente. De hecho, utilizando el concepto de geodésica en la variedad, mediante la función exponencial (15) se logra dotar localmente a la variedad de un sistema de coordenadas inerciales, de tal forma que la métrica se reduce a la de Minkowski.

Debido a que nos interesa poder establecer una comparación causal entre eventos para sistemas inerciales, es necesario primero dar una definición imprescindible en RE, esta es la del concepto de *simultaneidad*. Consideremos un evento^I P del espacio-tiempo de Minkowski. Se consideran simultáneos todos los eventos cuya coordenada temporal coincida con la de P , mientras dicha coincidencia sea verificada por los relojes más cercanos a los puntos de ocurrencia de dichos eventos^{II}.

Conocidos ya los conceptos básicos en RE, es momento de enunciar los postulados con los cuales se fundamenta esta teoría (74)

PI *Principio de Relatividad*: las leyes de la física son las mismas para todos los sistemas inerciales; así, si para \mathcal{O} son verificadas en su forma más simple, la validez de estas no se ve afectada cuando consideramos a un sistema $\tilde{\mathcal{O}}$ que se traslada uniformemente respecto a \mathcal{O} .

PII *Principio de invariancia de velocidad de la luz*: la velocidad de la luz es absoluta y universal para todos los sistemas inerciales. Cualquier par de observadores no acelerados, miden la velocidad del mismo fotón con un valor de $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, independientemente de la velocidad relativa de desplazamiento entre ellos.

Nota: A partir de ahora se usará la convención del sistema geométrico de unidades para la velocidad de la luz ($c = 1$), a menos que se indique lo contrario en un caso particular.

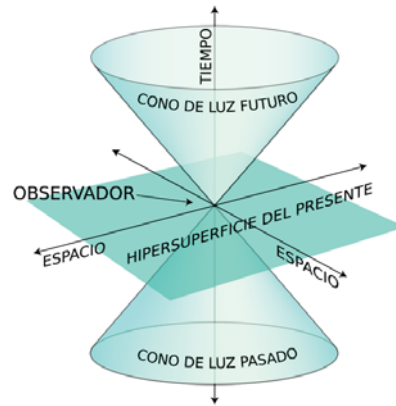


Figura 2: Un observador en la *hipersuperficie del presente* emite un fotón en el vacío, cuya trayectoria corresponderá a una semi-recta de pendiente 1, suponiendo que su libertad espacial se restringe a un plano, entonces el fotón se desplazará por el *cono de luz futuro*. Dado que ninguna partícula viaja a velocidad $v > 1$, entonces el interior del cono de luz futuro es el conjunto de eventos en conexión causal-futura con el observador. Análogamente, el *cono de luz pasado* es el conjunto de eventos en conexión causal-pasada con el observador. Se concluye que cualquier evento fuera del cono de luz no tiene relación causal con el observador.

Con el postulado **PI** se concluye que no existen velocidades absolutas^{III} medidas por observadores inerciales, excepto el caso de la velocidad de un fotón.

^I Un evento consiste de un elemento del espacio-tiempo al que se han asignado coordenadas espaciales de su sitio de ocurrencia, y también se ha etiquetado con el tiempo registrado por el reloj que se localiza en dichas coordenadas

^{II} Esto discrepa de la noción usual de simultaneidad, donde se consideran eventos simultáneos a aquellos que ocurren a un mismo tiempo medido por el reloj de un mismo observador.

^{III} Previo a la existencia de la Relatividad Especial, la no existencia de velocidades absolutas ya era bien conocido por Galileo. Más tarde, esto es corroborado formalmente al permanecer invariante la física de la teoría Newtoniana cuando es experimentada por observadores inerciales.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

Con el postulado **PII** se consigue darle sentido a la causalidad de eventos en el espacio-tiempo, siendo este el primer gran aporte de Einstein. En **Figura 2** se presenta el *cono de luz*, el cual es un modelo geométrico para visualizar la división del espacio-tiempo en función de la causalidad.

Para concluir esta introducción, vamos a presentar una herramienta que resulta importante cuando queremos conocer la manera analítica de relacionar los eventos entre sistemas de referencia inerciales. Consideremos dos observadores O y \bar{O} moviéndose uno respecto del otro, supongamos sin pérdida de generalidad que \bar{O} se desplaza en la dirección preferencial^I x a velocidad constante $v > 0$ respecto de O . Entonces, para un mismo evento P , la relación que existe entre las coordenadas x^α y $x^{\bar{\alpha}}$ está dada por las *transformaciones de Lorentz* (consultar derivación en (64)); es decir

$$x^{\bar{\mu}} = \Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} x^{\nu}, \quad (1.2)$$

donde

$$\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

La matriz en 1.3 representa explícitamente a un *boost* (71) de velocidad v en dirección x , en esta aparece el *factor de Lorentz*^{II} γ , el cual está dado (64) por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.4)$$

El boost que presentamos en 1.3 representa sólo a una de las 6 posibles transformaciones del *grupo de Lorentz*^{III}.

1.2.1. Resultados fundamentales en el espacio-tiempo de Minkowski

Un hecho de vital relevancia en RE es la invariancia del intervalo entre eventos, implicando así que las distancias en el espacio-tiempo son independientes del observador inercial que las mide. Si se define la distancia entre dos eventos (tan cercanos como queramos) P_i y P_f como $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ respecto al

^I Esto siempre es factible al redefinir la orientación adecuada para el sistema inercial O .

^{II} γ aparece de manera natural al deducir la transformación lineal $\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}}$.

^{III} El grupo de Lorentz en el espacio-tiempo de Minkowski está determinado por 6 generadores independientes: 3 boost (rotaciones hiperbólicas que involucran a una dirección espacial y el tiempo) y 3 rotaciones espaciales (una respecto a cada eje espacial).

observador O , y la distancia según el observador \bar{O} entre los mismos eventos está dada por $d\bar{s}^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$, entonces la invariancia del intervalo está expresada (64) matemáticamente como

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}d\bar{x}^{\bar{\mu}}d\bar{x}^{\bar{\nu}}, \quad (1.5)$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ es el *tensor métrico de Minkowski*, el cual está determinado por la forma en que definimos el intervalo entre eventos, es decir

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

El tensor métrico en 1.6 se ha presentado en coordenadas cartesianas por la forma que se ha adoptado hasta ahora para definir a los eventos en el espacio-tiempo. No obstante, se pueden construir diferentes representaciones si se adoptan coordenadas distintas, por ejemplo, el mismo objeto puede ser representado en coordenadas esféricas como

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

El conocimiento de la forma de medir en el espacio-tiempo de Minkowski permite dotar a este de una estructura causal. Supongamos que una partícula o señal puede seguir una trayectoria arbitraria (es decir, supondremos por el momento que podemos ignorar el postulado **PII**) que une los eventos P_i (el origen) y P_f (evento arbitrario). La naturaleza tensorial del 4-vector tangente $\vec{U}_{P_{inst}}$ (la 4-velocidad es un tensor de tipo (1,0)) en un instante sobre dicha trayectoria permite que este pueda ser evaluado por el tensor métrico dado en 1.6. Los tres posibles resultados permiten establecer las siguientes definiciones para $\vec{U}_{P_{inst}}$ como 4-vector en el espacio-tiempo

$$\vec{U}_{P_{inst}} := \begin{cases} \text{espacialoide si } \eta(\vec{U}_{P_{inst}}, \vec{U}_{P_{inst}}) > 0 \\ \text{nulo si } \eta(\vec{U}_{P_{inst}}, \vec{U}_{P_{inst}}) = 0 \\ \text{temporaloide si } \eta(\vec{U}_{P_{inst}}, \vec{U}_{P_{inst}}) < 0 \end{cases}. \quad (1.8)$$

1. TEORÍA ESTÁNDAR

De esta manera, en la **Figura 2** las trayectorias sobre el cono tienen estructura nula, aquellas que unen un evento dentro y fuera del cono (a velocidad constante) tienen estructura espacialoide y finalmente aquellas que unen dos eventos dentro del cono (a velocidad constante) tienen estructura temporaloide.

Nos interesa ahora presentar otros dos resultados físicos importantes en RE: la *dilatación del tiempo* y la *contracción de Lorentz*. Sin embargo, antes vamos a esbozar un método de naturaleza geométrica para la calibración de sistemas de referencia inerciales, esto último será útil en la visualización de los dos resultados. Dada la naturaleza no euclidea del espacio-tiempo de Minkowski, no se puede esperar en este caso que el conjunto de puntos restringidos a un plano que equidistan de un punto fijo sea necesariamente una circunferencia. Si tomamos como punto fijo al origen del espacio-tiempo, y considerando que la forma de medir en este caso está dada por 1.6, es posible demostrar que dicho conjunto corresponderá a una hipérbola. Consideremos entonces por simplicidad los eventos coplanares $P = (t, x, 0, 0)$ y $P_i = (0, 0, 0, 0)$, la distancia entre ellos está dada por

$$\begin{aligned}\Delta s_{PP_i}^2 &= -(t - 0)^2 + (x - 0)^2 + 0^2 + 0^2 \\ &= -t^2 + x^2 = \pm a^2 \quad \text{para } a \in \mathbb{R} \text{ constante,}\end{aligned}\tag{1.9}$$

de donde se tiene que

$$\frac{\Delta s_{PP_i}^2}{\pm a^2} = -\frac{t^2}{\pm a^2} + \frac{x^2}{\pm a^2} = 1.\tag{1.10}$$

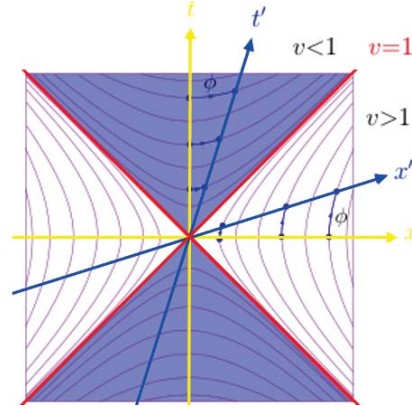
Es fácil ver que 1.10 representa a dos¹ posibles hipérbolas equiláteras en el plano $t - x$, todos los eventos P en dicho plano que la satisfacen serán equidistantes al evento en el origen P_i . Note que dependiendo del signo tomado en el término $\pm a^2$ se tendrán intervalos $\Delta s_{PP_i}^2$ temporaloides o espacialoides respecto al cono de luz del evento P_i . Además, por la invariancia del intervalo entre eventos 1.5, se tiene que $\Delta s_{PP_i}^2 = \Delta \bar{s}_{PP_i}^2$ (el sistema con barra \bar{O} se relaciona con $O = P_i$ mediante 1.2), de esta manera, las coordenadas \bar{t}, \bar{x} también satisfacen la ecuación 1.10 de las hipérbolas. Algunos conceptos presentados hasta ahora pueden ser visualizados en la **Figura 3**.

Finalmente, tomando cualquier evento P sobre la hipérbola (con término a^2) en intersección con el eje temporal t , podemos asegurar que el correspondiente evento \bar{P} localizado en la intersección de la misma hipérbola con el eje \bar{t} tendrá la misma coordenda espacial (es decir, $x = \bar{x}$), pues ambos resuelven la misma ecuación. De esta manera podemos calibrar el eje espacial \bar{x} para \bar{O} . Si ahora consideramos un evento P' en la intersección de la hipérbola (con término $-a^2$) con el eje x , podemos hallar de manera análoga al caso anterior, su correspondiente evento \bar{P}' sobre el eje \bar{x} (y la misma hipérbola que P') tal que sus coordenadas temporales

¹Una hipérbola por cada signo de $\pm a^2$, ambas comparten las asíntotas pero se extienden en distintos cuadrantes.

coinciden (es decir, $t = \bar{t}$). Queda de esta manera calibrado también el eje temporal del sistema de referencia \bar{O} . Con ayuda de estos hechos es sencillo demostrar los efectos de dilatación del tiempo y la contracción de Lorentz que exponemos a continuación.

Figura 3: Representación geométrica de un boost en dirección x entre sistemas inerciales. El sistema $x' - t'$ se desplaza velocidad $0 < v < 1$ respecto del sistema $t - x$. Se exhibe la simetría entre espacio y tiempo al coincidir el ángulo ϕ entre $t - t'$ y $x - x'$ respectivamente (el ángulo se relaciona con la velocidad relativa mediante $\tanh^{-1} v = \phi$). El conjunto de hipérbolas acotadas en la región $v < 1$ corresponden a conjuntos de eventos equidistantes (respecto del origen) temporaloides, mientras que las hipérbolas en la región $v > 1$ corresponden a eventos equidistantes espacialoides.



Consideremos nuevamente los mismos observadores inerciales ya citados, el observador \bar{O} mide un intervalo temporal $\Delta \bar{t}_{if}$ entre los eventos P_i^1 y P_f con un reloj cuya línea de mundo pasa por ellos. Por otro lado, el observador O mide el intervalo Δt_{if} entre los mismos eventos. El tiempo medido por O transcurre más lento (71), esto se puede ver a continuación

$$\Delta t_{if} = \frac{\Delta \bar{t}_{if}}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma \Delta \bar{t}_{if}. \quad (1.11)$$

Debido a que $0 < v < 1$, es claro ver que $\Delta \bar{t}_{if} < \Delta t_{if}$; es decir, ¡el tiempo se dilató para O ! Note que en 1.11 queda definido el factor γ de Lorentz (64).

Ahora, supongamos que se dispone de una barra de longitud $l_{\bar{O}}$ medida por el observador \bar{O} , dicha longitud es considerando a la barra en reposo desde su sistema de referencia; sin embargo, para el observador O dicha barra está moviéndose a la misma velocidad que lo hace \bar{O} ($v > 0$ en dirección x). Nuevamente a partir de un simple análisis geométrico (71), es posible demostrar que la longitud l_O de la misma barra que mide O en un instante es menor y está dada por

$$l_O = l_{\bar{O}} \sqrt{1 - v^2} = \frac{l_{\bar{O}}}{\gamma}. \quad (1.12)$$

De manera análoga al caso anterior, como $0 < v < 1$, se tiene que $l_O < l_{\bar{O}}$; es decir, ¡se ha contraído la barra para O !

¹Se debe recordar que P_i es el evento compartido en el origen de O y \bar{O} .

1.2.2. Cinemática relativista

Presentamos ahora tres objetos de naturaleza vectorial que son importantes en esta teoría física: la 4-velocidad \vec{U} , el 4-momento \vec{p} y la 4-aceleración \vec{a} . Sabemos que una partícula en general puede describir un movimiento acelerado, por tanto no existe en general un sistema de referencia respecto del cual estas están en reposo a lo largo de su línea de mundo; sin embargo, podemos suponer que en una vecindad espacio-temporal muy pequeña existe un *sistema momentáneamente en reposo* (SMR) respecto del cual sí sucede.

En el SMR la línea de mundo de la partícula no tendrá componentes espaciales (pues está en reposo), y por tanto localmente tendrá únicamente componente temporal, entonces cualquier vector tangente a esta línea será paralelo (71) al elemento temporal \vec{e}_0 de la base para dicho sistema de referencia. De esta manera, si consideramos como parámetro temporal al *tiempo propio*¹ τ , conseguimos que

$$\vec{U} = \vec{e}_0 = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = (\gamma, \gamma\vec{v}), \quad (1.13)$$

donde se ha usado (74) que $\gamma d\tau = dt$ y \vec{v} es la 3-velocidad.

Aprovechando esta definición, en el SMR es posible demostrar que $\vec{U} \cdot \vec{a} = 0^{\text{II}}$, y además se tiene (74) que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}. \quad (1.14)$$

Considerando ahora la masa en reposo m de la partícula (la masa medida en el SMR), tenemos (74) que

$$\vec{p} = m\vec{U} = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}), \quad (1.15)$$

donde $p^0 = E$ es la energía de la partícula.

Como caso particular y debido a que posteriormente utilizaremos este resultado, si consideramos que el SMR se desplaza a velocidad $v > 0$ en la dirección x de un sistema inercial O , entonces de 1.13 y 1.15 tenemos que la 4-velocidad \vec{U}_O y el 4-momento \vec{p}_O en O están dados por

$$\vec{U}_O = (\gamma, \gamma v, 0, 0) \text{ y } \vec{p}_O = (m\gamma, m\gamma v, 0, 0). \quad (1.16)$$

¹ Físicamente τ es el tiempo medido por el reloj comovil que pasa por los eventos de interés, mientras que matemáticamente desempeña el papel de parámetro por longitud de arco, concluyendo así que el vector velocidad está normalizado.

^{II} Esto coincide con el hecho de que el vector normal \hat{n} a una curva diferenciable α es siempre ortogonal al vector tangente $\dot{\alpha}$, cuando el parámetro es la longitud de arco.

Con la herramienta que hemos citado vamos a derivar ahora la famosa relación (usada ampliamente en física de partículas, por citar un ejemplo) relativista entre el momento (espacial) y la energía total de una partícula (masiva y no masiva). Esto es sencillo de 1.13 y 1.15, ya que por un lado se tiene que

$$\eta(\vec{U}, \vec{U}) = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1 \Rightarrow \eta(\vec{p}, \vec{p}) = m^2 \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -m^2, \quad (1.17)$$

y por otro lado se tiene que

$$\eta(\vec{p}, \vec{p}) = -E^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2. \quad (1.18)$$

Al igualar 1.17 con 1.18 y hacer un simple despeje para la energía se tiene que

$$E = \sqrt{m^2 + \sum_{i=1}^3 (p^i)^2}. \quad (1.19)$$

Consideremos ahora como aplicación de los últimos resultados a un fotón con energía E respecto de un sistema de referencia O . Como estas partículas viajan a la velocidad de la luz, entonces sus líneas de mundo son trayectorias nulas. Considerando la relación 1.18, se tiene entonces que su momento \vec{p} debe satisfacer

$$\eta(\vec{p}, \vec{p}) = -E^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = 0. \quad (1.20)$$

De 1.20 es claro que la energía de dicho fotón debe ser igual a la magnitud de su momento espacial, entonces de 1.19 concluimos que $m = 0$, ¡la masa en reposo de un fotón es nula!. Ahora podemos encontrar un resultado para el corrimiento en la frecuencia por *efecto Doppler*. Sin perder generalidad podemos pensar que dicho fotón tiene frecuencia ν y se mueve en la dirección x del sistema O . Si el sistema \bar{O} tiene velocidad v relativa a O en la misma dirección que el fotón, utilizando 1.16 y considerando que $E = h\nu$ para el fotón, podemos encontrar que la frecuencia $\bar{\nu}$ para el fotón relativa a \bar{O} está dada (71) por

$$\bar{\nu} = \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^{\frac{1}{2}} \nu. \quad (1.21)$$

1.3. Resumen de Relatividad General

El primer paso que Einstein da para concluir que la gravitación no trata de la descripción de un campo propagándose por el espacio-tiempo, sino de la descripción de la geometría de este último mediante el tensor métrico es proponiendo el *Principio de equivalencia*. Existen tres versiones de este principio (15), el *Principio de Equivalencia Débil* (PED), el *Principio de Equivalencia de Einstein* (PEE) y el *Principio de Equivalencia Fuerte* (PEF), y cada uno se distingue por la generalidad de su contexto de aplicación.

El PED establece que existen trayectorias *inerciales* en el espacio-tiempo, las cuales son tomadas por cualquier partícula de prueba sujeta únicamente a la gravedad. Se puede además asegurar que si nos restringimos a regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, entonces resulta indistinguible para cualquier observador el movimiento de partículas en caída libre en (1) un sistema uniformemente acelerado o (2) sujetas a un campo gravitacional. El hecho de restringirnos a una región local no permite que las variaciones del campo gravitacional sean detectadas.

Imaginemos ahora que un físico experimental se encuentra en un sistema aislado del exterior (no puede observar el exterior), entonces el PEE establece que no existe experimento local alguno (ya no se restringe a cuerpos en caída libre) con el cual se pueda distinguir si dicho sistema está en aceleración uniforme o si está sometido a un campo gravitacional externo; de esta manera, las leyes de la física en dicha región local se reducen a las de la Relatividad Especial. Este principio es motivado por la idea que tuvo Einstein acerca de que la gravedad debe ser universal, la gravedad debe afectar a todas las formas de energía-momento (no sólo a partículas masivas) de la misma manera.

Finalmente, cuando se extrapola el PEE a cualquier ley de la física, entonces obtenemos el PEF. Motivado por esto, Einstein establece el *principio de covarianza*, el cual enuncia que cualquier ley de la física que es válida en un espacio-tiempo plano con coordenadas inerciales, debe seguir siendo válida cuando la escribimos en su forma tensorial (independiente de coordenadas) en un espacio-tiempo que puede tener curvatura.

Debido a que los principios de equivalencia citados se restringen a regiones locales del espacio-tiempo, esto parece sugerir que la acción de la gravedad se manifiesta debido a la curvatura intrínseca de la variedad considerada. Motivados por este hecho, si consideramos a un objeto en caída libre (afectado por la gravedad) en alguna región local del espacio-tiempo, entonces aquel observador (también expuesto a dicho campo) para el cual dicho objeto no está acelerándose será denominado como un *sistema local de referencia*.

Como observación final, debido a que no existen objetos que sean indiferentes a la presencia de un campo gravitacional¹, diremos que un objeto en movimiento libre en dicho campo no está acelerado.

¹ Razón por la cual, no existe una referencia respecto de la cual medir la aceleración que un campo gravitacional causa.

1.3.1. Geometría y gravedad

Con el análisis que hemos expuesto hasta ahora, podemos concluir que el lenguaje más útil para tratar a la Relatividad General, es el de la geometría diferencial. Esta subsección tiene como propósito presentar un recuento breve de los conceptos básicos para tener por un lado una interpretación básica del carácter geométrico de las ecuaciones para el campo gravitacional y por otro lado la herramienta para analizar la cinemática de partículas en un espacio-tiempo dado. En este resumen se asumirá un conocimiento básico de geometría diferencial y el empleo de la notación tensorial, un tratamiento extenso y con aplicación a la RG del material presentado puede ser encontrado en (21).

Debido a que la geometría del escenario físico donde se llevan a cabo los eventos es de vital interés en esta teoría, comenzamos por recordar una definición para el concepto de *variedad diferenciable*. En nuestro caso cualquier espacio-tiempo considerado cumplirá las características de dichas estructuras; no obstante, es de interés particular tener presente qué es una *variedad pseudo-Riemanniana*, para lo cual necesitaremos también recordar qué es una métrica general sobre dichas variedades. En la siguiente subsección estas métricas representarán a las soluciones de las ecuaciones de campo y también es en función de estas que partiremos en la subsección 2.2.2 para hacer un análisis mecánico de trayectorias de partículas.

Definición 1. (49) Una n -variedad diferenciable de clase C^r es un par $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, donde \mathcal{A} es un atlas maximal \mathbb{R}^n -valuado, y tal que la topología inducida por \mathcal{A} hace a \mathcal{M} una variedad topológica.

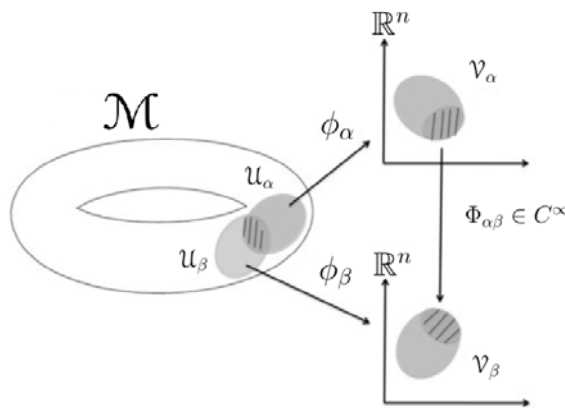


Figura 4: La estructura diferenciable (C^r) de la n -variedad \mathcal{M} exige que toda transición de la forma $\Phi_{\beta\alpha} = \phi_{\beta} \circ \phi_{\alpha}^{-1} : \phi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \mapsto \phi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ sea al menos un difeomorfismo C^r , si toda transición es C^{∞} entonces se dice (73) que \mathcal{M} es suave. A las parejas $\{U_{\alpha}, \phi_{\alpha}\}$ se les llama cartas, y a sus inversas $\{V_{\alpha}, \phi_{\alpha}^{-1}\}$ parametrizaciones.

El hecho de que una variedad \mathcal{M} (ver Figura 4) sea variedad topológica, nos garantiza que sus abiertos locales son homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n . Más aún, como el cálculo usual en \mathbb{R}^n se ha construido sobre conjuntos abiertos, y

1. TEORÍA ESTÁNDAR

considerando que \mathcal{A} nos ofrece una colección de difeomorfismos de clase C^r para las cartas consideradas, podemos dotar a \mathcal{M} de una herramienta matemática poderosa en RG, el *cálculo tensorial*.

Definición 2. (49) Una métrica pseudo-Riemanniana es un campo tensorial $g \in \mathcal{T}_2(\mathcal{M})$ que cumple ser simétrico, no degenerado y con índice constante en \mathcal{M} . Particularmente, si anclamos el campo g en $p \in \mathcal{M}$, decimos que $g_p \in T_2^0(\mathbb{T}_p\mathcal{M})$ es un tensor métrico para el espacio tangente $\mathbb{T}_p\mathcal{M}$.

La definición anterior no hace explícito que g es campo tensorial positivo definido en \mathcal{M} , permitiendo así la posible existencia de espacios en la variedad que logren definir un índice positivo para la métrica ($ind(g) > 0$). Esto se traduce en afirmar que en cada espacio tangente $\mathbb{T}_p\mathcal{M}$ se tiene un subespacio $W_p \leq \mathbb{T}_p\mathcal{M}$ de dimensión máxima tal que $ind(g_p) = dim W_p$, y además $g_p \upharpoonright_{W_p}$ es negativo definido.

Con el contenido expuesto hasta ahora ya tenemos la estructura geométrica básica deseada para un escenario físico en RG, al par (\mathcal{M}, g) le llamamos (58) variedad pseudo-Riemanniana. A continuación veremos cómo un caso particular de este tipo de variedades nos da una característica general de un espacio-tiempo físico en términos de la forma del tensor métrico.

Una n -variedad pseudo-Riemanniana de tipo $(\mathcal{M}_{\nu, g_{\nu}}^r)$ es conocida (49) como *variedad Lorentziana* cuando $r = n - 1$ y $\nu = 1$, y es el modelo general de espacio-tiempo usado en RG si nos restringimos a $n = 4$. El tipo de métrica usada en las variedades Lorentzianas es de la forma $g_{\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = -\sum_{i=1}^{\nu} x^i y^i + \sum_{j=\nu+1}^n x^j y^j$ para $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{T}_p\mathcal{M}$. Como caso especial, el espacio-tiempo en el que se desarrolla la Relatividad Especial se identifica con la variedad (\mathbb{R}_1^4, η) , concluimos que el espacio-tiempo de Minkowski es una variedad Lorentziana. Así también hemos mostrado en qué sentido la RE se reduce a un caso muy limitado de la RG.

Un concepto implícito en los índices r y ν para la definición que hemos citado de variedad Lorentziana es el de *signatura*, el cual se debe tomar en cuenta al momento de realizar los cálculos en RG. Consideremos una base ortonormal $\beta = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ para el espacio $\mathbb{T}_p\mathcal{M}$. Si $ind(g_p) = k > 0$, podemos obtener una base β ordenada a partir de β , de tal forma que $g_p(e_i) = -1$ para $1 \leq i \leq k$ y $g_p(e_j) = +1$ para $k + 1 \leq j \leq n$. Llamamos (58) *signatura* de la métrica g_p al arreglo $(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1)$ respecto a β .

Tal vez el concepto geométrico más importante en RG es el de *curvatura*, el cual por supuesto también tiene todo un formalismo matemático que lo sustenta. Basta citar que las ecuaciones de campo de Einstein, relacionan la curvatura local del espacio-tiempo con la distribución de energía-momento en dicha región, y nosotros estamos particularmente interesados en conocer algunas soluciones a dichas ecuaciones. La curvatura en una variedad depende de los coeficientes de una *conexión*, y estos a su vez pueden o no depender de la manera en que medimos en dicho conjunto. En particular, si queremos sacar provecho físico a la consideración de espacios que no son planos en una teoría como la Relatividad

General, necesitamos dotar a la variedad de una métrica, y por tanto, la conexión y a su vez la curvatura pueden quedar definidas de manera única a partir de la métrica. Comenzamos presentando el siguiente resultado:

Teorema 1. (49) *Para una variedad pseudo-Riemannina dada (\mathcal{M}, g) , existe una única conexión métrica ∇ , tal que es libre de torsión, $\mathbb{T} \equiv 0$. Esta única conexión es llamada la conexión de Levi-Civita para (\mathcal{M}, g) .*

Un resultado verificable (15) que complementa al teorema anterior es que los coeficientes para la conexión citada están determinados por los *símbolos de Christoffel*

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (1.22)$$

El *tensor de torsión* definido por los coeficientes de una conexión $\tilde{\Gamma}$ tiene componentes de la forma $\mathbb{T}_{\mu\nu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda}$. Si consideramos a los símbolos de Christoffel recién definidos, notamos que estos son simétricos en sus índices covariantes, de donde podemos asegurar que

$$\mathbb{T}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = 0. \quad (1.23)$$

Esta es la propiedad citada en el **Teorema 1**; es decir, los símbolos de Christoffel son los coeficientes asociados a una conexión *libre de torsión*.

Podemos ahora escribir la *derivada covariante*^I que generaliza^{II} como operador a la derivada parcial en términos de la métrica y con los coeficientes 1.22 de la conexión como factor de corrección^{III}. Para cualquier tensor $S \in T_l^k(\mathbb{T}_p\mathcal{M})$, su derivada covariante será un tensor $S' \in T_{l+1}^k(\mathbb{T}_p\mathcal{M})$ con componentes dadas (83) por

$$\begin{aligned} (S')^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l\nu_{l+1}} &= \nabla_{\sigma} S^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} \\ &= \partial_{\sigma} S^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \sum_i \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_i} S^{\mu_1\dots\lambda\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} \\ &\quad - \sum_j \Gamma_{\sigma\nu_j}^{\lambda} S^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\lambda\dots\nu_l}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Finalmente, una propiedad importante acerca de la conexión dada que permite simplificar cálculos en RG es la *compatibilidad con la métrica*, esto se expresa

^I En este caso se suele llamar derivada covariante a la conexión de Levi-Civita.

^{II} La derivada covariante es un operador independiente de coordenadas arbitrarias que se reduce como operador a la derivada parcial en un espacio plano con coordenadas inerciales.

^{III} Los coeficientes de la conexión permiten que la derivada covariante se transforme como tensor, cancelando los términos que hacen a la derivada parcial un objeto no tensorial.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

como

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.25)$$

La conexión de Levi-Civita ∇ también permite definir a lo largo de una trayectoria $x^{\mu}(\lambda)$ sobre la variedad, al operador *derivada covariante direccional* $\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \nabla_{\mu}$. Con este nuevo operador podemos comparar un campo tensorial definido en puntos cercanos sobre la variedad conectados por la trayectoria $x^{\mu}(\lambda)$, lo cual se logra mediante el *transporte paralelo*. Si consideramos un tensor S definido en dos puntos cercanos, podemos conocer qué tanto cambia entre estos respecto al tensor que resulta de desplazar a S de manera paralela sobre la trayectoria que une ambos puntos. La manera de expresar matemáticamente que S ha sido desplazado paralelamente (i.e. no hay cambio) es mediante la *ecuación de transporte paralelo*

$$\left(\frac{D}{d\lambda} S \right)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} \nabla_{\sigma} S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0, \quad (1.26)$$

donde se ha supuesto que S es de rango arbitrario y por tanto se cumple en general la relación 1.24.

El hecho de trabajar con una conexión compatible con la métrica, permite deducir fácilmente a partir de 1.25 que la métrica siempre satisface 1.26, por lo cual siempre es transportada paralelamente. Con este hecho, podemos demostrar que cualquier par de campos vectoriales transportados paralelamente¹ con componentes V^{μ} y \tilde{V}^{ν} preservarán su producto escalar o norma (en caso de que $V^{\mu} = \tilde{V}^{\nu}$), esto queda claro del siguiente cálculo simple

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} V^{\mu} \tilde{V}^{\nu}) \\ &= \underbrace{\left(\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right)}_{g_{\mu\nu} \text{ satisface 1.26}} V^{\mu} \tilde{V}^{\nu} + g_{\mu\nu} \underbrace{\left(\frac{D}{d\lambda} V^{\mu} \right)}_{\text{hipótesis}} \tilde{V}^{\nu} + g_{\mu\nu} V^{\mu} \underbrace{\left(\frac{D}{d\lambda} \tilde{V}^{\nu} \right)}_{\text{hipótesis}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Como se puede inferir en la introducción de este capítulo, cuando consideramos a la gravedad como una caracterización geométrica del espacio, el movimiento de toda partícula (masiva o no masiva) estará determinado por trayectorias inerciales cuando no existen fuerzas externas presentes. En la teoría Newtoniana las trayectorias inerciales seguidas por una partícula libre corresponden a rectas, las

¹Desde que la ecuación de transporte paralelo es válida para campos tensoriales de rango arbitrario, entonces es válida para cualquier campo vectorial suave, basta que apliquemos el caso correcto de 1.24 en 1.26.

cuales como sabemos minimizan la distancia entre dos puntos fijos en el espacio plano (no Lorentziano). Este resultado sigue siendo cierto en espacios curvos, pues las trayectorias inerciales que toman partículas libres cumplen minimizar la distancia de recorrido, a dichas trayectorias en general se les denomina *geodésicas*. La aplicación más importante en RG de la ecuación 1.26 reside en establecer una expresión para la geodésica que seguirá una partícula libre en una variedad con curvatura arbitraria. Consideremos que $x^\mu(\lambda)$ es la trayectoria que une a la pareja de puntos sobre la variedad que nos interesan, una característica que debe cumplir $x^\mu(\lambda)$ para ser geodésica es transportar paralelamente a su propio vector tangente (83) $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ a lo largo de todo el intervalo para λ . Desde que el campo vectorial tangente es un caso particular de campo tensorial podemos asegurar que la *ecuación geodésica* está descrita a partir de 1.26 como

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (1.28)$$

El tiempo propio τ es el parámetro natural para describir la trayectoria de una partícula mediante la ecuación geodésica. El parámetro λ en 1.28 es llamado *parámetro afín* si está relacionado con τ mediante una transformación afín de la forma

$$\lambda = \alpha\tau + \beta, \quad (1.29)$$

donde α y β son constantes.

Recordemos ahora la definición de 4-momento dada en 1.15 para una trayectoria con parámetro τ . Si sustituimos a p^μ en la ecuación de transporte paralelo 1.26 obtenemos una versión de la ecuación 1.28 cuya interpretación física es que la partícula se mueve sobre geodésicas en la dirección que apunta¹ su 4-momento, se tiene de esta manera

$$p^\sigma \nabla_\sigma p^\mu = 0. \quad (1.30)$$

Desde que la naturaleza causal del 4-vector tangente a una trayectoria $x^\mu(\lambda)$ se define a partir de la negatividad (anulación o positividad) de su evaluación por la métrica $g(\dot{x}^\mu(\lambda), \dot{x}^\mu(\lambda))$, la aplicación del resultado dado en 1.27 a la geodésica descrita por 1.30 (intercambiando al 4-momento por la 4-velocidad) permite asegurar que una partícula física seguirá una geodésica puramente temporaloide (o nula) pues el producto escalar es conservado.

¹La relación entre el 4-momento y la 4-velocidad es proporcional a la masa de la partícula. Una partícula sobre una trayectoria sigue la dirección de su 4-velocidad y por tanto de su 4-momento, pero la 4-velocidad es el vector tangente a la trayectoria y por tanto si se satisface la ecuación geodésica este vector es transportado paralelamente, de donde el 4-momento también lo cumplirá.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

Hemos tratado hasta ahora con objetos geométricos que nos permiten generalizar conceptos a espacios que no son planos; sin embargo, ninguno de estos objetos tiene como función describir la curvatura intrínseca de la variedad. Toda la información acerca de la curvatura de una variedad está codificada en un objeto tensorial que posteriormente aparecerá en las ecuaciones que describen al campo gravitacional. Debido a que hemos considerado particularmente una conexión métrica, la descripción de la curvatura en la variedad va a depender del tensor métrico. Como se cita en (49), en general se tiene que para una variedad pseudo-Riemannina dada (\mathcal{M}, g) con conexión métrica ∇ de Levi-Civita, el tensor tipo $(1, 3)$ de curvatura asociado es el *tensor de curvatura de Riemann*, cuya aplicación sobre tres campos vectoriales X, Y y Z está determinada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} X^\mu Y^\nu Z^\sigma = & X^\lambda \nabla_\lambda (Y^\eta \nabla_\eta Z^\rho) - Y^\lambda \nabla_\lambda (X^\eta \nabla_\eta Z^\rho) \\ & - (X^\lambda \partial_\lambda Y^\eta - Y^\lambda \partial_\lambda X^\eta) \nabla_\eta Z^\rho. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Una manera de interpretar la utilidad del tensor de Riemann es que éste objeto nos permite conocer localmente la medida en la que el tensor métrico en la variedad no es equivalente al de un espacio plano, lo cual es una manifestación de que la curvatura afecta la definición de una isometría local. Un ejemplo que resulta fácil de imaginar en el cual la curvatura es determinante es el siguiente: en un espacio plano un vector permanece invariante cuando es transportado paralelamente a lo largo de una trayectoria cerrada, en cambio si el espacio tiene curvatura puede suceder que el vector que ha recorrido paralelamente la trayectoria completa no coincide con el vector al inicio de ésta; es decir, ha sido transformado. De la expresión en 1.31 podemos identificar a X^μ y Y^ν como las componentes de los vectores que localmente definen la trayectoria, mientras que a Z^σ como las componentes del vector que es transportado paralelamente, de tal manera que $\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es la transformación aplicada en la trayectoria.

Sabemos que la conexión que hemos usado hasta ahora es libre de torsión, lo cual permite encontrar (15) una manera útil de representar al tensor de Riemann que es equivalente a la dada en 1.31, la expresión está dada en función de los símbolos de Christoffel como

$$\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.32)$$

Es claro de la definición para los símbolos de Christoffel en 1.22 que el tensor de Riemann en 1.32 está determinado por la métrica; más aún, como la dependencia involucra explícitamente a las primeras derivadas de sus componentes, se sigue inmediatamente que si la métrica es constante para un sistema de coordenadas entonces $\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$. Además, sabemos que la relación anterior es una ecuación tensorial, de donde concluimos que es válida para cualquier sistema coordenado. Por otro lado, si se tiene que $\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$ entonces es posible encontrar coordenadas para las cuales la métrica tiene componentes constantes¹ (15). Se concluye que el

¹ Por ejemplo, la métrica del espacio-tiempo de Minkowski expresada en 1.7 no tiene componen-

tensor de Riemann provee un criterio para saber cuándo una métrica arbitraria está describiendo a una variedad plana o con curvatura intrínseca (en cuyo caso $\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} \neq 0$).

Las propiedades de simetría y antisimetría del tensor de Riemann pueden ser estudiadas considerando¹ su forma con sus cuatro índices covariantes. El tensor tipo $(0, 4)$ obtenido lo podemos descomponer además en dos partes (83): la parte con traza no nula y la parte libre de traza. De particular interés es la parte con traza no nula, de la cual podemos extraer al *tensor de Ricci* considerando la traza definida por el segundo y cuarto índice (o equivalentemente por el primero y el tercero), quedando definido entonces como

$$\mathcal{R}_{\rho\mu} = \mathcal{R}_{\rho\sigma\mu}{}^\sigma. \quad (1.33)$$

El tensor de tipo $(0, 2)$ definido en 1.33 es simétrico ($\mathcal{R}_{\rho\mu} = \mathcal{R}_{\mu\rho}$) debido a que el tensor $(0, 4)$ de Riemann es simétrico ante la permutación de índices no consecutivos ($\mathcal{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$). El tensor de Ricci permite además definir al *escalar de curvatura* \mathcal{R} a partir de su traza como

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\rho{}^\rho. \quad (1.34)$$

Para finalizar, presentamos a continuación al *tensor de Einstein*, el cual es de tipo $(0, 2)$ ya que se puede construir a partir de la métrica, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura como

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathcal{R}. \quad (1.35)$$

El tensor de Einstein en 1.35 es simétrico ya que el tensor de Ricci lo es y la métrica también. Otra propiedad muy importante de este objeto desde el punto de vista de la Relatividad General es que se cumple (83) la siguiente identidad¹¹

$$\nabla^\alpha \mathcal{G}_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.36)$$

1.3.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de movimiento de un sistema físico se pueden derivar aplicando el *principio de acción estacionaria* a la acción \mathcal{S} del sistema, este principio es fundamentado en el cálculo variacional una vez que se conoce el *Lagrangiano* del sistema. Para el caso gravitacional, utilizando los principios de equivalencia

tes constantes; sin embargo, como el tensor de Riemann es nulo sabemos que deben existir coordenadas para las cuales la métrica es constante, la expresión en 1.6 es el caso citado.

¹ Actuando con la métrica por la izquierda se tiene que $\mathcal{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}\mathcal{R}^\lambda_{\sigma\mu\nu}$.

¹¹ Debido a que el tensor de Riemann cumple con la identidad de Bianchi (83), es fácil demostrar que el tensor de Einstein cumple la relación 1.36, la cual evidentemente es de carácter puramente geométrico.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

y la condición de obtener una teoría covariante en el espacio-tiempo, se puede derivar una *densidad Lagrangiana* de la forma $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L(g, \partial g, \partial^2 g)$, donde se hace explícito que se ha dotado al espacio-tiempo con una métrica g . La forma explícita de esta densidad a partir de la cual se encuentran las ecuaciones de campo, está expresada en la *acción de Einstein-Hilbert*

$$\mathcal{S}[g] = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{R} - 2\Lambda), \quad (1.37)$$

donde \mathcal{R} es el escalar definido en 1.34 y Λ es la constante cosmológica.

La variación de la funcional en 1.37 está dada (30) por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\frac{c^3}{16\pi G} (\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta}), \quad (1.38)$$

donde aparece el tensor de Einstein definido en 1.35.

A partir de 1.38 obtenemos (30) las ecuaciones de campo en el vacío

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.39)$$

Sin embargo, el caso más general se da cuando incluimos la presencia de materia, para lo cual se debe considerar también la acción de Einstein-Hilbert modificada

$$\mathcal{S}_m[\Phi, g] = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} L_m(\Phi, g), \quad (1.40)$$

donde Φ^A son las componentes de variables dinámicas de *campos de materia*.

La variación en este caso está dada (30) por

$$\delta \mathcal{S}_m[\Phi, g] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta \Phi^A} \delta \Phi^A + \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} \right). \quad (1.41)$$

Se asume que las ecuaciones dinámicas de los campos de materia se satisfacen, de esta manera se cumple que

$$\frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta \Phi^A} = 0. \quad (1.42)$$

Por otro lado, la variación respecto a la métrica satisface

$$\frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{-g}}{2c} T^{\alpha\beta}, \quad (1.43)$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor asociado a la distribución de energía-momento.

Finalmente, al considerar la acción total $\mathcal{S}[g] + \mathcal{S}_m[\Phi, g]$, y resolver el problema de encontrar el extremo respecto a variaciones en la métrica, se encuentran (30) las ecuaciones de campo de Einstein

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.44)$$

Las ecuaciones de campo en 1.44 describen por un lado a la gravedad como la manifestación de la acción que tiene la curvatura del espacio-tiempo sobre la materia, y por otro lado cómo la curvatura es la reacción del propio espacio-tiempo a la presencia de una distribución de energía-momento. La ley de conservación de la distribución de energía-momento ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$) comparada con la identidad geométrica dada en 1.36 para el tensor de Einstein determinan la consistencia¹ de las ecuaciones del campo gravitacional.

1.3.2. Principales soluciones de tipo estacionario

En esta sección se presentan las cuatro soluciones básicas a las ecuaciones de campo 1.44 cuando consideramos que $\Lambda = 0$ y no existe distribución exterior de materia $T_{\mu\nu} = 0$. Las dos soluciones eléctricamente neutras son de particular interés para el desarrollo hecho en la sección 3.2, por tanto sólo estas serán analizadas con breve detalle en 1.3.2.1; sin embargo, su derivación matemática y una discusión extensa sobre la física en dichas variedades se puede encontrar en (19).

Definición 3. (5) *Si una solución a las ecuaciones de campo definiendo un espacio-tiempo es tal que todas las componentes de la métrica no dependen del tiempo coordenado y además la métrica permanece invariante ante inversiones temporales ($t \rightarrow -t$), entonces se dice que la solución es estática.*

En la definición anterior describimos un tipo muy particular de solución; sin embargo, existe otro que describe a un espacio-tiempo con una métrica independiente del tiempo, pero que no resulta permanecer invariante bajo la inversión temporal, a dicha solución (o equivalentemente, a dicho espacio-tiempo) la llama-

¹ Si consideramos la constante cosmológica Λ , entonces basta recordar que trabajamos con una conexión compatible con la métrica 1.25.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

mos *estacionaria*¹. Soluciones de este tipo son las que nos interesan, más aún, es preciso mencionar que otra restricción de las soluciones que presentaremos es que estas describen un espacio-tiempo *asintóticamente plano*, lo cual es esperado si la concentración de materia está confinada en una región compacta. Esta última característica permite asegurar¹¹ que conforme $r \rightarrow \infty$ entonces la variedad es *asintóticamente vacía*, lo cual se traduce (76) a requerir que $R_{\mu\nu} = 0$ y por tanto a grandes distancias el espacio-tiempo luce como el de Minkowski.

Tanto las soluciones estáticas como las estacionarias son las más simples; a pesar de esto, estas resultan ser un buen modelo para un objeto compacto estático o con rotación estable, por tanto son de interés astrofísico. Por otro lado, este tipo de soluciones satisfacen ecuaciones elípticas a diferencia de las soluciones dinámicas, las cuales satisfacen ecuaciones hiperbólicas, por tanto son matemáticamente más sencillas de obtener (5). Las principales soluciones estacionarias describen a estrellas inactivas o ciertos agujeros negros, y dentro de este conjunto de soluciones las más sencillas son las de simetría esférica. Un caso de interés lo constituyen las soluciones a las ecuaciones de Einstein sin campos de materia, para las cuales citamos a continuación un resultado (demostración en (35)) que asegura que la métrica de Schwarzschild es la solución isotrópica con simetría esférica más general.

Teorema de Birkhoff. (12) *Cualquier solución con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en el vacío es isométrica a la solución de Schwarzschild.*

Una interpretación física de este resultado es que el espacio-tiempo en el exterior de una estrella esférica que ha consumido su combustible nuclear será descrito por la solución independiente del tiempo de Schwarzschild, aún cuando la estrella se modifique en el tiempo en el proceso de colapso, por lo cual la suposición de que el objeto sea estático no es necesaria.

La métrica de Schwarzschild describe el campo gravitacional exterior de un objeto compacto de masa m y simetría esférica, sus componentes están definidas en coordenadas (t, r, θ, φ) (36) por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

¹ Un claro ejemplo de solución estacionaria que no es estática es la solución de Kerr, esto se debe a que su componente $g_{t\varphi}$ no es nula. Aunque sus componentes no dependen del tiempo, una inversión temporal ($t \rightarrow -t$) equivale a cambiar el signo del momento angular, y por tanto se obtiene un objeto rotando en sentido contrario; sin embargo, si se considera simultáneamente una inversión azimutal ($\varphi \rightarrow -\varphi$) entonces se vuelve a hacer un cambio de dirección en la rotación, manteniendo finalmente la geometría invariante (35).

¹¹ Desde que sólo nos interesan las variedades en el exterior de los agujeros negros, estos cumplen la condición de ser *asintóticamente simple (débilmente)* que se cita en (76).

Una solución no estática, pero sí estacionaria y que desprecia campos de materia es la de Kerr, la cual describe el campo gravitacional exterior de un objeto compacto de masa m con momento angular por unidad de masa (parámetro de espín) $a = \frac{J}{m}$, a diferencia del caso anterior este objeto rota y sólo posee simetría axial. Dado que es de interés describir las órbitas de partículas de prueba alrededor de objetos compactos, para esta solución y el par restante es usual optar por las *coordenadas de Boyer–Lindquist*, las cuales permiten derivar de manera sencilla a partir del Hamiltoniano cuatro cantidades de movimiento conservadas. Esta elección de coordenadas extiende a las del caso de Schwarzschild incluyendo a los parámetros propios de cada solución. Las componentes de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist están definidas (3) por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

donde

$$\rho^2 := \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.47)$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2. \quad (1.48)$$

Nota: La definición $\rho^2 := \Sigma$ en 1.47 implica que a partir de ahora se puede usar de manera indistinta tanto ρ^2 como Σ para hacer referencia a 1.47.

Otra solución estática a las ecuaciones de campo fue encontrada en 1916 por Hans J. Reissner, la cual fue publicada en la revista *Annalen der Physik* en un artículo llamado “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie”. En dicho trabajo se describe el campo gravitacional debido a una masa puntual m con carga eléctrica Q ; sin embargo, poco tiempo después Gunnar Nordström generalizó dicha solución a un objeto cargado de simetría esférica. A dicha versión extendida se le denomina solución de Reissner-Nordström, y las componentes de la métrica están dadas en coordenadas (t, r, θ, φ) (2) por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\kappa_e Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\kappa_e Q^2}{r^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

donde $\kappa_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ es la constante de Coulomb.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

Finalmente, si consideramos ahora a un objeto compacto con carga eléctrica Q y con rotación asociada a un parámetro de espín $a = \frac{J}{m}$, entonces una solución estacionaria y con simetría axial que describe el exterior de dicho objeto deberá considerar ambos parámetros (además de su masa m). La solución es la de Kerr-Newmann, y en coordenadas de Boyer–Lindquist está dada (2) por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2mr-Q^2}{\Sigma}\right) & 0 & 0 & -\frac{(2mr-Q^2)a \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{(2mr-Q^2)a \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & r^2 + a^2 + \frac{(2mr-Q^2)a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

donde Σ está dada por 1.47 y Δ (diferiendo del caso de Kerr en 1.48) está dada por

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + Q^2. \quad (1.51)$$

Las observaciones astronómicas no han localizado candidatos con carga eléctrica apreciable, si bien podemos atribuirle el nombre de agujero negro a las soluciones de Reissner-Nordström y Kerr-Newmann, no podemos asegurar que modelen a un objeto astrofísico real.

Bajo la suposición de considerar objetos compactos aislados, existe una conjetura (no probada) que propone que sólo tres parámetros observables desde el exterior caracterizan a un agujero negro: masa m , carga eléctrica Q y momento angular J . Toda la información que ingresa al horizonte de eventos (incluyendo la materia misma que conforma al objeto compacto) es inaccesible para observadores externos, por dicho motivo Jacob Bekenstein acuñó^I la frase que daría nombre a la conjetura: “*los agujeros negros no tienen pelo*”. Si suponemos que la conjetura es cierta, entonces sólo existen los cuatro tipos básicos de agujeros negros ya presentados, de los cuales el más general está descrito por la solución de Kerr-Newman. Los siguientes tres teoremas son algunos de los avances^{II} que se han hecho en camino a la prueba de la conjetura citada:

Teorema de Hawking. (34) *Un agujero negro estacionario debe tener un horizonte con topología esférica; y debe ser estático (con momento angular cero) o axialmente simétrico, o ambos.*

Teorema de Israel. (42) *Cualquier agujero negro estático con un horizonte de topología esférica tiene campos externos determinados únicamente por su masa*

^I Bekenstein también sugiere por primera vez un teorema relacionado a la conjetura, posteriormente publicó una corrección (9).

^{II} Actualizaciones sobre teoremas relacionados pueden ser encontrados en (65).

m y su carga Q ; más aún, aquellos campos externos se describen por la solución de Schwarzschild si $Q = 0$ y la solución de Reissner–Nordström si $Q \neq 0$.

Teorema de Carter. (17) Todos los agujeros negros estacionarios, axialmente simétricos, sin carga y con horizontes de eventos de topología esférica se encuentran en dos familias disjuntas no deformables una en la otra. Los agujeros negros en cada familia tienen campos gravitacionales externos determinados únicamente por dos parámetros: la masa m y el momento angular J .

1.3.2.1. Estructura de las soluciones neutras ($Q = 0$)

La solución estática de Schwarzschild representa el escenario relativista análogo al problema clásico analizado por J. Mitchell y Laplace. De hecho, cuando $v_{esc} = 1$ se obtiene $r = 2m$ ($G = 1, c = 1$) de acuerdo a 1.1, este caso es válido en el contexto de la Relatividad General; sin embargo, hay que enfatizar que la restricción de causalidad impuesta en RG implica considerar a la velocidad de la luz como un límite para la velocidad de partículas físicas, lo cual no era un requisito en la versión Newtoniana. Podemos entonces asegurar que en el espacio-tiempo descrito por la métrica en 1.45, a partir de la superficie determinada por $r = 2m$ incluso los fotones no podrán escapar, y por tanto cualquier evento encerrado (con $r < 2m$) en su interior no podrá ser observado; es decir, un *horizonte de eventos* (ver Figura 5)¹ en el espacio-tiempo de Schwarzschild está definido por dicha superficie. De 1.45 es fácil verificar que $g^{11} = (g_{11})^{-1}$, identificamos al horizonte de eventos como la superficie en la cual se cumple que $g^{11} = 0$. Debido a que ninguna partícula puede escapar cuando cruza el horizonte de eventos, los conos de luz deben inclinarse de tal forma que el futuro causal queda restringido al interior del horizonte para una partícula

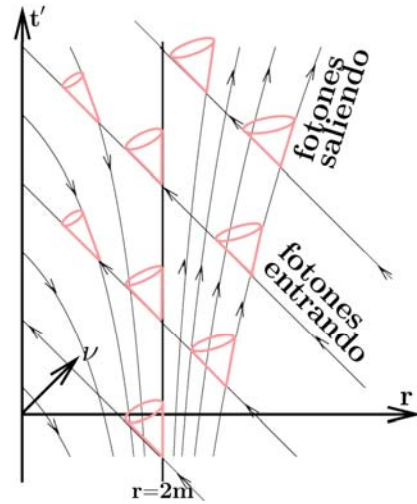


Figura 5: Horizonte de eventos para un agujero negro de Schwarzschild en un diagrama con coordenadas $(\nu, r, \theta, \varphi)$ de Eddington-Filkenstein. El tiempo coordinado t en 1.45 se indica por la flechas en las líneas de mundo, el parámetro t' se define como $t' = r + \nu$. Los “fotones saliendo” son aquellos que estando en la región $r > 2m$ tienen libertad de alejarse de la captura gravitacional. Los “fotones entrando” son aquellos que se dirigen hacia el horizonte. Cuando los fotones se internan en la región $r < 2m$ la inclinación de los conos indica que nada podrá escapar a la captura gravitacional, toda partícula será atraída a la singularidad en $r = 0$.

¹ Las coordenadas de Eddington-Filkenstein $(\nu, r, \theta, \varphi)$ se obtienen al analizar las geodésicas radiales de fotones, y son de interés particular en estudios de colapso gravitacional. Con estas coordenadas además se logra derivar la métrica de Schwarzschild para las coordenadas de Kruskal-Szekeres, las cuales sólo incluyen la singularidad de curvatura en $r = 0$.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

física; es decir, el horizonte de eventos actúa como una membrana con flujo de partículas en un sólo sentido. El caso expuesto es particular, en general se tiene que el horizonte de eventos se caracteriza por ser una *hipersuperficie nula*; es decir, una superficie cuyo vector normal siempre es nulo ($\eta^\alpha \eta_\alpha = 0$) y para la cual sólo una dirección tangente reside en el cono local de luz (3).

Para un espacio-tiempo estacionario, llamamos *superficie de límite estacionario* al lugar geométrico en el cual una partícula permanecerá en reposo respecto a un observador en el infinito, de tal forma que estas partículas seguirán líneas de mundo de la forma $x(\lambda) = (\lambda, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ para las cuales $dr = d\theta = d\varphi = 0$. Para el caso de un fotón, aseguramos que si reside en tal superficie éste nunca llegará al observador, razón por la cual a este lugar geométrico se le conoce también como *superficie de corrimiento al rojo infinito*. Esta superficie estará definida por todos aquellos puntos de la variedad para los cuales $g_{00} = 0$. Notemos de las componentes de la métrica dada en 1.45 que $g_{00} = 0$ cuando $r = 2m$; es decir, ¡el horizonte de eventos y la superficie de límite estacionario coinciden en el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild!

Analizamos ahora la estructura del espacio-tiempo de Kerr. Para determinar las hipersuperficies relevantes y la singularidad de curvatura se complementará el comportamiento de la métrica dada en 1.46 con información procedente de coordenadas convenientes para su visualización, las coordenadas “Cartesianas” de Kerr-Schild (t, x, y, z) . El elemento de línea en este sistema está dado (16) por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[dt + \frac{r(dx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right], \quad (1.52)$$

donde r no es una coordenada, sino una función $r = r(x, y, z)$ sujeta implícitamente a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right). \quad (1.53)$$

El caso de Kerr es más rico en estructura, basta notar que todas las componentes dadas en 1.46 para coordenadas de Boyer-Lindquist exhiben comportamientos anómalos para determinados valores de sus parámetros. A continuación exhibimos explícitamente tales situaciones

A) $g^{11} = \frac{\Delta}{\rho^2} = 0$ si $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0$.

B) $g_{00} = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) = 0$ si $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 2mr$.

C) $g_{11} = g_{22} = 0$ y $\{g_{03}, g_{00}, g_{33}\} \rightarrow \{\infty\}$ si $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$.

De 1.46 se puede obtener que $g^{11} = (g_{11})^{-1}$, de tal forma que la relación en **A)** determina (en analogía con el caso de Schwarzschild) hipersuperficies nulas.

Ahora, la definición para el parámetro Δ se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2mr + m^2 - (m^2 - a^2) = (r - m)^2 - \left(\sqrt{m^2 - a^2}\right)^2 \\ &= \left[(r - m) + \left(\sqrt{m^2 - a^2}\right) \right] \left[(r - m) - \left(\sqrt{m^2 - a^2}\right) \right] \\ &= (r - r_+)(r - r_-),\end{aligned}\tag{1.54}$$

donde se han hecho las siguientes identificaciones que permitirán determinar al horizonte de eventos exterior e interior (3)

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2},\tag{1.55}$$

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2}.\tag{1.56}$$

Si consideramos a 1.55 y 1.56 en 1.53 se obtiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{z^2}{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2}\right)^2}\right),\tag{1.57}$$

de donde se obtienen por simple manipulación algebraica las ecuaciones de los elipsoides determinados por

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2}\right)^2 + a^2} + \frac{z^2}{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2}\right)^2}.\tag{1.58}$$

De 1.55 y 1.56 se tiene que $r_- \leq r_+$; así, la relación 1.58 representa a dos elipsoides concéntricos, el horizonte exterior (para r_+) encerrando al horizonte interior (para r_-).

La condición en **B)** permitirá encontrar el lugar geométrico de corrimiento al rojo infinito. Todos los cálculos son análogos al caso anterior, pues la relación $r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2mr = 0$ puede ser reescrita como

$$0 = (r - m)^2 - \left(\sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}\right)^2 = [r - r_{erg+}] [r - r_{erg-}],\tag{1.59}$$

donde se han hecho las siguientes identificaciones para determinar las hipersuperficies de límite estacionario (3)

$$r_{erg+} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta},\tag{1.60}$$

$$r_{erg-} = m - \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}.\tag{1.61}$$

1. TEORÍA ESTÁNDAR

Al introducir 1.60 y 1.61 en 1.53, podemos obtener después de un arreglo conveniente la siguiente relación

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}\right)^2 + a^2} + \frac{z^2}{\left(m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}\right)^2}. \quad (1.62)$$

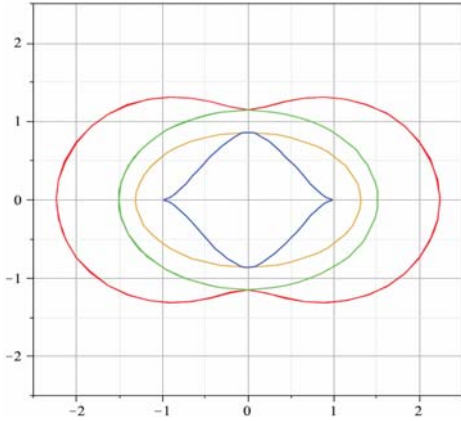


Figura 6: Aprovechando la simetría axial, se muestra con un corte polar la estructura de un agujero de Kerr ($a = 0.99m$, $m = 1$). Las hipersuperficies nulas interior/exterior se muestran en dorado/verde respectivamente; la SLEI se muestra en azul mientras que la SLEX se muestra en rojo. Los pliegues de la SLEI son parte de un anillo de singularidad.

A las superficies determinadas por 1.62 se les conoce como superficie de límite estacionario exterior (*SLEX*) y superficie de límite estacionario interior (*SLEI*), para r_{erg+} y r_{erg-} respectivamente. La región encerrada por estas superficies es tal que ninguna partícula puede permanecer en reposo y de hecho debe tener un movimiento progrado con el objeto compacto (36), esta es una nueva característica del espacio-tiempo de Kerr que no existe en el caso de Schwarzschild, pues debe considerarse que ahora cualquier partícula está sometida a un arrastre del propio espacio-tiempo debido a la rotación del objeto compacto y al efecto atractivo del pozo gravitacional. Sin embargo, las superficies mencionadas no necesariamente actúan como un horizonte de eventos, ya que es factible que

una partícula estando en la región entre la *SLEX* y el horizonte de eventos exterior pueda escapar al infinito (81), a dicha región se le conoce como *ergosfera*. La ecuación en 1.62 aparenta caracterizar a las dos superficies como elipsoides; sin embargo, la dependencia en θ provoca una deformación continua, de tal forma que en los polos $\theta \in \{0, \pi\}$ la ergósfera exterior se une con el horizonte exterior, mientras que la ergósfera interior se une con el horizonte interior.

La disposición de exterior a interior de las superficies que hemos citado es clara de las relaciones 1.55-1.56 y 1.60-1.61, se tiene que $r_{erg-} \leq r_- \leq r_+ \leq r_{erg+}$; es decir, el horizonte de eventos exterior encierra al horizonte interior y a la *SLEI* (ver **Figura 6**), razón por la cual estas superficies no son de mucho interés físico. Dos casos límite a considerar se determinan por los valores extremos para el parámetro de espín. Note que si $a = m$, los horizontes convergen a un horizonte de eventos (para $r_+ = r_- = m$) (16). Por otro lado, si $a = 0$ se tiene que el horizonte interior y la *SLEI* desaparecen, mientras que el horizonte exterior y la *SLEX* convergen a una superficie esférica de tal forma que la ergosfera desaparece, en este caso la superficie esférica se identifica con el horizonte de eventos del espacio-tiempo de Schwarzschild (con $r = 2m$) (3).

La condición en **C**) se relaciona con una singularidad que no es de coor-

denadas; sin embargo, se introducirá primero una herramienta para analizar el comportamiento de la curvatura en una variedad, posteriormente se hará explícito que la condición dada en **C)** se manifiesta como una consecuencia de un comportamiento singular. Ya sabemos por el principio de equivalencia que las partículas (masivas o fotones) que son afectadas sólo por la gravedad se mueven en trayectorias inerciales llamadas geodésicas. Sin embargo, no todas las geodésicas en cualquier espacio-tiempo pueden ser definidas continuamente a partir de cierto tiempo propio o parámetro afín, lo cual implica la existencia de “agujeros” o “bordes” en dicha región, a este fenómeno se le denomina (78) *incompletitud geodésica*. Se cree que una densidad inifinita de materia en el espacio-tiempo puede ser la causa de dicho fenómeno, en el caso de Schwarzschild se considera que la masa de una estrella colapsa a un punto, mientras que en el caso de Kerr esto sucede en un anillo (ver **Figura 6**).

De relevancia física son las *singularidades de curvatura*, las cuales implican que la curvatura del espacio y el campo gravitacional se vuelven infinitos en dicha región. Una manera de probar que dichas singularidades no son removibles es caracterizándolas en función del comportamiento anómalo de un objeto que depende del tensor de curvatura de Riemann y que es invariante ante cualquier transformación de coordenadas, dicho objeto es el *escalar de Kretschmann*, el cual se define (20) a partir de 1.32 como

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (1.63)$$

En (37) se presenta el escalar de Kretschmann¹ para el caso de la solución más general que hemos presentado 1.50, la expresión obtenida es

$$K = \frac{8}{(r^2 + a^2\tilde{\theta}^2)^6} \left[6m^2(r^6 - 15a^2r^4\tilde{\theta}^2 + 15a^4r^2\tilde{\theta}^4 - a^6\tilde{\theta}^6) \right. \\ \left. - 12mQ^2r(r^4 - 10a^2r^2\tilde{\theta}^2 + 5a^4\tilde{\theta}^4) \right. \\ \left. + Q^4(7r^4 - 34a^2r^2\tilde{\theta}^2 + 7a^4\tilde{\theta}^4) \right], \quad (1.64)$$

donde se considera el cambio de variable $\tilde{\theta} = \cos \theta$.

Podemos entonces deducir dos singularidades de interés a partir de la expresión dada en 1.64, en el caso de la solución de Schwarzschild (1.45) este escalar se obtiene al pedir que $a = 0$ y $Q = 0$, resultando una expresión que se puede confirmar en (22)

$$K = \frac{48m^2}{r^6}. \quad (1.65)$$

¹El resultado se obtiene mediante cálculo simbólico haciendo uso de *Mathematica*.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

El otro caso es menos restrictivo, si únicamente pedimos en 1.64 que $Q = 0$ se obtiene la condición para la singularidad de curvatura en la solución de Kerr, el cual se puede confirmar en (21)

$$K = \frac{48m^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}. \quad (1.66)$$

Tanto la singularidad en la solución de Schwarzschild como la del caso de Kerr son irremovibles, lo cual implica que dichas singularidades residen intrínsecamente en el espacio-tiempo. Para localizar las singularidades de acuerdo a 1.65 y 1.66 consideremos ahora la solución de Kerr expresada en 1.52. Adicionalmente vamos a considerar la transformación de las coordenadas en la métrica de Kerr (en coordenadas de Kerr) a la versión que damos en 1.52, la cual está dada en (81) por

$$x = (r \cos \varphi + a \sin \varphi) \sin \theta, \quad (1.67)$$

$$y = (r \sin \varphi - a \cos \varphi) \sin \theta, \quad (1.68)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (1.69)$$

Las dos condiciones para que el escalar de Kretschmann en 1.66 sea divergente son

$$r = 0, \quad (1.70)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (1.71)$$

lo cual es evidente que es equivalente a la condición **C)** (16).

La condición 1.71 implica que la singularidad está en el plano ecuatorial, cuando consideramos a esta en 1.69 y sustituimos en 1.53 se obtiene

$$x^2 + y^2 = r^2 + a^2. \quad (1.72)$$

Finalmente al sustituir la condición 1.70 en 1.72 se tiene que

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (1.73)$$

por lo cual se concluye que la singularidad de curvatura de la solución de Kerr yace en una circunferencia de radio a contenida en el plano ecuatorial, el *anillo de singularidad*. Como caso particular, notemos que 1.66 se reduce a 1.65 cuando $a = 0$, por tanto la singularidad de la solución de Schwarzschild se encuentra a partir de pedir en 1.73 que el parámetro a se anule, se concluye que dicha singularidad se encuentra en el centro del agujero negro.

Finalmente, aunque las dos soluciones estudiadas exhiben un comportamiento singular en la curvatura en cierta región del espacio, también se tiene un comportamiento “opuesto” a grandes distancias. Debido a que ambas soluciones corresponden a un espacio-tiempo en el exterior de una distribución aislada de materia, significa en particular que a grandes distancias el campo gravitacional debido a la distribución se vuelve despreciable. Notemos que conforme $m \rightarrow 0$ se tiene que 1.45 \rightarrow 1.7. Análogamente si $m \rightarrow 0$ tenemos que 1.52 \rightarrow 1.6, por lo cual concluimos que tanto la solución de Schwarzschild como la de Kerr son asintóticamente planas.

1.3.3. Formación de Agujeros Negros

Las estrellas supermasivas son objetos astrofísicos autogravitantes, esto quiere decir que son afectadas por su propio campo gravitacional, y por tanto son susceptibles a ser paulatinamente aplastadas por éste. En su proceso de muerte, estas estrellas liberan una gran cantidad de energía debido a procesos nucleares como para generar suficiente presión de radiación que contrarreste su colapso gravitacional, siendo esta su única defensa al aplicar cierta resistencia temporal. A continuación se esboza la explicación de la formación de un agujero negro según la teoría de evolución estelar. Para considerar argumentos de índole topológica que sostienen la existencia de agujeros negros, se puede consultar (35).

En los núcleos estelares se lleva a cabo la nucleosíntesis, la cual consta de varias fases de fusión nuclear hasta obtener ${}^{56}\text{Fe}$ o ${}^{56}\text{Ni}$ (dependiendo la relación de cantidad de neutrones respecto a protones) (63), liberando de esta manera energía a lo largo de estas etapas. La estrella comienza por utilizar sus reservas de hidrógeno, para cuando este combustible se va agotando se ha producido ya cierta cantidad de helio y el colapso es frenado temporalmente, estando ahora la estrella en un estado cuasi-estático. Sin embargo, en el proceso anterior la estrella ya se ha compactado un poco, pues el equilibrio mecánico entre presión de radiación y fuerza gravitacional no se logró de manera constante a lo largo de todo el proceso. Dependiendo ahora de la masa inicial de la estrella, el estado cuasi-estático tendrá una duración de alrededor de 10^{10} años para estrellas con una masa $M < M_{\odot}$, mientras que este será de una duración aproximada de a lo más 2×10^7 años para estrellas con una masa $M > 10M_{\odot}$. La conclusión es que

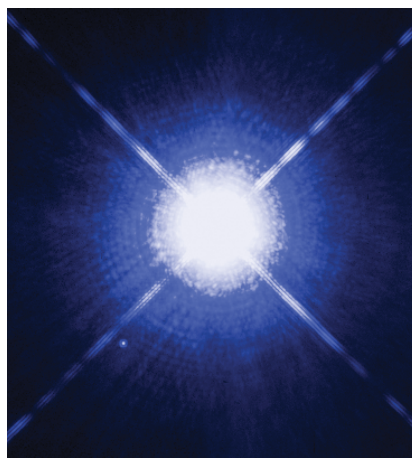


Figura 7: Sistema binario capturado por el telescopio espacial Hubble. Sirius A es la estrella más brillante y Sirius B es su pequeña enana blanca compañera.

1. TEORÍA ESTÁNDAR

estrellas más masivas agotan más rápidamente sus combustibles, y por tanto se contraen antes que estrellas del primer tipo.

Si después de la primera contracción la estrella seguía siendo muy masiva, entonces eventualmente el colapso se reiniciará. Nuevamente se elevará la temperatura del núcleo, permitiendo de esta manera que sucedan reacciones termonucleares que lograrán estabilizar a la estrella, como la conversión del helio (He) en carbono (C). Para estrellas que después de esto conservan una masa muy grande, este proceso continuará hasta obtener un núcleo de Fe o Ni . Finalmente, debido al principio de exclusión de Pauli aparecen dos posibles destinos de estabilidad para estos objetos autogravitantes: la estrella se convierte por presión de degeneración de electrones en una *enana blanca* (ver **Figura 7**) si su masa no sobrepasa el *límite de Chandrasekhar* ($M < 1.4M_{\odot}$); de no ser así, tendrá origen una estrella de neutrones debido a la presión por degeneración de neutrones.

En la formación de una estrella de neutrones, el núcleo afectado emite una onda de choque desde su interior. Esta onda logra calentar al núcleo a temperaturas del orden de $10^{11} K$, y al no perder toda su energía en esta primera etapa, logra llegar hasta la superficie de la estrella (ver **Figura 8**). Se piensa que esta onda de choque podría ser suficiente¹ para causar una supernova al entrar en contacto con la superficie estelar (63). Finalmente, cuando la masa de la estrella de neutrones resultante del proceso descrito tiene una masa superior al *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*¹¹ el colapso tiene como destino un agujero negro. Como resultado colateral del colapso gravitacional se presenta una distorsión creciente del espacio-tiempo local a medida que el objeto compacto se hace más denso, finalizando con una singularidad de curvatura que estará escondida (según la *conjetura de censura cósmica* de Penrose) en la región que tiene como frontera al horizonte de eventos (ver **Figura 9**), quedando de esta manera excluida de ser observada.

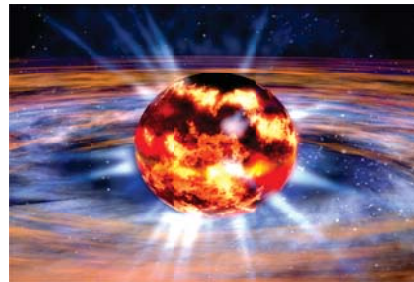


Figura 8: Superficie de estrella de neutrones antes de explotar. Simulación completa en sitio de la [NASA](#).

Es creído hasta la fecha que agujeros negros cargados eléctricamente son improbables, dado que dichos objetos serían neutralizados por cuerpos con carga opuesta que se verían atraídos en su entorno (63); por tanto, nos enfocaremos en soluciones neutras. En el pasado se creía que las soluciones neutras al vacío y altamente simétricas eran meramente una contrucción matemática, y dado que no se puede esperar que las estrellas reales que colapsan cumplen dichas condiciones previamente, entonces debería existir una cantidad abrumadora de diferentes

¹ Si no fuera este el caso, a la onda de choque se le puede sumar también la contribución de la energía gravitacional liberada al ser el núcleo previamente compactado.

¹¹ En la actualidad se han hecho correcciones al límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (13), estableciendo como condición un rango de entre $1.5M_{\odot}$ a $3M_{\odot}$ como cota mínima para la masa de la estrella; sin embargo, no se ha convenido en un modelo definitivo.

tipos irregulares de agujeros negros sin carga. Sin embargo, se ha demostrado que sólo existen dos soluciones neutras, la de Kerr y la de Schwarzschild.

Una explicación que se da para lograr la simetría en el proceso del colapso gravitacional, es que conforme la estrella es aplastada esta radia energía en forma de ondas gravitacionales, y justo en ese proceso se “radia” su asimetría (63). Más aún¹, si consideramos estrellas con cierto momento angular inicial, estas rotarán cada vez más rápido (33) conforme el colapso gravitacional las compacta (por conservación de momento angular). Considerando o no además materia exterior con momento angular que es atrapada y pasa a formar parte de la distribución, se tiene que el agujero negro tendrá un momento angular neto, conjeturando de esta manera que los agujeros de Kerr son los que deben predominar.

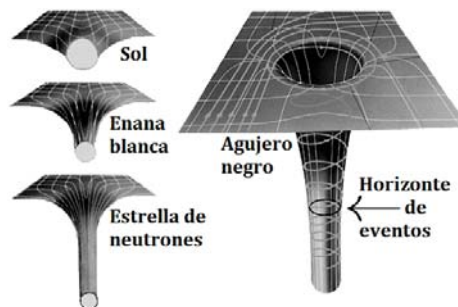


Figura 9: Distorsión del espacio-tiempo dependiendo la densidad de objetos distintos. Un agujero negro contiene un horizonte de eventos que no permite la salida de información.

Las evidencias indirectas más remotas de agujeros negros, se encuentran en sistemas binarios (dos objetos astrofísicos orbitando uno respecto del otro), los cuales consisten de una estrella visible y un compañero oscuro y compacto. Un detalle importante, es que en algunos de estos sistemas binarios se puede calcular la cota inferior para la masa del compañero compacto; más aún, aplicando un filtro a estos sistemas, algunos cumplen tener como compañero un objeto astrofísico de masa^{II} superior a $(2 - 3)M_{\odot}$ (63). La interpretación para dichos objetos masivos, es que no deberían ser considerados ya como estrellas de neutrones estables, y por tanto son fuertes candidatos a ser agujeros negros.

Además de los candidatos citados en sistemas binarios, existe en el presente la suposición de que cada galaxia activa contiene un agujero negro supermasivo en su centro, con masas en un intervalo de $(10^6 - 10^9)M_{\odot}$. De hecho se tienen evidencias para suponer que en el centro de nuestra galaxia existe un agujero negro con una masa aproximada de $4 \times 10^6 M_{\odot}$. Se pronostica en este caso que este objeto compacto no tiene un disco de acreción, es decir, parece estar inactivo.

¹ Otra argumentación viene de considerar perturbaciones no axialmente simétricas del campo gravitacional en el proceso de colapso, los momentos multipolares de la distribución de materia se expulsan, formando en el exterior un agujero negro de Kerr rotante (62).

^{II} Estos objetos pensados como un gas de Fermi degenerado cumplen estar dentro de las predicciones de modelos corregidos del límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

Discos de acreción

I believe there are no questions that science can't answer about the physical universe.

Stephen William Hawking

Debido a la existencia de un fuerte campo gravitacional alrededor de un objeto central masivo, la materia en sus proximidades es atraída y puede acumularse a su alrededor, esto depende de su movimiento previo a ser “capturada” por el objeto. Existen tres posibles destinos para dicha materia: una partícula podría simplemente aproximarse al objeto central y continuar una trayectoria sin retorno, otra partícula podría tener una trayectoria tal que va directo al objeto central y otras pueden permanecer orbitando dicho objeto.

Un escenario que sirve para entender mejor el fenómeno de acreción se trata de los sistemas binarios (ver **Figura 10**), en los cuales una estrella gigante es paulatinamente consumida por una compañera de alta densidad, esto es debido a que la materia superficial de la estrella es fuertemente atraída por la compañera compacta. Toda la materia que es atraída posee un cierto momento angular (pues la estrella gigante de donde proviene rota lentamente debido a sus dimensiones) y por tanto existe una componente centrífuga en el movimiento de éstas partículas, cuando esta componente no es suficiente para contrarrestar el efecto atractivo gravitacional del objeto compacto entonces dichas partículas son capturadas. El conjunto de todas estas partículas capturadas forma un disco de acreción. Otro

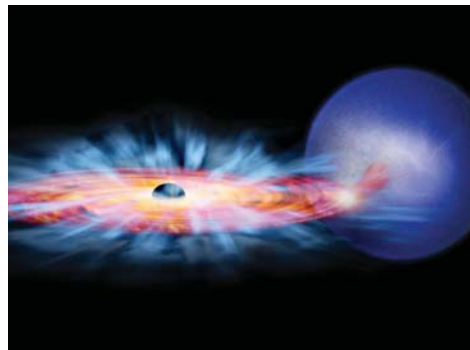


Figura 10: Representación artística del sistema GRO J1655-40, capturado por el Chandra X-ray Observatory. Se detectaron QPO's en este sistema y se cree que el compañero es candidato a ser un agujero negro. La luz emanando del disco se debe a la liberación de energía del gas proveniente de la estrella al avanzar a través del disco y/o debido a fricción en el mismo. La masa aproximada para este objeto es de $m = (6.30 \pm 0.5)M_{\odot}$ mientras que se estima el parámetro de espín en $a = (0.92 \pm 0.2)m$.

2. DISCOS DE ACRECIÓN

escenario con discos de acreción se encuentra en los núcleos de galaxias, el objeto compacto suele ser supermasivo y el material de acreción proviene principalmente de gas interestelar.

Se cree que el mecanismo por el cual el objeto compacto se hace más masivo (de aquí el origen del concepto de acreción) es la *redistribución del momento angular* (56). Para que una partícula en el disco de acreción avance hacia el objeto central, esta debe transportar parte de su momento angular a la materia vecina (logrando que esta materia receptora aumente su velocidad orbital, y manteniendo el momento angular total de toda la materia en el disco) para lograr que la componente gravitacional en la energía total gane impacto. El resultado final es un disco de acreción conformado de partículas con mayor velocidad angular orbital conforme disminuye la distancia al objeto central. Las partículas más internas al transportar un poco de su momento angular son atraídas irremediamente al objeto central, aumentando así la masa de este.

Un fenómeno de particular interés en un disco de acreción es la emisión de radiación térmica. Debido al seccionamiento radial de velocidades orbitales en el disco, la continua provisión de materia garantiza que existirá fricción continuamente, aumentando así la temperatura de las partículas a medida que se acercan al objeto compacto. Las altas temperaturas que se generan en algunas regiones resultan en la emisión de rayos X muy energéticos, lo cual puede ser corroborado al observar centelleos cuasi-periódicos que se atribuyen a un objeto que orbita cerca del borde interior del disco, a dicho objeto se le denomina **QPO**¹. Los QPO's han sido observados en los centros de *galaxias activas* (43) y objetos compactos en sistemas binarios (11).

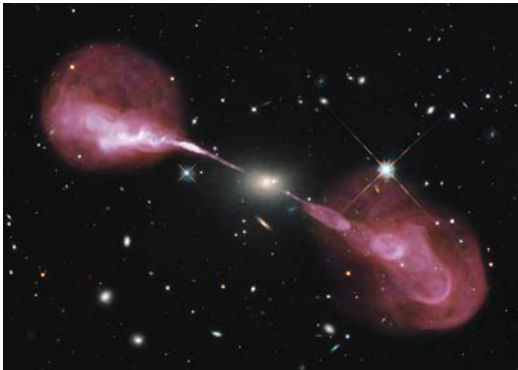


Figura 11: Se detectaron jets en el núcleo de la galaxia activa *Hércules A*, donde se especula que existe un agujero negro supermasivo. Esta imagen (de dominio público) resulta de la colaboración entre el proyecto de radioastronomía *Karl G. Jansky Very Large Array (VLA)* y el *Hubble Space Telescope*.

Otro tipo de fenómeno observado que también es fuente de emisión de rayos X son los llamados **jets de partículas**. Estos han sido observados en galaxias activas como *Pictor A* (86) y *M87* (60). Se sugiere que grandes concentraciones de plasma en el disco de acreción pueden dar origen a la presencia de un intenso campo magnético, el cual se ve distorsionado por el efecto de arrastre relativista (efecto tipo Lense-Thirring para objetos compactos que rotan) alrededor de un objeto central con espín (85). Algunas partículas cargadas en el disco responderán a dicho campo y serán expulsadas a

velocidades relativistas, a medida que las partículas se internan en una zona donde

¹ Por sus siglas en inglés: Quasi-Periodic Oscillation, oscilación cuasiperiódica.

el campo magnético forma una hélice estas son propulsadas con mayor velocidad y colimadas (52), el resultado observado se denomina jet.

La emisión de radiación por parte del material del disco presentará un desplazamiento en su longitud de onda por el *corrimiento al rojo gravitacional*. La información interpretada de este efecto relativista puede ser útil para conocer la distribución de temperatura en la superficie del disco, también se podría estimar la velocidad con que la materia se acerca al objeto central a través del disco. Otra aplicación de este tipo consiste en la medición del espín de un posible agujero negro que rota (asumiendo que la métrica en su exterior corresponde a la de Kerr), analizando en este caso la amplia línea^I espectral k_α que resulta de la emisión en rayos X por parte de átomos de hierro (*Fe*) en materia gaseosa que orbita el disco.

2.1. El modelo de Page y Thorne

La estructura de un disco de acreción promediada en el tiempo es estudiada en (59), el caso que se analiza en dicha publicación es el de un espacio-tiempo estacionario, asintóticamente plano y de simetría axial, lo cual asegura su validez para el caso de la solución de Kerr.

La deducción del flujo de energía emitida por la superficie del disco (promediada en el tiempo) es el análisis principal en el modelo de Page y Thorne. Este resultado es producto de la consideración de la conservación de^{II} la masa en reposo ($\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{u}^{inst} = 0$, donde \mathbf{u}^{inst} y ρ_0 son la velocidad instantánea de las partículas y la densidad de la masa en reposo, respectivamente y medidas en el SMR.), la energía ($\nabla \cdot E = 0$) y el momento angular ($\nabla \cdot J = 0$). Además de las leyes de conservación, se agregan en el análisis las siguientes suposiciones básicas :

1. El disco de acreción reside en un espacio-tiempo cuya geometría corresponde al entorno del objeto compacto, y se considerará despreciable su influencia en la métrica.
2. El plano central del disco yace en el plano ecuatorial determinado por el objeto compacto.
3. El disco es geoméricamente delgado^{III} y ópticamente grueso^{IV} (un soporte a estas suposiciones se puede encontrar en (47)), lo cual implica que su grosor $\Delta z = 2h$ a una distancia r cumple que $\Delta z \ll r$.

^I Se considera que la línea es afectada por corrimiento al rojo gravitacional y el efecto de arrastre relativista, de este modo resulta en una amplia línea espectral.

^{II} En la formulación de las leyes de conservación en (59) se parte de la forma diferencial para construir la forma integral de estas, para la cual se hace uso explícito del tensor de energía-momento propuesto.

^{III} En el trabajo de Page y Thorne esta condición permite usar coordenadas específicas (t, φ, r, z) para el disco de acreción, tal que la métrica incluye parámetros que dependen de la altura z respecto del plano ecuatorial.

^{IV} Un disco de acreción es (6) geoméricamente delgado y ópticamente grueso cuando la energía gravitacional de las partículas que conforman al disco puede ser eficientemente radiada.

2. DISCOS DE ACRECIÓN

4. Existe un intervalo temporal Δt el cual es suficientemente pequeño de tal forma que se puede despreciar cualquier cambio en la métrica y suficientemente grande como para considerar que el flujo de materia (hacia el interior del disco) a través de un radio r es grande comparado con la materia contenida entre r y $2r$.
5. Las partículas se mueven sobre geodésicas circulares en el plano ecuatorial (idealizando que se puede despreciar cualquier tipo de fuerza de presión radial al ser comparada con la de tipo gravitacional debida al objeto compacto). Conforme algunas partículas se mueven en espiral hacia regiones con radios inferiores liberan energía gravitacional, de la cual se almacenará sólo una pequeña parte en el interior del disco y el restante se emitirá al exterior.
6. La única energía emitida por el disco es a través de los fotones; es decir, el disco sólo emite energía en forma de radiación. Además, se despreciará todo flujo interno de energía excepto en la dirección vertical a la superficie del disco.
7. Se propone el tensor de energía-momento (sin hacer suposiciones acerca de la distribución presente)

$$\mathbf{T} = \rho_0(1 + \Pi)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{t} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

donde Π es la energía interna específica, \mathbf{t} es el tensor de esfuerzos^I (ortogonal a la 4-velocidad, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0$) en el sistema en reposo, \mathbf{q} es el 4-vector de flujo de energía (ortogonal^{II} a la 4-velocidad, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0$).

El resultado obtenido para el flujo de energía F como función del radio r (una derivación detallada es encontrada en (68) y (59)) es

$$F(r) = \frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}}f, \quad (2.2)$$

donde g representa al determinante de la métrica y \dot{M}_0 es^{III} el flujo de materia a través del disco. Además, la función de flujo normalizado f está dada por

$$f = -\frac{\partial\omega}{\partial r}(E - \omega L_z)^{-2} \int_{r_{em}}^r (E - \omega L_z) \frac{\partial L_z}{\partial r} dr, \quad (2.3)$$

donde ω corresponde con la expresión dada en 2.41, mientras que el caso de E y L_z corresponden a las expresiones dadas en 2.38 y 2.39 respectivamente.

^I Los esfuerzos se originan a través de las interacciones entre partículas de órbitas distintas.

^{II} La relación $\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0$ hace referencia a que las partículas se mueven dentro del disco, mientras que la energía se emite en la dirección perpendicular al plano del disco.

^{III} Como resultado de las leyes de conservación se encuentra que \dot{M}_0 es independiente de la coordenada radial.

Debido a que las partículas con mayor velocidad angular transportan energía a través de colisiones a partículas con menor velocidad angular, y considerando que en RG la velocidad angular aumenta conforme las partículas se acercan al objeto compacto, se tiene entonces que existe un transporte de energía siempre a radios superiores. Esta información está codificada en la función f , el límite inferior en la integral que aparece en 2.3 sirve para considerar que el transporte de energía se da a partir de un radio de estabilidad marginal (r_{em}), por otro lado, el límite superior indica el radio r en el cual se da la emisión por radiación de la energía transportada.

2.2. Órbitas circulares

El análisis de órbitas circulares es de particular interés astrofísico, dado que los modelos sencillos para el disco de acreción de un objeto compacto supone que las partículas viajan en trayectorias con dicha geometría; además, estudiando el disco de acreción se espera obtener información acerca del propio objeto central. Ya sabemos que la materia acumulada alrededor del objeto compacto debe perder momento angular conforme se desplaza a regiones más internas del disco de acreción, liberando así energía de amarre gravitacional. Sin embargo, existe un acercamiento máximo a partir del cual ninguna partícula puede mantenerse de manera estable en una órbita circular, este concepto es de relevancia¹ en este trabajo y se denomina **ISCO**^{II} (ver **Figura 12**). Cualquier partícula seguirá trayectorias en espiral hacia el objeto compacto a partir de distancias radiales menores a la correspondiente en la ISCO.

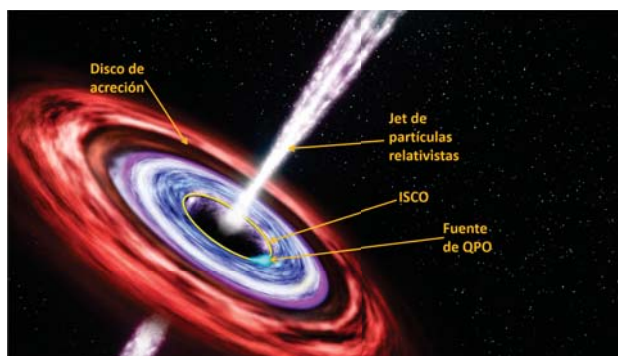


Figura 12: Ilustración (de dominio público) proporcionada por el [Goddard Space Flight Center](#), la cual está basada en la observación del Swift J1644+57. En dicho evento se cree que una enana blanca fue completamente destruida por un objeto compacto en la constelación Draco, un análisis de este suceso se encuentra disponible en [arXiv](#). Esta figura permite visualizar los fenómenos físicos mencionados hasta el momento en un disco de acreción.

¹ Por ejemplo, si se conoce la ISCO se podría proponer una estimación de las dimensiones del objeto central, permitiendo así establecer cotas para la masa y momento angular del objeto.

^{II} Por sus siglas en inglés: Innermost Stable Circular Orbit, órbita circular estable más interna.

2. DISCOS DE ACRECIÓN

En esta sección se presenta el análisis de potenciales efectivos en dos contextos distintos: el caso del límite Newtoniano y la extensión relativista. En el primer caso veremos que el concepto de ISCO no está definido debido a que toda órbita circular puede ser estable. Esto ya no será cierto en el segundo caso, donde presentamos dos potenciales efectivos para soluciones distintas a las ecuaciones de campo, encontraremos que existen restricciones sobre el momento angular y energía de una partícula que determinarán cuándo es posible encontrar órbitas estables.

2.2.1. El campo central Newtoniano

En el límite Newtoniano el movimiento de una partícula de prueba de masa m en un campo central se confina en un plano debido a la conservación de su momento angular L . Considerando también la conservación de la energía E de la partícula, es posible motivar (48) el hecho de que la parte radial del movimiento puede depender de un *potencial efectivo* V_{ef} .

En un campo central la energía potencial U de la partícula sólo puede depender de su distancia r a la fuente del campo, por tanto se tiene que $U = U(r)$. Usando coordenadas polares¹ (r, φ) , el Lagrangiano del sistema está dado entonces por

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (2.4)$$

A partir de 2.4 se tiene entonces que la energía mecánica de la partícula está dada por $E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$; sin embargo, el momento angular en este caso es $L = mr^2\dot{\varphi}$, de modo que la energía se puede reescribir como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + U(r). \quad (2.5)$$

En 2.5 la parte no cinética de la energía contiene al potencial $U(r)$ y al término de carácter repulsivo¹¹ $\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$, el cual aparece debido a la rotación de la partícula respecto de la fuente del campo. Podemos entonces concluir que el movimiento de la partícula estará sujeto a un potencial total que considera un agente repulsivo y una fuerza determinada por el gradiente de la energía potencial $U(r)$, a dicho potencial lo llamaremos potencial efectivo, y en este caso está dado por

$$V_{ef} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + U(r). \quad (2.6)$$

¹Dado que la partícula se mueve en un plano, las coordenadas cilíndricas se reducen a las polares, la coordenada z será constante, lo cual también implica que $\dot{z} = 0$ y por tanto no aparecerá en el Lagrangiano dicha velocidad generalizada.

¹¹ Este término es comúnmente identificado como *energía centrífuga*.

La primera aplicación de nuestro interés se tiene al considerar el movimiento de una partícula de masa m en el campo gravitacional de una masa puntual M , tal que $M \gg m$ (ver **Figura 13**).

Nota: Con fines de comparación respecto al caso relativista, usaremos ahora la unidad geométrica $G = 1$ y consideraremos que $m = 1$.

Para este problema se tiene entonces que $U(r) = -\frac{M}{r}$, y por tanto según 2.6 un potencial efectivo dado (45) por

$$V_N = \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2} - \frac{M}{r}. \quad (2.7)$$

Al considerar en este caso un campo central en el que $U(r) \sim \frac{1}{r}$ podemos asegurar (48) que el movimiento de la partícula se puede realizar sobre trayectorias cerradas. En este caso la partícula tendrá según 2.5 en todo momento una energía dada por

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2} - \frac{M}{r}. \quad (2.8)$$

En el caso general de campo central en 2.4, cuando la velocidad radial es nula ($\dot{r} = 0$) existe un punto de retorno para la coordenada radial, lo cual implica que la trayectoria puede estar limitada a barrer ciertos valores radiales¹, notemos que en dichos puntos la fuerza efectiva es nula y da origen a un balance entre el potencial efectivo y la energía total de la partícula. Regresando a nuestro caso de interés, como la energía en 2.8 se conserva, esto quiere decir que el potencial efectivo tiene un valor extremo en una trayectoria permitida para la cual permanece constante la coordenada radial, $r = r_{sco}$. Se concluye que el potencial efectivo a lo largo de trayectorias circulares debe satisfacer

$$\left. \frac{\partial V_N}{\partial r} \right|_{r_{sco}} = 0. \quad (2.9)$$

Supongamos que 2.9 se cumple en el caso del potencial efectivo 2.7, resolviendo

¹Un caso podría ser el de encontrar una región radial permitida $r_- \leq r \leq r_+$, lo cual implicaría que la trayectoria de la partícula está acotada en todo momento por la sección entre dos discos concéntricos con radios r_- y r_+ , respectivamente.

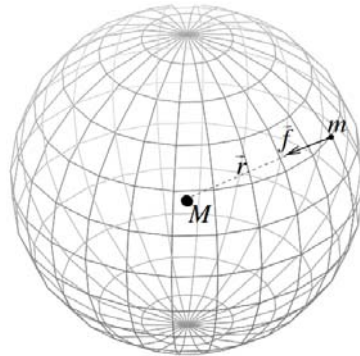


Figura 13: Sobre una esfera de radio r una partícula con masa m será atraída radialmente por una fuerza $\vec{F} = m\vec{f}$, dada la similitud con el modelo para dos partículas cargadas se ha elegido a \vec{f} y a m como el campo y la carga gravitacional, respectivamente. Para una fuente de masa M , la teoría de Newton asocia a la partícula una energía potencial $U(r) = -G\frac{mM}{r}$.

2. DISCOS DE ACRECIÓN

para la coordenada radial se encuentra

$$r_{sco} = \frac{L^2}{M}. \quad (2.10)$$

La partícula se encuentra en una *órbita circular estable* a una distancia de la fuente del campo dada por 2.10, ya que

$$\left. \frac{\partial^2 V_N}{\partial r^2} \right|_{r_{sco}} = \left[\frac{2}{r^3} \left(\frac{3L^2}{2r} - M \right) \right] \bigg|_{r_{sco}} = \frac{M^2}{L^2} > 0. \quad (2.11)$$

Como observación final, sabemos que no importando la relación entre dos constantes positivas α y β , el comportamiento conforme $r \rightarrow 0$ de la función $D(r) = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$ es divergente, $D(r) \rightarrow \infty$. Considerando que la dependencia radial del potencial efectivo en 2.7 se sujeta al comportamiento citado, se concluye que conforme la coordenada radial disminuye la energía centrífuga predomina sobre el término atractivo, asegurando de esta manera que la partícula no podrá alcanzar a la fuente del campo. Finalmente, notemos que para cada valor (no nulo) dado del momento angular L de la partícula se puede tener una órbita circular estable, el radio r_{sco} de dicha trayectoria estará determinado por 2.10. Concluimos que no existe una *órbita circular estable más interna*.

2.2.2. Potenciales con captura relativista

Si queremos analizar el movimiento de una partícula alrededor de un objeto compacto, el tratamiento es a grandes rasgos semejante al expuesto en la sección anterior. Primero se consideran cantidades de movimiento conservadas, posteriormente se encuentra un potencial efectivo a partir de dichas cantidades y finalmente se analiza el potencial para conocer la estabilidad de órbitas. Sin embargo, debido a que la Relatividad General es una teoría geométrica de la gravedad, es sabido que para soluciones que describen el entorno de un agujero negro el potencial efectivo incluye más información que el caso análogo en la teoría de gravitación Newtoniana, la cual se restringe a describir un campo gravitacional de acción a distancia.

El primer físico en estudiar el movimiento de partículas en el espacio-tiempo de Schwarzschild fue J. Droste, el 27 de mayo de 1916 fue cuando reportó sus resultados¹ (24) a la Academia de Ciencias de Holanda. El espacio-tiempo definido por la métrica de Schwarzschild es el primer caso interesante a considerar, pues se tiene un objeto central atractivo de simetría esférica, el cual se puede pensar como una extensión relativista del caso Newtoniano analizado anteriormente.

¹ Johannes Droste trabajó bajo supervisión de Hendrik A. Lorentz (desde 1913). Droste encuentra en dicho reporte la solución de Schwarzschild en la forma dada por 1.45.

El movimiento estable de partículas se dará a lo largo de trayectorias que extremen el lapso de tiempo propio (en el caso de partículas masivas) o de parámetro afín (en el caso de partículas sin masa) a lo largo de la línea de mundo (66). Considerando intervalos infinitesimales ds^2 a lo largo de una trayectoria que une los eventos P_i y P_f , es posible determinar el intervalo total $S_{P_i P_f}^2$ como

$$\begin{aligned} S_{P_i P_f}^2 &= \int_{P_i}^{P_f} ds^2 = \int_{P_i}^{P_f} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \int_{P_i}^{P_f} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds^2 \\ &= \int_{P_i}^{P_f} \underbrace{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}_{\text{por 3.14}} ds^2 = \int_{P_i}^{P_f} 2\mathcal{L} ds^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Al encontrar el extremo para 2.12 obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.13)$$

La expresión en 2.13 describe de manera equivalente la ecuación de geodésicas dada en 1.28, una derivación de este hecho se encuentra en (41). La ventaja de usar las ecuaciones de Euler-Lagrange, es que podemos olvidarnos del cálculo de los símbolos de Christoffel, los cuales implican derivadas de la métrica y conocer las componentes de la métrica inversa, como se puede ver en 1.22.

Para trabajar con la expresión 2.13 necesitamos conocer explícitamente el Lagrangiano en este espacio-tiempo, considerando 3.14 y la métrica de Schwarzschild en 1.45 se tiene que \mathcal{L} queda determinado por

$$2\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2. \quad (2.14)$$

Notemos que 2.14 no depende de las coordenadas t y φ . Recordando que cualquier coordenada cíclica implica la conservación de una cantidad de movimiento, por las ecuaciones de Euler-Lagrange en 2.13, tenemos explícitamente para estos casos

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad -p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = cte, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = cte', \quad (2.16)$$

donde se han hecho las identificaciones con los momentos canónicos conjugados dados por $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$. Con esta misma identificación podemos obtener a partir de las componentes de la métrica en 1.45, una expresión explícita (19) de los

2. DISCOS DE ACRECIÓN

momentos

$$p_t = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}, \quad (2.17)$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}, \quad (2.18)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}, \quad (2.19)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (2.20)$$

Identificamos las constantes de movimiento¹ en 2.15 y 2.16 con la energía E y el momento angular L de la partícula, respectivamente. Sustituyendo los momentos encontrados en 2.17 y 2.20, obtenemos que

$$E = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}, \quad (2.21)$$

$$L = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (2.22)$$

Nota: La energía E y el momento angular L pueden ser identificados con sus homónimos por unidad de masa en reposo m_0 ; es decir, $E = \frac{\tilde{E}}{m_0}$ y $L = \frac{\tilde{L}}{m_0}$. De ahora en adelante esto queda convenido.

La conservación del momento angular en un campo gravitacional con simetría esférica implica que las geodésicas residen en un planoⁱⁱ invariante. Se elige el plano ecuatorial por conveniencia, por lo cual se tiene la restricción $\theta = \frac{\pi}{2}$. De esta manera, el eje respecto al cual se conserva el momento angular es el z , por lo cual la relación en 2.22 se sustituye por

$$L_z = r^2 \dot{\varphi}. \quad (2.23)$$

De 2.23 y 2.21 podemos despejar \dot{t} y $\dot{\varphi}$ respectivamente, después de sustituir estas expresiones en 2.14 obtenemos

$$-1 = 2\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{r^2}, \quad (2.24)$$

donde se ha usado que $\dot{\theta} = 0$, y debido a la signatura elegida $(-, +, +, +)$ se tiene

¹ Otra manera de identificar algunas de las constantes de movimiento es analizando las simetrías del espacio-tiempo. En toda solución estacionaria se cumplirá 2.15 y si ésta posee al menos simetría axial entonces 2.16 también se verificará.

ⁱⁱ Una derivación formal puede ser encontrada en (19).

que $2\mathcal{L} = -1$. Ahora, 2.24 se puede reescribir de manera conveniente como

$$E^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{L_z^2}{r^2}\right) + \dot{r}^2, \quad (2.25)$$

donde notamos una estructura análoga a la versión Newtoniana en 2.8. En este caso es necesario recordar que el Hamiltoniano del sistema es una constante de movimiento, y además se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -p_t \dot{t} + p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \\ &= - \underbrace{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}_{\text{por 2.17-2.20}} - \mathcal{L} \\ &= \underbrace{2\mathcal{L}}_{\text{por 2.14}} - \mathcal{L} \\ &\therefore \mathcal{H} = \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Debido a que en 2.26 demostramos que el Lagrangiano resulta coincidir con el Hamiltoniano, concluimos que la derivación de 2.25 se hizo considerando únicamente cantidades conservadas de movimiento; más aún, en 2.25 identificamos que se tiene un potencial efectivo dado (53) por

$$V_S = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{L_z^2}{r^2}\right) = 1 + \frac{L_z^2}{r^2} - \frac{2m}{r} - \frac{2mL_z^2}{r^3}. \quad (2.27)$$

A diferencia del caso Newtoniano en 2.7, notamos que aparece aquí un término extra de corrección relativista, el cual está definido por un comportamiento proporcional a $\frac{1}{r^3}$; más aún, el signo de este término indica que es de carácter atractivo. Consideremos ahora que para cualquier par de constantes positivas γ, δ se tiene que conforme $r \rightarrow 0$ entonces $\left(\frac{\gamma}{r^2} - \frac{\delta}{r^3}\right) \rightarrow -\infty$. Concluimos que la partícula puede ser capturada por el objeto central si se aproxima lo suficiente, una vez que esto sucede eventualmente puede desaparecer tras el horizonte de eventos y caer hacia la singularidad, este hecho parece indicar que puede existir una *órbita circular estable más interna*.

La primera condición que pediremos a una órbita circular es que la coordenada radial sea constante

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = 0. \quad (2.28)$$

A diferencia del caso Newtoniano (en donde $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$) aquí se deriva respecto del

2. DISCOS DE ACRECIÓN

tiempo propio τ para la trayectoria dada.

Con la condición 2.28 la relación 2.25 se simplifica como

$$E^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{L_z^2}{r^2}\right). \quad (2.29)$$

Si queremos encontrar una órbita circular estable, entonces necesitamos pedir que el potencial sea un extremo en un radio constante $r = r_{ext}$, pues sólo de esta manera la relación 2.25 satisface por compensación a 2.29, entonces

$$\left. \frac{\partial V_S}{\partial r} \right|_{r_{ext}} = 0. \quad (2.30)$$

La condición anterior utilizando la forma explícita de V_S en 2.27 se reescribe como

$$\left. \frac{\partial V_S}{\partial r} \right|_{r_{ext}} = -2 \frac{L_z^2}{r_{ext}^3} + 2 \frac{m}{r_{ext}^2} + 6 \frac{m L_z^2}{r_{ext}^4} = 0 \quad (2.31)$$

$$\Leftrightarrow r_{ext}^2 - \frac{L_z^2}{m} r_{ext} + 3L_z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_{ext\pm} = \frac{L_z^2}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2}{L_z^2}}\right). \quad (2.32)$$

Cuando se evalúa el potencial efectivo en las raíces dadas en 2.32, se encuentra que $V_S|_{r_{ext+}} \leq V_S|_{r_{ext-}}$, lo cual nos dice que el potencial debe alcanzar un mínimo en r_{ext+} y un máximo en r_{ext-} , localizando así para un valor dado no nulo del momento angular L_z una órbita estable y otra inestable, respectivamente. Para encontrar una órbita al límite de la estabilidad debe suceder que para cualquier perturbación en tal trayectoria esta se vuelva inestable, por tanto se necesita encontrar un punto de inflexión.

De acuerdo a 2.32, un punto de inflexión debe suceder cuando exista una convergencia de r_{ext+} a r_{ext-} , lo cual sólo se logra si la raíz en 2.32 se anula. Se concluye que la partícula debe tener un momento angular dado por $L_z = 2\sqrt{3}m$ para que el potencial efectivo se encuentre en el punto de inflexión. Cuando tomamos el valor sugerido para el momento angular entonces se tiene de 2.32 que $r_{ext+} = 6m$ es candidato a ser r_{ISCO} , el cual es el valor de convergencia a r_{ext-} deseado.

Debido a que la ISCO debe localizarse en un punto de inflexión, entonces de acuerdo al potencial efectivo en 2.27 se debe satisfacer para $r_{ext+} = 6m$ que la segunda variación se anula, esto se corrobora a continuación

$$\frac{\partial^2 V_S}{\partial r^2} = 6 \frac{L_z^2}{r^4} - 4 \frac{m}{r^3} - 24 \frac{m L_z^2}{r^5}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V_S}{\partial r^2} \right|_{r=6m} &= 6 \frac{(2\sqrt{3}m)^2}{(6m)^4} - 4 \frac{m}{(6m)^3} - 24 \frac{m(2\sqrt{3}m)^2}{(6m)^5} \\
 &= m^3 \left[\frac{36(12) - 36(4) - 36(8)}{(6m)^5} \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde notamos que también se ha evaluado en un valor para el momento angular $L_z = 2\sqrt{3}m$, el cual es condición para conseguir el radio candidato.

Concluimos que en el espacio-tiempo de Schwarzschild existe una ISCO, el radio de esta y el momento angular de la partícula en dicha trayectoria están dados (53) por

$$r_{isco} = 6m \quad \text{y} \quad L_{z_{isco}} = 2\sqrt{3}m. \tag{2.34}$$

Además, si sustituimos 2.34 en 2.29 se encuentra la energía de la partícula en la ISCO

$$E_{isco} = \sqrt{\frac{8}{9}}. \tag{2.35}$$

Para complementar esta subsección, presentamos ahora los resultados para el caso del espacio-tiempo de Kerr. La deducción del potencial efectivo se puede hacer de manera análoga al desarrollo hecho en la sección 3.2 para el caso pseudo-complejo; sin embargo, en (41) se puede encontrar un detallado análisis incluyendo la obtención de los parámetros de la ISCO. Una vez que suponemos que el disco de acreción cumple las hipótesis dadas en la sección 2.1, tenemos que el potencial efectivo de una partícula en el plano ecuatorial está dado (44) por

$$V_K = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{a^2(E^2 - 1) - L_z^2}{r^2} - \frac{2m(L_z - aE)^2}{r^3}. \tag{2.36}$$

La primera dificultad que se encuentra en esta expresión es que no tiene la forma de los casos analizados anteriormente (2.27 y 2.7), ya que ahora depende explícitamente de la energía de la partícula; sin embargo, sí tiene incorporado el término de captura debido a la corrección relativista. Con el fin de encontrar una ISCO, en (44) se propone considerar el siguiente “potencial” efectivo

$$\tilde{V}_K = E^2 - V_K = \frac{1}{r^4} [\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma], \tag{2.37}$$

donde V_K corresponde al dado en 2.36, y se introducen las siguientes identificaciones

$$\alpha = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2,$$

2. DISCOS DE ACRECIÓN

$$\begin{aligned}\beta &= [a(r^2 + a^2) - \Delta a] L_z, \\ \gamma &= a^2 L_z^2 - \Delta(r^2 + L_z^2).\end{aligned}$$

Para el nuevo “potencial” efectivo en 2.37, las condiciones para encontrar un orbital circular de radio r_{sco} contemplan nuevamente a las dadas en 2.28, 2.30 y 2.31 (evaluándolas en r_{sco}); además, en este caso se pedirá¹ que $\tilde{V}_K|_{r_{sco}} = 0$. Resolviendo las condiciones citadas para \tilde{V}_K , los valores para la energía y el momento angular de la partícula están determinados en (8) analíticamente por

$$E = \frac{r^{\frac{3}{2}} - 2mr^{\frac{1}{2}} \pm am^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{4}} \left(r^{\frac{3}{2}} - 3mr^{\frac{1}{2}} \pm 2am^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.38)$$

$$L_z = \frac{\pm m^{\frac{1}{2}}(r^2 \mp 2am^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}} + a^2)}{r^{\frac{3}{4}} \left(r^{\frac{3}{2}} - 3mr^{\frac{1}{2}} \pm 2am^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.39)$$

donde el signo + corresponde a movimiento progrado de las partículas ($L_z > 0$), mientras que el signo – corresponde a movimiento retrogrado ($L_z < 0$) (ver **Figura 14**). Esta misma convención aplica para el resto de esta sección. Cabe mencionar que las órbitas circulares estables no existen para todo valor de r , estas sólo existirán cuando los denominadores en 2.38 y 2.39 son reales, lo cual es equivalente a pedir que

$$r^{\frac{3}{2}} - 3mr^{\frac{1}{2}} \pm 2am^{\frac{1}{2}} \geq 0, \quad (2.40)$$

donde el caso en que se cumple la desigualdad estricta $>$ corresponde a partículas masivas, mientras que la igualdad sólo es factible para fotones¹¹.

En (8) se encuentra una expresión para la velocidad angular de las partículas y la condición de estabilidad para órbitas circulares, las cuales están dadas respectivamente por

$$\omega_{\pm} = \frac{\pm m^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} \pm am^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.41)$$

$$r^2 - 6mr \pm 8a\sqrt{mr} - 3a^2 \geq 0. \quad (2.42)$$

El caso en que se satisface la igualdad en 2.42 corresponde a una ecuación cuya solución es la coordenada radial de la ISCO; más aún, el término de primer orden en a correspondiente al momento angular en la solución de Kerr permite

¹ Esta condición es equivalente a pedir que en r_{sco} se satisfaga la relación $\tilde{V}_K|_{r_{sco}} = E^2$, lo cual se puede hacer evidente al considerar que en 2.37 también es cierto que $\dot{r}^2 = \tilde{V}_K$.

¹¹ Hay que considerar que los fotones pueden tener una energía por unidad de masa en reposo E infinita, ya que su masa en reposo es nula.

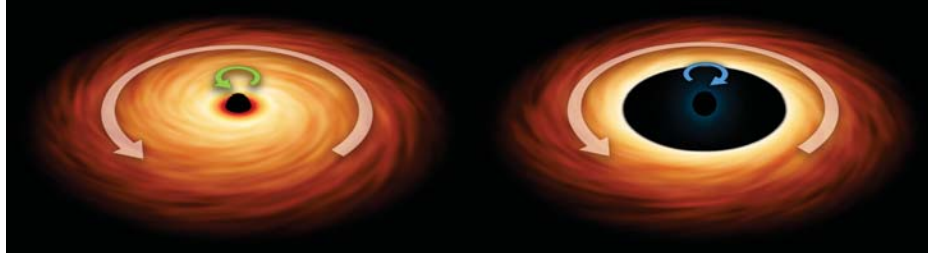


Figura 14: Las partículas en el disco de acreción pueden orbitar en sentido contrario a la rotación del objeto central (derecha), a esto lo llamamos movimiento retrogrado. Si el caso es el contrario (izquierda) se denomina movimiento progrado. Se sabe también que a mayor momento angular del objeto compacto mayor será el acercamiento del disco de acreción.

concluir que la rotación del objeto compacto tiene una influencia significativa¹ sobre la ISCO, lo cual se ilustra en **Figura 14**. En (8) se da la solución analítica para 2.42 con el uso de las funciones auxiliares Z_1 y Z_2 , las cuales están definidas como

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(1 + \frac{a}{m}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{a}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \right],$$

$$Z_2 = \left(\frac{3a^2}{m^2} + Z_1^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente se tiene que

$$r_{isco} = m \left\{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.43)$$

Notemos que cuando $a = 0$ se tiene que $Z_1 = 3$ y como consecuencia también $Z_2 = 3$. Cuando sustituimos estos valores en 2.43 obtenemos $r_{isco} = 6m$, recuperando por supuesto el resultado en 2.34 para el caso de Schwarzschild. Por otro lado, en el caso extremo en que $a = m$ se tiene que $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$ y por tanto $r_{isco} = m$ por lo cual las partículas tienen permitido orbitar en geodésicas circulares a una distancia que es la mitad del radio de Schwarzschild.

Por otro lado, de la relación para la velocidad angular en 2.41 se puede evidenciar el efecto de arrastre relativista para partículas en movimiento retrogrado. Notemos que $r^{\frac{3}{2}} - am^{\frac{1}{2}} < 0$ para $r < a^{\frac{2}{3}}m^{\frac{1}{3}}$ cuando consideramos ω_- , lo cual implica que para radios suficientemente pequeños una partícula en movimiento retrogrado se verá arrastrada a girar en el mismo sentido que el objeto compacto. Una relación para este efecto en el caso pseudo-complejo se encuentra en 3.49.

¹Se acuerda en que $0 \leq a \leq m$ para la rotación del objeto compacto, de aquí que $a^2 \leq am \leq m^2$. Además, adelante mostraremos que $r_{isco} = m$ para el caso límite en que $a = m$, por tanto $m \leq r < \infty$. A partir de los hechos mencionados se deduce de 2.42 que conforme el parámetro de espín aumenta la ISCO será más interna en movimiento progrado. La afirmación se puede también verificar en **Figura 19**

2.3. Corrimiento al rojo gravitacional

Como resultado de analizar previas soluciones^I a las ecuaciones de campo 1.44, G. Lemaître encontró en 1927 una solución no estacionaria de la cual se deduce (50) la primera aproximación a lo que conocemos ahora como ley de Hubble. La verificación de la expansión métrica del universo^{II} se dio a conocer dos años después, el análisis hecho por E. Hubble se basó en los datos recopilados en el Observatorio Mount Wilson. La base fenomenológica del estudio es el corrimiento al rojo analizado en la radiación emitida por nebulosas extragalácticas alejándose del Sol, ahora conocido como *corrimiento al rojo cosmológico*.

El hecho recién citado es una manifestación muy importante de un fenómeno en RG que se aborda desde el estudio del corrimiento en la frecuencia de la radiación electromagnética emitida por objetos astrofísicos. En esta sección nos interesa estudiar un comportamiento semejante en la radiación emitida desde el entorno inmediato de un escenario con condiciones extremas; sin embargo, en este caso la naturaleza del fenómeno no yace en el movimiento relativo entre objetos o la expansión del espacio, sino en la consideración de los efectos que tiene la presencia de un campo gravitacional intenso. La radiación que se emite en tales circunstancias sufre un corrimiento en su frecuencia cuando es observada desde una región más lejana/cercana a la fuente del campo, lo cual es un efecto derivado de la *dilatación gravitacional del tiempo*.

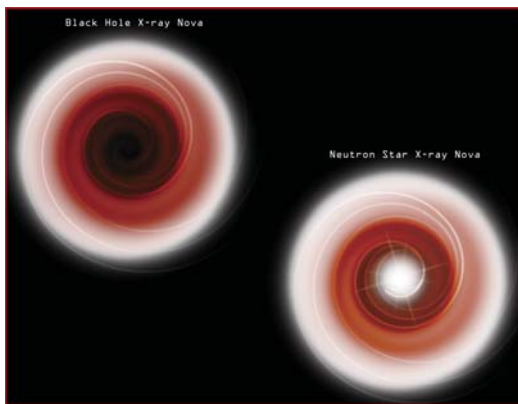


Figura 15: Ilustración (disponible en el sitio del observatorio *Chandra*) de dos tipos de fuentes de rayos X. A la izquierda, el gas proveniente de una estrella compañera sigue trayectorias en espiral mientras está sujeto al intenso campo gravitacional de un agujero negro. El corrimiento al rojo de la radiación emitida en el disco de acreción aumenta conforme el gas se aproxima al horizonte de eventos, una vez que este es cruzado por el gas ya no existe emisión apreciable y como resultado se tiene una región completamente oscura. A la derecha el objeto central en cuestión es una estrella de neutrones, en este caso el corrimiento al rojo aumenta de manera menos abrupta que en el caso anterior. Debido a que la estrella sí tiene una superficie sólida, la colisión inminente del gas con esta provoca una gran liberación de energía que da lugar a una región muy brillante.

Dos observadores situados en una región afectada por la gravedad (a distancias distintas de la fuente del campo) miden un intervalo temporal distinto entre la ocurrencia de dos eventos. Para el observador más cercano a la fuente el tiempo transcurre más lentamente, esta es una de las predicciones de la teoría de la Relatividad General. Este efecto es en esencia distinto respecto a la versión en

^I Lemaître restringió su solución para preservar la relación radio/masa del universo y para que esta fuera consistente con las velocidades radiales de alejamiento observadas en nebulosas extragalácticas, resultados de las soluciones de A. Einstein y de W. de Sitter, respectivamente.

^{II} Asumiendo el *principio cosmológico*, en 1922 A. Friedmann obtuvo por primera vez una solución cuya parte espacial incluye un parámetro dependiente del tiempo (*factor de escala*); además, deriva un conjunto de ecuaciones que determinan la expansión del universo.

1.11 presentada en el capítulo anterior, pues en RE no existen fuentes de gravedad. La primera confirmación de la dilatación gravitacional del tiempo fue hecha por R. Pound y G. Rebka en (61) el Laboratorio Jefferson de la Universidad de Harvard en el año 1959. El experimento se basa en un fenómeno cuántico básico¹: supongamos que un objeto emite radiación en la frecuencia que un receptor puede absorber, si el emisor se mueve relativamente hacia el receptor entonces existirá un corrimiento al azul (aumento Doppler en la frecuencia) en la radiación observada; sin embargo, en presencia de un campo gravitacional se espera que el cambio en la frecuencia se pueda contrarrestar completamente por un efecto “inverso” (una disminución en la frecuencia observada), el llamado *corrimiento al rojo gravitacional*. Una vez que el receptor absorbe el fotón la dilatación del tiempo es confirmada y por tanto el corrimiento al rojo gravitacional también.

Una consecuencia de este fenómeno se da cuando la radiación se propaga en sentido opuesto al gradiente gravitacional, un fotón pierde energía conforme se escapa de la fuente del campo; sin embargo, esto no implica una disminución en su velocidad (pues esta se mantiene constante en 1), sino en su frecuencia. Esto es fácil de aclarar, desde que la energía para un fotón está dada por $E = h\nu$, la dilatación del tiempo implica una disminución en la frecuencia ν al alejarse el fotón, de donde la pérdida de energía es evidente. Para agujeros negros galácticos en sistemas binarios el disco de acreción alcanza temperaturas 10 veces mayores a las del núcleo solar (del orden de 100 millones de Kelvin) (55), lo cual implica que los fotones emitidos son muy energéticos (con frecuencias de rayos X). No obstante, los efectos gravitacionales en estas condiciones son extremos, por tanto los fotones pierden mucha energía al alejarse del objeto compacto; es decir, el corrimiento al rojo puede ser muy grande (ver **Figura 15**). Los sistemas de este tipo más brillantes emiten en rayos X más de un millón de veces la energía emitida por el Sol en todo el espectro electromagnético.

En este contexto, el corrimiento al rojo nos permite conocer la diferencia relativa entre la longitud de onda/frecuencia de la radiación emitida a una distancia r del objeto compacto $\lambda_r = (\nu_r)^{-1}$ y la detectada por un observador en el infinito $\lambda_\infty = (\nu_\infty)^{-1}$. La relación fundamental para esta observable está dada (63) por

$$z + 1 = \lambda_\infty(\lambda_r)^{-1} = \nu_r(\nu_\infty)^{-1}, \quad (2.44)$$

donde se ha supuesto la invariancia de la velocidad de la luz al considerar que se debe cumplir la relación $1 = \lambda\nu$ para una onda electromagnética en el vacío. Si consideramos ahora la relación inversa que existe entre el periodo y la frecuencia de la onda, podemos reescribir 2.44 en función de los respectivos periodos $\Delta\tau$ y Δt como

$$z + 1 = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} \Rightarrow z = \frac{\Delta t - \Delta\tau}{\Delta\tau}, \quad (2.45)$$

¹Un átomo emite o absorbe un fotón con una frecuencia definida por el cambio de energía entre estados cuánticos permitidos (transiciones de los electrones en el átomo).

2. DISCOS DE ACRECIÓN

donde se ha asumido que el parámetro temporal para la partícula que emite en su sistema momentáneamente en reposo (SMR) corresponde al tiempo propio τ , mientras que el tiempo medido por el observador en el infinito se corresponde con el parámetro t .

En el caso de emisión que nos interesa analizar se tiene la ventaja de que el modelo de Page y Thorne considera que el disco de acreción reside en la variedad descrita por la métrica, lo cual permitirá relacionar el corrimiento al rojo con la geometría del espacio. En efecto, el elemento de línea para la métrica no diagonal de Kerr es¹

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\varphi^2 + 2g_{03}dtd\varphi. \quad (2.46)$$

Considerando que la partícula emite radiación desde su SMR, todos los términos espaciales en 2.46 son nulos. De modo que se tiene

$$ds^2 = |g_{00}|dt^2. \quad (2.47)$$

Ahora, considerando que con la métrica se puede relacionar el tiempo propio τ para el SMR de la partícula en r con el tiempo t del observador en infinito comoⁱⁱ $ds^2 = d\tau^2$, entonces de 2.47 se obtiene

$$d\tau^2 = |g_{00}|dt^2. \quad (2.48)$$

Vamos a suponer ahora que mientras un fotón emitido se desplaza la métrica entre la partícula emisora y el observador no cambia en un periodo (i.e., g_{00} es constante mientras se recorre una longitud de onda), de tal manera que al integrar 2.48 sobre dicho intervalo de tiempo se obtiene

$$\int d\tau^2 = |g_{00}| \int dt^2 \Rightarrow \Delta\tau = \sqrt{|g_{00}|}\Delta t. \quad (2.49)$$

Finalmente, sustituyendo 2.49 en 2.45 tenemos que el corrimiento al rojo está dado (40) por

$$z = \frac{\Delta t - \sqrt{|g_{00}|}\Delta t}{\sqrt{|g_{00}|}\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{|g_{00}|}} - 1. \quad (2.50)$$

Desde que la métrica de Schwarzschild tiene como elemento de línea un caso particular del expresado en 2.46, la relación para el corrimiento al rojo gravitacional dada en 2.50 es válida también para la emisión desde un hipotético disco de acreción en el caso de un agujero negro estático. Sustituyendo la componente g_{00} de

¹ Recuerde que hemos considerado $c = 1$, así se tiene que los términos $dt^2 = c^2 dt^2$ y $dtd\varphi = c dt d\varphi$ tienen unidades consistentes con el elemento de línea.

ⁱⁱ Nuevamente debe considerarse que $d\tau^2 = c^2 d\tau^2$.

las soluciones 1.45 y 1.46 se tiene que el desplazamiento en la frecuencia está determinado respectivamente para Schwarzschild y Kerr como

$$z_S = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \quad (2.51)$$

$$z_K = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.52)$$

Lo primero a notar es que en 2.51 no existe dependencia respecto al ángulo polar θ ni el azimutal φ , lo cual implica que la emisión por una partícula con coordenada radial $r > 2m$ sufrirá el mismo efecto de corrimiento al rojo finito que cualquier otra emisión a la misma distancia del objeto compacto. Otro detalle evidente es que $z_S \rightarrow \infty$ conforme $r \rightarrow 2m$; es decir, el tiempo en el cual un fotón escapa del pozo gravitacional aumenta continuamente hasta hacerse infinito en el horizonte de eventos, resultado que era esperado. Se concluye que la existencia de un disco de acreción a partir del cual existe emisión no presenta ninguna característica distinta a las ya citadas.

Para el caso en 2.52 de Kerr la dependencia en θ tiene consecuencias cuando se dan diferentes valores para dicha coordenada. De particular interés es considerar la emisión desde un disco en el plano ecuatorial, cuando consideramos $\theta = \frac{\pi}{2}$ se encuentra que el corrimiento al rojo corresponde al caso de Schwarzschild (2.52 se reduce a 2.51), por lo cual en este caso dicho efecto será idéntico para fotones emitidos desde anillos en el plano (pues no hay dependencia en la coordenada azimutal φ). Sin embargo, notemos de la expresión en 2.50 que en general $z \rightarrow \infty$ cuando $|g_{00}| \rightarrow 0$, lo cual es equivalente a decir que el corrimiento al rojo diverge cuando hay un cambio de signo en g_{00} . Para el caso de Kerr esto sucede en la frontera que delimita exteriormente a la ergosfera, la cual sabemos que coincide en el plano ecuatorial con el horizonte de eventos de la solución de Schwarzschild, esto es consistente con los resultados basados en la relación 1.60 evaluada en dicho plano ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

¿Qué pasa con la emisión fuera del disco de acreción? Definiendo la función σ a partir de 2.52 como $\sigma(\theta) = \frac{1}{(z_K+1)^2}$, basta¹ con analizar el comportamiento de σ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ (pues ya estamos fuera del plano ecuatorial) con r y a como parámetros constantes. Dos cálculos triviales para clasificar los extremos de esta función son

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right|_{[0, \frac{\pi}{2})} &= - \frac{4mra^2 \cos \theta \sin \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Big|_{[0, \frac{\pi}{2})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} &= - \frac{4mra^2}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \left[(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{4a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (2.53)$$

¹El corrimiento al rojo en 2.50 depende de $\cos^2 \theta$, la cual es una función simétrica en el $[0, \pi]$, por tanto basta analizar el comportamiento de z para la mitad del intervalo.

2. DISCOS DE ACRECIÓN

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = -\frac{4mra^2}{(r^2 + a^2)^2} < 0. \quad (2.54)$$

Como $\sigma(\theta)$ alcanza un máximo en $\theta = 0$ según 2.54, entonces $z_K = \frac{1}{\sqrt{\sigma(\theta)}} - 1$ alcanza un mínimo en dicho valor, y como z_K es simétrica respecto a θ concluimos que existe un comportamiento decreciente del corrimiento al rojo hacia los polos¹.

Para finalizar esta sección, presentamos otra aplicación actual del análisis de corrimiento al rojo gravitacional. Se sabe que la luz emitida desde la superficie de objetos masivos sufre un corrimiento que es proporcional a su masa e inversamente proporcional a su radio ($\sim \frac{m}{r}$) (77). Las enanas blancas poseen masas grandes ($\sim M_\odot$) y radios suficientemente pequeños (al menos 100 veces menores a R_\odot) de tal forma que su relación $\frac{m}{r}$ las convierte en objetos ideales de estudio, pues se esperan grandes corrimientos al rojo. Otra cantidad estimable a partir del análisis del espectro estelar es su gravedad superficial (77), difiriendo del caso anterior en la dependencia inversa cuadrática del radio ($\sim \frac{m}{r^2}$). Conocidas las dos relaciones citadas, se puede estimar la masa y radio de estas estrellas. Uno de los casos más conocidos corresponde al objeto más brillante en el cielo, se trata del sistema formado por Sirius A y la enana blanca más cercana que se ha detectado, Sirius B (ver **Figura 7**). En 1971 Jesse L. Greenstein analizó el espectro de Sirius B, midió su corrimiento al rojo y logró estimar el radio y masa estelar en $r = 0.0078R_\odot$ y $m = 0.99M_\odot$, respectivamente.

¹La observación de jets de partículas expulsadas en la dirección de los polos ($\theta \in \{0, \pi\}$) representa un obstáculo para analizar el efecto de corrimiento en tales valores para θ .

Teoría Pseudo-Compleja

Physics concerns what we can say about nature./No phenomenon is a physical phenomenon until it is an observed phenomenon.

Niels H. Bohr/paráfrasis de John A. Wheeler

Anteriormente se han propuesto generalizaciones a la RG, dos ejemplos de esto fueron el caso de Albert Einstein y el de Max Born. Por un lado, Einstein propuso una extensión compleja para su teoría, intentó unificar electrodinámica y RG al considerar un campo complejo que incluyera al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como parte real y al tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ como parte imaginaria (25), y lograr así encontrar un vínculo más general al que existe (mediante transformaciones de Lorentz) en el caso de un espacio-tiempo plano entre campo eléctrico y magnético; por otro lado, en un intento por reconciliar la teoría cuántica con la relatividad general, Born propone introducir el momento conjugado (a las coordenadas de una partícula) al elemento de línea (14), y lo hace de tal manera que dicha contribución aparece proporcional a un parámetro que sólo es significativo a escalas cuánticas.

En este trabajo, el interés radica en una teoría relativista libre de singularidades en el propio espacio-tiempo, ya que la existencia de estas implica que algunas regiones físicas de nuestro universo son inexplorables, lo cual por supuesto puede indicar que la teoría de la RG puede estar incompleta. En (46), se analiza el espectro¹ de partículas de las cinco^{II} posibles teorías de gravitación, se concluye que la extensión *hipercompleja* tiene una estructura que evita la existencia de *soluciones fantasma* o *taquiones*, siendo de esta manera la única teoría extendida que satisface la condición. Para dicho tipo de extensión se adapta una teoría

¹ En el artículo citado se consideran campos gravitacionales débiles, en los cuales se puede escribir el Lagrangiano en función de la energía cinética y potencial. La estructura del propagador depende de la parte cinética del Lagrangiano, un análisis del propagador permite diferenciar si se describen partículas físicas o no.

^{II} RG representando la teoría con estructura real algebraica sobre \mathbb{R} , una extensión compleja sobre \mathbb{C} , otra cuaterniónica sobre \mathbb{H} y dos con estructura algebraica restringida, la hipercompleja y la hipercuaterniónica.

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

simétrica¹ llamada Relatividad General Pseudo-Compleja (RG-pc), la cual hereda las características de la extensión hipercompleja, descartando de esta manera a partículas cuyo propagador no corresponde a soluciones físicas o partículas con masa imaginaria y cuya velocidad es superior a la de la luz.

Una investigación importante para la teoría pseudo-compleja se realizó en (82), donde se ha estudiado el efecto Cassimir alrededor de grandes concentraciones de masa, se concluyeⁱⁱ que a mayor concentración de masa mayor serán las fluctuaciones de vacío. Estas fluctuaciones son las que se pueden asociar a la presencia de energía oscura en el tensor de energía-momento. En RG-pc se interpreta a dicha energía como un agente antigravitacional, y también se considera el efecto que las fluctuaciones de vacío tienen sobre la métrica. En el proceso de colapso de un objeto compacto dicho efecto tiene como resultado un espacio-tiempo sin horizonte de eventos y sin singularidad; es decir, en grandes concentraciones de masa se puede pensar que el mismo espacio-tiempo se distorsiona de tal forma que se detiene el colapso gravitacional. De esta manera, se concluye que debido a las fluctuaciones de vacío la energía oscura también contribuye a la deformación del espacio.

3.1. Análisis en el contexto Pseudo-Complejo

Así como el análisis complejo está construido a partir de un álgebra en el conjunto \mathbb{C} , de manera análoga en este trabajo se propone considerar el análisis sobre una nueva extensión para el campo \mathbb{R} . Definimos el conjunto de los *números pseudo-complejos* como $\mathbb{D} = \{t + jx : t, x \in \mathbb{R} \text{ y } j^2 = 1\}$, donde la variable $j \in \mathbb{D}$ es la unidad pseudo-imaginaria, difiriendo de la unidad imaginaria $i \in \mathbb{C}$ respecto a su cuadrado, ya que $j^2 = 1 = -i^2$.

Como conjunto generador para el espacio pseudo-complejo \mathbb{D} en este trabajo optamos por la *base diagonal*ⁱⁱⁱ; es decir, cualquier elemento X en \mathbb{D} estará representado de manera única como combinación lineal de $\sigma_+ = \frac{1}{2}(1 + j)$ y $\sigma_- = \frac{1}{2}(1 - j)$ (ver **Figura 16**). De esta manera, si consideramos dos elementos $X, Y \in \mathbb{D}$ expresados en la base diagonal $\{\sigma_+, \sigma_-\}$ como $X = X_+\sigma_+ + X_-\sigma_-$ y $Y = Y_+\sigma_+ + Y_-\sigma_-$, entonces las operaciones de suma y producto respecto a esta base están dadas por

1. Suma: $X + Y = (X_+ + Y_+)\sigma_+ + (X_- + Y_-)\sigma_-$.

2. Producto: $X \cdot Y = (X_+Y_+)\sigma_+ + (X_-Y_-)\sigma_-$.

¹ Anteriormente se presentó una teoría no simétrica propuesta por J. W. Moffat (54).

ⁱⁱ En (82) se relizan cálculos para determinar cómo la masa cambia la estructura del vacío en una vecindad. Las fluctuaciones del vacío aumentan abruptamente a medida que se consideran regiones más cercanas al radio de Schwarzschild; sin embargo, se desprecia el impacto de este efecto sobre la métrica.

ⁱⁱⁱ En **Apéndice A** trabajamos con la base $\{1, j\}$ para \mathbb{D} .

Las expresiones en 1 y 2 para la suma y el producto nos sugieren que podemos siempre operar de manera independiente las componentes de σ_+ y σ_- de variables y funciones pseudo-complejas. A partir de estas reglas de operación, es fácil mostrar que \mathbb{D} es un conjunto con *divisores de cero*. Si tomamos ahora $X = X_+\sigma_+$ y $Y = Y_-\sigma_-$ para reales X_+ y Y_- arbitrarios, de acuerdo a la regla para el producto tenemos

$$X \cdot Y = (X_+)(0)\sigma_+ + (0)(Y_-)\sigma_- = 0. \quad (3.1)$$

En particular $\sigma_+\sigma_- = 0$, por lo cual se deduce que el conjunto de divisores de cero[†] se corresponde con el cono de luz \mathbb{D}_c .

Las coordenadas para una variedad plana en RG-pc permiten evidenciar que la dimensión real de estos conjuntos pseudo-complejos es 8, mientras que su dimensión pseudo-compleja es 4. Una manera de hacer evidente esta afirmación es escribir las coordenadas de la forma

$$X^\mu = x_r^\mu + jx_j^\mu = x_r^\mu + jlu^\mu, \quad (3.2)$$

donde x_r^μ son las componentes *pseudo-reales*, x_j^μ son las componentes *pseudo-imaginarias*, l es un factor de escala de *longitud mínima* y u^μ representa una 4-velocidad[‡] en algún punto dado de la línea de mundo de una partícula.

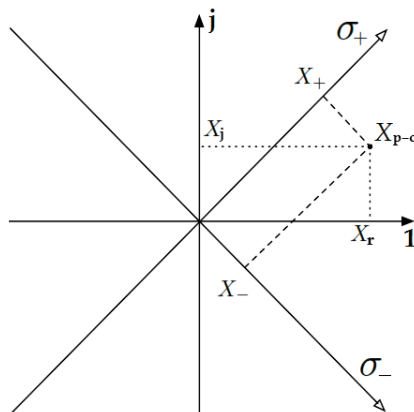


Figura 16: Variable X_{p-c} representada en base diagonal $\{\sigma_+, \sigma_-\}$ y canónica $\{1, j\}$, con componentes X_+, X_- y X_r, X_j respectivamente.

Un objeto importante en una teoría geométrica como la gravitación, es conocer la forma en que medimos distancias en una variedad, por eso se presenta de la manera más general en como son expresadas las funciones \mathbb{D} -valudas, una métrica

[†] El conjunto de divisores de cero o cono de luz en \mathbb{D} puede ser entendido de otra forma en **Apéndice A**.

[‡] Esta característica logra cierta analogía con la propuesta de Born, pues dicho factor de escala mínima permite introducir una 4-velocidad en el elemento de longitud de la teoría, de tal manera que existe simetría entre coordenadas y velocidades.

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

pseudo-compleja (18) tal que es holomorfa y tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^R + jg_{\mu\nu}^j = g_{\mu\nu}^+\sigma_+ + g_{\mu\nu}^-\sigma_-, \quad (3.3)$$

donde $g_{\mu\nu}^R, g_{\mu\nu}^j, g_{\mu\nu}^+$ y $g_{\mu\nu}^-$ se suponen simétricas.

Es importante mencionar que se pueden construir todos los objetos geométricos usados en RG de manera análoga en el caso pseudo-complejo (por ejemplo, se puede obtener una conexión compatible con la métrica), una exposición de geometría diferencial pseudo-compleja puede ser encontrada en (40). Sin embargo, debido a que trabajaremos sobre objetos proyectados al espacio real 4-dimensional será válido usar las herramientas de la geometría diferencial real.

De la relación 3.3 para la métrica se puede obtener un elemento de línea pseudo-complejo $g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu$; sin embargo, sabemos que la naturaleza de las distancias físicas exige que el elemento de línea en una teoría sea un objeto real. Considerando la condición citada basta con anular la parte pseudo-imaginaria del elemento de línea pseudo-complejo para satisfacerla, complementando esta restricción con el método variacional estándar es posible obtener las ecuaciones de campo en RG-pc. Es interesante enfatizar que en trabajos previos se había considerado un principio variacional modificado para una acción \mathcal{S} pseudo-compleja, en (39) se ha mostrado que ambos métodos para obtener las ecuaciones de campo son equivalentes. Cuando se aborda el problema variacional se tiene que considerar que las componentes en σ_+ y σ_- en la variación son independientes, tenemos así que la condición usual en este caso para extremos $\delta\mathcal{S} = \delta\mathcal{S}_+\sigma_+ + \delta\mathcal{S}_-\sigma_- = 0$ se traduce en $\delta\mathcal{S}_\pm = 0$. De cada componente en la variación se puede obtener una teoría real 4-dimensional; motivado por esto, en (70) se propone un principio variacional modificado para restringir ese hecho y acoplar la estructura pseudo-compleja de la teoría, esto se logra al proponer hacer uso de los ceros “generalizados” de la extensión algebraica en la condición de extremos

$$\delta\mathcal{S} \in \mathbb{D}_c \quad \Rightarrow \quad \delta\mathcal{S} = \lambda\sigma_\pm. \quad (3.4)$$

Las variaciones en las componentes σ_+ y σ_- son equivalentes (cada una respecto a una componente simétrica de la métrica, $g_{\mu\nu}^+$ o $g_{\mu\nu}^-$), mostrando de esta manera que podemos tomar cualquiera para obtener la teoría modificada. Si elegimos la componente σ_- como divisor de cero, se encuentran (40) las siguientes ecuaciones de campo

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^+ = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_{\mu\nu}^- = -\frac{8\pi k}{c^2}(T^\Lambda)_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

donde k es la constante gravitacional, $\mathcal{G}_{\mu\nu}^\pm = \mathcal{R}_{\mu\nu}^\pm - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^\pm\mathcal{R}^\pm$ son las componentes del tensor de Einstein en este caso, las cuales a su vez están dadas en función del tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}^\pm$ y el escalar de curvatura \mathcal{R}^\pm pseudo-complejos. Además, al

usar el principio variacional modificado, el tensor de energía-momento T^Λ contiene una contribución **no nula** (40) que interpretaremos como energía oscura de carácter anti-gravitacional.

Las ecuaciones de campo tienen que ser resueltas para cada componente diagonal (40), mientras que la componente en σ_+ coincide en este caso con la estructura de las ecuaciones de RG en el vacío, la componente σ_- incluye una distribución con energía oscura. Una vez que se obtiene la métrica pseudo-compleja, se debe hacer la proyección¹ al espacio físico 4-dimensional. Una condición importante para lograr dicha proyección es eliminar las componentes pseudo-imaginarias en parámetros y variables de la teoría. Para el caso de la métrica esto es

$$g_{\mu\nu}(X, \mathcal{A}) \mapsto g_{\mu\nu}(x, \mathcal{A}^{\mathcal{R}}), \quad (3.6)$$

donde \mathcal{A} representa a parámetros pseudo-complejos con parte real $\mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ y x representa a coordenadas reales (parte real de las coordenadas pseudo-complejas).

La deducción de las soluciones pseudo-complejas a las ecuaciones de campo 3.5 que son análogas a las soluciones estacionarias dadas en 1.45, 1.46 y 1.49 se puede encontrar en (18). La primera métrica que se presentó en RG es la de Schwarzschild, para el caso en RG-pc sus componentes están determinadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{B}{2r^3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{B}{2r^3}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En 3.7 aparece el parámetro $B = bm^3$ describiendo el acoplamiento entre la masa central y las fluctuaciones de vacío. La teoría pseudo-compleja propone una correspondencia fenomenológica entre dos hechos que no son considerados en RG: por un lado, la naturaleza matemática intrínseca en RG-pc implica la presencia de una aportación al tensor de energía-momento que no aparece en la derivación de carácter variacional de las ecuaciones de campo en RG, por otro lado, existen fluctuaciones de vacío que no han sido consideradas en RG. Dicho lo anterior, el parámetro $B = bm^3$ se deriva del *ansatz* para modelar la densidad de energía en un tensor de energía-momento que incorpora la contribución de la energía oscura correspondiente a las fluctuaciones de vacío, se propone que la densidad decrece¹¹ de manera proporcional a r^{-5} . De este hecho se puede inferir que la teoría pseudo-

¹ En (18) se cita que el método de proyección se puede relacionar con el hecho de despreciar efectos de la longitud mínima. Un ejemplo se da en (40), se demuestra que una condición necesaria para que el grupo de Lorentz pseudo-complejo $SO_+(3, 1) \otimes SO_-(3, 1)$ sea reducido al grupo de Lorentz estándar $SO(3, 1)$ es haciendo la identificación $l = 0$.

¹¹ En (80), donde no se considera ninguna perturbación en la métrica, la densidad de energía considerando las fluctuaciones de vacío decrece como $\frac{1}{r^6}$.

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

compleja únicamente va a predecir comportamientos significativamente distintos¹ a la teoría estándar para distancias cercanas al radio de Schwarzschild; es decir, en campos gravitacionales muy intensos.

La presencia del parámetro B nos permite además determinar cuándo la componente g_{00} de la métrica no cambia de signo, implicando de esta manera que se puede evitar la aparición del horizonte de eventos. En (40) se demuestra que el valor extremo (mínimo) de $-g_{00}$ se encuentra en $r_0 = \left(\frac{3B}{4m}\right)^{\frac{1}{2}}$, incorporando esto en la condición $-g_{00} > 0$ se encuentra como solución la condición $B > \frac{64}{27}m^3$. Este resultado encontrado para el parámetro B resulta funcionar también para el caso de la solución de Ker en RG-pc (40), evitando así la aparición del horizonte de eventos y la superficie de corrimiento al rojo infinito.

3.2. Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

Estamos interesados principalmente en estrellas negras galácticas, debido a que estas permiten calcular la distancia a su centro simultáneamente de dos maneras posibles, calculando por un lado el efecto de corrimiento al rojo y por otro lado la frecuencia orbital de las QPO's. Sin embargo, para conocer dicha distancia en el segundo caso, debemos suponer que las QPO's se emiten localmente en el disco de acreción y orbitan alrededor de la estrella, análogamente a como se observa en el caso de los discos de acreción en núcleos activos de galaxias. Es de particular relevancia que ambos cálculos en la teoría pseudo-compleja son consistentes, mientras que éstos no son compatibles en el caso de la teoría estándar. Un ejemplo explícito de este hecho es el del sistema binario GRO J1655-40 (ver **Figura 10**), la medición de frecuencia angular para las QPO's observadas infiere radios orbitales superiores a $15m$, mientras que el análisis según el corrimiento al rojo predice radios aproximadamente de $2m$ (38). Otros ejemplos de sistemas con discrepancias en RG son GX339-4, XTE J1752-223 y XTE J1550-564 (11). Una de las aproximaciones que haremos, es que una QPO se puede modelar con el movimiento orbital de una partícula en el disco de acreción. Pasamos ahora al problema de estudiar órbitas de una partícula de prueba como se hizo en la sección 2.2. Nos auxiliaremos del estudio de la estructura de un disco de acreción, para este caso consideraremos el modelo desarrollado por Page y Thorne expuesto en la sección 2.1, del cual se tomarán de momento las siguientes suposiciones a lo largo de ésta sección:

- * El plano central del disco de acreción reside en el plano ecuatorial del objeto central.

¹ Es relevante que incluyendo los términos pseudo-complejos en el [modelo](#) del sistema binario [Hulse-Taylor](#), los resultados predicen correcciones significativas alejadas hasta 12 órdenes de magnitud respecto a la precisión actual (69).

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

* El material del disco de acreción orbita en geodésicas circulares.

Para analizar las trayectorias de partículas en cualquier espacio-tiempo, necesitamos conocer primero la métrica en dicha variedad; más aún, si la ambición en un futuro es comparar predicciones teóricas con las observaciones, entonces más vale desarrollar un modelo para el espacio-tiempo más probable a ser observado. Presentamos a continuación la métrica de Kerr en su versión pseudo-compleja (69)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{\psi}{\Sigma}\right) & 0 & 0 & -a\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -a\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\theta & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + a^2\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde se han usado las siguientes identificaciones

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad (3.9)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - \psi, \quad (3.10)$$

$$\psi = 2mr - \frac{B}{2r}. \quad (3.11)$$

La métrica presentada tiene signatura $(-, +, +, +)$ y está escrita en coordenadas de Boyer-Lindquist, es fácil notar que considerando la restricción $B = 0$ se recupera la solución estándar dada en 1.46. A partir de sus componentes se podrán construir expresiones esenciales en el desarrollo del modelo; además, explotando la simetría de estas componentes también se facilitarán los futuros cálculos. Por ejemplo, una de las expresiones que será útil se cita a continuación:

$$D = g_{03}^2 - g_{33}g_{00}. \quad (3.12)$$

Nuevamente con 3.8, podemos obtener el elemento infinitesimal de línea, el cual también será usado frecuentemente

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{03}(dx^0 dx^3) + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \\ &= -\left(1 - \frac{\psi}{\Sigma}\right) dt^2 - 2a\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\theta dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &\quad + \left(r^2 + a^2 + a^2\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Una vez conocida la forma de medir distancias en éste espacio-tiempo, podemos usar mecánica analítica para determinar el movimiento de las partículas. Partimos del Lagrangiano, el cual está determinado mediante la métrica y las

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

velocidades generalizadas como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -\frac{1}{2}\zeta, \quad (3.14)$$

donde $\zeta = 0$ para trayectorias nulas, $\zeta = 1$ para trayectorias temporaloides y $\zeta = -1$ para trayectorias espacialoides.

A partir de 3.14, sabemos que en el formalismo Lagrangiano se define el momento generalizado, $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$, el cual nos permitirá conocer una expresión para el Hamiltoniano del sistema en cuestión

$$\mathcal{H} = \dot{x}^\mu p_\mu - \mathcal{L}. \quad (3.15)$$

Es posible obtener una expresión más compacta para el Hamiltoniano en función de la métrica, para lo cual serán útiles las siguientes relaciones

$$p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu, \quad (3.16)$$

$$\dot{x}^\lambda = g^{\lambda\mu}p_\mu. \quad (3.17)$$

De un análisis (ver **Apéndice B.1** para la obtención del Hamiltoniano y las relaciones 3.16, 3.17) simple obtenemos (16)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda = -\frac{1}{2}\zeta, \quad (3.18)$$

donde se ha usado el hecho de que $p^\alpha = \dot{x}^\alpha$, resultando esto en que el valor numérico de \mathcal{H} y \mathcal{L} coinciden al ser la contracción de los 4-momentos.

Posteriormente también será de utilidad contar con los momentos conjugados para las coordenadas (t, r, θ, φ) , los cuales se obtienen a partir de 3.16

$$p_t = p_0 = g_{00}\dot{x}^0 + g_{03}\dot{x}^3 = g_{00}\dot{t} + g_{03}\dot{\varphi}, \quad (3.19)$$

$$p_r = p_1 = g_{11}\dot{x}^1 = g_{11}\dot{r}, \quad (3.20)$$

$$p_\theta = p_2 = g_{22}\dot{x}^2 = g_{22}\dot{\theta}, \quad (3.21)$$

$$p_\varphi = p_3 = g_{30}\dot{x}^0 + g_{33}\dot{x}^3 = g_{30}\dot{t} + g_{33}\dot{\varphi}. \quad (3.22)$$

Cuando describimos el movimiento de una partícula sobre geodésicas se asegura la conservación de su masa en reposo m_0 , su energía E , su momento angular L_z y una constante que posteriormente presentaremos. Ahora, recordemos que al encontrar simetrías en el Lagrangiano se determina una ley de conservación. Considerando entonces la simetría axial del espacio-tiempo de Kerr, obtenemos que las rotaciones espaciales (rotaciones con ángulo azimutal φ) dejan invariante

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

al Lagrangiano. Análogamente, debido a que la solución de Kerr es estacionaria se tiene que las traslaciones temporales no afectan al Lagrangiano. De las simetrías citadas obtenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{luego, por 2.13} \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = cte, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \text{luego, por 2.13} \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = cte'. \quad (3.24)$$

Análogamente al caso de Schwarzschild (para RG) en 2.15 y 2.16 analizado en la subsección 2.2.2 del capítulo anterior, las relaciones 3.23 y 3.24 se deben interpretar como la conservación del momento angular L_z y la energía E , respectivamente. Una expresión explícita para estas cantidades conservadas se obtiene haciendo uso de 3.14 a continuación

$$\begin{aligned} L_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(g_{00} \dot{t}^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{22} \dot{\theta}^2 + g_{33} \dot{\varphi}^2 + 2g_{03} \dot{t} \dot{\varphi} \right) \\ &\Rightarrow L_z = g_{03} \dot{t} + g_{33} \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} -E &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left(g_{00} \dot{t}^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{22} \dot{\theta}^2 + g_{33} \dot{\varphi}^2 + 2g_{03} \dot{t} \dot{\varphi} \right) \\ &\Rightarrow -E = g_{00} \dot{t} + g_{03} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Al comparar 3.19 con 3.26 y 3.22 con 3.25, notamos que $-E = p_t$ y $L_z = p_\varphi$. Además, usando en 2.13 la relación que existe entre 3.24 con 3.26 y 3.23 con 3.25, tenemos una expresión alternativa para la conservación de la energía E y el momento angular L_z de partículas sobre trayectorias geodésicas. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para t y φ , y considerando las expresiones citadas para la energía y el momento angular en términos de las componentes de la métrica tenemos

$$0 = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{dE}{ds} = \frac{d}{ds} (g_{00} \dot{t} + g_{03} \dot{\varphi}), \quad (3.27)$$

$$0 = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{dL_z}{ds} = \frac{d}{ds} (g_{03} \dot{t} + g_{33} \dot{\varphi}). \quad (3.28)$$

3.2.1. Velocidad angular en órbitas geodésicas circulares

Debido a que estamos interesados en partículas orbitando sobre geodésicas circulares, es de interés particular conocer la ecuación de movimiento para la coordenada radial r , la cual está determinada de acuerdo a las ecuaciones de Euler-Lagrange en 2.13 como

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}. \quad (3.29)$$

Con 3.14 podemos desarrollar por separado ambos miembros de 3.29, tenemos por un lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} g_{\mu\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ \Rightarrow 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} g_{00} \right) \dot{t}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} g_{11} \right) \dot{r}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} g_{22} \right) \dot{\theta}^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial r} g_{33} \right) \dot{\varphi}^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial r} g_{03} \right) \dot{t} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(g_{00} \dot{t}^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{22} \dot{\theta}^2 + g_{33} \dot{\varphi}^2 + 2g_{03} \dot{t} \dot{\varphi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(g_{11} \dot{r}^2 \right) = g_{11} \dot{r} \\ \Rightarrow 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{d}{ds} (2g_{11} \dot{r}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para lograr una notación más compacta, convenimos de ahora en adelante para la coordenada radial, que $\frac{\partial}{\partial r} g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$. Así, colocando 3.30 y 3.31 de acuerdo a 3.29, tenemos la ecuación de la geodésica para la coordenada radial

$$\frac{d}{ds} (2g_{11} \dot{r}) = g'_{00} \dot{t}^2 + g'_{11} \dot{r}^2 + g'_{22} \dot{\theta}^2 + g'_{33} \dot{\varphi}^2 + 2g'_{03} \dot{t} \dot{\varphi}. \quad (3.32)$$

Es importante recordar que consideraremos las trayectorias de las partículas una vez que estas ya están limitadas al plano ecuatorial, como bien se citó al inicio de esta sección, así, a menos que se indique lo contrario, tendremos entonces que

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

la coordenada polar cumplirá

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0. \quad (3.34)$$

Debido a que en futuras situaciones consideraremos la restricción citada, es conveniente tener una expresión para las componentes de la métrica en 3.8 restringida al plano ecuatorial. Usaremos entonces 3.33 para considerar que $\cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$ y $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$. Además, debemos considerar las identificaciones 3.9 y 3.10, tenemos entonces que

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) = - \left(1 - \frac{\psi}{r^2 + a^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}} \right) = - \left(1 - \frac{\psi}{r^2} \right), \quad (3.35)$$

$$g_{11} = \frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}}{r^2 + a^2 - \psi} = \frac{r^2}{r^2 + a^2 - \psi}, \quad (3.36)$$

$$g_{22} = \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} = r^2, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} g_{33} &= \left(r^2 + a^2 + a^2 \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \frac{\pi}{2} = r^2 + a^2 + \frac{a^2 \psi}{r^2 + a^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}} \\ &= r^2 + a^2 + \frac{a^2 \psi}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$g_{03} = -a \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \frac{\pi}{2} = - \left(\frac{a\psi}{r^2 + a^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}} \right) = - \frac{a\psi}{r^2}. \quad (3.39)$$

Para las órbitas circulares la coordenada radial es constante, de manera que en estas se cumple que $\dot{r} = 0$. Considerando que se cumple 3.34 en las trayectorias de interés, concluimos que 3.32 se transforma en una geodésica circular plana determinada por

$$g'_{00} \dot{t}^2 + g'_{33} \dot{\varphi}^2 + 2g'_{03} \dot{t} \dot{\varphi} = 0. \quad (3.40)$$

Esta ecuación se puede reescribir en términos de la velocidad angular ω de las partículas orbitando, basta considerar que

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{dt}{ds}} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}}. \quad (3.41)$$

Así, 3.40 queda sustituida por

$$g'_{00} \dot{t}^2 + g'_{33} \omega^2 \dot{t}^2 + 2g'_{03} \dot{t}^2 \omega = 0. \quad (3.42)$$

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

La ecuación 3.42 es un polinomio de segundo orden en ω , resolviendo para la velocidad angular tenemos que

$$\omega_{\pm} = -\frac{g'_{03}}{g'_{33}} \pm \sqrt{\frac{(g'_{03})^2 - g'_{33}g'_{00}}{g'^2_{33}}}. \quad (3.43)$$

Para expresar la velocidad angular de manera más explícita, necesitamos considerar las derivadas parciales respecto de la coordenada radial de las componentes (considerando 3.33) g_{00} , g_{03} y g_{33} dadas en 3.8

$$g'_{00} = -\frac{\partial\left(1 - \frac{\psi}{\Sigma}\right)}{\partial r} = \frac{\partial\left(\frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}\right)}{\partial r} = -\left(\frac{2m}{r^2} - \frac{3B}{2r^4}\right) := -R_{\omega}(r), \quad (3.44)$$

$$g'_{03} = -\frac{\partial\left(a\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\frac{\pi}{2}\right)}{\partial r} = -a\frac{\partial\left(\frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}\right)}{\partial r} = a\left(\frac{2m}{r^2} - \frac{3B}{2r^4}\right) = aR_{\omega}(r), \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} g'_{33} &= \frac{\partial\left[\left(r^2 + a^2 + a^2\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\right]}{\partial r} = 2r + a^2\frac{\partial\left(\frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}\right)}{\partial r} \\ &= 2r - a^2\left(\frac{2m}{r^2} - \frac{3B}{2r^4}\right) = 2r - a^2R_{\omega}(r), \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde la función $R_{\omega}(r)$ se define en 3.44.

Una vez que sustituimos 3.44-3.46 en 3.43 y simplificamos, obtenemos la siguiente expresión para la velocidad angular

$$\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{R_{\omega}(r)}}{a\sqrt{R_{\omega}(r)} \pm \sqrt{2r}} = \frac{1}{a \pm \sqrt{\frac{2r}{R_{\omega}(r)}}}. \quad (3.47)$$

En 3.47 se extiende a la versión presentada para RG, pues si hacemos $B = 0$ se recupera la expresión dada en 2.41. La solución 3.47 es real únicamente cuando $R_{\omega}(r) > 0$, lo cual es equivalente a pedir que $r > \frac{4}{3}m$ (cuando se toma $B = \frac{64}{27}m^3$). El doble signo \pm en 3.47 indica que la partícula puede orbitar en dos sentidos respecto a la rotación del objeto compacto, para movimiento progrado se usa $+$, mientras que para el caso retrogrado se usa $-$.

Desde que consideramos sólo distancias positivas ($r > 0$) y soluciones reales ($R_{\omega}(r) > 0$) es claro ver que siempre se satisfacen las siguientes relaciones

$$a\sqrt{R_{\omega}(r)} + \sqrt{2r} > a\sqrt{R_{\omega}(r)} - \sqrt{2r} \quad \Rightarrow \quad |\omega_{-}| > |\omega_{+}|, \quad (3.48)$$

donde se ha usado la convención $a > 0$. Más aún, analizando el denominador de

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

3.47 se hace evidente que el sentido de rotación de una partícula en movimiento progrado no se verá afectado a grandes o pequeñas distancias del objeto compacto; sin embargo, esto no sucede para las partículas en movimiento retrogrado. A grandes distancias la velocidad angular se mantiene negativa ($\omega_- < 0$), lo cual es equivalente a que se satisfaga $a^2 R_\omega(r) < 2r$. Por otro lado, cuando consideramos a una partícula acercándose lo suficiente al objeto central, entonces el denominador de $\omega_- < 0$ puede cambiar de signo, lo cual implica que la partícula ahora seguirá un movimiento progrado. Esto quiere decir que el efecto de arrastre relativista se hace presente cuando se satisface que

$$a^2 R_\omega(r) > 2r. \quad (3.49)$$

Para distancias radiales grandes, la teoría pseudo-compleja no ofrece un comportamiento distinto respecto a la teoría estándar; sin embargo, diferencias entre ambas teorías aparecen para distancias radiales inferiores al radio de Schwarzschild ($r = 2m$), por tanto es de particular interés el movimiento progrado de partículas. En RG la velocidad angular de las partículas en trayectorias estables siempre aumenta conforme consideramos órbitas con radios inferiores, esto se puede ver en 2.41; sin embargo, en la teoría pseudo-compleja se alcanza un máximo, el cual no depende del parámetro de espín del objeto compacto (lo cual es fácil de ver en 3.47).

A continuación encontramos un valor estimado para el radio que corresponde al máximo en la velocidad angular, el cual se puede verificar en la **Figura 17**. Para el movimiento progrado consideramos el signo positivo en 3.47 y calculamos su derivada respecto de la coordenada radial, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega'_+ &= \frac{\frac{R'_\omega(r)}{2\sqrt{R_\omega(r)}}}{\left(a\sqrt{R_\omega(r)} + \sqrt{2r}\right)} - \sqrt{R_\omega(r)} \left[\frac{a\frac{R'_\omega(r)}{2\sqrt{R_\omega(r)}} + \frac{1}{\sqrt{2r}}}{\left(a\sqrt{R_\omega(r)} + \sqrt{2r}\right)^2} \right] \\ &= \frac{a\frac{R'_\omega(r)}{2} + \frac{\sqrt{2r}R'_\omega(r)}{2\sqrt{R_\omega(r)}} - a\frac{R'_\omega(r)}{2} - \frac{\sqrt{R_\omega(r)}}{\sqrt{2r}}}{\left(a\sqrt{R_\omega(r)} + \sqrt{2r}\right)^2} \\ &\therefore \omega'_+ = \frac{\frac{\sqrt{2r}R'_\omega(r)}{2\sqrt{R_\omega(r)}} - \frac{\sqrt{R_\omega(r)}}{\sqrt{2r}}}{\left(a\sqrt{R_\omega(r)} + \sqrt{2r}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

La derivada de ω_+ en 3.50 se anula cuando $r = \frac{R_\omega(r)}{R'_\omega(r)}$. Ahora, de la definición en 3.44 para $R_\omega(r)$ obtenemos que

$$R'_\omega(r) = -\frac{4m}{r^3} + \frac{6B}{r^5}. \quad (3.51)$$

Velocidad angular en movimiento progrado

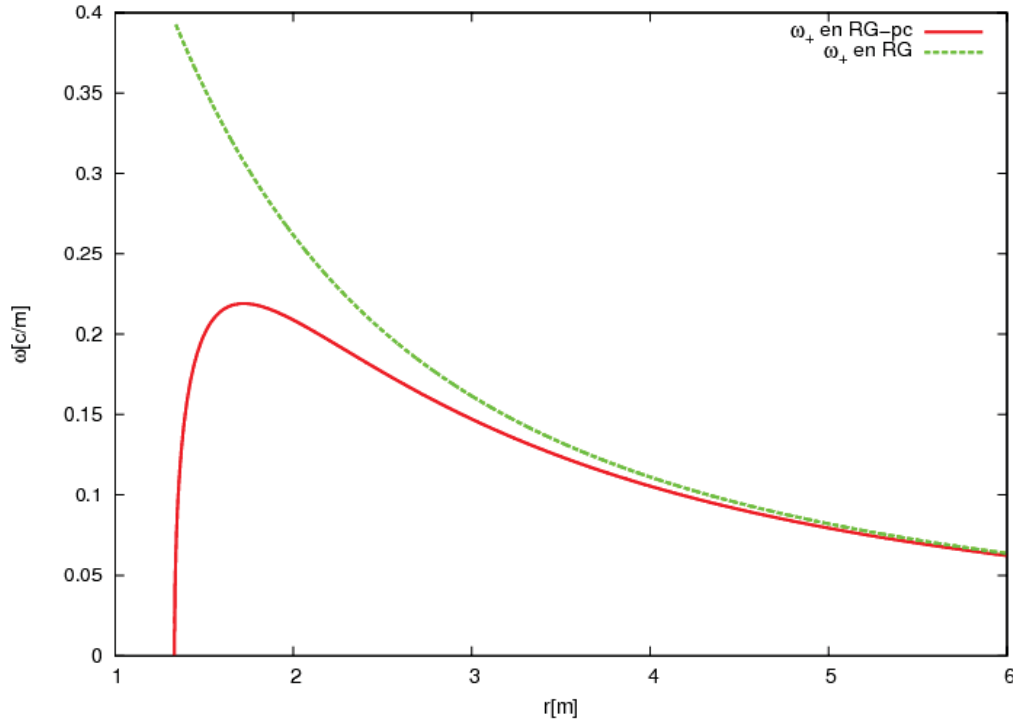


Figura 17: Para un objeto central con parámetro de espín $a = 0.995 m$, se grafica la velocidad angular ω para órbitas circulares como función del radio r , el caso mostrado es para movimiento progrado de una partícula masiva. En RG la velocidad orbital aumenta estrictamente conforme la partícula se acerca al horizonte de eventos, como se puede ver en 2.41. Para el caso de RG-pc (considerando $B = \frac{64}{27} m^3$), la velocidad angular alcanza un máximo ω_{max} en $1.72m$ (antes del radio de Schwarzschild $r = 2m$). Alrededor de ω_{max} la pendiente de la velocidad angular es pequeña en una vecindad; es decir, para radios cercanos al máximo la fricción entre secciones del disco disminuye debido a que no hay gran diferencia de velocidades, lo cual propiciará que exista poca emisión de radiación térmica. Conforme el radio disminuye la caída abrupta en ω implica que la fricción aumenta. El comportamiento en RG-pc de ω a grandes distancias converge al caso de RG pues la presencia del término proporcional a B pierde relevancia, consiguiendo de esta manera un disco de acreción con la misma apariencia en la lejanía. Una característica importante es que el tiempo orbital de las partículas en RG-pc siempre es mayor que en RG, y este aumenta para radios pequeños ($r < 1.72m$) mientras que en RG siempre disminuye.

Finalmente, concluimos que el máximo se encuentra (usando $B = \frac{64}{27} m^3$) aproximadamente en

$$r_{\omega_{max}} = \left(\frac{5B}{4m} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.72m. \quad (3.52)$$

Hasta ahora sólo hemos considerado trayectorias que se derivan de un principio variacional (las cuales son estables); es decir, geodésicas descritas por las ecuaciones de Euler-Lagrange; sin embargo, las partículas se pueden desplazar sobre órbitas más generales (no necesariamente estables), para las cuales la única restricción se limita a pedir que el elemento de línea corresponda al de una partícula física, $ds^2 < 0$. Como caso extremo tenemos a los fotones, los cuales se mueven a lo largo de trayectorias nulas, es decir, se cumple que $ds^2 = 0$ para sus líneas de

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

mundo. Considerando a fotones en movimiento sobre geodésicas circulares en el plano ecuatorial, tenemos en este caso que $dr = 0$ y $d\theta = 0$. Con las restricciones citadas, la relación 3.13 para el elemento de línea se convierte en

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{\psi}{\Sigma}\right) dt^2 + \left(r^2 + a^2 + a^2 \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2a \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\varphi. \quad (3.53)$$

Identificando en la relación anterior a los elementos de la métrica dados en 3.8, podemos reescribir a 3.53 de manera más compacta como

$$0 = g_{00} dt^2 + g_{33} d\varphi^2 + 2g_{03} dt d\varphi. \quad (3.54)$$

Finalmente, haciendo uso de 3.41, podemos escribir a 3.54 en términos de la velocidad angular $\tilde{\omega}$ de los fotones orbitando

$$0 = g_{00} dt^2 + g_{33} \tilde{\omega}^2 dt^2 + 2g_{03} \tilde{\omega} dt^2 = (g_{00} + g_{33} \tilde{\omega}^2 + 2g_{03} \tilde{\omega}) dt^2 \Rightarrow 0 = g_{00} + g_{33} \tilde{\omega}^2 + 2g_{03} \tilde{\omega}. \quad (3.55)$$

En este caso, las raíces del polinomio de segundo orden en $\tilde{\omega}$ están dadas por

$$\tilde{\omega}_{\pm} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{\frac{(g_{03})^2 - g_{33}g_{00}}{(g_{33})^2}}. \quad (3.56)$$

En 3.56 agregamos \pm para considerar a fotones en movimiento progrado (+) y retrogrado (-) respecto al objeto central. Notamos además la similitud con la velocidad angular para partículas masivas en órbitas circulares estables dada en 3.43; no obstante, en este caso la expresión no está dada en términos de las derivadas de las componentes de la métrica. Una vez que consideramos la forma explícita de la solución de Kerr pseudo-compleja en 3.8 e incorporando la condición 3.33, obtenemos que 3.56 se puede escribir como

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \frac{a\tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r) \pm \sqrt{a^2 + r^2 [1 - \tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)]}}{a^2 [1 + \tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)] + r^2}, \quad (3.57)$$

donde

$$\tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r) = \frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}. \quad (3.58)$$

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

Notemos que en 3.56 se tiene incluida la expresión para D de 3.12, cuando esta es positiva sí se pueden considerar dos raíces reales para la velocidad angular, $\tilde{\omega}_\pm$. En (18) se muestra que el valor del parámetro B para el cual $D = (g_{03})^2 - g_{33}g_{00} = a^2 + r^2[1 - \tilde{R}_\omega(r)] \geq 0$ es $B = \frac{64}{27}m^3$. Si además de considerar este valor mínimo para B acoplamos la condición encontrada en la velocidad angular de partículas masivas ($r > \frac{4}{3}m$) se tiene que $\tilde{R}_\omega(r) \geq 0$. Esto permite deducir de 3.57 por un lado que $|\tilde{\omega}_+| > |\tilde{\omega}_-|$ y por otro lado que $\tilde{\omega}_+ > 0$ y $\tilde{\omega}_- < 0$ para movimiento progrado y retrogrado respectivamente¹, lo cual era esperado.

El caso de los fotones orbitando en movimiento progrado o retrogrado delimitará la región (r vs ω) en donde las partículas masivas pueden orbitar circularmente (de manera estable o inestable), esto se debe a que los fotones representan el caso límite al desplazarse sobre trayectorias nulas. Nuevamente la teoría pseudo-compleja consigue un comportamiento distinto, pues se permite a las partículas masivas desplazarse en un rango más amplio de velocidad angular respecto al esperado en RG para partículas cercanas ($r < 3m$) al objeto compacto. Conforme se consideran partículas a distancias mayores ($r > 3m$) la región de velocidades angulares que delimitan los fotones son prácticamente iguales en ambas teorías. Además, las curvas para movimiento retrogrado y progrado en RG se unen debido a un acentuado efecto de arrastre relativista para distancias menores al radio de Schwarzschild, mientras que en RG-pc el arrastre relativista no logra unir ambas curvas (en (67) se muestra una gráfica de estos efectos).

3.2.2. Corrimiento al rojo de la radiación emitida en el disco de acreción

Concluido ya el análisis de la velocidad angular de partículas en órbitas circulares estables e inestables simulando a QPO's, nos interesa también analizar el corrimiento al rojo de la emisión que tiene lugar en tales condiciones, como mencionamos al inicio de esta sección. Dado que las QPO's residen en el disco de acreción, entonces es de interés aplicar la fórmula para corrimiento al rojo dada en 2.50 cuando nos restringimos al plano ecuatorial (de manera que consideraremos el ángulo polar $\theta = \frac{\pi}{2}$). Tomando la componente g_{00} de la métrica pseudo-compleja dada en 3.35 y considerando la identificación para ψ en 3.11 tenemos

$$z = \frac{1}{\sqrt{|g_{00}|}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2mr - \frac{B}{2r}}{r^2}}} - 1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 2mr + \frac{B}{2r}}} - 1. \quad (3.59)$$

Sustituyendo la componente g_{00} de 3.7 en 2.50 es evidente que volvemos a obtener la expresión 3.59; es decir, el corrimiento para la solución de Kerr restringida al

¹Para distancias pequeñas ω_- se aproxima a cero. En RG la superficie caracterizada por $\omega_- = 0$ se corresponde con la ergosfera.

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

plano ecuatorial coincide con el caso de Schwarzschild en RG-pc. A diferencia del estudio en RG dado en el capítulo anterior, en este caso se tiene que para el radio de Schwarzschild ($r = 2m$) no se presenta un corrimiento al rojo infinito. Cuando tomamos como valor límite $B = \frac{64}{27}m^3$ se tiene en este caso un corrimiento finito dado por

$$z = \frac{2m}{\sqrt{(2m)^2 - (2m)^2 + \frac{m^3 64}{4m 27}}} - 1 = \frac{2m}{\sqrt{\frac{16m^2}{27}}} - 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \approx 1.6. \quad (3.60)$$

Analicemos ahora lo que sucede cuando consideramos un valor ligeramente superior para el parámetro B , consideremos $B = \left(\frac{64}{27} + \epsilon\right) m^3$ ($\epsilon > 0$ pequeño). Conforme se consideran distancias cercanas a la superficie de la estrella ($r \rightarrow \frac{4}{3}m$) se tiene para el denominador en 3.59

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \frac{4}{3}m} \sqrt{r^2 - 2mr + \frac{B}{2r}} &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}m\right)^2 - (2m)\frac{4}{3}m + \frac{3m^3}{2(4m)}\left(\frac{64}{27} + \epsilon\right)} \\ &= \sqrt{\frac{24}{9}m^2 - \frac{24}{9}m^2 + \frac{3}{8}m^2\epsilon} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2}}m. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sustituyendo 3.61 en 3.59 se tiene finalmente que

$$\lim_{r \rightarrow \frac{4}{3}m} z = \left(\frac{4m}{3}\right) \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{\epsilon}m}\right) - 1 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) - 1. \quad (3.62)$$

De resultado anterior podemos concluir que en RG-pc se puede obtener un corrimiento al rojo que si bien puede ser muy grande sigue siendo finito ($z < \infty$). Además, es claro que si tomamos el valor mínimo para el parámetro B (tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en 3.62) encontramos que $z \rightarrow \infty$ para fuentes de emisión muy cercanas a la estrella. Se puede concluir que en RG-pc existe la posibilidad de observar una superficie estelar muy oscura y en el peor de los casos ($\epsilon = 0$) no visualizar nada debido a un corrimiento al rojo infinito (ver **Figura 18**).

En general si se consideran constantes r y a , el comportamiento de z en RG-pc cuando consideramos emisión fuera del disco ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$) es decreciente a medida que la fuente de emisión se acerca al eje determinado por los polos ($\theta \in \{0, \pi\}$) (67), lo cual como fue mostrado en el capítulo anterior también es cierto en RG. No obstante, si nos interesamos en una inclinación polar particular (θ fijo) y consideramos distancias cada vez menores el corrimiento en RG crece abruptamente (de hecho, diverge estrictamente para $a = m$ y $r \rightarrow m$ en los polos), mientras que en RG-pc el corrimiento puede permanecer acotado ($z < 1$ en los polos) (67).

Corrimiento al rojo para la solución de Kerr en el plano ecuatorial

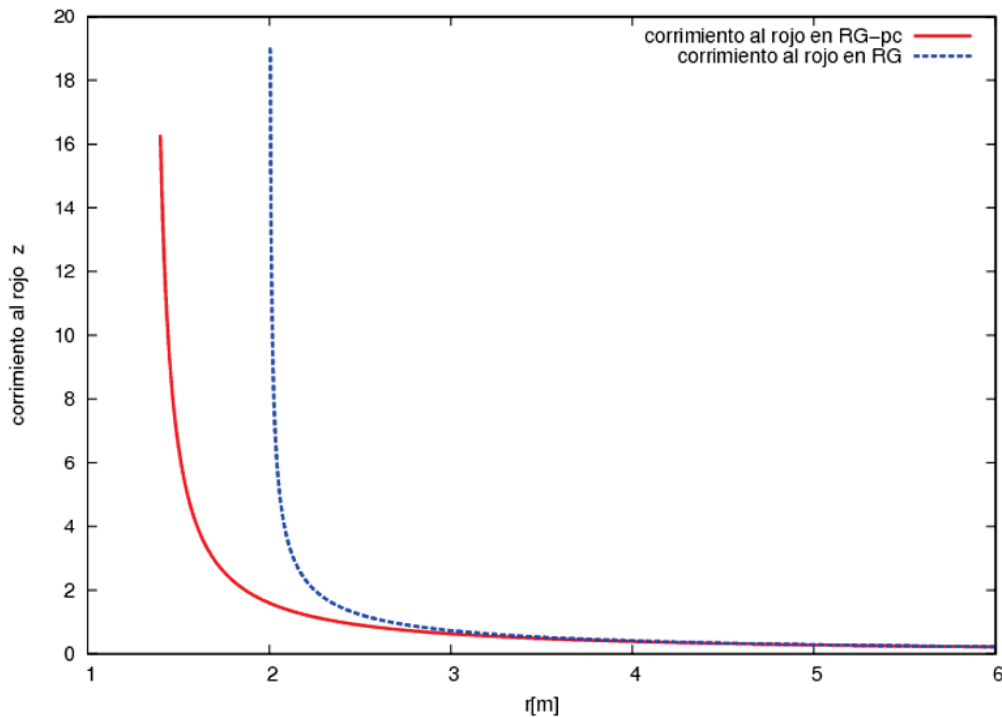


Figura 18: Se muestra el corrimiento al rojo gravitacional para la emisión con fuente en el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$) en el caso de una estrella compacta (en RG-pc y considerando $B = \frac{64}{27}m^3$) y un agujero negro (en RG) con un parámetro extremo de espín $a = 0.995m$. La RG-pc no difiere en su predicción respecto a RG para grandes distancias ($r > 3m$); sin embargo, para $r < 3m$ la diferencia entre ambas teorías gradualmente se hace significativa, pues para distancias convergiendo al radio de Schwarzschild en RG el corrimiento al rojo diverge.

3.2.3. El potencial efectivo pseudo-complejo

Sabemos que en general para una partícula en un espacio-tiempo correspondiente al exterior de un objeto compacto, se puede demostrar que su movimiento depende de un potencial efectivo V_{ef} , el cual codificará el comportamiento repulsivo o atractivo de la partícula respecto del objeto dependiendo su distancia respecto de este. Es decir, se cumple la siguiente relación para la energía

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_K^{pc}. \tag{3.63}$$

Notemos que en este caso partimos de una relación para la energía $\frac{E^2}{2}$ de una partícula, mientras que en 2.25 consideramos una energía E^2 ; sin embargo, comparando con 2.8 recobramos la descripción del movimiento clásico de una partícula con masa unitaria.

Motivados por este hecho, encontraremos una expresión para el potencial efectivo en el caso pseudo-complejo. Para encontrar dicho potencial, será útil obtener una expresión para \dot{t} y $\dot{\varphi}$ en términos de la energía E y el momento momento angular

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

L_z . Notemos primero que 3.25 y 3.26 forman un sistema de ecuaciones con las incógnitas deseadas, el cual se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} g_{03} & g_{33} \\ g_{00} & g_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_z \\ -E \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

La solución al sistema 3.64 para \dot{t} y $\dot{\varphi}$, es según el método de Cramer

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc|cc} L_z & g_{33} & g_{03} & L_z \\ -E & g_{03} & g_{00} & -E \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} g_{03} & L_z & g_{03} & L_z \\ g_{00} & -E & g_{00} & -E \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|cc} g_{03} & g_{33} & g_{03} & g_{33} \\ g_{00} & g_{03} & g_{00} & g_{03} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} g_{03} & g_{33} & g_{03} & g_{33} \\ g_{00} & g_{03} & g_{00} & g_{03} \end{array} \right| \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{g_{03}L_z + g_{33}E}{g_{03}^2 - g_{33}g_{00}} \\ \frac{-g_{03}E - g_{00}L_z}{g_{03}^2 - g_{33}g_{00}} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Sustituyendo 3.12 en 3.65 obtenemos de manera independiente y simplificada

$$\dot{t} = \frac{g_{03}L_z + g_{33}E}{D}, \quad (3.66)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{-g_{03}E - g_{00}L_z}{D}. \quad (3.67)$$

Ahora bien, como en 3.63 tenemos un término cinético proporcional a \dot{r}^2 , haremos uso del Lagrangiano dado en 3.14 para reproducirlo en la teoría pseudo-compleja. La idea es relacionar resultados encontrados con los coeficientes acompañando a las componentes de la métrica, por lo cual primero lo desglosamos como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(g_{00}\dot{t}^2 + g_{11}\dot{r}^2 + g_{22}\dot{\theta}^2 + g_{33}\dot{\varphi}^2 + 2g_{03}\dot{t}\dot{\varphi}). \quad (3.68)$$

Sustituyendo en 3.68 a \dot{t} y $\dot{\varphi}$ obtenidas de 3.66 y 3.67 respectivamente, y considerando también a 3.34 obtenemos

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} = & g_{00} \left(\frac{g_{03}L_z + g_{33}E}{D} \right)^2 + g_{11}\dot{r}^2 + g_{33} \left(\frac{-g_{03}E - g_{00}L_z}{D} \right)^2 \\ & + 2g_{03} \left(\frac{g_{03}L_z + g_{33}E}{D} \right) \left(\frac{-g_{03}E - g_{00}L_z}{D} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Si desarrollamos los cuadrados y productos en 3.69, pasamos el término con \dot{r}^2 al miembro izquierdo y agrupamos con factores E^2 , L_z^2 y EL_z los términos

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

simplificados en el miembro derecho, obtenemos

$$2\mathcal{L} - g_{11}\dot{r}^2 = \frac{1}{D^2}[g_{00}L_z^2(g_{00}g_{33} - g_{03}^2) + 2g_{03}EL_z(g_{00}g_{33} - g_{03}^2) + g_{33}E^2(g_{00}g_{33} - g_{03}^2)]. \quad (3.70)$$

Sustituyendo ahora 3.12 en los factores en paréntesis de 3.70, y despejando a \dot{r}^2 obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{1}{g_{11}D^2}[g_{00}L_z^2D + 2g_{03}EL_zD + g_{33}E^2D] + \frac{2\mathcal{L}}{g_{11}} \\ &= \frac{1}{g_{11}D}[g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z + g_{33}E^2 + 2D\mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Finalmente, considerando en 3.71 que las partículas sólo se desplazan sobre trayectorias temporaloides (la signatura convenida para la métrica no ha cambiado); es decir, en sus trayectorias se cumple que $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}$, tenemos la expresión de tipo cinético buscada

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{g_{11}D}(g_{33}E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D). \quad (3.72)$$

Para obtener una relación como la dada en 3.63, sumamos en 3.72 ahora un cero conveniente que involucre a E^2 , y multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}E^2 &= \frac{1}{2g_{11}D}(g_{33}E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D) + \frac{1}{2}E^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}E^2 &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2g_{11}D}[(g_{33} - g_{11}D)E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

De la relación 3.73 por simple inspección deducimos que el potencial efectivo V_K^{pc} es

$$V_K^{pc} = -\frac{1}{2g_{11}D}[(g_{33} - g_{11}D)E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D]. \quad (3.74)$$

Podemos obtener ahora una expresión para el potencial V_K^{pc} incluyendo parámetros de manera más explícita, lo cual se puede lograr sustituyendo en 3.74 la métrica de Kerr pseudo-compleja. Sin embargo, debemos recordar que el caso que nos interesa es para las trayectorias confinadas en el plano ecuatorial, en la subsección anterior se han calculado las componentes de la métrica para este caso en 3.35-3.39. La identificación que se hizo para D en 3.12 también se debe

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

simplificar con las expresiones citadas, ocupando 3.35, 3.39 y 3.38, tenemos que

$$\begin{aligned}
 D &= g_{03}^2 - g_{33}g_{00} = \left(\frac{a\psi}{r^2}\right)^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2\psi}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\psi}{r^2}\right) \\
 &= \left(\frac{a\psi}{r^2}\right)^2 + r^2 + a^2 + \left(\frac{a^2\psi}{r^2}\right) - \left(\frac{r^2\psi}{r^2}\right) - \left(\frac{a^2\psi}{r^2}\right) - \left(\frac{a\psi}{r^2}\right)^2 \\
 &\Rightarrow D = r^2 + a^2 - \psi.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Como paso intermedio, sustituimos 3.36, 3.38 y 3.75 en los primeros factores fuera y dentro del corchete en 3.74, obtenemos

$$\frac{1}{2g_{11}D} = \frac{1}{2\left(\frac{r^2}{r^2+a^2-\psi}\right)(r^2+a^2-\psi)} = \frac{1}{2r^2}, \tag{3.76}$$

$$g_{33} - g_{11}D = r^2 + a^2 + \frac{a^2\psi}{r^2} - \frac{r^2(r^2+a^2-\psi)}{r^2+a^2-\psi} = a^2 + \frac{a^2\psi}{r^2}. \tag{3.77}$$

Ahora, de la sustitución de 3.76, 3.77, 3.35, 3.39 y 3.75 en 3.74 se tiene

$$V_K^{pc} = -\frac{1}{2r^2} \left[\left(1 + \frac{\psi}{r^2}\right) a^2 E^2 - r^2 - a^2 + \psi - \frac{2a\psi}{r^2} EL_z - \left(1 - \frac{\psi}{r^2}\right) L_z^2 \right]. \tag{3.78}$$

Si incluimos en 3.78 la identificación para ψ dada en 3.11 y simplificamos adecuadamente, obtenemos una expresión para el potencial efectivo pseudo-complejo que nos permitirá comparar las modificaciones respecto de los potenciales efectivos obtenidos en RG

$$\begin{aligned}
 V_K^{pc} &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r} - \frac{a^2(E^2 - 1) - L_z^2}{r^2} - \frac{2m(L_z - aE)^2}{r^3} \right] \\
 &\quad + \frac{B}{4} \left[\frac{(L_z - aE)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right].
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

La expresión que acabamos de obtener incluye explícitamente al potencial efectivo de Kerr estándar dado en 2.36, de tal manera que podemos reescribir a V_K^{pc} en función de V_K como

$$V_K^{pc} = \frac{1}{2}V_K + \frac{B}{4} \left[\frac{(L_z - aE)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right]. \tag{3.80}$$

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

Como caso ilustrativo, sabemos que el espacio-tiempo de Schwarzschild es la restricción del caso de Kerr sin rotación. Considerando esta observación en el caso pseudo-complejo, podemos derivar el potencial V_S^{pc} que regirá el movimiento de partículas en dicho espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático, esto se obtiene de 3.79 al pedir que $a = 0$, obteniendo

$$V_S^{pc} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{L_z^2}{r^2} - \frac{2mL_z^2}{r^3} \right] + \frac{B}{4} \left[\frac{L_z^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right], \quad (3.81)$$

donde notamos que se incluye ahora al potencial de Schwarzschild para RG dado en 2.27, de manera que podemos reescribir a 3.81 como

$$V_S^{pc} = \frac{1}{2}V_S + \frac{B}{4} \left[\frac{L_z^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right]. \quad (3.82)$$

La aparición en 3.80 y 3.82 del término antigravitacional proporcional a $\frac{1}{r^5}$ (considerando que $B > 0$) es de relevancia para distinguir a la teoría pseudo-compleja de la estándar, ya que este evitará la captura debido al término atractivo proporcional a $-\frac{1}{r^3}$, el cual en RG provoca una caída inevitable a lo que se identifica en esa teoría como una singularidad. Esto es fácil de ver al considerar que para cualquier par de constantes positivas α y β se tiene que $\frac{\alpha}{r^5} - \frac{\beta}{r^3} > 0$ para r suficientemente pequeño. El factor $\frac{1}{2}$ de proporción que aparece para V_S y V_K en 3.80 y 3.82 se debe a que partimos de considerar una partícula con energía $\frac{E^2}{2}$ en 3.63 al derivar la expresión para el potencial V_K^{pc} .

Como hemos hecho con anterioridad, el estudio del potencial efectivo de un sistema nos permite analizar las órbitas de partículas en el espacio-tiempo correspondiente al Lagrangiano del que se deriva. En este caso, para partículas en órbitas circulares estables e inestables, relaciones para la energía E y momento angular L_z en función de la velocidad angular ω serán de utilidad para dicho estudio. De dichas expresiones se puede extraer el caso límite de fotones orbitando circularmente, como se hizo en¹ 2.38 y 2.39 en relación a la desigualdad 2.40. Para el caso pseudo-complejo se tiene

$$E^2 = \frac{(g_{00} + g_{03}\omega)^2}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2}, \quad (3.83)$$

$$L_z^2 = \frac{(g_{03} + g_{33}\omega)^2}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2}. \quad (3.84)$$

La deducción de estas expresiones (ver en **Apéndice B.2**) no considera en ningún momento condiciones para extremos en el potencial efectivo, por tanto son válidas incluso para órbitas circulares inestables. Lo primero a notar es que el denomi-

¹En ese caso no se involucra a ω explícitamente pero sí se rescata una interpretación para movimiento progrado y retrogrado.

3.2 Movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo

nador en ambas debe ser positivo (ya que el numerador lo es); más aún, cuando el denominador se anula éste se corresponde con la ecuación para encontrar la velocidad angular de fotones en órbitas circulares dada en 3.55. La restricción sobre la positividad de E^2 y L_z^2 se puede entender en función de las raíces para 3.55, basta con escribir 3.83 y 3.84 en términos de $\tilde{\omega}_+$ y $\tilde{\omega}_-$ como

$$E^2 = \frac{\left\{ \tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)[1 - a\omega] - 1 \right\}^2}{\left\{ r^2 + a^2[1 + \tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)] \right\} (\tilde{\omega}_+ - \omega)(\omega - \tilde{\omega}_-)}, \quad (3.85)$$

$$L_z^2 = \frac{\left\{ (r^2 + a^2)\omega + a\tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)[a\omega - 1] \right\}^2}{\left\{ r^2 + a^2[1 + \tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)] \right\} (\tilde{\omega}_+ - \omega)(\omega - \tilde{\omega}_-)}, \quad (3.86)$$

donde $\tilde{\omega}_+$ y $\tilde{\omega}_-$ están dadas explícitamente por 3.57. Se ha considerado también a $\tilde{R}_{\tilde{\omega}}(r)$ de 3.58 para expresar las componentes de la métrica 3.35, 3.39 y 3.38. La velocidad angular ω de una partícula masiva satisface $\tilde{\omega}_- < \omega < \tilde{\omega}_+$, cumpliéndose de esta manera las condiciones de positividad para E^2 y L_z^2 . Los límites en que $\omega = \tilde{\omega}_+$ u $\omega = \tilde{\omega}_-$ son válidos sólo para fotones en movimiento progrado o retrogrado respectivamente, y es fuera del rango acotado por dichos límites que la positividad de E^2 y L_z^2 en 3.85 y 3.86 deja de ser válida.

Centrando ahora nuestra atención en la estabilidad de órbitas circulares, podemos utilizar el potencial efectivo en 3.74 de manera análoga a los casos estudiados en la sección 2.2. El potencial V_K^{pc} debe alcanzar un extremo en órbitas circulares estables, por tanto se debe satisfacer que $(V_K^{pc})_r|_{r=r_{sco}} = 0$. De esta manera se puede asegurar que en dichas trayectorias se satisface de acuerdo a 3.63 que $\frac{E^2}{2} = V_K^{pc}$, lo cual claramente es cierto sólo si el potencial compensa la ausencia del término cinético cuando no existe una fuerza efectiva. Es de particular interés saber si se cumplen las condiciones en la teoría pseudo-compleja para la existencia de una órbita circular al límite de la estabilidad. La condición para encontrar la ISCO reside en saber si se satisface que $(V_K^{pc})_{rr}|_{r=r_{isco}} = 0$ para algún radio r_{isco} . En **Apéndice B.3** encontramos haciendo uso de las condiciones que ya hemos citado y las relaciones en 3.83 y 3.84 que la ISCO se encuentra al satisfacerse que

$$0 = g_{33}''(g_{00} + g_{03}\omega)^2 + g_{00}''(g_{03} + g_{33}\omega)^2 - 2g_{03}''(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega) + (g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2)D''. \quad (3.87)$$

En **Figura 19** se muestran las regiones de estabilidad/inestabilidad para órbitas de partículas en movimiento progrado de ambas teorías. Los potenciales efectivos considerados en regiones estables cumplen que $(V_{ef})_{rr} > 0$, mientras que en regiones inestables satisfacen $(V_{ef})_{rr} < 0$. La gráfica sirve también para visualizar el acercamiento del disco de acreción respecto al objeto compacto en función del parámetro de espín, en general en RG-pc se observa un mayor acercamiento para cada valor del parámetro de espín. Una notable diferencia aparece en RG-pc

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

cuando el parámetro de espín se encuentra entre $a = 0$ y $a = 0.416m$, ya que una partícula desplazándose por el disco de acreción puede internarse en la zona de inestabilidad (al sobrepasar la ISCO una partícula se acerca en trayectorias espirales hacia el objeto compacto) y posteriormente en principio nada impide que mediante algún mecanismo se pueda reincorporar a una órbita circular estable (la denominada “primera” órbita estable). Para la región en que $a > 0.416m$ órbitas estables circulares en RG-pc siempre son factibles; es decir, en dicha región el potencial efectivo siempre alcanza un mínimo.

Estabilidad de órbitas en movimiento progrado

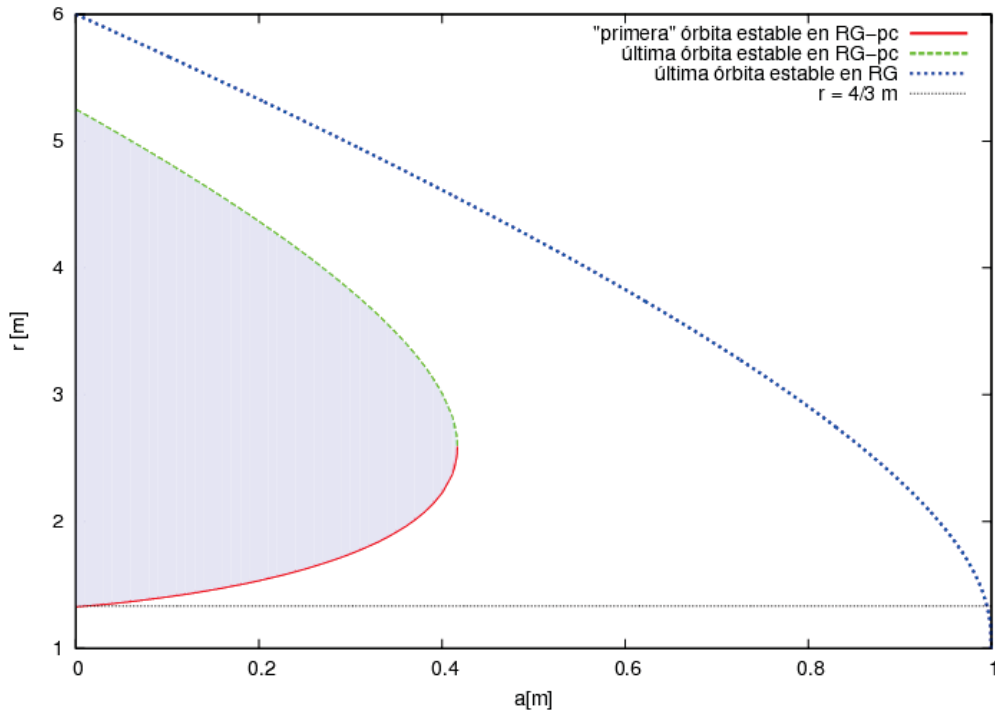


Figura 19: Esta gráfica se ha diseñado mediante un estudio numérico de las condiciones 3.88 y 2.42, así como del análisis de los potenciales 3.79 y 2.36 en (68), se considera $B = \frac{64}{27}m^3$. La región por encima de la línea azul (punteada) corresponde a partículas en órbitas estables en RG (y RG-pc), mientras que por debajo de esta las partículas están en órbitas inestables cayendo hacia la singularidad existente en la teoría estándar. En dicha línea se encuentra la ISCO para el caso de Schwarzschild ($a = 0$) en $r = 6m$ (correspondiendo con 2.34) y para el caso límite de Kerr ($a = m$) se encuentra en $r = m$, como fue comentado al final de la subsección 2.2.2. La correspondiente región de inestabilidad en RG-pc (y por tanto de inestabilidad también en RG) se representa en lila claro, esta región está acotada por la línea donde se encuentra la ISCO correspondiente representada en verde (punteada) y rojo. La región complementaria es de estabilidad, en esta se encuentra una característica particular cuando $a > 0.416m$, las partículas pueden alcanzar un máximo en su frecuencia a cierta distancia del objeto compacto (un caso se muestra en la Figura 17), y por tanto en este caso se predice la existencia de un anillo oscuro.

La condición para la velocidad angular de partículas en órbitas circulares estables es que $r > \frac{4}{3}m$ (con $B = \frac{64}{27}m^3$), en esta gráfica la línea gris (punteada) representa el límite radial para dicha condición. Las soluciones para ω_+ son imaginarias en 3.47 cuando una partícula supera dicho límite ya que ha penetrado la superficie de la estrella, región que no es considerada en la solución de Kerr en RG-pc. En la gráfica se puede observar que en RG-pc las partículas pueden orbitar de manera estable aún cuando se encuentran muy cercanas a la superficie de la estrella, mientras que en RG se pueden acercar (ya que no existe estrella) a distancias menores ($r < \frac{4}{3}m$) sólo para valores muy cercanos al máximo parámetro de espín ($a = m$).

Una vez que consideramos sustituir en 3.87 las componentes de la métrica de

Kerr pseudo-compleja dadas en 3.8, se obtiene¹

$$\begin{aligned}
 0 = & r^7[25B^2 + 2Br^2(11r - 32m) + 8r^4(6m^2 - 7mr + 2r^2)] \\
 & \pm 8a^4r^3(2mr^2 - 3B)(4mr^2 - 3B) \\
 & + 16a^3\sqrt{\frac{r^5}{4mr^2 - 3B}}(3B - 2mr^2)(3B - 4mr^2)[B + r^2(r - 4m)] \\
 & \pm a^2[-24B^3r^2 + 8B^2r^4(26m + 3r) - 2Br^6(256m^2 - 40mr + 15r^2) \\
 & + 8mr^8(32m^2 - 8mr + 3r^2)] \\
 & + 8ar^2\sqrt{\frac{r^5}{4mr^2 - 3B}}(3B - 4mr^2)[3B^2 + 2Br^2(r - 7m) + 8m^2r^4 - 2r^6].
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Cuando consideramos $B = 0$ la expresión anterior se reduce por supuesto a la condición impuesta a la ISCO para el caso de Kerr en RG dada en 2.42.

3.3. Ray-tracing

Dentro de las predicciones de la teoría pseudo-compleja que difieren de la teoría estándar, se encuentra que las partículas pueden acercarse más a un objeto central supermasivo para gran parte de los valores del parámetro a de espín, y en general su movimiento será más lento conforme se acercan a dicho objeto. Estas predicciones podrían verificarse si logramos observar que los discos de acreción de una estrella oscura son más brillantes respecto a la teoría estándar, corroborando así los detalles modificados en el concepto de la ISCO.

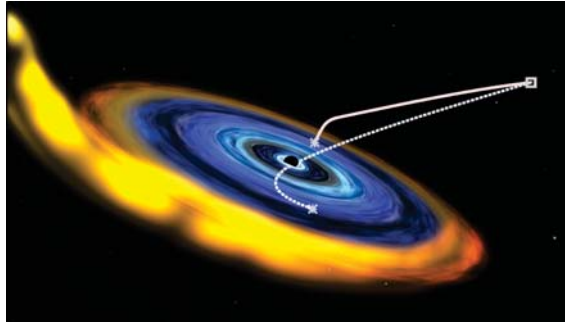


Figura 20: Disco de acreción (de dominio público) en el sistema IGR J17091 (candidato a agujero más pequeño localizado por el satélite RXTE), diseño del NASA/Goddard Space Flight Center/CI Lab. Se adapta la imagen para visualizar el método de ray-tracing. La línea blanca continua representa el trayecto nulo distorsionado de un fotón en el intenso campo gravitacional, el fotón alcanza al observador en infinito. La respectiva línea punteada considera a un fotón con un efecto de segundo orden, pues este alcanza a dar una vuelta (o fracción de esta) al objeto compacto antes de llegar al observador.

Si suponemos que existe materia acumulándose en el entorno de un objeto compacto entonces podemos considerar que dicha concentración es una posible

¹ La expresión 3.88 se obtiene en (68) con uso de cálculo simbólico (Mathematica).

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

fuente de emisión de luz. Apoyándose de este hecho se puede aplicar una técnica computacional para describir el entorno del objeto central, nos referimos al algoritmo de *Ray-tracing* (trazado de rayos). La idea consiste en seguir las trayectorias nulas de fotones en el espacio-tiempo curvo (ver **Figura 20**), cuya fuente se encuentra en el disco de acreción del objeto estudiado, el cual en este caso es una estrella oscura con entorno descrito por la solución pseudo-compleja de Kerr. Usando esta técnica es posible hacer un esbozo del disco de acreción del objeto central, logrando así una reproducción visual de las predicciones del modelo pseudo-complejo.

Mediante esta técnica es posible también calcular los perfiles de líneas de emisión K_α del hierro (*Fe*). Éstas líneas son producto de la radiación en rayos X en dichas zonas, identificadas por Oscilaciones Cuasi-Periódicas (10) (QPO's), y son observables ideales en campos gravitacionales intensos. Analizando las líneas de emisión se puede obtener información acerca de la periodicidad de las QPO's y el corrimiento al rojo, en (68) ya se han calculado estas líneas en RG-pc.

Es importante señalar que en (27) se hace referencia a posibles observaciones del agujero negro en el centro de nuestra galaxia, de la misma manera en (28) y (23) se cita el caso de la galaxia M87 (la cual contiene un AGN¹). En publicaciones como (31), se creyó que se había acercado una nube de gas al centro de nuestra galaxia (específicamente a Sagittarius A*), por lo cual se especulaba que esta podría disgregarse en la zona de acreción. Así, la predicción de la apariencia del entorno de objetos compactos se ha tornado cada vez más interesante, pues podría servir en un futuro para refinar detalles teóricos comparando los resultados observacionales con los computacionales. Dados los argumentos anteriores, no es sorpresa que distintos grupos de investigación ya han trabajado antes con el método de Ray-tracing, como lo son: (29), (57) y (7).



Figura 21: El observatorio ALMA es un arreglo de 66 antenas que funcionará como un *interferómetro* al combinar las señales de los reflectores de cada antena (para lograr esto se debe tomar en cuenta el tiempo de recorrido de las distintas señales, por tanto la localización de las antenas debe ser estratégica), permitiendo así simular a un enorme telescopio. Los reflectores metálicos captarán radiación de cuerpos astrofísicos con longitudes de onda milimétricas y submilimétricas.

De manera complementaria, el proyecto observacional *Event Horizon Telescope* trabaja actualmente en el caso de la galaxia M87 y Sagitario A*, se sabe que en el segundo caso (un objeto central con una masa aproximada de $4 \times 10^6 M_\odot$

¹ Por sus siglas en inglés: Active Galactic Nucleus. Es una región en el centro de una galaxia con grandes cantidades de emisión de radiación que pueden deberse a la existencia de un disco de acreción perteneciente a un objeto compacto supermasivo. A las galaxias con un AGN se les denomina *galaxias activas*.

en el centro de la Vía Láctea) se han tenido avances considerables implementando la técnica *VLBI*^I y se espera tener resultados en esta década. Actualmente, la propuesta de la teoría pseudo-compleja ha sido considerada (con clasificación “Alternative theories of Gravity”) como candidata a competir con otros proyectos para ser evaluada por el proyecto *ALMA*^{II} (75), el cual también utiliza la técnica VLBI (ver **Figura 21**).

3.3.1. Aplicación del formalismo de Hamilton-Jacobi

El simulador particular que aplica el algoritmo de ray-tracing empleado aquí es *GYOTO*^{III}, mismo que fue desarrollado en 2011 para el observatorio de París (79). La función principal del algoritmo reside en la integración de ecuaciones de movimiento para geodésicas nulas o temporaloides en el espacio-tiempo de Kerr; sin embargo, el código ha sido diseñado de tal manera que se puede adecuar para probarlo con distintas métricas analíticas e incluso aproximaciones numéricas. Una característica de eficiencia computacional muy importante de *GYOTO* es que se consideran únicamente a fotones que sí llegan al observador. Una manera de asegurar esto es lanzando los fotones desde la posición del observador y reconstruir la geodésica nula hacia atrás en el tiempo hasta que éste llegue a la fuente de emisión. De otra manera, el método implicaría considerar todas las posibles trayectorias nulas de fotones emitidos, incluso aquellas de fotones que no llegan al observador, resultando en un derroche de tiempo en los cálculos numéricos. En el caso de la solución de Kerr para RG, las ecuaciones de movimiento a integrar siguiendo la sugerencia dada en (51) para el Hamiltoniano están dadas (79) por 3.121-3.128. Para dicho caso las funciones R y Θ son

$$R(r) = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta [m_0^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + \mathcal{C}], \quad (3.89)$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{C} - \cos^2 \theta \left[a^2(m_0 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right], \quad (3.90)$$

donde se debe considerar la identificación de Δ dada en 1.48; además, la constante de Carter para la solución de Kerr está determinada por

$$\mathcal{C} = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2(m_0 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (3.91)$$

En la realización de las simulaciones de discos de acreción presentadas en (68) se ha implementado por primera vez *GYOTO* con el código **modificado** para el caso de RG-pc. La constante de Carter está dada por 3.111 o 3.112, mientras que las funciones R y Θ se determinan con 3.113 y 3.114, respectivamente; además, todas

^I Por sus siglas en inglés: Very Long Baseline Interferometry.

^{II} Por sus siglas en inglés: Atacama Large Millimeter/submillimeter Array.

^{III} **GYOTO**: General relativitY Orbit Tracer of Observatoire de Paris.

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

estas relaciones consideran a la identificación para Δ dada en 3.10. El objetivo de esta sección es la derivación de las ecuaciones de movimiento^I 3.121-3.128 a ser integradas por el código en el marco de la teoría pseudo-compleja.

Sabemos que la implicación física que determina el desplazamiento de las partículas a lo largo de geodésicas es la conservación^{II} en general de cuatro cantidades para el espacio-tiempo de Kerr. El código de Gyoto considera en cada iteración la conservación de estas cantidades para la reconstrucción de la geodésica, una vez que el fotón llega a la fuente en el disco de acreción, se vuelve a realizar una integración para calcular la intensidad emitida (79). Vamos a deducir a continuación una expresión para la constante de Carter.

Comenzamos el análisis presentando la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right). \quad (3.92)$$

Para aplicar el formalismo de Hamilton-Jacobi de manera efectiva, Carter ha propuesto en (16) la siguiente función principal (función generadora)

$$S = -\frac{1}{2} \zeta \lambda - Et - L_z \varphi + S_\theta + S_r, \quad (3.93)$$

donde

$$\lambda := \text{parámetro afín}, \quad (3.94)$$

$$S_r := \text{función dependiente sólo de } r, \quad (3.95)$$

$$S_\theta := \text{función dependiente sólo de } \theta. \quad (3.96)$$

La función 3.93 nos ayudará a encontrar la constante buscada mediante el método de separación de variables. Primero recurrimos al desarrollo de la suma sobre μ y ν en 3.92, apoyándonos de la simetría de la métrica obtenemos

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \frac{\partial S}{\partial x^0} \right) + 2g^{03} \left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \frac{\partial S}{\partial x^3} \right) + g^{11} \left(\frac{\partial S}{\partial x^1} \frac{\partial S}{\partial x^1} \right) \\ &\quad + g^{22} \left(\frac{\partial S}{\partial x^2} \frac{\partial S}{\partial x^2} \right) + g^{33} \left(\frac{\partial S}{\partial x^3} \frac{\partial S}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

^I Las ecuaciones de movimiento coinciden en estructura en RG y RG-pc, pero consideran parámetros distintos ya que en el segundo caso se considera $B \neq 0$.

^{II} Tanto la conservación de la energía y el momento angular se atribuyen a la simetría del espacio-tiempo considerado, la conservación de la masa en reposo se debe a que el Hamiltoniano del sistema no depende del parámetro afín.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + 2g^{03} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) + g^{11} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \\ &+ g^{22} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + g^{33} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Sustituyendo ahora la función principal 3.93 en cada término de 3.97, tenemos

$$\begin{aligned} 2 \left(-\frac{1}{2} \zeta \right) &= g^{00} (-E)^2 + 2g^{03} (-EL_z) + g^{11} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 \\ &+ g^{22} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + g^{33} (L_z)^2 \\ \Leftrightarrow -\zeta &= g^{00} E^2 - 2g^{03} EL_z + g^{11} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + g^{33} L_z^2. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Para proceder necesitamos ahora considerar las componentes contravariantes de la métrica inversa, las cuales están dadas por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(r^2+a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} & 0 & 0 & -\frac{\alpha \psi}{\Sigma \Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{\alpha \psi}{\Sigma \Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Sustituyendo las componentes de 3.99 en 3.98 encontramos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -\zeta &= - \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \right] E^2 + 2 \left(\frac{\alpha \psi}{\Sigma \Delta} \right) EL_z + \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \right) L_z^2. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Distribuyendo adecuadamente y pasando el factor Σ al miembro izquierdo de 3.100 se consigue

$$\begin{aligned} -\zeta \Sigma &= - \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right] E^2 + \frac{(a^2 \sin^2 \theta) E^2}{\Delta} + 2 \left(\frac{\alpha \psi}{\Delta} \right) EL_z \\ &+ \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} L_z^2 - \frac{a^2}{\Delta} L_z^2. \end{aligned} \quad (3.101)$$

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

Podemos acoplar los términos definidos por ① y ④ de 3.101 y reescribirlos de manera conveniente como

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} + \textcircled{4} &= -\frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2)^2 E^2 + a^2 L_z^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2)^2 E^2 \pm \underbrace{2(r^2 + a^2) E a L_z}_{\text{completando cuadrado}} + a^2 L_z^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2) E - a L_z \right]^2 - 2 \left[\frac{a(r^2 + a^2)}{\Delta} \right] E L_z. \quad (3.102)
 \end{aligned}$$

Análogamente hacemos con los términos definidos por ② y ③ de 3.101

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} + \textcircled{3} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} (a^2 \sin^4 \theta E^2 + L_z^2) \\
 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[a^2 \sin^4 \theta E^2 \pm \underbrace{2(r^2 + a^2) E a L_z}_{\text{completando cuadrado}} + L_z^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} [a \sin^2 \theta E - L_z]^2 + 2a E L_z. \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

Con las equivalencias dadas en 3.102 y 3.103, podemos reescribir a 3.101 como

$$\begin{aligned}
 -\zeta \Sigma &= \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \underbrace{2a \left(\frac{\psi}{\Delta} \right) E L_z}_{\textcircled{5}} - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2) E - a L_z]^2 \\
 &\quad - \underbrace{2a \left[\frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \right] E L_z}_{\textcircled{6}} + \frac{1}{\sin^2 \theta} [a \sin^2 \theta E - L_z]^2 + \underbrace{2a E L_z}_{\textcircled{7}}. \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

Ahora corroboremos que los términos definidos por ⑤, ⑥ y ⑦ en 3.104 se anulan. Partimos de que

$$\textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} = 2a E L_z \left[\frac{\psi - (r^2 + a^2)}{\Delta} + 1 \right]. \quad (3.105)$$

Considerando la definición de Δ dada en 3.10 en la sección anterior, tenemos

que 3.105 se convierte en

$$\textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} = 2aEL_z \left[\frac{\psi - (r^2 + a^2)}{(r^2 + a^2) - \psi} + 1 \right] = 2aEL_z(-1 + 1) = 0.$$

Hemos por tanto conseguido expresar de manera simplificada a 3.104 como

$$\begin{aligned} -\zeta\Sigma = \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 \\ + \frac{1}{\sin^2 \theta} [a \sin^2 \theta E - L_z]^2. \end{aligned} \quad (3.106)$$

De la ecuación 3.106, el término $\textcircled{8}$ se puede transformar en

$$\begin{aligned} \textcircled{8} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} [a^2 E^2 \sin^4 \theta - 2aEL_z \sin^2 \theta + L_z^2] \\ &= a^2 E^2 \sin^2 \theta - 2aEL_z + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \\ &= a^2 E^2 (1 - \cos^2 \theta) - 2aEL_z + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + L_z^2 - L_z^2 \\ &= [a^2 E^2 - 2aEL_z + L_z^2] + \left[\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - L_z^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right] - a^2 E^2 \cos^2 \theta \\ &= [aE - L_z]^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} [1 - \sin^2 \theta] - a^2 E^2 \cos^2 \theta \\ &\therefore \textcircled{8} = (aE - L_z)^2 + \left(\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.107)$$

La relación resultante 3.107 y la definición 3.9 para Σ son sustituidas en 3.106, obteniendo

$$\begin{aligned} -\zeta r^2 - \zeta a^2 \cos^2 \theta = \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 \\ + \frac{(aE - L_z)^2}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Consideremos ahora las siguientes identificaciones para ciertas funciones $R(r)$ y $\Theta(\theta)$:

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{R}{\Delta^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = \Theta. \quad (3.109)$$

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

Con ayuda de las identificaciones 3.109 y las definiciones de $f_1(r)$ y $f_2(r)$ dadas en 3.108, podemos simplificar a 3.108 como

$$\underbrace{f_1(r) + f_2(r) - \zeta r^2 - \frac{R}{\Delta}}_{\text{dependencia en } r} = \Theta + \underbrace{\left[\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2(\zeta - E^2) \right]}_{\text{dependencia en } \theta} \cos^2 \theta. \quad (3.110)$$

La dependencia funcional en ambos miembros de 3.110 evoca el método de separación de variables, por lo que la igualdad sólo será válida si ambos cumplen ser una constante, esta es la llamada constante de Carter \mathbf{C} .

Ahora, sustituyendo de 3.108 las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ explícitamente en 3.110, podemos escribir ambos miembros como

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - (aE - L_z)^2 - \zeta r^2 - \frac{R}{\Delta}, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{C} = \Theta + \left[\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2(\zeta - E^2) \right] \cos^2 \theta. \quad (3.112)$$

A partir de estas últimas relaciones, podemos despejar para Θ y R , obteniendo

$$R = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta \left[(aE - L_z)^2 + \zeta r^2 + \mathbf{C} \right], \quad (3.113)$$

$$\Theta = \mathbf{C} - \left[\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2(\zeta - E^2) \right] \cos^2 \theta. \quad (3.114)$$

Seguiremos a continuación la aproximación dada en (51) para el Hamiltoniano propuesto en el caso de Ray-tracing. Dicho Hamiltoniano considera parcialmente la forma dada en 3.18 de la sección 3.2; sin embargo, incluye una función $f = f(r, \theta, p_t, p_\varphi)$ a determinar. Usando las componentes contravariantes para la métrica de 3.99, la propuesta es

$$\mathcal{H} = \frac{\Delta}{2\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{2\Sigma} p_\theta^2 + f(r, \theta, p_t, p_\varphi). \quad (3.115)$$

Considerando que trabajamos con la función principal¹ de Hamilton S , y auxiliándonos de las identificaciones en 3.109, tenemos que

$$p_r^2 = \left(\frac{dS}{dr} \right)^2 = \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{R}{\Delta^2}, \quad (3.116)$$

¹ S se corresponde con una función generadora $F_2 = F_2(q, P, t)$ del tipo 2 expuesta en (32), se satisfacen así las relaciones $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$ entre las viejas (q_i, p_i) y nuevas (Q_i, P_i) coordenadas canónicas.

$$p_\theta^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 = \Theta. \quad (3.117)$$

Así, sustituyendo 3.116 y 3.117 en 3.115, obtenemos que el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{R}{2\Sigma\Delta} + \frac{\Theta}{2\Sigma} + f(r, \theta, p_t, p_\varphi). \quad (3.118)$$

Ocupando la relación 3.18 para el Hamiltoniano, podemos de la ecuación 3.118 despejar $f = f(r, \theta, p_t, p_\varphi)$

$$f(r, \theta, p_t, p_\varphi) = -\frac{1}{2}\zeta - \frac{R}{2\Sigma\Delta} - \frac{\Theta}{2\Sigma} = -\frac{1}{2}\zeta - \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Sigma\Delta} \right). \quad (3.119)$$

Finalmente, con 3.119 podemos ahora reescribir al Hamiltoniano en 3.115 como

$$\mathcal{H} = \frac{\Delta}{2\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{2\Sigma} p_\theta^2 - \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Sigma\Delta} \right) - \frac{1}{2}\zeta. \quad (3.120)$$

Tenemos ahora información suficiente para determinar la evolución del sistema en el espacio fase, basta con utilizar las ecuaciones canónicas de movimiento¹ para el Hamiltoniano dado en 3.120. Usaremos también la relación $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ para los momentos en las ecuaciones para \dot{t} y $\dot{\varphi}$, la cual se cumple según la naturaleza de la función principal S que usamos. Además, se debe considerar que R depende de E , L_z y r , mientras que Θ depende de E , L_z y θ según 3.113 y 3.114 respectivamente, por otro lado se tiene que Δ depende de r , mientras que Σ depende de r y θ según 3.10 y 3.9 respectivamente. Obtenemos finalmente que

$$\dot{t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = \frac{1}{2\Delta\Sigma} \frac{\partial}{\partial E} (R + \Delta\Theta), \quad (3.121)$$

$$\dot{r} = \frac{\Delta}{\Sigma} p_r, \quad (3.122)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\Sigma} p_\theta, \quad (3.123)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_z} = -\frac{1}{2\Delta\Sigma} \frac{\partial}{\partial L_z} (R + \Delta\Theta), \quad (3.124)$$

$$\dot{p}_t = 0, \quad (3.125)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{\Sigma} \right) p_r^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\Sigma} \right) p_\theta^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} \right), \quad (3.126)$$

¹ Las ecuaciones canónicas de movimiento de un Hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$ están dadas (32) por $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ y $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$.

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

$$\dot{p}_\theta = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta}{\Sigma} \right) p_r^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\Sigma} \right) p_\theta^2 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R + \Delta \Theta}{2\Delta \Sigma} \right), \quad (3.127)$$

$$\dot{p}_\varphi = 0. \quad (3.128)$$

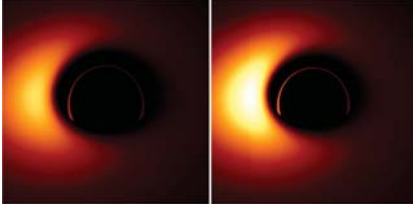


Figura 22: Disco de acreción a 45° de inclinación y parámetro de espín $a = 0.0m$ (RG a la izquierda, RG-pc a la derecha), ambas simulaciones muestran efectos de segundo orden.

ecuaciones 3.121-3.128 en el espacio-tiempo de Kerr pseudo-complejo. Los grados de inclinación señalados en cada simulación corresponden a la coordenada θ del observador respecto del cual se aplica el ray-tracing.

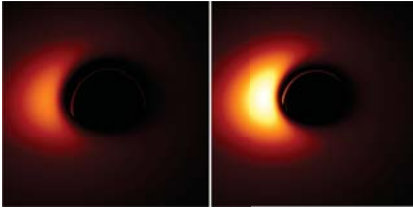


Figura 23: Disco de acreción a 45° de inclinación y parámetro de espín $a = 0.3m$ (RG a la izquierda, RG-pc a la derecha). En ambas simulaciones el disco de acreción se aproxima más al anillo de Einstein.

correspondiente de teoría estándar se maneja la escala pseudo-compleja para obtener una relación de intensidades comparativa entre ambas teorías.

Un aspecto cualitativo de relevancia en las simulaciones con ray-tracing para la teoría pseudo-compleja es que esta predice entornos más brillantes para los objetos compactos, lo cual es evidente en todas las simulaciones mostradas. Un primer argumento a citar se apoya en el comportamiento del potencial efectivo (ver **Figura 19**), evidentemente para la mayor parte de los valores que puede tener el parámetro a de espín las partículas en RG-pc pueden alcanzar radios inferiores a los correspondientes en RG, lo cual implica una mayor liberación de energía de amarre gravitacional, de esta manera existe en general mayor flujo de energía distribuyéndose a través del disco de acreción.

Del análisis de la estructura del espacio-tiempo de Kerr que se hizo en el capítulo 1 (ver 1.3.2.1), sabemos que la apariencia de éste puede cambiar al variar el ángulo polar θ . Considerando que no se tiene certeza acerca de la orientación con la cual futuros proyectos observacionales logren capturar los escenarios buscados, es importante entonces obtener simulaciones del entorno del objeto compacto visto desde distintos ángulos. En las **Figuras 22-31** se muestran las simulaciones generadas por Gyoto al considerar las

Efectos de desplazamiento en la frecuencia ya están incorporados en las simulaciones, se contempla el corrimiento al rojo gravitacional y el efecto Doppler causado por el movimiento de las fuentes de emisión en el disco. La intensidad en una imagen del caso pseudo-complejo corresponde a su escala de mínimo a máximo según la lectura del archivo¹ .FIT correspondiente si el parámetro de espín a está en el intervalo $[0.0, 0.4] m$, mientras que se usa escala logarítmica si el intervalo es $[0.5, 0.9] m$. En el caso de la imagen

¹ Los archivos .FIT son tratados con SAOImage DS9, el cual es un software para análisis de tablas de datos para generación de imágenes astronómicas.

Otro cambio interesante aparece en el transporte de energía en relación a la distribución de velocidades de rotación de las diferentes secciones del disco. Como consecuencia de la existencia de un máximo en la velocidad angular ω en un anillo de radio $r_{\omega_{max}}$, secciones con radios menores y mayores tendrán velocidades de rotación inferiores al anillo citado, por lo cual existirá transporte de energía desde el anillo en $r_{\omega_{max}}$ hacia estas secciones. El comportamiento de la distribución debe ser considerado en la función del flujo de energía normalizado f_{pc} para el caso de RG-pc, en la **Figura 17** se muestra esta distribución para el caso extremo en que $a \simeq 1m$. La integral en 2.3 debe dividirse en los casos $r \leq r_{\omega_{max}}$ y $r \geq r_{\omega_{max}}$, pues el cambio de signo en la pendiente de ω a partir de $r_{\omega_{max}}$ debe ser contrarrestado de tal forma que se garantice la positividad del flujo de energía a través del disco. Se define en este caso la función de flujo normalizado como

$$f_{pc} = \begin{cases} -\frac{\partial\omega}{\partial r}(E - \omega L_z)^{-2} \int_{r_{\omega_{max}}}^r (E - \omega L_z) \frac{\partial L_z}{\partial r} dr & \text{si } r \geq r_{\omega_{max}} \\ -\frac{\partial\omega}{\partial r}(E - \omega L_z)^{-2} \int_r^{r_{\omega_{max}}} (E - \omega L_z) \frac{\partial L_z}{\partial r} dr & \text{si } r \leq r_{\omega_{max}} \end{cases}, \quad (3.129)$$

donde ω está dada por 3.47, la energía E y el momento angular L_z por 3.83 y por 3.84 respectivamente.

La validez de este resultado se debe a que el modelo que se ha usado como base para el disco de acreción es el de Page y Thorne; sin embargo, es en (68) que se realiza la modificación dada en 3.129. El flujo de energía como función de la coordenada radial dado por 2.2 va a diferir en RG-pc únicamente por la función normalizada f , ya que \dot{M}_0 es constante¹ cuando varía dicha r y el determinante de la métrica en RG-pc es idéntico al del caso en RG (ver **Apéndice B.4**). No obstante, como se muestra en (69) la función f_{pc} alcanza un mínimo cuando el parámetro de espín permite la existencia de ω_{max} , y este se encuentra en $r_{\omega_{max}} \simeq 1.72m$, coincidiendo con la posición del anillo oscuro como era esperado.

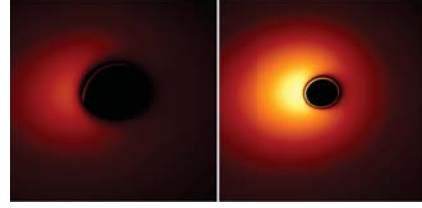


Figura 24: Disco de acreción a 45° de inclinación y parámetro de espín $a = 0.6m$ (RG a la izquierda, RG-pc a la derecha). En el caso de RG el disco de acreción se aproxima al anillo de Einstein sin cubrirlo, mientras que en RG-pc este ha sido cubierto y ha aparecido un anillo oscuro.

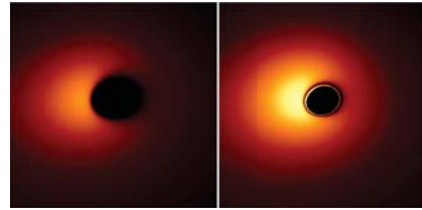


Figura 25: Disco de acreción a 45° de inclinación y parámetro de espín $a = 0.9m$ (RG a la izquierda, RG-pc a la derecha). En ambas simulaciones el disco de acreción ha cubierto al anillo de Einstein; sin embargo, únicamente para el caso de RG-pc aparece un anillo oscuro.

¹De hecho en (79) por simplicidad se asume que $\dot{M}_0 = 1$.

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

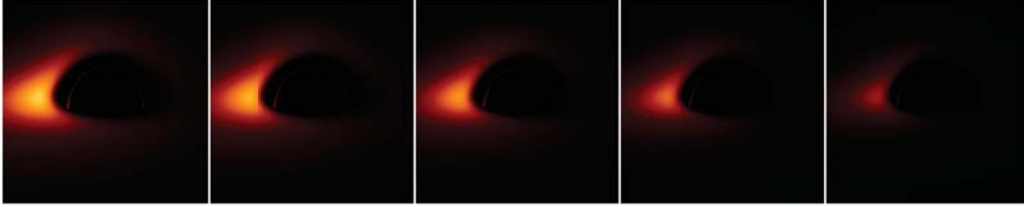


Figura 26: Discos de acreción en teoría estándar a 70° de inclinación y parámetro de espín variando en $0.1m$ de $a = 0.0m$ hasta $a = 0.4m$. El disco de acreción se aproxima paulatinamente al anillo de Einstein sin lograrlo cubrir; como es comentado en la **Figura 14**, a mayor rotación el disco puede acercarse más al objeto compacto.

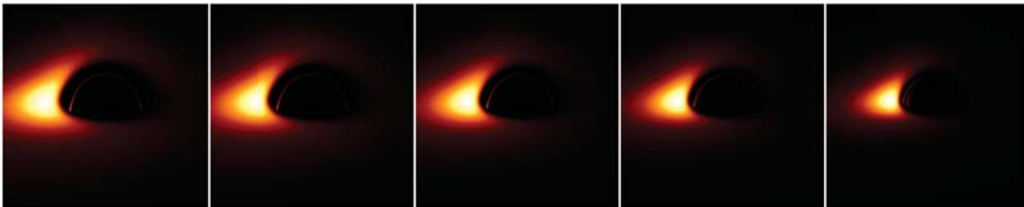


Figura 27: Discos de acreción en teoría pseudo-compleja a 70° de inclinación y parámetro de espín variando en $0.1m$ de $a = 0.0m$ hasta $a = 0.4m$. A diferencia del caso anterior, en RG-pc la simulación es más brillante debido a la mayor liberación de energía gravitacional. Es claro que el borde interior del disco en RG-pc logra alcanzar radios inferiores (conforme el parámetro a se incrementa) respecto al caso anterior para RG, ya que el anillo de Einstein y el disco se encuentran más cercanos.



Figura 28: Discos de acreción en teoría estándar a 85° de inclinación y parámetro de espín variando en $0.1m$ de $a = 0.5m$ hasta $a = 0.9m$. El borde interior del disco de acreción sí se ha recorrido más al agujero negro, pero no lo suficiente para cubrir el anillo de Einstein.



Figura 29: Discos de acreción en teoría pseudo-compleja a 85° de inclinación y parámetro de espín variando en $0.1m$ de $a = 0.5m$ hasta $a = 0.9m$. Debido a que las partículas pueden alcanzar un máximo en la velocidad angular para este rango de valores del parámetro a se observa en cada simulación la aparición del anillo oscuro, lo cual no sucede en el caso para RG. El disco de acreción en este caso ya no parece tener un borde interior acercándose más a la estrella, una vez que las partículas pueden alcanzar un máximo en ω la única restricción que tienen las partículas en el disco es impuesta por las dimensiones de la estrella, el disco básicamente ha alcanzado su superficie en este rango para a . El anillo de Einstein está totalmente cubierto.

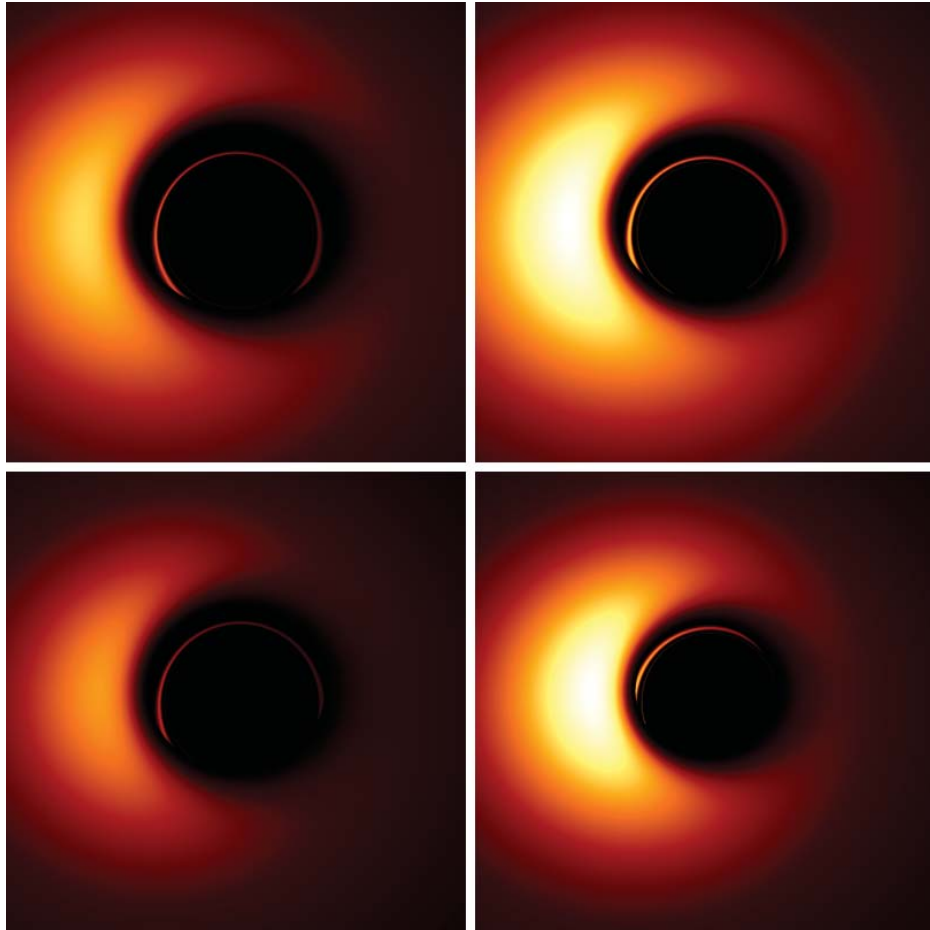


Figura 30: Comparación de discos de acreción a 30° de inclinación. El parámetro asociado a cada simulación es: discos superiores con $a = 0.1m$ (teoría estándar a la izquierda, teoría pseudo-compleja a la derecha) y discos inferiores con $a = 0.3m$ (teoría estándar a la izquierda, teoría pseudo-compleja a la derecha).

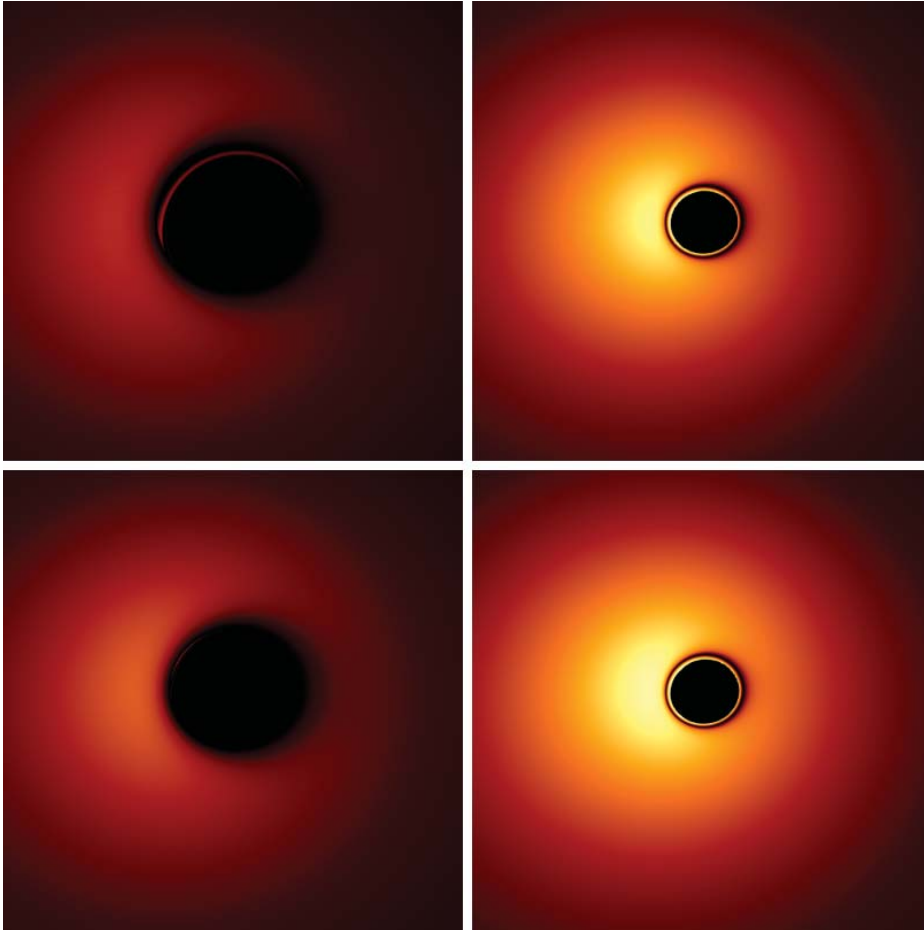


Figura 31: Comparación de discos de acreción a 30° de inclinación. El parámetro asociado a cada simulación es: discos superiores con $a = 0.5m$ (teoría estándar a la izquierda, teoría pseudo-compleja a la derecha) y discos inferiores con $a = 0.7m$ (teoría estándar a la izquierda, teoría pseudo-compleja a la derecha).

Conclusiones

Como resultado general, se observa que la teoría pseudo-compleja predice una apariencia diferente del disco de acreción en la región que abarca aproximadamente desde distancias cercanas (pero mayores) al radio de Schwarzschild hasta las proximidades de la superficie de una estrella oscura. Esto se atribuye a que las correcciones asociadas al parámetro B modifican el comportamiento de todas las observables estudiadas, de tal manera que a distancias cada vez menores el impacto sobre las observables se va acentuando. Para distancias lejanas las correcciones son despreciables y por tanto ambas teorías coinciden en sus predicciones, lo cual implica que el disco lucirá muy parecido al caso en que se considera que el objeto central es un agujero negro en la teoría estándar. Se concluye así que el acoplamiento de la energía oscura con la métrica en la teoría pseudo-compleja determina una importante diferencia cualitativa en la modelación del disco de acreción alrededor de objetos compactos.

A continuación se resumen los principales aspectos estudiados, el resultado obtenido en cada caso afecta de manera distinta a la apariencia del disco de acreción:

I Velocidad angular

El estudio de trayectorias geodésicas circulares permitió conocer el comportamiento de la velocidad angular de las partículas orbitando en el disco. Se encontró que las partículas pueden alcanzar un máximo recorrido angular por unidad de tiempo cuando alcanzan una distancia $r \simeq 1.72m$. Esto a su vez implicó dos resultados que se relacionan entre si: (1) en la teoría pseudo-compleja la energía fluye en ambas direcciones a partir del radio asociado al máximo en la velocidad angular, mientras que el comportamiento estrictamente decreciente (conforme r aumenta) para la velocidad angular en la teoría estándar implica que la distribución comienza a partir de las secciones más internas del disco, y (2) se predice la aparición de un anillo oscuro en la coordenada radial asociada al máximo en la velocidad angular (para $a > 0.4m$), lo cual se debe a la disminución del rozamiento entre secciones cercanas. El anillo aparece efectivamente en todas las simulaciones que cumplen la condición para el parámetro a .

II Corrimiento al rojo gravitacional

Analizando la componente g_{00} de la métrica pseudo-compleja se determinó

3. TEORÍA PSEUDO-COMPLEJA

el comportamiento del corrimiento al rojo gravitacional de la radiación cuya fuente de emisión se encuentra en el disco de acreción. Debido a que en la teoría pseudo-compleja se puede evitar la aparición de la superficie de límite estacionario, se encuentra que el corrimiento al rojo gravitacional puede ser muy grande pero permanece finito; sin embargo, como se ha considerado justo el valor mínimo para el parámetro B (para $B < \frac{64}{27}m^3$ ya no desaparecen el horizonte de eventos y la superficie de límite estacionario), el corrimiento al rojo puede aumentar abruptamente y dejar de ser finito. Esto contrasta con el comportamiento del mismo fenómeno en RG, ya que en la teoría estándar la superficie de límite estacionario no puede desaparecer. Se concluye que para un parámetro B superior al valor mínimo el objeto central lucirá como una estrella muy oscura, y aún considerando el valor mínimo para el parámetro B se consigue mayor visibilidad del entorno para radios menores al radio de Schwarzschild.

III Potencial efectivo

El estudio de la estabilidad de órbitas se realiza a partir de un análisis del potencial efectivo. Se obtiene que el disco de acreción puede alcanzar regiones más cercanas al objeto compacto para la mayor parte de los valores que puede tomar el parámetro a de espín. Para $a < 0.4m$ la ISCO tiene un comportamiento similar al de RG (aunque siempre alcanza distancias más cercanas al objeto central); sin embargo, para $a > 0.4m$ la ISCO en RG-pc ya no aparece, lo cual coincide con la aparición del anillo oscuro. Además, considerando que a mayor proximidad del disco de acreción mayor será la liberación de energía gravitacional, entonces complementando este hecho con la distribución de la energía debido al comportamiento de la velocidad angular se predice un disco de acreción más brillante respecto a la teoría estándar. Este hecho es reproducido evidentemente en cada simulación.

A. Matemática elemental pseudo-compleja

El material de esta sección tiene como finalidad ser un primer acercamiento a la matemática pseudo-compleja, motivo por el cual se presentan conceptos matemáticos básicos que son bien conocidos en análisis matemático real o complejo, si se desea profundizar en cualquiera de estos conceptos se puede consultar (4). A diferencia del material expuesto en la sección 3.1, trabajaremos con la base $\{1, j\}$ para el conjunto pseudo-complejo \mathbb{D} . En este caso contamos con las siguientes definiciones para las operaciones binarias elementales entre cualquier par de elementos $w = t + jx$, $\tilde{w} = \tilde{t} + j\tilde{x} \in \mathbb{D}$:

1. Suma: $w + \tilde{w} = (t + \tilde{t}) + j(x + \tilde{x}) = (t + \tilde{t}, x + \tilde{x})$.
2. Producto: $w\tilde{w} = (t\tilde{t} + x\tilde{x}) + j(t\tilde{x} + x\tilde{t}) = (t\tilde{t} + x\tilde{x}, t\tilde{x} + x\tilde{t})$.

Observación: En estas definiciones se ha introducido la notación de elementos en \mathbb{D} como parejas ordenadas, como suele hacerse en \mathbb{C} . De ahora en adelante se usará cualquiera de las dos notaciones.

Si a un número arbitrario pseudo-complejo X , lo expresamos respecto a las bases $\{1, j\}$ y $\{\sigma_+, \sigma_-\}$ como $X = (X_R)1 + (X_{PI})j$ y $X = X_+\sigma_+ + X_-\sigma_-$ respectivamente, entonces la relación que existe entre sus componentes en ambas bases está dada por

$$X_R = \frac{1}{2}(X_+ + X_-), \quad (.130)$$

$$X_{PI} = \frac{1}{2}(X_+ - X_-), \quad (.131)$$

$$X_+ = X_R + X_{PI}, \quad (.132)$$

$$X_- = X_R - X_{PI}. \quad (.133)$$

Dadas estas reglas de transformación, cualquier resultado que exponemos a continuación puede ser reinterpretado con la base que sea más conveniente convenga. Las operaciones 1 y 2 cumplen las propiedades de asociatividad, conmutatividad, y distributividad (del producto sobre la suma); sin embargo, esto no basta para

que \mathbb{D} forme un *cuervo*. De hecho, este conjunto equipado con las operaciones citadas, no admite un elemento inverso bajo el producto para todo elemento no nulo en \mathbb{D} , y por tanto \mathbb{D} no forma una estructura algebraica con división. Para justificar la última afirmación se necesitan antes dos definiciones.

Definición 4. Sea $w \in \mathbb{D}$, se define el elemento conjugado a $w = t + jx$ como $\bar{w} = t - jx$.

Definición 5. Se define el modulo al cuadrado¹ de $w = t + jx \in \mathbb{D}$ como $|w|^2 = w\bar{w} = t^2 - x^2$.

Ahora, definiendo $w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$, concluimos que si $w = \alpha + \alpha j$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario), entonces $|w|^2 = \alpha^2 - \alpha^2 = 0$, y por tanto, estos elementos no tienen inverso bajo producto. Es claro que el subconjunto de \mathbb{D} para el cual ningún elemento tiene inverso, se corresponde con un cono de luz en el “espacio-tiempo (1 + 1)” definido por el plano correspondiente a \mathbb{D} . Se denotará a este cono como el conjunto \mathbb{D}_c . El hecho expuesto anteriormente, nos sugiere investigar más acerca de la estructura causal en \mathbb{D} . De hecho, existe una relación de orden que nos permitirá definir una norma en este espacio, con la cual podemos dotar al mismo de una definición de límite e incluso se podría inducir una topología.

Definición 6. Sean $w, \tilde{w} \in \mathbb{D}$, definimos la relación binaria \leq entre estos elementos como $w \leq \tilde{w}$ si se cumple que $w_+ \leq \tilde{w}_+$ y $w_- \leq \tilde{w}_-$, donde $w_+ = t + x$ y $w_- = t - x$.

Observación: La relación \leq entre w_+ y w_- se debe entender como la de orden usual en \mathbb{R} ; además, si cambiamos \leq por $<$ se tiene la relación estricta esperada.

Una consecuencia inmediata de interés causal y una aplicación analítica se derivan del estudio de la relación \leq en \mathbb{D} . Se tiene que los conjuntos $\mathbb{D}^+ = \{w \in \mathbb{D} : w > 0\}$ y $\mathbb{D}^- = \{w \in \mathbb{D} : w < 0\}$ se identifican con los interiores de los conos futuro y pasado de \mathbb{D}_c , respectivamente. El conjunto \mathbb{D}^+ a su vez puede ser identificado con el dominio de la función logarítmica y el rango de la función exponencial en sus versiones pseudo-complejas. Cabe aclarar que estas funciones cumplen la siguiente propiedad con la que ya estamos familiarizados

$$e^{\log(w)} = w \quad \text{para } w = t + jx > 0, \quad (.134)$$

donde

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = e^t(\cosh(x) + j \sinh(x)), \quad (.135)$$

¹ Bajo esta definición $|w|^2 \in \mathbb{R}$; sin embargo, si $|x| > |t| \Rightarrow |w|^2 < 0$, lo cual difiere del modulo positivamente definido en \mathbb{C} .

$$\log(w) = \frac{1}{2} \ln(t^2 - x^2) + j \tanh^{-1} \left(\frac{x}{t} \right). \quad (.136)$$

Tenemos ahora herramienta suficiente para considerar una función norma en el plano pseudo-complejo, $\| \cdot \| : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}^+$. Para cada $w \in \mathbb{D}$, consideramos w_+ y w_- para definir la norma de w como

$$\|w\| = \sqrt{|w_+|^2 + |w_-|^2} = \sqrt{2(t^2 + x^2)}, \quad (.137)$$

donde $| \cdot |$ es la función valor absoluto usual \mathbb{R} -valuada.

La función $\| \cdot \|$ en .137 por supuesto cumple las tres propiedades esenciales para ser norma, y satisface además la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Es decir, para $w, w_1, w_2 \in \mathbb{D}$ se tienen las siguientes propiedades respecto a $\| \cdot \|$:

1. $\|w\| \geq 0$ ($\|w\| = 0 \Leftrightarrow w = 0$), no negatividad.
2. $\|w_1 + w_2\| \leq \|w_1\| + \|w_2\|$, desigualdad del triángulo.
3. $\|\lambda w\| = |\lambda| \|w\|$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), homogeneidad/escalabilidad absoluta.
4. $\|w_1 w_2\| \leq \|w_1\| \|w_2\|$, desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Consideremos ahora una región abierta $U \subseteq \mathbb{D}$ y una función $f : U \subseteq \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$. Debido a que el dominio y rango de f son subconjuntos de \mathbb{D} , podemos escribir a f como

$$f(w) = f(t, x) = u(t, x) + jv(t, x), \quad (.138)$$

donde u, v son funciones reales C^∞ .

Para la variable $w \in \mathbb{U}$, decimos que la derivada de f en $w_0 \in \mathbb{D}$ existe si el siguiente límite se verifica

$$\lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{f(w_0 + \Delta w) - f(w_0) - f'(w_0)\Delta w}{\|w\|} = 0. \quad (.139)$$

Cuando se satisface este límite para cada $w \in U$, entonces decimos que f es *holomorfa* en U .

Por otro lado, es posible demostrar que para una función \mathbb{D} -valuada se satisface la siguiente identidad

$$df = \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\bar{w}, \quad (.140)$$

donde se utilizan los operadores $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial x} \right)$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial x} \right)$.

Podemos entonces resumir la holomorficidad de una función f \mathbb{D} -valuada para una región abierta U con las siguientes equivalencias:

1. f es holomorfa (según la condición dada en .139).
2. Se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann pseudo-complejas $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$ (considerando .140 para f).
3. f cumple la ecuación de restricción $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0$ (implicando que $df = \frac{\partial f}{\partial w} dw$ y $f' = \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial t} + j \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} + j \frac{\partial u}{\partial x}$).

Aplicaciones relevantes de los resultados acerca de la holomorficidad de funciones pseudo-complejas se encuentran al considerar la integración a lo largo de una trayectoria γ (en el plano pseudo-complejo) que es al menos suave a pedazos. Esta integral está dada por

$$\int_{\gamma} f(w)dw = \int_{\gamma} (u + jv)(dt + jdx)dw = \int_{\gamma} udt + vdx + j \int_{\gamma} vdt + udx. \quad (.141)$$

Considerando la integral definida en .141 y bajo hipótesis específicas, en (4) se muestra que existe un análogo pseudo-complejo al teorema fundamental del cálculo y dos resultados análogos al teorema de Green y de Cauchy del análisis real y complejo, respectivamente.

B. Cálculos complementarios de Capítulo 4

B.1. Obtención de Hamiltoniano

Introduciendo el Lagrangiano 3.14 en la definición de momento generalizado y derivando, tenemos

$$p_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{\mu}} \left(\frac{1}{2} g_{\mu'\nu'} \dot{x}^{\mu'} \dot{x}^{\nu'} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu'\nu'} \left[\left(\frac{\partial \dot{x}^{\mu'}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \dot{x}^{\nu'} + \dot{x}^{\mu'} \left(\frac{\partial \dot{x}^{\nu'}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \right].$$

Distribuyendo ahora los términos y considerando que la suma con la delta de Kronecker equivale al producto con una matriz identidad

$$\begin{aligned} p_{\mu} &= \frac{1}{2} \left(g_{\mu'\nu'} \delta_{\mu}^{\mu'} \right) \dot{x}^{\nu'} + \frac{1}{2} \left(g_{\mu'\nu'} \delta_{\mu}^{\nu'} \right) \dot{x}^{\mu'} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu'\mu} \dot{x}^{\mu'} \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} + \frac{1}{2} g_{\nu\mu} \dot{x}^{\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} \end{aligned}$$

$$\therefore p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \quad (.142)$$

A partir de .142, podemos obtener una expresión para \dot{x}^λ , basta con que utilicemos el hecho de que la contracción con componentes covariantes y contravariantes de la métrica permite bajar y subir índices, respectivamente

$$\begin{aligned} p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu &\Rightarrow g^{\lambda\mu}p_\mu = g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = g^{\lambda\mu}\dot{x}_\mu = \dot{x}^\lambda \\ \therefore \dot{x}^\lambda &= g^{\lambda\mu}p_\mu. \end{aligned} \quad (.143)$$

Utilizando ahora el Lagrangiano dado en 3.14 y la relación .143 en el Hamiltoniano dado en 3.15, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \dot{x}^\mu p_\mu - \mathcal{L} &= \left(g^{\mu\lambda}p_\lambda\right)p_\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= \left(g^{\mu\lambda}p_\lambda\right)p_\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(g^{\mu\lambda}p_\lambda\right)\left(g^{\nu\xi}p_\xi\right) \\ &= g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda - \frac{1}{2}p_\lambda\left(\delta_\nu^\lambda g^{\nu\xi}p_\xi\right) = g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda - \frac{1}{2}p_\lambda\left(g^{\lambda\xi}p_\xi\right) \\ &= g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda - \frac{1}{2}g^{\lambda\xi}p_\lambda p_\xi = g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda - \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda \\ \therefore \mathcal{H} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}p_\mu p_\lambda. \end{aligned} \quad (.144)$$

B.2. Expresiones para E^2 y L_z^2

Notemos primero que el cociente entre 3.67 y 3.66 es ω de acuerdo a 3.41

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{-g_{03}E - g_{00}L_z}{g_{03}L_z + g_{33}E} \\ \Leftrightarrow g_{03}\omega L_z + g_{33}\omega E &= -g_{03}E - g_{00}L_z \\ \Leftrightarrow E &= -\left(\frac{g_{00} + g_{03}\omega}{g_{03} + g_{33}\omega}\right)L_z \end{aligned} \quad (.145)$$

$$\Leftrightarrow L_z = -\left(\frac{g_{03} + g_{33}\omega}{g_{00} + g_{03}\omega}\right)E. \quad (.146)$$

Considerando que estamos en órbitas circulares, entonces $\dot{r} = 0$, aplicando esto en 3.72 tenemos que

$$0 = \frac{1}{g_{11}D}(g_{33}E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g_{33}E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z = D \\ \text{por 3.12} &\Rightarrow g_{33}E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z = g_{03}^2 - g_{33}g_{00}. \end{aligned} \quad (.147)$$

Sustituyendo .146 en .147

$$\begin{aligned} g_{03}^2 - g_{33}g_{00} &= g_{33}E^2 + g_{00} \left(\frac{g_{03} + g_{33}\omega}{g_{00} + g_{03}\omega} \right)^2 E^2 - 2g_{03} \left(\frac{g_{03} + g_{33}\omega}{g_{00} + g_{03}\omega} \right) E^2 \\ &= E^2 \left[\frac{\chi}{(g_{00} + g_{03}\omega)^2} \right], \end{aligned} \quad (.148)$$

donde

$$\chi = g_{33}(g_{00} + g_{03}\omega)^2 + g_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2 - 2g_{03}(g_{03} + g_{33}\omega)(g_{00} + g_{03}\omega). \quad (.149)$$

Desarrollando χ de .149 tenemos

$$\begin{aligned} \chi(g_{\mu\nu}) &= g_{00}^2g_{33} + 2g_{00}g_{03}g_{33}\omega + g_{03}^2g_{33}\omega^2 + g_{00}g_{03}^2 + 2g_{00}g_{03}g_{33}\omega \\ &\quad + g_{00}g_{33}^2\omega^2 - 2g_{00}g_{03}^2 - 2g_{03}^3\omega - 2g_{00}g_{03}g_{33}\omega - 2g_{03}^2g_{33}\omega^2 \\ &= g_{03}^2(-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2) - g_{00}g_{33}(-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2) \\ &= (-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2)(g_{03}^2 - g_{00}g_{33}). \end{aligned} \quad (.150)$$

Sustituyendo ahora .150 en .148

$$\begin{aligned} g_{03}^2 - g_{33}g_{00} &= E^2 \left[\frac{(-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2)(g_{03}^2 - g_{00}g_{33})}{(g_{00} + g_{03}\omega)^2} \right] \\ \therefore E^2 &= \frac{(g_{00} + g_{03}\omega)^2}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2}. \end{aligned} \quad (.151)$$

El caso para obtener L_z^2 es análogo al anterior, después de sustituir .145 en .147 y simplificar

$$\begin{aligned} g_{03}^2 - g_{33}g_{00} &= L_z^2 \left[\frac{\chi}{(g_{03} + g_{33}\omega)^2} \right] \\ &= L_z^2 \left[\frac{(-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2)(g_{03}^2 - g_{00}g_{33})}{(g_{03} + g_{33}\omega)^2} \right] \\ \therefore L_z^2 &= \frac{(g_{03} + g_{33}\omega)^2}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2}. \end{aligned} \quad (.152)$$

B.3. Extremo para potencial efectivo pseudo-complejo

A continuación obtendremos una expresión explícita para el límite de la condición de estabilidad en órbitas circulares. Se parte de la existencia de un radio de órbita circular estable r_{sco} para el cual eso sucede, por tanto se deben satisfacer las condiciones siguientes:

$$\left. \frac{\partial V_{ef}}{\partial r} \right|_{r_{sco}} = 0, \quad (.153)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2} \right|_{r_{sco}} = 0. \quad (.154)$$

Lo primero que podemos asegurar acerca del potencial V_{ef} en r_{sco} es que tendrá un valor constante ξ bien definido, el cual se determina evaluando 3.74 en r_{sco} :

$$\begin{aligned} \xi &= V_{ef} \Big|_{r_{sco}} \\ &= -\frac{1}{2g_{11}D} [(g_{33} - g_{11}D)E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D] \Big|_{r_{sco}}. \end{aligned} \quad (.155)$$

El hecho de que en r_{sco} estamos en una órbita/geodésica circular, nos permite asegurar que podemos usar las expresiones para E , E^2 y L_z^2 de .145, .151 y .152 respectivamente en 3.74, obteniendo así

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2g_{11}D\vartheta} [(g_{33} - g_{11}D)(g_{00} + g_{03}\omega)^2 + g_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2 \\ &\quad - 2g_{03}(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega) - D\vartheta], \end{aligned} \quad (.156)$$

donde

$$\vartheta = -g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2. \quad (.157)$$

Consideremos ahora que podemos escribir al potencial para alguna función Υ de la siguiente forma

$$V_{ef} = -\frac{\Upsilon}{2g_{11}D} + \xi, \quad (.158)$$

donde Υ se determina a partir de un simple despeje al igualar 3.74 con .158, se tiene entonces que

$$\Upsilon = [(g_{33} - g_{11}D)E^2 + g_{00}L_z^2 + 2g_{03}EL_z - D] + 2g_{11}D\xi. \quad (.159)$$

La expresión .158 satisface .155 en r_{sco} sólo si se cumple que

$$\Upsilon|_{r_{sco}} = 0. \quad (.160)$$

Ahora derivamos .158 (considerando que ξ es una constante), obteniendo

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{g_{11}D} \Upsilon' + \frac{(g_{11}D)'}{(g_{11}D)^2} \Upsilon \right]. \quad (.161)$$

Cuando evaluamos .161 en r_{sco} considerando la condición .153, obtenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g_{11}D} \Big|_{r_{sco}} \Upsilon' \Big|_{r_{sco}} + \frac{(g_{11}D)'}{(g_{11}D)^2} \Big|_{r_{sco}} \underbrace{\chi \Big|_{r_{sco}}^0}_{\text{por .160}} &= 0 \\ \Rightarrow \Upsilon' \Big|_{r_{sco}} &= 0, \end{aligned} \quad (.162)$$

donde Υ' se obtiene al derivar .159

$$\Upsilon' = \left\{ [g'_{33} - (g_{11}D)'] E^2 + g'_{00} L_z^2 + 2g'_{03} E L_z - D' \right\} + 2(g_{11}D)' \xi. \quad (.163)$$

Derivamos ahora .161, obteniendo

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2} &= \frac{(g_{11}D)'}{(g_{11}D)^2} \Upsilon' - \frac{1}{g_{11}D} \Upsilon'' + \frac{(g_{11}D)'}{(g_{11}D)^2} \Upsilon' \\ &+ \left\{ \frac{(g_{11}D)'' (g_{11}D)^2 - [(g_{11}D)^2]'}{(g_{11}D)^4} (g_{11}D)' \right\} \Upsilon. \end{aligned} \quad (.164)$$

Evaluando .164 en r_{sco} y considerando la condición .154, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(g_{11}D)'}{(g_{11}D)^2} \Big|_{r_{sco}} \underbrace{\chi \Big|_{r_{sco}}^0}_{\text{por .162}} - \frac{1}{g_{11}D} \Big|_{r_{sco}} \Upsilon'' \Big|_{r_{sco}} + \frac{(g_{11}D)'}{(g_{11}D)^2} \Big|_{r_{sco}} \underbrace{\chi \Big|_{r_{sco}}^0}_{\text{por .162}} \\ + \left\{ \frac{(g_{11}D)'' (g_{11}D)^2 - [(g_{11}D)^2]'}{(g_{11}D)^4} (g_{11}D)' \right\} \Big|_{r_{sco}} \underbrace{\chi \Big|_{r_{sco}}^0}_{\text{por .160}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2} \Big|_{r_{sco}} &= -\frac{1}{2g_{11}D} \Big|_{r_{sco}} \Upsilon'' \Big|_{r_{sco}} = 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2} \Big|_{r_{sco}} &= \Upsilon'' \Big|_{r_{sco}} = 0,
 \end{aligned} \tag{.165}$$

donde Υ'' se puede obtener a partir de la derivación de .163

$$\begin{aligned}
 \Upsilon'' &= \left\{ [g_{33}'' - (g_{11}D)'] E^2 + g_{00}'' L_z^2 + 2g_{03}'' E L_z - D'' \right\} + 2(g_{11}D)'' \xi \\
 &= g_{33}'' E^2 + g_{00}'' L_z^2 + 2g_{03}'' E L_z - D'' + (g_{11}D)'' (2\xi - E^2).
 \end{aligned} \tag{.166}$$

La condición de estabilidad se expresa de manera simplificada en .165, pues el problema se ha reducido a la anulación de Υ'' en r_{sco} ; sin embargo, vamos ahora a demostrar que el término $2\xi - E^2$ de .166 se anula siempre que se consideran órbitas en geodésicas circulares, el cual es nuestro caso. Bajo estas condiciones, usaremos a continuación la forma de ξ dada en .156 y la forma de E^2 dada en .151. Procedemos a desarrollar cada término por independiente, posteriormente veremos que se satisface la relación $2\xi = E^2$ (lo cual es equivalente a la propuesta original).

Por un lado se tiene

$$\begin{aligned}
 2\xi &= -\frac{1}{g_{11}D\vartheta} \left[\underbrace{(g_{33} - g_{11}D)}_{\alpha} (g_{00} + g_{03}\omega)^2 + g_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2g_{03}(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega) - D\vartheta \right].
 \end{aligned} \tag{.167}$$

Distribuyendo α en .167, podemos reescribir 2ξ como

$$\begin{aligned}
 2\xi &= \underbrace{\frac{(g_{00} + g_{03}\omega)^2}{\vartheta}}_{\beta} - \frac{1}{g_{11}D\vartheta} [g_{33}(g_{00} + g_{03}\omega)^2 + g_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2 \\
 &\quad - 2g_{03}(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega) - D\vartheta].
 \end{aligned} \tag{.168}$$

Por otro lado, tenemos de acuerdo a .151 y .157 que

$$E^2 = \frac{(g_{00} + g_{03}\omega)^2}{\vartheta}, \tag{.169}$$

y notamos que el término β en .168 coincide con E^2 en .169, por lo cual podemos

reescribir 2ξ como

$$2\xi = -\frac{1}{g_{11}D\vartheta} \left[\underbrace{g_{33}(g_{00} + g_{03}\omega)^2}_{\textcircled{1}} + \underbrace{g_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2}_{\textcircled{2}} \right. \\ \left. - \underbrace{2g_{03}(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega)}_{\textcircled{3}} - \underbrace{D\vartheta}_{\textcircled{4}} \right] + E^2. \quad (.170)$$

A partir de .170 es claro que $2\xi = E^2$ sólo si $[\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3} - \textcircled{4}] = 0$, veamos que esto es cierto¹. Comenzamos con sustituir en $\textcircled{4}$ a D y ϑ de 3.12 y .157, respectivamente. Así, tenemos que

$$\textcircled{2} - \textcircled{4} = g_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2 + (g_{03}^2 - g_{00}g_{33})(g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2) \\ = g_{00}(g_{03}^2 + 2g_{03}g_{33}\omega + g_{33}^2\omega^2) + g_{03}^2(g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2) \\ - g_{00}g_{33}(g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2) \\ \Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{4} = g_{03}^2(g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2) + g_{00}g_{03}^2 - g_{00}^2g_{33}. \quad (.171)$$

Desarrollando el cuadrado de $\textcircled{1}$ en .170 y sumando .171, se tiene que

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{4} = g_{33}(g_{00}^2 + 2g_{00}g_{03}\omega + g_{03}^2\omega^2) + g_{03}^2(g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2) \\ + g_{00}g_{03}^2 - g_{00}^2g_{33} \\ = g_{33}(2g_{00}g_{03}\omega + g_{03}^2\omega^2) + g_{03}^2(g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2) + g_{00}g_{03}^2 \\ = 2[g_{00}g_{03}g_{33}\omega + g_{33}g_{03}^2\omega^2 + g_{00}g_{03}^2 + g_{03}^3\omega]. \quad (.172)$$

Además, si desarrollamos $\textcircled{3}$ de .170 tenemos

$$\textcircled{3} = 2g_{03}[g_{00}g_{03} + g_{00}g_{33}\omega + g_{03}^2\omega + g_{03}g_{33}\omega^2] \\ = 2[g_{00}g_{03}^2 + g_{00}g_{03}g_{33}\omega + g_{03}^3\omega + g_{03}^2g_{33}\omega^2]. \quad (.173)$$

Notamos ahora que las expresiones en .172 y .173 son iguales, por lo que concluimos que

$$[\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3} - \textcircled{4}] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\xi = E^2. \quad (.174)$$

Sustituyendo .174 en .166 encontramos la siguiente simplificación

$$\Upsilon'' = g_{33}''E^2 + g_{00}''L_z^2 + 2g_{03}''EL_z - D''. \quad (.175)$$

Evaluando la expresión anterior en r_{sco} es equivalente a restringir los valores de

¹ Se distinguirán términos comunes por color a ser eliminados en cada ecuación.

E y L_z sobre una geodésica circular con dicho radio, entonces auxiliándonos por última vez de .145, .151 y .152 obtenemos

$$\begin{aligned} \Upsilon''|_{r_{sco}} = & g''_{33} \frac{(g_{00} + g_{03}\omega)^2}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2} + g''_{00} \frac{(g_{03} + g_{33}\omega)^2}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2} \\ & - 2 \frac{g''_{03}(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega)}{-g_{00} - 2g_{03}\omega - g_{33}\omega^2} - D''. \end{aligned} \quad (.176)$$

Finalmente, por la condición de estabilidad en .165 y el resultado encontrado en .176, concluimos que las órbitas circulares alcanzan el límite de su estabilidad si se satisface que

$$\begin{aligned} 0 = & g''_{33}(g_{00} + g_{03}\omega)^2 + g''_{00}(g_{03} + g_{33}\omega)^2 - 2g''_{03}(g_{00} + g_{03}\omega)(g_{03} + g_{33}\omega) \\ & + (g_{00} + 2g_{03}\omega + g_{33}\omega^2)D''. \end{aligned} \quad (.177)$$

B.4. Determinante de la métrica pseudo-compleja

La métrica de Kerr en RG-pc difiere del caso estándar básicamente en la aparición del parámetro B . Si se demuestra que su determinante ya no depende de este parámetro entonces coincide con el determinante de la métrica de Kerr en RG, el cual es reportado en (81) como $g = -\Sigma^2 \sin^2 \theta$. El cálculo es simple debido a que la métrica es un tensor simétrico, por la forma no diagonal que esta tiene según la expresión 3.8 tenemos

$$\begin{aligned} g_{pc} = & \begin{vmatrix} g_{00} & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = g_{00} \begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} - g_{30} \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{03} \\ g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \end{vmatrix} \\ = & g_{00}g_{11}g_{22}g_{33} + g_{30}g_{11} \begin{vmatrix} 0 & g_{03} \\ g_{22} & 0 \end{vmatrix} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33} - (g_{30})^2g_{11}g_{22} \\ = & g_{11}g_{22} [g_{00}g_{33} - (g_{30})^2] = - \underbrace{g_{11}g_{22}D}_{\text{por 3.12}}. \end{aligned} \quad (.178)$$

El cálculo entonces se centra en simplificar la expresión para D , la diferencia con el caso hecho en 3.75 es que ahora no hay restricción para θ . Sustituyendo en .178

las componentes dadas en 3.8 se obtiene que

$$\begin{aligned}
 g_{pc} &= \frac{\Sigma^2}{\Delta} \left[- \left(1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) \left(r^2 + a^2 + a^2 \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta - \left(-a \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta \right)^2 \right] \\
 &= \frac{\Sigma^2}{\Delta} \sin^2 \theta \left[- \left(1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) (r^2 + a^2) - \left(1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) \left(a^2 \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) - a^2 \frac{\psi^2}{\Sigma^2} \sin^2 \theta \right] \\
 &= \frac{\Sigma^2}{\Delta} \sin^2 \theta \left[- \left(1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) (r^2 + a^2) - a^2 \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta + \cancel{a^2 \frac{\psi^2}{\Sigma^2} \sin^2 \theta} - \cancel{a^2 \frac{\psi^2}{\Sigma^2} \sin^2 \theta} \right] \\
 &= \frac{\Sigma^2}{\Delta} \sin^2 \theta \left[- (r^2 + a^2) + r^2 \frac{\psi}{\Sigma} + \cancel{a^2 \frac{\psi}{\Sigma}} - \cancel{a^2 \frac{\psi}{\Sigma}} (1 - \cos^2 \theta) \right] \\
 &= \frac{\Sigma^2}{\Delta} \sin^2 \theta \left[- (r^2 + a^2) + \underbrace{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}_{= \Sigma \text{ por 3.9}} \frac{\psi}{\Sigma} \right] = \frac{\Sigma^2}{\Delta} \sin^2 \theta \left[\underbrace{-(r^2 + a^2) + \psi}_{= -\Delta \text{ por 3.10}} \right] \\
 \therefore g_{pc} &= -\Sigma^2 \sin^2 \theta. \tag{.179}
 \end{aligned}$$

Debido a que en la métrica pseudo-compleja sólo los parámetros Δ y ψ dependen de B de acuerdo a 3.10 y 3.11, concluimos con el resultado en .179 que las métricas en RG y RG-pc coinciden.

Bibliografía

- [1] B. P. ABBOTT ET AL. **Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.** *Phys. Rev. Lett.*, **116**(6):061102, Febrero 2016. [2](#)
- [2] T. ADAMO AND E. NEWMAN. **The Kerr-Newman metric: A Review.** *Scholarpedia*, **9**:31791, 2014. [25](#), [26](#)
- [3] R. ADLER, M. BAZIN, AND M. SCHIFFER. *Introduction to general relativity*, **1** of *International series in pure and applied physics*. McGraw-Hill, 1965. [25](#), [28](#), [29](#), [30](#)
- [4] F. ANTONUCCIO. *Semicomplex analysis and mathematical physics*. PhD thesis, Oxford University, 1993. [97](#), [100](#)
- [5] A. ASHTEKAR. *100 Years of Relativity, Space-Time Structure: Einstein and Beyond*. World Scientific, 2005. [23](#), [24](#)
- [6] C. BAMBI. **Testing the Kerr black hole hypothesis.** *Mod. Phys. Lett. A*, **26**:2453–2468, 2011. [39](#)
- [7] C. BAMBI AND D. MALAFARINA. **K_α iron line profile from accretion disks around regular and singular exotic compact objects.** *Phys. Rev. D*, **88**, 2013. [82](#)
- [8] J. M. BARDEEN, W. H. PRESS, AND S. A. TEUKOLSKY. **Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation.** *ApJ*, **178**:347–370, 1972. [50](#), [51](#)
- [9] J. D. BEKENSTEIN. **Novel “no-scalar-hair” theorem for black holes.** *Phys. Rev. D*, **51**(12), 1995. [26](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [10] T. BELLONI, M. MÉNDEZ, AND J. HOMAN. The distribution of kHz QPO frequencies in bright low mass X-ray binaries. *Astronomy and Astrophysics*, 437, 2005. [82](#)
- [11] T. M. BELLONI, A. SANNA, AND M. MÉNDEZ. High-frequency quasi-periodic oscillations in black hole binaries. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 426(3):1701–1709, 2012. [38](#), [62](#)
- [12] G. BIRKHOFF AND R. LANGER. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, 1923. [24](#)
- [13] I. BOMBACI. The maximum mass of a neutron star. *Astronomy and Astrophysics*, 305, 1996. [34](#)
- [14] M. BORN. A Suggestion for Unifying Quantum Theory and Relativity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 165(921):291–303, 1938. [57](#)
- [15] S. M. CARROLL. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004. [6](#), [14](#), [17](#), [20](#)
- [16] B. CARTER. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, 174(5):1559–1571, Octubre 1968. [28](#), [30](#), [32](#), [64](#), [84](#)
- [17] B. CARTER. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.*, 26(6), 1971. [27](#)
- [18] G. CASPAR ET AL. Pseudo-Complex General Relativity: Schwarzschild, Reissner Nordström and Kerr solutions. *Int. J. Mod. Phys. E*, 21(2), 2012. [60](#), [61](#), [72](#)
- [19] S. CHANDRASEKHAR. *The Mathematical Theory of Black Holes*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 1983. [23](#), [45](#), [46](#)

- [20] C. CHERUBINI ET AL. Second order scalar invariants of the Riemann tensor: Applications to black hole space-times. *Int. J. Mod. Phys. D*, 11:827–841, 2002. [31](#)
- [21] A. DAS AND A. DEBENEDICTIS. *The General Theory of Relativity A Mathematical Exposition*. Springer-Verlag New York, 2012. [15](#), [32](#)
- [22] R. D’INVERNO. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992. [31](#)
- [23] S. DOELEMAN ET AL. Imaging an Event Horizon: submm-VLBI of a Super Massive Black Hole. *eprint 0906.3899*, 2009. [82](#)
- [24] J. DROSTE. The field of a single centre in Einstein’s theory of gravitation, and the motion of a particle in that field. *Gen. Rel. Gravit.*, 34, 2002. Traducción del artículo original de 1916. [44](#)
- [25] A. EINSTEIN. A generalized theory of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 20, 1948. [57](#)
- [26] A. EINSTEIN. *Relativity: The Special and the General Theory*. The masterpiece science edition. Pi Press, 2005. [3](#), [4](#)
- [27] F. EISENHAEUER ET AL. GRAVITY: Observing the Universe in Motion. *Messenger*, 143, 2011. [82](#)
- [28] H. FALCKE ET AL. mm-wave VLBI with ALMA and Radio Telescopes around the World. *Messenger*, 149, 2012. [82](#)
- [29] C. FANTON ET AL. Detecting Accretion Disks in Active Galactic Nuclei. *PASJ*, 49, 1997. [82](#)
- [30] V. P. FROLOV AND A. ZELNIKOV. *Introduction to Black Hole Physics*. Oxford University Press, 2011. [22](#), [23](#)

- [31] S. GILLESSEN, R. GENZEL, T. K. FRITZ, ET AL. A gas cloud on its way towards the supermassive black hole at the Galactic Centre. *Nature*, 481, 2012. [82](#)
- [32] H. GOLDSTEIN, C. P. POOLE, AND J. L. SAFKO. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2001. [88](#), [89](#)
- [33] C. GRONWALL. *Elementary Astronomy*. Pennsylvania State University, 2014. Lecture notes for the course Astronomy 10: Elementary Astronomy, Fall 2006, Fall 2014. [35](#)
- [34] S. W. HAWKING. Black holes in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, 25(2):152–166, 1972. [26](#)
- [35] S. W. HAWKING AND G. F. R. ELLIS. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975. [24](#), [33](#)
- [36] C. HEINICKE AND FRIEDRICH W. HEHL. Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein’s Field Equation – an introduction. *Int. J. Mod. Phys. D*, 24(02):1530006, 2014. [4](#), [5](#), [24](#), [30](#)
- [37] R. C. HENRY. Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole. *ApJ*, 535(1), 2000. [31](#)
- [38] P. O. HESS, M. ALGALÁN B., T. SHÖNENBACH, AND W. GREINER. Simulations of accretion disks in pseudo-complex General Relativity. *Astronomische Nachrichten*, 336(8-9):722–726, Noviembre 2015. [62](#)
- [39] P. O. HESS, W. GREINER, AND M. ALGALÁN B. *One Hundred Years of General Relativity: A Celebration*, chapter Simulations of accretion disks around massive stars, using the pseudo-complex General Relativity. World Scientific, 2015. [60](#)

-
- [40] P. O. HESS, M. SCHÄFER, AND W. GREINER. *Pseudo-Complex General Relativity*. FIAS Interdisciplinary Science Series. Springer, 2016. [54](#), [60](#), [61](#), [62](#)
- [41] M. P. HOBSON, G. P. EFSTATHIOU, AND A. N. LASENBY. *General Relativity An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006. [45](#), [49](#)
- [42] W. ISRAEL. Event horizons in static electrovac space-times. *Commun. Math. Phys.*, 8(3):245–260, 1968. [26](#)
- [43] K. IWASAWA, G. MINIUTTI, AND A. C. FABIAN. Flux and energy modulation of redshifted iron emission in NGC 3516: implications for the black hole mass. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 355(4):1073–1079, 2004. [38](#)
- [44] P. I. JEFREMOV, O. Y. TSUPKO, AND G. S. BISNOVATYI-KOGAN. Innermost stable circular orbits of spinning test particles in Schwarzschild and Kerr space-times. *Phys. Rev. D*, 91(12):124030, 2015. [49](#)
- [45] J. JOSÉ AND E. SALETÁN. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998. [43](#)
- [46] P. F. KELLY AND R. B. MANN. Ghost properties of algebraically extended theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 3, 1986. [57](#)
- [47] A. K. KULKARNI ET AL. Measuring black hole spin by the continuum-fitting method: effect of deviations from the Novikov–Thorne disc model. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 414(2):1183–1194, 2011. [39](#)
- [48] L. D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ. *Mechanics*, 1 of *Course of Theoretical Physics*. Elsevier Science, 3 edition, 1982. [42](#), [43](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [49] J. M. LEE. *Manifolds and Differential Geometry*. American Mathematical Society, 2009. [15](#), [16](#), [17](#), [20](#)
- [50] G. LEMAÎTRE. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 47:49–59, 1927. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. [52](#)
- [51] J. LEVIN AND G. PEREZ-GIZ. A periodic table for black hole orbits. *Phys. Rev. D*, 77:103005, May 2008. [83](#), [88](#)
- [52] A. P. MARSCHER ET AL. The inner jet of an active galactic nucleus as revealed by a radio-to- γ ray outburst. *Nature*, 452:966–969, 2008. [39](#)
- [53] C. W. MISNER, K. S. THORNE, AND J. A. WHEELER. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973. [47](#), [49](#)
- [54] J. W. MOFFAT. A new theory of gravitation. *Phys. Rev. D*, 19, 1979. [58](#)
- [55] A. MÜLLER. Active black holes: Ultra-hot cosmic beacons. *Einstein Online*, 2(1009), 2006. Provided by The Max Planck Institute for Gravitational Physics. [53](#)
- [56] A. MÜLLER. Luminous disks: How black holes light up their surroundings. *Einstein Online*, 2(1010), 2006. Provided by The Max Planck Institute for Gravitational Physics. [38](#)
- [57] A. MÜLLER AND M. CAMENZIND. Relativistic emission lines from accreting black holes. *Astronomy and Astrophysics*, 413, 2004. [82](#)
- [58] B. O’NEILL. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1983. [16](#)

-
- [59] D. N. PAGE AND K. S. THORNE. Disk Accretion onto a Black Hole. I. Time-Averaged Structure of Accretion Disk. *ApJ*, 191, 1974. [39](#), [40](#)
- [60] E. PERLMAN ET AL. Optical and radio polarimetry of the M87 jet at 0.2' resolution. *AJ*, 117, 1999. [38](#)
- [61] R. V. POUND AND G. A. REBKA. Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 3(9):439–441, Noviembre 1959. [53](#)
- [62] R. H. PRICE. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. I. Scalar and gravitational perturbations. *Phys. Rev. D*, 5(10):20, 1972. [35](#)
- [63] D. J. RAINE AND E. G. THOMAS. *Black Holes: An Introduction*. Imperial College Press, 2005. [33](#), [34](#), [35](#), [53](#)
- [64] W. RINDLER. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2006. [8](#), [9](#), [11](#)
- [65] D. ROBINSON. *The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity*, chapter Four decades of black holes uniqueness theorems, pages 115–143. Cambridge University Press, 2009. [26](#)
- [66] C. ROVELLI. *General relativity, the most beautiful of theories : applications and trends after 100 years*, 28 of *De Gruyter studies in mathematical physics*. Walter de Gruyter GmbH, 2014. [45](#)
- [67] THOMAS SCHÖNENBACH, GUNTHER CASPAR, PETER O. HESS, THOMAS BOLLER, ANDREAS MÜLLER, ET AL. Experimental tests of pseudo-complex General Relativity. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 430(4):2999–3009, Abril 2013. [72](#), [73](#)
- [68] T. SCHÖNENBACH. *Tests erweiterter Kerr- und Schwarzschild-Metriken im Rahmen der Beschreibung von Teilchenorbits*, Ak-

- kretionsscheiben und Gravitationswellen*. PhD thesis, Johann Wolfgang Goethe-Universität, 2014. [2](#), [40](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [91](#)
- [69] T. SCHÖNENBACH ET AL. Ray-tracing in pseudo-complex General Relativity. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 442, 2014. [62](#), [63](#), [91](#)
- [70] F. P. SCHULLER. *Dirac-Born-Infeld Kinematics, Maximal Acceleration and Almost Product Manifolds*. PhD thesis, University of Cambridge, 2003. [60](#)
- [71] B. SCHUTZ. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2 edition, 2009. [6](#), [8](#), [11](#), [12](#), [13](#)
- [72] S. L. SHAPIRO AND S. A. TEUKOLSKY. *White Dwarfs, in Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 1983. [6](#)
- [73] M. SPIVAK. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*. Publish or Perish, Inc., 3 edition, 1999. [15](#)
- [74] H. STEPHANI. *Relativity; An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 3 edition, 2004. [7](#), [12](#)
- [75] R. P. J. TILANUS ET AL. Future mmVLBI Research with ALMA: A European vision. *ArXiv e-prints*, 2014. Provided by the SAO/-NASA Astrophysics Data System. [83](#)
- [76] P. K. TOWNSEND. *Black Holes*. Cambridge U., 1997. Lecture notes for a “Part III” course “Black Holes” given in DAMTP, Cambridge. [24](#)
- [77] V. TRIMBLE AND M. BARSTOW. Gravitational redshift and White Dwarf stars. *Einstein Online*, 4(1006), 2010. Provided by The Max Planck Institute for Gravitational Physics. [56](#)

-
- [78] C. UGGLA. Spacetime singularities. *Einstein Online*, 2(1002), 2006. Provided by The Max Planck Institute for Gravitational Physics. [31](#)
- [79] F. H. VINCENT ET AL. GYOTO: a new general relativistic ray-tracing code. *Class. Quant. Grav.*, 28:225011, 2011. [2](#), [83](#), [84](#), [91](#)
- [80] M. VISSER. Gravitational vacuum polarization. II. Energy conditions in the Boulware vacuum. *Phys. Rev. D*, 54(8):5116, 1996. [61](#)
- [81] M. VISSER. The Kerr spacetime: A Brief introduction. In *Kerr Fest: Black Holes in Astrophysics, General Relativity and Quantum Gravity Christchurch, New Zealand, August 26-28, 2004*, 2007. [30](#), [32](#), [107](#)
- [82] M. VISSER ET AL. Fate of gravitational collapse in semiclassical gravity. *Phys. Rev. D*, 77, 2008. [58](#)
- [83] R. M. WALD. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984. [17](#), [19](#), [21](#)
- [84] C. M. WILL. The confrontation between general relativity and experiment. *Pramana*, 63(4):731–740, 2004. [2](#)
- [85] R. K. WILLIAMS. Extracting x rays, γ rays, and relativistic e^-e^+ pairs from supermassive Kerr black holes using the Penrose mechanism. *Phys. Rev. D*, 51:5387–5427, 1995. [38](#)
- [86] A. S. WILSON, A. J. YOUNG, AND P. L. SHOPBELL. Chandra X-ray observations of Pictor A: high energy cosmic rays in a radio galaxy? *ApJ*, 547, 2001. [38](#)