**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM

# Álgebras con Potencial

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:
Daniel López Aguayo

TUTOR:
Dr. Raymundo Bautista Ramos
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
Dr. Christof Geiß Hahn, Instituto de Matemáticas UNAM, México D.F.
Dr. Leonardo Salmerón Castro, Centro de Ciencias Matemáticas UNAM

Morelia, Michoacán, México, Noviembre, 2016

# Índice general

# Agradecimientos

A mis padres y a mi hermano Servando, por ser un ejemplo de perseverancia, trabajo, unión y resiliencia; por su apoyo incondicional y constante motivación.

A Myriam y Santiago, por ser el motor de mi vida que hace que el cansancio sea casi inexistente, por siempre tener una sonrisa en todo momento y por siempre proporcionar el equilibrio, la alegría y el cariño infinito.

Al Dr. Raymundo Bautista, por su generosidad al compartir sus conocimientos, por su constante apoyo y por recordarme el valor de la disciplina y la autoconfianza. Gracias por ser un maestro de excelencia en todos los sentidos y por su humildad, a pesar de ser un matemático de renombre mundial.

Finalmente deseo agradecer al CCM y al Dr. Daniel Juan Pineda, por su constante apoyo y motivación para asistir a eventos académicos.

# Capítulo 1

# Introducción

Existen distintas generalizaciones del concepto de carcaj con potencial y mutación donde la $F$-álgebra subyacente, siendo $F$ un campo, es reemplazada por álgebras más generales, ver [9], [17], [18] y [20].

La motivación para el desarrollo de [10] tiene sus raíces en las llamadas álgebras de conglomerado (ver por ejemplo [11] y [15]). En [11] se desarrollan aplicaciones de la teoría de carcajes con potencial a las álgebras de conglomerado. La importancia del estudio de las álgebras de conglomerado radica en sus interacciones con distintas áreas de las matemáticas; por ejemplo, permea en las siguientes áreas: teoría de representaciones de álgebras, algebras preproyectivas, álgebras de Calabi-Yau, teoría de Teichmüller, geometría de Poisson, sistemas integrables discretos, entre otras.

Ahora detallaremos los fundamentos dados en [10]. Sea $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ un carcaj donde $Q_0$ denota el conjunto de vértices, $Q_1$ el conjunto de flechas, $h : Q_1 \to Q_0$ es la cabeza de la flecha y $t : Q_1 \to Q_0$ es el término de la flecha. Sea $K$ un campo fijo y sea $R$ el $K$-espacio vectorial con base el conjunto $\{e_i : i \in Q_0\}$ donde $e_i$ denota el idempotente asociado al vértice $i$. Si definimos $e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} e_i$ entonces $R$ tiene estructura de $K$-álgebra conmutativa. Sea $A$ el $K$-espacio vectorial que tiene como base al conjunto de flechas $Q_1$. Entonces $A$ tiene estructura de $R$-bimódulo al definir $e_i a = \delta_{i,h(a)} a$ y $a e_j = a\delta_{t(a),j}$ para cada $i, j \in Q_0$ y $a \in Q_1$. Para cada $t \geq 0$, sea $A^t$, el $K$-espacio vectorial que tiene como base a todos los caminos de longitud $t$ en $Q$ y $A^0 = R$.

El álgebra completa de caminos, $R\langle\langle A\rangle\rangle$ de $Q$ es el $K$-espacio vectorial que consiste de todas las combinaciones lineales (posiblemente infinitas) de caminos en $Q$. Es decir:

$$R\langle\langle A\rangle\rangle = \prod_{t=0}^{\infty} A^t$$

donde la estructura multiplicativa es la que se obtiene al concatenar los caminos. También se tiene el álgebra de caminos:

$$R\langle A\rangle = \bigoplus_{t=0}^{\infty} A^t$$

la cual es una subálgebra densa de $R\langle\langle A\rangle\rangle$ con respecto a la topología $\mathfrak{m}$-ádica, donde $\mathfrak{m}$ es el ideal generado por las flechas.

**Definición 1.1.** Un potencial en $A$ es un elemento de $R\langle\langle A\rangle\rangle$ que es una combinación lineal (posiblemente infinita) de ciclos. Diremos que dos potenciales $P$ y $P'$ son cíclicamente equivalentes si $P - P'$ pertenece a la cerradura del $K$-espacio vectorial generado por todos los elementos de la forma $a_1 \cdots a_l - a_2 \cdots a_l a_1$ donde $a_1 \cdots a_l$ es un ciclo.

**Definición 1.2.** Un carcaj con potencial es una pareja $(A, P)$ donde $P$ es un potencial en $A$ de manera que no existen dos caminos cíclicamente equivalentes que aparezcan en la descomposición de $P$.

La suma directa de dos álgebras con potencial $(A, P)$ y $(A', P')$ (en el mismo conjunto de vértices subyacente) es el álgebra con potencial $(A \oplus A', P + P')$.

El concepto para comparar dos álgebras con potencial es el de *equivalencia-derecha.* Diremos que dos álgebras con potencial $(A, P)$ y $(A', P')$ son derecho-equivalentes si existe un isomorfismo de álgebras $\varphi : R\langle\langle A\rangle\rangle \to R\langle\langle A'\rangle\rangle$ con $\varphi|_R = id_R$ tal que $\varphi(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$. Para cada $a \in Q_1$ se define la *derivada cíclica* $\partial_a$ como la $K$-transformación lineal continua actuando en ciclos $a_1 \cdots a_l$ de la siguiente forma:

$$\partial_a(a_1 \cdots a_l) = \sum_{j=1}^{l} \delta_{a,a_j} a_{j+1} \cdots a_l a_1 \cdots a_{j-1}$$

donde $\delta_{a,a_j}$ es la delta de Kronecker y extendemos $\partial_a$ por linealidad y continuidad; definiendo así $\partial_a(P)$ para cualquier potencial $P$. Dado un potencial $P$, el ideal Jacobiano $J(P)$ se define como la cerradura del ideal bilateral de $R\langle\langle A\rangle\rangle$ generado por todos los elementos $\partial_a(P)$ donde $a$ recorre todas las flechas de $Q$. Se define el álgebra Jacobiana como el cociente $R\langle\langle A\rangle\rangle/J(P)$.

En [10, Proposition 3.7] se prueba que el ideal Jacobiano es invariante bajo isomorfismos de álgebras que dejan fijo al álgebra $R$. De manera más precisa: si $\varphi : R\langle\langle A\rangle\rangle \to R\langle\langle A'\rangle\rangle$ es un isomorfismo de álgebras con $\varphi|_R = id_R$ entonces $\varphi(J(P)) = J(\varphi(P))$.

**Definición 1.3.** Diremos que un álgebra con potencial $(A, P)$ es trivial si $P \in A^2$ y $A = \{\partial_a(P) : a \in Q_1\}$. Diremos que un potencial $P$ es reducido si no aparecen 2-ciclos en la descomposición del potencial $P$.

Uno de los resultados importantes de [10] es el siguiente teorema de descomposición.

**Teorema** (Splitting Theorem,[10, Theorem 4.6]) Para cada álgebra con potencial $(A, P)$ existe un álgebra con potencial trivial $(A_{triv}, P_{triv})$ y un potencial reducido $(A_{red}, P_{red})$ tal que $(A, P)$ es derecho-equivalente a la suma directa $(A_{triv}, P_{triv}) \oplus (A_{red}, P_{red})$. Más aún, la clase de equivalencia-derecha de cada una de las álgebras con potenciales $(A_{triv}, P_{triv})$ y $(A_{red}, P_{red})$ está determinada por la clase de equivalencia-derecha de $(A, P)$.

Ahora recordaremos la definición de mutación de un álgebra con potencial $(A, P)$ dada en [10, p.82]. Sea $(A, P)$ un álgebra con potencial, sea $k$ un vértice y supongamos que alguno de los espacios $e_iAe_k$ o $e_kAe_i$ es 0. Reemplazando a $P$ con un potencial cíclicamente equivalente, podemos suponer que $e_kPe_k = 0$. Bajo estas condiciones se le asocia a $(A, P)$ el álgebra con potencial $(\widetilde{A}, \widetilde{P})$ donde $\widetilde{A} = \bar{e_k}A\bar{e_k} \oplus Ae_kA \oplus (e_kA)^* \oplus (Ae_k)^*$ y $\bar{e_k} = 1 - e_k$. Al potencial $P$ se le asocia el potencial $\widetilde{P}$ dado por:

$$\widetilde{P} = [P] + \sum_{a,b \in Q_1 : h(a)=t(b)=k} [ba]a^*b^*$$

y $[P]$ se obtiene al sustituir $[a_pa_{p+1}]$ en cada factor $a_pa_{p+1}$ que cumpla $t(a_p) = h(a_{p+1}) = k$ para cualquier ciclo $a_1 \cdots a_d$ que ocurra en el desarrollo del potencial $P$.

**Definición 1.4.** Se define la mutación $\mu_k(A, P)$ del álgebra con potencial $(A, P)$ con respecto a $k$, como la parte reducida del álgebra con potencial $(\widetilde{A}, \widetilde{P})$.

En este trabajo desarrollamos una teoría de potenciales sobre álgebras tensoriales completadas donde el álgebra subyacente $S$ es un producto directo finito de anillos con división que contienen centralmente al campo base $F$ y cada factor de $S$ es de dimensión finita sobre $F$.

La motivación para el desarrollo de este trabajo es realizar una generalización de [10] con la intención de que ello permita extraer los fundamentos y estructura algebraica subyacente de la teoría de carcajes con potencial.

El resultado principal de la tesis es el Teorema 8.6. En dicho teorema se prueba que dada cualquier matriz anti-simetrizable $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ con anti-simetrizador $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ con la propiedad de que para cada $j$, $d_j$ divida a $b_{ij}$ para toda $i$, entonces dada cualquier sucesión $k_1, k_2, \ldots, k_l$ de elementos de $\{1, \ldots, n\}$ existe una realización por especies de $B$ y un potencial $P$ para dicha realización, tal que la sucesión de mutaciones $\bar{\mu}_{k_1}P, \bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P, \ldots, \bar{\mu}_{k_l}\cdots\bar{\mu}_{k_1}P$ está definida.

Cabe mencionar que esta tesis es, esencialmente, una unión de los artículos [4] y [5].

Sea $F$ un campo fijo arbitrario, $S = \prod_{i=1}^{n} D_i$ un producto directo finito de anillos de división $D_i$ que contienen centralmente al campo base $F$ y cada factor $D_i$ es de dimensión finita sobre $F$. Sea $Z = \bigoplus_n F$ y $M$ un $S$-bimódulo de dimensión finita sobre $F$. En el capítulo 3 introducimos el álgebra $\mathcal{F}_S(M)$, la cual es la completación $\langle M\rangle$-ádica del álgebra tensorial $T_S(M)$ donde $\langle M\rangle$ es la cerradura del ideal bilateral generado por $M$. Se da una caracterización (similar a la dada en [10]) de los isomorfismos de álgebras continuos $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$. También se define el concepto de $S$-bimódulo $Z$-libremente generado y se estudian sus propiedades. En el caso de [10] se tiene que $D_i = F$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $S = Z$ y $M_0 = M = A$ donde $A$ es el $F$-espacio vectorial generado por las flechas del carcaj $Q$. En este caso se verifica que $M$ es $Z$-libre ya que el morfismo multiplicación $\mu_M$ admite como inverso al morfismo $M \to S \otimes_S M \otimes_S M$ dado por $m \mapsto 1 \otimes m \otimes 1$. En el capítulo 4, siguiendo a [23], definimos la derivada cíclica y las derivadas cíclicas asociadas a un elemento del $S$-dual derecho de $M$. En el capítulo 5, para cada potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$, definimos un ideal bilateral cerrado $R(P)$ de $\mathcal{F}_S(M)$. Nuestra definición está dada en términos de un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$ y $F$-bases de cada factor inescindible de $S$. Una propiedad importante que se establece de $R(P)$ es que es invariante bajo isomorfismos de álgebras $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ que fijan a $S$. Esto en particular implica que $R(P)$ no depende de la elección de un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$. En el Apéndice se prueba también que $R(P) = J(P)$ donde $J(P)$ es el ideal Jacobiano en el sentido de [9] y [18]. En el capítulo 6 se define el concepto de equivalencia-derecha entre álgebras con potencial y se establecen algunas propiedades. En el capítulo 7 le asociamos a cada potencial $P$ de $\mathcal{F}_S(M)$ un morfismo de $S$-bimódulos $X^P : M^* \to \mathcal{F}_S(M)$; dicho morfismo tiene un papel muy relevante en los capítulos restantes. También se establece un teorema de descomposición similar al dado en [10] y [18]. En [18] se toma un carcaj con peso $(Q, \mathbf{d})$; esto es, $Q$ es un carcaj sin lazos y $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ es una tupla que asigna un entero positivo $d_i$ a cada vértice $i$ de $Q$. Además se asume que $(d_i, d_j) = 1$ para cada $i \neq j$ y se hacen las siguientes suposiciones: se toma una extensión $E/F$, siendo $F$ el campo subyacente fijo, una extensión de grado $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$ y se asume que $F$ contiene una raíz primitiva de la unidad de orden $d$ y que $Gal(E/F)$ es un grupo cíclico. Entonces estas suposiciones implican la existencia de una eigenbase $\mathcal{B}_E$ de $E/F$ con la propiedad de que el producto de cualesquiera dos elementos básicos es un $F$-múltiplo de otro básico. En contraste con [18] no asumimos coprimalidad de los grados de las extensiones $[D_i : F]$ ni que $F$ contenga una raíz primitiva de la unidad de cierto orden fijo. En este capítulo se imponen ciertas condiciones sobre las $F$-bases de cada factor inescindible de $S$ y se ve que si existe una extensión de campos $E/F$ tal que $Gal(E/F)$ es soluble y $F$ contiene una raíz primitiva de la unidad de orden $[E : F]$, entonces $E/F$ tiene una base que cumple dichas condiciones. De esta manera se puede desarrollar una teoría de potenciales relajando las hipótesis sobre las extensiones. En el capítulo 9 se introduce el concepto de mutación de álgebras con potencial. Tomamos $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ una descomposición de la unidad de $S$ en idempotentes primitivos ortogonales de $S$ y asumiremos que la parte cíclica de $M$ es trivial, esto es, para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene $e_i M e_i = 0$. Como en [10], para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se define la mutación de un álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ en $k$ siempre que se cumpla la siguiente condición: para cada $1 \leq i \leq n$, $e_i M e_k \neq 0$ implica $e_k M e_i = 0$ y $e_k M e_i \neq 0$ implica $e_i M e_k = 0$. Primero, se introduce una nueva álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(\mu_k M), \mu_k P)$ y se desea eliminar la parte cuadrática de $\mu_k P$; en caso que esto sea posible se obtiene un álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(\bar{\mu_k} M), \bar{\mu_k} P)$. En este caso diremos que $\bar{\mu_k} P$ está definido. Se proporciona una condición en términos de $X^{\mu_k P}$ que indica cuando esto es posible. Un resultado central de este capítulo es que la mutación de álgebras con potencial es involutiva, módulo equivalencia-derecha. También se prueba que si $\bar{\mu_k} P$ está definido, entonces el álgebra $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$ es de dimensión finita sobre $F$ si y sólo si $\mathcal{F}_S(\bar{\mu_k} M)/R/(\bar{\mu_k} P)$ también es de dimensión finita sobre $F$. Además, se define el espacio de deformaciones de un álgebra con potencial y se prueba que es invariante bajo mutaciones. En la sección 8.3 veremos como asociar una matriz anti-simetrizable al $S$-bimódulo $M$ de manera que las matrices asociadas a $M$ y $\bar{\mu_k} M$ están relacionadas a través de la mutación en el sentido de Fomin-Zelevinsky [15]. En la sección 8.4 se prueba que si $F$ es un campo infinito y $M$ es un $S$-bimódulo tal que para cada par de enteros $(i, j)$ en $[1, n]^2$ cumpliendo que $e_i M e_j \neq 0$ implica $e_j M e_i = 0$ entonces para cada sucesión $k_1, \ldots, k_l$ de enteros en $[1, n]$ existe un potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\bar{\mu}_{k_l} \cdots \bar{\mu}_{k_1} P$ está definido. En el capítulo 9 se introduce el concepto de representaciones decoradas y se establece un resultado similar al dado en [10]: la mutación de representaciones decoradas es una involución. Finalmente en el capítulo 10 se prueba que existe una casi equivalencia de Morita, en el sentido de Ringel [21], entre las álgebras Jacobianas que están relacionadas mediante mutación, dando lugar así a una generalización de los resultados dados en [7].

# Capítulo 2

# Preliminares

**Definición 2.1.** Un ***anillo topológico*** es un anillo $(R, +, \cdot)$ con estructura de espacio topológico tal que la suma y el producto son continuas como aplicaciones $R \times R \to R$ donde $R \times R$ tiene la topología producto.

El concepto de anillo topológico fue introducido por David van Dantzig[1] en su tesis doctoral titulada "*Studien über topologische Algebra*".

Algunos ejemplos de anillos topológicos son $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con sus topologías usuales. Los anillos topológicos son objeto de estudio en el análisis, por ejemplo: $C(X)$ el anillo de todas las funciones continuas real-valuadas definidas en un espacio compacto $X$ o $C_c(X)$ el espacio de todas las funciones continuas real-valuadas con soporte compacto definidas en un espacio localmente compacto $X$.

**Definición 2.2.** Si $X$ es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre $X$ es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ (llamados ***elementos básicos***) tales que:

(1) Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(2) Sean $B_1$ y $B_2$ elementos de $\mathcal{B}$. Si $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si la colección $\mathcal{B}$ satisface las condiciones anteriores se define la ***topología $\tau$ generada por la base*** $\mathcal{B}$ como sigue: $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

**Definición 2.3.** Un ***anillo filtrado*** $R$ es un anillo junto con una sucesión decreciente de ideales $R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 ...$ tal que $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$. A la colección $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ se le llama una ***filtración*** de ideales.

Un caso importante que se estudia es cuando $\mathfrak{m}$ es un ideal bilateral del anillo $R$ y se considera la filtración dada por los ideales $I_n = \mathfrak{m}^n$. A dicha filtración se le conoce como filtración $\mathfrak{m}$-ádica.

**Proposición 2.1.** *Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces el conjunto $\{x + I_n : x \in R, n \in \mathbb{N}\}$ forma una base para una topología en $R$. A la topología generada se le llama* **topología asociada a la filtración**.

*Demostración.* Veamos primero que la primera condición de una base para una topología se cumple. Dado $x \in R$ se tiene que $x = x + 0 \in x + I_1$ ya que un ideal es, en particular, un subgrupo aditivo de $R$, luego contiene al elemento 0. Resta ver que la segunda condición se cumple. Supongamos que $z \in (x + I_n) \cap (y + I_m)$ donde $x, y$ son elementos de $R$ y $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$. Definamos $k = \max\{n, m\}$ y veamos que $z + I_k \subseteq (x + I_n) \cap (y + I_m)$. Sea $z + j$ un elemento arbitrario de $z + I_k$, i.e $j \in I_k$. Dado que $z \in (x + I_n) \cap (y + I_m)$ entonces $z = x + j_1$ con $j_1 \in I_n$ y a la vez $z = y + j_2$ con $j_2 \in I_m$. Como $k = \max\{n, m\}$ entonces $I_k \subseteq I_n$ e $I_k \subseteq I_m$. Por lo tanto $z + j = x + j_1 + j \subseteq x + I_n$ ya que $j \in I_k \subseteq I_n$ y $j_1 \in I_n$. De manera similar se sigue que $z + j = y + j + j_2 \subseteq y + I_m$. En consecuencia $z + I_k \subseteq (x + I_n) \cap (y + I_m)$. Además por definición $z + I_k$ es un elemento de la base que contiene a $z$. Lo anterior prueba que dicha colección forma una base para una topología. □

[1]Matemático holandés (1900-1959) trabajó en el estudio de metrización de anillos, grupos y campos.

**Observación 2.1.** La topología asociada a una filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es Hausdorff si y sólo si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Si un anillo tiene la filtración $I$-ádica entonces a la topología que genera la base definida anteriormente se le conoce como ***topología I-ádica***.

**Proposición 2.2.** *Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces la suma y producto son operaciones continuas, es decir $R$ tiene estructura de anillo topológico.*

*Demostración.* Recordemos que si $(X, \tau_1)$ y $(Z, \tau_2)$ son espacios con topologías $\tau_i$ generadas por bases $\mathcal{B}_i$ con $i \in \{1, 2\}$ entonces $f : X \to Z$ es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada básico $V \in \mathcal{B}_2$, que contiene a $f(x)$, existe un elemento básico $U \in \mathcal{B}_1$ que contiene a $x$ y tal que $f(U) \subseteq V$. Probemos primero que $+ : R \times R \to R$ es una función continua. Sea $(r, s) \in R \times R$ y sea $z + I_n$ un abierto básico que contiene a $r + s$ con $n \in \mathbb{N}$. Observe que $(r + I_n) \times (s + I_n)$ es un abierto básico para la topología producto que contiene al elemento $(r, s)$. Del hecho que $(x + I_n) + (y + I_n) \subseteq x + y + I_n$ se sigue que la aplicación suma es continua. La continuidad del producto se deriva del hecho que $(x + I_n)(y + I_n) \subseteq x + y + I_n$. □

Supongamos ahora que $R$ es un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Definamos una función $d : R \times R \to \mathbb{R}$ como sigue: $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 2^{-max\{k \in \mathbb{N} :\ x-y\ \in I_k\}}$ si $x \neq y$. Note que la condición $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ implica que $d$ está bien definida para todos los pares $(x, y) \in R \times R$.

**Proposición 2.3.** *La aplicación $d$ definida anteriormente es una métrica en $R$.*

*Demostración.* De la definición de $d$ es claro que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. También es evidente que $d(x, y) = d(y, x)$, luego basta mostrar que se cumple la desigualdad triangular. Para probar esto vamos a proceder por casos. Si ocurre que $x = y$ entonces $d(x, y) + d(y, z) = d(y, z)$ y claramente $d(y, z) \geq d(y, z)$, luego podemos suponer que todos los puntos $x, y, z$ son distintos entre sí. Sea $n_1$ el mayor entero tal que $x - y \in I_{n_1}$, $n_2$ el mayor entero tal que $y - z \in I_{n_2}$ y $n_3$ el mayor entero tal que $x - z \in I_{n_3}$. Definamos $r = \min\{n_1, n_2\}$. La igualdad $x - z = (x - y) + (y - z)$ implica que $x - z \in I_r$ y por lo tanto $r \leq n_3$. Pero entonces $-n_3 \leq -r$ de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} d(x, z) = 2^{-n_3} &\leq 2^{-r} \\ &\leq 2^{-n_1} + 2^{-n_2} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ como se quería mostrar. □

Lo anterior muestra que si $R$ es un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ entonces la filtración asociada genera una métrica en $R$.

De la teoría de espacios métricos se sabe que si $(X, d)$ es un espacio métrico entonces la colección de todas las bolas abiertas $B_d(x, \epsilon)$ de radio $\epsilon$, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre $X$, denominada ***topología métrica*** inducida por $d$.

**Definición 2.4.** Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico se dice que $X$ es ***metrizable*** si existe una métrica $d$ en el conjunto $X$ que induce la topología $\tau$.

**Definición 2.5.** Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ y supongamos que además $R$ tiene la topología asociada a la filtración. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ entonces $R$ es un espacio metrizable.

*Demostración.* Vamos a mostrar que la métrica $d : R \times R \to \mathbb{R}$ definida por: $d(x,x) = 0$ y $d(x,y) = 2^{-max\{k \in \mathbb{N}:\ x-y \in I_k\}}$ si $x \neq y$ induce la topología asociada a la filtración. Primero notemos que dado $N \in \mathbb{N}$ y $x \in R$ se tiene que $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) = x + I_N$. Sea $x \in R$ y $\epsilon > 0$, veamos que $B(x,\epsilon)$ es un conjunto abierto en la topología asociada a la filtración. Sea $N$ lo suficientemente grande tal que $2^{N-1}\epsilon > 1$. Por lo tanto $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) \subseteq B(x,\epsilon)$ pero por la observación $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) = x + I_N$, luego $x + I_N \subseteq B(x,\epsilon)$. Recíprocamente, sea $x + I_k$ un elemento básico para la topología asociada a la filtración y sea $z \in x + I_k$. Nuevamente por la observación $x + I_k = B(x, \frac{1}{2^{k-1}})$ en particular $z \in B(x, \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq x + I_k$ y por lo tanto $x + I_k$ es un conjunto abierto en la topología métrica inducida por $d$. Se concluye que dichas topologías coinciden. $\square$

**Definición 2.6.** Sea $I$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $\{R_i : i \in I\}$ una familia de anillos. Supongamos que para $i, j \in I$ con $j \geq i$ existen morfismos de anillos $\mu_{ji} : R_j \to R_i$ tal que:

(a) $\mu_{ji} \circ \mu_{kj} = \mu_{ki}$ si $i \leq j \leq k$.

(b) $\mu_{ii} = id_{R_i}$ para cada $i \in I$.

Se dice entonces que el par $((R_i)_{i \in I}, (\mu_{ji})_{i \leq j \in I})$ forma un sistema inverso de anillos y morfismos.

**Definición 2.7.** Se define el ***límite inverso*** del sistema inverso $((R_i)_{i \in I}, (\mu_{ji})_{i \leq j \in I})$ como:

$$\varprojlim R_i := \left\{ (r_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_i \mid\ \mu_{ji}(r_j) = r_i \text{ si } i \leq j \right\}$$

Notar que para cada $i \in I$ se tiene la restricción de la proyección natural $\pi_i : \varprojlim R_i \to R_i$.

**Proposición 2.4.** Propiedad universal del límite inverso. *Si $S$ es cualquier anillo con la propiedad que para cada $i \in I$ existen morfismos de anillos $f_i : S \to R_i$ con $f_i = \mu_{ij} \circ f_j$ para $i \geq j$, entonces existe un único morfismo de anillos $f : S \to \varprojlim R_i$ tal que los triángulos laterales del siguiente diagrama conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\
& \varprojlim R_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\
R_i \arrow[rr, "\mu_{ij}"'] & & R_j
\end{tikzcd}$$

*Demostración.* Sea $f : S \to \varprojlim R_i$ dada por $f(s) := (f_i(s))_{i \in I}$. Observe que si $i \geq j$ entonces $\mu_{ij}(f_i(s)) = f_j(s)$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(f) \subseteq \varprojlim R_i$. Sean $s_1, s_2$ elementos de $S$, entonces usando el hecho que $f_i$ es, en particular, un morfismo de grupos se tiene que

$$\begin{aligned}
f(s_1 + s_2) &= (f_i(s_1 + s_2))_{i \in I} \\
&= (f_i(s_1) + f_i(s_2))_{i \in I} \\
&= (f_i(s_1))_{i \in I} + (f_i(s_2))_{i \in I} \\
&= f(s_1) + f(s_2)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
f(s_1 s_2) &= (f_i(s_1 s_2))_{i \in I} \\
&= (f_i(s_1) f_i(s_2))_{i \in I} \\
&= (f_i(s_1))_{i \in I} (f_i(s_2))_{i \in I} \\
&= f(s_1) f(s_2)
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $f$ es un morfismo de anillos, la unicidad de $f$ se sigue al componer con las proyecciones $\pi_i$. $\square$

Supongamos ahora que $R$ es un anillo e $I$ es un ideal (bilateral) de $R$. Notemos que en $R$ se tiene la *filtración I-ádica*:

$$R \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ \dots$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \leq m$. Observe que el ideal $I^m$ está contenido en el núcleo de la proyección natural $R \twoheadrightarrow R/I^n$, luego por el teorema de Noether se tienen morfismos naturales de anillos

$$f_{mn} : R/I^m \longrightarrow R/I^n$$

Por construcción se sigue que el par $((I^n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_{mn})_{n\leq m\in\mathbb{N}})$ forma un sistema inverso de anillos y morfismos. Consideremos entonces el límite inverso $\varprojlim R/I^n$

$$\varprojlim R/I^n = \left\{ (r_n + I^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} R/I^n \ | r_n \equiv r_m \operatorname{mod} I^n \text{ para toda } m \geq n \right\}$$

Se define la ***completación*** de $R$ con respecto a $I$ como $\hat{R}_I := \varprojlim R/I^n$.

En este trabajo haremos uso de la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.** *Sean $M$ y $N$ grupos abelianos y sean $R, S, T$ anillos.*

1. *Si $M$ es un $R-S$ bimódulo y $N$ es un $R-T$ bimódulo entonces* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *es un $S-T$-bimódulo a través de:*

$$(sf)(x) = f(xs) \text{ y } (ft)(x) = f(x)t;$$

2. *Si $M$ es un $S-R$ bimódulo y $N$ es un $T-R$ bimódulo entonces* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *es un $T-S$-bimódulo a través de:*

$$(tf)(x) = tf(x) \text{ y } (fs)(x) = f(sx)$$

# Capítulo 3

# El álgebra de series formales

## 3.1 El álgebra de series formales

**Definición 3.1.** Sea $F$ un campo y sean $D_1, \ldots, D_n$ anillos de división que contienen a $F$ en su centro, sean $S = \prod_{i=1}^{n} D_i$ y $M$ un $S$-bimódulo de dimensión finita sobre $F$. Definamos el *álgebra de series formales* sobre $M$ como el conjunto:

$$\mathcal{F}_S(M) := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a(i) : a(i) \in M^{\otimes i} \right\}$$

donde $M^0 = S$. Definimos la suma en $\mathcal{F}_S(M)$ como

$$\sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \sum_{i=0}^{\infty} b(i) := \sum_{i=0}^{\infty} (a(i) + b(i))$$

y el producto como

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a(i) \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b(j) \right) := \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i+j=p} a(i)b(j)$$

donde $a(i)b(j)$ es la imagen de $a(i) \otimes b(j)$ en $M^{\otimes(i+j)}$ bajo el isomorfismo canónico de $S$-bimódulos:

$$M^{\otimes i} \otimes_S M^{\otimes j} \xrightarrow{\cong} M^{\otimes(i+j)}$$

Notemos que $\mathcal{F}_S(M)$ es una $F$-álgebra unitaria bajo estas operaciones. La unidad multiplicativa 1 de $\mathcal{F}_S(M)$ está dada por:

$$1(i) = \begin{cases} 1_S \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } i \neq 0 \end{cases}$$

donde $1_S$ denota el elemento unitario del álgebra $S$.

Para cada elemento no-nulo $a$ en $\mathcal{F}_S(M)$, definamos $\nu : \mathcal{F}_S(M) \to \mathbb{N}$ como sigue:

$$\nu(a) := min\{i \in \mathbb{N} : a(i) \neq 0\}$$

La aplicación $\nu$ induce una métrica $d$ en $\mathcal{F}_S(M)$:

$$d : \mathcal{F}_S(M) \times \mathcal{F}_S(M) \to \mathbb{R}$$

dada por $d(a,b) = 2^{-\nu(a-b)}$ si $a \neq b$ y 0 en otro caso. Se tiene que $d$ es una métrica en $\mathcal{F}_S(M)$ que induce la topología $\langle M \rangle$-ádica, donde $\langle M \rangle$ es el ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M)$ generado por $M$. Con esta métrica, $\mathcal{F}_S(M)$ es un álgebra topológica.

Sea $T_S(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}$ el álgebra tensorial de $M$ sobre $S$ y sea $\mathfrak{m}(M)$ el ideal bilateral de $T_S(M)$ generado por $M$, entonces $\widehat{T_S(M)}_{\mathfrak{m}(M)} \cong \mathcal{F}_S(M)$ como álgebras topológicas. Por lo tanto, el álgebra $\mathcal{F}_S(M)$ es la completación del álgebra tensorial $T_S(M)$.

Para cada entero $j \geq 1$, definamos:

$$\mathcal{F}_S(M)^{\geq j} := \{a \in \mathcal{F}_S(M) : a(i) = 0 \text{ para cada } i < j\}$$

Se tiene que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{F}_S(M)$.

**Definición 3.2.** Sea $\tau := \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Diremos que $\tau$ es *sumable* si para cada $u \in \mathbb{N}$, el conjunto:

$$\mathcal{F}(\tau, u) := \{i \in \mathbb{N} : T_i(u) \neq 0\}$$

es finito. Si $\tau := \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es sumable entonces definimos la serie $\sum T_i$ como

$$\left(\sum T_i\right)(u) := \sum_{i \in \mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u)$$

**Proposición 3.1.** *Sea $\tau = \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n = \sum_{i \leq n} T_i$. Si $\tau$ es sumable entonces $\lim_{n \to \infty} J_n = \sum T_i$ con respecto a la métrica $d$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$ y elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^N \epsilon > 1$. Como $\tau$ es sumable entonces para cada $u \in \{0, 1, \ldots, N\}$ se tiene que $|\mathcal{F}(\tau, u)| < \infty$. Sea $T = \bigcup_{u=0}^{N} \mathcal{F}(\tau, u)$ y pongamos $k = max\ T$. Si $n \geq k$ y $u \in \{0, 1, \ldots, N\}$ entonces $J_n(u) - \left(\sum T_i\right)(u) = 0$. Luego si $n \geq k$ entonces $v\left(J_n - \sum T_i\right) > N$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d\left(J_n, \sum T_i\right) &< 2^{-N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Se sigue que $\lim_{n \to \infty} J_n = \sum T_i$. □

Sean $\tau = \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\tau' = \{T'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Definamos $\tau'' = \{T''_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ como:

$$T''_s := \sum_{i+j=s} T_i T'_j$$

**Proposición 3.2.** *Sean $\tau = \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau' = \{T'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sucesiones de $\mathcal{F}_S(M)$. Si ambas sucesiones son sumables, entonces $\{T''_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ es sumable y $\sum T''_s = \left(\sum T_i\right)\left(\sum T'_j\right)$.*

*Demostración.* Sea $u \in \mathbb{N}$ y para cada entero $l \in [0, u]$ definamos:

$$J_l = \mathcal{F}(\tau, l) \times \mathcal{F}(\tau', u - l)$$
$$J = \bigcup_{l=0}^{u} J_l$$

Como $\tau$ y $\tau'$ son sumables entonces $J$ es un conjunto finito. Sea $s_0 = max\{i + j : (i, j) \in J\}$, entonces:

$$\mathcal{F}(\tau'', u) \subseteq [0, s_0] \cap \mathbb{N}$$

Luego $\mathcal{F}(\tau'', u)$ es finito y por lo tanto $\tau''$ es sumable. Sea $u \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left(\sum T''_s\right)(u) &= \sum_{s \in \mathcal{F}(\tau'', u)} T''_s(u) \\ &= \sum_{s=0}^{s_0} T''_s(u) \\ &= \sum_{l=0}^{u} \sum_{(i,j) \in J_l} T_i(l) T'_j(u-l)\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\left(\sum T_i\right)\left(\sum T'_j\right)(u) &= \sum_{l=0}^{u} \left(\sum_{i \in \mathcal{F}(\tau, l)} T_i(l)\right)\left(\sum_{j \in \mathcal{F}(\tau', u-l)} T'_j(u-l)\right) \\ &= \sum_{l=0}^{u} \sum_{(i,j) \in J_l} T_i(l) T'_j(u-l)\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. $\square$

Las siguientes Proposiciones 3.3, 3.4 y 3.5 dan una caracterización de los isomorfismos de álgebras $\mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ que fijan el álgebra $S$, similar a la que se da en [10, Proposition 2.4] y [18, Proposition 4.9].

**Proposición 3.3.** *Sean $M$ y $M'$ $S$-bimódulos y sea $\phi : M \to \mathcal{F}_S(M')$ un morfismo de $S$-bimódulos tal que $\phi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M')^{\geq 1}$. Entonces existe un único morfismo de álgebras $\overline{\phi} : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[dl, dashed, "\overline{\phi}"] \\ \mathcal{F}_S(M') & \end{tikzcd}$$

*donde $i$ es la inclusión $M \rightarrowtail \mathcal{F}_S(M)$.*

*Demostración.* Por la propiedad universal de $T_S(M)$ existe un único morfismo de álgebras $\psi : T_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi"'] & T_S(M) \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ \mathcal{F}_S(M') & \end{tikzcd}$$

donde $j$ es el morfismo inclusión de $M$ en $T_S(M)$. Sea $a = \sum_{u=0}^{\infty} a(u)$ un elemento de $\mathcal{F}_S(M)$. Como $\phi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M')^{\geq 1}$ entonces $\psi(a(u)) \in \mathcal{F}_S(M')^{\geq u}$ para cada entero $u \geq 1$. Por lo tanto la sucesión $\{\psi(a(u))\}_{u \in \mathbb{N}}$ es sumable. Definamos $\overline{\phi} : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ como $\overline{\phi}(a) = \sum_{u=0}^{\infty} \psi(a(u))$. Se tiene que $\overline{\phi}$ preserva sumas. Veamos que $\overline{\phi}$ preserva productos. Sean

$a_1, a_2$ elementos de $\mathcal{F}_S(M)$, entonces la Proposición 3.2 implica que:

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(a_1a_2) &= \sum_{u=0}^{\infty} \psi((a_1a_2)(u)) \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} \psi\left(\sum_{i+j=u} a_1(i)a_2(j)\right) \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{i+j=u} \psi(a_1(i))\psi(a_2(j)) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi(a_1(i))\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(a_2(j))\right) \\
&= \overline{\phi}(a_1)\overline{\phi}(a_2)
\end{aligned}$$

La unicidad de $\overline{\phi}$ se sigue de la continuidad y unicidad de $\psi$ en $T_S(M)$ y por el hecho de que $T_S(M)$ es denso en $\mathcal{F}_S(M)$. □

Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ un morfismo de álgebras tal que $\phi|_S = id_S$. Como $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} = M \bigoplus \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, entonces la restricción de $\phi$ a $M$ induce un morfismo de $S$-bimódulos $\phi_0 : M \to M \bigoplus \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, el cual está determinado por un par de morfismos de $S$-bimódulos $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$:

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)} &: M \to M \\
\phi^{(2)} &: M \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}
\end{aligned}$$

**Proposición 3.4.** *Supongamos que $\phi^{(1)} = id_M$ entonces $\phi$ es un isomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Sea $\psi = id_{\mathcal{F}_S(M)} - \phi$, entonces $\psi$ es un endomorfismo de $S$-bimódulos. Veamos que para cada entero positivo $u$ se tiene $\psi(M^{\otimes u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Si $u = 1$ entonces la hipótesis $\phi^{(1)} = id_M$ implica que:

$$\begin{aligned}
\psi(m) &= m - \phi(m) \\
&= m - \phi_0(m) \\
&= m - (\phi^{(1)}(m) + \phi^{(2)}(m)) \\
&= m - m - \phi^{(2)}(m) \\
&= -\phi^{(2)}(m)
\end{aligned}$$

como $\phi^{(2)} : M \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, entonces $\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Probemos el caso general mediante inducción. Supongamos que la afirmación se cumple para $u$ y veamos que se cumple para $u+1$. Sea $n \otimes m \in M^{\otimes(u+1)} = M^{\otimes u} \otimes_S M$, entonces:

$$\begin{aligned}
\psi(n \otimes m) &= n \otimes m - \phi(n \otimes m) \\
&= nm - \phi(n)\phi(m) \\
&= nm - \phi(n)m + \phi(n)m - \phi(n)\phi(m) \\
&= (n - \phi(n))m + \phi(n)(m - \phi(m)) \\
&= \psi(n)m + \phi(n)\psi(m)
\end{aligned}$$

Notemos que $n \in M^{\otimes u}$, entonces por hipótesis de inducción $\psi(n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ y por ende $\psi(n)m \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$. Por otro lado, $n \in M^{\otimes u}$ y como $\phi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$ entonces $\phi(n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$. Por lo tanto $\psi(n \otimes m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$.

Veamos ahora que $\psi(\mathcal{F}_S(M)^{\geq u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Sea $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$, entonces $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a(u+k)$ donde $a(u+k) \in M^{\otimes(u+k)}$.

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\psi(a) &= a - \phi(a) \\
&= a - \phi\left(\sum_{k=0}^{\infty} a(u+k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a(u+k) - \sum_{k=0}^{\infty} \phi(a(u+k)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (a(u+k) - \phi(a(u+k))) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \psi(a(u+k)) \\
&= \psi(a(u)) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a(u+k))
\end{aligned}$$

Como $a(u) \in M^{\otimes u}$ entonces la contención $\phi(M^{\otimes u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ implica que $\psi(a(u)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Notemos también que $\psi(a(u+k)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ y entonces se sigue que $\psi(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$.

Observemos que la sucesión $\{\psi^i(a)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sumable. Definamos $\rho : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ como:

$$\rho(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)$$

Por construcción $\psi = id - \phi$, lo que implica que $\phi = id - \psi$. Entonces $\phi\rho = (id - \psi)\rho$. Como $\psi$ es continuo entonces:

$$\begin{aligned}
(\phi\rho)(a) &= (id - \psi)(\rho(a)) \\
&= (id - \psi)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a) - \psi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a) - \sum_{i=0}^{\infty} \psi^{i+1}(a) \\
&= \psi^0(a) \\
&= id(a) \\
&= a
\end{aligned}$$

Luego $\phi\rho = id_{\mathcal{F}_S(M)}$. Similarmente $\rho\phi = id_{\mathcal{F}_S(M)}$ y por lo tanto $\phi$ es un isomorfismo de álgebras. $\square$

**Proposición 3.5.** *Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ un morfismo de álgebras tal que $\phi|_S = id_S$. Sea $\phi_0 = (\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$, entonces $\phi$ es un isomorfismo de álgebras si y sólo si $\phi^{(1)}$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos.*

*Demostración.* Supongamos primero que $\phi$ es un isomorfismo de álgebras, entonces existe $\rho : \mathcal{F}_S(M') \to \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\rho\phi = id_{\mathcal{F}_S(M)}$ y $\phi\rho = id_{\mathcal{F}_S(M')}$. Como $\phi|_S = id_S$ entonces $\rho|_S = id_S$. Luego $\rho(M') \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$ y por lo tanto $\rho|_{M'} = (\rho^{(0)}, \rho^{(1)})$ donde $\rho^{(0)} : M' \to M$ y $\rho^{(1)} : M' \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ son morfismos de $S$-bimódulos. Sea $m \in M'$, entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(m) &= \rho^{(0)}(m) + \rho^{(1)}(m) \\
\phi(\rho(m)) &= \phi(\rho^{(0)}(m)) + \phi(\rho^{(1)}(m)) \\
m &= \phi(\rho^{(0)}(m)) + \phi(\rho^{(1)}(m)) \\
&= \phi^{(1)}(\rho^{(0)}(m)) + \phi^{(2)}(\rho^{(0)}(m)) + \phi(\rho^{(1)}(m))
\end{aligned}$$

La unicidad de la suma directa implica que $m = \phi^{(1)}(\rho^{(0)}(m))$. Ahora, sea $m \in M$, entonces $\phi(m) = \phi_0(m)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\phi(m) &= \phi^{(1)}(m) + \phi^{(2)}(m)\\
\rho(\phi(m)) &= \rho(\phi^{(1)}(m)) + \rho(\phi^{(2)}(m))\\
m &= \rho(\phi^{(1)}(m)) + \rho(\phi^{(2)}(m))\\
&= \rho^{(0)}(\phi^{(1)}(m)) + \rho^{(1)}(\phi^{(1)}(m)) + \rho(\phi^{(2)}(m))
\end{aligned}$$

como $\rho^{(1)}(\phi^{(1)}(m))$ y $\rho(\phi^{(2)}(m))$ son elementos de $\mathcal{F}_S(M')^{\geq 2}$ entonces $\rho^{(0)}(\phi^{(1)}(m)) = m$, lo que muestra que $\phi^{(1)}$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. Supongamos ahora que $\phi^{(1)}$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. Definamos $\rho^{'} := (\phi^{(1)})^{-1} : M' \to M$. Por la Proposición 3.3 se sigue que $\rho^{'}$ induce un morfismo de álgebras $\rho : \mathcal{F}_S(M') \to \mathcal{F}_S(M)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \phi)(m) &= \rho(\phi(m))\\
&= \rho(\phi_0(m))\\
&= \rho(\phi^{(1)}(m) + \phi^{(2)}(m))\\
&= \rho(\phi^{(1)}(m)) + \rho(\phi^{(2)}(m))\\
&= (\phi^{(1)})^{-1}(\phi^{(1)}(m)) + \rho(\phi^{(2)}(m))\\
&= m + \rho(\phi^{(2)}(m))
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\rho \circ \phi)|_M = (id_M, \rho \circ \phi^{(2)})$. Aplicando la Proposición 3.4 se tiene que $\phi$ tiene inverso izquierdo. Un argumento similar muestra que $\phi$ tiene inverso derecho y por lo tanto $\phi$ es un isomorfismo de álgebras. □

**Definición 3.3.** Sea $\phi$ el automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M)$ correspondiente a un par de morfismos de $S$-bimódulos $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$ como en la Proposición 3.5. Si $\phi^{(1)} = id_M$, diremos que $\phi$ es un automorfismo *unitriangular*.

## 3.2 Bimódulos libremente generados

Sea $F$ un campo. En el resto de la tesis se asumirán las siguientes hipótesis: $S = \prod_{i=1}^{n} D_i$ es un producto directo finito de anillos de división que contienen a $F$ en su centro y cada anillo $D_i$ tiene dimensión finita sobre $F$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema de idempotentes primitivos ortogonales de $S$ y sea $Z = \sum_{i=1}^{n} Fe_i$. Notemos que $Z$ es un subanillo del centro de $S$. Sea $M$ un $S$-bimódulo de dimensión finita sobre $F$.

**Definición 3.4.** Diremos que $M$ es *$Z$-libremente generado* por un $Z$-subbimódulo $M_0$ de $M$ si ocurre que el morfismo multiplicación $\mu_M : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to M$ dado por $\mu_M(s_1 \otimes m \otimes s_2) = s_1 m s_2$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. En este caso diremos que $M$ es un $S$-bimódulo que es *$Z$-libre*.

**Definición 3.5.** Un elemento $m \in M$ es *legible* si $m = e_i m e_j$ para algunos idempotentes $e_i, e_j$ de $S$.

**Definición 3.6.** Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $M$. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *$S$-base local derecha* de $M$ si cada elemento de $\mathcal{C}$ es legible y para cada par de idempotentes $e_i, e_j$ de $S$ se tiene que $\mathcal{C} \cap e_i M e_j$ es una $Se_j = D_j$-base para $e_i M e_j$.

Una $S$-base local derecha $\mathcal{C}$ induce una base dual $\{u, u^*\}_{u \in \mathcal{C}}$ donde $u^* : M_S \to S_S$ es el morfismo de $S$-módulos derechos dado por $u^*(v) = 0$ si $v \in \mathcal{C} \setminus \{u\}$ y $u^*(u) = e_j$ si $u = e_i u e_j$.

**Proposición 3.6.** *Sea $M$ un $S$-bimódulo $Z$-libre, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) $M$ es $Z$-libremente generado por $M_0$ y $T$ es una $Z$-base local de $M_0$.*

*(ii) $T$ es un subconjunto de elementos legibles de $M$ que genera a $M$ como $S$-bimódulo y tal que si $N$ es un $S$-bimódulo, $X$ cualquier subconjunto de elementos legibles de $N$ y si existe una función $\phi_0 : T \to X$ con $\phi_0(e_i M e_j \cap T) \subseteq X \cap e_i N e_j$, entonces existe un único morfismo de $S$-bimódulos $\phi : M \to N$ tal que $\phi|_T = \phi_0$.*

*Demostración.* Veamos que (i) implica (ii). Es claro que $T$ genera a $M$ como $S$-bimódulo. Sea $N_0$ el $F$-subespacio vectorial de $N$ generado por $X$; como $X$ consiste de elementos legibles entonces $N_0$ es un $Z$-subbimódulo de $N$. Dado que $T$ es una $Z$-base local de $M_0$, entonces para cada $e_iM_0e_j$ se tiene que $T(i,j) = T \cap e_iM_0e_j$ es una $F$-base de $e_iM_0e_j$. Por lo tanto, existe una $F$-transformación lineal $\phi_{i,j} : e_iM_0e_j \to e_iN_0e_j$. Dicha transformación induce un morfismo de $Z$-bimódulos $\phi_1 : M_0 \to N_0$ tal que la restricción de $\phi_1$ a cada $e_iM_0e_j$ es $\phi_{i,j}$. El morfismo $\phi_1$ induce un morfismo de $S$-bimódulos:

$$1 \otimes \phi_1 \otimes 1 : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to S \otimes_Z N_0 \otimes_Z S \xrightarrow{\mu_N} N$$

donde $\mu_N$ está dado por multiplicación. Por lo tanto, existe un morfismo de $S$-bimódulos:

$$\phi : M \to N$$

tal que $\phi\mu_M = \mu_N(1 \otimes \phi_1 \otimes 1)$. Luego para cada $a \in T$, $\phi(a) = \phi\mu_M(1 \otimes a \otimes 1) = \mu_N(1 \otimes \phi_1(a) \otimes 1) = \phi_1(a) = \phi_0(a)$. La unicidad de $\phi$ es clara. Veamos ahora que (ii) implica (i). Sea $T$ un subconjunto de $M$ que consiste de elementos legibles que satisfacen (ii). Sea $M_0$ el $F$-subespacio vectorial de $M$ generado por $T$; notemos que $M_0$ es un $Z$-subbimódulo de $M$. Consideremos el morfismo multiplicación $\mu_M : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to M$, como $T$ satisface (ii) entonces existe un morfismo de $S$-bimódulos $\phi : M \to S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S$ tal que $\phi(a) = 1 \otimes a \otimes 1$ para cada $a \in T$. Entonces $\mu_M\phi(a) = a$ y $\phi\mu_M(1 \otimes a \otimes 1) = 1 \otimes a \otimes 1$. Como los elementos de $T$ generan a $M$ como $S$-bimódulo y los elementos $1 \otimes a \otimes 1$ generan a $S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S$ como $S$-bimódulo, entonces $\phi$ es el morfismo inverso de $\mu_M$. Esto prueba (i). □

**Definición 3.7.** Si $T$ es un subconjunto de $M$ que cumple (i) de la Proposición 3.6 entonces diremos que $T$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$.

**Observación 3.1.** Si $f : M \to N$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos y $T$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$, entonces $f(T)$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $N$.

**Lema 3.1.** *Supongamos que $M$ es $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo $M_0$ de $M$. Sea $X$ un conjunto de generadores de $M$, como $S$-bimódulo, tal que cada par de idempotentes $e_i, e_j$ satisface $card(X \cap e_iMe_j) = dim_F e_iM_0e_j$. Entonces $X$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$.*

*Demostración.* Sea $T$ una $F$-base de $M_0$ que consiste de elementos legibles, entonces $T$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$. Por hipótesis, para cada par de idempotentes $e_i, e_j$ existe una biyección $\phi_{i,j} : T \cap e_iMe_j \to X \cap e_iMe_j$. Sea $\phi_0 : T \to X$ la biyección que extiende las biyecciones $\phi_{i,j}$. Entonces existe un morfismo de $S$-bimódulos $\phi : M \to M$ tal que $\phi(T) = \phi_0(T) = X$. Por lo tanto, $\phi$ es sobreyectiva y como $dim_F M < \infty$ entonces $\phi$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. En consecuencia, $X = \phi(T)$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$. □

**Lema 3.2.** *Sean $T$ y $X$ conjuntos de generadores $Z$-libres de $M$, entonces:*

*(a) Para cada par de idempotentes $e_i, e_j$ sean $T(i,j) = T \cap e_iMe_j$ y $X(i,j) = X \cap e_iMe_j$. Entonces $card(T(i,j)) = card(X(i,j))$.*

*(b) Existe un isomorfismo de $S$-bimódulos $\phi : M \to M$ tal que $\phi(T) = X$.*

*Demostración.* Sean $M_0$ y $N_0$ los $Z$-subbimódulos de $M$ generados por $T$ y $X$, respectivamente. Entonces $M \cong S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \cong S \otimes_Z N_0 \otimes_Z S$. Para cada $e_i, e_j$ se tiene:

$$dim_F e_iMe_j = dim_F(e_iS \otimes_F e_iM_0e_j \otimes_F Se_j) = d_id_j dim_F e_iM_0e_j$$

donde $d_s = dim_F e_sS$ para $s = i, j$. Similarmente, tenemos que:

$$dim_F e_iMe_j = d_id_j dim_F e_iN_0e_j$$

En consecuencia, $card(T(i,j)) = dim_F e_iM_0e_j = dim_F e_iN_0e_j = card(X(i,j))$. Aplicando la Proposición 3.6 se obtiene que existe un isomorfismo de $S$-bimódulos $\phi : M \to M$ tal que $\phi(T) = X$. □

**Definición 3.8.** Sea $L$ una $Z$-base local de $S$ y $T$ una $Z$-base local del $Z$-subbimódulo $M_0$. Entonces $\hat{T} = \{sa | s \in L(\sigma(a)), a \in T\}$, donde $e_{\sigma(a)}ae_{\tau(a)} = a$, es una $S$-base local derecha de $M$. En este caso diremos que $\hat{T}$ es una *base especial* de $M$ como $S$-módulo derecho.

# Capítulo 4

# Derivaciones

En este capítulo se construye una derivación cíclica, en el sentido de [23], en el álgebra $\mathcal{F}_S(M)$. A diferencia de la construcción dada en [10, p.69] no se requiere considerar el espacio $\prod_{d,l\geq 0}(M^{\otimes d}\otimes_F M^{\otimes l})$. La motivación para construir una derivación cíclica es para definir un ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M)$, análogo al ideal Jacobiano definido en [10]. Este ideal será estudiado con mayor detalle en el Capítulo 5.

**Definición 4.1.** Sea $A$ una $F$-álgebra asociativa unitaria. Una $F$-derivación de $A$ en un $A$-bimódulo $W$ es una $F$-transformación lineal $D : A \to W$ tal que $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ para todo $a, b \in A$.

**Definición 4.2.** Una derivación cíclica en $A$, en el sentido de Rota-Sagan-Stein [23], es una $F$-transformación lineal $h : A \to End_F(A)$ tal que:

$$h(a_1a_2)(a) = h(a_1)(a_2a) + h(a_2)(aa_1)$$

para todo $a_1, a_2, a \in A$.

**Ejemplo 4.1.** *Supongamos que $A$ es una $F$-álgebra conmutativa y $D : A \to A$ es una $F$-derivación. Entonces $h^D : A \to End_F(A)$ dada por $h^D(a)(b) = D(a)b$, es una derivación cíclica.*

**Definición 4.3.** Sea $A$ una $F$-álgebra asociativa unitaria. Dada una derivación cíclica $h : A \to End_F(A)$ definimos la derivada cíclica asociada como $\delta^h(a) = h(a)(1)$.

Entonces:

$$\delta^h(a_1a_2) = h(a_1)(a_2) + h(a_2)(a_1)$$

en particular $\delta^h(a_1a_2) = \delta^h(a_2a_1)$.

Una manera de construir una derivación cíclica es la siguiente: supongamos que $D : A \to W$ es una $F$-derivación donde $W$ es un $A$-bimódulo y $u : W \to A$ es una $F$-transformación lineal tal que $u(aw) = u(wa)$ para toda $a \in A$, $w \in W$. Entonces $h^D : A \to End_F(A)$ dada por $h^D(a)(b) = u(D(a)b)$ con $a, b \in A$ es una derivación cíclica y la correspondiente derivada cíclica $\delta$ está dada por $\delta(a) = u(D(a))$.

Supongamos que $S, M_0$ y $M$ son como en la Definición 3.4. Sean $A = T_S(M)$ y $W = A \otimes_Z A$. Existe una $F$-derivación $\Delta : A \to W$ tal que para $s \in S$, $\Delta(s) = 1 \otimes s - s \otimes 1$ y para $m \in M_0$, $\Delta(m) = 1 \otimes m$.

El morfismo $u : W \to A$ se construye de la siguiente manera. Sean $a, b \in T_S(M)$, entonces la función $\psi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} e_ibae_i$, es bilineal. Veamos que es $Z$-balanceada. Sea $s = e_ic \in Z$, donde $c \in F$, entonces $\psi(as, b) = \sum_j e_jbase_j = e_ibace_i = ce_ibae_i$.

Por otro lado:

$$\psi(a, sb) = \sum_j e_j sbae_j = ce_ibae_i = \psi(as, b)$$

Así que existe un morfismo $u : W \to A$ tal que $u(a \otimes b) = \psi(a, b)$. Es claro que si $w \in W$ y $a \in A$ entonces $u(aw) = u(wa)$. Por lo tanto, existe una derivación cíclica $h$ en $A$ tal que $h(a)(b) = u(\Delta(a)b)$ y $\delta(a) = u(\Delta(a))$.
En el resto del trabajo usaremos la siguiente notación, si $w \in W$ y $a \in A$ pondremos $w\Diamond a := u(wa)$. Entonces $h(a)(b) = \Delta(a)\Diamond b$. Ahora extendamos $h : T_S(M) \to \mathrm{End}_F(T_S(M))$ a una $F$-transformación lineal, la cual por abuso de notación denotaremos también por $h$:

$$h : \mathcal{F}_S(M) \to \mathrm{End}_F(\mathcal{F}_S(M))$$

como sigue: para cada $f, g \in \mathcal{F}_S(M)$ con $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$, $f_i, g_i \in M^{\otimes i}$, definimos

$$h(f)(g) = \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=s} h(f_i)(g_j) \right)$$

En lo que sigue, dados $a, b, f \in \mathcal{F}_S(M)$, $[a, b]$ denota el conmutador $ab - ba$ y $f_{cyc} = \sum_{i=1}^{n} e_i f e_i$.

**Proposición 4.1.** *Para cada $f, f_1, f_2, g \in \mathcal{F}_S(M)$ se tiene*

*(i)* $h(f_1 f_2)(g) = h(f_1)(f_2 g) + h(f_2)(g f_1)$.

*(ii) Si la sucesión $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ es sumable, entonces las sucesiones $\{h(u_i)(g)\}_i, \{h(f)(u_i)\}_i$ también son sumables y*

$$\sum_{i=0}^{\infty} h(u_i)(g) = h\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right)(g)$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} h(f)(u_i) = h(f)\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right)$$

*(iii) Si $s \in S$, entonces*

$$h(sf)(g) = h(f)(gs) + [s, fg]_{cyc}$$
$$h(fs)(g) = h(f)(sg) + [s, gf]_{cyc}$$

*Demostración.* (i) Supongamos que $f_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (f_1)_i$, $f_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (f_2)_i$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$ donde $(f_1)_i, (f_2)_i, g_i \in M^{\otimes i}$. Entonces

$$\begin{aligned}
h(f_1 f_2)(g) &= \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=s} h\left((f_1 f_2)_i\right)(g_j) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i+j=s} \sum_{l+m=i} h\left((f_1)_l (f_2)_m\right)(g_j) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l+m+j=s} \left( h((f_1)_l)\left((f_2)_m (g_j)\right) + h((f_2)_m)(g_j (f_1)_l) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l+u=s} h((f_1)_l) \left( \sum_{m+j=u} (f_2)_m g_j \right) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m+v=s} h((f_2)_m) \left( \sum_{j+l=v} g_j (f_1)_l \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l+u=s} h((f_1)_l\left((f_2 g_j)_u\right) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m+v=s} h((f_2)_m)\left((g f_1)_v\right) \\
&= h(f_1)(f_2 g) + h(f_2)(g f_1)
\end{aligned}$$

(ii) Como la sucesión $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sumable, entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} u_i$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right)(g) &= h\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} u_i\right)(g) \\ &= \lim_{n\to\infty} h\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)(g) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} h(u_i)(g) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} h(u_i)(g) \end{aligned}$$

La otra identidad se prueba de manera análoga.

(iii) Supongamos primero que $f, g \in T_S(M)$, entonces

$$\begin{aligned} h(sf)(g) &= \Delta(sf)\Diamond g = \Delta(s)f\Diamond g + s\Delta(f)\Diamond g \\ &= \Delta(f)\Diamond gs + (1\otimes s - s\otimes 1)\Diamond fg \\ &= h(f)(gs) + (sfg)_{cyc} - (fgs)_{cyc} \\ &= h(f)(gs) + [s, fg]_{cyc} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$ donde $f_i, g_i \in M^{\otimes i}$. Entonces

$$\begin{aligned} h(sf)(g) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{u+v=i} h(sf_u)g(v) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{u+v=i} h(f_u)g(v_s s) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{u+v=i} [s, f_u g_v]_{cyc} \\ &= h(f)(gs) + [s, fg]_{cyc} \end{aligned}$$

El otro caso se puede probar de manera similar. $\square$

**Corolario 4.1.** *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_l, g \in \mathcal{F}_S(M)$, entonces:*

$$h(f_1 f_2 \ldots f_l)(g) = h(f_1)(f_2 \ldots f_l g) + h(f_2)(f_3 \ldots f_l g f_1) + \ldots + h(f_l)(g f_1 \ldots f_{l-1})$$

*Demostración.* El caso $l = 2$ se sigue de la proposición anterior. Supongamos ahora que el resultado se cumple para $l-1$ y probemos que se cumple para $l$. Se tiene

$$\begin{aligned} h(f_1 f_2 \ldots f_{l-2}(f_{l-1} f_l))(g) &= h(f_1)(f_2 \ldots f_{l-1} f_l g) + \ldots + h(f_{l-2})(f_{l-1} f_l g f_1 \ldots f_{l-3}) + h(f_{l-1} f_l)(g f_1 \ldots f_{l-2}) \\ &= h(f_1)(f_2 \ldots f_{l-1} f_l g) + \ldots + h(f_{l-2})(f_{l-1} f_l g f_1 \ldots f_{l-3}) + h(f_{l-1})(f_l g f_1 \ldots f_{l-2}) + h(f_l)(g f_1 \ldots f_{l-1}) \end{aligned}$$

$\square$

**Corolario 4.2.** *Si $f = m_1 m_2 \ldots m_l$ donde $m_i \in SM_0$ y $\alpha \in \mathcal{F}_S(M)$, entonces*

$$h(f)(\alpha) = (m_1 m_2 \ldots m_l \alpha + m_2 \ldots m_l \alpha m_1 + \ldots + m_l \alpha m_1 \ldots m_{l-1})_{cyc}$$

*Demostración.* Notemos primero que para $m \in SM_0$ y $\beta \in \mathcal{F}_S(M)$, donde $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i$, se tiene

$$\begin{aligned} h(m)(\beta) &= \sum_{i=0}^{\infty} h(m)(\beta_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Delta(m) \Diamond \beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 \otimes m) \Diamond \beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (m\beta_i)_{cyc} \\ &= (m\beta)_{cyc} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} h(m_1 m_2 \dots m_l)(\alpha) &= h(m_1)(m_2 \dots m_l \alpha) + h(m_2)(m_3 \dots m_l \alpha m_1) + \dots + h(m_l)(\alpha m_1 \dots m_{l-1}) \\ &= (m_1 m_2 \dots m_l \alpha)_{cyc} + (m_2 \dots m_l \alpha m_1)_{cyc} + \dots + (m_l \alpha m_1 \dots m_{l-1})_{cyc} \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. □

**Definición 4.4.** Para cada $f \in \mathcal{F}_S(M)$, definimos

$$\delta(f) = h(f)(1)$$

**Proposición 4.2.** *Sean $f_1, \dots, f_l \in F_S(M)$, entonces*

$$\delta(f_1 f_2 \dots f_l) = h(f_1)(f_2 \dots f_l) + h(f_2)(f_3 \dots f_l f_1) + \dots + h(f_l)(f_1 \dots f_{l-1})$$

*Demostración.* Se sigue del Corolario 4.2. □

Notemos que si $f \in \mathcal{F}_S(M)$ entonces $\delta(f) = \sum_{i,j} \delta(e_i f e_j) = \sum_i \delta(e_i f e_i) = \delta(f_{cyc})$.

**Definición 4.5.** Dado un $S$-bimódulo $N$, definimos la parte cíclica de $N$ como $N_{cyc} := \sum_{j=1}^{n} e_j N e_j$.

**Proposición 4.3.** *Sean $m_1, \dots, m_l$ elementos legibles de $SM_0$ tales que $0 \neq m_1 \dots m_l \in (T_S(M))_{cyc}$, entonces:*

$$\delta(m_1 m_2 \dots m_l) = m_1 m_2 \dots m_l + m_2 \dots m_l m_1 + \dots + m_l m_1 \dots m_{l-1}$$

*Demostración.* Como $m_1 m_2 \dots m_l$ es un ciclo, entonces:

$$m_1 = e_{r(1)} m_1 e_{r(2)},\ m_2 = e_{r(2)} m_2 e_{r(3)}, \dots,\ m_l = e_{r(l)} m_l e_{r(1)}$$

Luego

$$\begin{aligned} \delta(m_1 m_2 \dots m_l) &= \Delta(m_1 m_2 \dots m_l) \Diamond 1 \\ &= (\Delta(m_1) m_2 \dots m_l + m_1 \Delta(m_2) m_3 \dots m_l + \dots + m_1 \dots m_{l-1} \Delta(m_l)) \Diamond 1 \\ &= ((1 \otimes m_1) m_2 \dots m_l + m_l (1 \otimes m_2) m_3 \dots m_l + \dots + m_1 \dots m_{l-1} (1 \otimes m_l)) \Diamond 1 \end{aligned}$$

por ende

$$(1 \otimes m_1) m_2 \dots m_l \Diamond 1 = \sum_i e_i m_1 m_2 \dots m_l e_i = m_1 m_2 \dots m_l$$

$$m_1 (1 \otimes m_2) m_3 \dots m_l \Diamond 1 = \sum_i e_i m_2 \dots m_l m_1 e_i = m_2 \dots m_l m_1$$

En general:

$$m_1 \dots m_{i-1}(1 \otimes m_i)m_{i+1} \dots m_l \Diamond 1 = \sum_i e_i m_i m_{i+1} \dots m_l m_1 \dots m_{i-1} e_i$$
$$= m_i \dots m_l m_1 \dots m_{i-1}$$

lo que prueba el resultado. □

**Definición 4.6.** Sea $\psi$ un elemento de $M^* = \mathrm{Hom}_S(M_S, S_S)$. Para cada $m_1, \dots, m_d \in M$ definimos $\psi_*(m_1 \dots m_d) = \psi(m_1)m_2 \dots m_d$ y extendemos $\psi_*$ a una $F$-transformación lineal:

$$\psi_* : T_S(M) \to T_S(M)$$

declarando $\psi_*(s) = 0$ para cada $s \in S$. Ahora extendemos $\psi_*$ a una $F$-transformación lineal $\psi_* : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ como sigue

$$\psi_*(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_*(f_i)$$

donde $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ y $f_i \in M^{\otimes i}$.

**Definición 4.7.** Si $\psi \in \mathrm{Hom}_S(M_S, S_S)$ y $f \in \mathcal{F}_S(M)$, entonces la derivada cíclica de $f$, con respecto a $\psi$, se define como:

$$\delta_\psi(f) := \psi_*(\delta(f))$$

Notar que $\delta_\psi(f) = \delta_\psi(f_{cyc})$.

**Observación 4.1.** (i) $\delta_\psi(f_1 f_2 \dots f_l) = \psi_*(h(f_1)(f_2 \dots f_l)) + \dots + \psi_*(h(f_l)(f_1 \dots f_{l-1}))$

(ii) Si $m_1, \dots, m_d$ son elementos legibles de $SM_0$ y $m_1 \dots m_d$ es un elemento no-cero de $(T_S(M))_{cyc}$ con $\delta(m_1 \dots m_d) \neq 0$, entonces

$$\delta_\psi(m_1 m_2 \dots m_d) = \psi(m_1)m_2 \dots m_d + \psi(m_2)m_3 \dots m_1 + \dots + \psi(m_d)m_1 \dots m_{d-1}$$

*Demostración.* (i) Esto se sigue de la Proposición 4.2.
(ii) Se sigue de (i) al notar que para $\alpha \in T_S(M)$, $h(m_i)(\alpha) = \Delta(m_i)\Diamond\alpha = (m_i\alpha)_{cyc}$. □

Sea $T$ una $Z$-base local de $SM_0$, entonces $T$ es una $S$-base local derecha de $M_S$. Sea $\{u, u^*\}_{u \in T}$ la correspondiente base dual.

**Observación 4.2.** Cada $m \in M$ satisface:

$$m = \sum_{u \in T} u u^*(m)$$

además $m \in SM_0$ si y solamente si para $u \in T$, $u^*(m) \in Z$.

**Definición 4.8.** Un potencial $P$ es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)_{cyc}$.

**Proposición 4.4.** *Sea $M'$ un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado. Supongamos que $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ es un isomorfismo de álgebras con $\phi|_S = id_S$. Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces*

$$\delta(\phi(P)) = \sum_{u \in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*} P))$$

*Demostración.* (1) Supongamos primero que $P$ es de la forma $m_1 \dots m_d$ donde $m_i \in SM_0$. Entonces

$$\delta(\phi(P)) = \delta(\phi(m_1)\dots\phi(m_d)) = h(\phi(m_1))(\phi(m_2)\dots\phi(m_d)) + \dots + h(\phi(m_d))(\phi(m_1)\dots\phi(m_{d-1}))$$

Sea $\{u, u^*\}_{u\in T}$ la correspondiente base dual como en la Observación 4.2. Como $m_i \in SM_0$, entonces $u^*(m_i) \in Z$. Por lo tanto

$$h(\phi(m_i))(\phi(m_{i+1})\dots\phi(m_d)\dots\phi(m_{i-1})) = \sum_{u\in T} h(\phi(u)u^*(m_i))(\phi(m_{i+1})\dots\phi(m_d)\dots\phi(m_{i-1}))$$

luego por (iii) de la Proposición 4.1 se tiene

$$h(\phi(m_i))(\phi(m_{i+1})\dots\phi(m_d)\dots\phi(m_{i-1})) = \sum_{u\in T} h(\phi(u))(u^*(m_i)\phi(m_{i+1})\dots\phi(m_d)\dots\phi(m_{i-1}))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta(\phi(P)) &= \sum_{u\in T} h(\phi(u))\left(\phi\left(\sum_i u^*(m_i)m_{i+1}\dots m_1\dots m_{i-1}\right)\right)\\ &= \sum_{u\in T} h(\phi(u))\left(\phi(\delta_{u^*}(P))\right)\end{aligned}$$

(2) Supongamos ahora que $P$ es de la forma $P = Qt$ donde $Q$ es un potencial como en (1) y $t \in S$. Entonces $tQ$ también tiene la forma de (1). Por lo tanto

$$\delta(\phi(Qt)) = \delta(\phi(Q)t) = \delta(t\phi(Q)) = \sum_{u\in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*}(tQ))) = \sum_{u\in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*}(Qt)))$$

(3) Supongamos ahora que $P \in M^{\otimes i}$. En este caso $P = \sum_v Q_v$ es una suma finita de elementos $Q_v$ como en (2). Por lo tanto

$$\delta(\phi(P)) = \sum_v \delta(\phi(Q_v)) = \sum_v\sum_{u\in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*}(Q_v))) = \sum_{u\in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*}P))$$

(4) Finalmente, supongamos que $P = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ donde $P_i \in M^{\otimes i}$. Entonces

$$\begin{aligned}\delta(\phi(P)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta(\phi(P_i))\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{u\in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*}P_i))\\ &= \sum_{u\in T} h(\phi(u))\left(\sum_{i=0}^{\infty}\phi(\delta_{u^*}P_i)\right)\\ &= \sum_{u\in T} h(\phi(u))(\phi(\delta_{u^*}P))\end{aligned}$$

como se quería mostrar. □

**Definición 4.9.** Se define el conmutador $[\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$ como la cerradura del $F$-espacio vectorial generado por todos los elementos de la forma $ab - ba$ donde $a, b \in \mathcal{F}_S(M)$.

**Definición 4.10.** Diremos que dos potenciales $P$ y $P'$ de $\mathcal{F}_S(M)$ son cíclicamente equivalentes si $P - P' \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$.

**Definición 4.11.** Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Diremos que $P$ es reducido si $P \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 3}$ y cuadrático si cada sumando de $P$ pertenece a $(M^{\otimes 2})_{cyc}$.

**Definición 4.12.** Sean $A$ y $B$ subconjuntos de $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $AB$ es la cerradura del conjunto formado por todas las sumas finitas de la forma $\sum_s a_s b_s$ donde $a_s \in A$ y $b_s \in B$.

**Definición 4.13.** Sea $T$ una $Z$-base local del $Z$-subbimódulo $M_0$. Diremos que una función $b : T \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ es legible si para cada $a \in e_i M e_j \cap T$ se tiene $b(a) \in e_i \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2} e_j$.

Recordemos que una función legible induce un morfismo de $S$-bimódulos $b : M \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ y un automorfismo de álgebras $\phi_b : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ tal que para cada $a \in T$, $\phi_b(a) = a + b(a)$.

El siguiente lema sigue la línea de razonamiento dada en [10, Lemma 4.11].

**Lema 4.1.** *Sea $Q$ un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M)$ y sea $\phi$ un automorfismo de $\mathcal{F}_S(M)$ dado como arriba. Entonces el potencial $\phi(Q) - Q - \sum_{c \in \hat{T}} s(c) b_{a(c)} \delta_c(Q)$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} I^2$, donde $I$ denota la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M)$ generado por el conjunto $\{b(a)\}_{a \in T}$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $Q = c_1 \dots c_d$ donde $c_i \in \hat{T}$. Para cada $c_i = s(c_i)a(c_i)$ se tiene

$$\phi(c_i) = c_i + s(c_i) b(a(c_i))$$

Entonces

$$\phi(Q) = c_1 \dots c_d + s(c_1)b(a(c_1))c_2 \dots c_d + c_1 s(c_2) b(a(c_2)) c_3 \dots c_d + \dots + c_1 \dots c_{d-1} s(c_d) b(a(c_d)) + \mu$$

donde $\mu$ es un producto de la forma $x_1 \dots x_d$, cada $x_i$ pertenece a $\{c_1, \dots, c_d, s(c_1)b(a(c_1)), \dots, s(c_d)b(a(c_d))\}$ y existen $x_i, x_j$, $i \neq j$, pertenecientes a $\{s(c_1)b(a(c_1)), \dots, s(c_d)b(a(c_d))\}$. Entonces

$$s(c_1)b(a(c_1))c_2 \dots c_d + c_1 s(c_2) b(a(c_2)) c_3 \dots c_d + \dots + c_1 \dots c_{d-1} s(c_d) b(a(c_d))$$

es cíclicamente equivalente a

$$s(c_1)b(a(c_1))c_2 \dots c_d + s(c_2)b(a(c_2))c_3 \dots c_d c_1 + \dots + s(c_d)b(a(c_d))c_1 \dots c_{d-1}$$

y este último elemento es cíclicamente equivalente a $\sum_{i=1}^{d} s(c_i) b(a(c_i)) \delta_{c_i}(Q)$. Cada uno de los términos $x_1 \dots x_d$ es cíclicamente equivalente a un elemento de la forma $\alpha_1 b(a(c_u)) \alpha_2 b(a(c_v))$ con $\alpha_1$ un producto de al menos un $x_s$. Así que el elemento en cuestión es cíclicamente equivalente a

$$x_s \alpha^{'} b(a(c_u)) \alpha_2 b(a(c_v))$$

El elemento $\alpha' b(a(c_u)) \alpha_2$ pertenece a $I$ y es el producto de $d-2$ elementos $x_j$, uno de ellos es $x_j = b(a(c_u)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$; entonces $\alpha^{'} b(a_u) \in I \cap \mathcal{F}_S(M)^{\geq d+1}$. Se sigue que:

$$\phi(Q) = Q + \sum_{i=1}^{d} s(c_i) b(a_i) \delta_{c_i}(Q) + \sum_{i=1}^{d} \nu_i b(a(c_i)) + z$$

donde $\nu_i \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}(\mathcal{F}_S(M)^{\geq d-1} \cap I)$ y $z \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)] \cap \mathcal{F}_S(M)^{\geq d+1}$.

Supongamos ahora que $Q$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces $Q = \sum_{s=2}^{\infty} Q_s$, con $Q_s \in M^{\otimes s}$; cada término $Q_s$ es una suma finita de elementos de la forma $m_1 m_2 \dots m_s$ donde $m_i \in M$ y cada $m_i$ es una suma finita de elementos de la forma $n_i t_i$ con $n_i \in SM_0$, $t_i \in S$. Por lo tanto cada $Q_s$ es una suma de elementos de la forma $n_1 t_1 n_2 t_2 \dots n_s t_s$ y este elemento es cíclicamente equivalente a $(t_s n_1)(t_1 n_2) \dots (t_{s-1} n_s)$ donde $t_i n_{i+1} \in SM_0$. Como $\hat{T}$ es una $Z$-base local de $SM_0$, entonces cada uno de estos elementos es una suma finita de elementos de la forma $hc_1 \dots c_s$ con $h \in F$ y $c_i \in \hat{T}$. Por lo tanto, podemos asumir que $Q = \sum_{j=2}^{\infty} h_{\gamma_j} \gamma_j$ donde $h_{\gamma_j} \in F$ y $\gamma_j = c_1 c_2 \dots c_{d_j}$, $c_i \in \hat{T}$. Pongamos $l(\gamma_j) = d_j$. Como $\phi$ es continuo, entonces

$$\phi(Q) = \sum_{\gamma_j} h_{\gamma_j} \phi(\gamma_j)$$

luego

$$\phi(\gamma_j) = \gamma_j + \sum_i s(c_i) b(a(c_i)) \delta_{c_i}(Q) \gamma_j + \sum_{a \in T} \mu(\gamma_j)_a b(a) + z(\gamma_j)$$

donde $\mu(\gamma_j)_a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}(\mathcal{F}_S(M)^{l(\gamma_j)-1} \cap I)$ y $z(\gamma_j) \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)] \cap \mathcal{F}_S(M)^{\geq l(\gamma_j)+1}$. Se sigue que

$$\mu(\gamma_j)_a = \sum_{c \in \hat{T}} c \beta(\gamma_j)_{c,a}$$

con $\beta(\gamma_j)_{c,a} \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq l(\gamma_j)-1} \cap I$. La serie $\displaystyle\sum_{\gamma_j} \beta_{c,a}(\gamma_j)$ es sumable, cada $\beta_{c,a}(\gamma_j) \in I$ y como $I$ es cerrado entonces $\displaystyle\sum_{\gamma_j} \beta_{c,a}(\gamma_j) \in I$. También la serie $\displaystyle\sum_{\gamma_j} z(\gamma_j)$ es sumable y pertenece a $[\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. En consecuencia

$$\phi(Q) = Q + \sum_{c \in \hat{T}} s(c) b(a(c)) \delta_c(Q) + \sum_{c \in \hat{T}, a \in T} c \left( \sum_{\gamma} \beta_{c,a}(\gamma) \right) b(a) + \sum_{\gamma} z(\gamma)$$

el segundo sumando de la expresión anterior pertenece a $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} I^2$ y el último sumando pertenece a $[\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. Esto termina la demostración. $\square$

# Capítulo 5

# El ideal $R(P)$

Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. En este capítulo definimos $R(P)$, un ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M)$, el cual es invariante bajo isomorfismos de álgebras que fijan $S$; esto es, dado cualquier isomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$, con $\phi|_S = id_S$, entonces $\phi(R(P)) = R(\phi(P))$. Se verá que este ideal coincide con el ideal Jacobiano usual en el sentido de [10].

También en el Apéndice se prueba que $R(P)$ coincide con el ideal Jacobiano en el sentido de [9] y de [18].

Sea $L$ una $Z$-base local de $S$ y $T$ una $Z$-base local de $M_0$. Para cada $a \in e_iMe_j$ pongamos $\sigma(a) = i$ y $\tau(a) = j$.

**Definición 5.1.** Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $R(P)$ es la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M)$ generado por todos los elementos $X_{a^*}(P) := \displaystyle\sum_{s\in L(\sigma(a))} \delta_{(sa)^*}(P)s$ donde $a \in T$. En lo que sigue, $\hat{T}$ denotará la base especial de $M_S$ inducida por la $Z$-base local $T$ de $M_0$.

**Ejemplo 5.1.** *Consideremos el potencial $P = x_1x_2\dots x_n \in (M^{\otimes n})_{cyc}$, donde cada $x_i \in \hat{T}$, entonces:*

$$X_{a^*}(P) = x_2\dots x_n s(x_1)\delta_{a(x_1),a} + x_3\dots x_n x_1 s(x_2)\delta_{a(x_2),a} + \dots + x_1\dots x_{n-1}s(x_n)\delta_{a(x_n),a}$$

*Si además $t_1,\dots,t_n \in S$ y $Q = t_1x_1t_2x_2\dots t_nx_n$, entonces:*

$$X_{a^*}(Q) = t_2x_2\dots t_nx_nt_1s(x_1)\delta_{a(x_1),a} + \dots + t_1x_1\dots t_{n-1}x_{n-1}t_ns(x_n)\delta_{a(x_n),a}$$

*Demostración.* Probaremos que la segunda igualdad se cumple ya que la primera es consecuencia de la segunda. Se tiene:

$$\begin{aligned} X_{a^*}(Q) &= \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)^*_*(\delta(Q))s \\ &= \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)^*_*(t_1x_1t_2x_2\dots t_nx_n + t_2x_2\dots t_nx_nt_1x_1 + \dots + t_nx_nt_1x_1\dots t_{n-1}x_{n-1})s \end{aligned}$$

El i-ésimo término de la suma anterior es $\displaystyle\sum_s (sa)^*_*(t_ix_it_{i+1}x_{i+1}\dots t_nx_nt_1x_1\dots t_{i-1}x_{i-1})s = \sum_s (sa)^*(t_ix_i)qs$ donde $q = t_{i+1}x_{i+1}\dots t_nx_nt_1x_1\dots t_{i-1}x_{i-1}$. Como $x_i \in \hat{T}$, entonces $x_i = rb$ donde $r = s(x_i)$, $b = a(x_i)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_s (sa)^*(t_ix_i)qs = \sum_s (sa)^*(t_irb)qs &= \sum_s (sa)^* \sum_w (w^*(t_ir)wb)qs \\ &= \sum_s s^*(t_ir)qs\delta_{b,a} \\ &= \sum_s qs^*(t_ir)s\delta_{b,a} \\ &= qt_ir\delta_{b,a} \\ &= qt_is(x_i)\delta_{b,a} \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. $\square$

En el caso de [10] se tiene que $D_i = F$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y entonces cada base $L(i)$ consta del elemento identidad $1 \in F$. Además como $S = F^n$ entonces $e_i M^* e_j \cong \mathrm{Hom}_F(e_j M_0 e_i, F)$. En este contexto $M_0 = M$ es el $F$-espacio vectorial generado por todas las flechas del carcaj. Así que $X_{a^*}(P) = \sum_{s \in L} \delta_{(sa)^*}(P)s = \partial_{a^*}(P)$ para cada flecha $a$. De esto se infiere que $R(P)$ coincide con el ideal Jacobiano definido en [10, p.67].

Notemos que $X_{a^*}(P)$ está dado en términos de $L$ y $T$. Supongamos que ahora tomamos otra $Z$-base local $L'$ de $S$ y la misma $Z$-base local $T$ de $M_0$, entonces se tiene otra base especial para $M_S$, la cual se denotará por $(\hat{T})'$. Para $s \in L(u)$ se tiene:

$$s = \sum_{s' \in L'} c_{s,s'} s'$$

con $c_{s,s'} \in F$ y $c_{s,s'} \neq 0$ implica $s' \in L(u)$. Para cada $a \in T$ se tiene $X_{(a^*)'}(P)$ usando la $Z$-base local $L'$ de $S$.

Veamos que $X_{a^*}(P)$ es independiente de la elección de una $Z$-base local para $S$.

**Proposición 5.1.** *Para cada potencial $P$ de $\mathcal{F}_S(M)$, $X_{a^*}(P) = X_{(a^*)'}(P)$.*

*Demostración.* Para $x \in \hat{T}$ se tiene $x = s(x)a(x) = \sum_{s' \in L'} c_{s(x),s'} s' a(x)$. En consecuencia:

$$x = \sum_{y \in (\hat{T})'} c_{x,y} y$$

donde $c_{x,y} \in F$ y $c_{x,y} = c_{s(x),s'(y)}$. Notemos que $c_{x,y} \neq 0$ implica que $a(x) = a(y)$. Entonces si $P = t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_n x_n$ con $t_i \in S$ y $x_i \in \hat{T}$, se tiene:

$$P = \sum_{i_1, \ldots, i_n} c_{x_1, y_{i_1}} c_{x_2, y_{i_2}} \ldots c_{x_n, y_{i_n}} t_1 y_{i_1} t_2 y_{i_2} \ldots t_n y_{i_n}$$

donde $y_{i_1}, \ldots, y_{i_n} \in (\hat{T})'$. Por el Ejemplo 5.1, $X_{(a^*)'}(P)$ es igual a:

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} c_{x_1, y_{i_1}} c_{x_2, y_{i_2}} \ldots c_{x_n, y_{i_n}} \left( t_2 y_{i_2} \ldots t_n y_{i_n} t_1 s'(y_{i_1}) \delta_{a(y_{i_1}),a} + \ldots + t_1 y_{i_1} \ldots t_{n-1} y_{i_{n-1}} t_n s'(y_{i_n}) \delta_{a(y_{i_n}),a} \right)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} c_{x_1, y_{i_1}} c_{x_2, y_{i_2}} \ldots c_{x_n, y_{i_n}} t_2 y_{i_2} \ldots t_n y_{i_n} t_1 s'(y_{i_1}) \delta_{a(y_{i_1}),a} \\
&= \sum_{i_2, \ldots, i_n} c_{x_2, y_{i_2}} \ldots c_{x_n, y_{i_n}} t_2 y_{i_2} \ldots t_n y_{i_n} t_1 \sum_{i_1} c_{x_1, y_{i_1}} s'(y_{i_1}) \delta_{a(y_{i_1}),a} \\
&= \sum_{i_2, \ldots, i_n} c_{x_2, y_{i_2}} \ldots c_{x_n, y_{i_n}} t_2 y_{i_2} \ldots t_n y_{i_n} t_1 s(x_1) \delta_{a(x_1),a} \\
&= t_2 x_2 \ldots t_n x_n t_1 s(x_1) \delta_{a(x_1),a}
\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} c_{x_1, y_{i_1}} c_{x_2, y_{i_2}} \ldots c_{x_n, y_{i_n}} t_3 y_{i_3} \ldots t_n y_{i_n} t_1 y_{i_1} t_2 s'(y_{i_2}) \delta_{a(y_{i_2}),a} = t_3 x_3 \ldots t_n x_n t_1 x_1 t_2 s(x_2) \delta_{a(x_2),a}$$

continuando de esta manera se obtiene que $X_{a^*}(P) = X_{(a^*)'}(P)$. $\square$

**Lema 5.1.** *Sea $q \in (\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1})_{cyc}$ y $t \in S$, entonces para cada $a \in T$:*

$$\sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(tq-qt)s = 0$$

*Demostración.* Supongamos que $q = raq_1$ donde $r \in S$ y $q_1 \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(traq_1)s &= \sum_{s,w\in L(\sigma(a))} (sa)^*(w^*(tr)wa)q_1 s\\ &= \sum_{s\in L(\sigma(a))} s^*(tr)q_1 s\\ &= \sum_{s\in L(\sigma(a))} q_1 s^*(tr)s\\ &= q_1 tr\end{aligned}$$

Por otro lado, $\sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)^*(qt)s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)^*(ra)q_1ts = q_1tr$. Esto completa la prueba del lema. □

El siguiente teorema muestra que el ideal $R(P)$ se preserva bajo isomorfismos de álgebras que fijan a $S$. Este es un resultado análogo al dado en [10, Proposition 3.7] y [18, Proposition 5.5].

**Teorema 5.1.** *Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ un isomorfismo de álgebras con $\phi|_S = id_S$ y $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces:*

$$\phi(R(P)) = R(\phi(P))$$

*Demostración.* Sea $T$ una $Z$-base local de $M_0$. Para cada $a \in T \cap e_iMe_j$ definamos $\hat{L}(a) = \{sa\}_{s\in L(i)}$. Sea $\hat{T} = \bigcup_{a\in T} \hat{L}(a)$; esto es, $\hat{T}$ es la base especial de $M_S$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}X_{a^*}(\phi(P)) &= \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*(\delta(\phi(P)))s(w) = \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{sb\in\hat{T}} h(\phi(sb))\left(\phi(\delta_{(sb)^*}P)\right)\right)s(w)\\ &= \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{sb\in\hat{T}} h(s\phi(b))\left(\phi(\delta_{(sb)^*}P)\right)\right)s(w)\\ &= \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{sb\in\hat{T}} h(\phi(b))(\phi(\delta_{(sb)^*}P)s)\right)s(w) + \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{sb\in\hat{T}} [s,q]_{cyc}\right)s(w)\end{aligned}$$

donde $q = \phi(b\delta_{(sb)^*}P)$ es un elemento cíclico, así que $[s,q]$ también es cíclico. Por lo tanto $[s,q]_{cyc} = [s,q]$. Usando el Lema 5.1 se obtiene que $\sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{sb\in\hat{T}} [s,q]_{cyc}\right)s(w) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}X_{a^*}(\phi(P)) &= \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{sb\in\hat{T}} h(\phi(b))(\phi(\delta_{(sb)^*}P)s)\right)s(w)\\ &= \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{b\in T} h(\phi(b))\right)\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} \phi(\delta_{(sb)^*}P)s\right)s(w)\\ &= \sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{b\in T} h(\phi(b))\right)\left(\phi(X_{b^*}P)\right)s(w)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{b\in T} h(\phi(b)_i)\right)(\phi(X_{b^*}P))s(w)\end{aligned}$$

donde $\phi(b)_i \in M^{\otimes i}$. Tenemos que $\sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{b\in T} h(\phi(b)_i)\right)(\phi(X_{b^*}P))s(w)$ es una suma de elementos de la forma

$$\sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{b\in T} h(m_1\dots m_i t)\right)(\phi(X_{b^*}P))s(w)$$

con $m_i \in SM_0$ y $t \in S$. Entonces por el Corolario 4.2 y Lema 5.1 la suma anterior es igual a

$$\sum_{w\in\hat{L}(a)} w^*\left(\sum_{b\in T} h(m_1\dots m_i)\right)(t\phi(X_{b^*}P))s(w)$$

y a su vez la expresión anterior es igual a

$$\sum_{w\in\hat{L}(a)} \left(w^*(m_1)\dots m_i\alpha + w^*(m_2)\dots m_i\alpha m_1 + \dots + w^*(m_l)\alpha m_1\dots m_{l-1}\right)s(w)$$

donde $\alpha = \phi(tX_{b^*}P)$. Entonces la suma anterior es una suma de elementos de la forma $x\phi(tX_{b^*}(P))y = \phi(x_1tX_{b^*}(P)y_1)$ donde $\phi(x_1) = x$ y $\phi(y_1) = y$. Como $\phi(R(P))$ es cerrado, entonces $X_{a^*}(\phi(P)) \subseteq \phi(R(P))$ y por ello $R(\phi(P)) \subseteq \phi(R(P))$. Aplicando esto a $\phi^{-1}$ se obtiene $R(P) = R(\phi^{-1}(\phi(P))) \subseteq \phi^{-1}(R(P))$. Consecuentemente $\phi(R(P)) \subseteq R(\phi(P))$ y el resultado se sigue. $\square$

**Observación 5.1.** El Teorema 5.1 implica que $R(P)$ no depende de la elección del $Z$-subbimódulo $M_0$ y también de la Proposición 5.1 se deduce que $R(P)$ tampoco depende de la elección de una $Z$-base local para $S$.

# Capítulo 6

# Equivalencia de potenciales

En este capítulo se introducen los conceptos de equivalencia-derecha y potencial trivial, análogos a los dados en [10]. La noción de equivalencia derecha será el concepto que se usará para identificar, salvo permutación e isomorfismo, dos potenciales. Se concluye el capítulo probando que el tomar sumas directas con potenciales triviales no-afecta al álgebra cociente $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$.

**Proposición 6.1.** *Supongamos que $f, g \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ y $fg \in (\mathcal{F}_S(M))_{cyc}$. Para cada $a \in T$ se tiene que*

$$X_{a^*}(fg) = \sum_{s \in L(a)} \delta_{(sa)^*}(fg)s$$

*pertenece a $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}\langle f\rangle + \langle f\rangle \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} + \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}\langle g\rangle + \langle g\rangle \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$.*

*Demostración.* Supongamos que $f = \sum_{i=2}^{\infty} f_i$ con $f_i \in M^{\otimes i}$. Entonces cada $f_i$ es una suma de elementos de la forma $m_1 \ldots m_i t$ con $m_1, \ldots, m_i \in SM_0$ y $t \in S$. Entonces

$$\sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(f)(g))s = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(f_i)(g))s$$

cada $\sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(f_i)(g))s$ es una suma de elementos de la forma

$$\sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(m_1 \ldots m_i t)(g))s = \sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(m_1 \ldots m_i)(tg))s$$

y el último término es igual a

$$\sum_{s \in L(a)} \left((sa)^*(m_1) \ldots m_i(tg) + (sa)^*(m_2) \ldots m_i tgm_1 + \ldots + (sa)^*(m_i)tgm_1 \ldots m_{i-1}\right) s$$

y este elemento pertenece a $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}\langle g\rangle + \langle g\rangle \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Por lo tanto

$$\sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(f)(g))s \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}\langle g\rangle + \langle g\rangle \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}.$$

Similarmente

$$\sum_{s \in L(a)} (sa)^*(h(g)(f))s \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}\langle f\rangle + \langle f\rangle \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$$

□

Las siguientes Proposiciones 6.2 y 6.3 están basadas en [10, Proposition 4.10].

**Proposición 6.2.** *Sean $P$ y $P'$ potenciales reducidos en $\mathcal{F}_S(M)$ tales que $P' - P \in R(P)^2$, entonces $R(P) = R(P')$.*

*Demostración.* Como $P$ es un potencial reducido entonces $X_{a^*}(P) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Se tiene que $R(P)^2$ es la cerradura del conjunto formado por todas las sumas finitas de la forma $\sum_s a_s b_s$ donde $a_s, b_s \in R(P)$. La Proposición 6.1 implica que $X_{a^*}\left(\sum_s a_s b_s\right)$ pertenece a $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}R(P) + R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Si $z \in R(P)^2$, entonces $z = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ donde cada $\alpha_n$ es una suma finita de la forma $\sum_s a_s b_s$ con $a_s, b_s \in R(P)$. Por lo tanto $X_{a^*}(z) = \lim_{n\to\infty} X_{a^*}(\alpha_n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}R(P) + R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Por hipótesis, $P = Q + P'$ donde $Q \in R(P)^2$, y por ello $X_{a^*}(P) = X_{a^*}(Q) + X_{a^*}(P')$. Usando nuevamente la Proposición 6.1 se obtiene que $X_{a^*}(Q) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}R(P) + R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. De lo anterior se infiere que

$$R(P) \subseteq R(P') + \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} + R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$$

Entonces

$$R(P) \subseteq R(P') + R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 2} + \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} + \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}R(P)$$

continuando de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} R(P) &\subseteq R(P') + \sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}_S(M)^{\geq k}R(P)\mathcal{F}_S(M)^{\geq n-k} \\ &\subseteq R(P') + \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \end{aligned}$$

para cada $n$. Por lo tanto $R(P)$ está contenido en la cerradura de $R(P')$ y por ende $R(P) \subseteq R(P')$. Entonces $P - P' \in R(P)^2 \subseteq R(P')^2$ y por ello $P - P' \in R(P')^2$, luego $R(P) = R(P')$. $\square$

**Proposición 6.3.** *Supongamos que $P$ y $P'$ son potenciales reducidos en $\mathcal{F}_S(M)$ tales que $P' - P \in R(P)^2$, entonces existe un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$ y $\phi(u) - u \in R(P)$ para cada $u \in \mathcal{F}_S(M)$.*

*Demostración.* Primero probemos la siguiente

**Afirmación 6.1.** *Existe una sucesión de funciones $b_n : T \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2} \cap R(P)$, con $\phi_{b_0} = \phi_0 = id$, que satisface las siguientes condiciones:*

*(i)* $b_n(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1} \cap R(P)$.

*(ii)* $P'$ *es cíclicamente equivalente a* $\phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_{n-1}}\left(P + \sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_n(a(c))\delta_{c^*}(P)\right)$.

Construiremos las funciones $b_n$ mediante inducción en $n$.

Supongamos primero que $n = 1$. Entonces el potencial $P' - P$ es cíclicamente equivalente a $\sum_{a\in T} b(a)X_{a^*}(P)$ con $b(a) \in R(P) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ (ya que $P$ es reducido). Por lo tanto $b(a) \in R(P) \cap \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Entonces $P'$ es cíclicamente equivalente a:

$$P + \sum_{a\in T}\sum_{s\in L(a)} b(a)\delta_{(sa)^*}(P)s$$

este último elemento es cíclicamente equivalente a:

$$P + \sum_{a\in T}\sum_{s\in L(a)} sb(a)\delta_{(sa)^*}(P) = P + \sum_{c\in\hat{T}} s(c)b(a(c))\delta_{c^*}(P)$$

Así que $b_1 : T \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ dada por $b_1(a) = b(a)$ satisface (i) y (ii). Supongamos ahora que para $n \geq 1$, hemos construido las funciones $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que cumplen (i) y (ii). Consideremos $\phi_{b_n}$, se tiene $\phi_{b_n}(a) = a + b_n(a)$ y $b_n(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1} \cap R(P)$ para toda $a \in T$.

Por el Lema 4.1, el potencial $P_0 := \phi_{b_n}(P) - P - \sum_{c \in \hat{T}} s(c) b_n(a(c)) \delta_{c^*}(P)$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} I^2$ donde $I$ es la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M)$ generado por los elementos $b_n(a)$. Como $b_n(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1} \cap R(P)$ entonces $I \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1} \cap R(P)$. De lo anterior se infiere que $P_0$ es cíclicamente equivalente a un elemento de:

$$\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}(\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1} \cap R(P))^2 \subseteq (\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P))R(P)$$

Por otro lado, $P_0$ es cíclicamente equivalente al potencial:

$$\begin{aligned}
&\phi_{b_n}(P) - P - \sum_{c \in \hat{T}} b_n(a(c)) \delta_{c^*}(P) s(c) \\
&= \phi_{b_n}(P) - P - \sum_{a \in T} b_n(a) \sum_{s \in L(a)} \delta_{(sa)^*}(P) s \\
&= \phi_{b_n}(P) - P - \sum_{a \in T} b_n(a) X_{a^*}(P)
\end{aligned}$$

Luego $\phi_{b_n}(P) - P - \sum_{a \in T} b_n(a) X_{a^*}(P)$ es cíclicamente equivalente a $P_0$ y $P_0$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $R(P)^2$. En consecuencia, $\phi_{b_n}(P) - P$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $R(P)^2$. Por la Proposición 6.2, $R(\phi_{b_n}(P)) = R(P)$ y por el Teorema 5.1, $R(\phi_{b_n}(P)) = \phi_{b_n}(R(P))$. Notemos que un elemento de $(\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P))R(P)$ es de la forma $\lim_{r \to \infty} u_r$ donde $u_r = \sum_{i=1}^{i(r)} x_i y_i$ con $x_i \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P)$ y $y_i \in R(P)$. Además $x_i = \phi_{b_n}(x_i')$, $y_i = \phi_{b_n}(y_i')$ para ciertos $x_i' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P)$, $y_i' \in R(P)$.
Luego

$$u_r = \phi_{b_n}\left(\sum_{i=1}^{i(r)} x_i' y_i'\right) = \phi_{b_n}(z_r)$$

donde $z_r \in (\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P))R(P)$.
Entonces $\lim_{r \to \infty} u_r = \lim_{r \to \infty} \phi_{b_n}(z_r) = \phi_{b_n}\left(\lim_{r \to \infty} z_r\right)$ y $\lim_{r \to \infty} z_r \in (\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P))R(P)$.
De lo anterior se infiere que $\phi_{b_n}(P) - P - \sum_{c \in \hat{T}} s(c) b_n(a(c)) \delta_{c^*}(P)$ es cíclicamente equivalente a un elemento de la forma $\phi_{b_n}(z)$ con $z \in (\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P))R(P)$.

Por lo tanto, $-z$ es cíclicamente equivalente a un elemento de la forma:

$$\sum_{a \in T} u(a) X_{a^*}(P)$$

con $u(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+2} \cap R(P)$. Se tiene que $\sum_{a \in T} u(a) X_{a^*}(P) = \sum_{a \in T} \sum_{s \in L(a)} u(a) \delta_{(sa)^*}(P) s$ y este elemento es cíclicamente equivalente a $\sum_{a \in T} \sum_{s \in L(a)} s u(a) \delta_{(sa)^*}(P) = \sum_{c \in \hat{T}} s(c) u(a) \delta_{c^*}(P)$. En consecuencia, $\phi_{b_n}(P) - P - \sum_{c \in \hat{T}} s(c) b_n(a(c)) \delta_{c^*}(P)$ es cíclicamente equivalente a

$$-\phi_{b_n}\left(\sum_{c \in \hat{T}} s(c) u(a) \delta_{c^*}(P)\right)$$

Definamos $b_{n+1} : T \to \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ mediante $b_{n+1}(a) = u(a)$ para cada $a \in T$. Entonces

$$\phi_0 \dots \phi_{b_{n-1}}\phi_{b_n}(P) - \phi_0 \dots \phi_{b_{n-1}}\left(P - \sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_n(a(c))\delta_{c^*}(P)\right)$$

es cíclicamente equivalente a

$$-\phi_0 \dots \phi_{b_n}\left(\sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_{n+1}(a)\delta_{c^*}(P)\right)$$

Por consiguiente, $\phi_0 \dots \phi_{b_{n-1}}\phi_{b_n}(P) + \phi_0 \dots \phi_{b_n}\left(\sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_{n+1}(a)\delta_{c^*}(P)\right)$ es cíclicamente equivalente a:

$$\phi_0 \dots \phi_{b_{n-1}}\left(P - \sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_n(a(c))\delta_{c^*}(P)\right)$$

Por hipótesis de inducción, este último elemento es cíclicamente equivalente a $P'$. Esto prueba (i) y (ii) de la afirmación 5.1.

Completemos la prueba de la Proposición 6.3. Notemos que la condición (i) implica que para cada $u \in \mathcal{F}_S(M)$:

$$\phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_{n-1}}\phi_{b_n}(u) - \phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_{n-1}}(u) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_n}(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego convergente. Consecuentemente, existe un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que para cada $u \in \mathcal{F}_S(M)$, $\phi(u) = \lim_{n\to\infty} \phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_n}(u)$. En particular:

$$\phi(P) = \lim_{n\to\infty} \phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_n}(P)$$

Para cada $n$ se tiene:

$$\phi_0\phi_{b_1}\dots\phi_{b_n}(P) = P' - \sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_n(a(c))\delta_{c^*}(P) + z_n$$

donde $z_n \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$ satisface $z_{n+1} - z_n \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+1}$. Por lo tanto $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $z = \lim_{n\to\infty} z_n \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. Además, $r_n = \sum_{c\in\hat{T}} s(c)b_n(a(c))\delta_{c^*}(P) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n+3}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\phi(P) &= P' - \lim_{n\to\infty} r_n + \lim_{n\to\infty} z_n\\ &= P' + z\end{aligned}$$

Se concluye que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $P$, como se quería mostrar. □

**Definición 6.1.** Un álgebra con potencial es un par $(\mathcal{F}_S(M), P)$ donde $P$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ y $M_{cyc} = 0$.

**Definición 6.2.** Sean $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y $(\mathcal{F}_S(M'), P')$ álgebras con potencial. Una equivalencia-derecha entre estas dos álgebras es un isomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ con $\phi|_S = id_S$ y tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$.

**Definición 6.3.** Sea $P$ un potencial cuadrático en $\mathcal{F}_S(M)$. Diremos que $P$ es trivial si el $S$-bimódulo generado por $\{X_{a^*}(P) : a \in T\}$ es igual a $M$.

Veamos, como en [10, Proposition 4.5] y [18, Proposition 7.8], que el tomar sumas directas con potenciales triviales no afecta al álgebra cociente $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$.

**Proposición 6.4.** *Sean $P$ y $P'$ potenciales reducidos en $\mathcal{F}_S(M)$ y $W$ un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(C)$ donde $C$ es un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado. Supongamos que existe una equivalencia-derecha entre $(\mathcal{F}_S(M \oplus C), P + W)$ y $(\mathcal{F}_S(M \oplus C), P' + W)$, entonces existe una equivalencia-derecha entre $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y $(\mathcal{F}_S(M), P')$.*

*Demostración.* Supongamos que $M$ y $C$ son $Z$-libremente generados por los $Z$-subbimódulos $M_0$ y $C_0$, respectivamente. Entonces $M = SM_0S$ y $C = SC_0S$. Por lo tanto, $M \oplus C = S(M_0 \oplus C_0)S \cong S \otimes_Z (M_0 \oplus C_0) \otimes_Z S$. Sea $T_M$ una $Z$-base local para $M_0$ y $T_C$ una $Z$-base local para $C_0$. Se tiene que $T_M \cup T_C$ es una $Z$-base local para $M_0 \oplus C_0$. Asociada a la $Z$-base local $T_M$ de $M_0$ tenemos una $S$-base local derecha $\hat{T}_M$ para $M_S$; similarmente, existe una $S$-base local derecha $\hat{T}_C$ para $C_S$. Por lo tanto, $\hat{T}_M \cup \hat{T}_C$ es una $S$-base local para $(M \oplus C)_S$. Se tiene:

$$(1)\ \mathcal{F}_S(M \oplus C) = \mathcal{F}_S(M) \oplus L$$

donde $L$ es la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M \oplus C)$ generado por $C$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &(2) \qquad R(P+W) = R(P) \oplus L \\ &(3) \qquad R(P'+W) = R(P') \oplus L \end{aligned}$$

En efecto, $R(P+W)$ es la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M \oplus C)$ generado por los elementos $X_{a^*}(P+W)$ donde $a \in T_M \cup T_C$. Si $a \in T_M$, $X_{a^*}(P+W) = \sum_{s \in L(a)} \delta_{(sa)^*}(P+W)s = \sum_{s \in L(a)} \delta_{(sa)^*}(P)s$. Si $a \in T_C$, $X_{a^*}(P+W) = \sum_{s \in L(a)} \delta_{(sa)^*}(P+W)s = \sum_{s \in L(a)} \delta_{(sa)^*}(W)s$. Por lo tanto, $R(P+W)$ es la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M \oplus C)$ generado por los elementos $X_{a^*}(P)$, con $a \in T_M$, y los elementos $X_{u^*}(W)$ donde $u \in T_C$; estos últimos elementos generan a $C$ como $S$-bimódulo (ya que $W$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(C)$). Esto prueba (2) y la igualdad (3) se puede establecer de manera similar.

Sea $\phi$ un automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M \oplus C)$ con $\phi|_S = id_S$ y tal que $\phi(P+W)$ es cíclicamente equivalente a $P'+W$. Entonces (3) implica que:

$$\begin{aligned} \phi(R(P+W)) &= R(\phi(P+W)) \\ &= R(P'+W) \\ &= R(P') \oplus L \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(4) \qquad \phi(R(P+W)) = R(P') \oplus L$$

Sea $p : \mathcal{F}_S(M \oplus C) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ la proyección canónica dada por la descomposición en (1). Consideremos el morfismo

$$\psi = p \circ \phi|_{\mathcal{F}_S(M)} : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$$

Notar que $\phi$ está determinado por un par de morfismos de $S$-bimódulos $\phi^{(1)} : M \oplus C \to M \oplus C$ y $\phi^{(2)} : M \oplus C \to \mathcal{F}_S(M \oplus C)^{\geq 2}$. Como $\phi$ es un automorfismo de $\mathcal{F}_S(M \oplus C)$ entonces $\phi^{(1)}$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos y por lo tanto tiene una forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \phi^1_{M,M} & \phi^1_{M,C} \\ \phi^1_{C,M} & \phi^1_{C,C} \end{bmatrix}$$

De las contenciones $C \subseteq L \subseteq R(P) \oplus L$ se infiere que $\phi(C) \subseteq \phi(R(P) \oplus L) = \phi(R(P+W)) = R(P') \oplus L$, donde la última igualdad es consecuencia de (4). Como $P'$ es reducido entonces $R(P') \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. La igualdad $\phi^1_{M,C} = \pi_M \circ \phi^{(1)} \circ \sigma_C$ implica que $\phi^1_{M,C} = 0$. Por lo tanto $\phi^1_{M,M}$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. Como $\psi|_M = p \circ \phi|_M : M \to M \oplus C \oplus \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ entonces $\psi^1 = \phi^1_{M,M}$ y por ende $\psi^{(1)}$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. En consecuencia, $\psi$ es un automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M)$. Notemos que $\psi(R(P))$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}_S(M)$ y por lo tanto $p^{-1}(\psi(R(P))) = \phi(R(P)) + L$ también es cerrado. Como $\phi^{-1}$ es un automorfismo de $\mathcal{F}_S(M \oplus C)$ tal que $P+W$ es cíclicamente equivalente a $\phi^{-1}(P'+W)$, entonces $\phi^{-1}(R(P')) + L$ es cerrado. Entonces

$$R(P') + \phi(L) \text{ es un subconjunto cerrado de } \mathcal{F}_S(M \oplus C)$$

Veamos que se tiene la siguiente contención:

$$L \subseteq R(P') + \phi(L)$$

De (4) se infiere que $\phi(R(P)) \subseteq R(P') \oplus L$. Como $R(P) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ entonces $\phi(R(P)) \subseteq \mathcal{F}_S(M \oplus C)^{\geq 2}$. Si $z \in \phi(R(P))$ entonces $z = \mu + \lambda$ con $\mu \in R(P') \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ y $\lambda \in L$. Por lo tanto, $\lambda = z - \mu \in \mathcal{F}_S(M \oplus C)^{\geq 2} \cap L$ y por ello $\lambda \in UL + LU$ donde $U = \mathcal{F}_S(M \oplus C)^{\geq 1}$. Consecuentemente:

$$(5) \qquad \phi(R(P)) \subseteq R(P') + UL + LU$$

Luego: $L \subseteq R(P') + L = R(P' + W) = R(\phi(P + W)) = \phi(R(P + W)) = \phi(R(P) + L) = \phi(R(P)) + \phi(L) \subseteq R(P') + \phi(L) + UL + LU$. De lo anterior se tiene que $L \subseteq R(P') + \phi(L) + UL + LU$. Al sustituir esta ecuación en el lado derecho de (5), obtenemos:

$$\begin{aligned} L &\subseteq R(P') + \phi(L) + U(R(P') + \phi(L) + UL + LU) + (R(P') + \phi(L) + UL + LU)U \\ &\subseteq R(P') + \phi(L) + U^2L + ULU + LU^2 \end{aligned}$$

repitiendo el proceso para cada $n > 0$, se deduce que:

$$L \subseteq R(P') + \phi(L) + \sum_{k=0}^{n} U^k L U^{n-k} \subseteq R(P') + \phi(L) + U^n$$

Por lo tanto, $L$ está contenido en la cerradura de $R(P') + \phi(L)$ y por (3) se tiene que este conjunto es cerrado, así que $L \subseteq R(P') + \phi(L)$. De esto se infiere que $L \subseteq R(P') + \phi(L)$. Usando la simetría entre $R(P)$ y $R(P')$ se obtiene

$$L \subseteq R(P) + \phi^{-1}(L)$$

y aplicando $\phi$ a esta expresión

$$(6) \qquad \phi(L) \subseteq \phi(R(P)) + L$$

En consecuencia:

$$(7) \qquad p(\phi(L)) \subseteq p(\phi(R(P)) = \psi(R(P))$$

Se sigue que $\phi(P+W) = \phi(P)+\phi(W)$ es cíclicamente equivalente a $P'+W$. Por lo tanto, $p(\phi(P))+p(\phi(W)) = \psi(P)+p\phi(W)$ es cíclicamente equivalente a $p(P' + W) = P'$. Esto implica que $\psi(P) - P'$ es cíclicamente equivalente a $-p(\phi(W))$. Como $W \in C^{\otimes 2}$, entonces:

$$p(\phi(W)) \subseteq p(\phi(C^{\otimes 2})) = \psi(C^{\otimes 2}) = \psi(C)^2$$

Usando (7) se infiere que $p(\phi(C)) \subseteq p(\phi(L)) \subseteq \psi(R(P))$. Entonces $\psi(P) - P'$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $\psi(R(P))^2 = R(\psi(P))^2$.

Por la Proposición 6.3, existe un automorfismo de álgebras $\rho$ de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\rho(\psi(P))$ es cíclicamente equivalente a $P'$. Esto completa la demostración. □

# Capítulo 7

# Potenciales cuadráticos

En este capítulo se dan dos condiciones que se impondrán sobre cada $F$-base de cada factor $D_i = e_i S$ y se darán ejemplos de álgebras que cumplen estas condiciones. También se establece una caracterización de los potenciales triviales del álgebra $\mathcal{F}_S(M)$. Finalmente se introduce el concepto de potencial escindable; con esta noción se prueba que si un potencial es escindable entonces se tiene un teorema análogo al llamado *Splitting theorem* dado en [10, Theorem 4.6]. El concepto de potencial escindable será crucial en el siguiente capítulo ya que permitirá definir la noción de mutación de un potencial.

Recordemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $L(i) = L \cap e_i S$ es una $F$-base de $D_i = e_i S$. En el resto del trabajo usaremos la siguiente notación: si $e_i \in L(i)$, entonces $e_i^*$ es la $F$-transformación lineal $D_i \to F$ tal que $(e_i)^*(e_i) = 1$ y $(e_i)^*(t) = 0$ si $t \in L(i) \setminus \{e_i\}$. Asumiremos que cada base $L(i)$ satisface las siguientes dos condiciones:

(a) $e_i \in L(i)$ y si $s, t \in L(i)$ entonces $e_i^*(st^{-1}) \neq 0$ implica $s = t$; similarmente, $e_i^*(t^{-1}s) \neq 0$ implica $s = t$.

(b) Si $c(i) = [D_i : F]$ entonces $\mathrm{char}(F) \nmid c(i)$.

Tales bases existen: por ejemplo, sea $A$ una $F$-álgebra asociativa donde $F$ es un campo. Diremos que una $F$-base de $A$, como espacio vectorial, es semi-multiplicativa si el producto de cualesquiera dos elementos de la base es un $F$-múltiplo de un elemento de la base. Si $L(i)$ es una $F$-base semi-multiplicativa de $D_i$ y $\mathrm{char}(F) \nmid [D_i : F]$, entonces la base $L(i)$ cumple (a) y (b).

**Ejemplo 7.1.** *Sea $\mathbb{H}$ el anillo de los cuaterniones, entonces $\{1, i, j, k\}$ es una base semi-multiplicativa.*

**Observación 7.1.** Supongamos que $L_1$ es una $F$-base para la extensión de campos $F_1/F$ y $L_2$ es una $F_1$-base para la extensión de campos $F_2/F_1$. Si ambas bases $L_1$ y $L_2$ satisfacen la condición (a), entonces la $F$-base $L := \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$ de $F_2$ también satisface la condición (a).

En efecto, dado $y \in L_2$ se tiene la $F_1$-transformación lineal $y^* : F_2 \to F_1$ inducida por la base dual de $L_2$ y también dado $x \in L_1$ se tiene una $F$-transformación lineal $x^* : F_1 \to F$. Por lo tanto, si $xy \in L$ entonces la composición $x^* y^* : F_2 \to F$ es una $F$-transformación lineal. Notemos que $x^* y^* = (xy)^*$. Supongamos ahora que $xy, x_1 y_1 \in L$ y que $0 \neq e^*(xy(x_1 y_1)^{-1})$. Entonces $0 \neq e^*(xy(x_1 y_1)^{-1}) = e^*(xx_1^{-1} e^*(yy_1^{-1}))$. En particular $e^*(yy_1^{-1}) \neq 0$ y por lo tanto, como $L_2$ satisface la condición (a), $y = y_1$. De lo anterior se deduce que $e^*(xx_1^{-1}) \neq 0$ y como $L_1$ también satisface (a) entonces $x = x_1$.

La observación anterior proporciona el siguiente

**Ejemplo 7.2.** *Sea $E/F$ una extensión finita de campos. Si $Gal(E/F)$ es un grupo soluble y $F$ contiene una raíz primitiva de la unidad de orden $[E : F]$, entonces la extensión $E/F$ tiene una base que cumple (a).*

En contraste con las suposiciones dadas en [18, p.55] este ejemplo muestra que no es necesario pedir solubilidad sobre el grupo de Galois $Gal(E/F)$ ni que el campo base $F$ contenga una raíz primitiva de la unidad de orden $[E : F]$ para poder desarrollar una teoría más general de álgebras con potencial. Posteriormente veremos que aún sin estas condiciones sobre las extensiones, es posible definir la mutación y establecer la involutividad de la misma.

**Proposición 7.1.** *El conjunto* $\{s^{-1}|s \in L(i)\}$ *es una* $F$*-base de* $D_i$.

*Demostración.* Basta mostrar que $\{s^{-1}|s \in L(i)\}$ es linealmente independiente sobre $F$. Supongamos que se tiene una combinación lineal:

$$\sum_{s \in L(i)} \lambda_s s^{-1} = 0$$

con $\lambda_s \in F$. Sea $t$ un elemento arbitrario de $L(i)$, entonces:

$$\lambda_t e_i + \sum_{s \neq t} s^{-1} t \lambda_s = 0$$

Por lo tanto:

$$0 = e_i^* \left( \lambda_t e_i + \sum_{s \neq t} s^{-1} t \lambda_s \right) = \lambda_t + \sum_{t \neq s} \lambda_s e_i^*(s^{-1}t) = \lambda_t$$

luego $\lambda_t = 0$ para cada $t \in L(i)$. □

En lo que sigue, si $s \in L(i)$ entonces $(s^{-1})^*$ denota la $F$-transformación lineal $D_i \to F$ dada por $(s^{-1})^*(t^{-1}) = 1$ si $t = s$ y 0 si $t \neq s$ para $t \in L(i)$.

**Proposición 7.2.** *Para cada* $s, t, t_1 \in L(i)$ *se tiene:*

$$\sum_{r \in L(i)} (r^{-1})^*(t_1^{-1}s^{-1}) r^*(st) = \delta_{t,t_1}$$

*Demostración.* Tenemos:

$$st = \sum_{r \in L(i)} r^*(st) r$$

$$t_1^{-1}s^{-1} = \sum_{r_1 \in L(i)} (r_1^{-1})^*(t_1^{-1}s^{-1}) r_1^{-1}$$

Por lo tanto:

$$t_1^{-1}t = \sum_{r, r_1 \in L(i)} (r_1^{-1})^*(t_1^{-1}s^{-1}) r^*(st) r_1^{-1} r$$

Aplicando $e_i^*$ en ambos lados:

$$\begin{aligned}\delta_{t,t_1} &= \sum_{r, r_1 \in L(i)} (r_1^{-1})^*(t_1^{-1}s^{-1}) r^*(st) e_i^*(r_1^{-1} r) \\ &= \sum_{r \in L(i)} (r^{-1})^*(t_1^{-1}s^{-1}) r^*(st)\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. □

**Proposición 7.3.** *Para cada* $r, r_1, s \in L(i)$ *se tiene:*

$$\sum_{t \in L(i)} r^*(st)(r_1^{-1})^*(t^{-1}s^{-1}) = \delta_{r,r_1}$$

*Demostración.* Definamos matrices cuadradas de orden $c(i)$ con entradas en $F$ como sigue. Sea $A = [a_{p,q}(s)]$ donde $a_{p,q}(s) = p^*(sq)$ y $B = [b_{g,h}(s)]$ donde $b_{g,h}(s) = (h^{-1})^*(g^{-1}s^{-1})$. Usando la Proposición 7.2 se tiene que $BA$ es la matriz identidad. Por lo tanto, $AB = I$ y se tiene el resultado. □

**Proposición 7.4.** *Para cada* $s, s_1, t \in L(i)$ *se tiene:*

$$\sum_{r\in L(i)} (r^{-1})^*(t^{-1}s_1^{-1})r^*(st) = \delta_{s_1,s}$$

*Demostración.* Tenemos:

$$st = \sum_{r\in L(i)} r^*(st)r$$

$$t^{-1}s_1^{-1} = \sum_{r_1\in L(i)} (r_1^{-1})^*(t^{-1}s_1^{-1})r_1^{-1}$$

Por lo tanto:

$$ss_1^{-1} = \sum_{r,r_1\in L(i)} r^*(st)(r_1^{-1})^*(t^{-1}s_1^{-1})rr_1^{-1}$$

aplicando $e_i^*$ en ambos lados

$$\delta_{s,s_1} = \sum_{r\in L(i)} r^*(st)(r^{-1})^*(t^{-1}s_1^{-1})$$

lo que completa la prueba. □

**Proposición 7.5.** *Para cada $r, r_1, t \in L(i)$:*

$$\sum_{s\in L(i)} r^*(st)(r_1^{-1})^*(t^{-1}s^{-1}) = \delta_{r,r_1}$$

*Demostración.* Definamos matrices cuadradas de orden $c(i)$ con entradas en $F$ como sigue. Sea $A = [a_{p,q}(t)]$ donde $a_{p,q}(t) = q^*(pt)$ y sea $B = [b_{g,h}(t)]$ donde $b_{g,h}(t) = (g^{-1})^*(t^{-1}h^{-1})$. Por la Proposición 7.4, $AB = I$ lo que implica $BA = I$. □

Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Para cada $\psi \in M^*$ definimos $X^P(\psi) = \sum_{s\in L} \psi s^{-1}(\delta(P))\, s \in \mathcal{F}_S(M)$, donde por abuso de notación $\psi s^{-1}$ denota el morfismo $(\psi s^{-1})_*$ de la Definición 4.6. Se tiene entonces una $F$-transformación lineal:

$$X^P : M^* \to \mathcal{F}_S(M)$$

Notemos que si $\psi = e_j\psi e_i$ entonces $X^P(\psi) = \sum_{s\in L(i)} \psi s^{-1}(\delta(P))s$.

**Proposición 7.6.** *La aplicación $X^P : M^* \to \mathcal{F}_S(M)$ es un morfismo de $S$-bimódulos.*

*Demostración.* Claramente $X^P$ es un morfismo de $S$-módulos izquierdos. Resta ver que $X^P$ es un morfismo de $S$-módulos derechos. Basta mostrar que si $\psi = e_j\psi e_i$ y $s \in L(i)$, entonces $X^P(\psi s^{-1}) = X^P(\psi)s^{-1}$. Usando la Proposición 7.5 se tiene:

$$\begin{aligned}
X^P(\psi s^{-1}) &= \sum_{w\in L(i)} \psi s^{-1}w^{-1}(\delta(P))w \\
&= \sum_{w,r\in L(i)} (r^{-1})^*(s^{-1}w^{-1})\psi r^{-1}(\delta(P))(ws)s^{-1} \\
&= \sum_{w,r,r_1\in L(i)} (r^{-1})^*(s^{-1}w^{-1})\psi r^{-1}(\delta(P))r_1 r_1^*(ws)s^{-1} \\
&= \sum_{r,r_1\in L(i)} \psi r^{-1}(\delta(P))r_1 \left(\sum_{w\in L(i)} r_1^*(ws)(r^{-1})^*(s^{-1}w^{-1})\right) s^{-1} \\
&= \sum_{r,r_1\in L(i)} \psi r^{-1}(\delta(P))r_1\delta_{r,r_1}s^{-1} \\
&= \left(\sum_{r\in L(i)} \psi r^{-1}(\delta(P))r\right) s^{-1} \\
&= X^P(\psi)s^{-1}
\end{aligned}$$

□

**Proposición 7.7.** *El ideal $R(P)$ es igual a la cerradura del ideal bilateral generado por los elementos $X^P(\psi)$ con $\psi \in M^*$.*

*Demostración.* Por definición, $R(P)$ es la cerradura del ideal bilateral generado por todos los elementos $X_{a^*}(P)$ con $a \in T$. Luego basta mostrar que si $\psi \in M^*$ entonces $X^P(\psi) \in R(P)$. Se tiene que los elementos $(sa)^*$ forman una $S$-base local izquierda para ${}_SM^*$; entonces existen elementos $\lambda_{s,a} \in S$ tal que $\psi = \sum_{sa} \lambda_{s,a}(sa)^*$. Por lo tanto:

$$X^P(\psi) = \sum_{sa} \lambda_{s,a} X^P((sa)^*) = \sum_{sa} \lambda_{s,a} X^P(a^* s^{-1}) = \sum_{sa} \lambda_{s,a} X^P(a^*) s^{-1}$$

y por ende $X^P(\psi) \in R(P)$. □

Supongamos que $P$ es un potencial cuadrático en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces el morfismo $X^P$ induce un morfismo de $S$-bimódulos:

$$X^P : M^* \to M$$

**Observación 7.2.** Sea $P$ un potencial cuadrático en $\mathcal{F}_S(M)$. El potencial $P$ es trivial (ver Definición 6.3) si y sólo si el morfismo $X^P : M^* \to M$ es un epimorfismo de $S$-bimódulos y por lo tanto un isomorfismo.

**Ejemplo 7.3.** *Supongamos que $P = \sum_{i=1}^{l} a_i b_i$ donde $\{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$, entonces $P$ es trivial.*

*Demostración.* Se tiene:

$$\begin{aligned} X^P(a_u^*) &= \sum_{s \in L(\sigma(a_u))} a_u^* s^{-1} \left(\delta(P)\right) s \\ &= \sum_{s \in L(\sigma(a_u))} a_u^* s^{-1} \left( \sum_{i=1}^{l} (a_i b_i + b_i a_i) \right) s = b_u \end{aligned}$$

De manera similar se verifica que $X^P(b_u^*) = a_u$. Por lo tanto, $\{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l\} \subseteq Im(X^P)$ y como $X^P$ es un morfismo de $S$-bimódulos entonces $\mathrm{Im}(X^P)$ es un $S$-subbimódulo de $M$ que contiene a los generadores $\{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l\}$. En consecuencia, $X^P$ es sobreyectivo. □

**Observación 7.3.** Un $S$-bimódulo $M$ es $Z$-libremente generado si y sólo si $M \cong \bigoplus_{m(i,j)} (D_i \otimes_F D_j)$ donde $m(i,j)$ es un entero positivo.

Dado un potencial cuadrático $P$, usaremos la siguiente notación: pondremos $\Xi(P) = Im(X^P)$ donde $X^P : M^* \to M$ es el morfismo de $S$-bimódulos inducido por el potencial $P$.

**Definición 7.1.** Diremos que un potencial $P \in \mathcal{F}_S(M)$ es escindable si $\Xi(P^{(2)})$ es $Z$-libremente generado, donde $P^{(2)}$ denota la componente cuadrática de $P$.

**Definición 7.2.** Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Definimos $\Xi_2(P) = \Xi(P^{(2)})$.

**Proposición 7.8.** *Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ un automorfismo de álgebras determinado por el par $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$ y sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $\Xi_2(\phi(P)) = \phi^{(1)}(\Xi_2(P))$. En particular, si $\phi$ es unitriangular entonces $\Xi_2(\phi(P)) = \Xi_2(P)$.*

*Demostración.* Para cada $m \in M$, $\phi(m) = \phi^{(1)}(m) + \phi^{(2)}(m)$ donde $\phi^{(1)}(m) \in M$, $\phi^{(2)}(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Entonces $(\phi(P))^{(2)} = \phi^{(1)}(P^{(2)})$ y por lo tanto $\Xi_2(\phi(P)) = \Xi(\phi^{(1)}(P^{(2)}))$. Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ el automorfismo de álgebras que extiende a $\phi^{(1)}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\Xi(\phi^{(1)}(P^{(2)})) &= \Xi(\varphi(P^{(2)}))\\ &= M \cap R(\varphi(P^{(2)}))\\ &= M \cap \varphi(R(P^{(2)}))\\ &= \varphi(M \cap R(P^{(2)}))\\ &= \phi^{(1)}(\Xi_2(P))\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

**Lema 7.1.** *Sean $a, a' \in T(i,j)$, $y \in M$. Entonces:*

$$X_{a^*}(a'y) = y\delta_{a,a'}$$

*Demostración.* Supongamos que $y = \sum_{s,t \in L, b \in T} f_{s,t,b}sbt$ donde $sb \in e_jMe_u$ y $f_{s,t,b} \in F$, entonces $sb \neq a$ para toda $sb \in e_jMe_u$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}X_{a^*}(ay) &= \sum_{s,t \in L, b \in T} f_{s,t,b}X_{a^*}(asbt)\\ &= \sum_{s,t \in L, b \in T} f_{s,t,b}\sum_{r \in L}(ra)^*\left(\delta(asbt)\right)r\\ &= \sum_{s,t \in L, b \in T} f_{s,t,b}\sum_{r \in L}(ra)^*\left(\delta(tasb)\right)r\\ &= \sum_{s,t \in L, b \in T} f_{s,t,b}\sum_{r \in L}(ra)^*(tasb + sbta)r\\ &= \sum_{s,t \in L, b \in T} f_{s,t,b}sbt\\ &= y\end{aligned}$$

lo que completa la prueba del lema. □

Sea $M$ un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado y sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todos los pares $(i,j)$ tales que $e_iMe_j \neq 0$, $e_jMe_i \neq 0$ y $\dim_F(e_iMe_j) \leq \dim_F(e_jMe_i)$. Sean $N^> = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} e_jMe_i$, $N^< = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} e_iMe_j$ y $N = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} (e_iMe_j + e_jMe_i)$.

**Proposición 7.9.** *Sea $P$ un potencial cuadrático en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $P$ es cíclicamente equivalente al potencial*

$$Q = \sum_{a \in T^<} aX^P(a^*)$$

donde $T^< = T \cap N^<$.

*Demostración.* Es claro que $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial de $N^< \otimes_S N^>$. Por lo tanto, $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial que es una $F$-combinación lineal de elementos de la forma $taz$ donde $t \in L(\sigma(a))$, $a \in T^<$, $z \in N^>$. De esto se infiere que $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma $Q = \sum_{a \in T^<} ay_a$ donde $y_a \in N^>$. Sea $a_0 \in T^<$, entonces por el Lema 7.1

$$X^P(a_0^*) = X^Q(a_0^*) = \sum_{a \in T^<} X_{a_0^*}(ay_a) = y_{a_0}$$

□

**Definición 7.3.** Sea $P$ un potencial cuadrático en $\mathcal{F}_S(M)$. Diremos que $P$ es maximal si el morfismo $X^P : M^* \to M$ induce un monomorfismo entre $(N^<)^*$ y $N^>$.

**Observación 7.4.** Como $S \otimes_F S^{op}$ es un álgebra auto-inyectiva finito-dimensional, entonces todo $S$-bimódulo proyectivo es un $S$-bimódulo inyectivo. En particular, si $N$ es un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado entonces $N$ es un $S$-bimódulo inyectivo. Esto implica que cualquier $S$-subbimódulo de $M$ que sea $Z$-libremente generado tiene un complemento en $M$ y este complemento también es $Z$-libremente generado.

**Corolario 7.1.** *Sea $P$ un potencial maximal en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma:*

$$Q = \sum_{a \in T^<} a f_a$$

*donde el conjunto $\{f_a\}_{a \in T^<}$ está contenido en un conjunto de generadores $Z$-libres de $N^>$.*

*Demostración.* Como $P$ es un potencial maximal entonces el morfismo $X^P : M^* \to M$ induce un morfismo inyectivo de $S$-bimódulos $X^P : (N^<)^* \to N^>$ y por lo tanto $X^P$ induce un isomorfismo de $S$-bimódulos entre $(N^<)^*$ y $\mathrm{Im}(X^P)$. Por lo tanto, $\mathrm{Im}(X^P)$ está $Z$-libremente generado por $f_a := X^P(a^*)$ donde $a \in T^<$. Como $\mathrm{Im}(X^P)$ y $N^>$ son $Z$-libremente generados, entonces por la Observación 7.4 existe un $S$-subbimódulo, $Z$-libremente generado, $N'$ de $N^>$ tal que $\mathrm{Im}(X^P) \oplus N' = N^>$. Se sigue que si $U$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $N'$ entonces $\{f_a\}_{a \in T^<} \cup U$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $N^>$. □

Veamos que cada potencial trivial es cíclicamente equivalente a un potencial como en el Ejemplo 7.3.

**Proposición 7.10.** *Sea $P$ un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma $\sum_{i=1}^{m} h_i g_i$ donde $\{h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_m\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$.*

*Demostración.* Sean $M^< = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} e_i M e_j$ y $M^> = \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} e_i M e_j$. Notemos que $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma:

$$P' = \sum_{a \in T \cap M^<} a X^P(a^*)$$

Como $P$ es trivial entonces el conjunto $\{X^P(a^*) : a \in T \cap M^<\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M^>$. Por lo tanto, $\{a : a \in T \cap M^<\} \cup \{X^P(a^*) : a \in T \cap M^<\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$. □

La siguiente caracterización es similar a la que se da en [10, Proposition 4.4] y [18, Proposition 7.6].

**Proposición 7.11.** *Sea $P$ un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces dada una $Z$-base local $T$ de $M_0$, existe un automorfismo $\varphi : M \to M$ de $S$-bimódulos tal que su extensión a un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(M)$ satisface que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ donde $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m\} = T$.*

*Demostración.* Por la Proposición 7.10, $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial

$$Q = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i$$

donde $W = \{h_1, \ldots, h_m, g_1, \ldots, g_m\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$. Por lo tanto, existe un automorfismo de $S$-bimódulos $\varphi : M \to M$ con $\varphi(W) = T$. Sea $\phi$ la extensión de $\varphi$ a un automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M)$. Se concluye que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ donde $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m\} = T$. □

**Proposición 7.12.** *Sea $P$ un potencial cuadrático escindable en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $P$ es derecho-equivalente a un potencial de la forma $Q = \sum_{i=1}^{l} a_i b_i$ donde $\{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l\}$ es una $Z$-base local de un $Z$-sumando directo de $M_0$.*

*Demostración.* Sea $P$ un potencial cuadrático, entonces la Proposición 7.9 implica que $P$ es cíclicamente equivalente al potencial

$$Q = \sum_{a \in T^<} a X^P(a^*)$$

Sea $V = \{z_1, \ldots, z_l\}$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $\mathrm{Im}(X^P)$. Entonces para cada $a \in T^<$ se tiene:

$$X^P(a^*) = \sum_{i \in I(a)} t_i z_i s_i$$

para cierto conjunto finito $I(a)$ y $t_i, s_i \in S$. Luego:

$$Q = \sum_{a \in T^<} \sum_{i \in I(a)} a t_i z_i s_i$$

Por lo tanto, $Q$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma:

$$Q' = \sum_j z_j h_j$$

donde $h_j \in M$. Dado que $\mathrm{Im}(X^P)$ y $M$ son $Z$-libremente generados, entonces por la Observación 7.4 existe un $S$-subbimódulo $M_1$ de $M$, $Z$-libremente generado, tal que $M = M_1 \oplus \mathrm{Im}(X^P)$. Sea $T_1$ una $Z$-base local de $M_1$, entonces existe un automorfismo de $S$-bimódulos $\phi : M \to M$ tal que $\phi(T_1 \cup V) = T$. Sea $\varphi$ el automorfismo de álgebras $\mathcal{F}_S(M)$ que extiende $\phi$, entonces $\varphi(Q')$ es cíclicamente equivalente al potencial:

$$Q'' = \sum_{b \in \phi(V)} b g_b$$

donde $g_b \in M$. Por el Lema 7.1, $g_b = X^{Q''}(b^*)$. Como $P$ es cíclicamente equivalente a $Q'$ entonces $\varphi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q''$. Por lo tanto, $\Xi(Q'') = \Xi(\varphi(P)) = \phi(\Xi(P)) = S\phi(V)S$. Luego $g_b \in S\phi(V)S$ y por ende $Q''$ es un potencial cuadrático en $\mathcal{F}_S(S\phi(V)S)$ con $\Xi(Q'') = S\phi(V)S$; así $Q''$ es un potencial trivial. El resultado se sigue al aplicar la Proposición 7.11. $\square$

Sea $P = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i + P'$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ donde $A = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N, b_N\}$ está contenido en un conjunto de generadores $Z$-libres $T$ de $M$ y $P' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 3}$. Sea $L_1$ el complemento de $A$ en $T$. Sea $N_1$ el $F$-subespacio vectorial de $M$ generado por $A$ y sea $N_2$ el $F$-subespacio vectorial de $M$ generado por $L_1$, entonces $M = M_1 \oplus M_2$ como $S$-bimódulos donde $M_1 = SN_1S$ y $M_2 = SN_2S$.

Probemos el siguiente teorema de descomposición. Cabe mencionar que este teorema es la extensión del llamado *Splitting theorem* dado en [10, Theorem 4.6] y [18, Theorem 7.10].

**Teorema 7.1.** *Existe un automorfismo unitriangular $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma $\sum_{i=1}^{N} a_i b_i + P''$ donde $P''$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$, y $\sum_{i=1}^{N} a_i b_i$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M_1)$.*

Primero establezcamos el siguiente.

**Lema 7.2.** *El potencial $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma:*

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N} (a_i b_i + a_i v_i + u_i b_i) + P''$$

*donde $a_i, b_i$ pertenecen a un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$, $v_i, u_i \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ y $P'' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 3}$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$.*

*Demostración.* Supongamos que $P' = \sum_{n=3}^{\infty} D_n$ donde $D_n \in M^{\otimes n}$ y $n \geq 3$. Ahora escribamos cada $D_n$ como $D_n = \sum_j \mu_j^{(n)}$ donde $\mu_j^{(n)} \in M^{\otimes n}$. Sea $a_k$, donde $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, tal que $a_k$ aparece en la descomposición de $\mu_j^{(n)} = m_{j,1} \ldots m_{j,n}$. Supongamos que $m_{j,i} = a_k$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} m_{j,1}...m_{j,i-1}m_{j,i}m_{j,i+1}...m_{j,n} &= m_{j,1}...m_{j,i-1}a_k m_{j,i+1}...m_{j,n} \\ &= a_k\,(m_{j,i+1}...m_{j,n}m_{j,1}...m_{j,i-1}) + ((m_{j,1}...m_{j,i-1})(a_k m_{j,i+1}...m_{j,n}) - a_k(m_{j,i+1}...m_{j,n}m_{j,1}...m_{j,i-1})) \end{aligned}$$

Notemos que $m_{j,i+1}...m_{j,n}m_{j,1}...m_{j,i-1} \in M^{\otimes(n-1)}$ y el sumando derecho pertenece al conmutador. Luego

$$\mu_j^{(n)} = a_k v_{j,k}^{(n)} + z_{j,k}^{(n)}$$

donde $v_{j,k}^{(n)} \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n-1}$ y $z_{j,k}^{(n)} \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)] \cap M^{\otimes n}$.

Supongamos ahora que $\{m_{j,1}, m_{j,2}, \ldots, m_{j,n}\} \cap \{a_1, \ldots, a_N\} = \emptyset$ pero que $\{m_{j,1}, m_{j,2}, \ldots, m_{j,n}\} \cap \{b_1, \ldots, b_N\} \neq \emptyset$. Sea $b_k$, donde $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, tal que $b_k$ aparece en la descomposición de $\mu_j^{(n)}$. Supongamos que $m_{j,i} = b_k$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces

$$m_{j,1}...b_k b_{j,i+1}...m_{j,n} = (m_{j,i+1}...m_{j,n}m_{j,1})\,b_k + ((m_{j,1}...m_{j,i-1}b_k)(m_{j,i+1}...m_{j,n}) - m_{j,i+1}...m_{j,n}m_{j,1}...m_{j,i-1}b_k)$$

Por ende $\mu_j^{(n)} = \lambda_{j,k}^{(n)} b_k + w_{j,k}^{(n)}$ donde $\lambda_{j,k}^{(n)} \in M^{\otimes(n-1)}$ y $w_{j,k}^{(n)} \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)] \cap M^{\otimes n}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_j \mu_j^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_j \left( a_k v_{j,k}^n + z_{j,k}^{(n)} + \lambda_{j,k}^n b_k + w_{j,k}^{(n)} + c_{j,k}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_j (a_k v_{j,k}^n + \lambda_{j,k}^n b_k) + h_{n,k} + t_{n,k} \end{aligned}$$

donde $h_{n,k} \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)] \cap M^{\otimes n}$ y $t_{n,k} \in M^{\otimes n}$ es un potencial contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$. En consecuencia

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{n=3}^{\infty} D_n \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{N} \sum_j (a_k v_{j,k}^n + \lambda_{j,k}^n b_k) + h_{n,k} + t_{n,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=3}^{\infty} \left( a_k \left( \sum_j v_{j,k}^n \right) + \left( \sum_j \lambda_{j,k}^n \right) b_k \right) + \sum_{n=3}^{\infty} h_n + \sum_{n=3}^{\infty} t_n \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_j \left( a_k \left( \sum_{n=3}^{\infty} v_{j,k}^n \right) + \left( \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_{j,k}^n \right) b_k \right) + \sum_{n=3}^{\infty} h_n + \sum_{n=3}^{\infty} t_n \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_j (a_k v_{j,k} + u_{j,k} b_k) + P'' + h \end{aligned}$$

donde $v_{j,k} := \sum_{n=3}^{\infty} v_{j,k}^n$, $u_{j,k} := \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_{j,k}^n$, $P'' := \sum_{n=3}^{\infty} t_n$ y $h = \sum_{n=3}^{\infty} h_n$. Por construcción, $v_{j,k}^n, \lambda_{j,k}^n \in M^{\otimes(n-1)}$ para cada $n$. Como $n \geq 3$ entonces $v_{j,k} \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Similarmente, $\lambda_{j,k}^n \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Dado que cada $t_n$ es un potencial contenido en el álgebra generada por $M_2$, entonces $P'' = \sum_{n=3}^{\infty} t_n$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{N} a_k b_k + P' \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k b_k + \sum_{k=1}^{N} \sum_{j} (a_k v_{k,j} + u_{j,k} b_k) + P'' + h \\
&= \sum_{k=1}^{N} (a_k b_k + a_k v_k + u_k b_k) + P'' + h
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que $P$ es cíclicamente equivalente al potencial $\sum_{i=1}^{N} (a_i b_i + a_i v_i + u_i b_i) + P''$. □

Siguiendo a [10] definimos el concepto de profundidad de un automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M)$.

**Definición 7.4.** Un morfismo de álgebras $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ tiene profundidad $d$ si $\phi|_S = 1_S$ y si para cada $m \in M$ se tiene $\phi(m) = m + m'$ donde $m' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq d+1}$.

**Definición 7.5.** Diremos que un potencial $P \in \mathcal{F}_S(M)$ es $d$-escindable si:

$$P = \sum_{i=1}^{N} (a_i b_i + a_i v_i + u_i b_i) + P'$$

donde los elementos $a_i, b_i$ pertenecen a un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$, $u_i, v_i \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq d+1}$ y $P'$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$.

El siguiente lema está basado en [10, Lemma 4.8].

**Lema 7.3.** *Sea $P$ un potencial $d$-escindable en $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces existe un isomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ que tiene profundidad $d$ y tal que:*

$$\phi(P) = \widetilde{P} + h$$

*donde $h \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2d+2} \cap [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$ y $\widetilde{P}$ es un potencial $2d$-escindable.*

*Demostración.* Por hipótesis, $P$ tiene la forma:

$$P = \sum_{i=1}^{N} (a_i b_i + a_i v_i + u_i b_i) + P'$$

donde los elementos $a_i, b_i$ pertenecen a un conjunto de generadores $Z$-libres $T$ de $M$, $u_i, v_i \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq d+1}$ y $P'$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$. Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ el automorfismo unitriangular dado por $\phi|_S = 1_s$, $\phi(a_s) = a_s - u_s$, $\phi(b_i) = b_i - v_i$ y $\phi(c) = c$ para cada $c \in L_1$. Veamos que $\phi$ tiene profundidad $d$. Sea $m \in M$, entonces $m = \sum_i \lambda_i a_i \lambda_i' + \sum_i \beta_i b_i \beta_i' + \sum_k \gamma_k c_k \gamma_k'$ donde $\lambda_i, \lambda_i', \beta_i, \beta_i', \gamma_k, \gamma_k' \in S$. Aplicando $\phi$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\phi(m) &= \sum_i \phi(\lambda_i a_i \lambda_i') + \sum_i \phi(\beta_i b_i \beta_i') + \sum_k \gamma_k c_k \gamma_k' \\
&= \sum_i \phi(\lambda_i)\phi(a_i)\phi(\lambda_i') + \sum_i \phi(\beta_i)\phi(b_i)\phi(\beta_i') + \sum_k \gamma_k c_k \gamma_k' \\
&= \sum_i \lambda_i \phi(a_i)\lambda_i' + \sum_i \beta_i \phi(b_i)\beta_i' + \sum_k \gamma_k c_k \gamma_k' \\
&= \sum_i \lambda_i (a_i - u_i)\lambda_i' + \sum_i \beta_i (b_i - v_i)\beta_i' + \sum_k \gamma_k c_k \gamma_k' \\
&= \sum_i \lambda_i a_i \lambda_i' + \sum_i \beta_i b_i \beta_i' + \sum_k \gamma_k c_k \gamma_k' - \sum_i \lambda_i u_i \lambda_i' - \sum_i \beta_i v_i \beta_i' \\
&= m + m'
\end{aligned}$$

Como $P$ es $d$-escindable entonces $m' := -\sum_i \lambda_i u_i \lambda_i' - \sum_i \beta_i v_i \beta_i' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq d+1}$; luego $\phi$ tiene profundidad $d$. Por otro lado, $\phi(u_s) = u_s + u_s'$, $\phi(v_s) = v_s + v_i'$ donde $u_s', v_s' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2d+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\phi(P) &= \sum_i ((a_i - u_i)(b_i - v_i) + (a_i - u_i)(v_i + v_i') + (u_i + u_i')(b_i - v_i)) + P' \\
&= \sum_i (a_i b_i + a_i v_i' + u_i' b_i) + P_1 + P'
\end{aligned}$$

donde $P_1 = -\sum_i (u_i v_i + u_i v_i' + u_i' v_i) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2d+2}$. Aplicando el Lema 7.2 tenemos que

$$P_1 = \sum_i (a_i v_i'' + u_i'' b_i) + P'' + h$$

donde $u_s'', v_s'' \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2d+1}$, $h \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2d+2} \cap [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$ y $P''$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\phi(P) &= \sum_i (a_i b_i + a_i v_i' + u_i' b_i) + P_1 + P' \\
&= \sum_i (a_i b_i + a_i v_i' + u_i' b_i) + \sum_i (a_i v_i'' + u_i'' b_i) + P' + P'' + h \\
&= \sum_i (a_i b_i + a_i (v_i' + v_i'') + (u_i' + u_i'') b_i) + P' + P'' + h
\end{aligned}$$

Sea $\widetilde{P} = \sum_i (a_i b_i + a_i (v_i' + v_i'') + (u_i' + u_i'') b_i) + P' + P''$. Entonces $\widetilde{P}$ es un potencial $2d$-escindable y $h \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2d+2} \cap [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$.

□

Probemos ahora el Teorema 7.1.

*Demostración.* Aplicando repetidamente el Lema 7.2, se obtiene una sucesión de potenciales $\widetilde{P}_i$, una sucesión de elementos $h_i \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$ y una sucesión de automorfismos unitriangulares $\phi_i$ con las siguientes propiedades:

(a) $\phi_i$ tiene profundidad $2^i$.

(b) $\widetilde{P}_i$ es un potencial $2^i$-escindable.

(c) $h_{i+1} \in \mathcal{F}_S(M)^{2^i+2}$.

(d) $\phi_i(\widetilde{P}_i) = \widetilde{P}_{i+1} + h_{i+1}$.

Consideremos la sucesión de automorfismos $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\phi_{n+1}$ tiene profundidad $2^{n+1}$ entonces, para cada $a \in \mathcal{F}_S(M)$ se tiene:

$$\phi_{n+1}\phi_n \dots \phi_1(a) - \phi_n\phi_{n-1}\dots\phi_1(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2^{n+1}}$$

Entonces para cada $a \in \mathcal{F}_S(M)$ la sucesión $\{\phi_n\phi_{n-1}(a)\dots\phi_1(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por ende $\lim_{n\to\infty} \phi_n \dots \phi_1(a)$ existe. Se obtiene así el siguiente automorfismo:

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n \dots \phi_1$$

Por lo tanto

$$\phi(P) = \lim_{n\to\infty} \phi_n \dots \phi_1(P)$$

Entonces

$$\phi_n \dots \phi_1(P) = \widetilde{P}_{n+1} + h_{n+1} + \phi_n(h_n) + \phi_n\phi_{n-1}(h_{n-1}) + \dots + \phi_n \dots \phi_1(h_1)$$

Notemos que $\phi_n(h_n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2^n+2}$. Por lo tanto la sucesión $\{h_{n+1} + \phi_n(h_n) + \phi_n\phi_{n-1}(h_{n-1}) + \dots + \phi_n \dots \phi_1(h_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y por ello $\{\widetilde{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es convergente.
El potencial $\widetilde{P}_n$ es $2^n$-escindable, entonces:

$$\widetilde{P}_n = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i + \sum_{i=1}^{N} (a_i v_i^n + u_i^n b_i) + P'_n$$

donde $u_i^n, v_i^n \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2^i}$ y $P'_n$ pertenece al álgebra generada por $M_2$. La sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $t_n = \sum_{i=1}^{N} (a_i v_i^n + u_i^n b_i)$ converge a 0 y por lo tanto la sucesión $\{P'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi(P) &= \lim_{n\to\infty} \phi_n \dots \phi_1(P) \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i b_i + P' + h\end{aligned}$$

donde $P' = \lim_{n\to\infty} P'_n$ es un potencial reducido contenido en la cerradura del álgebra generada por $M_2$. Además:

$$h = \lim_{n\to\infty} (h_{n+1} + \phi_n(h_n) + \phi_n\phi_{n-1}(h_{n-1}) + \dots + \phi_n\phi_{n-1}\dots\phi_1(h_1))$$

pertenece a $[\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. Como $\phi(P) = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i + P' + h$ y $h \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$, entonces $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $\sum_{i=1}^{N} a_i b_i + P'$, como se quería probar.

□

# Capítulo 8

# Mutación de potenciales

En la primera parte de este capítulo se define el concepto de mutación de un potencial. Uno de los resultados importantes de este capítulo es el Teorema 8.5, en donde se prueba que la mutación de un potencial es una involución en el conjunto de clases de equivalencia-derecha de potenciales reducidos. Este teorema es una extensión de uno de los resultados principales de [10]. En las secciones 8.1 y 8.2 se establecen algunos invariantes que se preservan bajo mutación. Más precisamente, se prueba que la mutación preserva la finitud de la dimensión de las álgebras cociente $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$ asociadas a álgebras con potenciales $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y que también la rigidez, en el sentido de [10, p.88], es invariante bajo mutación. Posteriormente en la Proposición 8.14 se prueba que una matriz anti-simetrizable $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, con anti-simetrizador $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, y con la propiedad de que $d_j$ divida a $b_{ij}$, para cada $i$ y para cada $j$, admite una realización por especies. Finalmente en el Teorema 8.6 se demuestra el resultado central de la tesis: dada cualquier matriz anti-simetrizable $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ con anti-simetrizador $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ con la propiedad de que cada uno de los elementos $d_j$ divida a cada $b_{ij}$, para cada $i$ y para cada $j$, entonces dada cualquier sucesión $k_1, k_2, \ldots, k_l$ de elementos de $\{1, \ldots, n\}$ existe una realización por especies de $B$ y un potencial $P$ para dicha realización, tal que la sucesión de mutaciones $\bar{\mu}_{k_1}P, \bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P, \ldots, \bar{\mu}_{k_l}\cdots\bar{\mu}_{k_1}P$ está definida.

Sea $L$ una $Z$-base local de $S$, entonces para cada $i$ se tiene que $L(i) = L \cap e_iS$ es una $F$-base de $D_i = e_iS$.

Sean $M_1$ y $M_2$ $S$-bimódulos $Z$-libremente generados de dimensión finita sobre $F$. Supongamos que $T_1$ y $T_2$ son conjuntos de generadores $Z$-libres de $M_1$ y $M_2$, respectivamente. En lo que sigue, si $a$ es un elemento legible de $M_1$ o $M_2$ tal que $e_iae_j = a$ pondremos $\sigma(a) = i$ y $\tau(a) = j$. Para cada $u = 1, 2$ una $S$-base local derecha de $(M_u)_S$ está dada por $\hat{T}_u = \{sa : a \in T_u, s \in L(\sigma(a))\}$ y una $S$-base local izquierda de ${}_S(M_u)$ está dada por $\tilde{T}_u = \{as : a \in T_u, s \in L(\tau(a))\}$. Analizaremos los morfismos de $S$-bimódulos de $M_1$ a $\mathcal{F}_S(M_2)^{\geq 1}$ mediante el análisis de morfismos de $S$-módulos derechos. Primero notemos que

$$\mathcal{F}_S(M_2)^{\geq 1} = \bigoplus_{sb\in\hat{T}_2} sb\mathcal{F}_S(M_2)$$

Un morfismo de $S$-módulos derechos $\varphi : M_1 \to \mathcal{F}_S(M_2)^{\geq 1}$ está completamente determinado por las imágenes de los elementos de la base local $\hat{T}_1$ de $(M_1)_S$:

$$\text{(A) } \varphi(sa) = \sum_{tb\in\hat{T}_2} tbC_{tb,sa}$$

donde los elementos $C_{tb,sa} \in e_{\tau(b)}\mathcal{F}_S(M_2)$ están determinados de manera única.

**Proposición 8.1.** *Sea $\varphi : (M_1)_S \to (\mathcal{F}_S(M_2))_S^{\geq 1}$ un morfismo dado en la forma de (A), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) $\varphi$ es un morfismo de $S$-bimódulos.*

*(ii) Para cada $s \in L(\sigma(a))$ y $s_1 \in D_{\sigma(a)}$ se tiene*

$$\sum_{t\in L(\sigma(b))} r^*(s_1t)C_{tb,sa} = \sum_{w\in L(\sigma(a))} w^*(s_1s)C_{rb,wa}$$

*(iii) Para cada $r \in L(\sigma(b))$ y $s_1 \in L(\sigma(a))$ se tiene*

$$\sum_{t\in L(\sigma(b))} r^*(s_1t)C_{tb,a} = C_{rb,s_1a}$$

*Demostración.* Veamos que (i) implica (ii). Por un lado

$$\varphi(s_1sa) = \sum_{w\in L(\sigma(a))} w^*(s_1s)\varphi(wa) = \sum_{rb,w} w^*(s_1s)rbC_{rb,wa}$$

y por otro lado

$$s_1\varphi(sa) = \sum_{tb} s_1tbC_{tb,sa} = \sum_{tb,r} r^*(s_1t)rbC_{tb,sa}$$

Como $\varphi(s_1sa) = s_1\varphi(sa)$ entonces (ii) se cumple. Notemos que (ii) implica (iii) al poner $s = e_{\sigma(a)}$ en (ii). Resta mostrar que (iii) implica (i). Sean $a \in T_1$ y $s_1 \in L(\sigma(a))$. Entonces

$$\varphi(s_1a) = \sum_{rb} rbC_{rb,s_1a} = \sum_{rb,t\in L(\sigma(b))} r^*(s_1t)rbC_{tb,a} = s_1\varphi(a)$$

Luego si $z \in D_{\sigma(a)}$ y $s_1 \in L(\sigma(a))$ se tiene $\varphi(zs_1a) = \sum_{r\in L(\sigma(a))} r^*(zs_1)\varphi(ra) = \sum_{r\in L(\sigma(a))} r^*(zs_1)r\varphi(a) = zs_1\varphi(a) = z\varphi(s_1a)$. Esto completa la demostración. □

Estudiemos ahora los morfismos de $S$-bimódulos $\psi : M_1 \to \mathcal{F}_S(M_2)^{\geq 1}$ determinados por los morfismos de $S$-módulos izquierdos. Sabemos que $\tilde{T}_1 = \{as : a \in T_1, s \in L(\tau(a))\}$ es una $S$-base local izquierda para ${}_S(M_1)$. Tenemos

$$\mathcal{F}_S(M_2)^{\geq 1} = \bigoplus_{br\in\tilde{T}_2} \mathcal{F}_S(M_2)br$$

luego

$$\text{(B) } \psi(as) = \sum_{br\in\tilde{T}_2} D_{as,br}br$$

donde, como anteriormente, los elementos $D_{as,br} \in \mathcal{F}_S(M_2)e_{\sigma(b)}$ están determinados de manera única.

**Proposición 8.2.** *Sea $\psi$ un morfismo de $S$-módulos izquierdos dado en la forma de (B). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) $\psi$ es un morfismo de $S$-bimódulos.*

*(ii) Para cada $a \in T_1$, $b \in T_2$, $s \in L(\tau(a))$, $r \in L(\tau(b))$, $s_1 \in D_{\tau(a)}$ se tiene:*

$$\sum_{w\in L(\tau(a))} D_{aw,br}w^*(ss_1) = \sum_{t\in L(\tau(b))} D_{as,bt}r^*(ts_1)$$

*(iii) Para cada $a \in T_1$, $b \in T_2$, $r \in L(\tau(b))$, $s_1 \in L(\tau(a))$ se tiene:*

$$D_{as_1,b_r} = \sum_{t\in L(\tau(a))} D_{a,bt}r^*(ts_1)$$

*Demostración.* Veamos que (i) implica (ii). Tenemos las siguientes igualdades:

$$\psi(ass_1) = \sum_{w\in L(\tau(a))} w^*(ss_1)\psi(aw) = \sum_{w,b,r} w^*(ss_1)D_{aw,br}br$$
$$\psi(as)s_1 = \sum_{t,b} D_{as,bt}bts_1 = \sum_{b,t,r} D_{as,bt}brr^*(ts_1)$$

Entonces (ii) se sigue de la igualdad $\psi(ass_1) = \psi(as)s_1$. Para ver que (ii) implica (iii) basta poner $s = e_{\tau(a)}$ en (ii). Resta mostrar que (iii) implica (i). Tenemos:

$$\psi(as_1) = \sum_{br\in\tilde{T}_2} D_{as_1,br}br = \sum_{br,t} D_{a,bt}r^*(ts_1)br$$
$$= \sum_{bt} D_{a,bt}bts_1 = \psi(a)s_1$$

Entonces para $z \in D_{\tau(a)}$ y $s_1 \in L(\tau(a))$:

$$\psi(as_1z) = \sum_r \psi(ar)r^*(s_1z) = \psi(a)s_1z = \psi(as_1)z$$

lo que prueba (i). □

En lo que sigue, $^*M = \mathrm{Hom}_S({}_SM, {}_SS)$ denota el dual izquierdo de $M$.

**Proposición 8.3.** *Sea $M$ un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo $M_0$ y sea $L' = L \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$. Sea ${}_0N = \{h \in^* M | h(M_0) \in Z, h(M_0t) = 0, t \in L^{'}\}$, entonces $^*M$ es $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo ${}_0N$.*

*Demostración.* Notemos que ${}_0N$ es un $Z$-subbimódulo de $^*M$. Los elementos $^*(as)$ generan a $^*M$ como $S$-módulo derecho, luego cada elemento de $^*M$ puede ser escrito en la forma $\displaystyle\sum_{s\in L(\tau(a)),a\in T} (^*(as))w_{s,a} = \sum_{sa} s^{-1}(^*a)w_{s,a}$ donde $w_{s,a} \in S$ y $T$ es una $Z$-base local de $M_0$. En consecuencia, el morfismo de $S$-bimódulos dado por multiplicación:

$$\mu : S \otimes_Z ({}_0N) \otimes_Z S \rightarrow^* M$$

es un epimorfismo. Entonces para cada par de idempotentes $e_i, e_j$ se tiene un epimorfismo:

$$\mu : D_i \otimes_Z ({}_0N) \otimes_Z D_j \rightarrow e_i(^*M)e_j$$

Notemos que $D_i \otimes_Z ({}_0N) \otimes_Z D_j \cong D_i \otimes_F e_i({}_0N)e_j \otimes_F D_j$ y $dim_F e_i({}_0N)e_j = dim_F e_jM_0e_i$. Por lo tanto:

$$dim_F(D_i \otimes_Z ({}_0N) \otimes_Z D_j) = dim_F(e_jM_0e_i)dim_F(D_i)dim_F(D_j)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} e_i \mathrm{Hom}_S({}_SM, {}_SS)e_j &= \mathrm{Hom}_S(e_jMe_i, D_j) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D_j}(D_j \otimes_F e_jM_0e_i \otimes_F D_i, D_j) \\ &\cong \mathrm{Hom}_F(e_jM_0e_i \otimes_F D_i, D_j) \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $dim_F e_i(^*M)e_j = dim_F(e_jM_0e_i)dim_F(D_i)dim_F(D_j)$, así que el morfismo $\mu : e_iS \otimes_Z ({}_0N) \otimes_Z Se_j \rightarrow e_i(^*M)e_j$ es de hecho un isomorfismo de $S$-bimódulos, lo que completa la prueba. □

**Observación 8.1.** Un argumento similar muestra que el dual derecho $M^*$ está $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo $N_0 = \{h \in M^* | h(M_0) \in Z, h(tM_0) = 0, t \in L^{'}\}$.

Sea $k$ un entero en $[1, n]$. Supondremos que se cumplen las siguientes condiciones:

$$M_{cyc} = 0 \text{ y para cada } i,\ e_iMe_k \neq 0 \text{ implica } e_kMe_i = 0 \text{ y } e_kMe_i \neq 0 \text{ implica } e_iMe_k = 0.$$

Siguiendo a [10, p.79], usando el $S$-bimódulo $M$, definimos un nuevo $S$-bimódulo $\mu_k M = \widetilde{M}$ como sigue:

$$\widetilde{M} := \bar{e_k} M \bar{e_k} \oplus M e_k M \oplus (e_k M)^* \oplus^* (M e_k)$$

donde $\bar{e_k} = 1 - e_k$. También definimos $\widehat{M} := M \oplus (e_k M)^* \oplus^* (M e_k)$. Entonces la inclusión $M \hookrightarrow \widehat{M}$ induce un morfismo inyectivo de álgebras:

$$i_M : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})$$

Similarmente, la inclusión de $\mu_k M$ en $\mathcal{F}_S(\widehat{M})$ induce un morfismo inyectivo de álgebras:

$$i_{\mu_k M} : \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})$$

**Proposición 8.4.** *Si $i \neq k$, $j \neq k$, entonces:*

$$i_M(e_i \mathcal{F}_S(M) e_k \mathcal{F}_S(M) e_j) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$$

*Demostración.* Sea $z \in e_i \mathcal{F}_S(M) e_k \mathcal{F}_S(M) e_j$, entonces $z = \sum_{u=3}^{\infty} z(u)$ donde $z(u) \in e_i \mathcal{F}_S(M) e_k \mathcal{F}_S(M) e_j$. Luego $i_M(z) = \sum_{u=3}^{\infty} i_M(z(u))$. Entonces basta mostrar que $i_M(z(u)) \in \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. Se tiene que $z(u) \in e_i M^{\otimes n(1)} e_k M^{\otimes n(2)} e_j$ para ciertos enteros positivos $n(1)$ y $n(2)$. Entonces basta mostrar que $L = e_i M^{\otimes n(1)} e_k M^{\otimes n(2)} e_j$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Probemos esto mediante inducción en $n = n(1) + n(2) \geq 2$. Si $n = 2$ entonces $L = e_i M e_k M e_j$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Supongamos que la afirmación se cumple para $n' < n$ y veamos que se cumple para $n$. Los elementos de $L$ son sumas de elementos de $L' = e_i M e_{i_1} M e_{i_2} M \ldots M e_{i_{l(1)}} M e_k M e_{j_1} M e_{j_2} M \ldots e_{j_{l(2)-1}} M e_j$. Entonces se tienen las siguientes posibilidades:
(1) Si todos los $i_s$ y $j_t$ son distintos de $k$, entonces:

$$e_i M e_{i_1} M e_{i_2} M \ldots M e_{i_{l(1)}} \subseteq (\bar{e_k} M \bar{e_k})^{l(1)}$$

y por lo tanto $L'$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Similarmente,

$$e_{j_1} M e_{j_2} M \ldots e_{j_{l(2)-1}} M e_j \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$$

y luego $L'$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$.
(2) Supongamos que existe algún $i_s$ con $i_s = k$ y ninguno de los $j_s$ es igual a $k$. Entonces, como antes:

$$e_{j_1} M e_{j_2} M \ldots e_{j_{l(2)-1}} M e_j \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$$

y

$$e_i M e_{i_1} M e_{i_2} M \ldots M e_{i_{l(1)}} \subseteq e_i M^{s(1)} e_k M^{s(2)} e_{i_{l(1)}}$$

donde $s(1) + s(2) < n$. Entonces por hipótesis de inducción se concluye que $L'$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$.
(3) Algún $j_s = k$ y ninguno de los $i'_u s$ es igual a $k$. En este caso se procede como en el anterior.
(4) Algún $j_s = k$ y algún $i_t = k$. Por hipótesis de inducción, $e_i M e_{i_1} M e_{i_2} M \ldots M e_{i_{l(1)}}$ y $e_{j_1} M e_{j_2} M \ldots e_{j_{l(2)-1}} M e_j$ están contenidos en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Se sigue que $L'$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Por lo tanto cada $z(u)$ está en la imagen de $i_{\mu_k M}$ y por ende $z$ también. □

**Corolario 8.1.** *Si $i \neq k$, $j \neq k$, entonces $i_M(e_i \mathcal{F}_S(M) e_j) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$.*

*Demostración.* Sea $z = \sum_{u=1}^{\infty} z(u) \in e_i \mathcal{F}_S(M) e_j$ donde $z(u) \in M^{\otimes u}$. Cada $z(u)$ es una suma de elementos que pertenecen a $S$-submódulos $L$ de la forma $e_i M e_{j_1} M e_{j_2} \ldots e_{j_{u-1}} M e_j$. Si todos los $j_s$ son diferentes de $k$, entonces $L \subseteq (\bar{e_k} M \bar{e_k})^{\otimes u}$ y por lo tanto $i_M(L)$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Si algún $e_{j_s} = k$ entonces $L \subseteq e_i \mathcal{F}_S(M) e_k \mathcal{F}_S(M) e_j$ y aplicando la Proposición 8.4 se infiere que $i_M(L)$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Por lo tanto cada $i_M(z(u))$ pertenece a $\mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$ y por ello $i_M(z)$ también pertenece a $\mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$, como se afirmaba. □

**Lema 8.1.** *El $S$-bimódulo $Me_kM$ está $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo $M_0e_kSe_kM_0$. Si $T$ es una $Z$-base local de $M_0$ entonces $U_k = \{asb | a \in T \cap Me_k, s \in L(k), b \in T \cap e_kM\}$ es una $Z$-base local de $M_0e_kSe_kM_0$.*

*Demostración.* Consideremos el isomorfismo de $S$-bimódulos dado por multiplicación:

$$\mu_M : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to M$$

La multiplicación en el álgebra tensorial induce un isomorfismo de $S$-bimódulos:

$$\mu_M \otimes \mu_M : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \otimes_S S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to M \otimes_S M$$

este morfismo induce un isomorfismo

$$\nu : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z Se_k \otimes_S e_kS \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to Me_kM$$

y este último isomorfismo induce un isomorfismo de $Z$-bimódulos

$$\rho : (M_0 \otimes_Z Se_k) \otimes_S (e_kS \otimes_Z M_0) \to M_0e_kSe_kM_0$$

La composición determina un isomorfismo:

$$\nu(1 \otimes \rho^{-1} \otimes 1) : S \otimes_Z (M_0e_kSe_kM_0) \otimes_Z S \to Me_kM$$

dado por multiplicación. Esto prueba la primera parte del lema. Probemos la segunda parte. Notemos que existe un isomorfismo de $Z$-bimódulos:

$$\sigma : M_0e_k \otimes_F D_k \otimes_F e_kM_0 \to (M_0 \otimes_Z Se_k) \otimes_S (e_kS \otimes_Z M_0)$$

Una $Z$-base local de $M_0e_k \otimes_F D_k \otimes_F e_kM_0$ está dada por todos los elementos $a \otimes s \otimes b$ donde $a \in T \cap M_0e_k$, $s \in L(k)$, $b \in T \cap e_kM_0$; luego los elementos $\rho\sigma(a \otimes s \otimes b) = asb$ forman una $Z$-base local para $M_0e_kSe_kM_0$. Esto completa la demostración. □

**Lema 8.2.** *$\mu_kM$ está $Z$-libremente generado por el siguiente $Z$-subbimódulo:*

$$\bar{e_k}M_0\bar{e_k} \oplus M_0e_kSe_kM_0 \oplus e_k({}_0N) \oplus N_0e_k$$

*Demostración.* El isomorfismo $\mu_M : S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S \to M$ induce el siguiente isomorfismo: $\mu : \bar{e_k}S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S\bar{e_k} \to \bar{e_k}M\bar{e_k}$. Por otro lado, se tiene un isomorfismo de $S$-bimódulos $S \otimes_Z \bar{e_k}M_0\bar{e_k} \otimes_Z S \to \bar{e_k}S \otimes_Z M_0 \otimes_Z S\bar{e_k}$. La composición induce un isomorfismo dado por multiplicación:

$$S \otimes_Z \bar{e_k}M_0\bar{e_k} \otimes_Z S \to \bar{e_k}M\bar{e_k}$$

Por la Proposición 8.3, existe un isomorfismo de $S$-bimódulos dado por multiplicación:

$$S \otimes_Z N_0 \otimes_Z S \to M^*$$

así que se obtiene un isomorfismo de $S$-bimódulos:

$$S \otimes_Z N_0 \otimes_Z Se_k \to M^*e_k$$

También se tiene un isomorfismo de $S$-bimódulos:

$$S \otimes_Z N_0e_k \otimes_Z S \to S \otimes_Z N_0 \otimes_Z Se_k$$

La composición de los últimos dos isomorfismos induce un isomorfismo de $S$-bimódulos dado por multiplicación:

$$S \otimes_Z N_0e_k \otimes_Z S \to M^*e_k$$

Similarmente, por la Proposición 8.3 existe un isomorfismo de $S$-bimódulos dado por multiplicación:

$$S \otimes_Z e_k({}_0N) \otimes_Z S \to e_k({}^*M)$$

y aplicando el Lema 8.1 se obtiene un isomorfismo de $S$-bimódulos:

$$S \otimes_Z (\bar{e_k}M_0\bar{e_k} \oplus M_0e_kSe_kM_0 \oplus e_k({}_0N) \oplus N_0e_k) \otimes_Z S \to \mu_kM$$

lo que completa la prueba del lema. □

**Proposición 8.5.** *Existe un isomorfismo de $S$-bimódulos:*

$$\mu_k^2 M \cong M \oplus Me_kM \oplus M^* e_k(^*M)$$

*y el $S$-bimódulo $M \oplus Me_kM \oplus M^*e_k(^*M)$ está $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo:*

$$M_0 \oplus M_0 e_k S e_k M_0 \oplus N_0 e_k S e_k({}_0N)$$

*Demostración.* Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu_k^2(M) &= \bar{e_k}(\mu_k M)\bar{e_k} \oplus (\mu_k M)e_k(\mu_k M) \oplus (\mu_k M)^* e_k \oplus e_k(^*(\mu_k M)) \\
\bar{e_k}(\mu_k M) &= \bar{e_k} M \bar{e_k} \oplus M e_k M \oplus M^* e_k \\
\bar{e_k}(\mu_k M)\bar{e_k} &= \bar{e_k} M \bar{e_k} \oplus M e_k M \\
(\mu_k M)e_k &= (M^*)e_k = (e_k M)^* \\
e_k(\mu_k M) &= e_k(^*M) =^* (Me_k)
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
^*((\mu_k M)e_k) &=^* ((e_k M)^*) \cong e_k M \\
(e_k(\mu_k M))^* &= (^*(Me_k))^* \cong Me_k
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mu_k^2(M) &\cong \bar{e_k} M \bar{e_k} \oplus e_k M \oplus M e_k \oplus M e_k M \oplus (M^*) e_k^*(M) \\
&= M \oplus M e_k M \oplus (M^*) e_k(^*M)
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Consideremos las inclusiones:

$$\begin{aligned}
i_M &: \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M}) \\
i_{\mu_k M} &: \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})
\end{aligned}$$

Sea $u$ un elemento de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $i_M(u)$ está en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Denotaremos por $[u]$ al único elemento de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $i_{\mu_k M}([u]) = i_M(u)$.

**Lema 8.3.** *Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $e_k P e_k = 0$, entonces existe un único $[P] \in \mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $i_{\mu_k M}([P]) = i_M(P)$.*

*Demostración.* Sea $P = \sum_{u=2}^{\infty} P(u)$ donde $P(u) \in M^{\otimes u}$. Si $P$ es cuadrático entonces podemos tomar $[P] = P$ ya que $P$ no tiene 2-ciclos que pasen por $k$. Notemos que $P(u)$ es una suma de elementos de $L = e_1 M e_2 \dots e_{s-1} M e_s$. Si ocurre que algún $e_i = e_k$, entonces $1 < i < s$ y así $L \subseteq e_1 M^{n(1)} e_k M^{n(2)} e_s$. Entonces $s \neq k$ y aplicando la Proposición 8.4 se obtiene que $L$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$. Si ninguno de los $e_{i_r}$ es igual a $k$, entonces $L \subseteq (\bar{e_k} M \bar{e_k})^u$. Por lo tanto $P(u)$, y por ende $P$, pertenece a la imagen de $i_{\mu_k M}$. □

**Lema 8.4.** *Para cada $r, w \in L(i)$, $z \in D(i)$ se tiene:*

*(i)* $r^*(rw) \neq 0$ *implica* $w = e_i$.

*(ii)* $r^*(rz) \neq 0$ *implica* $e_i^*(z) \neq 0$.

*(iii)* $r^*(wr) \neq 0$ *implica* $w = e_i$.

*(iv)* $r^*(zr) \neq 0$ *implica* $e_i^*(z) \neq 0$.

*Demostración.* (i) Se tiene $rw = r^*(rw)r + \sum_{u \neq r} \lambda_u u$. Por lo tanto:

$$w = r^*(rw)e_i + \sum_{u \neq r} \lambda_u r^{-1} u$$

luego

$$e_i^*(w) = r^*(rw) + \sum_{u \neq r} \lambda_u e_i^*(r^{-1}u) = r^*(rw)$$

así que si $r^*(rw) \neq 0$ entonces $w = e_i$.
(ii) Tenemos $z = e_i^*(z) + \sum_{w \neq e_i} \lambda_w w$. Entonces $rz = re_i^*(z) + \sum_{w \neq e_i} \lambda_w rw$. De lo anterior se infiere la siguiente igualdad:

$$r^*(rz) = e_i^*(z) + \sum_{w \neq e_i} \lambda_w r^*(rw) = e_i^*(z)$$

lo que prueba (ii). El inciso (iii) se prueba de manera similar a (i) y (iv) se sigue de (iii). □

De manera similar a [10, p.79] y [18, p.73] asociamos a cada potencial $P$ de $\mathcal{F}_S(M)$, con $e_kPe_k = 0$, un nuevo potencial $\mu_k(P)$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$.

**Definición 8.1.** Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $e_kPe_k = 0$. Se define:

$$\mu_k(P) := [P] + \sum_{sa \in {}_k\hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} [btsa]((sa)^*)({}^*(bt))$$

La siguiente proposición extiende el Lema 5.3 dado en [10, p.80] y el Lema 8.4 dado en [18, p.75].

**Proposición 8.6.** *Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ un automorfismo unitriangular, entonces existe un automorfismo unitriangular $\phi$ de $\mathcal{F}_S(\widehat{M})$ y un automorfismo $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que:*

$$\phi i_M = i_M \varphi$$
$$\phi i_{\mu_k M} = i_{\mu_k M} \hat{\varphi}$$
$$\phi\left(\sum_{sa \in {}_k\hat{T}} (sa)(sa)^*\right) = \sum_{sa \in {}_k\hat{T}} (sa)(sa)^*$$
$$\phi\left(\sum_{bt \in \tilde{T}_k} ({}^*(bt))(bt)\right) = \sum_{bt \in \tilde{T}_k} ({}^*(bt))(bt)$$

*Demostración.* Consideremos los $S$-bimódulos $e_kM$ y $Me_k$. El $S$-bimódulo $e_kM$ está $Z$-libremente generado por ${}_kT = T \cap e_kM$ y $Me_k$ está $Z$-libremente generado por $T_k = T \cap Me_k$. Se tiene que ${}_k\hat{T} = \{sa | a \in_k T, s \in L(k)\}$ es una $S$-base local derecha para $(e_kM)_S$. El automorfismo $\varphi$ induce un morfismo de $S$-bimódulos:

$$\varphi : e_kM \to e_k\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} = e_kM\mathcal{F}_S(M)$$

Para cada elemento $sa \in_k \hat{T}$ se tiene:

$$\varphi(sa) = \sum_{ra_1 \in_k \hat{T}} ra_1 C_{ra_1,sa}$$

donde $C_{ra_1,sa} \in e_{\tau(a_1)}\mathcal{F}_S(M)e_{\tau(a)}$ y $C = [C_{ra_1,sa}]$ es una matriz de tamaño $m_k \times m_k$ donde $m_k = card({}_k\hat{T})$. La matriz $C$ pertenece a $\mathcal{U}$, el $F$-subespacio $M_{m_k,m_k}(\mathcal{F}_S(M))$ cerrado bajo multiplicación, cuyos elementos son las matrices $U = [u_{ra_1,sa}]$ tales que $u_{ra_1,sa} \in e_{\tau(a_1)}\mathcal{F}_S(M)e_{\tau(a)}$. Se tiene que $\mathcal{U}$ es una $F$-álgebra cuya unidad es $I_{\mathcal{U}} = [\delta_{ra_1,sa}e_{\tau(a_1)}]$. Como $\varphi$ es unitriangular entonces, para cada $sa$ se tiene $\varphi(sa) = sa + \lambda(sa)$ con $\lambda(sa) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Por lo tanto, $C = I_{\mathcal{U}} + R$ donde $R \in \mathcal{U}$ es una matriz con coeficientes en $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Se sigue que la matriz $D = I_{\mathcal{U}} + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i R^i$ es la inversa de $C$ en $\mathcal{U}$. Consideremos ahora el $S$-bimódulo $(e_kM)^*$. Recordemos que la colección de todos los elementos de la forma $a^*s^{-1}$, $a \in_k T, s \in L(k)$ es una $S$-base local izquierda para ${}_S(e_kM)^* =_S (M^*e_k)$. Se tiene que $D = [D_{sa,ta_1}]$ con $D_{sa,ta_1} \in \mathcal{F}_S(M)$.

Definamos la matriz $\bar{D} = [D_{a^*s^{-1},a_1^*t^{-1}}]$ donde $D_{a^*s^{-1},a_1^*t^{-1}} = D_{sa,ta_1}$. Sea $\psi : M^*e_k \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})M^*e_k$ el morfismo de $S$-módulos izquierdos dado por:

$$\psi(a^*s^{-1}) = \sum_{a_1^*t^{-1}} D_{a^*s^{-1},a_1^*t^{-1}} a_1^*t^{-1}$$

Para ver que $\psi$ es un morfismo de $S$-bimódulos basta mostrar (por la Proposición 8.2) que para cada $a, a_1 \in_k T, s, w \in L(k)$ se cumple la siguiente igualdad:

$$D_{a^*s^{-1},a_1^*w^{-1}} = \sum_{r\in L(k)} D_{a^*,a_1^*r^{-1}}(w^{-1})^*(r^{-1}s^{-1})$$

Entonces basta mostrar:

$$D_{sa,wa_1} = \sum_r D_{a,ra_1}(w^{-1})^*(r^{-1}s^{-1})$$

Para mostrar esto, consideremos la matriz $\hat{D} = [\hat{D}_{sa,wa_1}]$ en $\mathcal{U}$ donde:

$$\hat{D}_{sa,wa_1} = \sum_r D_{a,ra_1}(w^{-1})^*(r^{-1}s^{-1})$$

Tomando $s = e_{\sigma(a)}$ se obtiene $\hat{D}_{a,wa_1} = \sum_r D_{a,ra_1}(w^{-1})^*(r^{-1}) = D_{a,wa_1}$. Veamos que $\hat{D}$ es el inverso de $C$ en $\mathcal{U}$. Primero probemos que para cada $r, t \in L(k)$ se tiene la siguiente igualdad: $C_{ra_1,s_2a_2} = \sum_w w^*(tr^{-1}s_2)C_{ta_1,wa_2}$.

Por (ii) de la Proposición 8.1 se tiene que para cada $s_2, t \in L(k)$ y $s_1 \in D_k$: $\sum_{t_1\in L(k)} t^*(s_1t_1)C_{t_1a_1,s_2a_2} = \sum_{w\in L(k)} w^*(s_1s_2)C_{ta_1,wa_2}$

Tomando $s_1 = tr^{-1}$ en la igualdad anterior se obtiene:

$$\sum_{t_1\in L(k)} t^*(tr^{-1}t_1)C_{t_1a_1,s_2a_2} = \sum_{w\in L(k)} w^*(tr^{-1}s_2)C_{ta_1,wa_2}$$

Si $t^*(tr^{-1}t_1) \neq 0$ entonces el Lema 8.4 implica que $e_k^*(r^{-1}t_1) \neq 0$ y por lo tanto $t_1 = r$. De aquí se obtiene la igualdad deseada. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_{ra_1} \hat{D}_{sa,ra_1}C_{ra_1,s_2a_2} &= \sum_{ra_1}\sum_t D_{a,ta_1}(r^{-1})^*(t^{-1}s^{-1})C_{ra_1,s_2a_2} \\
&= \sum_{ra_1}\sum_t\sum_w D_{a,ta_1}(r^{-1})^*(t^{-1}s^{-1})w^*(tr^{-1}s_2)C_{ta_1,wa_2} \\
&= \sum_{a_1}\sum_t\sum_w\sum_r D_{a,ta_1}(r^{-1})^*(t^{-1}s^{-1})w^*(tr^{-1}s_2)C_{ta_1,wa_2} \\
&= \sum_{a_1}\sum_t\sum_w\sum_r D_{a,ta_1}w^*\left(t(r^{-1})^*(t^{-1}s^{-1})r^{-1}s_2\right)C_{ta_1,wa_2} \\
&= \sum_{a_1}\sum_t\sum_w D_{a,ta_1}w^*\left(t\left(\sum_r (r^{-1})^*(t^{-1}s^{-1})r^{-1}\right)s_2\right)C_{ta_1,wa_2} \\
&= \sum_{a_1}\sum_t\sum_w D_{a,ta_1}C_{ta_1,wa_2}w^*(s^{-1}s_2) \\
&= \delta_{a,wa_2}w^*(s^{-1}s_2) \\
&= e_k^*(s^{-1}s_2)\delta_{a,a_2} \\
&= \delta_{sa,s_2a_2}
\end{aligned}$$

de donde se infiere que $\hat{D} = C^{-1}$ en $\mathcal{U}$. Por lo tanto $\hat{D} = D$ y por ende $\psi$ es un morfismo de $S$-bimódulos. Consideremos ahora el $S$-bimódulo $Me_k$. Se tiene que $\tilde{T}_k = \{bs | b \in T_k, s \in L(k)\}$ es una $S$-base local izquierda para $_S(Me_k)$. Entonces $\varphi$ induce un morfismo de $S$-bimódulos $\varphi : Me_k \to \mathcal{F}_S(M)Me_k$. Entonces para cada $bs \in \tilde{T}_k$:

$$\varphi(bs) = \sum_{b_1 r} D_{bs,b_1 r} b_1 r$$

con $D_{bs,b_1r} \in e_{\sigma(b)}\mathcal{F}_S(M)e_{\sigma(b_1)}$. La matriz $D = [D_{bs,b_1r}]$ es una matriz de tamaño $n_k \times n_k$ donde $n_k = card(\tilde{T}_k)$. La matriz $D$ pertenece a $\mathcal{V}$, el $F$-subespacio de $M_{n_k,n_k}(\mathcal{F}_S(M))$, cuyos elementos son las matrices $V = [v_{bs,b_1r}]$ con $v_{bs,b_1r} \in e_{\sigma(b)}\mathcal{F}_S(M)e_{\sigma(b_1)}$. El $F$-subespacio $\mathcal{V}$ es una $F$-álgebra con unidad dada por $I_{\mathcal{V}} = [\delta_{bs,b_1r}e_{\sigma(b)}]$. Dado que $\varphi$ es unitriangular, entonces $D = I_{\mathcal{V}} + R$ donde $R \in \mathcal{V}$ tiene coeficientes en $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Entonces la serie $I + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i R^i$ es igual a $C = D^{-1}$, el inverso de $D$ en $\mathcal{V}$. Sea $C = [C_{bs,b_1r}]$ y consideremos el $S$-bimódulo ${}^*(Me_k) = e_k^* M$. Una $S$-base local derecha para $(e_k^*M)_S$ está dada por la colección de todos los elementos ${}^*(bs) = s^{-1}({}^*b)$ donde $b \in T_k, s \in L(k)$. Sea $\rho : e_k({}^*M) \to e_k({}^*M)\mathcal{F}_S(\widehat{M})$ el morfismo de $S$-módulos derechos dado por:

$$\rho(s^{-1}({}^*b)) = \sum_{r^{-1}({}^*b_1)} r^{-1}({}^*b_1)C_{r^{-1}({}^*b_1),s^{-1}({}^*b)}$$

donde $C_{r^{-1}({}^*b_1),s^{-1}({}^*b)} = C_{b_1r,bs}$. Para ver que $\rho$ es un morfismo de $S$-bimódulos basta mostrar que los elementos $C_{r^{-1}({}^*b_1),s^{-1}({}^*b)}$ satisfacen (iii) de la Proposición 8.1, esto es:

$$C_{b_1r,bs_1} = \sum_{t \in L(k)} (r^{-1})^*(s_1^{-1}t^{-1})C_{b_1t,b}$$

para cada $b, b_1 \in T_k$, $r, s_1 \in L(k)$. Para mostrar esto, consideremos la matriz $\hat{C} = [\hat{C}_{b_1r,bs}] \in \mathcal{V}$ donde:

$$\hat{C}_{b_1r,bs} = \sum_{t \in L(k)} (r^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})C_{b_1t,b}$$

Tomando $s = e_k$ se obtiene $\hat{C}_{b_1r,b} = C_{b_1r,b}$. Probemos que $\hat{C} = D^{-1}$. Primero veamos que la siguiente igualdad se cumple para cada $b, b_1 \in T_k, s, r, t \in L(k)$:

$$D_{bs,b_1r} = \sum_{w \in L(k)} D_{bw,b_1t}w^*(sr^{-1}t)$$

Por (ii) de la Proposición 8.2 se tiene que para cada $s_1 \in D_k$: $\sum_{w\in L(k)} D_{bw,b_1t}w^*(ss_1) = \sum_{t_1 \in L(k)} D_{bs,b_1t_1}t^*(t_1s_1)$. Tomando $s_1 = r^{-1}t$: $\sum_{w \in L(k)} D_{bw,b_1t}w^*(sr^{-1}t) = \sum_{t_1\in L(k)} D_{bs,b_1t_1}t^*(t_1r^{-1}t)$.
Por (iv) del Lema 8.4 se obtiene que $t^*(t_1r^{-1}t) \neq 0$ implica $e_k^*(t_1r^{-1}) \neq 0$ y por ello $t_1 = r$. Por lo tanto: $\sum_{w\in L(k)} D_{bw,b_1t}w^*(sr^{-1}t) = D_{bs,b_1r}$ y se sigue la igualdad deseada. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_{b_1,r} D_{bs,b_1r}\hat{C}_{b_1r,b_2s_1} &= \sum_{t,b_1,r} D_{bs,b_1r}(r^{-1})^*(s_1^{-1}t^{-1})C_{b_1t,b_2} \\
&= \sum_{t,r,b_1,w} D_{bw,b_1t}w^*(sr^{-1}t)(r^{-1})^*(s_1^{-1}t^{-1})C_{b_1t,b_2} \\
&= \sum_{t,r,b_1,w} D_{bw,b_1t}C_{b_1t,b_2}w^*(s(r^{-1})^*(s_1^{-1}t^{-1})r^{-1}t) \\
&= \sum_{t,b_1,w} D_{bw,b_1t}C_{b_1t,b_2}w^*(s(s_1^{-1}t^{-1})t) \\
&= \delta_{b,b_2}\delta_{s,s_1} \\
&= \delta_{bs,b_2s_1}
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\rho$ es morfismo de $S$-bimódulos. Se tiene entonces un morfismo de $S$-bimódulos:

$$\phi_0 = (\varphi, \psi, \rho) : M \oplus (M^*)e_k \oplus e_k({}^*M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})$$

dicho morfismo satisface que para cada $z \in \widehat{M}$, $\phi_0(z) = z + \lambda(z)$, con $\lambda(z) \in \mathcal{F}_S(\widehat{M})^{\geq 2}$, donde $\varphi, \psi, \rho$ también tienen esta propiedad. Por lo tanto, $\phi_0$ se puede extender a un automorfismo unitriangular $\phi$ de $\mathcal{F}_S(\widehat{M})$. Entonces:

$$\phi(\mu_k M) = \phi(\bar{e_k} M \bar{e_k}) \oplus \phi(M e_k M) \oplus \phi(e_k^* M) \oplus \phi(M^* e_k)$$

Notemos que $\phi(\bar{e_k} M \bar{e_k}) = i_M(\bar{e_k}\varphi(M)\bar{e_k})$. Por el Corolario 8.1, se tiene que $\phi(\bar{e_k} M \bar{e_k}) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. Entonces $\phi(Me_kM) = \phi(i_M(Me_kM)) = i_M(\varphi(Me_kM)) = i_M(\varphi(\bar{e_k} M e_k M \bar{e_k})) = i_M(\bar{e_k}\varphi(M)e_k\varphi(M)\bar{e_k}) \subseteq i_M(\bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k})$. Aplicando la Proposición 8.4, se infiere que $i_M(\bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k})$ está contenido en la imagen de $i_{\mu_k M}$ y por lo tanto $\phi(Me_kM) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. También $\phi(e_k({}^*M)) = \phi(e_k({}^*M)\bar{e_k}) \subseteq e_k({}^*M)\bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$. Notemos que $e_k^*M$ y $\bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$ están contenidos en $\mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. En consecuencia, $\phi(e_k({}^*M)) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. De manera similar se prueba que $\phi((M^*)e_k) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. Se concluye que $\phi(\mu_k M) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. De lo anterior se deduce que $\phi$ induce un morfismo de $S$-bimódulos:

$$\hat{\varphi}_0 : \mu_k M \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)$$

tal que $\phi i_{\mu_k M} = i_{\mu_k M}\hat{\varphi}_0$. Entonces $\hat{\varphi}_0$ se puede extender a un automorfismo de álgebras $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $\phi i_{\mu_k M} = i_{\mu_k M}\hat{\varphi}$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\phi\left(\sum_{sa\in_k\hat{T}} (sa)(sa)^*\right) = \sum_{ra_1,sa,ta_2} ra_1 C_{ra_1,sa} D_{sa,ta_2}(ta_2)^* = \sum_{ra_1}(ra_1)(ra_1)^* = \sum_{sa\in_k\hat{T}} (sa)(sa)^*$$

y

$$\phi\left(\sum_{bt\in\hat{T}_k} ({}^*(bt))(bt)\right) = \sum_{bt,b_1r,b_2s} ({}^*(b_1r))C_{b_1r,bt}D_{bt,b_2s}(b_2s) = \sum_{bt\in\hat{T}_k} ({}^*(bt))(bt)$$

□

**Teorema 8.1.** *Sea $\varphi$ un automorfismo unitriangular de $\mathcal{F}_S(M)$ y sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ con $e_kPe_k = 0$, entonces existe un automorfismo unitriangular $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $\hat{\varphi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\varphi(P))$.*

*Demostración.* Tomemos el automorfismo $\phi$ de $\mathcal{F}_S(\widehat{M})$ de la Proposición 8.6 Notemos que $\phi$ induce un automorfismo de álgebras $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$. Se tiene $\mu_k(P) = [P] + \Delta_k$, donde:

$$\Delta_k = \sum_{sa\in_k\hat{T}, bt\in\tilde{T}_k} [btsa]((sa)^*)({}^*(bt))$$

El potencial $\Delta_k$ es cíclicamente equivalente a

$$\Delta_k' = \sum_{sa\in_k\hat{T}, bt\in\tilde{T}_k} ({}^*(bt))[btsa](sa)^*$$

Como $\mu_k P$ es cíclicamente equivalente a $[P] + \Delta_k'$, entonces $\hat{\varphi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\hat{\varphi}([P]) + \hat{\varphi}(\Delta_k')$. Aplicando el morfismo $i_{\mu_k M}$ a la última expresión se obtiene:

$$\begin{aligned}
i_{\mu_k M}\left(\hat{\varphi}([P]) + \hat{\varphi}(\Delta_k')\right) = \phi i_{\mu_k M}([P]) + \phi i_{\mu_k M}(\Delta_k') &= \phi i_M(P) + \phi i_{\mu_k M}\left(\sum_{sa\in_k\hat{T}, bt\in\tilde{T}_k} ({}^*(bt))[btsa](sa)^*\right) \\
&= i_M(\varphi(P)) + \phi\left(\sum_{sa\in_k\hat{T}, bt\in\tilde{T}_k} ({}^*(bt)) i_{\mu_k M}[btsa](sa)^*\right) \\
&= i_{\mu_k M}[\varphi(P)] + \phi\left(\sum_{sa\in_k\hat{T}, bt\in\tilde{T}_k} ({}^*(bt)) i_M(btsa)(sa)^*\right) \\
&= i_{\mu_k M}[\varphi(P)] + \sum_{sa\in_k\hat{T}, bt\in\tilde{T}_k} ({}^*(bt))(bt)(sa)(sa)^*
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$i_{\mu_k M}(\hat{\varphi}([P]) + \hat{\varphi}(\Delta'_k)) = i_{\mu_k M}\left([\varphi(P)] + \sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} ({}^*(bt))[btsa](sa)^*\right)$$

Se sigue que

$$\hat{\varphi}([P] + \Delta'_k) = [\varphi(P)] + \Delta'_k = \mu_k(\varphi(P))$$

En consecuencia, $\hat{\varphi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\varphi(P))$. □

**Lema 8.5.** *Sea $X$ una base local para $(e_k M)_S$ y $Y$ una base local para ${}_S(Me_k)$. Entonces* $\sum_{y \in Y, x \in X} [yx](x^*)({}^*y)$ *es cíclicamente equivalente a* $\sum_{bt \in \tilde{T}_k, sa \in_k \hat{T}} [btsa]((sa)^*)({}^*(bt))$.

*Demostración.* Existe un automorfismo de $S$-bimódulos $\psi : M \to M$ tal que $\psi(X) =_k \hat{T}$ y $\psi(Y) = \hat{T}_k$. Entonces

$$\psi(tb) = \sum_{sa \in_k \hat{T}, \tau(a) = \tau(b)} (sa)\beta_{sa,tb}$$

y

$$(\psi(tb))^* = \sum_{sa \in_k \hat{T}, \tau(a) = \tau(b)} \gamma_{tb,sa}(sa)^*$$

donde $\beta_{sa,tb}, \gamma_{tb,sa} \in D_{\tau(a)}$. Luego

$$\delta_{tb,t'b'} e_{\tau(b)} = \sum_{sa \in_k \hat{T}, \tau(a) = \tau(b)} e_{\tau(b)} \gamma_{tb,sa} \beta_{sa,t'b'}$$

Para cada idempotente $e_i$, consideremos las matrices $B_i = [\beta_{sa,x}]_{\tau(a) = \tau(x) = e_i}$ y $G_i = [\gamma_{sa,x}]_{\tau(a) = \tau(x) = e_i}$. Usando la notación de la Proposición 8.6, se tiene que las matrices $B$ y $G$ pertenecen a $\mathcal{U}$. Entonces $B$ es el inverso de $G$ en $\mathcal{U}$. De manera análoga:

$$\psi(as) = \sum_{bt \in \tilde{T}_k} \sigma_{as,bt}(bt)$$

y

$${}^*(\psi(as)) = \sum_{bt \in \tilde{T}_k} ({}^*(bt))\rho_{bt,as}$$

donde la matriz $[\sigma_{as,bt}] \in \mathcal{V}$ es el inverso de la matriz $[\rho_{bt,as}] \in \mathcal{V}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{y \in Y, x \in X} [yx](x^*)({}^*y) &= \sum_{v,bt,b't' \in \tilde{T}_k, u, sa, s't' \in_k \hat{T}} \sigma_{v,bt}[btsa]\beta_{sa,u}\gamma_{u,s'b'}((s'a')^*)({}^*(b't'))\rho_{b't',v} \\ &= \sum_{v,bt,b't' \in \tilde{T}_k, u, sa, s't' \in_k \hat{T}} \sigma_{v,bt}[btsa]\beta_{sa,u}\gamma_{u,s'b'}((s'a')^*)({}^*(b't'))\rho_{b't',v}\end{aligned}$$

y el último potencial es cíclicamente equivalente al potencial

$$\sum_{v,bt,b't' \in \tilde{T}_k, sa, s't' \in_k \hat{T}} \rho_{b't',v}\sigma_{v,bt}[btsa]((s'a')^*)({}^*(b't')) = \sum_{bt \in \tilde{T}_k, sa \in_k \hat{T}} [btsa]((sa)^*)({}^*(bt))$$

lo que completa la prueba del lema.

□

**Teorema 8.2.** *Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M_1) \to \mathcal{F}_S(M)$ un isomorfismo de álgebras con $\varphi_{|S} = id_S$ y sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M_1)$ con $e_kPe_k = 0$, entonces existe un isomorfismo de álgebras $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_S(\mu_k M_1) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $\tilde{\varphi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\varphi(P))$.*

*Demostración.* Consideremos el isomorfismo de $S$-bimódulos $\varphi^{(1)} : M_1 \to M$. Sean $j_{M_1} : M_1 \to \mathcal{F}_S(M_1)$ y $j_M : M \to \mathcal{F}_S(M)$ las inclusiones. Entonces $j_M\varphi^{(1)} : M_1 \to \mathcal{F}_S(M)$ es un morfismo de $S$-bimódulos. Por la Proposición 3.3, existe un único isomorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{F}_S(M_1) \to \mathcal{F}_S(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "j_M\varphi^{(1)}"] \arrow[d, "j_{M_1}"] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{F}_S(M_1) \arrow[r, dotted, "\psi"] & \mathcal{F}_S(M) \end{tikzcd}$$

Notemos que $\varphi\psi^{-1}$ es un automorfismo unitriangular de $\mathcal{F}_S(M)$ y claramente $\varphi = (\varphi\psi^{-1})\psi$. Esto muestra que $\varphi$ es igual a la composición de un isomorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M_1) \to \mathcal{F}_S(M)$, inducido por un isomorfismo de $S$-bimódulos $M_1 \to M$, con un automorfismo unitriangular de $\mathcal{F}_S(M)$.

Por el Teorema 8.1, basta establecer el resultado cuando $\varphi$ es inducido por un isomorfismo de $S$-bimódulos $\phi : M_1 \to M$. Supongamos entonces que $\varphi$ es inducido por un isomorfismo de $S$-bimódulos $\phi : M_1 \to M$. Sean $T_1$ y $T_2$ conjuntos de generadores $Z$-libres de $M_1$ y $M$, respectivamente. Entonces $\phi$ induce isomorfismos de $S$-bimódulos

$$\phi^1 : \bar{e_k}M_1\bar{e_k} \to \bar{e_k}M\bar{e_k}$$
$$\phi^2 : M_1e_kM_1 \to Me_kM$$

y el morfismo $\phi^{-1} : M \to M_1$ induce un isomorfismo de $S - D_k$-bimódulos

$$(\phi^{-1})^* : (e_kM_1)^* \to (e_kM)^*$$

y un isomorfismo de $D_k - S$-bimódulos

$$^*(\phi^{-1}) : \quad ^*(M_1e_k) \to \quad ^*(Me_k)$$

Dichos isomorfismos inducen isomorfismos de $S$-bimódulos: $\mu_kM \to \mu_kM_1$, $\widehat{M_1} \to \widehat{M}$ y estos morfismos a su vez inducen isomorfismos de álgebras:

$$\tilde{\phi} : \mathcal{F}_S(\mu_kM_1) \to \mathcal{F}_S(\mu_kM)$$
$$\hat{\phi} : \mathcal{F}_S(\widehat{M_1}) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})$$

tales que $\hat{\phi}i_{\mu_kM} = i_{\mu_kM}\tilde{\phi}$ y $\hat{\phi}i_M = i_M\phi$. Entonces

$$i_{\mu_kM}(\tilde{\phi}[P]) = \hat{\phi}i_{\mu_kM}([P]) = \hat{\phi}i_M(P) = i_M(\phi(P)) = i_{\mu_kM}([\phi(P)])$$

y por lo tanto $\tilde{\phi}([P]) = [\phi(P)]$. Se tiene

$$\mu_kP = [P] + \sum_{b't\in(\tilde{T}_1)_k, sa'\in_k\hat{T}_1} [b'tsa']((sa')^*)(^*(b't))$$

Además:

$$\begin{aligned} i_{\mu_kM}\tilde{\phi}([b'tsa']) &= \hat{\phi}i_{\mu_kM}([b'tsa']) \\ &= \hat{\phi}i_M(b'tsa') \\ &= \hat{\phi}i_M(b't)\hat{\phi}i_M(sa') \\ &= i_M(\phi(b't))i_M(\phi(sa')) \\ &= i_M(\phi(b't)\phi(sa')) \\ &= i_{\mu_kM}([\phi(b't)\phi(sa')]) \end{aligned}$$

luego $\tilde{\phi}([b'tsa']) = [\phi(b't)\phi(sa')]$.
Por otra parte, para cada $sa', s_1a_1' \in_k \hat{T}_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}((sa')^*)(\phi(s_1a_1')) &= (\phi^{-1})^*((sa')^*)(\phi(s_1a_1')) \\ &= ((sa')^* \circ \phi^{-1})(\phi(s_1a_1')) \\ &= (sa')^*(\phi^{-1}(\phi(s_1a_1'))) \\ &= (sa')^*(s_1a_1') \\ &= \delta_{sa',s_1a_1'}e_{\tau(a)}\end{aligned}$$

Se sigue que $\tilde{\phi}((sa')^*) = (\phi(sa'))^*$. De manera análoga se prueba que $\tilde{\phi}({}^*(b't)) = {}^*(\phi(b't))$. Por lo tanto:

$$\tilde{\phi}(\mu_kP) = [\phi(P)] + \sum_{b't\in(\tilde{T}_1)_k, sa'\in_k\hat{T}_1} [\phi(b't)\phi(sa')]((\phi(sa')^*)({}^*(\phi(b't)))$$

Usando el Lema 8.5 se infiere que el último potencial es cíclicamente equivalente a:

$$[\phi(P)] + \sum_{bt\in\tilde{T}_k, sa\in_k\hat{T}} [btsa]((sa)^*)({}^*(bt)) = \mu_k(\phi(P))$$

lo que completa la demostración. □

Si $M$ satisface la siguiente condición: para cualquier idempotente $e_i$, $e_iMe_k \neq 0$ implica $e_kMe_i = 0$ y $e_kMe_i \neq 0$ implica $e_iMe_k = 0$, entonces $\mu_k(P) = \widetilde{P}$ está definido siempre y cuando $P$ sea un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ que satisface $e_kPe_k = 0$. Ahora definimos $\mu_k(P)$ para cualquier potencial $P$ de $\mathcal{F}_S(M)$.

Para cada $m \geq 1$, sea $A(T)_m$ el conjunto de todos los elementos no-cero $x$ en $\mathcal{F}_S(M)$ tales que:

$$x = t_1(x)a_1(x)t_2(x)\dots t_m(x)a_m(x)t_{m+1}(x)$$

donde $a_i(x) \in T$,$t_i(x) \in L(\sigma(a_i(x)))$ para cada $i = 1,\dots,m$ y $t_{m+1}(x) \in L(\tau(a_m(x)))$. Para cada $m \geq 2$ sea $B(T)_m = A(T)_m \cap \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$. Claramente $B(T)_m$ es una $F$-base de $(M^{\otimes m})_{cyc}$. Sean $A(T) = \bigcup_{m=2}^{\infty} A(T)_m$ y $B(T) = \bigcup_{m=2}^{\infty} B(T)_m$.
Dado un potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $P$ puede ser escrito de manera única como

$$P = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{x\in B(T)_m} f_x(P)x$$

donde $f_x(P) \in F$.

Sea $\kappa : B(T)_m \to M^{\otimes m}$ el morfismo definido como sigue: si $x = t_1(x)a_1(x)\dots t_m(x)a_m(x)t_{m+1}(x) \in B(T)_m$ y $a_1(x) \notin T \cap e_kM$ entonces $\kappa(x) = x$; si $a_1(x) \in T \cap e_kM$ entonces $\kappa(x) = t_2(x)a_2(x)\dots t_m(x)a_m(x)t_{m+1}(x)t_1(x)a_1(x)$. Extendemos $\kappa : \mathcal{F}_S(M)_{cyc} \to \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ como sigue: para cada potencial $P = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{x\in B(T)_m} f_x(P)x$, sea $\kappa(P) = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{x\in B(T)_m} f_x(P)\kappa(x)$; luego $\kappa$ es una $F$-transformación lineal continua. Claramente $e_k\kappa(P)e_k = 0$.

**Afirmación 8.1.** *Sean $x, y \in A(T)$ tales que $xy \in \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$, entonces $\kappa(xy - yx) = \alpha\beta - \beta\alpha$ donde $\alpha, \beta \in \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$.*

*Demostración.* Si $x, y$ no pertenecen a $T \cap e_kM$ entonces $\kappa(xy) = xy$ y $\kappa(yx) = yx$ y el resultado es inmediato. Supongamos ahora que $a_1(x), a_1(y) \in_k T = T \cap e_kM$. Entonces:

$$xy = \sum_{u\in L(\sigma(a_1))} c_ut_1(x)a_1(x)\dots t_n(x)a_n(x)ua_1(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)$$

donde $t_{n+1}(x)t_1(y) = \sum_{u\in L(\sigma(a_1))} c_uu$, $c_u \in F$. Similarmente:

$$yx = \sum_{v\in L(\sigma(a_1))} d_v t_1(y)a_1(y)\dots t_m(y)va_1(x)\dots a_n(x)t_{n+1}(x)$$

donde $t_{m+1}(y)t_1(x) = \sum_{v\in L(\sigma(a_1))} d_v v$, $c_v \in F$. Se tiene $\kappa(xy) = \sum_{u\in L(\sigma(a_1))} c_u t_2(x)a_2(x)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)$, luego:

$$\kappa(xy) = t_2(x)a_2(x)\dots a_n(x)t_{n+1}(x)t_1(y)a_1(y)t_2(y)a_2(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)$$

Similarmente:

$$\kappa(yx) = t_2(y)a_2(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)t_2(x)a_2(x)\dots a_n(x)t_{n+1}(x)t_1(y)a_1(y)$$

Por lo tanto, $\kappa(xy - yx) = \alpha\beta - \beta\alpha$ donde:

$$\alpha = t_2(x)a_2(x)\dots a_n(x)t_{n+1}(x)t_1(y)a_1(y)$$
$$\beta = t_2(y)a_2(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)$$

Claramente $\alpha, \beta \in \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$. Finalmente supongamos, sin perder generalidad, que $a_1(x) \in_k T$ y $a_1(y) \notin_k T$. Entonces, como antes:

$$\kappa(xy) = t_2(x)a_2(x)\dots a_n(x)t_{n+1}(x)t_1(y)a_1(y)t_2(y)a_2(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)$$
$$\kappa(yx) = t_1(y)a_1(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)t_2(x)a_2(x)\dots t_n(x)a_n(x)t_{n+1}(x)$$

luego $\kappa(xy - yx) = \alpha\beta - \beta\alpha$, donde $\alpha = t_2(x)a_2(x)\dots a_n(x)t_{n+1}(x)$, $\beta = t_1(y)a_1(y)\dots a_m(y)t_{m+1}(y)t_1(x)a_1(x)$ y $\alpha, \beta \in \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$. Esto completa la demostración. □

**Definición 8.2.** Diremos que un potencial $P$ es 2-maximal si $P^{(2)}$ es maximal.

**Observación 8.2.** Si $P$ y $Q$ son potenciales derecho-equivalentes, entonces $P$ es 2-maximal si y sólo si $Q$ es 2-maximal.

*Demostración.* Recordemos que $\mathcal{K}$ es el conjunto de todos los pares $(i, j)$ tales que $e_iMe_j \neq 0$, $e_jMe_i \neq 0$ y $\dim_F e_iMe_j \leq \dim_F e_jMe_i$. Notemos que $P$ es 2-maximal si y sólo si para cada $(i, j) \in \mathcal{K}$ se tiene $\dim_F e_j\Xi_2(P)e_i = \dim_F e_iMe_j$. Sea $\phi$ el automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q$. Entonces por la Proposición 7.8: $\Xi_2(Q) = \Xi_2(\phi(P)) = \phi^{(1)}(\Xi_2(P))$. Por lo tanto, $\dim_F e_j\Xi_2(Q)e_i = \dim_F \phi^{(1)}(e_j\Xi_2(P)e_i) = \dim_F e_j\Xi_2(P)e_i = \dim_F e_iMe_j$, como se afirmaba. □

**Definición 8.3.** Para cualquier potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$ definimos $\mu_kP = \mu_k(\kappa(P))$.

**Proposición 8.7.** *Si $P$ y $Q$ son potenciales cíclicamente equivalentes en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces $\mu_kP$ es cíclicamente equivalente a $\mu_kQ$.*

*Demostración.* Se tiene que $P - Q = \lim_{n\to\infty} u_n$ donde cada $u_n$ es una suma finita de elementos de la forma $AB - BA$ con $A, B \in \mathcal{F}_S(M)$. Supongamos que $A = \sum_{x\in B(T)} f(x)x$, $B = \sum_{x\in B(T)} g(x)x$, entonces $AB - BA = \sum_{x,y\in B(T)} f(x)g(y)(xy - yx)$. Notemos también que $\kappa(xy - yx) = \alpha_{xy}\beta_{xy} - \beta_{xy}\alpha_{xy}$ donde $\alpha_{xy}, \beta_{xy} \in \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$. Entonces $\kappa(P - Q) = \lim_{n\to\infty} \kappa(u_n)$. Además:

$$i_{\mu_kM}([\kappa(P - Q)]) = \lim_{n\to\infty} i_M(\kappa(u_n)) = \lim_{n\to\infty} i_{\mu_kM}([\kappa(u_n)]) = i_{\mu_kM}\left(\lim_{n\to\infty}[\kappa(u_n)]\right)$$

luego $[\kappa(P - Q)] = \lim_{n\to\infty}[\kappa(u_n)]$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} i_M(\kappa(AB - BA)) &= \sum_{x,y\in B(T)} f(x)g(y)i_M(\alpha_{xy}\beta_{xy} - \beta_{xy}\alpha_{xy}) \\ &= \sum_{x,y\in B(T)} f(x)g(y)(i_M(\alpha_{xy})i_M(\beta_{xy}) - i_M(\beta_{xy})i_M(\alpha_{xy})) \\ &= i_{\mu_kM}\left(\sum_{x,y\in B(T)} f(x)g(y)([\alpha_{xy}][\beta_{xy}] - [\beta_{xy}][\alpha_{xy}])\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[\kappa(AB-BA)] = \sum_{x,y\in B(T)} f(x)g(y)([\alpha_{xy}][\beta_{xy}]-[\beta_{xy}][\alpha_{xy}])$. Entonces $[\kappa(AB-BA)] \in [\mathcal{F}_S(\mu_k M), \mathcal{F}_S(\mu_k M)]$ y por ende $[\kappa(P-Q)] \in [\mathcal{F}_S(\mu_k M), \mathcal{F}_S(\mu_k M)]$. De esto se infiere que $[\kappa(P)]$ es cíclicamente equivalente a $[\kappa(Q)]$. En consecuencia, $\mu_k(\kappa(P))$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\kappa(Q))$. □

**Proposición 8.8.** *Sean $P \in \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ y $Q \in \mathcal{F}_S(M_1)_{cyc}$. Supongamos que $P$ es derecho-equivalente a $Q$, entonces $\mu_k P$ es derecho-equivalente a $\mu_k Q$.*

*Demostración.* Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M_1)$ un isomorfismo de álgebras, con $\phi_{|S} = id_S$, tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q$. Por la Proposición 8.7, $\mu_k(\phi(P))$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(Q)$. Aplicando el Teorema 8.2 se deduce la existencia de un isomorfismo de álgebras $\hat{\phi} : \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M_1)$ tal que $\hat{\phi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\phi(P))$. Consecuentemente, $\mu_k P$ es derecho-equivalente a $\mu_k Q$. □

**Teorema 8.3.** *El potencial $\mu_k^2(P)$ es derecho-equivalente al potencial $P \oplus W$ donde $W$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(Me_kM \oplus M^*e_k({}^*M))$.*

*Demostración.* Recordemos que existe un isomorfismo de $S$-bimódulos $\lambda : \mu_k^2 M \to M \oplus Me_kM \oplus M^*e_k({}^*M)$. Este morfismo tiene las siguientes propiedades:
(1) Si $\mu = m_1w_1m_2w_2\ldots m_sw_sm_{s+1}$ donde $m_i \in \bar{e_k}M\bar{e_k}$ y $w_i \in Me_kM$, entonces $\lambda(\mu) = m_1[w_1]m_2[w_2]\ldots m_s[w_s]m_{s+1}$ donde para cada $w \in Me_kM$, $[w]$ denota la imagen de $w$ bajo el morfismo inclusión de $Me_kM$ en $M \oplus Me_kM \oplus M^*e_k({}^*M)$.
(2) $\lambda({}^*((sa)^*)) = sa$ y $\lambda(({}^*(bt))^*) = bt$. Entonces se obtiene la siguiente igualdad:

$$\lambda(\mu_k^2 P) = \lambda([P]) + \sum_{bt,sa}\Big([btsa][(sa)^*({}^*bt)] + [(sa)^*({}^*(bt))](bt)(sa)\Big)$$

el elemento anterior es cíclicamente equivalente a:

$$\lambda([P]) + \sum_{bt,sa}([btsa] + (bt)(sa))\,[(sa)^*({}^*(bt))]$$

Aplicando la Proposición 8.5 se infiere que:

$$\mathcal{T} = T \cup \{asb : a \in T_k, s \in L(k), b \in_k T\} \cup \{a^*t^*b | a \in T_k, t \in L(k), b \in_k T\}$$

es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M \oplus Me_kM \oplus M^*e_k({}^*M)$. Sea $\psi$ el automorfismo de $M \oplus Me_kM \oplus M^*e_k({}^*M)$ dado por $\psi(b) = -b$ si $b \in_k T$ y la identidad en el resto de los generadores $Z$-libres de $\mathcal{T}$. Entonces $\psi\lambda(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a:

$$\lambda([P]) + \sum_{bt,sa}([btsa] - (bt)(sa))[(sa)^*({}^*(bt))]$$

Para cada $bt$ y $sa$ se tiene

$$[btsa] = \sum_{r\in L(k)} r^*(ts)[bra]$$
$$(bt)(sa) = \sum_{r\in L(k)} r^*(ts)bra$$

Por lo tanto

$$[btsa] - (bt)(sa) = \sum_{r\in L(k)} r^*(ts)([bra] - bra)$$

Por otro lado:

$$[(sa)^*({}^*(bt))] = [a^*s^{-1}t^{-1}({}^*b)] = \sum_{r_1\in L(k)} (r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})[a^*r_1^{-1}({}^*b)]$$

Entonces $\psi\lambda(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\lambda([P]) + \sum_{bt,sa}\left(\sum_{r\in L(k)} r^*(ts)([bra]-bra)\right)\left(\sum_{r_1\in L(k)}(r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})[a^*r_1^{-1}(^*b)]\right)\\
&= \lambda([P]) + \sum_{b,a,r,r_1}\left(\sum_{t,s\in L(k)} r^*(ts)([bra]-bra)(r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})[a^*r_1^{-1}(^*b)]\right)\\
&= \lambda([P]) + \sum_{b,a,r,r_1}\big(([bra]-bra)[a^*r_1^{-1}(^*b)]\big)\left(\sum_{t,s\in L(k)} r^*(ts)(r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})\right)\\
&= \lambda([P]) + \sum_{b,a,r,r_1}([bra]-bra)[a^*r_1^{-1}(^*b)]\delta_{r,r_1}c_k\\
&= \lambda([P]) + \sum_{b,a,r}([bra]-bra)[a^*r^{-1}(^*b)]c_k
\end{aligned}$$

donde hemos usado la Proposición 7.3 y $c_k = [D_k : F]$. Consideremos el automorfismo $\phi$ de $\mathcal{F}_S(M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M))$ definido como sigue: para cada generador $[bra]$, se tiene $\phi([bra]) = [bra]+bra$ y $\phi$ es la identidad en el resto de los generadores de $\mathcal{T}$. Entonces $\phi\psi\lambda(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a:

$$\phi\lambda([P]) + \sum_{b,a,r}[bra][a^*r^{-1}(^*b)]c_k$$

El potencial $P$ es una suma de elementos de la forma $h_1w_1h_2w_2h_3\dots h_sw_sh_{s+1}$ donde cada $h_i$ es un elemento de la subálgebra generada por $S$ y $\bar{e_k}M\bar{e_k}$ y cada elemento $w_i$ es de la forma $bra$ con $b\in T_k, a\in_k T, r\in L(k)$. El potencial $\lambda([P])$ es una suma de elementos de la forma $h_1[w_1]h_2[w_2]h_3\dots h_s[w_{s+1}]$ y por ello $\phi(\lambda[P])$ es una suma de elementos de la forma:

$$h_1([w_1]+w_1)h_2([w_2]+w_2)h_3\dots h_s([w_{s+1}]+w_{s+1})$$

y este elemento es cíclicamente equivalente a un elemento de $\mathcal{F}_S(M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M))^{\geq 1}$ contenido en la subálgebra generada por $S$ y $M\oplus Me_kM$. Se obtiene la siguiente igualdad:

$$\phi(\lambda([P])) + \sum_{b,a,r}[bra][a^*r^{-1}(^*b)]c_k = P + \sum_{b,a,r}[bra]\big([a^*r^{-1}(^*b)]c_k + f(bra)\big)$$

donde $f(bra)\in\mathcal{F}_S(M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M))^{\geq 1}$. Tomemos ahora el morfismo de $S$-bimódulos $\hat{\psi}$ de $\mathcal{F}_S(M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M))$ dado como $\hat{\psi}([a^*r^{-1}(^*b)]) = c_k^{-1}([a^*r^{-1}(^*b)] - f(bra))$ y la identidad en el resto de los generadores de $\mathcal{T}$. Sea $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_0,\hat{\psi}_1)$ donde:

$$\begin{aligned}
&\hat{\psi}_0 : M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M)\to M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M)\\
&\hat{\psi}_1 : M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M)\to \mathcal{F}_S(M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M))^{\geq 1}
\end{aligned}$$

entonces $\hat{\psi}_0$ es un automorfismo ya que si tomamos la base local de ${}_S(M\oplus Me_kM\oplus M^*e_k(^*M))$ inducida por $\mathcal{T}$ y las bases $L(i)$, junto con los elementos $s[a^*r^{-1}(^*b)]$, $s\in L(\sigma(a^*))$, entonces $\hat{\psi}_0$ tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C & 0\\ D & Id\end{bmatrix}$$

donde $C$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \alpha_3 & 0\\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{c_k}\end{bmatrix}$$

Se sigue que $\hat{\psi}$ es un automorfismo de álgebras y $\hat{\psi}\phi\psi\lambda(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a:

$$P+\sum_{b,a,r}[bra][a^*r^{-1}(^*b)]$$

El potencial cuadrático $W = \sum_{b,a,r}[bra][a^*r^{-1}(^*b)]$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(Me_kM \oplus M^*e_k(^*M))$. Esto completa la prueba. □

**Proposición 8.9.** *Sean $M = M_1 \oplus M_2$ y $M = N_1 \oplus N_2$ dos descomposiciones del $S$-bimódulo $M$. Sea $P = P^{\geq 3} + P^{(2)}$ un potencial con respecto a la descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $P^{(2)}$ es trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$. Similarmente, sea $Q = Q^{\geq 3} + Q^{(2)}$ un potencial con respecto a la descomposición $M = N_1 \oplus N_2$ donde $Q^{(2)}$ es trivial en $\mathcal{F}_S(N_2)$. Si $P$ y $Q$ son derecho-equivalentes, entonces $P^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$.*

*Demostración.* Sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ un automorfismo de álgebras tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q$. Si $\phi(M) = M$ entonces $\phi(P)^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$ ya que $\phi(P^{\geq 3}) = \phi(P)^{\geq 3}$. Supongamos ahora que $\phi$ es unitriangular, entonces $N_2 = \Xi(Q^{(2)}) = \Xi_2(Q) = \Xi_2(P) = M_2$. Por la Proposición 6.4, $P^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$. Supongamos ahora que el morfismo $\phi$ está dado por un par de morfismos $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$. Sea $\varphi$ el isomorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M)$ inducido por el par $(\phi^{(1)}, 0)$. Entonces $\psi = \phi\varphi^{-1}$ es unitriangular. Claramente $\varphi(M) = M$ y $M = \varphi(M_1) \oplus \varphi(M_2)$, y con respecto a esta descomposición $\varphi(P) = \varphi(P)^{\geq 3} \oplus \varphi(P)^{(2)}$. Como $\psi$ es unitriangular y $\psi\varphi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q$, entonces $\varphi(P)^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$. Dado que $\varphi(P^{\geq 3}) = \varphi(P)^{\geq 3}$, se concluye que $P^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$. □

**Proposición 8.10.** *Sean $M$ y $N$ $S$-bimódulos $Z$-libremente generados y sea $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(N)$ un isomorfismo de álgebras con $\phi|_S = id_S$. Sea $P = P^{\geq 3} \oplus P^{(2)}$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ donde $P^{(2)}$ es trivial. Si $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a un potencial $Q = Q^{\geq 3} \oplus Q^{(2)}$, donde $Q^{(2)}$ es trivial, entonces $P^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\phi$ está determinado por el par $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$ donde $\phi^{(1)} : M \to N$ es un isomorfismo de $S$-bimódulos. Sea $\rho : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(N)$ el isomorfismo de álgebras inducido por el par $(\phi^{(1)}, 0)$. Entonces $\rho(P) = \rho(P)^{\geq 3} \oplus \rho(P)^{(2)}$, $\rho(P)^{\geq 3} = \rho(P^{\geq 3})$ y $\rho(P)^{(2)} = \rho(P^{(2)})$. Por lo tanto, $\rho(P)$ es derecho-equivalente a $P$ y $P$ es derecho-equivalente a $Q$; luego $\rho(P)$ es derecho-equivalente a $Q$. Por la proposición anterior se infiere que $\rho(P)^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$. En consecuencia, $P^{\geq 3}$ es derecho-equivalente a $Q^{\geq 3}$. □

**Definición 8.4.** Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$, donde $M$ está $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo $M_0$. Diremos que $P$ es reducible si existe un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q = Q^{\geq 3} \oplus Q^{(2)}$, con respecto a una descomposición de $S$-bimódulos $M = M_1 \oplus M_2$, donde $Q^{\geq 3}$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $Q^{(2)}$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$. Aquí $M_1$ y $M_2$ son $Z$-libremente generados por $N_1$, $N_2$ respectivamente y $M_0 = N_1 \oplus N_2$.

**Observación 8.3.** Notemos que la Proposición 8.9 implica que si $P$ es un potencial reducible entonces el correspondiente potencial $Q^{\geq 3}$ está bien definido módulo equivalencia derecha.

Veamos que la Definición 8.4 es equivalente a la Definición 7.1.

**Teorema 8.4.** *Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces $P$ es reducible si y sólo si $P$ es escindable.*

*Demostración.* Supongamos primero que $P$ es escindable, entonces existe un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\phi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q = Q^{\geq 3} \oplus Q^{(2)}$ con respecto a una descomposición de $S$-bimódulos $M = M_1 \oplus M_2$ donde $Q^{(2)}$ es trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$. Entonces $\phi^{(1)}(\Xi_2(P)) = \Xi_2(Q) = M_2$ y como $M_2$ es $Z$-libremente generado se infiere que $\Xi_2(P) = (\phi^{(1)})^{-1}(M_2)$ también es $Z$-libremente generado. Supongamos ahora que $\Xi_2(P)$ es $Z$-libremente generado. Por la Proposición 7.12, existe un automorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ con $\phi(M) = M$ y tal que $\phi(P^{(2)})$ es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma $Q = \sum_{i=1}^{t} a_ib_i$ donde $\{a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $N_0$, un $Z$-sumando directo de $M_0$. Entonces $Q$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M_1)$ donde $M_1 = SN_0S$. Por lo tanto, $\phi(P) = \phi(P)^{\geq 3} + Q + w$ donde $w \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. Usando el Teorema 7.1, se infiere que existe un automorfismo unitriangular $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\varphi(\phi(P)^{\geq 3} + Q) = Q_1 \oplus Q + w_1$ donde $Q_1$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_2)$ y $M_2$ está $Z$-libremente generado por $N'$, un $Z$-subbimódulo de $M_0$ tal que $M_0 = N_0 \oplus N'$. Además $w_1 \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. En consecuencia, $\varphi\phi(P) = \varphi(\phi(P)^{\geq 3} + Q + w) = Q_1 \oplus Q + \varphi(w) + w_1$ donde $\varphi(w) + w_1 \in [\mathcal{F}_S(M), \mathcal{F}_S(M)]$. Se concluye que $P$ es reducible, como queríamos probar. □

**Definición 8.5.** Diremos que $\bar{\mu_k}P$ está definido si $\mu_k P$ es escindable; esto es, existe un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ y una descomposición de $S$-bimódulos $\mu_k M = M_1 \oplus M_2$, tal que $\phi(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a un potencial $Q = Q^{\geq 3} \oplus Q^{(2)}$ donde $Q^{\geq 3}$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $Q^{(2)}$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$.

**Definición 8.6.** En el contexto de la definición 8.5, pondremos $\bar{\mu_k}P := Q^{\geq 3}$, $\bar{\mu_k}M = M_1$ y llamaremos a la correspondencia $(M, P) \mapsto (\bar{\mu_k}M, \bar{\mu_k}P)$ la mutación en $k$.

Notemos que la Proposición 8.9 implica que la mutación $\bar{\mu_k}P$ es única módulo equivalencia-derecha.

En [10, Theorem 5.7] y [18, Theorem 8.10] se prueba que la mutación es una involución en el conjunto de clases de equivalencia-derecha de potenciales reducidos. Veamos que también en nuestro caso este resultado sigue siendo válido.

**Teorema 8.5.** *Sea $P$ un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\bar{\mu_k}P$ está definido. Entonces $\bar{\mu_k}\bar{\mu_k}P$ está definido y es derecho-equivalente a $P$.*

*Demostración.* Primero probemos que $\bar{\mu_k}(\bar{\mu_k}P)$ está definido. Veamos que $\Xi_2(\mu_k\bar{\mu_k}P)$ está $Z$-libremente generado. Como $\bar{\mu_k}P$ está definido, entonces existe un automorfismo de álgebras $\phi$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $\phi(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\bar{\mu_k}P \oplus W_1$ con respecto a una descomposición $\mu_k M = \bar{\mu_k}M \oplus C_1$ donde $W_1$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(C_1)$. Por el Teorema 8.3, existe un isomorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{F}_S(\mu_k^2 M) \to \mathcal{F}_S(M \oplus C_2)$, donde $C_2 = Me_kM \oplus M^* e_k(^*M)$, y tal que $\psi(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a $P \oplus W_2$ donde $W_2$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(C_2)$. Aplicando el Teorema 8.2, se obtiene un automorfismo de álgebras $\tilde{\phi}$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k^2 M)$ tal que $\tilde{\phi}(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\phi(\mu_k P))$. Notemos que $\mu_k(\phi(\mu_k P))$ es derecho-equivalente a $\mu_k\bar{\mu_k}P \oplus W_1$, con respecto a una descomposición de $S$-bimódulos $\mu_k^2 M = \mu_k\bar{\mu_k}M \oplus C_1$. Supongamos que $\psi$ está determinado por el par $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$. Como $\psi(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a $P \oplus W_2$, entonces:

$$\psi^{(1)}(\Xi_2(\mu_k^2 P)) = \Xi_2(\psi(\mu_k^2 P)) = \Xi_2(P \oplus W_2) = C_2$$

Dado que $C_2$ es $Z$-libremente generado y $\psi^{(1)}$ es un automorfismo de $S$-bimódulos, entonces $\Xi_2(\mu_k^2 P)$ es $Z$-libremente generado. Del hecho de que $\tilde{\phi}(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\phi(\mu_k P))$ se infiere que $\Xi_2(\tilde{\phi}(\mu_k^2 P)) = \Xi_2(\mu_k(\phi(\mu_k P)))$. Como $\Xi_2(\tilde{\phi}(\mu_k^2 P)) = \tilde{\phi}^{(1)}(\Xi_2(\mu_k^2 P))$, entonces $\tilde{\phi}^{(1)}(\Xi_2(\mu_k^2 P)) = \Xi_2(\mu_k(\phi(\mu_k P))) = \Xi_2(\mu_k\bar{\mu_k}P \oplus W_1) = \Xi_2(\mu_k\bar{\mu_k}P) \oplus C_1$, de donde $\Xi_2(\mu_k\bar{\mu_k}P)$ es $Z$-libremente generado. Por lo tanto, $\mu_k\bar{\mu_k}P$ es derecho-equivalente a $\bar{\mu_k}^2 P \oplus W_3$ donde $W_3$ es trivial. En consecuencia, $P \oplus W_2$ es derecho-equivalente a $\mu_k^2 P$ y este último es derecho-equivalente a $\mu_k\phi(\mu_k P)$. Además, $\mu_k\phi(\mu_k P)$ es derecho-equivalente a $\mu_k\bar{\mu_k}P \oplus W_1$ y también este último es derecho-equivalente a $\bar{\mu_k}^2 P \oplus W_3 \oplus W_1$. Consecuentemente, $P \oplus W_2$ es derecho-equivalente a $\bar{\mu_k}^2 P \oplus W_3 \oplus W_1$ donde tanto $P$ como $\bar{\mu_k}^2 P$ son potenciales reducidos y $W_2, W_3 \oplus W_1$ son potenciales triviales. Aplicando la Proposición 8.9, se infiere que $P$ es derecho-equivalente a $\bar{\mu_k}^2 P = \bar{\mu_k}\bar{\mu_k}P$.

□

## 8.1 Un invariante de la mutación

En esta sección fijamos un entero $k \in [1, n]$ y estudiamos el efecto de la mutación $\bar{\mu_k}$ en el álgebra cociente $\mathcal{P}(M, P) = \mathcal{F}_S(M)/R(P)$. Usaremos la siguiente notación: dado un $S$-bimódulo $B$, definimos:

$$B_{\hat{k},\hat{k}} = \bar{e_k} B \bar{e_k}$$

Establezcamos ahora el siguiente lema, el cual tiene su origen en [10, Proposition 6.1] y [18, Proposition 10.1].

**Proposición 8.11.** *Sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial. Entonces las álgebras $\mathcal{P}(M, P)_{\hat{k},\hat{k}}$ y $\mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$ son isomorfas.*

*Demostración.* Primero notemos que $(\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}} = M_{\hat{k},\hat{k}} \oplus Me_kM$.

**Lema 8.6.** *Existe un isomorfismo de álgebras entre $\mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}})$ y $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$.*

*Demostración.* Usando el Corolario 8.1 se obtiene que $i_M(\bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}) \subseteq \mathrm{Im}(i_{\mu_k M})$. Por lo tanto, existe un morfismo de álgebras $\rho : \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k} \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k} \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, "i_M"'] & \mathcal{F}_S(\mu_k M) \arrow[dl, "i_{\mu_k M}"] \\ \mathcal{F}_S(\widehat{M}) & \end{tikzcd}$$

Veamos que $\rho(\bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}) \subseteq \mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k})$. Como $\widehat{M} = M \oplus (e_k M)^* \oplus^* (Me_k)$, entonces $\mathcal{F}_S(\widehat{M}) = \mathcal{F}_S(M) \oplus B'$ donde $B'$ es la cerradura del $F$-espacio vectorial generado por todas las series formales que contienen elementos no-nulos de $(e_kM)^*$ o de ${}^*(Me_k)$. Similarmente, $\mathcal{F}_S(\mu_k M) = \mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k}) \oplus B''$ para cierto $F$-subespacio vectorial $B''$. Ahora, sea $u \in \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$, entonces $\rho(u) = u' + b'$ donde $u' \in \mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k})$ y $b' \in B''$. Aplicando $i_{\mu_k M}$ en ambos lados se obtiene que $i_M(u) = i_{\mu_k M}(u') + i_{\mu_k M}(b')$. Notemos que $i_M(u), i_{\mu_k M}(u') \in \mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k})$ y $i_{\mu_k M}(b') \in B''$. De esto se infiere que $i_{\mu_k M}(b') = 0$ y como $i_{\mu_k M}$ es inyectiva entonces $b' = 0$. Por lo tanto, $\rho(u) = u'$ donde $u' \in \mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k})$. Esto prueba la afirmación.

Se sigue que existe un morfismo inyectivo de álgebras:

$$\rho : \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k} \to \mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k})$$

Definamos $f : Me_kM \oplus \bar{e_k}M\bar{e_k} \to \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k}$ como sigue: $f = id_{\bar{e_k}M\bar{e_k}}$ y $f([u]) = u$ en otro caso. Por abuso de notación, sea $f$ la extensión de $f$ a un morfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(\bar{e_k}\mu_k M\bar{e_k})$. Entonces $f = \rho^{-1}$ así que $\rho$ es un isomorfismo de álgebras. Esto completa la prueba del lema. $\square$

**Lema 8.7.** *Existe un epimorfismo de álgebras:*

$$\mathcal{P}(M,P)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$$

*Demostración.* Basta probar las siguientes dos afirmaciones:

$$\mathcal{F}_S(\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}} = \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}}) + R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$$
$$\rho(R(P)_{\hat{k},\hat{k}}) \subseteq \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}}) \cap R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$$

Primero probemos que $\mathcal{F}_S(\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}} = \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}}) + R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$.

Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Recordemos que $P$ es cíclicamente equivalente a un potencial $P' \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ y que $\mu_k(P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(P')$. Luego, podemos asumir que $P \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$. Para dicho potencial $P$, $\mu_k(P)$ se define como:

$$\mu_k(P) = \rho(P) + \sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} [btsa]((sa)^*)({}^*(bt))$$

Notemos que el conjunto $\{dqc : d \in T \cap Me_k, q \in L(k), c \in e_kM \cap T\}$ es una $Z$-base local de $M_0e_kSe_kM_0$. Fijemos un elemento $[dqc]$ y calculemos $X_{([dqc])^*}\left(\sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} [btsa](sa)^*({}^*(bt))\right)$. Primero notemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} [btsa](sa)^*({}^*(bt)) &= \sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} \left(\sum_{r \in L(k)} r^*(ts)[bra]\right)\left(\sum_{r_1 \in L(k)} (r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})a^* r_1^{-1}({}^*b)\right) \\ &= \sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} \sum_{r, r_1 \in L(k)} r^*(ts)[bra](r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})(a^* r_1^{-1}({}^*b)) \end{aligned}$$

Aplicando $X_{[dqc]^*}$ a la expresión anterior y usando la Proposición 7.3 se obtiene:

$$\begin{aligned}
X_{[dqc]^*}\left(\sum_{sa\in_k\hat{T},bt\in\tilde{T}_k}\sum_{r,r_1\in L(k)} r^*(ts)[bra](r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})(a^*r_1^{-1}(^*b))\right) &= \sum_{t,s\in L(k)}\sum_{r_1\in L(k)} q^*(ts)(r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})(c^*r_1^{-1}(^*d)) \\
&= \sum_{r_1\in L(k)}\left(\sum_{t,s\in L(k)} q^*(ts)(r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})\right)c^*r_1^{-1}(^*d) \\
&= c_kc^*q^{-1}(^*d) \\
&= c_k(qc)^*(^*d)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los elementos $(qc)^*(^*d)$ pertenecen a $\mathcal{F}_S((\mu_kM)_{\hat{k},\hat{k}})+R(\mu_kP)_{\hat{k},\hat{k}}$.
Continuemos con la prueba del Lema 8.7. Sea $x\in\mathcal{F}_S(\mu_kM)_{\hat{k},\hat{k}}$, entonces $x=\sum_u\gamma_u$ donde cada $\gamma_u$ es un producto de elementos en $L=\bar{e_k}M\bar{e_k}\cup Me_kM\cup^*(Me_k)\cup(e_kM)^*$. Pongamos $\gamma_u=x_1\dots x_{l(u)}$ donde cada $x_i\in L$. Si $x_i\in e_k^*(M)$, entonces $i>1$ y $x_{i-1}\in(M^*)e_k$; luego $x_{i-1}x_i\in M^*e_k(^*M)$. Similarmente, si $x_i\in M^*e_k$ entonces $i<l(u)$ y $x_{i+1}\in e_k(^*M)$ y por ende $x_ix_{i+1}\in M^*e_k(^*M)$. Como los elementos $(qc)^*(^*d)$ generan $(e_kM)^*e_k^*(Me_k)$ como $S$-bimódulo, entonces $(e_kM)^*e_k^*(Me_k)\subseteq\mathcal{F}_S((\mu_kM)_{\hat{k},\hat{k}})+R(\mu_kP)_{\hat{k},\hat{k}}$. Lo anterior implica que cada $\gamma_u\in\mathcal{F}_S((\mu_kM)_{\hat{k},\hat{k}})+R(\mu_kP)_{\hat{k},\hat{k}}$. Consecuentemente, $x\in\mathcal{F}_S((\mu_kM)_{\hat{k},\hat{k}})+R(\mu_kP)_{\hat{k},\hat{k}}$, como se afirmaba. Encontremos ahora una expresión alternativa para $\mu_kP$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\mu_k(P) &= \rho(P)+\sum_{sa\in_k\hat{T},bt\in\tilde{T}_k}[btsa]((sa)^*)(^*(bt)) \\
&= \rho(P)+\sum_{a\in_kT,b\in T_k}\sum_{r,r_1\in L(k)}[bra]a^*(r_1^{-1})^*(^*b)\left(\sum_{s,t\in L(k)} r^*(ts)(r_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})\right) \\
&= \rho(P)+c_k\left(\sum_{a\in_kT,b\in T_k}\sum_{r\in L(k)}[bra]a^*r^{-1}(^*b)\right)
\end{aligned}$$

Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
X_{a^*}(\mu_kP) &= c_k\sum_{b\in T_k}\sum_{r\in L(k)} r^{-1}(^*b)[bra] \\
X_{^*b}(\mu_kP) &= c_k\sum_{a\in_kT}\sum_{r\in L(k)}[bra]a^*r^{-1} \\
X_{[bra]^*}(\mu_kP) &= X_{[bra]^*}(\rho(P))+c_ka^*r^{-1}(^*b)
\end{aligned}$$

Veamos que si $P$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M)^{\leq N}$, para algún $N\geq 2$, entonces $\rho((R(P))_{\hat{k},\hat{k}})\subseteq R(\mu_kP)_{\hat{k},\hat{k}}$.
Supongamos que $P=\sum_{u=1}^N\gamma_u$ donde cada $\gamma_u$ es de la forma $x_1x_2\dots x_{n(u)}$ con $x_i\in\hat{T}$. Para cada $\gamma_u$, sea $\mathcal{C}(u)$ el subconjunto del grupo simétrico $S_{n(u)}$ que consiste de todas las permutaciones cíclicas $c$ de $S_{n(u)}$ tales que $x_{c(1)}=s_cb$. Definamos $\gamma_u^c=x_{c(1)}x_{c(2)}\dots x_{c(n(u))}$, entonces:

$$\gamma_u^c=s_cbr_ca_cz_c$$

donde $z_c=x_{c(3)}\dots x_{c(n(u))}$. Por lo tanto:

$$X_{b^*}(P)=\sum_{u=1}^N\sum_{c\in\mathcal{C}(u)} r_ca_cz_cs_c$$

Sea $b'\in T\cap e_uM_0e_k$, entonces:

$$\rho(b'X_{b^*}(P)) = \sum_{u=1}^{N} \sum_{c\in\mathcal{C}(u)} [b'r_c a_c]\rho(z_c)s_c$$

Notemos que un conjunto de generadores $Z$-libres de $\mu_k M$ es el conjunto $\mu_k T := (T \cap \bar{e_k} M_0 \bar{e_k}) \cup \{[bra] : b \in T_k, r \in L(k), a \in_k T\} \cup \{^*b : b \in T_k\} \cup \{a^* : a \in_k T\}$. Sea $(\widehat{\mu_k T})$ la $S$-base local de $\mu_k M$ que consiste de todos los elementos $ry$ donde $r \in L(u)$, $y \in \mu_k T \cap e_u \mu_k M e_v$.

Consideremos ahora $\rho(P) = \sum_{u=1}^{N} \rho(\gamma_u)$. Se tiene:

$$\gamma_u = \mu_1 x_{l_1} x_{l_1+1} \mu_2 x_{l_2} \dots \mu_s x_{l_s} x_{l_s+1} \mu_{s+1}$$

donde cada $\mu_i$ es un producto de elementos en $\hat{T} \cap e_u S M_0 e_v$ donde $u, v \neq k$ y para cada $l_i$, $x_{l_i} = s(x_{l_i})b$. Entonces:

$$\rho(\gamma_u) = \rho(\mu_1)[x_{l_1} x_{l_1+1}]\rho(\mu_2)[x_{l_2} x_{l_2+1}] \dots \rho(\mu_s)[x_{l_s} x_{l_s+1}]\rho(\mu_{s+1})$$

Cada $\rho(\mu_i)$ es un producto de elementos pertenecientes a $e_u S M_0 e_v$ donde $u, v$ son distintos de $k$ y cada $[x_{l_i} x_{l_{i+1}}] = s(x_{l_i})[bs(x_{l_i+1})a(x_{l_i+1})]$. En consecuencia, $\rho(\gamma_u) = y_1 \dots y_{t(u)}$ donde cada $y_i \in \widehat{\mu_k T}$. Sea $\mathcal{C}'(u)$ el subconjunto de $S_{t(u)}$ que consiste de todas las permutaciones $d$ tales que $y_{d(1)} = s[bra]$ para ciertos $a \in T_k, r \in L(k)$. A esta permutación le corresponde una única permutación $c(d) \in \mathcal{C}(u)$ tal que $\rho(\gamma_u)^d = \rho(\gamma_u^{c(d)})$. Por lo tanto:

$$X_{[bra]^*}(\rho(P)) = \sum_{u=1}^{N} \sum_{c\in\mathcal{C}(u), r_c = r, a_c = a} \rho(z_c)s_c$$

$$\rho(b'X_{b^*}(P)) = \sum_{r\in L(k), a\in_k T} [b'ra]X_{[bra]^*}(\rho(P))$$

Sea $a \in_k T$. Consideremos el subconjunto $\mathcal{D}(u)$ de $S_{n(u)}$ que consiste de todas las permutaciones $c$ tales que $x_{c(1)} = r_c a$. Entonces para cada $c \in \mathcal{D}(u)$, $\gamma_u^c = r_c a z_c s_c b$ para algún $b \in T_k$. Entonces:

$$X_{a^*}(P) = \sum_{u=1}^{N} \sum_{c\in\mathcal{D}(u)} z_c s_c b r_c$$

Notemos que $R(P)_{\hat{k},\hat{k}}$ es la cerradura del ideal bilateral en $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ generado por los elementos $b'X_{b^*}(P)$ donde $b, b' \in T_k$, junto con los elementos $X_{a^*}(P)a'$ donde $a, a' \in_k T$, y $X_{w^*}(P)$ con $w \in T \cap e_{\sigma(w)} M e_{\tau(w)}$, $\sigma(w), \tau(w) \neq k$.
Sea $a' \in T_k$, entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(X_{a^*}(P)a') &= \sum_{u=1}^{N} \sum_{c\in\mathcal{D}(u)} \rho(z_c)s_c[b_c r_c a'] \\
&= \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \sum_{u=1}^{N} \sum_{c\in\mathcal{D}(u), b_c = b, r_c = r} \rho(z_c)s_c[bra'] \\
&= \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} X_{[bra]^*}(\rho(P))[bra']
\end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned}
\rho(b'X_{b^*}(P)) &= \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} [b'ra]X_{[bra]^*}(\rho(P)) \\
&= \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} [b'ra]X_{[bra]^*}(\mu_k P) - c_k \left( \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} [b'ra]a^* r^{-1}(^*b) \right) \\
&= \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} [b'ra]X_{[bra]^*}(\mu_k P) - X_{(^*b')}(\mu_k P)(^*b)
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\rho(X_{a^*}(P)a') &= \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} X_{[bra]^*}(\rho(P))[bra'] \\ &= \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} X_{[bra]^*}(\mu_k P)[bra'] - \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} c_k a^* r^{-1}(^*b)[bra'] \\ &= \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} X_{[bra]^*}(\mu_k P)[bra'] - a^* X_{(a')^*}(\mu_k P)\end{aligned}$$

Si $w \in T \cap e_u M_0 e_v$, donde $u, v \neq k$, entonces:

$$\rho(X_{w^*}(P)) = X_{w^*}(\rho(P)) = X_{w^*}(\mu_k P)$$

Esto prueba que $\rho((R(P))_{\hat{k},\hat{k}}) \subseteq R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$ para potenciales $P$ en el álgebra tensorial $T_S(M)$.

Veamos ahora que si $P$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$, entonces $\rho(R(P)_{\hat{k},\hat{k}}) \subseteq R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$. Sea $h \in \bar{e_k} R(P) \bar{e_k}$. Basta mostrar que $\rho(h) \in R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}} + \mathcal{F}_S(\mu_k M)^{\geq N}$ para cada entero positivo $N$. Por el resultado anterior, $\rho(h) \in R(\mu_k P^{\leq 2N})_{\hat{k},\hat{k}} + \mathcal{F}_S(\mu_k M)^{\geq N}$.

El ideal $R(\mu_k P^{\leq 2N})$ es la cerradura del ideal generado por todos los elementos de la forma $X_{w^*}(\mu_k P^{\leq 2N})$ donde $w \in \mu_k T$. Notemos que $X_{w^*}(\mu_k P^{\leq 2N}) = X_{w^*}(\rho(P^{\leq 2N}) + \Delta_k) = X_{w^*}(\rho(P) + \Delta_k) - X_{w^*}(\rho(P^{>2N})) = X_{w^*}(\mu_k P) - X_{w^*}(\rho(P^{>2N}))$. Se obtiene que

$$X_{w^*}(\mu_k(P^{\leq 2N})) \in R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}} + \mathcal{F}_S(\mu_k M)^{\geq N}$$

Por lo tanto $\rho(h)$ pertenece a la cerradura de $R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$. De lo anterior se infiere la contención $\rho(R(P)_{\hat{k},\hat{k}}) \subseteq \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}}) \cap R(\mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$ y la prueba del Lema 8.7 termina. □

Para finalizar la prueba de la Proposición 8.11, es suficiente con probar que el epimorfismo $\alpha$ del Lema 8.7 es de hecho un isomorfismo. Para ello, construyamos el inverso izquierdo $\beta : \mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{P}(M, P)_{\hat{k},\hat{k}}$. Definimos $\beta$ como la composición de los siguientes morfismos. Primero, aplicamos el epimorfismo $\mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{P}(\mu_k(\mu_k M), \mu_k(\mu_k P))_{\hat{k},\hat{k}}$ definido en la misma forma que $\alpha$. Recordando la prueba del Teorema 8.3 y usando la notación que se introdujo ahí, aplicamos el isomorfismo $\mathcal{P}(\mu_k(\mu_k M), \mu_k(\mu_k P))_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{P}(M \oplus M', P + W)_{\hat{k},\hat{k}}$ inducido por el automorfismo $\hat{\psi}\phi\psi\lambda$. Finalmente, aplicamos el isomorfismo $\mathcal{P}(M \oplus M', P + W)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{P}(M, P)_{\hat{k},\hat{k}}$ inducido por la Proposición 6.4. Sea $p$ la proyección $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{P}(M, P)_{\hat{k},\hat{k}}$. Se tiene que $\beta\alpha$ fija los generadores $p(c)$ y $p(asb)$ donde $c \in T \cap \bar{e_k} M \bar{e_k}$, $a \in T \cap M e_k$, $b \in T \cap e_k M$ y $s \in L(k)$. □

**Proposición 8.12.** *Si el álgebra cociente $\mathcal{P}(M, P)$ es finito-dimensional, entonces $\mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)$ también es finito-dimensional.*

*Demostración.* Veamos, como en [10, Lemma 6.5] y [18, Lemma 10.5], que la finitud de la dimensión de $\mathcal{P}(M, P)$ se sigue de otra condición.

**Lema 8.8.** *Sea $J \subseteq \langle M \rangle$ un ideal cerrado de $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces el álgebra cociente $\mathcal{F}_S(M)/J$ es de dimensión finita si ocurre que la subálgebra $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}/J_{\hat{k},\hat{k}}$ es de dimensión finita. En particular, el álgebra cociente $\mathcal{P}(M, P)$ es de dimensión finita si y sólo si lo es la subálgebra $\mathcal{P}(M, P)_{\hat{k},\hat{k}}$.*

*Demostración.* Dado un $S$-bimódulo $B$, pondremos:

$$B_{k,\hat{k}} = e_k B \bar{e_k} = \bigoplus_{j \neq k} B_{k,j}, \;\; B_{\hat{k},k} = \bar{e_k} B e_k = \bigoplus_{i \neq k} B_{i,k}$$

Hay que mostrar que si $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}/J_{\hat{k},\hat{k}}$ es de dimensión finita entonces también lo es cada uno de los espacios $\mathcal{F}_S(M)_{k,\hat{k}}/J_{k,\hat{k}}$, $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},k}/J_{\hat{k},k}$ y $\mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$. Haremos el caso $\mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$; los casos restantes se prueban de manera análoga.

Sea $T$ una $Z$-base local de $M_0$ y sea $L$ una $Z$-base local de $S$. Entonces $\hat{T} = \{sa : a \in T, s \in L(\sigma(a))\}$ es una $S$-base local derecha para $M_S$. Sean:

$$\hat{T} \cap M_{k,\hat{k}} = \{r_1, r_2, \ldots, r_l\}$$

$$\hat{T} \cap M_{\hat{k},k} = \{t_1, t_2, \ldots, t_q\}$$

Notemos que $\mathcal{F}_S(M)_{k,k} = D_k \bigoplus \bigoplus_{i,j} r_i \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} t_j$. Se sigue que existe una $F$-transformación lineal sobreyectiva:

$$f : D_k \times Mat_{l\times q}(\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$$

dada como sigue:

$$f(d, D) = \pi(d + (r_1\ r_2 \dots\ r_l)D(t_1\ t_2 \dots\ t_q)^T)$$

donde $\pi$ es la proyección canónica $\mathcal{F}_S(M)_{k,k} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$ y $T$ denota la transpuesta. Notemos que $Mat_{l\times q}(J_{\hat{k},\hat{k}}) \subseteq ker(f)$, así que existe un isomorfismo de $F$-espacios vectoriales:

$$\frac{\frac{D_k \times Mat_{l\times q}(\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}})}{Mat_{l\times q}(J_{\hat{k},\hat{k}})}}{\sim} \cong \mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$$

para cierto $F$-subespacio $\sim$. Se sigue que $\mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$ es isomorfo a un cociente de $D_k \times Mat_{l\times q}\Big(\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}/J_{\hat{k},\hat{k}}\Big)$. Por lo tanto $\mathcal{F}_S(M)_{k,k}/J_{k,k}$ es de dimensión finita, como se quería probar. □

Para finalizar la prueba de la Proposición 8.12, supongamos que $\mathcal{P}(M,P)$ es finito-dimensional. Entonces por la Proposición 8.11, $\mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)_{\hat{k},\hat{k}}$ también es de dimensión finita. Aplicando el Lema 8.8 se concluye que $\mathcal{P}(\mu_k M, \mu_k P)$ también es finito-dimensional.

□

Usando las Proposiciones 8.11 y 8.12 se tiene el siguiente

**Corolario 8.2.** *Sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial, donde $P$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M)$ y $\mu_k P$ es escindable. Sea $(\mathcal{F}_S(\bar{\mu_k} M), \bar{\mu_k} P)$ un álgebra con potencial obtenida de $(\mathcal{F}_S(M), P)$ mediante la mutación en $k$. Entonces las álgebras $\mathcal{P}(M,P)_{\hat{k},\hat{k}}$ y $\mathcal{P}(\bar{\mu_k} M, \bar{\mu_k} P)_{\hat{k},\hat{k}}$ son isomorfas, y $\mathcal{P}(M,P)$ es finito-dimensional si y sólo si $\mathcal{P}(\bar{\mu_k} M, \bar{\mu_k} P)$ lo es.*

Se sigue que la mutación preserva la finitud de la dimensión de las álgebras $\mathcal{P}(M,P)$ asociadas a álgebras con potenciales $(\mathcal{F}_S(M), P)$.

## 8.2 Rigidez

Siguiendo a [10] definimos el espacio de deformaciones de un álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$.

**Definición 8.7.** Sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial, el espacio de deformaciones $Def(M,P)$ es el cociente $\frac{\mathcal{P}(M,P)}{S+[\mathcal{P}(M,P),\mathcal{P}(M,P)]}$.

**Proposición 8.13.** *Existe un isomorfismo de álgebras $Def(M,P) \cong Def(\widetilde{M}, \widetilde{P})$ donde $\widetilde{M} = \mu_k M$ y $\widetilde{P} = \mu_k P$.*

*Demostración.* Podemos suponer, salvo equivalencia cíclica, que $P \in \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)_{cyc}\bar{e_k}$. Entonces:

$$Def(M,P) \cong \frac{\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}}{R(P)+[\mathcal{F}_S(M),\mathcal{F}_S(M)]} \cong \frac{\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}_{\hat{k},\hat{k}}}{R(P)_{\hat{k},\hat{k}}+[\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}},\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}]}$$

Similarmente:

$$Def(\widetilde{M}, \widetilde{P}) \cong \frac{\mathcal{P}(\widetilde{M},\widetilde{P})_{\hat{k},\hat{k}}}{S_{\hat{k},\hat{k}}+[\mathcal{P}(\widetilde{M},\widetilde{P})_{\hat{k},\hat{k}},\mathcal{P}(\widetilde{M},\widetilde{P})_{\hat{k},\hat{k}}]}$$

Aplicando la Proposición 8.11 se infiere que $Def(M,P) \cong Def(\widetilde{M}, \widetilde{P})$. □

**Definición 8.8.** Un álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ es rígida si $Def(M,P) = 0$.

Combinando las Proposiciones 6.4 y 8.13 se obtiene el siguiente corolario, análogo al dado en [10, p.88].

**Corolario 8.3.** *Supongamos que un álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ es rígida y $\mu_k P$ es escindable, entonces la mutación $(\bar{\mu_k} M, \bar{\mu_k} P)$ también es rígida.*

El siguiente lema extiende la Proposición 8.1 dada en [10, p.91].

**Lema 8.9.** *Toda álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ reducida y rígida es 2-acíclica.*

*Demostración.* Notemos que $(\mathcal{F}_S(M), P)$ es rígida si y sólo si cada potencial de $\mathcal{F}_S(M)$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $R(P)$. Supongamos que $M$ no es 2-acíclico, entonces existen $i, j$ con $i \neq j$ tales que $e_iMe_j \neq 0$ y $e_jMe_i \neq 0$. Elijamos $a \in e_iMe_j \cap T$ y $b \in e_jMe_i \cap T$. Como $M_{cyc} = 0$ entonces $R(P)_{cyc} \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 3}$. Se sigue que el potencial $Q = ab$ no es cíclicamente equivalente a un elemento de $R(P)$. Esto completa la prueba. $\square$

## 8.3 Realización de potenciales

Sea $M$ un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado por el $Z$-subbimódulo $M_0$ y sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial reducido, 2-acíclica y tal que $\mu_k P$ es escindable. Supongamos que el álgebra con potencial reducido $(\mathcal{F}_S(\overline{\mu_k}M), \mathcal{F}_S(\overline{\mu_k}P))$ obtenida de $(\mathcal{F}_S(M), P)$ mediante la mutación en algún entero $k$ de $[1, n]$ también es 2-acíclica. Para cada $i \in [1, n]$, definamos $d(i) := dim_F D_i$. Asociamos a $M$ una matriz $B(M) = (b_{i,j}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definida como sigue:

$$b_{i,j} := dim_F(e_iM_0e_j)d(j) - dim_F(e_jM_0e_i)d(j)$$

**Lema 8.10.** *La matriz $B(M)$ es anti-simetrizable.*

*Demostración.* Notemos que $d(i)b_{i,j} = d(i)d(j)dim_F(e_iM_0e_j) - d(i)d(j)dim_F(e_jM_0e_i)$. Por otro lado:

$$-d(j)b_{j,i} = d(i)d(j)dim_F(e_iM_0e_j) - d(i)d(j)dim_F(e_jM_0e_i)$$

Se sigue que $d(i)b_{i,j} = -d(j)b_{j,i}$. $\square$

La matriz $B(\overline{\mu_k}M) = (\overline{b_{ij}})$ asociada a $\overline{\mu_k}M$ está dada por:

$$\overline{b_{i,j}} = dim_F e_i(\widetilde{M})_0 e_j d(j) - dim_F e_j(\widetilde{M})_0 e_i d(j)$$

donde $\widetilde{M_0} = \bar{e_k}M_0\bar{e_k} \oplus M_0e_kSe_kM_0 \oplus e_k({}_0N) \oplus (N_0)e_k$.

- Supongamos primero que $i = k$. Entonces $e_i(\widetilde{M})_0e_j = e_k(\widetilde{M})_0e_j = e_k({}_0N)e_j$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\overline{b_{k,j}} &= dim_F e_k({}_0N)e_j d(j) - dim_F e_j(N_0)e_k d(j)\\ &= dim_F(e_jM_0e_k)d(j) - dim_F(e_kM_0e_j)d(j)\\ &= -[dim_F(e_kM_0e_j)d(j) - dim_F(e_jM_0e_k)d(j)]\\ &= -b_{k,j}\end{aligned}$$

- Supongamos ahora que $j = k$. Entonces $e_i(\widetilde{M})_0e_j = e_i(\widetilde{M})_0e_k = e_i(N_0)e_k$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\overline{b_{i,k}} &= dim_F e_i(N_0)e_k d(k) - dim_F e_k({}_0N)e_i d(k)\\ &= dim_F(e_kM_0e_i)d(k) - dim_F(e_iM_0e_k)d(k)\\ &= -[dim_F(e_iM_0e_k)d(k) - dim_F(e_kM_0e_i)d(k)]\\ &= -b_{i,k}\end{aligned}$$

- Asumamos ahora que $i, j \neq k$. En este caso:

$$e_i(\widetilde{M})_0e_j = e_iM_0e_j \oplus e_iM_0e_kSe_kM_0e_j$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\overline{b_{i,j}} &= dim_F(e_iM_0e_j \oplus e_iM_0e_kSe_kM_0e_j)d(j) - dim_F(e_jM_0e_i \oplus e_jM_0e_kSe_kM_0e_i)d(j)\\ &= dim_F(e_iM_0e_j)d(j) + dim_F(e_iM_0e_k)dim_F(e_kM_0e_j)d(k)d(j) - dim_F(e_jM_0e_i)d(j) - dim_F(e_jM_0e_k)dim_F(e_kM_0e_i)d(k)d(j)\end{aligned}$$

Por otra parte, $b_{i,k}b_{k,j}$ es igual a:

$$\begin{aligned}&[dim_F(e_iM_0e_k)d(k) - dim_F(e_kM_0e_i)d(k)]\,[dim_F(e_kM_0e_j)d(j) - dim_F(e_jM_0e_k)d(j)]\\ &= dim_F(e_iM_0e_k)dim_F(e_kM_0e_j)d(k)d(j) - dim_F(e_iM_0e_k)dim_F(e_jM_0e_k)d(k)d(j) - dim_F(e_kM_0e_i)dim_F(e_kM_0e_j)d(k)d(j)+\\ &dim_F(e_jM_0e_k)dim_F(e_kM_0e_i)d(k)d(j)\end{aligned}$$

Procederemos por casos.

**Caso 1**. Supongamos que $b_{i,k} > 0$ y $b_{k,j} > 0$. Entonces $dim_F e_k M_0 e_i = dim_F e_j M_0 e_k = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\overline{b_{i,j}} &= dim_F(e_i M_0 e_j)d(j) + dim_F(e_i M_0 e_k) dim_F(e_k M_0 e_j)d(k)d(j) - dim_F(e_j M_0 e_i)d(j)\\ &= b_{i,j} + dim_F(e_i M_0 e_k) dim_F(e_k M_0 e_j)d(k)d(j)\end{aligned}$$

y $b_{i,k}b_{k,j}$ es igual a $dim_F(e_i M_0 e_k) dim_F(e_k M_0 e_j)d(k)d(j)$. Se concluye que $\overline{b_{i,j}} = b_{i,j} + b_{i,k}b_{k,j}$.

**Caso 2**. Supongamos que $b_{i,k}b_{k,j} = 0$. Asumamos que $b_{i,k} = 0$, el otro caso se establece de manera análoga. Se tiene la igualdad $dim_F e_k M_0 e_i = dim_F e_i M_0 e_k = 0$. En consecuencia, $\overline{b_{i,j}} = dim_F(e_i M_0 e_j)d(j) - dim_F(e_j M_0 e_i)d(j) = b_{i,j}$.

**Caso 3**. $b_{i,k} < 0$ y $b_{k,j} < 0$. Entonces $dim_F e_i M_0 e_k = dim_F e_k M_0 e_j = 0$. Luego:

$$\begin{aligned}\overline{b_{i,j}} &= dim_F(e_i M_0 e_j)d(j) - dim_F(e_j M_0 e_i)d(j) - dim_F(e_j M_0 e_k) dim_F(e_k M_0 e_i)d(k)d(j)\\ &= b_{i,j} - dim_F(e_j M_0 e_k) dim_F(e_k M_0 e_i)d(k)d(j)\end{aligned}$$

y $b_{i,k}b_{k,j} = dim_F(e_j M_0 e_k) dim_F(e_k M_0 e_i)d(k)d(j)$. Se obtiene $\overline{b_{i,j}} = b_{i,j} - b_{i,k}b_{k,j}$.

**Caso 4**. $b_{i,k} < 0$ y $b_{k,j} > 0$. Entonces $dim_F e_i M_0 e_k = dim_F e_j M_0 e_k = 0$. Se sigue que $\overline{b_{i,j}} = dim_F(e_i M_0 e_j)d(j) - dim_F(e_j M_0 e_i)d(j) = b_{i,j}$.

**Caso 5**. $b_{i,k} > 0$ y $b_{k,j} < 0$. Se tiene $dim_F e_k M_0 e_i = dim_F e_k M_0 e_j = 0$. Se obtiene:

$$\overline{b_{i,j}} = dim_F(e_i M_0 e_j)d(j) - dim_F(e_j M_0 e_i)d(j) = b_{i,j}.$$

En consecuencia, las entradas de la matriz $B(\overline{\mu_k}M)$ son:

$$B(\overline{\mu_k}M)_{i,j} = \begin{cases} -b_{i,j} & \text{si } i = k \text{ o } j = k \\ b_{i,j} & \text{si } b_{i,k}b_{k,j} \leq 0 \\ b_{i,j} + b_{i,k}b_{k,j} & \text{si } b_{i,k}, b_{k,j} > 0 \\ b_{i,j} - b_{i,k}b_{k,j} & \text{si } b_{i,k}, b_{k,j} < 0. \end{cases}$$

Entonces la matriz anti-simetrizable $B(\overline{\mu_k}M)$ se obtiene mediante la mutación de la matriz $B(M)$ en el sentido de Fomin-Zelevinsky [15].

**Definición 8.9.** La matriz $B(M)$ se llama la matriz de intercambio de $M$.

La siguiente definición fue tomada de [17, p.14].

**Definición 8.10.** Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ una matriz anti-simetrizable y sea $I = \{1, \ldots, n\}$. Una realización por especies de $B$ es una pareja $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$ tal que:

1. $\mathbf{F} = (F_i)_{i \in I}$ es una tupla de anillos de división;
2. $\mathbf{M}$ es una tupla que consiste de un $F_i - F_j$ bimódulo $M_{ij}$ para cada $(i,j) \in I^2$ tal que $b_{ij} > 0$;
3. para cada $(i,j) \in I^2$ tal que $b_{ij} > 0$, existen isomorfismos de $F_j - F_i$-bimódulos
$$\mathrm{Hom}_{F_i}(M_{ij}, F_i) \cong \mathrm{Hom}_{F_j}(M_{ij}, F_j);$$
4. para cada $(i,j) \in I^2$ tal que $b_{ij} > 0$ se tiene $\dim_{F_i}(M_{ij}) = b_{ij}$ y $\dim_{F_j}(M_{ij}) = -b_{ji}$.

**Proposición 8.14.** *Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ una matriz anti-simetrizable con anti-simetrizador $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$. Si para cada $j$, $d_j$ divide a $b_{ij}$ para toda $i$, entonces la matriz $B$ admite una realización por especies $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$ tal que $M = \bigoplus_{i,j} M_{i,j}$ es $Z$-libremente generado y además la matriz de intercambio de $B$ es igual a $M$.*

*Demostración.* Sea $G := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{d_i}$. Como $G$ es un grupo finito, entonces existe una extensión de Galois $E/F$ tal que $Gal(E/F) \cong G$. Para cada $i$ definamos $F_i := Fix(H_i)$, el campo fijo de $H_i$, donde $H_i = \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \{i\} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_n}$. Entonces $F_i \cap F_j = F$ y $[F_i : F] = d_i$. Como el morfismo multiplicación $F_i \otimes_F F_j \to F_i F_j$ es suprayectivo y $\dim_F F_i \otimes_F F_j = \dim_F F_i F_j$, entonces el compuesto $F_i F_j$ es isomorfo a $F_i \otimes_F F_j$. Pongamos $S := \prod_{i=1}^{n} F_i$, $Z = \bigoplus_{n} F$ y para cada $i \neq j$ definamos $M_{ij} := (F_i \otimes_F F_j)^{\frac{b_{ij}}{d_j}}$ si $b_{ij} > 0$. Entonces la matriz de intercambio de $M := \bigoplus_{i,j} M_{ij}$ es igual a $B$. $\square$

## 8.4 No-degeneración

En esta sección supondremos que el campo base $F$ es infinito.

Sea $B$ un conjunto no-vacío y sea $F^B$ el $F$-espacio vectorial que consiste de todas las funciones $f : B \to F$.

**Definición 8.11.** Una función $H : F^B \to F$ es polinomial si y sólo si existen elementos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ de $B$ y un polinomio $P_H \in F[Z_1, Z_2, \ldots, Z_l]$ tales que $H(f) = P_H(f(x_1), \ldots, f(x_l))$ para cada $f \in F^B$.

Si $H$ y $G$ son funciones polinomiales $F^B \to F$ entonces el producto $HG$ es la función que manda cada $f \in F^B$ en el elemento $H(f)G(f)$. Claramente $HG$ también es polinomial.

Supongamos ahora que $h : F^B \to F^{B_1}$ es una función, entonces para cada $x \in B_1$ se tiene una función $h_x : F^B \to F$ dada por $h_x(f) = h(f)(x)$.

**Definición 8.12.** Diremos que una función $h : F^B \to F^{B_1}$ es polinomial si para cada $x \in B_1$, la función $h_x : F^B \to F$ es polinomial.

Veamos ahora que la composición de funciones polinomiales es polinomial.

**Lema 8.11.** *Sean $h_1 : F^B \to F^{B_1}$ y $h_2 : F^{B_1} \to F^{B_2}$ funciones polinomiales, entonces $h_2 h_1$ también es polinomial.*

*Demostración.* Sea $x \in B_2$ y consideremos la función $(h_2)_x : F^{B_1} \to F$. Entonces existe un polinomio $P \in F[Z_1, \ldots, Z_l]$ tal que para cada $g \in F^{B_1}$, $(h_2)_x(g) = h_2(g)(x) = P(g(x_1), \ldots, g(x_l))$ y ciertos elementos $x_1, \ldots, x_l \in B_1$. Para cada $x_1, \ldots, x_l$ existen polinomios $Q_1, \ldots, Q_l \in F[z_1, \ldots, z_v]$ tales que $(h_1)_{x_1}(f) = Q_1(f(y_1), \ldots, f(y_v)), \ldots, (h_1)_{x_l}(f) = Q_l(f(y_1), \ldots, f(y_v))$ para ciertos $y_1, \ldots, y_v \in B$ y cada $f \in F^B$. Por lo tanto, para cada $f \in F^B$:

$$\begin{aligned}(h_2 h_1)_x(f) &= P(h_1(f)(x_1), \ldots, h_1(f)(x_l)) \\ &= P(Q_1(f(y_1), \ldots, f(y_v)), \ldots, Q_l(f(y_1), \ldots, f(y_v)))\end{aligned}$$

Entonces poniendo $R(Z_1, \ldots, Z_v) = P(Q_1(Z_1, \ldots, Z_v), \ldots, Q_l(Z_1, \ldots, Z_v))$ se obtiene $(h_2 h_1)_x(f) = R(f(y_1), \ldots, f(y_v))$. $\square$

Para cada $n \geq 2$, elijamos una $F$-base $B_n$ de $(M^{\otimes n})_{cyc}$ y sea $B = \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n$. Dado un potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$ se tiene $P = \sum_{b \in B} c_b b$ con $c_b \in F$.

En lo que sigue, $\underline{c}(P)$ denotará al elemento de $F^B$ tal que $\underline{c}(P)(b) = c_b$. Para cada $m \geq 2$, definamos $B^{\geq m} = \bigcup_{n \geq m} B_n$ y $B^{\leq m} = \bigcup_{n \leq m} B_n$.

Sea $M'$ otro $S$-bimódulo $Z$-libremente generado, $B'_n$ una $F$-base de $(M')^{\otimes n}_{cyc}$ y sea $B' = \bigcup_{n=2}^{\infty} B'_n$. Supongamos que se tiene una $F$-transformación lineal $\phi : \mathcal{F}_S(M)_{cyc} \to F_S(M')_{cyc}$ tal que $\phi(\mathcal{F}_S(M)^{\geq n}) \subseteq \mathcal{F}_S(M')^{\geq n}$ para cada $n \geq 1$. Entonces $\phi$ es continua. Veamos que existe una función polinomial $\underline{\phi} : F^B \to F^{B'}$ tal que para cada potencial $P \in \mathcal{F}_S(M)$:

$$\underline{c}(\phi(P)) = \underline{\phi}(\underline{c}(P))$$

En efecto, para cada $x \in B_n$ se tiene $\phi(x) = \sum_{y \in (B')^{\geq n}} \alpha_{x,y} y$ con $\alpha_{x,y} \in F$. Sea $\underline{\phi} : F^B \to F^{B'}$ definida como sigue. Para cada $f \in F^B$ y $y \in B'_m$ definamos:

$$\underline{\phi}(f)(y) = \sum_{x \in B^{\leq m}} f(x)\alpha_{x,y}$$

Sea $f = \underline{c}(P)$, entonces $P = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{x \in B_n} f(x)x \right)$ y:

$$\phi(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{x \in B_n} f(x)\phi(x) \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{x \in B_n} f(x) \left( \sum_{y \in (B')^{\geq n}} \alpha_{x,y} y \right) \right)$$

Por lo tanto, $\phi(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{y \in (B_n)'} \left( \sum_{x \in B^{\leq n}} f(x)\alpha_{x,y} \right) y = \sum_{y \in B'} \underline{\phi}(f)(y)y$. En consecuencia $\underline{c}(\phi(P)) = \underline{\phi}(\underline{c}(P))$, lo que prueba la afirmación.

Sea $F[Z_x]_{x \in B}$ el anillo de polinomios en las indeterminadas $Z_x$ con coeficientes en $F$. Sean $B$ y $B'$ conjuntos no-vacíos y consideremos indeterminadas $Z_x$ y $Z_y$ para cada $x \in B$, $y \in B'$, respectivamente. Si $T \in F[Z_x]_{x \in B}$ y $f \in F^B$ entonces definimos $T(f) := T(f(x))_{x \in B}$. Similarmente, se define $T(g)$ para $g \in F^{B'}$ y $T \in F[Z_y]_{y \in B'}$.

Si $T \in F[Z_x]_{x \in B}$ definimos $Z(T) := \{f \in F^B : T(f) \neq 0\}$.

**Definición 8.13.** Sea $T \in F[Z_x]_{x \in B}$. Diremos que una función $g : Z(T) \to F$ es regular si existe un polinomio $G \in F[Z_x]_{x \in B}$ y un entero no-negativo $u$ tal que para cada $f \in Z(T)$, $g(f) = \frac{G(f)}{T(f)^u} = G(f)T(f)^{-u}$. Una función $h : Z(T) \to F^{B'}$ es regular si para cada $y \in B'$, la función $h_y : Z(T) \to F$ dada por $h_y(f) = h(f)(y)$ es regular.

Notemos que la composición de una función regular y una polinomial es regular.

Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todos los pares $(i,j)$ tales que $e_iMe_j \neq 0$, $e_jMe_i \neq 0$, $\dim_F e_iMe_j \leq \dim_F e_jMe_i$ y sea $N^{>} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} e_jMe_i$, $N^{<} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} e_iMe_j$.

Sea $\mathcal{L}$ un $S$-subbimódulo de $N^{>}$, $Z$-libremente generado, tal que $(N^{<})^* \cong N^{>}/\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{L}_1$ un $S$-subbimódulo de $N^{>}$, $Z$-libremente generado, tal que $N^{>} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}_1$. Sea $\{w_1, \ldots, w_s\}$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $\mathcal{L}_1$ y $\{w_{s+1}, \ldots, w_{s+t}\}$ generadores $Z$-libres de $\mathcal{L}$. Sea $B(T)_m$ la $F$-base de $(M^{\otimes m})_{cyc}$ que consiste de todos los elementos no-cero de la forma $x = t_1(x)a_1(x)t_2(x) \ldots t_m(x)a_m(x)t_{m+1}(x)$ donde $t_i(x) \in L(\sigma(a_i(x)))$, $t_{m+1}(x) \in L(\tau(a_m(x)))$, $a_i(x) \in T$, y sea $B(T) = \bigcup_{m=2}^{\infty} B(T)_m$.

En lo que sigue, usaremos la siguiente notación: $T^{>} = T \cap N^{>}$ y $T^{<} = T \cap N^{<}$. Sea $W$ la $F$-base de $N^{>}$ asociada a un conjunto de generadores $Z$-libres $\{w_1, \ldots, w_{s+t}\}$ de $N^{>}$. Notemos que $W = W_1 \cup W_2$ donde $W_1$ es el conjunto que consiste de todos los elementos no-cero de la forma $z = t(z)w(z)r(z)$, $t(z), r(z) \in L$, $w(z) \in \{w_1, \ldots, w_s\}$ y $W_2$ consiste de todos los elementos no-cero de la forma $z = t(z)w(z)r(z)$, $t(z), r(z) \in L$, $w(z) \in \{w_{s+1}, \ldots, w_{s+t}\}$. Sea $a \in T^{<}$ y $x \in B(T)_2$, entonces cada elemento $X_{a^*}(x)$ puede ser escrito en la forma $\sum_{w \in W} c_{a,w}(x)w$ donde $c_{a,w}(x) \in F$.

Entonces para cada potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$ con $f = \underline{c}(P)$ y $a \in T^{<}$:

$$X^{P^{(2)}}(a^*) = \sum_{x \in B(T)_2} \sum_{w \in W} f(x)c_{a,w}(x)w = \sum_{w \in W} \left( \sum_{x \in B(T)_2} f(x)c_{a,w}(x) \right) w$$

Notemos que el conjunto de todos los elementos no-cero de $T' = \{ta^*r : t, r \in L, a \in T^<\}$ es una $F$-base de $(N^<)^*$. Para cada $y \in T'$ se tiene:

$$X^{P^{(2)}}(y) = \sum_{w\in W'} \left( \sum_{x\in B(T)_2} f(x)c_{a(y),w'}(x) \right) t(y)w'r(y)$$
$$= \sum_{w\in W} \left( \sum_{w'\in W} \sum_{x\in B(T)_2} f(x)c_{a(y),w'}(x)\lambda_w^{t(y)w'r(y)} \right) w$$

donde $t(y)w'r(y) = \sum_{w\in W} \lambda_w^{t(y)w'r(y)} w$, $\lambda_w^{t(y)w'r(y)} \in F$. Consideremos la matriz cuadrada $(k_{y,w})_{y\in T', w\in W_1}$:

$$k_{y,w} = \sum_{w'\in W} \sum_{x\in B(T)_2} f(x)c_{a(y),w'}(x)\lambda_w^{t(y)w'r(y)}$$

Entonces la correspondencia $P \mapsto det(k_{y,w})$ es una función polinomial $T_W$. Se tiene $T_W(P) = \underline{T}_W(\underline{c}(P))$ donde $\underline{T}_W(Z_x) = det(\underline{k}_{y,w})$ y:

$$\underline{k}_{y,w} = \sum_{w'\in W} \sum_{x\in B(T)_2} Z_x c_{a(y),w'}(x)\lambda_w^{t(y)w'r(y)}$$

Sea $\varsigma : \mathcal{F}_S(M)_{cyc} \to \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ la $F$-transformación lineal tal que para cada $x \in B(T) \setminus (N \otimes_S N)$, $\varsigma(x) = x$; si ocurre que $x = t_1(x)a_1(x)t_2(x)a_2(x)t_3(x)$, $x \in N \otimes_S N$ y $a_1(x) \in T^<$ entonces $\varsigma(x) = a_1(x)t_2(x)a_2(x)t_3(x)t_1(x)$; si $a_1(x) \notin T^<$ entonces $a_2(x) \in T^<$ y ponemos $\varsigma(x) = a_2(x)t_3(x)t_1(x)a_1(x)t_2(x)$. Claramente $P$ y $\varsigma(P)$ son potenciales cíclicamente equivalentes y por ende $X_{a^*}(P) = X_{a^*}(\varsigma(P))$. Usando la Proposición 7.9 se obtiene

$$\varsigma(P) = \sum_{a\in T^<} aX_{a^*}(P^{(2)}) + \varsigma(P^{\geq 3})$$

Recordemos que para cada par $(i, j)$ en $\mathcal{K}$ se tiene $\dim_F e_iMe_j \leq \dim_F e_jMe_i$ y por lo tanto $|T^< \cap e_iMe_j| \leq |T^> \cap e_jMe_i|$. En consecuencia, podemos enumerar los elementos de $T^<$ como $\{a_1, \ldots, a_s\}$ y los elementos de $T^>$ como $\{b_1, \ldots, b_s, b_{s+1}, \ldots, b_{s+t}\}$ de tal manera que $a_u \in e_iMe_j$ si y sólo si $b_u \in e_jMe_i$ para cada $u = 1, \ldots, s$.

Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $\underline{c}(P^{(2)}) \in Z(\underline{T}_W)$, entonces $P^{(2)}$ es maximal; luego $N^> = \mathrm{Im}(X^{P^{(2)}}) \oplus \mathcal{L}$ para algún $S$-subbimódulo $Z$-libremente generado $\mathcal{L}$ de $N^>$. Notemos que un conjunto de generadores $Z$-libres de $N^>$ está dado por los elementos $X_{a^*}(P^{(2)})$, donde $a \in T^<$, junto con los elementos de $\{w_{s+1}, \ldots, w_{s+t}\}$ donde este último conjunto genera $Z$-libremente a $\mathcal{L}$. Por lo tanto, existe un isomorfismo de $S$-bimódulos $\phi^P : M \to M$ tal que para cada $a \notin T^>$, $\phi^P(a) = a$; $\phi^P(X_{(a_i)^*}(P^{(2)})) = b_i$ para cada $i = 1, \ldots, s$ y $\phi^P(w_{s+j}) = b_{s+j} \in T^>$. Entonces:

$$\phi^P(\varsigma(P)) = \sum_{j=1}^{s} a_jb_j + \phi^P(\varsigma(P^{\geq 3}))$$

Calculemos las coordenadas de $\phi^P(\varsigma(P))$.

Asociado al conjunto de generadores $Z$-libres $\{w_1, \ldots, w_{s+t}\}$ se tiene una $F$-base $W$ de $N^>$. Similarmente, existe una $F$-base $Y'$ de $N^>$ asociada al conjunto de generadores $Z$-libres que consiste de todos los elementos $X^{P^{(2)}}(a^*)$, donde $a \in T^<$, junto con los elementos $w_{s+1}, \ldots, w_{s+t}$. En consecuencia, la matriz de cambio de base de $Y'$ a $W$ tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} A(P) & 0 \\ B(P) & I \end{bmatrix}$$

donde $A(P) = [k_{y,w}(P)]_{y\in T', w\in W_1}$ y las entradas de la matriz $A(P)$ son funciones polinomiales en $\underline{c}(P)$. Entonces la matriz de cambio de base de $W$ a $Y'$ está dada por:

$$\begin{bmatrix} A(P)^{-1} & 0 \\ -B(P)A(P)^{-1} & I \end{bmatrix}$$

y los coeficientes de esta matriz son funciones regulares en $Z(\underline{T}_W)$.

Por lo tanto, para cada $w \in W$, $w = \sum_{y' \in Y'} \beta_{w,y'}(P)y'$ donde cada $\beta_{w,y'}(P)$ es una función regular en $Z(\underline{T}_W)$. Si $x$ es un elemento de la $F$-base de $N^>$ determinada por $T^>$, entonces $x = \sum_{w \in W} \lambda_{x,w} w$ donde $\lambda_{x,w} \in F$. En consecuencia:

$$x = \sum_{w,y'} \lambda_{x,w}\beta_{w,y'}(P)y'$$

Se sigue que $\phi^P(x) = \sum_{w,y'} \lambda_{x,w}\beta_{w,y'}(P)\phi^P(y')$ y $\phi^P(y')$ pertenece a la $F$-base determinada por $T$. Luego, para cada $x \in B(T)_m$, $\phi^P(x) = \sum_{x' \in B(T)_m} \alpha_{x,x'}(P)x'$ donde cada $\alpha_{x,x'}(P)$ es una función regular en $Z(\underline{T}_W)$. Se obtiene:

$$\phi^P(\varsigma(P)) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{x' \in B(T)_m} \left( \sum_{x \in B(T)_m} \alpha_{x,x'}(P)f(x) \right) x'$$

Por lo tanto, la aplicación $\psi : Z(T_W) \to \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ dada por $\psi(P) = \phi^P(\varsigma(P))$ es una función regular y:

$$\psi(P) = \sum_{i=1}^{s} a_i b_i + \psi(P)^{\geq 3}$$

Consideremos ahora la $F$-transformación lineal $\xi : \mathcal{F}_S(M)_{cyc} \to \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ dada como sigue. Si $x \in B(T)_m$, con $m \geq 2$, y $a_j(x) \notin \{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s\}$ ponemos $\xi(x) = x$. Si $x \in B(T)_m$, con $m \geq 2$, y si para algún $j$, $a_j(x) \in T^<$; entonces elegimos $j$ mínimo. Si $j = 1$ entonces $\xi(x) = a_1(x)t_2(x)\ldots a_m(x)t_{m+1}(x)t_1(x) \in M^{\otimes m}$; si $j > 1$ entonces $\xi(x) = a_j(x)t_{j+1}(x)\ldots a_m t_{m+1}(x)t_1(x)a_1(x)\ldots a_{j-1}(x)t_j(x) \in M^{\otimes m}$.
Si ninguno de los $a_i$ pertenecen a $T^<$ pero algún $a_i$ es igual a $b_i$, con $i \in \{1, \ldots, s\}$, entonces elegimos $i$ maximal con respecto a esta propiedad; si $i = m$ entonces ponemos $\xi(x) = t_{m+1}(x)t_1(x)a_1(x)\ldots t_m(x)a_m(x)$; si $i < m$ definimos:

$$\xi(x) = t_{i+1}(x)a_{i+1}(x)\ldots t_m(x)a_m(x)t_{m+1}(x)t_1(x)a_1(x)\ldots t_{i-1}(x)a_i(x) \in M^{\otimes m}$$

Claramente $P$ y $\xi(P)$ son cíclicamente equivalentes.

Sea $B(T)_{i,m}$ el conjunto de todos los elementos $x \in B(T)_m$ tales que $t_1(x) = 1$ y $a_1(x) = a_i$; para cada $a_i$ definimos $\rho(x)$ como $a_i\rho(x) = x$. Similarmente, $B(T)_{m,i}$ es el conjunto de todos los elementos $x \in B(T)_m$ tales que $a_i(x) \notin T^<$ para $i = 1, \ldots, m$ y $a_m(x) = b_i$; en este caso definimos $\lambda(x)$ como $\lambda(x)b_i = x$.

Dado un potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$ con coordenadas $f$, definimos un automorfismo unitriangular $\varphi^P$ de $\mathcal{F}_S(M)$ como sigue. Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ sea:

$$\varphi^P(a_i) := a_i - \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{x \in B(T)_{m,i}} f(x)\lambda(x)$$

$$\varphi^P(b_i) := b_i - \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{x \in B(T)_{i,m}} f(x)\rho(x)$$

y $\varphi(a) = a$ para el resto de los elementos $a$ de $T$.

Definamos $\tau : \mathcal{F}_S(M)_{cyc} \to \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ como $\tau(P) = \varphi^P(P)$; notemos que $\tau$ es polinomial. Entonces la composición $\tau\varsigma : \mathcal{F}_S(M)_{cyc} \to \mathcal{F}_S(M)_{cyc}$ es una función polinomial. El Teorema 7.1 implica que si $P$ es un potencial de la forma $P = \sum_{i=1}^{s} a_i b_i + P^{\geq 3}$, entonces:

1. La sucesión $\{(\tau\varsigma)^n(P)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Q(P)$ donde $Q(P) = \sum_{i=1}^{s} a_ib_i + Q(P)^{\geq 3}$, $M = M_1 \oplus M'$, $M_1$ es $Z$-libremente generado por $\{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s\}$ y $M'$ es $Z$-libremente generado por todos los elementos de $T$ que no pertenecen a $\{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s\}$.
2. Para cada $x \in B(T)_m$, existe un natural $N_0$ tal que si $f$ denota a las coordenadas de $Q(P)$, entonces $f(x) = \underline{c}((\tau\varsigma)^n(P))(x)$ para toda $n \geq N_0$.

Sea $M$ un $S$-bimódulo, $Z$-libremente generado, tal que $(M^{\otimes 2})_{cyc} = \{0\}$. Recordemos que para un entero $k$ en $[1, \ldots, n]$ la notación $\widetilde{M}$ denota al $S$-bimódulo $\bar{e_k}M\bar{e_k} \oplus Me_kM \oplus (e_kM)^* \oplus^* (Me_k)$. Sea $\widetilde{\mathcal{K}}$ el conjunto de todos los pares $(i,j)$ tales que $e_i\widetilde{M}e_j \neq 0$, $e_j\widetilde{M}e_i \neq 0$ y $\dim_F(e_i\widetilde{M}e_j) \leq \dim_F(e_j\widetilde{M}e_i)$. Para $i \neq k$ se tiene:

$$e_k\widetilde{M}e_i =^* (e_iMe_k),\; e_i\widetilde{M}e_k = (e_kMe_i)^*$$

Por lo tanto, $(i,k)$ y $(k,i)$ no pertenecen a $\widetilde{\mathcal{K}}$. Supongamos ahora que $i \neq k$ y $j \neq k$, entonces:

$$\begin{aligned} e_i\widetilde{M}e_j &= e_iMe_j \oplus e_iMe_kMe_j \\ e_j\widetilde{M}e_i &= e_jMe_i \oplus e_jMe_kMe_i \end{aligned}$$

Luego si $(i,j) \in \widetilde{\mathcal{K}}$ hay dos posibilidades:

$$\dim_F e_iMe_j \leq \dim_F(e_jMe_kMe_i)$$

o

$$\dim_F e_iMe_kMe_j \leq \dim_F(e_jMe_i)$$

Sea $\widetilde{\mathcal{N}} = \sum_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{K}}} (e_i\widetilde{M}e_j + e_j\widetilde{M}e_i)$ y sea $\widetilde{T}$ el conjunto de generadores $Z$-libres inducido por el Lema 8.2. Denotemos por $B(\widetilde{T})_m$ la $F$-base asociada a $((\widetilde{M})^{\otimes m})_{cyc}$ y $B(\widetilde{T}) = \bigcup_{m=2}^{\infty} B(\widetilde{T})_m$. Sea $s(i,j)$ el número de generadores $Z$-libres de $e_i\widetilde{\mathcal{N}}^{<}e_j$ y $t(i,j)$ el número de generadores $Z$-libres de $e_j\widetilde{\mathcal{N}}^{>}e_i$. Por lo tanto:

$$d_is(i,j)d_j = \dim_F e_i\widetilde{\mathcal{N}}^{<}e_j \leq \dim_F e_j\widetilde{\mathcal{N}}^{>}e_i = d_jt(i,j)d_i$$

entonces $s(i,j) \leq t(i,j)$ y por lo tanto existen conjuntos de generadores $Z$-libres $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+t}\}$ de $\widetilde{\mathcal{N}}^{<}$ y $\widetilde{\mathcal{N}}^{>}$, respectivamente, tales que $\alpha_j\beta_j \neq 0$ para cada $j = 1, \ldots, s$.

Definamos $\mu_k'M$ como el $S$-subbimódulo de $M$ generado por el complemento de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s\}$ en $\widetilde{T}$.

**Proposición 8.15.** *Sea $P_0$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que para algún $k \in [1,n]$, $(\mu_k(P_0))^{(2)}$ es maximal. Entonces existe un polinomio $T(Z_x)$ tal que $T(\underline{c}(P_0)) \neq 0$ y una función regular $\phi : Z(T(Z_x)) \to \mathcal{F}_S(\mu_k'M)$ tal que para cada potencial $P$ en $\mathcal{F}_S(M)$ con $T(\underline{c}(P)) \neq 0$, se tiene $\bar{\mu_k}(P) = \phi(P)$.*

*Demostración.* Se tiene que $\mu_kP_0 = \mu_k(\kappa(P_0))$. Por hipótesis, $P_2 = \mu_k((\kappa(P_0))^{(2)}$ es maximal, luego $\widetilde{\mathcal{N}}^{>} = \mathrm{Im}(X^{P_2}) \oplus \widetilde{\mathcal{L}}$ para algún $S$-subbimódulo $\widetilde{\mathcal{L}}$, $Z$-libremente generado, de $\widetilde{\mathcal{N}}^{>}$. Sea $\{w_1, \ldots, w_s\}$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $\mathrm{Im}(X^{P_2})$ y sea $\{w_{s+1}, \ldots, w_{s+t}\}$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $\widetilde{\mathcal{L}}$. Denotemos por $W$ a la $F$-base asociada a este conjunto de generadores $Z$-libres de $\widetilde{\mathcal{N}}^{>}$. Entonces, existe una función polinomial $T_W : \mathcal{F}_S(\widetilde{M}) \to F$ tal que si $P'$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(\widetilde{M})$ y $T_W(P') \neq 0$, entonces $X^{P'} : (\widetilde{\mathcal{N}}^{<})^* \to \widetilde{\mathcal{N}}^{>}$ es inyectiva. La composición $\phi_1 = \mu_k\kappa : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(\widetilde{M})$ es polinomial, luego induce una función polinomial $\underline{\phi_1} : F^{B(T)} \to F^{B(\widetilde{T})}$. Entonces se obtiene una función polinomial $T_W\phi_1 : \mathcal{F}_S(M) \to F$ y esta función está determinada por un polinomio $T(Z_x) \in F[Z_x]_{x\in B(T)}$ tal que $T_W\phi_1(P) = T(\underline{c}(P))$. Como $T_W(\phi_1(P_0)) \neq 0$ entonces $T(Z_x) \neq 0$. Por lo tanto, existe una función regular $Z(T_W) \to \mathcal{F}_S(\widetilde{M})_{cyc}$ que manda $P'$ en $Q(\psi(P'))$. En consecuencia, existe una función regular:

$$\phi_2 : Z(T_W) \to \mathcal{F}_S(\widetilde{M})_{cyc}$$

dada por $\phi_2(P) = Q(\psi(\phi_1(P)))$. Consideremos la proyección $\widetilde{M} \twoheadrightarrow \mu'_k M$; dicho morfismo induce un morfismo $\pi : \mathcal{F}_S(\widetilde{M})_{cyc} \to \mathcal{F}_S(\mu'_k M)$. Sea $\phi = \pi\phi_2 : Z(T_W) \to \mathcal{F}_S(\mu'_k M)$, entonces $\phi$ es una función regular y por construcción $\phi(P) = \bar{\mu_k} P$ para cada $P \in Z(T_W)$. Esto termina la demostración.

□

**Proposición 8.16.** *Sea $k_1, k_2, \ldots, k_l$ una sucesión arbitraria de elementos de $\{1, \ldots, n\}$. Sea $P_0$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que la sucesión $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_1} P_0$ existe, entonces existe un polinomio $T \in F[Z_x]_{x\in B(T)}$ y una función regular $\phi : Z(T) \to \mathcal{F}_S(\mu_{k_l} \ldots \mu_{k_1} M)_{cyc}$ tal que $P_0 \in Z(T)$ y para cada $P \in Z(T)$, $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_1} P$ existe y $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_1} P = \phi(P)$.*

*Demostración.* Probemos esto mediante inducción en $l$. El caso $l = 1$ se sigue de la proposición anterior. Supongamos entonces que la afirmación se cumple para $l - 1$ y probemos que se cumple para $l$. De la proposición anterior se infiere la existencia de un polinomio $T_1 \in F[Z_x]_{x\in B(T)}$ y una función regular:

$$\phi_1 : Z(T_1) \to \mathcal{F}_S(\mu_{k_1} M)_{cyc}$$

y la correspondiente función regular asociada $\underline{\phi}_1 : \underline{Z}(T_1) \to F^{B(\mu_{k_1} T)}$, con $P_0 \in Z(T_1)$, tal que para cada $P \in Z(T_1)$, $\bar{\mu_k}_1 P$ existe y es igual a $\phi_1(P)$. Por hipótesis de inducción, existe un polinomio $T_2 \in F[Z_y]_{y\in B(\mu_{k_1} T)}$ y una función regular:

$$\phi_2 : Z(T_2) \to \mathcal{F}_S(\mu_{k_l} \ldots \mu_{k_1} M)_{cyc}$$

y la correspondiente función regular asociada $\underline{\phi}_2 : \underline{Z}(T_2) \to F^{B(\mu_{k_l} \cdots \mu_{k_1} T)}$, con $\mu_{k_1} P_0 \in Z(T_2)$, y tal que para cada $P' \in Z(T_2)$, $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2} P'$ existe y es igual a $\phi_2(P')$. Como $\underline{\phi}_1$ es regular, entonces para cada $y \in B(\mu_{k_1} T)$ existe un polinomio $G_y \in F[Z_x]_{x\in B(T)}$ tal que si $f \in \underline{Z}(T_1)$:

$$(\underline{\phi}_1)_y(f) = \underline{\phi}_1(f)(y) = G_y(f(x))/T_1(f(x))^{m(y)}$$

para cierto número natural $m(y)$. Similarmente, como $\underline{\phi}_2$ es regular, entonces para cada $u \in B(\mu_{k_l} \ldots \mu_{k_1} T)$ y $g \in \underline{Z}(T_2)$ existe $H_u \in F[Z_y]_{y\in B(\mu_{k_1} T)}$ tal que si $g \in \underline{Z}(T_2)$:

$$(\underline{\phi}_2)_u(g) = \underline{\phi}_2(g)(u) = H_u(g(y))/T_2(g(y))^{m(u)}$$

para cierto número natural $m(u)$. Consideremos el polinomio $T_2(G_y(Z_x)) \in F[Z_x]_{x\in B(T)}$. Veamos que este es un polinomio no-nulo. En efecto, por hipótesis $\mu_{k_1} P_0 \in Z(T_2)$, así que si $f_0 = \underline{c}(P_0)$ entonces:

$$\begin{aligned} 0 \neq T_2(\underline{c}(\mu_{k_1} P_0)(y)) &= T_2(\underline{\phi}_1(f_0)(y)) \\ &= T_2(\underline{\phi}_1(f_0(y))) \\ &= T_2(G_y(f_0(x))/T_1(f_0(x))^{m(y)}) \\ &= T_2(G_y(f_0(x)))/T_1(f_0(x))^t \end{aligned}$$

para cierto número natural $t$. Por lo tanto, $T_2(G_y(f_0(x))) \neq 0$ y se sigue la afirmación. Consideremos ahora el polinomio no-nulo $T(Z_x) := T_2(G_y(Z_x))T_1(Z_x)$. Claramente $Z(T) \subseteq Z(T_1)$ y si $f \in Z(T)$, entonces:

$$T_2(\underline{\phi}_1 f) = T_2(G_y(f(x)))/T_1(f_0(x))^t \neq 0$$

luego la imagen de $Z(T)$ bajo el morfismo $\phi_1$ está contenida en $Z(T_2)$ y la composición de los morfismos:

$$Z(T_1) \overset{\phi_1}{\to} Z(T_2) \overset{\phi_2}{\to} \mathcal{F}_S(\mu_{k_l} \ldots \mu_{k_1} M)_{cyc}$$

da lugar a una función regular $\phi$. Luego si $P \in Z(T)$ entonces $P \in Z(T_1)$; así que $\bar{\mu}_{k_1} P$ está definido y $\bar{\mu}_{k_1} P = \phi_1(P)$. Como $\phi_1(P) \in Z(T_2)$, entonces $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2}(\bar{\mu}_{k_1} P)$ está definido y es igual a $\phi_2\phi_1(P) = \phi(P)$. Esto completa la demostración. □

**Lema 8.12.** *Sea $k$ un elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces existe un potencial $P \in \mathcal{F}_S(M)$ tal que la mutación $\bar{\mu}_k P$ está definida.*

*Demostración.* Sean $s, t$ elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Como $M$ es $Z$-libremente generado por $M_0$, entonces:

$$\begin{aligned} e_sMe_kMe_t &\cong D_s \otimes_F e_sM_0e_k \otimes_F D_k \otimes_{D_k} D_k \otimes_F e_kM_0e_t \otimes_F D_t \\ &= D_s \otimes_F e_sM_0e_k \otimes_F D_k \otimes_F e_kM_0e_t \otimes_F D_t \end{aligned}$$

Para cada $l, q, r$ definamos:

$$\begin{aligned} m^0_{l,q} &:= \dim_F e_lM_0e_q \\ d_r &:= \dim_F D_r \end{aligned}$$

Entonces $\dim_F e_sMe_kMe_t = d_sm^0_{s,k}d_km^0_{k,t}d_t$ y $\dim_F e_tMe_s = d_tm^0_{t,s}d_s$.

Recordemos que $\widetilde{\mathcal{K}} = \{(s,t) : \dim_F e_sMe_kMe_t \leq \dim_F e_tMe_s\} \cup \{(s,t) : \dim_F e_sMe_t \leq \dim_F e_tMe_kMe_s\}$. Sea $(s,t) \in \widetilde{\mathcal{K}}$ y supongamos que $\dim_F e_sMe_kMe_t \leq \dim_F e_tMe_s$, luego $d_sm^0_{s,k}d_km^0_{k,t}d_t \leq d_tm^0_{t,s}d_s$. Esto implica que $m^0_{s,k}d_km^0_{k,t} \leq m^0_{t,s}$. Definamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \{(s,t) : m^0_{s,k}d_km^0_{k,t} \leq m^0_{t,s}\} \\ \mathcal{X}_2 &= \{(s,t) : m^0_{s,k}d_km^0_{k,t} > m^0_{t,s}\} \end{aligned}$$

Dado un elemento $(s,t)$ en $\mathcal{X}_1$ elijamos $F$-bases $\{h_1, h_2, \ldots, h_{l(s,t)}\}$, $\{g_1, g_2, \ldots, g_{l(s,t)}, g_{l(s,t)+1}, \ldots, g_{r(s,t)}\}$ de $e_sM_0e_k \otimes_F D_k \otimes_F e_kM_0e_t$ y $e_tM_0e_s$, respectivamente. Similarmente, dado $(a,b) \in \mathcal{X}_2$ elijamos $F$-bases $\{h'_1, h'_2, \ldots, h'_{p(a,b)}, \ldots, h'_{q(a,b)}\}$, $\{g'_1, \ldots, g'_{p(a,b)}\}$ de $e_aM_0e_k \otimes_F D_k \otimes_F e_kM_0e_b$ y $e_bM_0e_a$, respectivamente. Consideremos el siguiente potencial reducido:

$$P = \sum_{(s,t)\in\mathcal{X}_1} \sum_{i=1}^{l(s,t)} h_ig_i + \sum_{(a,b)\in\mathcal{X}_2} \sum_{i=1}^{p(a,b)} h'_ig'_i$$

Entonces

$$(\widetilde{P})^{(2)} = (\mu_kP)^{(2)} = \sum_{(s,t)\in\mathcal{X}_1} \sum_{i=1}^{l(s,t)} [h_i]g_i + \sum_{(a,b)\in\mathcal{X}_2} \sum_{i=1}^{p(a,b)} [h'_i]g'_i$$

Como $X^{(\mu_kP)^{(2)}}$ manda un conjunto de generadores $Z$-libres de $(\widetilde{\mathcal{N}}^<)^*$ en un subconjunto linealmente independiente de $\widetilde{\mathcal{N}}^>$, entonces $(\mu_kP)^{(2)}$ es maximal. Se sigue que la mutación $\bar{\mu}_kP$ está definida. $\square$

**Teorema 8.6.** *Sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ una matriz anti-simetrizable, con anti-simetrizador $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ y sea $k_1, k_2, \ldots, k_l$ una sucesión arbitraria de elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si para cada $j$, $d_j$ divide a $b_{ij}$ para toda $i$, y si además el campo base $F$ de la realización de la Proposición* 8.14 *es infinito, entonces para dicha realización existe un potencial $P$ tal que la mutación $\bar{\mu}_{k_l} \cdots \bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P$ está definida.*

*Demostración.* Procedamos mediante inducción en $l$. El caso base $l = 1$ se sigue del Lema 8.12. Supongamos entonces que la afirmación se cumple para $l - 1$. Por hipótesis de inducción, existe un potencial $Q \in \mathcal{F}_S(\mu_{k_1}M)$ tal que $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2}Q$ existe. Por el caso base, existe un potencial $Q' \in \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\bar{\mu}_{k_1}Q'$ existe. Usando la Proposición 8.16, se obtiene un polinomio $T \in F[Z_x]_{x\in B(\mu_{k_1}T)}$ tal que $T(\underline{c}(Q)) \neq 0$ y para cada potencial $Q'' \in \mathcal{F}_S(\mu_{k_1}M)$ con $T(\underline{c}(Q'')) \neq 0$, entonces $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2}(Q'')$ existe. Aplicando nuevamente la Proposición 8.16 se obtiene un polinomio $T' \in F[Z_x]_{x\in B(\mu_{k_1}T)}$ con $T'(\underline{c}(Q')) \neq 0$ y tal que para cada potencial $Q''' \in \mathcal{F}_S(M)$ que satisfaga $T'(\underline{c}(Q''')) \neq 0$, entonces $\bar{\mu}_{k_1}(Q''')$ existe. Como el polinomio producto $T'T \in F[Z_x]_{x\in B(\mu_{k_1}T)}$ es no-nulo y $F$ es infinito, entonces existe un potencial $Q_0 \in \mathcal{F}_S(\mu_{k_1}M)$ tal que $\underline{c}(Q_0) \in Z(T'T)$. Luego $T'(\underline{c}(Q_0)) \neq 0$ y $T(\underline{c}(Q_0)) \neq 0$. La primera condición implica que $\bar{\mu}_{k_1}Q_0$ existe; la segunda condición implica que $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ existe. Por construcción, $\bar{\mu}_{k_1}Q_0 \in \mathcal{F}_S(\mu_{k_1}\mu_{k_1}M) \cong \mathcal{F}_S(M)$. Usando el último isomorfismo se obtiene un potencial $P_0 \in \mathcal{F}_S(M)$ y una equivalencia-derecha $P_0 \sim \bar{\mu}_{k_1}Q_0$. Como $T(\underline{c}(Q_0)) \neq 0$, entonces $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ existe. En particular esto implica que $\bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ existe. Esto da lugar a una equivalencia-derecha entre $\bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ y $\bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P_0$ y por lo tanto $\bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P_0$ existe. Del hecho de que $\bar{\mu}_{k_l} \ldots \bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ existe se infiere que $\bar{\mu}_{k_3}\bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ también existe. Usando la equivalencia-derecha entre $\bar{\mu}_{k_2}(Q_0)$ y $\bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P_0$ se obtiene que $\bar{\mu}_{k_3}\bar{\mu}_{k_2}\bar{\mu}_{k_1}P_0$ existe. Repitiendo este proceso se obtiene el resultado deseado. $\square$

# Capítulo 9

# Representaciones decoradas

En este capítulo, motivados por [10] y [18], se introduce la noción de representación decorada. El objetivo de este capítulo es extender la Definición 8.6 de mutación de álgebras con potencial a nivel de representaciones. El resultado central es el Teorema 9.2 en el cual se prueba que la mutación de representaciones decoradas es involutiva. En el resto de la tesis supondremos que para cada entero $i \in [1, n]$, cada $F$-base $L(i)$ de $D_i$, cumple las siguientes igualdades:

$$f^*(w^{-1}z) = w^*(zf^{-1}) \tag{9.1}$$

$$f^*(zw) = (w^{-1})^*(f^{-1}z) \tag{9.2}$$

$$z^*(wf) = (w^{-1})^*(fz^{-1}) \tag{9.3}$$

para toda $f, w, z \in L(i)$. Notemos que en 9.1 y 9.2 uno puede reemplazar $z \in L(i)$ por $z \in D_i$, ya que ambas expresiones son lineales en $z$. Similarmente, uno puede reemplazar en 9.3 $f \in L(i)$ por $f \in D_i$.

**Observación 9.1.** Si $L(i)$ es una base semi-multiplicativa de $D(i)$ entonces $L(i)$ satisface 9.1, 9.2 y 9.3.

*Demostración.* Supongamos que $f^*(w^{-1}z) \neq 0$ entonces $w^{-1}z = cf$ para un único $c \in F^*$; luego $f^*(w^{-1}c) = c$. Por otro lado, $w^*(zf^{-1}) = w^*(z(z^{-1}wc)) = w^*(wc) = c$ y la igualdad se sigue. Un argumento similar muestra que 9.2 y 9.3 también se cumplen. □

**Observación 9.2.** Supongamos que $L_1$ es una $F$-base para la extensión de campos $F_1/F$ y $L_2$ es una $F_1$-base para la extensión de campos $F_2/F_1$. Si $L_1$ y $L_2$ satisfacen 9.1, 9.2 y 9.3 entonces la $F$-base $\{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$ de $F_2/F$ también satisface 9.1, 9.2 y 9.3.

*Demostración.* Supongamos que tanto $L_1$ y $L_2$ satisfacen 9.1. Sean $f = f_1f_2$, $w = w_1w_2$, $z = z_1z_2$ donde $f_1, w_1, z_1 \in L_1$ y $f_2, w_2, z_2 \in L_2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f^*(w^{-1}z) &= f_1^* f_2^*(w_1^{-1}w_2^{-1}z_2z_1) \\
&= f_1^*(w_1^{-1}z_1 f_2^*(w_2^{-1}z_2)) \\
&= f_1^*(w_1^{-1}z_1 w_2^*(z_2f_2^{-1})) \\
&= w_1^*(z_1f_1^{-1}w_2^*(z_2f_2^{-1})) \\
&= (w_1w_2)^*(z_1z_2(f_1f_2)^{-1}) \\
&= w^*(zf^{-1})
\end{aligned}$$

como se afirmaba. Las igualdades 9.2 y 9.3 se prueban de manera análoga. □

**Observación 9.3.** Si la base $L(i)$ satisface 9.1, entonces para cada $f, z \in L(i)$ se tiene:

$$\sum_{w \in L(i)} f^*(w^{-1}z)w = zf^{-1}$$

*Demostración.* $\sum_{w\in L(i)} f^*(w^{-1}z)w = \sum_{w\in L(i)} w^*(zf^{-1})w = zf^{-1}$. □

**Observación 9.4.** Si la base $L(i)$ satisface 9.2, entonces para cada $r, v \in L(i)$ se tiene:

$$\sum_{t\in L(i)} r^*(vt)t^{-1} = r^{-1}v \tag{9.4}$$

*Demostración.* $\sum_{t\in L(i)} r^*(vt)t^{-1} = \sum_{t\in L(i)} (t^{-1})^*(r^{-1}v)t^{-1} = r^{-1}v$. □

**Definición 9.1.** Sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial. Una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$ es una pareja $\mathcal{N} = (N, V)$ donde $N$ es un $\mathcal{F}_S(M)$-módulo izquierdo, finito-dimensional sobre $F$, anulado por $R(P)$ y $V$ es un $S$-módulo izquierdo de dimensión finita sobre $F$.

Equivalentemente, $N$ es un $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulo izquierdo y de dimensión finita sobre $F$. Para cada $u \in \mathcal{F}_S(M)$ denotamos por $u_N = u : N \to N$ el operador multiplicación $u(n) = un$.

Sean $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y $(\mathcal{F}_S(M'), P')$ álgebras con potencial. Sean $\mathcal{N} = (N, V)$ y $\mathcal{N}' = (N', V')$ representaciones decoradas de $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y $(\mathcal{F}_S(M'), P')$, respectivamente. Una *equivalencia-derecha* entre las representaciones $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$ es una terna $(\varphi, \psi, \eta)$ donde:

- $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ es una equivalencia-derecha entre $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y $(\mathcal{F}_S(M'), P')$.
- $\psi : N \to N'$ es un isomorfismo de $F$-espacios vectoriales tal que $\psi \circ u_N = \varphi(u)_{N'} \circ \psi$ para toda $u \in \mathcal{F}_S(M)$.
- $\eta : V \to V'$ es un isomorfismo de $S$-módulos izquierdos.

**Observación 9.5.** Supongamos que $M^{\otimes n} = 0$ para $n \gg 0$ y que $\mathcal{F}_S(M)_{cyc} = \{0\}$. Entonces una representación decorada, con $V = 0$, se puede identificar con un módulo izquierdo sobre el álgebra tensorial $T_S(M)$. En el caso que el álgebra subyacente $S$ sea un producto directo finito de copias del campo base $F$, entonces $T_S(M)$ se puede identificar con un álgebra de caminos. Por lo tanto, en este caso una representación decorada, con $V = 0$, es una representación de un carcaj en el sentido clásico.

Sean $M_1$, $M_2$ $S$-bimódulos $Z$-libremente generados y sean $T_1$ y $T_2$ conjuntos de generadores $Z$-libres de $M_1$ y $M_2$, respectivamente. Sean $P_1$ y $P_2$ potenciales en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $\mathcal{F}_S(M_2)$. Consideremos el potencial $P_1 + P_2 \in \mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$. Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada del álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2), P_1 + P_2)$. Se tiene un morfismo inyectivo de álgebras $\mathcal{F}_S(M_1) \hookrightarrow \mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$; luego, por restricción de escalares, $N$ es un $\mathcal{F}_S(M_1)$-módulo izquierdo. Denotaremos este módulo por $N|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$. Veamos que $R(P_1)$ anula a $N|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$. Sea $a \in T_1$, entonces $X_{a^*}(P_2) = \sum_{s\in L(\sigma(a))} \delta_{(sa)^*}(P_2)s = 0$. Por lo tanto, $X_{a^*}(P_1 + P_2) = X_{a^*}(P_1) \in R(P_1 + P_2)$. Se sigue que $\mathcal{N}|_{\mathcal{F}_S(M_1)} := (N|_{\mathcal{F}_S(M_1)}, V)$ es una representación decorada del álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M_1), P_1)$.

La siguiente proposición generaliza [10, Proposition 10.5] y [18, Proposition 12.4].

**Proposición 9.1.** *Sean $M_1$ y $M_2$ $S$-bimódulos $Z$-libremente generados y sean $P, P'$ potenciales reducidos en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $W$ un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$. Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$ representaciones decoradas de $\mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$ con respecto a los potenciales $P + W$ y $P' + W$. Si $\mathcal{N}$ es derecho-equivalente a $\mathcal{N}'$, entonces $\mathcal{N}|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$ es derecho-equivalente a $\mathcal{N}'|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$.*

*Demostración.* Sea $(\phi, \psi, \eta) : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ una equivalencia-derecha de representaciones decoradas. Entonces:

(a) $\phi$ es un automorfismo de álgebras de $\mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$ con $\phi_{|S} = id_S$ tal que $\phi(P + W)$ es cíclicamente equivalente a $P' + W$.

(b) $\psi : N \to N'$ es un isomorfismo de $F$-espacios vectoriales tal que si $n \in N$ y $u \in \mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$ entonces $\psi(un) = \phi(u)\psi(n)$.

(c) $\eta : V \to V'$ es un isomorfismo de $S$-módulos izquierdos.

Sea $L$ la cerradura del ideal bilateral de $\mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$ generado por $M_2$, entonces por la Proposición 6.4:

1. $\mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2) = \mathcal{F}_S(M_1) \oplus L$
2. $R(P + W) = R(P) \oplus L$
3. $R(P' + W) = R(P') \oplus L$

donde $R(P)$ (respectivamente $R(P')$) es la cerradura del ideal bilateral en $\mathcal{F}(M_1)$ generado por todos los elementos $X_{a^*}(P)$ (respectivamente $X_{a^*}(P')$) donde $a \in T_1$, siendo $T_1$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $M_1$. Sea $p : \mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_S(M_1)$ la proyección canónica inducida por la descomposición (1). Por la Proposición 6.4 existe un isomorfismo de álgebras:

$$\rho = p \circ \phi_{|\mathcal{F}_S(M_1)} : \mathcal{F}_S(M_1) \to \mathcal{F}_S(M_1)$$

tal que $P' - \rho(P)$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $R(\rho(P))^2$. Por la Proposición 6.3, existe un automorfismo de álgebras $\lambda$ de $\mathcal{F}_S(M_1)$ tal que $\lambda\rho(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$ y $\lambda(u) - u \in R(\rho(P))$ para cada $u \in \mathcal{F}_S(M_1)$. Por definición de representación decorada, $R(P + W)N = 0$ y $R(P' + W)N' = 0$. Dado que $L$ está contenido tanto en $R(P + W)$ y en $R(P' + W)$, entonces $LN = 0$ y $LN' = 0$. Por lo tanto, para cada $u \in \mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$ y $n \in N$:

$$\psi(un) = \phi(u)\psi(n)$$

Notemos que $\phi(u) = p\phi(u) + u'$ donde $u' \in L$, entonces $\phi(u)\psi(n) = p\phi(u)\psi(n) = \rho(u)\psi(n)$. Luego:

$$\psi(un) = \rho(u)\psi(n)$$

Como $P' - \rho(P)$ es cíclicamente equivalente a un elemento de $R(\rho(P))^2$, entonces existe $z \in [\mathcal{F}_S(M_1), \mathcal{F}_S(M_1)]$ tal que $P' + z - \rho(P) \in R(\rho(P))^2$. Usando la Proposición 6.3 se obtiene:

$$R(P') = R(P' + z) = R(\rho(P))$$

Consideremos ahora el automorfismo $\lambda\rho$ de $\mathcal{F}_S(M_1)$. Dicho morfismo satisface que $\lambda\rho(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$; además para cada $n \in N$ y $u \in \mathcal{F}_S(M_1)$ se tiene:

$$\psi(un) = \rho(u)\psi(n)$$

y $\lambda\rho(u) = \rho(u) + w$ donde $w \in R(\rho(P)) = R(P')$. Por lo tanto:

$$\psi(un) = \lambda\rho(u)\psi(n)$$

Esto prueba que $(\lambda\rho, \psi, \eta)$ es una equivalencia-derecha entre las representaciones $\mathcal{N}|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$ y $\mathcal{N}'|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$, como se quería probar. $\square$

En lo que sigue, usaremos la siguiente notación: dado un $S$-bimódulo $B$, definimos:

$$B_{\hat{k},\hat{k}} = \bar{e_k} B \bar{e_k}$$

Consideremos ahora el isomorfismo de álgebras $\rho : \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}})$ definido en el Lema 8.6. Sea $P$ un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$. Supongamos primero que:

$$\text{(A) } P = \sum_{u=1}^{N} f_u \gamma_u$$

donde $f_u \in F$ y $\gamma_u = x_1 \ldots x_{n(u)}$ con $x_i \in \hat{T}$. Sea $b \in T_k$ fijo y sea $N_b$ el conjunto de todas las $u \in [1, N]$ tal que para algún $x_i$, $a(x_i) = b$. Para cada $u \in N_b$, sea $\mathcal{C}(u)$ el subconjunto de todas las permutaciones cíclicas $c$ del conjunto $\{1, \ldots, n(u)\}$ tal que $x_{c(1)} = s_c b$. Para cada $c \in C(u)$ definamos $\gamma_u^c = x_{c(1)} x_{c(2)} \ldots x_{c(n(u))}$. Entonces $\gamma_u^c = s_c b r_c a_c z_c$ donde $z_c = x_3 \ldots x_{c(n(u))}$. Por lo tanto:

$$X_{b^*}(P) = \sum_{u \in N_b} \sum_{c \in \mathcal{C}(u)} f_u r_c a_c z_c s_c$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
X_{[bra]^*}(\rho(P)) &= \sum_{u\in N_b}\ \sum_{c\in\mathcal{C}(u), r_c=r, a_c=a} f_u\rho(z_c)s_c \\
&= \rho\left(\sum_{u\in N(b)}\ \sum_{c\in\mathcal{C}(u), r_c=r, a_c=a} f_u z_c s_c\right)
\end{aligned}
$$

Definamos $Y_{[bra]}(P) := \sum_{u\in N_b}\ \sum_{c\in\mathcal{C}(u), r_c=r, a_c=a} f_u z_c s_c$. Entonces:

$$X_{[bra]^*}(\rho(P)) = \rho(Y_{[bra]}(P))$$

Notemos que si $P$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M)^{\geq n+3}$ entonces $Y_{[bra]}(P) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq n}$, luego si $(P_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy $\mathcal{F}_S(M)$ entonces $(Y_{[bra]}(P_n))_{n\geq 1}$ también es de Cauchy. Supongamos ahora que $P$ es un potencial arbitrario en $\mathcal{F}_S(M)$, entonces:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n$$

donde cada $P_n$ tiene la forma dada en (A). Definamos:

$$w = \lim_{n\to\infty} Y_{[bra]}(P_n)$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
X_{[bra]^*}(\rho(P)) &= \lim_{n\to\infty} X_{[bra]^*}(\rho(P_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \rho(Y_{[bra]}(P_n)) \\
&= \rho(\lim_{n\to\infty} Y_{[bra]}(P_n)) \\
&= \rho(w)
\end{aligned}
$$

Entonces ponemos $Y_{[bra]}(P) := w$. Luego $X_{[bra]^*}(\rho(P)) = \rho(Y_{[bra]}(P))$. Recordemos que para cada potencial $P$ en $T_S(M)$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\rho(b'X_{b^*}(P)) = \sum_{r\in L(k), a\in_k T} [b'ra]X_{[bra]^*}(\rho(P)) \tag{9.5}$$

$$\rho(X_{a^*}(P)a') = \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} X_{[bra]^*}(\rho(P))[bra'] \tag{9.6}$$

Por continuidad, las fórmulas anteriores se cumplen para cada potencial $P \in \mathcal{F}_S(M)$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\rho(b'X_{b^*}(P)) &= \sum_{r\in L(k), a\in_k T} \rho(b'ra)\rho(Y_{[bra]}(P)) \\
&= \rho\left(\sum_{r\in L(k), a\in_k T} b'raY_{[bra]}(P)\right)
\end{aligned}
$$

Como $\rho$ es inyectiva, entonces:

$$b'X_{b^*}(P) = \sum_{r\in L(k), a\in_k T} b'raY_{[bra]}(P) \tag{9.7}$$

Similarmente:

$$X_{a^*}(P)a' = \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} Y_{[bra]}(P)bra' \tag{9.8}$$

Para cada $\psi \in M^*$ y para cada entero positivo $n$ se tiene una $F$-transformación lineal $\psi_* : M^{\otimes n} \to M^{\otimes (n-1)}$ dada por $\psi_*(m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_n) = \psi(m_1)m_2 \otimes \ldots \otimes m_n$. Este transformación induce una $F$-transformación lineal $\psi_* : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$. Similarmente, si $\eta \in^* M$ existe una $F$-transformación lineal ${}_*\eta : M^{\otimes n} \to M^{\otimes (n-1)}$ dada por ${}_*\eta(m_1 \otimes \ldots \otimes m_{n-1} \otimes m_n) = m_1 \otimes \ldots \otimes m_{n-1}\eta(m_n)$. Supongamos ahora que $b' \in T_k$, entonces $b'e_k = b'$ y por ende $e_k(b')^* = (b')^*$. Como $X^P$ es un morfismo de $S$-bimódulos, entonces $e_k X_{b^*}(P) = X_{b^*}(P)$. Aplicando el morfismo $(b')^* : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ al lado izquierdo de 9.7 se obtiene:

$$X_{b^*}(P) = e_k X_{b^*}(P) = \sum_{r \in L(k), a \in_k T} e_k ra Y_{[bra]}(P) \tag{9.9}$$

Por lo tanto:

$$X_{b^*}(P) = \sum_{r \in L(k), a \in_k T} ra Y_{[bra]}(P) \tag{9.10}$$

Sea $H$ el conjunto de los elementos no-cero que son de la forma $as$ donde $a \in_k T$ y $s \in L$. Notemos que $H$ es una $S$-base local izquierda de ${}_SM$; para $x \in H$ denotamos por ${}^*x \in^* M$ el morfismo dado por ${}^*x(y) = 0$ si $y \in H \setminus \{x\}$ y $x^*(x) = e_i$ donde $e_i x = x$. Aplicando el morfismo ${}^*(a')$ a 9.8 se obtiene:

$$X_{a^*}(P) = \sum_{b \in T_k, r \in L(k)} Y_{[bra]}(P) br \tag{9.11}$$

Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada del álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y supongamos que $k$ satisface $(Me_k \otimes_S M)_{cyc} = \{0\}$. Definamos:

$$N_{in} = \bigoplus_{a \in_k T} D_k \otimes_F N_{\tau(a)}$$
$$N_{out} = \bigoplus_{b \in T_k} D_k \otimes_F N_{\sigma(b)}$$

Para cada $a \in_k T$ y $r \in L(k)$ consideremos la proyección $\pi'_a : N_{in} \to D_k \otimes_F N_{\tau(a)}$ y el morfismo $\pi'_{ra} : D_k \otimes_F N_{\tau(a)} \to N_{\tau(a)}$ dado por $\pi'_{ra}(d \otimes n) = r^*(d)n$. Sea $\xi'_a : D_k \otimes_F N_{\tau(a)} \to N_{in}$ la inclusión y definamos $\xi'_{ra} : N_{\tau(a)} \to D_k \otimes_F N_{\tau(a)}$ como el morfismo dado por $\xi'_{ra}(n) = r \otimes n$.
Entonces para cada $r, r_1 \in L(k)$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\pi'_{r_1 a}\xi'_{ra} = \delta_{r,r_1} id_{N_{\tau(a)}} \tag{9.12}$$

$$\pi'_{ra}\xi'_{ra} = id_{N_{\tau(a)}} \tag{9.13}$$

Para cada $a \in_k T$ y $r \in L(k)$ definamos las siguientes transformaciones $F$-lineales:

$$\pi_{ra} = \pi'_{ra}\pi'_a : N_{in} \to N_{\tau(a)}$$
$$\xi_{ra} = \xi'_a\xi'_{ra} : N_{\tau(a)} \to N_{in}$$

entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\pi_{r_1 a_1}\xi_{ra} = \delta_{r_1 a_1, ra} id_{N_{\tau(a)}} \tag{9.14}$$

$$\sum_{r \in L(k), a \in_k T} \xi_{ra}\pi_{ra} = id_{N_{in}} \tag{9.15}$$

Similarmente, para cada $r \in L(k)$ y $b \in T_k$ se tiene la proyección canónica $\pi'_b : N_{out} \to D_k \otimes_F N_{\sigma(b)}$ y $\pi'_{br} : D_k \otimes_F N_{\sigma(b)} \to N_{\sigma(b)}$ denota el morfismo dado por $\pi'_{br}(d \otimes n) = (r^{-1})^*(d)n$.
Definimos ahora $\xi'_{br} : N_{\sigma(b)} \to D_k \otimes_F N_{\sigma(b)}$ como el morfismo dado por $\xi'_{br}(n) = r^{-1} \otimes n$ para cada $n \in N_{\sigma(b)}$ y $\xi'_b : D_k \otimes_F N_{\sigma(b)} \to N_{out}$ es el morfismo inclusión. Entonces para cada $r, r_1 \in L(k)$ y $b \in T_k$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\pi'_{br_1}\xi'_{br} = \delta_{r_1,r} id_{N_{\sigma(b)}} \tag{9.16}$$

$$\pi'_{br}\xi'_{br} = id_{N_{\sigma(b)}} \tag{9.17}$$

Definamos las siguientes $F$-transformaciones lineales:

$$\xi_{br} = \xi'_b\xi'_{br} : N_{\sigma(b)} \to N_{out}$$
$$\pi_{br} = \pi'_{br}\pi'_b : N_{out} \to N_{\sigma(b)}$$

Entonces para cada $r, r_1 \in L(k)$ y $b, b_1 \in T_k$ se tiene:

$$\pi_{b_1r_1}\xi_{br} = \delta_{b_1r_1,br}id_{N_{\sigma(b)}} \tag{9.18}$$

y

$$\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \xi_{br}\pi_{br} = id_{N_{out}} \tag{9.19}$$

Definamos un morfismo de $D_k$-módulos izquierdos $\alpha : N_{in} \to N_k$ como el morfismo tal que para cada $a \in_k T, r \in L(k)$ se tiene:

$$\alpha\xi_{ra}(n) = ran$$

para cada $n \in N_{\tau(a)}$.

Similarmente, definimos $\beta : N_k \to N_{out}$ como la $F$-transformación lineal tal que para toda $b \in T_k, r \in L(k)$:

$$\pi_{br}\beta(n) = brn$$

para cada $n \in N_k$.

Finalmente, el morfismo $\gamma : N_{out} \to N_{in}$ es el morfismo de $D_k$-módulos izquierdos tal que el morfismo $\gamma_{ra,bs} = \pi_{ra}\gamma\xi_{bs} : N_{\sigma(b)} \to N_{\tau(a)}$ donde $r, s \in L(k)$, $a \in_k T$, $b \in T_k$, está dado por:

$$\gamma_{ra,bs}(n) = \sum_{w\in L(k)} r^*(s^{-1}w)Y_{[bwa]}(P)n$$

para cada $n \in N_{\sigma(b)}$.

**Proposición 9.2.** *El morfismo $\beta$ es un morfismo de $D_k$-módulos izquierdos.*

*Demostración.* Por linealidad basta probar que si $c \in L(k)$ y $n \in N_k$, entonces $\beta(cn) = c\beta(n)$. Usando la Proposición 7.5 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\beta(cn) &= c\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} c^{-1}\xi_{br}\pi_{br}\beta(cn) = c\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} c^{-1}(r^{-1}\otimes brcn)\\
&= c\sum_{b\in T_k, r, r_1, r_2\in L(k)} (r_1^{-1})^*(c^{-1}r^{-1})r_1^{-1}\otimes br_2^*(rc)r_2n\\
&= c\sum_{b\in T_k, r_1, r_2\in L(k)} \left(\sum_{r\in L(k)} r_2^*(rc)(r_1^{-1})^*(c^{-1}r^{-1})\right)(r_1^{-1}\otimes br_2n)\\
&= c\left(\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\otimes brn\right)\\
&= c\beta(n)
\end{aligned}$$

como se afirmaba. □

**Lema 9.1.** *Se tiene $\alpha\gamma = 0$ y $\gamma\beta = 0$.*

*Demostración.* Primero veamos que $\alpha\gamma = 0$. Basta probar que para toda $r \in L(k)$, $b \in T_k$, $\alpha\gamma\xi_{br} = 0$. Sea $n \in N_{\sigma(b)}$, entonces por 9.10 y 9.15:

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma\xi_{br}(n) = \alpha id_{N_{in}}\gamma\xi_{br}(n) &= \sum_{s\in L(k), a\in_k T} \alpha\xi_{sa}\pi_{sa}\gamma\xi_{br}(n) \\
&= \sum_{s\in L(k), a\in_k T} \alpha\xi_{sa}\gamma_{sa,br}(n) \\
&= \sum_{s,w\in L(k), a\in_k T} \alpha\xi_{sa}s^*(r^{-1}w)Y_{[bwa]}(P)(n) \\
&= \sum_{s,w\in L(k), a\in_k T} sas^*(r^{-1}w)Y_{[bwa]}(P)(n) \\
&= \sum_{w\in L(k), a\in_k T} r^{-1}waY_{[bwa]}(P)n \\
&= r^{-1}X_{b^*}(P)n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\gamma\beta = 0$. Basta probar que para toda $r \in L(k)$, $a \in_k T$ se tiene $\pi_{ra}\gamma\beta = 0$. Sea $n \in N_k$, entonces por 9.11 y 9.19:

$$\begin{aligned}
\pi_{ra}\gamma\beta(n) = \pi_{ra}\gamma id_{N_{out}}\beta &= \sum_{b\in T_k, s\in L(k)} \pi_{ra}\gamma\xi_{bs}\pi_{bs}\beta(n) \\
&= \sum_{b\in T_k, s\in L(k)} \gamma_{ra,bs}\pi_{bs}\beta(n) \\
&\sum_{b\in T_k, s,w\in L(k)} s^*(wr^{-1})Y_{[bwa]}(P)(bsn) \\
&= \sum_{b\in T_k, w\in L(k)} Y_{[bwa]}(P)bwr^{-1}n \\
&= X_{a^*}(P)r^{-1}n \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

**Lema 9.2.** *Para cada $m \in N_{in}$, $a \in_k T$ se tiene $\pi_{e_k a}(r^{-1}m) = \pi_{ra}(m)$.*

*Demostración.* Primero notemos que para cada $a_1 \in_k T$ y $n \in N_{\tau(a_1)}$:

$$r^{-1}\xi'_{sa_1}(n) = r^{-1}(s\otimes n) = r^{-1}s\otimes n = \sum_{u\in L(k)} u\otimes u^*(r^{-1}s)n = \sum_{u\in L(k)} \xi'_{ua_1}(u^*(r^{-1}s)n)$$

Entonces:

$$r^{-1}\xi_{sa_1}(n) = r^{-1}\xi'_{a_1}\xi'_{sa_1}(n) = \sum_{u\in L(k)} \xi'_{a_1}\xi'_{ua_1}(u^*(r^{-1}s)n) = \sum_{u\in L(k)} \xi_{ua_1}(u^*(r^{-1}s)n)$$

Ahora sea $m \in N_{in}$, entonces usando 9.14 y 9.15 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\pi_{e_k a}(r^{-1}m) &= \sum_{s\in L(k), a_1\in_k T} \pi_{e_k a}r^{-1}\xi_{sa_1}\pi_{sa_1}(m) \\
&= \sum_{s,u\in L(k), a_1\in_k T} \pi_{e_k a}\xi_{ua_1}\left(u^*(r^{-1}s)\pi_{sa_1}(m)\right) \\
&= \sum_{s\in L(k)} e_k^*(r^{-1}s)\pi_{sa}(m) \\
&= \pi_{ra}(m)
\end{aligned}$$

y el lema se sigue. □

## 9.1 Premutación de una representación decorada

Consideremos el álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(\widetilde{M}), \widetilde{P})$. Recordemos que:

$$\widetilde{M} := \bar{e_k} M \bar{e_k} \oplus M e_k M \oplus (e_k M)^* \oplus^* (M e_k)$$
$$\widetilde{P} := [P] + \sum_{sa \in_k \hat{T}, bt \in \tilde{T}_k} [btsa]((sa)^*)(^*(bt))$$

Siguiendo a [10] y a [18], a una representación decorada $\mathcal{N} = (N, V)$ del álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ le asociaremos una representación decorada $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) = (\overline{N}, \overline{V})$ de $(\mathcal{F}_S(\widetilde{M}), \widetilde{P})$ como sigue. Primero pondremos:

$$\overline{N}_i = N_i,\ \overline{V_i} = V_i \text{ si } i \neq k$$

y definamos $\overline{N}_k$ y $\overline{V}_k$ como sigue:

$$\overline{N}_k = \frac{ker(\gamma)}{im(\beta)} \oplus im(\gamma) \oplus \frac{ker(\alpha)}{im(\gamma)} \oplus V_k$$
$$\overline{V}_k = \frac{ker(\beta)}{ker(\beta) \cap im(\alpha)}$$

Sean

$$\begin{aligned} J_1 &: \frac{ker(\gamma)}{im(\beta)} \to \overline{N}_k \\ J_2 &: im(\gamma) \to \overline{N}_k \\ J_3 &: \frac{ker(\alpha)}{im(\gamma)} \to \overline{N}_k \\ J_4 &: V_k \to \overline{N}_k \end{aligned} \tag{9.20}$$

las correspondientes inclusiones y sean

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \overline{N}_k \to \frac{ker(\gamma)}{im(\beta)} \\ \Pi_2 &: \overline{N}_k \to im(\gamma) \\ \Pi_3 &: \overline{N}_k \to \frac{ker(\alpha)}{im(\gamma)} \\ \Pi_4 &: \overline{N}_k \to V_k \end{aligned} \tag{9.21}$$

las correspondientes proyecciones canónicas.

**Observación 9.6.** Supongamos que $M$ es $Z$-libremente generado por $M_0$ y sea $X$ un $S$-módulo izquierdo de dimensión finita sobre $F$. Para dotar a $X$ de una estructura de $T_S(M)$-módulo izquierdo basta dar un morfismo de $S$-módulos izquierdos $M \otimes_S X \to X$. Sean $i$ y $j$ enteros distintos en $[1, n]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D_i}(e_i M e_j \otimes_S X, X) &\cong \mathrm{Hom}_{D_i}((D_i \otimes_F e_i M_0 e_j \otimes_F D_j) \otimes_{D_j} e_j X, e_i X) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D_i}(D_i \otimes_F e_i M_0 e_j \otimes_F (D_j \otimes_{D_j} e_j X), e_i X) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D_i}(D_i \otimes_F e_i M_0 e_j \otimes_F e_j X, e_i X) \\ &\cong \mathrm{Hom}_F(e_i M_0 e_j \otimes_F e_j X, e_i X) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_S({}_S(M\otimes_S X),{}_S X) \cong \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_F(e_iM_0e_j\otimes_F e_jX, e_iX)$ como $F$-espacios vectoriales. Se sigue que un morfismo de $S$-módulos izquierdos $M\otimes_S X \to X$ está determinado por una colección de $F$-morfismos lineales $\theta_{i,j} : e_iM_0e_j\otimes_F e_jX \to e_iX$. Entonces para cada $c \in e_{\sigma(c)}M_0e_{\tau(c)}$ se tiene un operador multiplicación $c_X : X_{\tau(c)} \to X_{\sigma(c)}$ definido como $c_X(x) := \theta_{\sigma(c),\tau(c)}(c\otimes x)$.

Por el Lema 8.2 se tiene que $\widetilde{M}$ está $Z$-libremente generado por el siguiente $Z$-subbimódulo:

$$(\widetilde{M})_0 := \bar{e_k}M_0\bar{e_k} \oplus M_0e_kSe_kM_0 \oplus e_k({}_0N) \oplus N_0e_k$$

Para dotar a $\overline{N}$ de una estructura de $T_S(\widetilde{M})$-módulo izquierdo $\overline{N}$ procederemos por casos, dando la acción de cada sumando de $(\widetilde{M})_0$ en $\overline{N}$.

- Supongamos primero que $i, j \neq k$. Entonces:

$$e_i(\widetilde{M})_0e_j = e_iM_0e_j \oplus e_iM_0e_kSe_kM_0e_j$$

Supongamos que $c \in e_iM_0e_j$. Por hipótesis, $i, j \neq k$ y por ende $\sigma(c)$ y $\tau(c)$ son ambos distintos de $k$. Entonces $\overline{N}_{\tau(c)} = N_{\tau(c)}$ y $\overline{N}_{\sigma(c)} = N_{\sigma(c)}$. Entonces ponemos $c_{\overline{N}} = c_N$. Supongamos ahora que $c$ es un elemento de la $Z$-base local de $e_iM_0e_kSe_kM_0e_j$, entonces $c = \rho(bra)$ para ciertos $b \in T \cap e_iMe_k$, $r \in L(k)$ y $a \in T \cap e_kMe_j$. En este caso definimos $\rho(bra)_{\overline{N}} := (bra)_N$.

Recordemos que $\{^*b : b \in T\}$ es una $Z$-base local de ${}_0N$ y $\{a^* : a \in T\}$ es una $Z$-base local de $N_0$. Entonces $\{^*b : b \in T_k\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $e_k(^*M)$ y $\{a^* : a \in_k T\}$ es un conjunto de generadores $Z$-libres de $M^*e_k$. Supongamos que $b = e_{\sigma(b)}be_k$, entonces $\tau(^*b) = \sigma(b)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\overline{N}_{in} &= \bigoplus_{b\in T_k} D_k \otimes_F N_{\tau(^*b)}\\ &= \bigoplus_{b\in T_k} D_k \otimes_F N_{\sigma(b)}\\ &= N_{out}\end{aligned}$$

y por ende $\overline{N}_{in} = N_{out}$. Un argumento similar muestra que $\overline{N}_{out} = N_{in}$.

Se tienen inclusiones:

$$\begin{aligned} j &: ker(\gamma) \to N_{out}\\ i &: im(\gamma) \to N_{in}\\ j' &: ker(\alpha) \to N_{in}\end{aligned}$$

y proyecciones canónicas:

$$\begin{aligned}\pi_1 &: ker(\gamma) \to \frac{ker(\gamma)}{im(\beta)}\\ \pi_2 &: ker(\alpha) \to \frac{ker(\alpha)}{im(\gamma)}\end{aligned}$$

Siguiendo a [10] introducimos los siguientes morfismos, que llamaremos escindantes :

(a) Elijamos un morfismo $D_k$-lineal $p : N_{out} \to ker(\gamma)$ tal que $pj = id_{ker(\gamma)}$.

(b) Elijamos un morfismo $D_k$-lineal $\sigma_2 : ker(\alpha)/im(\gamma) \to ker(\alpha)$ tal que $\pi_2\sigma_2 = id_{ker(\alpha)/im(\gamma)}$.

- Supongamos ahora que $i \neq k$ y $j = k$. Entonces $e_i(\widetilde{M})_0e_k = e_i(N_0)e_k$. Sea $a \in_k T$, entonces $\tau(a^*) = k$ y $\sigma(a^*) = \tau(a)$. Definamos una $F$-transformación lineal

$$\overline{N}(a^*) : \overline{N}_k \to N_{\tau(a)}$$

como sigue:

$$\begin{aligned}\overline{N}(a^*)J_1 &= 0\\ \overline{N}(a^*)J_2 &= c_k^{-1}\pi_{e_k a} i\\ \overline{N}(a^*)J_3 &= c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2\\ \overline{N}(a^*)J_4 &= 0\end{aligned} \tag{9.22}$$

donde $c_k = [D_k : F]$.

- Sea $\gamma = i\gamma'$ donde $\gamma' : N_{out} \twoheadrightarrow im(\gamma)$. Supongamos ahora que $i = k$ y que $j \neq k$. Entonces:

$$e_i(\widetilde{M})_0 e_j = e_k({}_0N)e_j$$

dado que $j \neq k$ entonces $\overline{N}_j = N_j = e_j N$. Para cada $b \in T_k$, definamos una $F$-transformación lineal:

$$\overline{N}({}^*b) : N_{\sigma(b)} \to \overline{N}_k$$

como sigue:

$$\begin{aligned}\Pi_1\overline{N}({}^*b) &= -\pi_1 p\xi_{be_k}\\ \Pi_2\overline{N}({}^*b) &= -\gamma'\xi_{be_k}\\ \Pi_3\overline{N}({}^*b) &= 0\\ \Pi_4\overline{N}({}^*b) &= 0\end{aligned} \tag{9.23}$$

La construcción anterior dota a $\overline{N}$ de una estructura de $T_S(\widetilde{M})$-módulo izquierdo. Para ver que $\overline{N}$ es de hecho un módulo sobre el álgebra $\mathcal{F}_S(\widetilde{M})$ basta notar que el $\mathcal{F}_S(M)$-módulo izquierdo $N$ es nilpotente [10, p. 98] y por lo tanto $\overline{N}$ es anulado por $\langle\widetilde{M}\rangle^n$ para $n$ suficientemente grande.

**Lema 9.3.** *Sea $\rho : \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}})$ el isomorfismo de álgebras dado en el Lema 8.6. Sea $u \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$, entonces $\rho(u)_{\overline{N}} = u_N$.*

*Demostración.* Primero notemos que $\mathcal{F}_S(M) = S \oplus M \oplus \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$. Sea $u \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$, entonces $u = s + m + x$ donde $s \in \bar{e_k}S$, $m \in M_{\hat{k},\hat{k}}$ y $x \in \left(\mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}\right)_{\hat{k},\hat{k}}$. Por lo tanto:

$$\rho(u) = s + m + \rho(x)$$

Por continuidad y linealidad de $\rho$, basta considerar el caso cuando $x$ es de la forma $s(x_1)x_1 s(x_2)\dots s(x_l)x_l$, donde $s(x_i) \in L(\sigma(x_i))$ y $x_i \in T$. Probaremos el resultado mediante inducción en $l$. Supongamos primero que $x = s(x_1)x_1 s(x_2)x_2$ y podemos suponer que $x_1 s(x_2)x_2 \in M_0 e_k S e_k M_0$, entonces:

$$\rho(x) = s(x_1)\rho(x_1 s(x_2)x_2)$$

Por lo tanto

$$\rho(x)n = s(x_1)\rho(x_1 s(x_2)x_2)n$$

como $[b_q r a_s]_{\overline{N}} = (b_q r a_s)_N$ entonces $\rho(b_q r a_s)n = b_q r a_s n$. Se obtiene

$$\begin{aligned}\rho(x)n &= s(x_1)\rho(x_1 s(x_2)x_2)n\\ &= s(x_1)x_1 s(x_2)x_2 n\\ &= xn\end{aligned}$$

Supongamos que la afirmación se cumple cuando la longitud de $x$ es menor que $n$. En consecuencia

$$x = s(x_1)x_1 s(x_2)x_2 \dots s(x_{l-2})x_{l-2} s(x_{l-1})x_{l-1} s(x_l)x_l$$

Usando el hecho de que $\rho$ es un morfismo de álgebras junto con el caso base $l = 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}\rho(x)n &= \rho(s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2})\rho(s(x_{l-1})x_{l-1}s(x_l)x_l)n \\ &= \rho(s(x_1)x_1 \dots (x_{l-2})x_{l-2})s(x_{l-1})\rho(x_{l-1}s(x_l)x_l)n \\ &= \rho(s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2})s(x_{l-1})x_{l-1}s(x_l)x_l n \\ &= \rho(s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2})n'\end{aligned}$$

donde $n' := s(x_{l-1})x_{l-1}s(x_l)x_l n$. Como $s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2}$ tiene longitud menor que $l$, entonces

$$\rho(s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2})n' = s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2}n'$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\rho(x)n &= s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2}n' \\ &= s(x_1)x_1 \dots s(x_{l-2})x_{l-2}s(x_{l-1})x_{l-1}s(x_l)x_l n \\ &= xn\end{aligned}$$

de donde se infiere que $\rho(x)n = xn$. $\square$

**Proposición 9.3.** *La pareja* $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) = (\overline{N}, \overline{V})$ *es una representación decorada de* $(\mathcal{F}_S(\widetilde{M}), \widetilde{P})$.

*Demostración.* Hay que probar que $R(\widetilde{P})$ anula a $\overline{N}$. Basta mostrar que $(X_{c^*}(\widetilde{P}))_{\overline{N}} = 0$ para cada elemento $c$ de la $Z$-base local de $(\widetilde{M})_0$. Procederemos por casos.

- Supongamos que $c \in T \cap \bar{e_k}M_0\bar{e_k}$ y sea $n \in N$. Entonces por el Lema 9.3

$$\begin{aligned}\left(X_{c^*}(\widetilde{P})_{\overline{N}}\right)(n) &= X_{c^*}(\widetilde{P})n \\ &= X_{c^*}(\rho(P))n \\ &= \rho(X_{c^*}(P))n \\ &= X_{c^*}(P)n\end{aligned}$$

como $\mathcal{N} = (N, V)$ es una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$, entonces $X_{c^*}(P)n = 0$.

- Supongamos ahora que $c = \rho(bra)$ donde $b \in T_k$, $r \in L(k)$ y $a \in_k T$. Recordemos que se tiene la siguiente igualdad

$$X_{[bra]^*}(\widetilde{P}) = X_{[bra]^*}(\rho(P)) + c_k a^* r^{-1}({}^*b)$$

donde $c_k = [D_k : F]$. Calculemos ahora la imagen del operador $(c_k a^* r^{-1}({}^*b))_{\overline{N}}$. Sea $n \in N_{\sigma(b)}$, entonces usando 9.22, 9.23 y el Lema 9.2 se obtiene:

$$\begin{aligned}c_k\overline{N}(a^*)r^{-1}\overline{N}({}^*b)(n) &= c_k\overline{N}(a^*)r^{-1}\left(-\pi_1 p\xi_{be_k}(n), -\gamma'\xi_{be_k}(n), 0, 0\right) \\ &= c_k\overline{N}(a^*)\left(-r^{-1}\pi_1 p\xi_{be_k}(n), -r^{-1}\gamma'\xi_{be_k}(n), 0, 0\right) \\ &= c_k c_k^{-1}\pi_{e_k a} i\left(-r^{-1}\gamma'\xi_{be_k}(n)\right) \\ &= -\pi_{e_k a}\left(r^{-1}\gamma'\xi_{be_k}(n)\right) \\ &= -\pi_{ra}\left(\gamma'\xi_{be_k}(n)\right) \\ &= -\gamma_{ra,be_k}(n) \\ &= -\sum_{w \in L(k)} r^*(e_k^{-1}w)Y_{[bwa]}(P)n \\ &= -\sum_{w \in L(k)} r^*(w)Y_{[bwa]}(P)n \\ &= -Y_{[bra]}(P)n\end{aligned}$$

y usando el Lema 9.3:

$$\begin{aligned}\left(X_{[bra]^*}(\rho(P)\right)_{\overline{N}}(n) &= X_{[bra]^*}(\rho(P))n = \rho(Y_{[bra]}(P))n \\ &= Y_{[bra]}(P)n\end{aligned}$$

De lo anterior se infiere que $(X_{[bra]}(\widetilde{P}))_{\overline{N}} = \left(X_{[bra]^*}(\rho(P))\right)_{\overline{N}} + (c_k a^* r^{-1}(^*b))_{\overline{N}} = 0$, como se quería mostrar. Resta probar que $R(\widetilde{P}) \cdot \overline{N} = \{0\}$ para el resto de los elementos de la $Z$-base local de $(\widetilde{M})_0$. Probemos que $(X_{a^*}(\widetilde{P}))_{\overline{N}} = 0$ para cada $a \in_k T$. Recordemos que $X_{a^*}(\widetilde{P}) = c_k \sum_{b\in T_k} \sum_{r\in L(k)} r^{-1}(^*b)\rho(bra)$. Entonces

$$(X_{a^*}(\widetilde{P}))_{\overline{N}} = \left(c_k \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}(^*b)\rho(bra)\right)_{\overline{N}} = c_k \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} (r^{-1}(^*b)\rho(bra))_{\overline{N}}$$

Sea $n \in N_{\tau(a)}$. Usando 9.19 y 9.23, se obtiene:

$$\begin{aligned}X_{a^*}(\widetilde{P})(n) &= c_k \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\left(-\pi_1 p \xi_{be_k}(bran), -\gamma' \xi_{be_k}(bran), 0, 0\right) \\ &= -c_k \left( \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\pi_1 p \xi_{be_k}(bran), \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\gamma' \xi_{be_k}(bran), 0, 0 \right) \\ &= -c_k \left( \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \pi_1 p r^{-1} \xi_{be_k}(bran), \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \gamma' r^{-1} \xi_{be_k}(bran), 0, 0 \right) \\ &= -c_k \left( \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \pi_1 p \xi_{br}\pi_{br}\beta(an), \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \gamma' \xi_{br}\pi_{br}\beta(an), 0, 0 \right) \\ &= -c_k \left(\pi_1\beta(an), \gamma'\beta(an), 0, 0\right) \\ &= (0,0,0,0)\end{aligned}$$

por el Lema 9.1. Entonces $(X_{a^*}(\widetilde{P}))_{\overline{N}} = 0$ para cada $a \in_k T$. Finalmente, probemos que $(X_{^*b}(\widetilde{P}))_{\overline{N}} = 0$ para cada $b \in T_k$. Recordemos la siguiente fórmula: $X_{^*(b)}(\widetilde{P}) = c_k \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \rho(bra)a^* r^{-1}$. Sea $n \in N_k$, entonces

$$\begin{aligned}X_{^*b}(\widetilde{P}) &= c_k \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \rho(bra)\overline{N}(a^*)(r^{-1}n) \\ &= c_k \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \rho(bra)\overline{N}(a^*) \left(\sum_{l=1}^{4} J_l \Pi_l (r^{-1}n)\right) \\ &= c_k \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \left(\rho(bra)c_k^{-1}\pi_{e_k a} i \Pi_2(r^{-1}n) + \rho(bra)c_k^{-1}\pi_{e_k a} j' \sigma_2 \Pi_3(r^{-1}n)\right) \\ &= \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \rho(bra)\pi_{e_k a} i \Pi_2(r^{-1}n) + \sum_{a\in T_k, r\in L(k)} \rho(bra)\pi_{e_k a} j' \sigma_2 \Pi_3(r^{-1}n) \\ &= b \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} ra\pi_{e_k a}\left(r^{-1}\Pi_2(n)\right) + b \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} ra\pi_{e_k a}\left(r^{-1}\sigma_2\Pi_3(n)\right) \\ &= b \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} ra\pi_{ra}(\Pi_2 n) + b \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} ra\pi_{ra}\left(\sigma_2\Pi_3(n)\right) \\ &= b \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \alpha\xi_{ra}\pi_{ra}(\Pi_2 n) + b \sum_{a\in_k T, r\in L(k)} \alpha\xi_{ra}\pi_{ra}\left(\sigma_2\Pi_3(n)\right) \\ &= b\alpha(\Pi_2 n) + b\alpha\left(\sigma_2\Pi_3(n)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

por el Lema 9.1. Esto prueba que $R(\widetilde{P})\overline{N} = 0$. $\square$

**Definición 9.2.** Llamaremos a la pareja $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) = (\overline{N}, \overline{V})$ la representación decorada premutada.

Se tiene el siguiente resultado, análogo al de [10, Proposition 10.9] y [18, Proposition 12.9].

**Proposición 9.4.** *La clase de isomorfía de la representación decorada* $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) = (\overline{N}, \overline{V})$ *no depende de la elección de los morfismos escindantes.*

*Demostración.* Sea $p : N_{out} \to ker(\gamma)$ tal que $pj = id_{ker(\gamma)}$ donde $j : ker(\gamma) \to N_{out}$ es el morfismo inclusión. Supongamos que existe otro morfismo $p' : N_{out} \to ker(\gamma)$ tal que $p'j = id_{ker(\gamma)}$. Entonces la restricción del morfismo $p' - p$ al subespacio $ker(\gamma)$ es el morfismo cero. Como $\gamma : N_{out} \to N_{in}$ entonces $N_{out}/ker(\gamma) \cong im(\gamma)$. Consideremos los siguientes morfismos:

$$ker(\gamma) \xrightarrow{j} N_{out} \xrightarrow{\gamma} N_{out}/ker(\gamma) \cong im(\gamma)$$

Por la propiedad universal del conúcleo de $j$, existe un único morfismo lineal $\xi : im(\gamma) \to ker(\gamma)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
ker(\gamma) \arrow[r, "j"] & N_{out} \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "p'-p"] & im(\gamma) \arrow[dl, dashed, "\xi"] \\
 & ker(\gamma) &
\end{tikzcd}$$

se sigue que $p' = p + \xi\gamma'$ para cierto morfismo lineal $\xi : im(\gamma) \to ker(\gamma)$.
Sea $\sigma_2 : ker(\alpha)/im(\gamma) \to ker(\alpha)$ tal que $\pi_2\sigma_2 = id_{ker(\alpha)/im(\gamma)}$. Supongamos que existe otro morfismo $\sigma_2' : ker(\alpha)/im(\gamma) \to ker(\alpha)$ tal que $\pi_2\sigma_2' = id_{ker(\alpha)/im(\gamma)}$. Por la propiedad universal del núcleo de $\pi_2$, existe un único morfismo lineal $\eta : ker(\alpha)/im(\gamma) \to im(\gamma)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
ker(\alpha)/im(\gamma) \arrow[d, dashed, "\eta"] \arrow[dr, "\sigma_2'-\sigma_2"] & & \\
im(\gamma) \arrow[r] & ker(\alpha) \arrow[r, "\pi_2"] & ker(\alpha)/im(\gamma)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\sigma_2' = \sigma_2 + \eta$ para cierto morfismo lineal $\eta : ker(\alpha)/im(\gamma) \to im(\gamma)$.
Sea $\overline{N'}(a^*)$ el morfismo definido en 9.22 con $\sigma_2$ reemplazado por $\sigma_2'$. Similarmente, sea $\overline{N'}({}^*b)$ el morfismo definido en 9.23 con $p$ reemplazado por $p'$. Construyamos un automorfismo lineal $\psi : \overline{N}_k \to \overline{N'}_k$ tal que $\overline{N}(a^*) = \overline{N'}(a^*)\psi$ y $\psi\overline{N}({}^*b) = \overline{N'}({}^*b)$. Como $\overline{N}_k = \frac{ker(\gamma)}{im(\beta)} \oplus im(\gamma) \oplus \frac{ker(\alpha)}{im(\gamma)} \oplus V_k$, entonces $\psi$ tiene una representación matricial. Definamos $\psi$ como:

$$\psi = \begin{pmatrix} I & \pi_1\xi & 0 & 0 \\ 0 & I & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

donde $I$ es la transformación identidad. Notemos que $\psi$ es invertible. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\overline{N'}(a^*)\psi &= \begin{pmatrix} 0 & c_k^{-1}\pi_{e_k a} i & c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \pi_1\xi & 0 & 0 \\ 0 & I & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c_k^{-1}\pi_{e_k a} i & -c_k^{-1}\pi_{e_k a} i\eta + c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c_k^{-1}\pi_{e_k a} i & c_k^{-1}\pi_{e_k a}(-i\eta + j'\sigma_2') & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c_k^{-1}\pi_{e_k a} i & c_k^{-1}\pi_{e_k a}(-i\eta + j'\sigma_2 + j'\eta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c_k^{-1}\pi_{e_k a} i & c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \overline{N}(a^*)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\psi\overline{N}(^*b) &= \begin{pmatrix} -\pi_1(p+\xi\gamma')\xi_{be_k} \\ -\gamma'\xi_{be_k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\pi_1 p'\xi_{be_k} \\ -\gamma'\xi_{be_k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \overline{N'}(^*b)\end{aligned}$$

Sea $\varphi : \overline{N} \to \overline{N}'$ el morfismo definido como $\varphi_j = id$ si $j \neq k$ y $\varphi_k = \psi$. Supongamos primero que $a \in_k T$, $d_1 \in D_{\tau(a)}$, $d_2 \in D_k$ y $w \in \overline{N}_k$. Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(d_1 a^* d_2 w) &= d_1 a^* d_2 w \\ &= d_1 \overline{N}(a^*)(d_2 w) \\ &= d_1 \overline{N'}(a^*)\psi(d_2 w) \\ &= d_1 a^* d_2 \varphi(w)\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $b \in T_k$, $d_1 \in D_k$, $d_2 \in D_{\sigma(b)}$ y $n \in N_{\sigma(b)}$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(d_1(^*b)d_2 n) &= \psi(d_1(^*b)d_2 n) \\ &= \psi(d_1\overline{N}(^*b)(d_2 n)) \\ &= d_1\psi(\overline{N}(^*b)(d_2 n)) \\ &= d_1\overline{N'}(^*b)(d_2 n) \\ &= d_1(^*b)d_2\varphi(n)\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $u \in \mathcal{F}_S(\mu_k M)$ se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \overline{N} \arrow[r, "u_{\overline{N}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \overline{N} \arrow[d, "\varphi"] \\ \overline{N'} \arrow[r, "u_{\overline{N'}}"] & \overline{N'} \end{tikzcd}$$

Esto prueba que las representaciones $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) = (\overline{N}, \overline{V})$ y $(\overline{N'}, \overline{V})$ son derecho-equivalentes. $\square$

Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$. Supongamos que existe un isomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$ tal que $\varphi(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$ donde $P'$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M')$. Por el Teorema 5.1, $R(P') = R(\varphi(P)) = \varphi(R(P))$. Usando la representación $\mathcal{N} = (N, V)$ construimos una representación decorada $\widehat{\mathcal{N}} = (\widehat{N}, V)$ de $(\mathcal{F}_S(M'), \varphi(P))$ como sigue: ponemos $\widehat{N} = N$ como $F$-espacios vectoriales y dado $u \in \mathcal{F}_S(M')$ y $n \in N$ definimos $u * n := \varphi^{-1}(u)n$. Claramente $R(P')\widehat{N} = 0$. Cuando sea necesario enfatizar la dependencia del morfismo $\varphi$, denotaremos $\widehat{N}$ por $\widehat{N} =^{\varphi^{-1}} N$.

**Proposición 9.5.** *Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ un automorfismo unitriangular y sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$ donde $P$ es un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$ tal que $e_k P e_k = 0$. Entonces:*

*(a) Existe un automorfismo unitriangular $\hat{\varphi} : \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)$ tal que $\hat{\varphi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\varphi(P))$.*

*(b) Existe un isomorfismo de representaciones decoradas $\psi : \widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) \to \widetilde{\mu_k}(\widehat{\mathcal{N}})$.*

*Demostración.* Notemos que (a) es consecuencia inmediata del Teorema 8.1. Probemos (b). Sean $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ los morfismos asociados a la representación $\widehat{N}$. Recordemos que ${}_k\hat{T} = \{sa : a \in_k T, s \in L(k)\}$ es una $S$-base local para $(e_k M)_S$. Se tiene que $\varphi(sa) = \sum_{r \in L(k), a_1 \in_k T} ra_1 C_{ra_1,sa}$ para ciertos elementos $C_{ra_1,sa} \in e_{\tau(a_1)} \mathcal{F}_S(M) e_{\tau(a)}$.

Definamos $C : N_{in} \to N_{in}$ como la $F$-transformación lineal tal que para toda $r, s \in L(k)$, $a, a_1 \in_k T$, el morfismo :

$$\pi_{ra_1} C \xi_{sa} : N_{\tau(a)} \to N_{\tau(a_1)}$$

está dado por

$$\pi_{ra_1} C \xi_{sa}(n) = \varphi^{-1}(C_{ra_1,sa})n$$

para cada $n \in N_{\tau(a)}$. Veamos que $\hat{\alpha}C = \alpha$. Basta probar que para toda $a \in_k T, r \in L(k)$ se tiene $\hat{\alpha}C\xi_{ra} = \alpha\xi_{ra}$.
En lo que sigue, dado $h \in \mathcal{F}_S(M)$ y $n \in N$ entonces $h * n = \varphi^{-1}(h)n$ denota el producto en $\widehat{N}$.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}C\xi_{ra}(n) &= \sum_{s \in L(k), a_1 \in_k T} \hat{\alpha}\xi_{sa_1} \pi_{sa_1} C \xi_{ra}(n) \\
&= \sum_{s \in L(k), a_1 \in_k T} \hat{\alpha}\xi_{sa_1} \left(\varphi^{-1}(C_{sa_1,ra})n\right) \\
&= \sum_{s \in L(k), a_1 \in_k T} sa_1 * \varphi^{-1}(C_{sa_1,ra})n \\
&= \varphi^{-1}\left(\sum_{s \in L(k), a_1 \in_k T} sa_1 C_{sa_1,ra}\right) n \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(ra))n \\
&= ran \\
&= \alpha\xi_{ra}(n)
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\hat{\alpha}C = \alpha$. De esto se infieren las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\ker(\alpha) &= C^{-1}(\ker(\hat{\alpha})) \\
\operatorname{im}(\alpha) &= \operatorname{im}(\hat{\alpha})
\end{aligned} \tag{9.24}$$

Similarmente, para cada $b \in T_k$ y $s \in L(k)$:

$$\varphi(bs) = \sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} D_{bs,b_1 r} b_1 r$$

para ciertos $D_{bs,b_1 r} \in e_{\sigma(b)} \mathcal{F}_S(M) e_{\sigma(b_1)}$.

Entonces existe una $F$-transformación lineal $D : N_{out} \to N_{out}$ tal que para toda $r, s \in L(k)$, $b, b_1 \in T_k$ se tiene:

$$\pi_{bs} D \xi_{b_1 r}(n) = \varphi^{-1}(D_{bs,b_1 r})n$$

para cada $n \in N_{\sigma(b_1)}$. Veamos que $D\hat{\beta} = \beta$. Basta probar que para toda $b \in T_k$, $s \in L(k)$ se tiene $\pi_{bs} D\hat{\beta} = \pi_{bs}\beta$. Sea $n \in N_k$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi_{bs} D\hat{\beta}(n) &= \sum_{r\in L(k), b_1\in T_k} \pi_{bs} D\xi_{b_1 r}\pi_{b_1 r}\hat{\beta}(n) \\
&= \sum_{r\in L(k), b_1\in T_k} \varphi^{-1}(D_{bs,b_1 r})((b_1 r) * n) \\
&= \sum_{r\in L(k), b_1\in T_k} \varphi^{-1}(D_{bs,b_1 r})\varphi^{-1}(b_1 r)n \\
&= \varphi^{-1}\left(\sum_{r\in L(k), b_1\in T_k} D_{bs,b_1 r} b_1 r\right) n \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(bs))n \\
&= bsn \\
&= \pi_{bs}\beta(n)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D\hat{\beta} = \beta$, como se afirmaba. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\beta) &= D(\operatorname{im}(\hat{\beta})) \\
\ker(\beta) &= \ker(\hat{\beta})
\end{aligned} \tag{9.25}$$

**Lema 9.4.** *Se tiene la igualdad $\hat{\gamma} = C\gamma D$.*

*Demostración.* Recordemos que se tiene un isomorfismo de álgebras:

$$\rho : \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} \to \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}})$$

podemos considerar a $\rho$ como monomorfismo

$$\rho : \bar{e_k}\mathcal{F}_S(M)\bar{e_k} \to \bar{e_k}\mathcal{F}_S(\mu_k M)\bar{e_k}$$

Por la Proposición 8.6 se tienen isomorfismos de álgebras:

$$\begin{aligned}
\phi &: \mathcal{F}_S(\widehat{M}) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M}) \\
\hat{\varphi} &: \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)
\end{aligned}$$

donde $\widehat{M} := M \oplus (e_k M)^* \oplus^* (Me_k)$ y

$$\begin{aligned}
i_M &: \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M}) \\
i_{\mu_k M} &: \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\widehat{M})
\end{aligned}$$

son las inclusiones. También se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_S(\mu_k M) \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "i_{\mu_k M}"] & \mathcal{F}_S(\mu_k M) \arrow[d, "i_{\mu_k M}"] \\
\mathcal{F}_S(\widehat{M}) \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{F}_S(\widehat{M})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_S(M) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_M"] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[d, "i_M"] \\
\mathcal{F}_S(\widehat{M}) \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{F}_S(\widehat{M})
\end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama anterior induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}}) \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\ \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}} \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{F}_S((\mu_k M)_{\hat{k},\hat{k}}) \end{tikzcd}$$

En efecto, por un lado $i_{\mu_k M}\rho\varphi = i_M\varphi$ y por otro lado

$$i_{\mu_k M}\hat{\varphi}\rho = \phi i_{\mu_k M}\rho = \phi i_M = i_M\varphi$$

como $i_{\mu_k M}$ es inyectiva entonces $\rho\varphi = \hat{\varphi}\rho$.

Sea $\hat{\Delta} : T_S(\mu_k M) \to T_S(\mu_k M) \otimes_Z T_S(\mu_k M)$ la derivación asociada a $T_S(\mu_k M)$. Definamos los siguientes morfismos:

$$\rho^k : \bar{e_k} T_S(M) \to T_S(\mu_k M)$$
$${}^k\rho : T_S(M)\bar{e_k} \to T_S(\mu_k M)$$

como $\rho^k(z) = \rho(z\bar{e_k})$ y ${}^k\rho(z) = \rho(\bar{e_k}z)$.

**Lema 9.5.** *Para $z \in T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ se tiene $\hat{\Delta}\rho(z) = (\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(z)$.*

*Demostración.* El $T_S(\mu_k M)$-bimódulo $T_S(\mu_k M) \otimes_Z T_S(\mu_k M)$ es un $T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$-bimódulo a través del morfismo $\rho$. Se tiene que $\hat{\Delta}$ es una $T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$-derivación, $\rho^k \otimes ({}^k\rho)$ es un morfismo de $T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$-bimódulos y $\Delta$ es una derivación de $T_S(M)$. Por lo tanto, $\hat{\Delta}\rho$ y $(\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta$ son derivaciones de $T_S(\mu_k M)$. Como $T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ está generada, como $F$-álgebra, por $\bar{e_k}S$, $\bar{e_k}M_0\bar{e_k}$ y $M_0D_kM_0$, entonces basta probar la igualdad para $z \in \bar{e_k}S \cup \bar{e_k}M_0\bar{e_k} \cup M_0D_kM_0$.
Si $z \in \bar{e_k}S$, entonces:

$$\hat{\Delta}\rho(z) = 1 \otimes \rho(z) - \rho(z) \otimes 1 = \bar{e_k} \otimes \rho(z) - \rho(z) \otimes \bar{e_k} = (\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(z)$$

Si $z \in \bar{e_k}M_0\bar{e_k}$ se tiene:

$$\hat{\Delta}\rho(z) = 1 \otimes \rho(z) = \bar{e_k} \otimes \rho(z) = (\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(z)$$

Para $z = m_1rm_2$ con $m_1 \in \bar{e_k}M_0e_k$, $r \in D_k$ y $m_2 \in e_kM_0\bar{e_k}$, se tiene:

$$\hat{\Delta}\rho(m_1rm_2) = 1 \otimes \rho(m_1rm_2) = \bar{e_k} \otimes \rho(m_1rm_2)$$

y

$$\begin{aligned} (\rho^k \otimes^k \rho)\Delta(m_1rm_2) &= (\rho^k \otimes ({}^k\rho))(\Delta(m_1)rm_2 + m_1\Delta(rm_2)) \\ &= (\rho^k \otimes^k \rho)(1 \otimes m_1rm_2 + m_1 \otimes rm_2) \\ &= \bar{e_k} \otimes \rho(m_1rm_2) + m_1\bar{e_k} \otimes ({}^k\rho(rm_2)) \\ &= \bar{e_k} \otimes \rho(m_1rm_2) \end{aligned}$$

lo que completa la prueba del lema. □

**Lema 9.6.** *Para $\alpha \in T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ y $z \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ se tiene:*

$$((\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(\alpha))\Diamond\rho(z) = \rho^k(\Delta(\alpha)\Diamond z)$$

*Demostración.* Se puede verificar que si la igualdad se cumple para toda $\alpha$ y para cada $z$, y para toda $\beta$ y para cada $z$, entonces se cumple para toda $\alpha\beta$ y para cada $z$. Por lo tanto, basta probar la igualdad para $\alpha \in \bar{e_k}S \cup \bar{e_k}M_0\bar{e_k} \cup M_0D_kM_0$.
(i) Supongamos primero que $\alpha \in \bar{e_k}S$. Se tiene

$$\begin{aligned}(\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(\alpha)\lozenge\rho(z) &= (\rho^k \otimes ({}^k\rho))(1 \otimes \alpha - \alpha \otimes 1)\lozenge\rho(z) \\ &= (\bar{e_k} \otimes \rho(\alpha) - \rho(\alpha) \otimes \bar{e_k})\lozenge\rho(z) \\ &= cyc(\rho(\alpha)\rho(z) - \rho(z)\rho(\alpha)) \\ &= \rho(cyc(\alpha z - z\alpha)) \\ &= \rho^k(\Delta(\alpha)\lozenge z)\end{aligned}$$

(ii) Si $\alpha \in \bar{e_k}M_0\bar{e_k}$, entonces

$$\begin{aligned}(\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(\alpha)\lozenge\rho(z) &= (\rho^k \otimes ({}^k\rho))(1 \otimes \alpha)\lozenge\rho(z) \\ &= (\bar{e_k} \otimes p(\alpha))\lozenge\rho(z) \\ &= cyc(\rho(\alpha)\rho(z)) \\ &= \rho(cyc(\alpha z)) \\ &= \rho^k(\Delta(\alpha)\lozenge z)\end{aligned}$$

(iii) Finalmente, si $\alpha = m_1rm_2$ donde $m_1 \in \bar{e_k}M_0e_k$, $r \in D_k$ y $m_2 \in e_kM_0\bar{e_k}$, entonces:

$$\begin{aligned}(\rho^k \otimes ({}^k\rho))\Delta(m_1rm_2)\lozenge\rho(z) &= (\rho^k \otimes ({}^k\rho))(1 \otimes m_1rm_2 + m_1 \otimes rm_2)\lozenge\rho(z) \\ &= (\bar{e_k} \otimes \rho(m_1rm_2))\lozenge\rho(z) \\ &= cyc(\rho(m_1rm_2z)) \\ &= \rho^k(\Delta(m_1rm_2)\lozenge z)\end{aligned}$$

□

Uniendo los resultados del Lema 9.5 y Lema 9.6 se infiere el siguiente

**Lema 9.7.** *Sea $\alpha \in T_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$ y $z \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$, entonces:*

$$\hat{\Delta}\rho(\alpha)\lozenge\rho(z) = \rho^k(\Delta(\alpha)\lozenge z)$$

Sean $r, s \in L(k)$, $a \in_k T$ y $b \in T_k$. Sea $n \in \hat{N}_{\sigma(b)}$, entonces:

$$\hat{\gamma}_{sa,br}(n) = \sum_{w \in L(k)} s^*(r^{-1}w)\varphi^{-1}\left(Y_{[bwa]}(\varphi(P))\right)n.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\left(Y_{[bwa]}(\varphi(P))\right)n &= \varphi^{-1}\rho^{-1}\left(X_{[bwa]^*}(\rho\varphi(P))\right)n \\ &= \left(\rho^{-1}\hat{\varphi}^{-1}X_{[bwa]^*}(\hat{\varphi}(\rho(P)))\right)n\end{aligned}$$

Además $X_{[bwa]^*}(\hat{\varphi}(\rho(P)) = \lim_{u\to\infty} Z_u$, donde:

$$Z_u = \sum_{s \in L(\sigma(b))} \sum_{c \in \tilde{T}_{\hat{k},\hat{k}}} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\hat{\varphi}(c)^{\leq u+1})\lozenge\hat{\varphi}(X_{c^*}(\rho(P))\right)s$$

Sea $v$ un entero positivo arbitrario y sean $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_S(M)$. Escribiremos $\alpha \equiv \beta\ (v)$ si $\alpha - \beta \in \mathcal{F}_S(M)^{>v}$. Claramente para toda $\alpha \in \mathcal{F}_S(M)$ y cualquier entero positivo $v$, se tiene $\alpha \equiv \alpha^{\leq v}\ (v)$.

Notemos que si $h \in T_S(M)^{>v}$ y $z \in \mathcal{F}_S(M)$, entonces $\Delta(h)\lozenge z \in \mathcal{F}_S(M)^{>v}$. Por lo tanto, si $\alpha, \beta \in T_S(M)$ y $\alpha \equiv \beta\ (v)$, entonces $\Delta(\alpha)\lozenge z \equiv \Delta(\beta)\lozenge z\ (v)$ para toda $z \in \mathcal{F}_S(M)$.

Sea $h \in \mathcal{F}_S(M)_{\hat{k},\hat{k}}$. Probemos que:

$$\rho(h^{\leq 2v+3}) \equiv \rho(h)^{\leq v+1}\ (v+2)$$

En efecto, como $h - h^{\leq 2v+3} \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2v+4}$ entonces $\rho(h) - \rho(h^{\leq 2v+3}) \in \mathcal{F}_S(\mu_k M)^{\geq v+2}$, de donde $\rho(h) \equiv \rho(h^{\leq 2v+3})\ (v+2)$. En consecuencia, $\rho(h) \equiv \rho(h)^{\leq v+1}\ (v+2)$.

Sea $v \gg 0$ tal que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq v} N = 0$. Para cada $i \geq 1$ se tiene $Z_{v+i} - Z_v \in \mathcal{F}_S(\mu_k M)^{\geq v+1}$ y por ello

$$\varphi^{-1}\rho^{-1}(Z_{v+i}) \equiv \varphi^{-1}\rho^{-1}(Z_v)\ (v+1)$$

luego

$$\lim_{u\to\infty} \varphi^{-1}\rho^{-1}(Z_u)n = \varphi^{-1}\rho^{-1}(Z_v)n$$

Definamos

$$W(c) = \varphi^{-1}\rho^{-1}\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\hat{\varphi}(c)^{\leq v+1})\Diamond\hat{\varphi}(X_{c^*}(\rho(P)))\right) s\right) n.$$

Establezcamos el siguiente lema.

**Lema 9.8.** *Si* $c \in \bar{e_k} M_0 \bar{e_k} \cap T$, *entonces* $W(c) = 0$.

*Demostración.* Notemos que $X_{c^*}(\rho(P)) = \rho(X_{c^*}(P))$, luego:

$$\hat{\varphi}(c)^{\leq v+1} = \hat{\varphi}(\rho(c))^{\leq v+1} = \rho(\varphi(c))^{\leq v+1} \equiv \rho(\varphi(c)^{\leq 2v+3})\ (v+2)$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} W(c) &= \varphi^{-1}\rho^{-1}\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\rho(\varphi(c)^{\leq 2v+3}))\Diamond\hat{\varphi}\rho(X_{c^*}(P))\right) s\right) n \\ &= \varphi^{-1}\rho^{-1}\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\rho(\varphi(c)^{\leq 2v+3}))\Diamond\rho\varphi(X_{c^*}(P))\right) s\right) n \end{aligned}$$

Usando el Lema 9.7 se infiere que

$$W(c) = \varphi^{-1}\rho^{-1}\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k\left(\Delta(\varphi(c)^{\leq 2v+3})\Diamond\varphi(X_{c^*}(P))\right)\right) s\right) n$$

Sea $z = \varphi(X_{c^*}(P))$. Entonces $W(c)$ es una suma de elementos de la forma:

$$\varphi^{-1}\rho^{-1}\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k\left(\Delta(m_1\dots m_l r)\Diamond z\right)\right) s\right) n$$

donde $m_1, \dots, m_l \in SM_0$ y $r \in \bar{e_k}S$.

Entonces

$$\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k\left(\Delta(m_1\dots m_l r)\Diamond z\right)\right) s$$

es igual a

$$\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k\left(\Delta(m_1\dots m_l) r\Diamond z\right)\right) s + g$$

donde

$$g = \sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(m_1 \dots m_l \Delta(r) \Diamond z\right)\right) s$$
$$= \sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(r\rho(cyc(\bar{e_k} z m_1 \dots m_l)) - \rho(cyc(\bar{e_k} z m_1 \dots m_l))r\right) s$$

Usando el Lema 5.1 se deduce que $g = 0$. Por lo tanto:

$$W(c) = \varphi^{-1}\rho^{-1}\left(\sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(\Delta(m_1 \dots m_l)\Diamond rz\right)\right) s\right) n$$

entonces $W(c)$ es una suma de elementos de la forma:

$$\varphi^{-1}\rho^{-1}\left((s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l r z m_1 \dots m_{i-1}))s\right) n$$

Si $i = l$ entonces $z = \sum_i z_i z_{i'}$ donde $z_i \in \bar{e_k} M$; en cuyo caso

$$(s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_l r \bar{e_k} z m_1 \dots m_{l-1})) = (s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_l r)\rho(\bar{e_k} z m_1 \dots m_{l-1}\bar{e_k})) = 0$$

luego $W(c)$ es una suma de elementos de la forma

$$\varphi^{-1}\rho^{-1}\left((s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_i m_{i+1})\rho(\alpha z\beta))s\right) n$$

donde $m_i m_{i+1} \in M e_k M$. Se sigue que $W(c)$ es una suma de elementos de la forma $\varphi^{-1}(\alpha)\varphi^{-1}(z)\varphi^{-1}(\beta)n$. Como $\varphi^{-1}(z) = X_{c^*}(P)$, entonces $W(c) \in R(P)N = 0$, lo que termina la prueba del lema.

□

De lo anterior se obtiene la siguiente fórmula:

$$(*) : \varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P)))n = \varphi^{-1}\rho^{-1}(Z'_v)n$$

donde

$$Z'_v = \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{b_1\in T_k, r\in L(k), a_1\in_k T} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\hat{\varphi}(\rho(b_1 r a_1)))^{\leq v+1} \Diamond \hat{\varphi}(X_{\rho(b_1 r a_1)}(\rho(P)))\right) s$$
$$= \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{b_1 r a_1} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\hat{\varphi}(\rho(b_1 r a_1)))^{\leq v+1} \Diamond \hat{\varphi}\rho\left(Y_{[b_1 r a_1]}(P)\right)\right) s$$
$$= \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{b_1 r a_1} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\rho\varphi(b_1 r a_1))^{\leq v+1} \Diamond \rho\varphi\left(Y_{[b_1 r a_1]}(P)\right)\right) s$$

así que en $(*)$ podemos reemplazar $Z'_v$ por el término:

$$\sum_{b_1 r a_1} \sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\rho(\varphi(b_1 r a_1)^{\leq 2v+3}))\Diamond \rho\varphi(Y_{[b_1 r a_1]}(P))\right) s$$

Usando el Lema 9.7 se obtiene:

$$\sum_{b_1 r a_1} \sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(\Delta(\varphi(b_1 r a_1)^{\leq 2v+3})\Diamond \varphi(Y_{[b_1 r a_1]}(P))\right)\right) s$$

y el último término puede ser reemplazado por:

$$\sum_{b_1 r a_1} \sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(\Delta(\varphi(b_1 r)^{\leq 2v+3}\varphi(a_1)^{\leq 2v+3})\Diamond \varphi(Y_{[b_1 r a_1]}(P))\right)\right) s$$

el cual a su vez puede ser reemplazado por $S = S_1 + S_2$, donde:

$$S_1 = \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{b_1 r a_1} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(\Delta(\varphi(b_1)^{\leq 2v+3}) \Diamond \varphi(ra_1 Y_{[b_1 r a_1]}(P))\right)\right) s$$

$$S_2 = \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{b_1 r a_1} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(\Delta(\varphi(a_1)^{\leq 2v+3}) \Diamond \varphi(Y_{[b_1 r a_1]}(P) b_1 r)\right)\right) s$$

Usando 9.7 se obtiene la igualdad:

$$S_2 = \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{a_1} (s\rho(bwa))^* \left(\rho^k \left(\Delta(\varphi(a_1)^{\leq 2v+3}) \Diamond \varphi(X_{a_1^*}(P))\right)\right) s$$

de donde:

$$\varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P)))n = \varphi^{-1}\rho^{-1}(S_1)n + \varphi^{-1}\rho^{-1}(S_2)n$$

(i) Veamos que $\varphi^{-1}\rho^{-1}(S_2) \subseteq R(P)$.

Sea $z = \varphi(X_{a_1^*}(P))$, entonces $\varphi(a_1)^{\leq 2v+3}$ es una suma de elementos de la forma $m_1 \dots m_l t$ donde $m_j \in SM_0$, $t \in \bar{e_k} S$. Por lo tanto, $S_2$ es una suma de elementos de la forma:

$$(s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l t z m_1 \dots m_{i-1})\bar{e_k})s$$

Si $i = l$, entonces $(s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l \dots m_{i-1})\bar{e_k})s$ es igual a

$$(s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_l \bar{e_k})\rho(\bar{e_k} t z m_1 \dots m_{l-1})\bar{e_k})s = 0$$

Si $i < l$, entonces

$$(s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l t z m_1 \dots m_{i-1})\bar{e_k})s = (s\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l)\rho(t z m_1 \dots m_{i-1}\bar{e_k}))s$$

Se sigue que $S_2$ es una suma de elementos de la forma $\rho(\alpha z \beta)$, así que $\varphi^{-1}\rho^{-1}(S_2)$ es una suma de elementos de la forma $\varphi^{-1}(\alpha)\varphi^{-1}(z)\varphi^{-1}(\beta)$. Como $\varphi^{-1}(z) = X_{a_1^*}(P)$, entonces $\varphi^{-1}\rho^{-1}(S_2) \subseteq R(P)$. Esto termina la prueba de (i).

De lo anterior se infiere la igualdad $\varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P)))n = \varphi^{-1}\rho^{-1}(S_1)n$.

(ii) Probemos que $\varphi^{-1}\rho^{-1}(S_1) = \nu_1 + \nu_2$, donde $\nu_1 \in R(P)$ y $\nu_2$ es una suma de elementos de la forma:

$$\sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{ra_1} (s\rho(bwa))^* \rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l z_{r_{a_1}} m_1 \dots m_{i-1} \bar{e_k})s$$

donde $z_{r_{a_1}} = \varphi(ra_1 Y_{[b_1 r a_1]}(P))$.

Notemos que $\varphi(b_1)^{\leq 2v+3}$ es una suma de elementos de la forma $m_1 m_2 \dots m_l$ donde $m_1, \dots, m_{l-1} \in SM_0$ y $m_l \in \bar{e_k} M e_k$. El elemento $\varphi(b_1)$ es una suma de elementos de la forma $m_1 \dots m_l$ donde $m_1, \dots, m_{l-1} \in SM_0$ y $m_l \in \bar{e_k} M e_k$. Entonces $\varphi^{-1}\rho^{-1}(S_1)$ pertenece al $F$-espacio vectorial generado por $\varphi^{-1}\rho^{-1}(T_i)$ donde $T_i$ es el $F$-espacio vectorial generado por elementos de la forma:

$$u_i = \sum_{s\in L(\sigma(b))} \sum_{ra_1} (s\rho(bwa))^* \rho(\bar{e_k} m_i \dots m_l z_{r_{a_1}} m_1 \dots m_{i-1} \bar{e_k})s$$

Veamos que si $i < l$, entonces $\varphi^{-1}\rho^{-1}(T_i) \subseteq R(P)$. Se tiene:

$$u_i = \sum_{s\in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho(\bar{e_k} m_i \dots m_{l-1})\right) \rho(m_l w_{b_1} m_1 \dots m_{i-1} \bar{e_k})s$$

donde $w_{b_1} = \varphi(X_{b_1^*}(P))$.

Se sigue que $u_i$ es una suma de elementos de la forma $\rho(\alpha w_{b_1} \beta)$ y por ende $\varphi^{-1}\rho^{-1}(u_i)$ es una suma de elementos de la forma $\varphi^{-1}(\alpha) X_{b_1^*}(P) \varphi^{-1}(\beta)$. Esto completa la prueba de (ii).
Se tiene

$$\varphi(b_1) = \sum_{b'r'} D_{b_1,b'r'} b'r'$$

entonces

$$\varphi(b_1)^{\leq 2v+3} = \sum_{b'r'} (D_{b_1,b'r'})^{\leq 2v+2} b'r'$$

Además

$$\begin{aligned} \varphi(ra_1) &= \sum_{r''a'} r''a' C_{r''a',ra_1} \\ z_{r_{a_1}} &= \sum_{r''a'} r''a' C_{r''a',ra_1} \varphi(Y_{[b_1ra_1]}(P)) \end{aligned}$$

Por otra parte, $(D_{b_1,b'r'})^{\leq 2v+2}$ es una suma de elementos de la forma $m_1m_2\dots m_{l-1}s''$ donde cada $m_i \in SM_0$ y $s'' \in L(\sigma(b'))$. Entonces, $\varphi(b_1)^{\leq 2v+3}$ es una suma de elementos de la forma $m_1m_2\dots m_{l-1}s''b'r'$.

En lo que sigue, pondremos $z(b_1ra_1) = \varphi(Y_{[b_1ra_1]})$.

De lo anterior se infiere que $\varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P)))n$ es una suma de elementos de la forma:

$$(*): \sum_{b',s',s'',r',r''} \varphi^{-1}\rho^{-1}\left((s'\rho(bwa))^*(\rho(\bar{e_k}H))\right)$$

donde:

$$\begin{aligned} H &= s''b'r'r''a'C_{r''a',ra_1} z(b_1ra_1)m_1\dots m_{l-1}s'n \\ &= \sum_{w_1\in L(k)} s''b'w_1^*(r'r'')w_1a'C_{r''a',ra_1} z(b_1ra_1)m_1\dots m_{l-1}s'n \end{aligned}$$

Los términos no-nulos de $(*)$ son aquellos con $s' = s''$, $b = b'$, $a' = a$, $w_1 = w$. En consecuencia:

$$\varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P)))n = \sum_{h,r',r'',a_1,b_1} w^*(r'r'')\varphi^{-1}(C_{r''a,ha_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,br'})n$$

Luego:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{sa,br}(n) &= \sum_{w\in L(k)} s^*(r^{-1}w)\varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P)))n \\ &= \sum_{w,h,r',r'',a_1,b_1} s^*(r^{-1}w)w^*(r'r'')\varphi^{-1}(C_{r''a,ha_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,br'})n \\ &= \sum_{w,h,r',r'',a_1,b_1} s^*(r^{-1}ww^*(r'r''))\varphi^{-1}(C_{r''a,ha_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,br'})n \\ &= \sum_{h,r',r'',a_1,b_1} s^*\left(r^{-1}\sum_{w\in L(k)} w^*(r'r'')w\right)\varphi^{-1}(C_{r''a,ha_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,br'})n \\ &= \sum_{h,r',r'',a_1,b_1} s^*(r^{-1}r'r'')\varphi^{-1}(C_{r''a,ha_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,br'})n \end{aligned}$$

Por (iii) de la Proposición 8.1 y (iii) de la Proposición 8.2 se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(C_{r''a,ha_1}) &= \sum_{u\in L(\sigma(a))} (r'')^*(hu)\varphi^{-1}(C_{ua,a_1}) \\ \varphi^{-1}(D_{b_1,br'}) &= \sum_{v\in L(\tau(b_1))} (r')^*(v)\varphi^{-1}(D_{b_1,bv}) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{sa,br}(n) &= \sum_{h,r',r'',a_1,b_1,u,v} s^*(r^{-1}r'r'')(r'')^*(hu)\varphi^{-1}(C_{ua,a_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)(r')^*(v)\varphi^{-1}(D_{b_1,bv})n \\
&= \sum_{h,r',a_1,b_1,u,v} s^*(r^{-1}r'hu)(r')^*(v)\varphi^{-1}(C_{ua,a_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,bv})n \\
&= \sum_{h,a_1,b_1,u,v} s^*(r^{-1}vhu)\varphi^{-1}(C_{ua,a_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,bv})n
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando nuevamente (iii) de la Proposición 8.1 y (iii) de la Proposición 8.2 se ve que la entrada $(sa, br)$ de $(C\gamma D)(n)$ está dada por

$$\sum_{s',t',h,a_1,b_1,u,v} (s')^*((t')^{-1}h)s^*(s'u)r^*(vt')\varphi^{-1}(C_{ua,a_1})Y_{[b_1ha_1]}(P)\varphi^{-1}(D_{b_1,bv})n$$

Usando 9.4 se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{s',t',h,u,v} (s')^*((t')^{-1}h)s^*(s'u)r^*(vt') &= \sum_{s',t',h,u,v} s^*\left((s')^*((t')^{-1}h)s'u\right)r^*(vt') \\
&= \sum_{t',h,u,v} s^*\left((t')^{-1}hu\right)r^*(vt') \\
&= \sum_{h,u,v} s^*\left(\sum_{t'} r^*(vt')(t')^{-1}hu\right) \\
&= \sum_{h,u,v} s^*(r^{-1}vhu)
\end{aligned}$$

lo que implica que $\hat{\gamma} = C\gamma D$, completando la prueba del Lema 9.4. □

De la identidad $\hat{\gamma} = C\gamma D$ se deducen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\ker(\gamma) &= D(\ker(\hat{\gamma})) \\
\operatorname{im}(\gamma) &= C^{-1}(\operatorname{im}(\hat{\gamma}))
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Terminemos la prueba de la Proposición 9.5. Establezcamos una equivalencia-derecha $(\hat{\varphi}, \psi, \eta)$ entre las representaciones $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})$ y $\widetilde{\mu_k}\left(\widehat{\mathcal{N}}\right)$. Primero, definimos $\widehat{\varphi} : \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)$ como la equivalencia-derecha entre las álgebras $(\mathcal{F}_S(\mu_k M), \mu_k P)$ y $(\mathcal{F}_S(\mu_k M), \mu_k\varphi(P))$ dada por el Teorema 8.1. Sea $\widetilde{\mu_k}(\widehat{\mathcal{N}}) = (\overline{\widehat{N}}, \overline{\widehat{V}})$. Si $i \neq k$, entonces $\widehat{N}_i = N_i$ y:

$$\overline{\widehat{N}}_k = \tfrac{\ker(\hat{\gamma})}{\operatorname{im}(\hat{\beta})} \oplus \operatorname{im}(\hat{\gamma}) \oplus \tfrac{\ker(\hat{\alpha})}{\operatorname{im}(\hat{\gamma})} \oplus V_k$$

Para cada $i \in \{1,2,3,4\}$, sean $\overline{J}_i$ y $\overline{\Pi}_i$ las correspondientes inclusiones y proyecciones asociadas a $\overline{\widehat{N}}_k$ análogas a las dadas en 9.20 y 9.21. Se tienen también inclusiones:

$$\begin{aligned}
\overline{j} &: \ker(\hat{\gamma}) \to N_{out} \\
\overline{i} &: \operatorname{im}(\hat{\gamma}) \to N_{in}
\end{aligned}$$

y proyecciones:

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_1 &: \ker(\hat{\gamma}) \to \frac{\ker(\hat{\gamma})}{\operatorname{im}(\hat{\beta})} \\
\overline{\pi}_2 &: \ker(\hat{\alpha}) \to \frac{\ker(\hat{\alpha})}{\operatorname{im}(\hat{\gamma})}
\end{aligned}$$

Como $\hat{\gamma} = C\gamma D$ entonces $\hat{\gamma}D^{-1} = C\gamma$. Por lo tanto, $D^{-1}$ induce un isomorfismo

$$D_1^{-1} : \ker(\gamma) \to \ker(\hat{\gamma})$$

tal que $\bar{j}D_1^{-1} = D^{-1}j$. Además, $D^{-1}$ envía $\operatorname{im}(\beta)$ en $\operatorname{im}(\hat{\beta})$. En consecuencia, $D^{-1}$ también induce un isomorfismo

$$\underline{D}^{-1} : \frac{\ker(\gamma)}{\operatorname{im}(\beta)} \to \frac{\ker(\hat{\gamma})}{\operatorname{im}(\hat{\beta})}$$

tal que $\underline{D}^{-1}\pi_1 = \overline{\pi}_1 D_1^{-1}$. Por otro lado, el isomorfismo $C$ induce un isomorfismo

$$C_1 : \operatorname{im}(\gamma) \to \operatorname{im}(\hat{\gamma})$$

tal que $\bar{i}C_1 = Ci$. La igualdad $\hat{\alpha}C = \alpha$ implica que $C$ también induce un isomorfismo $C_2 : \ker(\alpha) \to \ker(\hat{\alpha})$. Se sigue que existe un isomorfismo

$$\underline{C} : \frac{\ker(\alpha)}{\operatorname{im}(\gamma)} \to \frac{\ker(\hat{\alpha})}{\operatorname{im}(\hat{\gamma})}$$

tal que $\underline{C}\pi_2 = \overline{\pi}_2 C_2$.

Para construir la representación $\widetilde{\mu_k}(\widehat{N})$ elegimos los siguientes morfismos escindantes:

$$\overline{p} = D_1^{-1}pD : N_{out} \to \ker(\hat{\gamma})$$
$$\overline{\sigma}_2 = C_2\sigma_2\underline{C}^{-1} : \frac{\ker(\hat{\alpha})}{\operatorname{im}(\hat{\gamma})} \to \ker(\hat{\alpha})$$

Se tiene $\overline{p}\bar{j} = id_{\ker(\hat{\gamma})}$ y $\overline{\pi}_2\overline{\sigma}_2 = id_{\ker(\hat{\alpha})/\operatorname{im}(\hat{\gamma})}$. Definamos

$$\psi : \overline{N} \to \overline{\widehat{N}}$$

como sigue: si $i \neq k$ entonces $\psi_i : \overline{N}_i = N_i \to \overline{\widehat{N}}_i = N_i$ es el morfismo identidad; en otro caso:

$$\psi_k : \overline{N}_k \to \overline{\widehat{N}}_k$$

es el morfismo tal que para cada $i \neq j$, $\overline{\Pi}_i\psi_k J_j = 0$ y

$$\overline{\Pi}_1\psi_k J_1 = \underline{D}^{-1}$$
$$\overline{\Pi}_2\psi_k J_2 = C_1$$
$$\overline{\Pi}_3\psi_k J_3 = \underline{C}$$
$$\overline{\Pi}_4\psi_k J_4 = id_{V_k}$$

Veamos que para cada $z \in \widetilde{T}$ y $n \in N_{\tau(z)}$:

$$\psi_{\sigma(z)}(zn) = \widehat{\varphi}(z)\psi_{\tau(z)}(n)$$

Supongamos primero que $z = a^*$ donde $a \in_k T$. En este caso $\tau(z) = \sigma(a) = k$ y $\sigma(z) = \tau(a) \neq k$. Por la Proposición 8.6:

$$\widehat{\varphi}(a^*) = \sum_{t \in L(k), a_1 \in_k T} (C^{-1})_{a,ta_1} a_1^* t^{-1}$$

de donde

$$\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*)) = \sum_{t \in L(k), a_1 \in_k T} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)t^{-1}$$

donde $*$ denota la acción de $\mathcal{F}_S(M)$ en $\widehat{N}$. En este caso hay que probar la siguiente igualdad:

$$\overline{N}(a^*) = \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k \tag{9.27}$$

Por un lado, $\overline{N}(a^*)J_1 = 0$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k J_1 &= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)t^{-1}\psi_k J_1 \\
&= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)t^{-1}\overline{J}_1\overline{\Pi}_1\psi_k J_1 \\
&= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)\overline{J}_1 t^{-1}\overline{\Pi}_1\psi_k J_1 = 0
\end{aligned}$$

y por ende $\overline{N}(a^*)J_1 = \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k J_1$. Consideremos ahora $\overline{N}(a^*)J_2$. Por 9.22 se tiene $\overline{N}(a^*)J_2 = c_k^{-1}\pi_{e_k a}i$. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k J_2 &= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)t^{-1}\overline{J}_2\overline{\Pi}_2\psi_k J_2 \\
&= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)\overline{J}_2 t^{-1}\overline{\Pi}_2\psi_k J_2 \\
&= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * c_k^{-1}\pi_{e_k a_1}\overline{i}t^{-1}\overline{\Pi}_2\psi_k J_2 \\
&= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * c_k^{-1}\pi_{e_k a_1}\overline{i}t^{-1}C_1 \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \pi_{e_k a_1}t^{-1}Ci \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \pi_{ta_1}Ci \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1, a_2 \in_k T, r, t \in L(k)} \varphi^{-1}((C^{-1})_{a,ta_1})\pi_{ta_1}C\xi_{ra_2}\pi_{ra_2}i \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1, a_2 \in_k T, r, t \in L(k)} \varphi^{-1}((C^{-1})_{a,ta_1})\varphi^{-1}(C_{ta_1,ra_2})\pi_{ra_2}i \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1, a_2 \in_k T, r, t \in L(k)} \varphi^{-1}\left((C^{-1})_{a,ta_1}C_{ta_1,ra_2}\right)\pi_{ra_2}i \\
&= c_k^{-1}\pi_{e_k a}i
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{N}(a^*)J_2 = \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k J_2$. Para $J_3$ se tiene $\overline{N}(a^*)J_3 = c_k^{-1}\pi_{e_k a}j'\sigma_2$ y

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k J_3 &= \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)\overline{J}_3 t^{-1}\overline{\Pi}_3\psi_k J_3 \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} \varphi^{-1}\left((C^{-1})_{a,ta_1}\right)\pi_{ta_1}\overline{j}\overline{\sigma}_2\underline{C} \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} \varphi^{-1}\left((C^{-1})_{a,ta_1}\right)\pi_{ta_1}Cj'\sigma_2 \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1, a_2 \in_k T, t, r \in L(k)} \varphi^{-1}\left((C^{-1})_{a,ta_1}\right)\pi_{ta_1}C\xi_{ra_2}\pi_{ra_2}j'\sigma_2 \\
&= c_k^{-1} \sum_{a_1, a_2 \in_k T, t, r \in L(k)} \varphi^{-1}\left((C^{-1})_{a,ta_1}\right)\varphi^{-1}(C_{ta_1,ra_2})\pi_{ra_2}j'\sigma_2 \\
&= c_k^{-1}\pi_{e_k a}j'\sigma_2
\end{aligned}$$

Luego $\overline{N}(a^*)J_3 = \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(a^*))\psi_k J_3$.

Finalmente, $\overline{N}(a^*)J_4 = 0$ y

$$\overline{\widehat{N}}(\varphi(a^*))\psi_k J_4 = \sum_{a_1 \in_k T, t \in L(k)} (C^{-1})_{a,ta_1} * \overline{\widehat{N}}(a_1^*)\overline{J}_4 t^{-1}\overline{\Pi}_4 \psi_k J_4 = 0.$$

lo que prueba 9.27.

Supongamos ahora que $z =^* b$ donde $b \in T_k$. En este caso $\tau(z) = \sigma(b) \neq k$ y $\sigma(z) = \tau(b) = k$. Por la Proposición 8.6:

$$\widehat{\varphi}(^*b) = \sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} r^{-1}(^*b_1)(D^{-1})_{b_1 r, b}$$

Hay que probar la siguiente igualdad

$$\psi_k \overline{N}(^*b) = \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b)) \tag{9.28}$$

Por un lado, $\overline{\Pi}_1 \psi_k \overline{N}(^*b) = \overline{\Pi}_1 \psi_k J_1 \Pi_1 \overline{N}(^*b) = -\underline{D}^{-1}\pi_1 p \xi_{be_k}$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_1 \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b)) &= \sum_{b_1 \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\overline{\Pi}_1 \overline{\widehat{N}}(^*b_1)\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1 r, b}) \\
&= -\sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} r^{-1}\overline{\pi}_1 \overline{p}\xi_{b_1 e_k}\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1 r, b}) \\
&= -\sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} \overline{\pi}_1 \overline{p}\xi_{b_1 r}\pi_{b_1 r} D^{-1}\xi_{be_k} \\
&= -\overline{\pi}_1 \overline{p} D^{-1}\xi_{be_k} \\
&= -\overline{\pi}_1 D_1^{-1} p D D^{-1}\xi_{be_k} \\
&= -\overline{\pi}_1 D_1^{-1} p \xi_{be_k} \\
&= -\underline{D}^{-1}\pi_1 p \xi_{be_k}
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\overline{\Pi}_1 \psi_k \overline{N}(^*b) = \overline{\Pi}_1 \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b))$$

Consideremos ahora el morfismo:

$$\hat{\gamma}' : N_{out} \to \mathrm{im}(\widehat{\gamma})$$

donde $\hat{\gamma} = \overline{i}\widehat{\gamma'}$. Ahora consideremos $\overline{\Pi}_2$. Se tiene:

$$\overline{\Pi}_2 \psi_k \overline{N}(^*b) = \overline{\Pi}_2 \psi_k J_2 \Pi_2 \overline{N}(^*b) = -C_1 \gamma' \xi_{be_k}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_2 \overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b)) &= \sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} r^{-1}\overline{\Pi}_2 \overline{\widehat{N}}(^*b_1)\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1 r, b}) \\
&= -\sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} r^{-1}\widehat{\gamma'}\xi_{b_1 e_k}\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1 r, b}) \\
&= -\sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} \widehat{\gamma'} r^{-1}\xi_{b_1 e_k}\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1 r, b}) \\
&= -\sum_{r \in L(k), b_1 \in T_k} \widehat{\gamma'}\xi_{b_1 r}\pi_{b_1 r} D^{-1}\xi_{be_k} \\
&= -\widehat{\gamma'} D^{-1}\xi_{be_k}
\end{aligned}$$

Además:

$$\bar{i}C_1\gamma'\xi_{be_k} = Ci\gamma'\xi_{be_k} = C\gamma\xi_{be_k} = \hat{\gamma}D^{-1}\xi_{be_k} = \bar{i}\widehat{\gamma'}D^{-1}\xi_{be_k}$$

Como $\bar{i}$ es inyectiva, entonces $C_1\gamma'\xi_{be_k} = \widehat{\gamma'}D^{-1}\xi_{be_k}$. En consecuencia:

$$\overline{\Pi}_2\psi_k\overline{N}(^*b) = \overline{\Pi}_2\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b))$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_3\psi_k\overline{N}(^*b) &= \overline{\Pi}_3\psi_k J_3\Pi_3\overline{N}(^*b) = 0\\
\overline{\Pi}_3\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b)) &= \sum_{r\in L(k),b_1\in T_k} r^{-1}\overline{\Pi}_3\overline{\widehat{N}}(^*b_1)\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1r,b}) = 0\\
\overline{\Pi}_4\psi_k\overline{N}(^*b) &= \overline{\Pi}_4\psi_k J_4\Pi_4\overline{N}(^*b) = 0\\
\overline{\Pi}_4\overline{\widehat{N}}(\widehat{\varphi}(^*b)) &= \sum_{r\in L(k),b_1\in T_k} r^{-1}\overline{\Pi}_4\overline{\widehat{N}}(^*b_1)\varphi^{-1}((D^{-1})_{b_1r,b}) = 0
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba de la Proposición 9.5. □

**Teorema 9.1.** *Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M_1) \to \mathcal{F}_S(M)$ un isomorfismo de álgebras con $\varphi_{|S} = id_S$ y sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M_1), P)$ donde $P$ es un potencial tal que $e_kPe_k = 0$. Entonces existe un isomorfismo de álgebras:*

$$\hat{\varphi} : \mathcal{F}_S(\mu_k M_1) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M)$$

*que satisface las siguientes condiciones:*

*(a) $\hat{\varphi}(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\varphi(P))$.*

*(b) Existe un isomorfismo de representaciones decoradas $\psi : \widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) \to \widetilde{\mu_k}(\widehat{\mathcal{N}})$.*

*Demostración.* El inciso (a) es consecuencia inmediata del Teorema 8.2. Notemos que $\varphi$ es igual a la composición de un isomorfismo de álgebras $\mathcal{F}_S(M_1) \to \mathcal{F}_S(M)$, inducido por un isomorfismo de $S$-bimódulos $M_1 \to M$, junto con un automorfismo unitriangular de $\mathcal{F}_S(M)$. Por la Proposición 9.5, basta probar el resultado cuando $\varphi$ es inducido por un isomorfismo de $S$-bimódulos $\phi : M_1 \to M$. Sea $T_1$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $M_1$ y sea $T$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $M$. Asociada a la representación $\mathcal{N}$ se tienen los siguientes $D_k$-módulos izquierdos:

$$N^1_{in} = \bigoplus_{a\in_k T_1} D_k \otimes_F N_{\tau(a)}$$
$$N^1_{out} = \bigoplus_{b\in(T_1)_k} D_k \otimes_F N_{\sigma(b)}$$

y asociada a la representación $\widehat{\mathcal{N}}$ también se tienen los siguientes $D_k$-módulos izquierdos:

$$N_{in} = \bigoplus_{a\in_k T} D_k \otimes_F N_{\tau(a)}$$
$$N_{out} = \bigoplus_{b\in T_k} D_k \otimes_F N_{\sigma(b)}$$

Sean $\gamma_1 : N^1_{out} \to N^1_{in}$, $\alpha_1 : N^1_{in} \to N_k$, $\beta_1 : N_k \to N^1_{out}$ los morfismos asociados a la representación $\mathcal{N}$ y $\gamma : N_{out} \to N_{in}$, $\alpha : N_{in} \to N_k$, $\beta : N_k \to N_{out}$ los morfismos asociados a la representación $\widehat{\mathcal{N}}$.

Para cada $a_1 \in_k T_1, r \in L(k)$ se tiene:

$$\phi(ra_1) = \sum_{r'\in L(k),a\in_k T} r'aC_{r'a,ra_1}$$

Para cada $b_1 \in (T_1)_k, t \in L(k)$ se tiene:

$$\phi(b_1 t) = \sum_{b \in T_k, t' \in L(k)} D_{b_1 t, bt'} bt'$$

donde $C_{r'a,ra_1}, D_{b_1 t, bt'} \in S$. Sea $C : N^1_{in} \to N_{in}$ la $F$-transformación lineal tal que para cada $r, r' \in L(k)$, $a, a_1 \in_k T_1$, el morfismo:

$$\pi_{r'a} C \xi_{ra_1} : N_{\tau(a_1)} \to N_{\tau(a)}$$

está dado por $\pi_{r'a} C \xi_{ra_1}(n) = C_{r'a,ra_1} n$. Similarmente, definimos $D : N_{out} \to N^1_{out}$ como la $F$-transformación lineal tal que para cada $t, t' \in L(k)$, $b, b_1 \in T_k$, el morfismo:

$$\pi_{b_1 t} D \xi_{bt'} : N_{\sigma(b)} \to N_{\sigma(b_1)}$$

está dado por $\pi_{b_1 t} D \xi_{bt'}(n) = D_{b_1 t, bt'} n$.

Veamos que $\alpha C = \alpha_1$, $D\beta = \beta_1$. Sea $n \in N_{\tau(a_1)}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha C \xi_{ra_1}(n) &= \sum_{r'a' \in_k \hat{T}_1} \alpha \xi_{r'a'} \pi_{r'a'} C \xi_{ra_1}(n) \\
&= \sum_{r'a' \in_k \hat{T}_1} \phi^{-1} \left( r'a' C_{r'a',ra_1} \right) n = \phi^{-1} \phi(ra_1) n \\
&= ra_1 n = \alpha_1 \xi_{ra_1}(n)
\end{aligned}$$

de donde $\alpha C = \alpha_1$. Supongamos ahora $n \in N_{\sigma(b)}$, $b_1 \in (T_1)_k$ y $t \in L(k)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\pi_{b_1 t} D \beta(n) &= \sum_{bt' \in \hat{T}_k} \pi_{b_1 t} D \xi_{bt'} \pi_{bt'} \beta(n) \\
&= \sum_{bt' \in \hat{T}_k} D_{b_1 t, bt'} (\phi^{-1}(bt') n) \\
&= \phi^{-1} \left( \sum_{bt' \in \hat{T}_k} D_{b_1 t, bt'} bt' n \right) \\
&= \phi^{-1} \phi(b_1 t) n \\
&= b_1 t n = \pi_{b_1 t} \beta_1(n)
\end{aligned}$$

luego $D\beta = \beta_1$.

Veamos ahora que $\hat{\gamma} = C \gamma_1 D$. Sean $br \in \hat{T}_k$, $sa \in_k \hat{T}$ y $n \in N_{\sigma(b)}$. Se tiene:

$$\hat{\gamma}_{sa,br}(n) = \sum_{w \in L(k)} s^*(r^{-1} w) \varphi^{-1}(Y_{[bwa]}(\varphi(P))) n$$

También:

$$\varphi^{-1} \left( Y_{[bwa]}(\varphi(P)) \right) = \varphi^{-1} \rho^{-1} \left( X_{[bwa]}(\rho \varphi(P)) \right) = \rho^{-1} \hat{\varphi}^{-1} \left( X_{[bwa]}(\hat{\varphi} \rho(P)) \right)$$

Sea

$$T_1^\mu = \{\rho(c_1) : c_1 \in T_1 \cap \bar{e_k} M_1 \bar{e_k}\} \cup \{a_1^* : a_1 \in_k T_1\} \cup \{{}^* b_1 : b_1 \in (T_1)_k\} \cup \{\rho(b_1 r a_1) : b_1 \in (T_1)_k, a_1 \in_k T_1, r \in L(k)\}$$

el conjunto de generadores $Z$-libres de $\mu_k M_1$ asociado a $T_1$. Similarmente, sea $T^\mu$ el conjunto de generadores $Z$-libres de $\mu_k M$ asociado a $T$. Entonces

$$X_{[bwa]}(\hat{\varphi}(\rho(P))) = \sum_{s \in L(\sigma(b))} \sum_{c \in (\hat{T}_1)^\mu_{\hat{k},\hat{k}}} (s\rho(bwa))^* (\hat{\Delta}(\hat{\varphi}(c)) \lozenge z(c)) s$$

donde $z(c) = \hat{\varphi}(X_c(\rho(P)))$.

Los elementos del conjunto $(T_1)^{\mu}_{\hat{k},\hat{k}}$ son elementos de la forma $\rho(c_1)$, donde $c_1 \in T_1 \cap \bar{e_k} M \bar{e_k}$, o elementos de la forma $\rho(b_1 r a_1)$, donde $b_1 \in (T_1)_k, a_1 \in_k T_1, r \in L(k)$. Calculemos $W(c_1)$ donde $c_1 \in T_1 \cap \bar{e_k} M \bar{e_k}$.

$$W(c_1) = \sum_{s \in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^*(\hat{\Delta}(\hat{\varphi}\rho(c_1))\Diamond z(\rho(c_1))s$$

Entonces $\hat{\varphi}\rho(c_1) = \rho(\varphi(c_1)) = \rho(\phi(c_1)) = \sum_i r_i \rho(c_i) t_i$ donde $r_i, t_i \in S$ y $c_i \in T \cap \bar{e_k} M \bar{e_k}$.

Usando el Lema 5.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} W(c_1) &= \sum_i \sum_{s \in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\hat{\Delta}(\rho(c_i))\Diamond t_i z(\rho(c_1)) r_i\right) s \\ &= \sum_i \sum_{s \in L(\sigma(b))} (s\rho(bwa))^* \left(\rho(c_i) t_i z(\rho(c_1)) r_i\right) s = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X_{[bwa]}(\hat{\varphi}(\rho(P))) = \sum_{s \in L(\sigma(b))} \sum_{b_1 h a_1} (s\rho(bwa))^*(\hat{\Delta}(\hat{\varphi}\rho(b_1 h a_1))\Diamond z(\rho(b_1 h a_1)))s$$

y

$$\hat{\varphi}(\rho(b_1 h a_1)) = \rho\varphi(b_1 h a_1) = \rho(\phi(b_1)\phi(h a_1)) = \sum_{b', r', r'', a'', w'} (w')^*(r' r'') D_{b_1, b' r'} \rho(b' w' a'') C_{r'' a'', h a_1}$$

Usando nuevamente el Lema 5.1 se obtiene:

$$X_{[bwa]}(\hat{\varphi}(\rho(P))) = \sum_{s \in L(\sigma(b)), b_1 h a_1, b', r', r'', a'', w'} (s\rho(bwa))^* \left((w')^*(r' r'')\rho(b' w' a'') C_{r'' a'', h a_1} z(\rho(b_1 h a_1)) D_{b_1, b' r'}\right) s$$

En consecuencia

$$X_{[bwa]}(\hat{\varphi}(\rho(P))) = \sum_{b_1 h a_1, r', r''} w^*(r' r'') C_{r'' a, h a_1} z(\rho(b_1 h a_1)) D_{b_1, b r'}$$

Notemos que

$$z(\rho(b_1 h a_1)) = \hat{\varphi}(X_{[b_1 h a_1]}(\rho(P))) = \hat{\varphi}\rho(Y_{[b_1 h a_1]}(P)) = \rho\varphi(Y_{[b_1 h a_1]}(P))$$

esto da la igualdad

$$X_{[bwa]}(\hat{\varphi}(\rho(P))) = \rho\varphi\left(\sum_{b_1 h a_1, r', r''} w^*(r' r'') C_{r'' a, h a_1} Y_{[b_1 h a_1]}(P) D_{b_1, b r'}\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{sa,br}(n) &= \sum_{w \in L(k)} s^*(r^{-1} w) \sum_{b_1 h a_1, r', r''} w^*(r' r'') C_{r'' a, h a_1} Y_{[b_1 h a_1]}(P) D_{b_1, b r'} n \\ &= \sum_{b_1 h a_1, r', r''} s^*(r^{-1} r' r'') C_{r'' a, h a_1} Y_{[b_1 h a_1]}(P) D_{b_1, b r'} n \end{aligned}$$

Un argumento similar al dado en la prueba del Lema 9.8 muestra que $\hat{\gamma}_{sa,br}(n)$ es igual a $(C\gamma_1 D)_{sa,br}(n)$. La construcción de la equivalencia-derecha deseada es análoga a la dada en la prueba de la Proposición 9.5. □

A continuación se presenta una proposición que extiende los resultados dados en [10, Proposition 10.10] y [18, Proposition 12.10].

**Proposición 9.6.** *La clase de equivalencia-derecha de la representación $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})$ está determinada por la clase de equivalencia-derecha de la representación $\mathcal{N}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$ y sea $\mathcal{N}' = (N', V')$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M'), P')$. Supongamos que dichas representaciones son derecho-equivalentes, entonces existe un isomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M')$, con $\varphi_{|S} = id_S$, tal que $\varphi(P)$ es cíclicamente equivalente a $P'$. Recordemos que asociada a la representación decorada $\mathcal{N} = (N, V)$ se tiene una representación decorada $\widehat{\mathcal{N}} = (\widehat{N}, V)$ de $(\mathcal{F}_S(M'), \varphi(P))$ donde $\widehat{N} = N$ como $F$-espacios vectoriales, y para cada $u \in \mathcal{F}_S(M')$ y $n \in N$ ponemos $u * n := \varphi^{-1}(u)n$. Sea $\psi : \widehat{N} \to N'$ el isomorfismo de $F$-espacios vectoriales inducido por la equivalencia-derecha entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$. Notemos que $\psi$ es un isomorfismo de $\mathcal{F}_S(M')$-módulos izquierdos ya que si $u \in \mathcal{F}_S(M')$ y $n \in \widehat{N}$ entonces $\psi(un) = \psi(\varphi^{-1}(u)n) = \varphi(\varphi^{-1}(u))\psi(n) = u\psi(n)$. Veamos ahora que:

(a) $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})$ es derecho-equivalente a $\widetilde{\mu_k}(\widehat{\mathcal{N}})$.

(b) $\widetilde{\mu_k}(\widehat{\mathcal{N}})$ es derecho-equivalente a $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}')$.

Notemos que (a) se sigue del Teorema 9.1. Probemos $(b)$. Consideremos los potenciales cíclicamente equivalentes $\varphi(P)$ y $P'$ en $\mathcal{F}_S(M')$. Por la Proposición 8.7 se tiene que $\mu_k(\varphi(P))$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k P'$, en particular $\mu_k(\varphi(P))$ es derecho-equivalente a $\mu_k P'$ a través del morfismo identidad $id_{\mathcal{F}_S(\mu_k M')}$.

Se tiene que $\psi$ induce los siguientes isomorfismos de $F$-espacios vectoriales:

$$\hat{\psi}_i : N_{in} \to N'_{in}$$
$$\hat{\psi}_o : N_{out} \to N'_{out}$$

Sea $\rho = \psi^{-1} : N' \to \widehat{N}$, entonces $\rho$ también induce isomorfismos de $F$-espacios vectoriales:

$$\rho_i : N'_{in} \to N_{in}$$
$$\rho_o : N'_{out} \to N_{out}$$

Sean $\psi_k : N_k \to N'_k$ y $\rho_k : N'_k \to N_k$ los morfismos inducidos por $\psi$ y $\rho$. Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \psi_k\alpha &= \alpha'\hat{\psi}_i \\ \beta'\psi_k &= \hat{\psi}_o\beta \\ \hat{\psi}_i\gamma &= \gamma'\hat{\psi}_o \\ \rho_k\alpha' &= \alpha\rho_i \\ \beta\rho_k &= \rho_o\beta' \\ \rho_i\gamma' &= \gamma\rho_o \end{aligned} \tag{9.29}$$

Notemos que $\hat{\psi}_i$ induce un morfismo $ker(\alpha) \to ker(\alpha')$ y $\rho_i$ induce un morfismo $ker(\alpha') \to ker(\alpha)$ tal que $\rho_i = (\hat{\psi}_i)^{-1}$. Por lo tanto, $\hat{\psi}_i$ induce un isomorfismo entre $ker(\alpha)$ y $ker(\alpha')$. Similarmente, $\hat{\psi}_i$ induce un isomorfismo $im(\gamma) \to im(\gamma')$, $\hat{\psi}_o$ induce un isomorfismo $ker(\gamma) \to ker(\gamma')$ y también $\hat{\psi}_o$ induce un isomorfismo $im(\beta) \to im(\beta')$.

Para construir $\overline{N'}$ elegimos morfismos escindantes $(p', \sigma')$ en términos de los morfismos escindantes $(p, \sigma)$ de $\overline{N}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p' &= \psi_1 p(\hat{\psi}_o)^{-1} \\ \sigma' &= \psi_2\sigma(\overline{\psi}_2)^{-1} \end{aligned} \tag{9.30}$$

donde $\psi_1$ es la restricción de $\hat{\psi}_o$ a $\ker(\gamma)$, $\psi_2$ es la restricción del isomorfismo $\hat{\psi}_i : N_{in} \to N'_{in}$ a $ker(\alpha)$ y $\overline{\psi_2} : \frac{ker(\alpha)}{im(\gamma)} \to \frac{ker(\alpha')}{im(\gamma')}$ es el isomorfismo inducido por $\hat{\psi}_i$.

Definamos $\widetilde{\psi} : \overline{\widehat{N}} \to \overline{N'}$ como el morfismo $\psi : \widehat{N}_i \to N'_i$ para toda $i \neq k$, y si $i = k$ entonces $\widetilde{\psi}$ es el morfismo dado en forma diagonal por los morfismos anteriores. Sean $d_1 \in D_k$, $b \in T_k$ y $d_2 \in D_{\sigma(b)}$. Probemos que la siguiente igualdad se cumple para cada $n \in N_{\sigma(b)}$:

$$\widetilde{\psi}(d_1({}^*b)d_2\cdot n) = d_1({}^*b)d_2\cdot\widetilde{\psi}(n)$$

Primero consideremos el lado izquierdo. Se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(d_1({}^*b)d_2\cdot n) &= \widetilde{\psi}(d_1\overline{N}({}^*b)(d_2 n))\\ &= \widetilde{\psi}\begin{pmatrix}-d_1\pi_1 p\xi_{be_k}(d_2 n)\\ -d_1\gamma'\xi_{be_k}(d_2 n)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}d_1({}^*b)d_2\cdot\widetilde{\psi}(n) &= d_1({}^*b)d_2\cdot\psi(n)\\ &= \begin{pmatrix}-d_1\pi_1' p'\xi_{be_k}(d_2\psi(n))\\ -d_1\gamma'\xi_{be_k}(d_2\psi(n))\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Probemos ahora que $\Pi_1'\left(\widetilde{\psi}(d_1\overline{N}({}^*b)(d_2 n))\right) = \Pi_1'\left(d_1({}^*b)d_2\cdot\psi(n)\right)$. Por un lado

$$\Pi_1'\left(\widetilde{\psi}(d_1\overline{N}({}^*b)(d_2 n))\right) = \pi_1'\left(-d_1\psi_1 p\xi_{be_k}(d_2 n)\right)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\Pi_1'\left(d_1({}^*b)d_2\cdot\psi(n)\right) &= -d_1\pi_1' p'\xi_{be_k}(d_2\psi(n))\\ &= -d_1\pi_1' p'\hat{\psi}_o\xi_{be_k}(d_2 n)\end{aligned}$$

Por 9.30 $p'\hat{\psi}_0 = \psi_1 p$, luego

$$-d_1\pi_1' p'\hat{\psi}_o\xi_{be_k}(d_2 n) = -d_1\pi_1'\psi_1 p\xi_{be_k}(d_2 n) = \pi_1'\left(-d_1\psi_1 p\xi_{be_k}(d_2 n)\right)$$

Consecuentemente $\Pi_1'\left(\widetilde{\psi}(d_1\overline{N}({}^*b)(d_2 n))\right) = \Pi_1'\left(d_1({}^*b)d_2\cdot\psi(n)\right)$, como se quería probar.

Veamos ahora que $\Pi_2'\left(\widetilde{\psi}(d_1\overline{N}({}^*b)(d_2 n))\right) = \Pi_2'\left(d_1({}^*b)d_2\cdot\psi(n)\right)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\Pi_2'\left(\widetilde{\psi}(d_1\overline{N}({}^*b)(d_2 n))\right) &= -d_1\hat{\psi}_i\gamma'\xi_{be_k}(d_2 n)\\ &= -d_1\gamma'\hat{\psi}_o\xi_{be_k}(d_2 n)\\ &= -d_1\gamma'\xi_{be_k}(d_2\widetilde{\psi}(n))\\ &= \Pi_2'\left(d_1({}^*b)d_2\cdot\psi(n)\right)\end{aligned}$$

Sean $a\in_k T$, $d_1\in D_{\tau(a)}$, $d_2\in D_k$ y $w\in\overline{N}_k$. Probemos la siguiente igualdad

$$\widetilde{\psi}(d_1 a^* d_2\cdot w) = d_1 a^* d_2\widetilde{\psi}(w)$$

Se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(d_1 a^* d_2 w) &= \widetilde{\psi}\left(d_1 c_k^{-1}\pi_{e_k a} i\Pi_2(d_2 w) + d_1 c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2\Pi_3(d_2 w)\right)\\ &= d_1 c_k^{-1}\psi\left(\pi_{e_k a} i\Pi_2(d_2 w)\right) + d_1 c_k^{-1}\psi\left(\pi_{e_k a} j'\sigma_2\Pi_3(d_2 w)\right)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}d_1 a^* d_2\widetilde{\psi}(w) &= d_1\overline{N}'(a^*)(d_2\widetilde{\psi}(w))\\ &= d_1 c_k^{-1}\pi_{e_k a}' i\hat{\psi}_i\Pi_2(d_2 w) + d_1 c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2'\overline{\psi}_2(\Pi_3(d_2 w)))\end{aligned}$$

lo que termina la prueba de (b).

□

## 9.2 Mutación de representaciones decoradas

Sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial donde $P^{(2)}$ es escindable. Por el Teorema 7.1, existe una descomposición de $S$-bimódulos $M = M_1 \oplus \Xi_2(P)$ y un automorfismo unitriangular $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\varphi(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q^{\geq 3} \oplus Q^{(2)}$ donde $Q^{\geq 3}$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $Q^{(2)}$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(\Xi_2(P))$.

Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$. Entonces $\widehat{\mathcal{N}}$ es una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), Q^{\geq 3} \oplus Q^{(2)})$. Por lo tanto, $\widehat{\mathcal{N}}|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$ es una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M_1), Q^{\geq 3})$.

**Definición 9.3.** Llamaremos a la representación decorada $\widehat{\mathcal{N}}|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$ la parte reducida de $\mathcal{N}$ y la denotaremos por $\mathcal{N}_{red}$.

Sea $k$ un entero fijo en $[1, n]$ y sea $M = M_1 \oplus M_2$ un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado tal que para cada $i$, $e_i M e_k \neq 0$ implica $e_k M e_i = 0$ y similarmente $e_k M e_i \neq 0$ implica $e_i M e_k = 0$.

Sea $T_1$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $M_1$ y sea $T_2$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $M_2$. Sea $P_1$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y sea $W = \sum_{i=1}^{l} c_i d_i$ un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$, donde $\{c_1, \ldots, c_l, d_1, \ldots, d_l\} = T_2$.

Supongamos que $e_k P_1 e_k = 0$ y consideremos el potencial $P = P_1 + W$ en $\mathcal{F}_S(M_1 \oplus M_2)$. Como $e_k P e_k = 0$, entonces:

$$\mu_k(P) = \mu_k(P_1) + W$$

está definido. Notemos que:

$$\mu_k M = \mu_k M_1 \oplus M_2$$

Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$. Recordemos que $\widetilde{\mu}_k(\mathcal{N})_{|\mathcal{F}_S(\mu_k M_1)}$ es una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(\mu_k M_1), \mu_k P_1)$. Recordemos también que $\mathcal{N}_{|\mathcal{F}_S(M_1)}$ es una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M_1), P_1)$.

**Lema 9.9.** *Se cumple la siguiente igualdad:* $\widetilde{\mu}_k(\mathcal{N}_{|\mathcal{F}_S(M_1)}) = (\widetilde{\mu}_k(\mathcal{N}))_{|\mathcal{F}_S(\mu_k M_1)}$.

*Demostración.* Sea $T_1$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $(M_1)_0$ y sea $T_2$ un conjunto de generadores $Z$-libres de $(M_2)_0$. Entonces

$$W = \sum_{s=1}^{l} c_s d_s$$

donde $T_2 = \{c_1, \ldots, c_l, d_1, \ldots, d_l\}$. Notemos que $e_k T_2 = T_2 e_k = 0$. Se tiene:

$$\mathcal{N}_{|\mathcal{F}_S(M_1)} = (N_{|\mathcal{F}_S(M_1)}, V)$$

Sea $N' = N|_{\mathcal{F}_S(M_1)}$. Para $i \neq k$ tenemos $\overline{N'}_i = N'_i = N_i = \overline{N}_i$. Por otra parte:

$$N'_{out} = \bigoplus_{b \in (T_1)_k} D_k \otimes_F N_{\sigma(b)} = \bigoplus_{b \in T_k} D_k \otimes_F N_{\sigma(b)} = N_{out}$$

Similarmente $N'_{in} = N_{in}$. Sean $\alpha' : N'_{in} \to N'_k$, $\beta' : N'_k \to N'_{out}$ y $\gamma' : N'_{out} \to N'_{in}$ los morfismos asociados a la representación $\overline{N'}$. Claramente $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$. Además:

$$Y_{[bra]}(P_1 + W) = Y_{[bra]}(P_1)$$

y por ende $\gamma = \gamma'$. Se sigue que $\overline{N'}_k = \overline{N}_k$. Por lo tanto, $\overline{N'} = \overline{N}$ como $S$-módulos izquierdos. Como la acción de $\mathcal{F}_S(\mu_k M_1)$ en $\overline{N'}$ y $\overline{N}$ es la misma, se tiene la afirmación probada.

□

**Proposición 9.7.** *Sea $(\mathcal{F}_S(M), P)$ un álgebra con potencial donde $P^{(2)}$ es escindable. Supongamos que $e_k P e_k = 0$ y $(M \otimes_S e_k M)_{cyc} = 0$. Dada una representación decorada $\mathcal{N}$ de $(\mathcal{F}_S(M), P)$, la representación decorada de $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})_{red}$ es derecho-equivalente a $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}_{red})_{red}$.*

*Demostración.* Por el Teorema 7.1, existe un automorfismo unitriangular

$$\varphi_1 : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$$

y una descomposición de $S$-bimódulos $M = M_1 \oplus \Xi_2(P)$ tal que $\varphi_1(P)$ es cíclicamente equivalente a $Q + W_1$ donde $Q$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $W_1$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(\Xi_2(P))$. Entonces $\mu_k(\varphi_1(P))$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(Q) + W_1$. Del Teorema 8.1, se infiere la existencia de un automorfismo unitriangular:

$$\varphi_2 : \mathcal{F}_S(\mu_k M_1) \to \mathcal{F}_S(\mu_k M_1)$$

y una descomposición de $S$-bimódulos

$$\mu_k M_1 = M_2 \oplus \Xi_2(\mu_k(Q))$$

tal que $\varphi_2(\mu_k Q) = Q_1 + W_2$ donde $Q_1$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_2)$ y $W_2$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(\Xi_2(\mu_k(Q)))$. Sea $\hat{\varphi}_2$ el automorfismo unitriangular de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ que extiende a $\varphi_2$ y tal que $\hat{\varphi}_2$ es la identidad en $\mathcal{F}_S(\Xi_2(P))$. Consideremos ahora el automorfismo $\hat{\varphi}_1$ de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$ dado por el Teorema 9.1. Entonces:

(a) $\widehat{\varphi}_1(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\mu_k(\varphi_1(P))$.

(b) Existe un isomorfismo de representaciones decoradas $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}) \to \widetilde{\mu_k}({}^{\varphi_1}\mathcal{N})$.

donde ${}^{\varphi_1}\mathcal{N}$ denota la representación $\widehat{\mathcal{N}}$ (para enfatizar la dependencia de $\varphi_1$). Se tiene que $\widehat{\varphi_2}\widehat{\varphi}_1(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\widehat{\varphi}_2\mu_k(\varphi_1(P))$ y el último potencial es cíclicamente equivalente a $\widehat{\varphi}_2(\mu_k Q + W_1) = \varphi_2(\mu_k(Q)) + W_1$; además, el último potencial es cíclicamente equivalente a $Q_1 + W_1 + W_2$ y

$$\mu_k M = M_2 \oplus \Xi_2(\mu_k Q) \oplus \Xi_2(P)$$

donde $Q_1$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_2)$ y $W_1 + W_2$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(\Xi_2(\mu_k Q) \oplus \Xi_2(P))$. Entonces la representación $(\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N}))_{red}$ es isomorfa a ${}^{\hat{\varphi}_2}(\widetilde{\mu_k}({}^{\varphi_1}\mathcal{N}))_{|\mathcal{F}_S(M_2)}$. Por el Lema 9.9, ${}^{\widehat{\varphi_2}}\widetilde{\mu_k}({}^{\varphi_1}\mathcal{N})_{|\mathcal{F}_S(\mu_k M_1)}$ es isomorfa a ${}^{\widehat{\varphi_2}}\widetilde{\mu_k}({}^{\varphi_1}\mathcal{N}_{|\mathcal{F}_S(M_1)})$. Se sigue la afirmación. □

**Definición 9.4.** Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de un álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$ donde $P$ es reducido y $\mu_k P$ es escindable. Se define la mutación de la representación decorada $\mathcal{N}$ en $k$ como:

$$\mu_k(\mathcal{N}) := \widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})_{red}$$

**Corolario 9.1.** *La correspondencia $\mathcal{N} \mapsto \mu_k(\mathcal{N})$ es una transformación bien definida en el conjunto de clases de equivalencia-derecha de representaciones decoradas de álgebras con potencial reducido.*

Uno de los resultados centrales de [10] y de [18] son los Teoremas 10.13 y 12.11 donde se prueba que la mutación, a nivel de representaciones decoradas, también es involutiva. Veamos que este resultado se sigue cumpliendo en este contexto.

**Teorema 9.2.** *La mutación $\mu_k$ de representaciones decoradas es una involución; esto es, para cada representación decorada $\mathcal{N}$ de un álgebra con potencial reducido $(\mathcal{F}_S(M), P)$, la representación decorada $\mu_k^2(\mathcal{N})$ es derecho-equivalente a $\mathcal{N}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{N} = (N, V)$ una representación decorada de $(\mathcal{F}_S(M), P)$. Primero notemos que:

$$\begin{aligned} \mu_k^2(\mathcal{N}) &= \mu_k\left(\mu_k(\mathcal{N})\right) \\ &= \widetilde{\mu_k}(\mu_k\left(\mathcal{N}\right))_{red} \\ &= \widetilde{\mu_k}\left(\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})_{red}\right)_{red} \end{aligned}$$

En vista de la Proposición 9.7, $\widetilde{\mu_k}\left(\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})_{red}\right)_{red}$ es derecho-equivalente a $\widetilde{\mu_k}\left(\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})\right)_{red} = \widetilde{\mu_k}^2(\mathcal{N})_{red}$. Por lo tanto, basta mostrar que $\widetilde{\mu_k}^2\left(\mathcal{N}\right)_{red}$ es derecho-equivalente a $\mathcal{N}$. Escribamos la representación $\widetilde{\mu_k}^2\left(\mathcal{N}\right)$ como $\left(\overline{\overline{N}}, \overline{\overline{V}}\right)$ y esta representación está asociada al álgebra con potencial $\left(\mathcal{F}_S(\mu_k^2 M), \mu_k^2 P\right)$. Por la Proposición 8.5 y por el Teorema 8.3 se tiene

$$\begin{aligned} \mu_k^2 M &= M \oplus M e_k M \oplus M^* e_k({}^*M) \\ \mu_k^2 P &= P + \sum_{bt,sa} \left([btsa][(sa)^*({}^*bt)] + [(sa)^*({}^*(bt))](bt)(sa)\right) \end{aligned}$$

Por el Teorema 8.3, existe un automorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{F}_S(\mu_k^2 M) \to \mathcal{F}_S(\mu_k^2 M)$ tal que $\psi(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a $P \oplus W$ donde $W$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S\left(Me_kM \oplus M^* e_k(^*M)\right)$. Dicho automorfismo $\psi$ se restringe a un automorfismo $\psi_0 : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\psi_0(\underline{b}) = -b$ para cada $b \in T_k$ y $\psi_0(x) = x$ para cada $x \in T \setminus T_k$. Entonces la representación $\widetilde{\mu_k}(\mathcal{N})_{red}$ se puede realizar como $(\overline{\overline{N}}, \overline{\overline{V}})$ y esta representación está asociada al álgebra con potencial $(\mathcal{F}_S(M), P)$; además la acción de $\mathcal{F}_S(M)$ en $\overline{\overline{N}}$ está dada por $u \cdot n = \psi_0^{-1}(u)n$.

Veamos que $\overline{\alpha} : N_{out} = \overline{N}_{in} \longrightarrow \overline{N}_k$ es la $F$-transformación lineal tal que para cada $b \in T_k$ y $r \in L(k)$, $\overline{\alpha}\xi_{br} = r^{-1}\overline{N}(^*b)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\xi_{br}(n) &= \sum_{w \in L(k)} \overline{\alpha}\xi_{w(^*b)}\pi_{w(^*b)}\xi_{br}(n) \\
&= \sum_{w \in L(k)} \overline{\alpha}\xi_{w(^*b)}\pi'_{w(^*b)}(r^{-1} \otimes n) \\
&= \sum_{w \in L(k)} \overline{\alpha}\xi_{w(^*b)}w^*(r^{-1})n \\
&= \sum_{w \in L(k)} \overline{N}(w(^*b))(w^*(r^{-1})n) \\
&= \overline{N}\left(\sum_{w \in L(k)} w^*(r^{-1})w(^*b)\right)(n) \\
&= \overline{N}(r^{-1}(^*b))(n) \\
&= r^{-1}\overline{N}(^*b)(n)
\end{aligned}$$

Probemos que $ker(\overline{\alpha}) = \mathrm{im}(\beta)$.

Sea $x \in N_{out}$, entonces $x = \sum_{b \in T_k, r \in L(k)} \xi_{br}\pi_{br}(x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(x) &= \sum_{b \in T_k, r \in L(k)} \overline{\alpha}\xi_{br}\pi_{br}(x) \\
&= \sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\overline{N}(^*b)\left(\pi_{br}(x)\right)
\end{aligned}$$

así que $\overline{\alpha}(x) = 0$ si y sólo si $\Pi_i\left(\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\overline{N}(^*b)\left(\pi_{br}(x)\right)\right) = 0$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. En consecuencia

$$\Pi_1\left(\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\overline{N}(^*b)\left(\pi_{br}(x)\right)\right) = -\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\pi_1 p\xi_{be_k}\pi_{br}(x) \tag{9.31}$$

$$\Pi_2\left(\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\overline{N}(^*b)\left(\pi_{br}(x)\right)\right) = -\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\gamma'\xi_{be_k}\pi_{br}(x) \tag{9.32}$$

luego si $\overline{\alpha}(x) = 0$ entonces 9.32 implica que

$$\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}\xi_{be_k}\pi_{br}(x) \in \ker(\gamma) \tag{9.33}$$

Por otro lado, si $\overline{\alpha}(x) = 0$ entonces por 9.31, $\sum_{b \in T_k, r \in L(k)} r^{-1}p\xi_{be_k}\pi_{br}(x) \in \mathrm{im}(\beta)$. Notemos que

$$\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}p\xi_{be_k}\pi_{br}(x) = p\left(\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\xi_{be_k}\pi_{br}(x)\right)$$

Usando 9.33 y el hecho de que $p$ es inverso izquierdo de la inclusión inclusión $j : ker(\gamma) \to N_{out}$ se obtiene

$$p\left(\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\xi_{be_k}\pi_{br}(x)\right) = \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\xi_{be_k}\pi_{br}(x).$$

Finalmente, notemos que

$$\sum_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}\xi_{be_k}\pi_{br}(x) = \sum_{b\in T_k, r\in L(k)} \xi_{br}\pi_{br}(x)$$

y por 9.19 $\sum\limits_{b\in T_k, r\in L(k)} \xi_{br}\pi_{br}(x) = x$. Por lo tanto, $\overline{\alpha}(x) = 0$ si y sólo si $\sum\limits_{b\in T_k, r\in L(k)} r^{-1}p\xi_{be_k}\pi_{br}(x) = x \in \mathrm{im}(\beta)$. De lo anterior se infiere la igualdad:

$$ker(\overline{\alpha}) = \mathrm{im}(\beta) \tag{9.34}$$

Consecuentemente, $\Pi_1\overline{\alpha}(x) = -\pi_1 p$ y $\Pi_2\overline{\alpha} = -\gamma'$. Por lo tanto

$$\mathrm{im}(\overline{\alpha}) = \frac{\ker(\gamma)}{\mathrm{im}(\beta)} \oplus \mathrm{im}(\gamma) \oplus \{0\} \oplus \{0\} \tag{9.35}$$

Veamos ahora que $\overline{\beta} : \overline{N}_k \longrightarrow \overline{N}_{out} = N_{in}$ es la $F$-transformación lineal tal que para cada $r \in L(k)$ y $a \in_k T$, $\pi_{ra}\overline{\beta} = \overline{N}(a^*)r^{-1}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\pi_{ra}\overline{\beta}(n) &= \sum_{w\in L(k)} \pi_{ra}\xi_{a^*w}\pi_{a^*w}\overline{\beta}(n)\\
&= \sum_{w\in L(k)} \pi_{ra}\xi_{a^*w}\overline{N}(a^*w)(n)\\
&= \sum_{w\in L(k)} \pi'_{ra}\left(w^{-1}\otimes \overline{N}(a^*w)(n)\right)\\
&= \overline{N}\left(a^*\sum_{w\in L(k)} r^*(w^{-1})w\right)(n)
\end{aligned}$$

Por la Observación 9.3, $\sum\limits_{w\in L(k)} r^*(w^{-1})w = r^{-1}$. Se sigue que

$$\pi_{ra}\overline{\beta}(n) = \overline{N}(a^*r^{-1})(n) = \overline{N}(a^*)(r^{-1}n)$$

Probemos ahora la siguiente igualdad:

$$\ker(\overline{\beta}) = \frac{\ker(\gamma)}{\mathrm{im}(\beta)} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus V_k \tag{9.36}$$

Sea $w \in \overline{N}_k$, entonces $w = \sum\limits_{l=1}^{4} J_l\Pi_l(w)$. Supongamos ahora que $\overline{\beta}(w) = 0$, entonces $\pi_{ra}\overline{\beta}(w) = 0$ para cada $r \in L(k)$ y $a \in_k T$. Usando el Lema 9.2 se obtienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
0 = \pi_{ra}\overline{\beta}(w) &= \sum_{l=1}^{4} \pi_{ra}\overline{\beta}\left(J_l \Pi_l(w)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{4} \overline{N}(a^*)\left(J_l r^{-1}\Pi_l(w)\right) \\
&= \overline{N}(a^*)J_2\left(r^{-1}\Pi_2(w)\right) + \overline{N}(a^*)J_3\left(r^{-1}\Pi_3(w)\right) \\
&= c_k^{-1}\pi_{e_k a} i\left(r^{-1}\Pi_2(w)\right) + c_k^{-1}\pi_{e_k a} j'\sigma_2\left(r^{-1}\Pi_3(w)\right) \\
&= c_k^{-1}\pi_{ra}\left(i\Pi_2(w)\right) + c_k^{-1}\pi_{ra}\left(j'\sigma_2\Pi_3(w)\right) \\
&= c_k^{-1}\pi_{ra}\left(i\Pi_2(w) + j'\sigma_2\Pi_3(w)\right)
\end{aligned}
$$

Como esto es cierto para todas las proyecciones $\pi_{ra}$, entonces

$$0 = i\Pi_2(w) + j'\sigma_2\Pi_3(w) = \Pi_2(w) + \sigma_2\Pi_3(w) \tag{9.37}$$

Se tiene que $\Pi_2(w) \in \mathrm{im}(\gamma)$. Aplicando $\pi_2$ a 9.37, donde $\pi_2 : \ker(\alpha) \to \frac{\ker(\alpha)}{\mathrm{im}(\gamma)}$ es la proyección canónica, se obtiene $\pi_2\sigma_2\Pi_3(w) = 0$. Como $\pi_2\sigma_2 = id_{ker(\alpha)/im(\gamma)}$, entonces $\Pi_3(w) = 0$. Sustituyendo $\Pi_3(w) = 0$ en 9.37 se infiere que $\Pi_2(w) = 0$. Consecuentemente

$$\ker(\overline{\beta}) = \tfrac{\ker(\gamma)}{\mathrm{im}(\beta)} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus V_k$$

lo que completa la prueba de 9.36. También se tiene la siguiente igualdad

$$\mathrm{im}(\overline{\beta}) = \ker(\alpha) \tag{9.38}$$

Probemos ahora la siguiente fórmula

$$\overline{\gamma} = c_k\beta\alpha \tag{9.39}$$

Primero, calculemos $Y_{[a^*w(^*b)]}(\mu_k P)$ donde $a \in_k T, b \in T_k$, $w \in L(k)$ y $\Delta_k$ es el siguiente potencial

$$\Delta_k = \sum_{sa_1 \in_k \hat{T}, b_1 t \in \tilde{T}_k} [b_1 t s a_1]((sa_1)^*)(^*(b_1 t))$$

Notemos que $\Delta_k$ es cíclicamente equivalente al siguiente potencial

$$\Delta_k' = \sum_{sa_1, b_1 t} a_1^* s^{-1} t^{-1} (^*b_1)[b_1 t s a_1].$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\Delta_k' &= \sum_{sa_1, b_1 t}\ \sum_{v, v_1 \in L(k)} (v_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})v^*(ts)a_1^* v_1^{-1}(^*b_1)[b_1 v a_1] \\
&= \sum_{sa_1, b_1}\ \sum_{v, v_1, t \in L(k)} (v_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1})v^*(ts)a_1^* v_1^{-1}(^*b_1)[b_1 v a_1]
\end{aligned}
$$

Recordemos de la Proposición 7.5:

$$\sum_{t \in L(k)} v^*(ts)(v_1^{-1})^*(s^{-1}t^{-1}) = \delta_{v, v_1}$$

y por ende

$$
\begin{aligned}
\Delta_k' &= \sum_{sa_1, b_1}\ \sum_{v \in L(k)} a_1^* v^{-1}(^*b_1)[b_1 v a_1] \\
&= \sum_{sa_1, b_1}\ \sum_{v, r \in L(k)} r^*(v^{-1})a_1^* r(^*b_1)[b_1 v a_1]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\rho\left(\Delta_k'\right) = \sum_{sa_1,b_1} \sum_{v,r\in L(k)} r^*(v^{-1})[a_1^* r(^*b_1)][b_1 v a_1]$$

Fijemos $a \in_k T$, $w \in L(k)$ y $b \in T_k$. Entonces

$$X_{[a^* w(^*b)]}\left(\rho(\Delta_k')\right) = \sum_{s,v\in L(k)} w^*(v^{-1})[bva]$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Y_{[a^* w(^*b)]}(\mu_k P) &= \rho^{-1}\left(X_{[a^* w(^*b)]}(\rho(\mu_k P))\right) \\ &= \rho^{-1}\left(X_{[a^* w(^*b)]}(\rho(\Delta_k'))\right) \\ &= \rho^{-1}\left(X_{[a^* w(^*b)]}(\rho(\Delta_k'))\right) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$Y_{[a^* w(^*b)]}\left(\mu_k P\right) = \sum_{s,v\in L(k)} w^*(v^{-1})[bva] = c_k \sum_{v\in L(k)} w^*(v^{-1})[bva]$$

De lo anterior se infieren las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \pi_{bt}\overline{\gamma}\xi_{sa}(n) &= \sum_{w\in L(k)} (t^{-1})^*(sw) Y_{[a^* w(^*b)]}\left(\mu_k P\right) n \\ &= c_k \sum_{v,w\in L(k)} (t^{-1})^*(sw) w^*(v^{-1})[bva]n \\ &= c_k \sum_{v\in L(k)} (t^{-1})^* \left(s \sum_{w\in L(k)} w^*(v^{-1})w\right)[bva]n \\ &= c_k \sum_{v\in L(k)} (t^{-1})^*(sv^{-1})[bva]n \end{aligned}$$

Por 9.3, $(t^{-1})^*(sv^{-1}) = v^*(ts)$. Luego

$$\begin{aligned} \pi_{bt}\overline{\gamma}\xi_{sa}(n) &= c_k \sum_{v\in L(k)} v^*(ts)[bva]n \\ &= c_k \left[b \sum_{v\in L(k)} v^*(ts) va\right] n \\ &= c_k[btsa]n \\ &= c_k btsan \\ &= c_k \pi_{bt}\beta\alpha\xi_{sa}(n) \end{aligned}$$

Como consecuencia directa de 9.34, 9.35, 9.36, 9.38 y 9.39 se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} &\ker(\overline{\alpha}) = \mathrm{im}(\beta), \mathrm{im}(\overline{\alpha}) = \frac{\ker(\gamma)}{\mathrm{im}(\beta)} \oplus \mathrm{im}(\gamma) \oplus \{0\} \oplus \{0\}, \\ &\ker(\overline{\beta}) = \frac{\ker(\gamma)}{\mathrm{im}(\beta)} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus V_k, \mathrm{im}(\overline{\beta}) = \ker(\alpha), \\ &\ker(\overline{\gamma}) = \ker(\beta\alpha), \mathrm{im}(\overline{\gamma}) = \mathrm{im}(\beta\alpha). \end{aligned} \tag{9.40}$$

Por lo tanto

$$\overline{\overline{V}}_k = \frac{\ker(\overline{\beta})}{\ker(\overline{\beta})\cap\mathrm{im}(\overline{\alpha})} = V_k$$

y así $\overline{\overline{V}} = V$.

Por otro lado

$$\overline{\overline{N}}_k = \tfrac{\ker(\overline{\gamma})}{\mathrm{im}(\overline{\beta})} \oplus \mathrm{im}(\overline{\gamma}) \oplus \tfrac{\ker(\overline{\alpha})}{\mathrm{im}(\overline{\gamma})} \oplus \overline{V}_k$$

y por 9.40

$$\overline{\overline{N}}_k = \tfrac{\ker(\beta\alpha)}{\ker(\alpha)} \oplus \mathrm{im}(\beta\alpha) \oplus \tfrac{\mathrm{im}(\beta)}{\mathrm{im}(\beta\alpha)} \oplus \tfrac{\ker(\beta)}{\ker(\beta)\cap\mathrm{im}(\alpha)}$$

Ahora hagamos las siguientes observaciones:

(a) el morfismo $\alpha$ induce un isomorfismo $\ker(\beta\alpha)/\ker(\alpha) \xrightarrow{\theta_1} \ker(\beta) \cap \mathrm{im}(\alpha)$;

(b) el morfismo $\beta$ induce un isomorfismo $\mathrm{im}(\alpha)/(\ker(\beta) \cap \mathrm{im}(\alpha)) \xrightarrow{\theta_2} \mathrm{im}(\beta\alpha)$;

(c) el morfismo $\beta$ induce un isomorfismo $N_k/(\ker(\beta) + \mathrm{im}(\alpha)) \xrightarrow{\theta_3} \mathrm{im}(\beta)/\mathrm{im}(\beta\alpha)$.

(d) existe un isomorfismo $\ker(\beta)/(\ker(\beta) \cap \mathrm{im}(\alpha)) \xrightarrow{\theta_4} (\ker(\beta) + \mathrm{im}(\alpha))/\mathrm{im}(\alpha)$.

Usando estos isomorfismos, podemos identificar $\overline{\overline{N}}_k$ con el siguiente espacio

$$\overline{\overline{N}}_k \xrightarrow{f} (\ker(\beta) \cap \mathrm{im}(\alpha)) \oplus \tfrac{\mathrm{im}(\alpha)}{\ker(\beta)\cap\mathrm{im}(\alpha)} \oplus \tfrac{N_k}{\ker(\beta)+\mathrm{im}(\alpha)} \oplus \tfrac{\ker(\beta)+\mathrm{im}(\alpha)}{\mathrm{im}(\alpha)}$$

a través del morfismo

$$f = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 \end{bmatrix}$$

Se tienen proyecciones canónicas

$$\overline{\pi}_1 : \ker(\beta\alpha) \to \frac{\ker(\beta\alpha)}{\ker(\alpha)}$$
$$\overline{\pi}_2 : \mathrm{im}(\beta) \to \frac{\mathrm{im}(\beta)}{\mathrm{im}(\beta\alpha)}$$
$$\overline{\pi}_3 : \mathrm{im}(\alpha) \to \frac{\mathrm{im}(\alpha)}{\ker(\beta) \cap \mathrm{im}(\alpha)}$$
$$\overline{\pi}_4 : N_k \to \frac{N_k}{\ker(\beta) + \mathrm{im}(\alpha)}$$
$$\overline{\pi}_5 : \ker(\beta) + \mathrm{im}(\alpha) \to \frac{\ker(\beta) + \mathrm{im}(\alpha)}{\mathrm{im}(\alpha)}$$

e inclusiones

$$\bar{i}_1 : \mathrm{im}(\overline{\gamma}) \to N_{out}$$
$$\bar{i}_2 : \ker(\beta\alpha) \to N_{in}$$
$$\bar{i}_3 : \mathrm{im}(\beta\alpha) \to N_k$$
$$\bar{j} : \ker(\overline{\alpha}) \to N_{out}$$

Ahora escogemos morfismos escindantes de la siguiente manera.

(a) Sea $\overline{p} : N_{in} \to \ker(\beta\alpha)$ un morfismo de $D_k$-módulos izquierdos tal que $\overline{p}\bar{i}_2 = id_{\ker(\beta\alpha)}$.

(b) Sea $\overline{\sigma} : \mathrm{im}(\beta)/\mathrm{im}(\beta\alpha) \to \mathrm{im}(\beta)$ un morfismo de $D_k$-módulos izquierdos tal que $\overline{\pi}_2\overline{\sigma} = id_{\mathrm{im}(\beta)/\mathrm{im}(\beta\alpha)}$.

Para cada $a \in_k T$, existe una $F$-transformación lineal

$$\overline{\overline{N}}(a) : N_{\tau(a)} \to (\ker(\beta) \cap \operatorname{im}(\alpha)) \oplus \frac{\operatorname{im}(\alpha)}{\ker(\beta)\cap\operatorname{im}(\alpha)} \oplus \frac{N_k}{\ker(\beta)+\operatorname{im}(\alpha)} \oplus \frac{\ker(\beta)+\operatorname{im}(\alpha)}{\operatorname{im}(\alpha)}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_1\overline{\overline{N}}(a) &= -\theta_1\overline{\pi}_1\overline{p}\xi_{e_k a}\\
\overline{\Pi}_2\overline{\overline{N}}(a) &= -\theta_2^{-1}\overline{\gamma}'\xi_{e_k}a\\
\overline{\Pi}_3\overline{\overline{N}}(a) &= \overline{\Pi}_4\overline{\overline{N}}(a) = 0
\end{aligned}$$

Sea $n \in N_{\tau(a)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
-\theta_1\overline{\pi}_1\overline{p}\xi_{e_k a}(n) &= -\theta_1\left(\overline{p}\xi_{e_k a}(n) + \ker(\alpha)\right) = -\alpha\overline{p}\xi_{e_k a}(n)\\
-\theta_2^{-1}(\overline{\gamma}'(\xi_{e_k a}(n))) &= -\theta_2^{-1}(c_k\beta\alpha\xi_{e_k a}(n)) = -c_k\overline{\pi}_3\alpha\xi_{e_k a}(n)
\end{aligned}$$

luego el morfismo $\overline{\overline{N}}(a)$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_1\overline{\overline{N}}(a) &= -\alpha\overline{p}\xi_{e_k a}\\
\overline{\Pi}_2\overline{\overline{N}}(a) &= -c_k\overline{\pi}_3\alpha\xi_{e_k a}\\
\overline{\Pi}_3\overline{\overline{N}}(a) &= \overline{\Pi}_4\overline{\overline{N}}(a) = 0
\end{aligned} \tag{9.41}$$

Similarmente, para cada $b \in T_k$, existe una $F$-transformación lineal

$$\overline{\overline{N}}(b) : (\ker(\beta) \cap \operatorname{im}(\alpha)) \oplus \frac{\operatorname{im}(\alpha)}{\ker(\beta)\cap\operatorname{im}(\alpha)} \oplus \frac{N_k}{\ker(\beta)+\operatorname{im}(\alpha)} \oplus \frac{\ker(\beta)+\operatorname{im}(\alpha)}{\operatorname{im}(\alpha)} \longrightarrow N_{\sigma(b)}$$

dada por

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{N}}(b)\overline{J}_1 &= \overline{\overline{N}}(b)\overline{J}_4 = 0\\
\overline{\overline{N}}(b)\overline{J}_2 &= c_k^{-1}\pi_{be_k}\overline{i}_3\theta_2\\
\overline{\overline{N}}(b)\overline{J}_3 &= c_k^{-1}\pi_{be_k}\overline{j}\overline{\sigma}\theta_3
\end{aligned}$$

Para completar la prueba del Teorema 9.2, resta construir un isomorfismo de $F$-espacios vectoriales $\psi : \overline{\overline{N}}_k \to N_k$ tal que

$$\begin{aligned}
\psi\overline{\overline{N}}(a) &= \alpha\xi_{e_k a}\\
\pi_{be_k}\beta\psi &= \overline{\overline{N}}(b)
\end{aligned}$$

para cada $a \in_k T$ y $b \in T_k$. Elijamos secciones

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 : \operatorname{im}\alpha/(\ker\beta \cap \operatorname{im}\alpha) \to \operatorname{im}\alpha\\
&\sigma_2 : (\ker\beta + \operatorname{im}\alpha)/\operatorname{im}(\alpha) \to \ker\beta + \operatorname{im}\alpha\\
&\sigma_3 : N_k/(\ker\beta + \operatorname{im}\alpha) \to N_k
\end{aligned}$$

de manera que cumplan

$$\operatorname{im}(\sigma_1) = \alpha(\ker\overline{p}),\ \operatorname{im}(\sigma_2) \subseteq \ker(\beta),\ \operatorname{im}(\beta\sigma_3) = \operatorname{im}(\overline{\sigma})$$

Definamos $\psi : \overline{\overline{N}}_k \to N_k$ como

$$\psi = \begin{bmatrix} -i_1 & -c_k^{-1}i_2\sigma_1 & -c_k^{-1}\sigma_3 & -i_3\sigma_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
i_1 &: \ker(\beta)\cap \mathrm{im}(\alpha) \to N_k\\
i_2 &: \mathrm{im}(\alpha) \to N_k\\
i_3 &: \ker(\beta) + \mathrm{im}(\alpha) \to N_k
\end{aligned}$$

son las inclusiones. Mostremos ahora que

$$\psi\overline{\overline{N}}(a) = \alpha\xi_{e_k a} \tag{9.42}$$

Como $\overline{p} : N_{in} \to \ker(\beta\alpha)$ es retracción, entonces $N_{in} = \ker(\overline{p}) \oplus \ker(\beta\alpha)$. Por otro lado, como $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta\alpha)$ entonces existe un submódulo $L \subseteq \ker(\beta\alpha)$ tal que $\ker(\alpha)\oplus L = \ker(\beta\alpha)$. Por lo tanto, $N_{in} = \ker(\overline{p}) \oplus \ker(\alpha) \oplus L$.

Sea $n \in N_{\tau(a)}$, entonces $\xi_{e_k a}(n) \in N_{in}$. Se sigue que $\xi_{e_k a}(n) = n_1 + n_2 + n_3$, de manera única, para ciertos elementos $n_1 \ker(\overline{p})$, $n_2 \in \ker(\alpha)$ y $n_3 \in L$. En consecuencia:

$$\alpha\xi_{e_k a}(n) = \alpha(n_1 + n_2 + n_3) = \alpha(n_1 + n_3)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\left(\psi\overline{\overline{N}}(a)\right)(n) &= \psi\left(-\alpha\overline{p}\xi_{e_k a}(n), -c_k\overline{\pi}_3\alpha\xi_{e_k a}(n), 0, 0\right)\\
&= \alpha\overline{p}(n_1+n_2+n_3) + c_k^{-1}c_k\sigma_1\overline{\pi}_3\alpha(n_1+n_3)\\
&= \alpha\overline{p}(n_2+n_3) + \alpha(n_1)\\
&= \alpha(n_2+n_3) + \alpha(n_1)\\
&= \alpha(n_1+n_3)\\
&= \alpha\xi_{e_k a}(n)
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba de 9.42.

Veamos ahora que

$$\pi_{be_k}\beta\psi = \overline{\overline{N}}(b) \tag{9.43}$$

Sean $n_1 \in \ker(\beta)\cap\mathrm{im}(\alpha), n_2 \in \mathrm{im}(\alpha), n_3 \in N_k, n_4 \in \ker(\beta)+\mathrm{im}(\alpha)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{N}}(b)\left(n_1, \overline{\pi}_3(n_2), \overline{\pi}_4(n_3), \overline{\pi}_5(n_4)\right) &= c_k^{-1}\pi_{be_k}\overline{i}_3\theta_2\overline{\pi}_3(n_2) + c_k^{-1}\pi_{be_k}\overline{j}\overline{\sigma}\theta_3\overline{\pi}_4(n_3)\\
&= c_k^{-1}b\cdot n_2 + c_k^{-1}b\cdot n_3\\
&= c_k^{-1}\psi_0^{-1}(b)n_2 + c_k^{-1}\psi_0^{-1}(b)n_3\\
&= -c_k^{-1}bn_2 - c_k^{-1}bn_3
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\pi_{be_k}\beta\psi(n) = \pi_{be_k}\beta\left(-n_1 - c_k^{-1}i_2\sigma_1\overline{\pi}_3(n_2) - c_k^{-1}\sigma_3\overline{\pi}_4(n_3) - i_3\sigma_2\overline{\pi}_5(n_4)\right)$$

como $n_1 \in \ker(\beta)$ y $\mathrm{im}(\sigma_2) \subseteq \ker(\beta)$, entonces la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
\pi_{be_k}\beta(-c_k^{-1}i_2\sigma_1\overline{\pi}_3(n_2) - c_k^{-1}\sigma_3\overline{\pi}_4(n_3)) &= \pi_{be_k}\beta(-c_k^{-1}n_2 - c_k^{-1}n_3)\\
&= -c_k^{-1}bn_2 - c_k^{-1}bn_3
\end{aligned}$$

y 9.43 se sigue. Finalmente, extendemos $\psi$ a un isomorfismo de $F$-espacios vectoriales $\psi' : \overline{\overline{N}} \to N$ definido como la identidad en $\bigoplus_{i\neq k}\overline{\overline{N}}_i$.

□

# Capítulo 10

# Casi equivalencia de Morita

En este capítulo, $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-mod$_k$ denota la categoría de los $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulos izquierdos, de dimensión finita sobre $F$, módulo el ideal de los morfismos que se factorizan a través de sumas directas del $\mathcal{F}_S(M)$-módulo izquierdo simple asociado a $k$. Se prueba que existe una casi equivalencia de Morita, en el sentido de Ringel [21], entre las álgebras Jacobianas que están relacionadas mediante mutación.

Para cada $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulo izquierdo $N$, de dimensión finita sobre $F$, elegimos morfismos escindantes $(p_N, (\sigma_2)_N)$. Sea $u : N \to N^1$ un morfismo de $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulos izquierdos. Entonces $u$ induce $D_k$-morfismos lineales:

$$u_{out} : N_{out} \to N^1_{out}$$
$$u_{in} : N_{in} \to N^1_{in}$$

tal que para cada $a, a_1 \in_k T, r, r_1 \in L(k)$

$$\pi^1_{r_1 a_1} u_{in} \xi_{ra} = \delta_{r_1 a_1, ra} u$$

y para cada $b, b_1 \in T_k, r, r_1 \in L(k)$

$$\pi^1_{b_1 r_1} u_{out} \xi_{br} = \delta_{b_1 r_1, br} u$$

También se tienen $D_k$-morfismos lineales

$$\alpha : N_{in} \to N_k; \alpha_1 : N^1_{in} \to N^1_k$$
$$\beta : N_k \to N_{out}; \beta_1 : N^1_k \to N^1_{out}$$
$$\gamma : N_{out} \to N_{in}; \gamma_1 : N^1_{out} \to N^1_{in}$$

Se tienen las siguientes igualdades

$$u_k \alpha = \alpha_1 u_{in}; u_{out} \beta = \beta_1 u_k$$
$$u_{in} \gamma = \gamma_1 u_{out}$$

El morfismo $u_{out}$ induce $D_k$-morfismos lineales:

$$u_1 : \ker(\gamma) \to \ker(\gamma_1)$$
$$u_4 : \mathrm{im}(\beta) \to \mathrm{im}(\beta_1)$$

Similarmente, $u_{in}$ induce $D_k$-morfismos lineales:

$$u_2 : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathrm{im}(\gamma_1)$$
$$u_3 : \ker(\alpha) \to \ker(\alpha_1)$$

El morfismo $u_1$ induce un $D_k$-morfismo lineal:

$$\underline{u}_1 : \ker(\gamma)/\operatorname{im}(\beta) \to \ker(\gamma_1)/\operatorname{im}(\beta_1)$$

análogamente, el morfismo $u_3$ induce un $D_k$-morfismo lineal:

$$\underline{u}_3 : \ker(\alpha)/\operatorname{im}(\gamma) \to \ker(\alpha_1)/\operatorname{im}(\gamma_1)$$

así que se tiene un $D_k$-morfismo lineal:

$$h = \underline{u}_1 \oplus u_2 \oplus \underline{u}_3 : \overline{N}_k \to \overline{N^1}_k$$

Entonces definimos un morfismo de $S$-módulos izquierdos

$$\overline{u} : \overline{N} \to \overline{N^1}$$

como $\overline{u}_i = u_i$ para cada $i \neq k$ y $\overline{u}_k = h$.

**Definición 10.1.** Siguiendo a [11] diremos que $u \in \operatorname{Hom}_S({}_SL_1, {}_SL_2)$ está concentrado en $k$ si $u_i : e_iL_1 \to e_iL_2$ es el morfismo cero para toda $i \neq k$. Notemos que un morfismo de $\mathcal{F}_S(M)$-módulos izquierdos $u : L_1 \to L_2$ se factoriza a través de sumas directas del $\mathcal{F}_S(M)$-módulo izquierdo simple en $k$ si y sólo si $u$ está concentrado en $k$.

**Lema 10.1.** *Sea $u : N \to N^1$ un morfismo de $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulos izquierdos de dimensión finita sobre $F$. Entonces existe un morfismo de $S$-módulos izquierdos $\overline{\rho(u)} : \overline{N} \to \overline{N^1}$, concentrado en $k$, tal que $\overline{u} + \overline{\rho(u)}$ es un morfismo de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$-módulos izquierdos.*

*Demostración.* Sean $(p = p_N, \sigma_2 = (\sigma_2)_N)$ y $(p_1, \sigma_{2,1})$ los morfismos escindantes asociados a $N$ y $N^1$, respectivamente. Entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{im}(\gamma) \arrow[r] \arrow[d, "u_2"] & \ker(\alpha) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "u_3"] & \ker(\alpha)/\operatorname{im}(\gamma) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{u}_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}(\gamma_1) \arrow[r] & \ker(\alpha_1) \arrow[r, "\pi_2^1"] & \ker(\alpha_1)/\operatorname{im}(\gamma_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

luego $\pi_2^1(u_3\sigma_2 - \sigma_{2,1}\underline{u}_3) = \underline{u}_3\pi_2\sigma_2 - \underline{u}_3 = \underline{u}_3 - \underline{u}_3 = 0$. Por lo tanto, existe un morfismo de $S$-módulos izquierdos

$$\rho_1 = u_3\sigma_2 - \sigma_{2,1}\underline{u}_3 : \ker(\alpha)/\operatorname{im}(\gamma) \to \operatorname{im}(\gamma_1).$$

Similarmente, se tiene un diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\gamma) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "u_1"] & N_{out} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "u_{out}"] & \operatorname{im}(\gamma) \arrow[r] \arrow[d, "u_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\gamma_1) \arrow[r, "j_1"] & N_{out^1} \arrow[r, "\gamma_1"] & \operatorname{im}(\gamma_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por ende $(u_1p - p_1u_{out})j = u_1pj - p_1u_{out}j = u_1 - p_1j_1u_1 = u_1 - u_1 = 0$.

De lo anterior se infiere que existe un morfismo de $S$-módulos izquierdos:

$$\rho_2 : \operatorname{im}(\gamma) \to \ker(\gamma_1)$$

tal que $\rho_2\gamma = p_1u_{out} - u_1p$.
Definamos $\overline{\rho(u)} : \overline{N} \to \overline{N^1}$ como sigue: $\overline{\rho(u)}_i = 0$ para toda $i \neq k$ y $\overline{\rho(u)}_k : \overline{N}_k \to \overline{N^1}_k$ es el siguiente morfismo de $S$-módulos izquierdos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \pi_1^1\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos que el morfismo $\overline{u} + \overline{\rho(u)}$ es de hecho un morfismo de $\mathcal{F}_S(\mu_k M)$-módulos izquierdos.

Sea $n \in N_{\sigma(b)}$. Por un lado

$$\begin{aligned}\left(\overline{u}+\overline{\rho(u)}\right)\left(\overline{N}(^*b)(n)\right) &= \left(-\underline{u}_1\pi_1 p\xi_{be_k}(n)-\pi_1^1\rho_2\gamma\xi_{be_k}(n), -u_2\gamma\xi_{be_k}(n), 0\right)\\ &= (-\pi_1^1 u_1 p\xi_{be_k}(n)-\pi_1^1\rho_2\gamma\xi_{be_k}(n), -u_2\gamma\xi_{be_k}(n), 0)\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\overline{N^1}(^*b)(u_{\sigma(b)}(n)) &= (-\pi_1^1 p_1\xi_{be_k}(u_{\sigma(b)}(n)), -\gamma_1\xi_{be_k}(u_{\sigma(b)}(n)), 0)\\ &= (-\pi_1^1 p_1 u_{out}(\xi_{be_k}(n)), -\gamma_1 u_{out}(\xi_{be_k}(n)), 0)\\ &= (-\pi_1^1 u_1 p\xi_{be_k}(n)-\pi_1^1\rho_2\gamma\xi_{be_k}(n), -u_2\gamma\xi_{be_k}(n), 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(\overline{u}+\overline{\rho(u)}\right)\overline{N}(^*b)=\overline{N^1}(^*b)u_{\sigma(b)}$$

Ahora, para cada $a\in T_k$, $x\in\ker(\gamma)/\operatorname{im}(\gamma)$, $y\in\operatorname{im}(\gamma)$, $z\in\ker(\alpha)/\operatorname{im}(\gamma)$ se tiene

$$\begin{aligned}u_{\tau(a)}\overline{N}(a^*)(x,y,z) &= c_k^{-1}u_{\tau(a)}(\pi_{e_k a}i(y)+\pi_{e_k a}j'\sigma_2(z))\\ &= c_k^{-1}(\pi^1_{e_k a}i_1u_2(y)+\pi^1_{e_k a}j_1'u_3\sigma_2(z))\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}\overline{N^1}(a^*)\left(\overline{u}+\overline{\rho(u)}\right)(x,y,z) &= \overline{N^1}(a^*)\left((\overline{u}_1(x),u_2(y),\overline{u}_3(z))+(\pi_1^1\rho_2(y),\rho_1(z),0)\right)\\ &= c_k^{-1}\left(\pi^1_{e_k a}i_1u_2(y)+\pi^1_{e_k a}j_1'\sigma_{2,1}\underline{u}_3(z)+\pi^1_{e_k a}i_1\rho_1(z)\right)\\ &= c_k^{-1}\left(\pi^1_{e_k a}i_1u_2(y)+\pi^1_{e_k a}j_1'(\sigma_{2,1}\underline{u}_3(z)+\rho_1(z))\right)\\ &= c_k^{-1}\left(\pi^1_{e_k a}i_1u_2(y)+\pi^1_{e_k a}j_1'u_3\sigma_2(z)\right)\end{aligned}$$

de lo cual se infiere que $u_{\tau(a)}\overline{N}(a^*)=\overline{N^1}(a^*)\left(\overline{u}+\overline{\rho(u)}\right)$, como se quería probar. □

**Proposición 10.1.** *Existe un funtor fiel* $\widetilde{\mu}_k:\mathcal{F}_S(M)/R(P)-\mathrm{mod}_k\to\mathcal{F}_S(\mu_kM)/R(\mu_kP)-\mathrm{mod}_k$

*Demostración.* Primero definimos un funtor $G:\mathcal{F}_S(M)/R(P)-\mathrm{mod}\to\mathcal{F}_S(\mu_kM)/R(\mu_kP)-\mathrm{mod}_k$ como $G(N)=\overline{N}$ y dado un morfismo de $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulos izquierdos $u:N\to N^1$, definimos:

$$G(u)=\underline{\overline{u}+\overline{\rho(u)}}:\overline{N}\to\overline{N^1}$$

Si $v:N^1\to N^2$ es un morfismo de $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$-módulos izquierdos, entonces $G(vu)=\underline{\overline{vu}+\overline{\rho(vu)}}$. Como $\overline{\rho(u)}$ está concentrado en $k$ y $\overline{vu}=\overline{v}\,\overline{u}$, entonces $G(vu)=G(v)G(u)$. Por otra parte, $\overline{\rho(id_N)}=0$ y por ende $G(id_N)=\underline{id_{\overline{N}}}$ así que $G$ es un funtor covariante y de hecho es aditivo.
Notemos que $G(u)=0$ si y sólo si $\overline{u}+\overline{\rho(u)}$ está concentrado en $k$, lo cual ocurre si y sólo si $\overline{u}$ está concentrado en $k$ y esto último ocurre si y solamente si $u$ está concentrado en $k$, como se quería mostrar. □

Sea $\varphi:\mathcal{F}_S(M)\to\mathcal{F}_S(M_1)$ un isomorfismo de álgebras tal que $\varphi_{|S}=id_S$ y sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$.

En lo que sigue, $J(M,P)$ denotará al álgebra cociente $\mathcal{F}_S(M)/R(P)$.

El isomorfismo $\varphi$ induce un funtor

$$H_\varphi:J(M,P)-\mathrm{mod}\to J(M_1,\varphi(P))-\mathrm{mod}$$

dado como sigue. En objetos, $H_\varphi(N) = ^\varphi N$; esto es, $H_\varphi(N) = N$ como $S$-módulos izquierdos, y dado $n \in N$ y $z \in \mathcal{F}_S(M_1)$, $z \cdot n = \varphi^{-1}(z)n$. Claramente, $\mathrm{Hom}_{J(M,P)}(N, N^1) = \mathrm{Hom}_{J(M_1,\varphi(P))}(^\varphi N, ^\varphi N^1)$. Por lo tanto, definimos $H_\varphi(u) = u$. Esto da una equivalencia de categorías

$$H_\varphi : J(M,P) - \mathrm{mod} \to J(M_1, \varphi(P)) - \mathrm{mod} \tag{10.1}$$

Supongamos ahora que $M = M_1 \oplus M_2$ y $Q = Q_1 + W$ donde $Q_1$ es un potencial reducido en $\mathcal{F}_S(M_1)$ y $W$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M_2)$. Entonces el funtor restricción

$$\mathrm{res} : J(M,Q) - \mathrm{mod} \to J(M_1, Q_1) - \mathrm{mod} \tag{10.2}$$

también da una equivalencia de categorías.

Por otro lado, por el Teorema 8.3 existe una equivalencia-derecha

$$\psi : \mathcal{F}_S(\mu_k^2 M) \to \mathcal{F}_S(M \oplus M')$$

tal que $\psi(\mu_k^2 P)$ es cíclicamente equivalente a $P + W$ donde $W$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M')$. Entonces usando 10.1 y 10.2 se obtienen equivalencias de categorías

$$H_\psi : J(\mu_k^2 M, \mu_k^2 P) - \mathrm{mod} \to J(M \oplus M', P + W) - \mathrm{mod} \tag{10.3}$$

$$res : J(M \oplus M', P + W) - \mathrm{mod} \to J(M,P) - \mathrm{mod} \tag{10.4}$$

componiendo los funtores anteriores se obtiene una equivalencia de categorías

$$G(\psi) = resH_\psi : J(\mu_k^2 M, \mu_k^2 P) - \mathrm{mod} \to J(M,P) - \mathrm{mod} \tag{10.5}$$

En lo que sigue, dado $N \in J(M,P) - \mathrm{mod}$, denotaremos por $_S N$ el $S$-módulo izquierdo subyacente $N$. En particular, $_S G(\psi)(N) =_S N$.

**Lema 10.2.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $F$-categorías y sean $C : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $D : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ $F$-funtores. Supongamos que $D$ es fiel y que existe un isomorfismo natural $id_\mathcal{A} \cong DC$. Entonces $C$ es fiel y pleno. Más aún, si $D$ es pleno, entonces $id_\mathcal{B} \cong CD$.*

*Demostración.* Para cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ existe un isomorfismo

$$\phi_X : X \to DC(X)$$

Sea $u \in \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(X, X_1)$. Por naturalidad se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "u"] & DC(X) \arrow[d, "DC(u)"] \\ X_1 \arrow[r, "\phi_{X_1}"] & DC(X_1) \end{tikzcd}$$

entonces $\phi_{X_1} u = DC(u)\phi_X$. Por lo tanto, si $C(u) = 0$ entonces $u = 0$. Esto prueba que $C$ es fiel. Ahora sea $h \in \mathrm{Hom}_\mathcal{B}(C(X), C(X_1))$. Definamos

$$\lambda = \phi_{X_1}^{-1} D(h) \phi_X : X \to X_1$$

Como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "\lambda"] & DC(X) \arrow[d, "DC(\lambda)"] \\ X_1 \arrow[r, "\phi_{X_1}"] & DC(X_1) \end{tikzcd}$$

entonces $\lambda = \phi_{X_1}^{-1} DC(\lambda)\phi_X$. Por lo tanto $D(h) = DC(\lambda)$ y por ello $h = C(\lambda)$. Se sigue que $C$ es pleno. Supongamos ahora que $D$ es pleno. Como $id_{\mathcal{A}} \cong DC$ entonces para cada $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ existe un isomorfismo $\phi_{D(Y)} : D(Y) \to DCD(Y)$. Por ser $D$ pleno entonces $\phi_{D(Y)} = D(\psi_Y)$ para cierto $\psi_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, CD(Y))$. Veamos que $\psi_Y$ es natural. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y_1)$. Tenemos que probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\psi_Y"] \arrow[d, "f"] & CD(Y) \arrow[d, "CD(f)"] \\ Y_1 \arrow[r, "\psi_{Y_1}"] & CD(Y_1) \end{tikzcd} \tag{10.6}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D(Y) \arrow[r, "\phi_{D(Y)}"] \arrow[d, "D(f)"] & DCD(Y) \arrow[d, "DCD(f)"] \\ D(Y_1) \arrow[r, "\phi_{D(Y_1)}"] & DCD(Y_1) \end{tikzcd}$$

entonces $DCD(f)\phi_{D(Y)} = \phi_{D(Y_1)}D(f)$. Esto implica que $DCD(f)D(\psi_Y) = D(\psi_{Y_1})D(f)$. Como $D$ es fiel se sigue que $CD(f)\psi_Y = \psi_{Y_1} f$ y 10.6 conmuta, como se quería mostrar. □

Por 10.5, existe una equivalencia de categorías

$$G(\psi) = resH_\psi : J(\mu_k^2 M, \mu_k^2 P) - \mathrm{mod} \to J(M, P) - \mathrm{mod}$$

y este funtor induce un funtor $G(\psi)_k$ en la categoría cociente $J(M,P) - \mathrm{mod}_k$ la cual es la categoría $J(M,P) - \mathrm{mod}$, módulo el ideal de morfismos que se factorizan a través de sumas directas del módulo simple en $k$. Por lo tanto, se tiene un funtor

$$G(\psi)_k : J(\mu_k^2 M, \mu_k^2 P) - \mathrm{mod}_k \to J(M, P) - \mathrm{mod}_k$$

**Proposición 10.2.** *Existe un isomorfismo natural de funtores* $id_{J(M,P)-\mathrm{mod}_k} \cong G(\psi)_k \tilde{\mu}_k^2$.

*Demostración.* Sea $u \in \mathrm{Hom}_{J(M,P)-\mathrm{mod}_k}(N, N^1)$. Usando la construcción dada en la Proposición 10.1 se tiene

$$\tilde{\mu}_k(u) = \underline{\overline{u} + \overline{\rho(u)}} = u_1 : \overline{N} \to \overline{N^1}$$
$$\tilde{\mu}_k^2(u) = \tilde{\mu}_k(u_1) = \underline{\overline{u_1} + \overline{\rho(u_1)}} = u_2 : \overline{\overline{N}} \to \overline{\overline{N^1}}$$

Usando la notación del Teorema 9.2, se tienen isomorfismos de $J(\mu_k^2 M, \mu_k^2 P)$-módulos izquierdos

$$\psi' : G(\psi)_k \tilde{\mu}_k^2 N \to N$$
$$\psi_1' : G(\psi)_k \tilde{\mu}_k^2 N^1 \to N^1$$

Resta mostrar que el siguiente diagrama conmuta en $J(M,P) - \mathrm{mod}_k$:

$$\begin{tikzcd} G(\psi)_k \tilde{\mu}_k^2 N \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "u_2"] & N \arrow[d, "u"] \\ G(\psi)_k \tilde{\mu}_k^2 N \arrow[r, "\psi_1'"] & N^1 \end{tikzcd} \tag{10.7}$$

pero esto se sigue del hecho de que $u\psi' - \psi_1' u_2$ está concentrado en $k$. Esto completa la demostración. □

**Proposición 10.3.** *Existe un isomorfismo natural de funtores*

$$\tilde{\mu}_k G(\psi)_k \tilde{\mu}_k \cong id_{J(\mu_k M, \mu_k P)-\mathrm{mod}_k}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 10.1, el funtor

$$\tilde{\mu}_k : J(\mu_k M, \mu_k P) - \mathrm{mod}_k \to J(\mu_k^2 M, \mu_k^2 P) - \mathrm{mod}_k$$

es fiel, luego $G(\psi)_k \tilde{\mu}_k$ también es fiel. Por el Lema 10.2 y la Proposición 10.2, el funtor $\tilde{\mu}_k$ es pleno. Por lo tanto, $G(\psi)_k \tilde{\mu}_k$ es pleno. El resultado se sigue aplicando el Lema 10.2. □

**Teorema 10.1.** *Sea $P$ un potencial en $\mathcal{F}_S(M)$. Si $\mu_k P$ es escindable, entonces existe una equivalencia de categorías:*

$$\mu_k : J(M, P) - \mathrm{mod}_k \to J(\overline{\mu}_k M, \overline{\mu}_k P) - \mathrm{mod}_k$$

*Demostración.* Como $\mu_k P$ es escindable, entonces existe un isomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{F}_S(\mu_k M) \to \mathcal{F}_S(\overline{\mu}_k M \oplus M')$, con $\varphi_{|S} = id_S$, y tal que $\varphi(\mu_k P)$ es cíclicamente equivalente a $\overline{\mu}_k P + W$ donde $W$ es un potencial trivial en $\mathcal{F}_S(M')$. Por 10.1 y 10.2 existe una equivalencia de categorías

$$G(\varphi) : J(\mu_k M, \mu_k P) - \mathrm{mod} \to J(\overline{\mu}_k M, \overline{\mu}_k P) - \mathrm{mod}$$

que induce una equivalencia de categorías

$$G(\varphi)_k : J(\mu_k M, \mu_k P) - \mathrm{mod}_k \to J(\overline{\mu}_k M, \overline{\mu}_k P) - \mathrm{mod}_k$$

Por las Proposiciones 10.2 y 10.3, las categorías $J(M, P) - \mathrm{mod}_k$ y $J(\mu_k M, \mu_k P) - \mathrm{mod}_k$ son equivalentes; entonces, se obtiene una equivalencia de categorías

$$\mu_k : J(M, P) - \mathrm{mod}_k \to J(\overline{\mu}_k M, \overline{\mu}_k P) - \mathrm{mod}_k$$

como se deseaba mostrar.

□

# Capítulo 11

# Apéndice

En este capítulo veremos las relaciones de este trabajo con [9] y [18]. Para ello, primero establezcamos algunos resultados auxiliares.

**Proposición 11.1.** *Sea $P$ un potencial de la forma $a_1a_2\dots a_n \in M_{cyc}^{\otimes n}$ con $a_i \in M$, $i = 1, \dots, n$. Entonces:*

$$X_a^*(P) = \sum_{s\in L(\sigma(a))} \left(a^*(s^{-1}a_1)a_2\dots a_n + a^*(s^{-1}a_2)a_3\dots a_na_1 + \dots + a^*(s^{-1}a_n)a_1\dots a_{n-1}\right) s$$

*Demostración.* Podemos suponer que $a_i = t_im_ir_i$ con $r_i, t_i \in S$, $m_i \in T$. Entonces $P = t_1m_1r_1t_2m_2r_2\dots r_{n-1}t_nm_nr_n$. El potencial $P$ es cíclicamente equivalente a $P' = x_1x_2\dots x_n$, donde

$$x_1 = m_1r_1t_2, x_2 = m_2r_2t_3, \dots, x_{n-1} = m_{n-1}r_{n-1}t_n, x_n = m_nr_nt_1$$

donde cada $x_i \in M_0S$. Usando el Lema 5.1 se tiene

$$X_{a^*}(P) = X_{a^*}(P') = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_1x_2\dots x_n)s + \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_2x_3\dots x_nx_1)s + \dots + \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_nx_1\dots x_{n-1})s$$

Luego

$$\sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_1x_2\dots x_n)s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_1x_2\dots x_{n-1}m_nr_nt_1)s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(a_1\dots a_n)s$$

Similarmente

$$\sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_2x_3\dots x_nx_1)s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(t_2x_2x_3\dots x_nm_1r_1)s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(a_2\dots a_na_1)s$$
$$\sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_nx_1\dots x_{n-1})s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(x_nx_1\dots m_{n-1}r_{n-1}t_n)s = \sum_{s\in L(\sigma(a))} (sa)_*^*(a_na_1\dots a_{n-1})s$$

□

**Lema 11.1.** *Si $\alpha \in e_i\mathcal{F}_S(M)e_i$, $t \in D(i)$, entonces*

$$t\left(\sum_{w\in L(i)} w^{-1}\alpha w\right) = \left(\sum_{w\in L(i)} w^{-1}\alpha w\right)t$$

*Demostración.* Basta probar el resultado cuando $t = s^{-1}$ con $s \in L(i)$. Usando la Proposición 7.5 se tiene

$$\begin{aligned}
s^{-1}\left(\sum_{w\in L(i)} w^{-1}\alpha w\right) &= \sum_{w,r\in L(i)} (r^{-1})^*(s^{-1}w^{-1})r^{-1}\alpha w s s^{-1}\\
&= \sum_{w,r,r_1\in L(i)} r^{-1}\alpha(r^{-1})^*(s^{-1}w^{-1})r_1^*(ws)r_1 s^{-1}\\
&= \sum_{r,r_1\in L(i)} r^{-1}\alpha\left(\sum_{w\in L(i)}(r^{-1})^*(s^{-1}w^{-1})r_1^*(ws)\right)r_1 s^{-1}\\
&= \sum_{r,r_1\in L(i)} r^{-1}\alpha\delta_{r,r_1}r_1 s^{-1}\\
&= \sum_{r\in L(i)} r^{-1}\alpha r s^{-1}
\end{aligned}$$

□

**Proposición 11.2.** *Si $P = a_1 \dots a_n$ es un potencial, con $a_i \in M$ y $\psi \in M^*$, entonces*

$$X_\psi(a_1\dots a_n) = \sum_{s\in L}\psi_*(s^{-1}a_1\dots a_n)s + \sum_{s\in L}\psi_*(s^{-1}a_2\dots a_n a_1)s + \dots + \sum_{s\in L}\psi_*(s^{-1}a_n a_1\dots a_{n-1})s$$

*Demostración.* Basta probar el resultado cuando $\psi = a^*q$ con $q \in S$ y $a \in T$. Usando la Proposición 11.1 y Lema 11.1 se tiene

$$\begin{aligned}
X_{a^*q}(P) = X^P(a^*)q &= \sum_{s\in L(\sigma(a))} a_*^*(s^{-1}a_1a_2\dots a_n)sq + \dots + \sum_{s\in L(\sigma(a))} a_*^*(s^{-1}a_n a_1\dots a_{n-1})sq\\
&= \sum_{s\in L(\sigma(a))} a_*^*(qs^{-1}a_1\dots a_n)s + \dots + \sum_{s\in L(\sigma(a))} a_*^*(qs^{-1}a_n a_1\dots a_{n-1})s\\
&= \sum_{s\in L(\sigma(a))} (a^*q)_*(s^{-1}a_1\dots a_n)s + \dots + \sum_{s\in L(\sigma(a))} (a^*q)_*(s^{-1}a_n a_1\dots a_{n-1})s\\
&= \sum_{s\in L(\sigma(a))} \psi_*(s^{-1}a_1\dots a_n)s + \dots + \sum_{s\in L(\sigma(a))} \psi_*(s^{-1}a_n a_1\dots a_{n-1})s
\end{aligned}$$

y el resultado se sigue. □

Veamos ahora la relación con [9]. En [9] se toman grupos abelianos finitos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, $K$ un campo algebraicamente cerrado y se desarrolla una teoría de especies con potencial considerando como álgebra subyacente al producto finito de las álgebras de grupo $K[\Gamma_1] \times \dots \times K[\Gamma_n]$ y bimódulos sobre esta álgebra. Veremos que esta construcción puede ser descrita con la teoría de $S$-bimódulos $Z$-libremente generados y derivaciones cíclicas dada en este trabajo. Además, probaremos que $R(P)$ coincide con el ideal Jacobiano $J(P)$ en el sentido de [9]. Sea $S = K[\Gamma_1] \times \dots \times K[\Gamma_n]$ y tomemos $\sigma_i : K[\Gamma_i] \to S$ la inclusión. Denotemos por $e_i$ al elemento $\sigma(1_i)$ en donde $1_i$ es la unidad en $\Gamma_i$. Entonces la unidad 1 de $S$ se descompone como

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

Sea $M$ un $S$-bimódulo, entonces $M = \bigoplus_{i,j} e_i M e_j$.

**Definición 11.1.** Siguiendo a [9] diremos que $M$ es globalmente libre si siempre que $e_iMe_j \neq 0$, entonces

$$e_iMe_j = K[\Gamma_i] \otimes_K T_{i,j} \otimes_K K[\Gamma_j]$$

en donde $T_{i,j}$ es un $K$-espacio vectorial de dimensión finita. Supondremos que $(M \otimes_S M)_{cyc} = \{0\}$.

A un $S$-bimódulo globalmente libre le podemos asociar una matriz antisimétrica $Z = (z_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ en donde $z_{i,j} = 0$ si $e_iMe_j = e_jMe_i = 0$, y en otro caso $z_{i,j} = \dim_K T_{i,j} - \dim_K T_{j,i}$. Definamos una matriz $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mediante $b_{i,j} = z_{i,j}d_j$ en donde $d_j$ es el orden del grupo $\Gamma_j$. Notar que $B$ es una matriz anti-simetrizable con anti-simetrizador $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Consideremos ahora el carcaj $Q = (Q_0, Q_1)$ asociado al $S$-bimódulo $M$; esto es, $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ y existe $j \xrightarrow{\alpha} i$ si y sólo si $e_iMe_j \neq 0$. A cada camino no-trivial $i \xrightarrow{\gamma} j$ le corresponde el $K[\Gamma_j] - K[\Gamma_i]$-bimódulo

$$M_\gamma = M_{\alpha_s} \otimes_S \ldots \otimes_S M_{\alpha_1}$$

en donde $\gamma = \alpha_s \ldots \alpha_1$ con $a \xrightarrow{\alpha_u} b$ en $Q_1$ y $M_{\alpha_u} = e_bMe_a$. Sean $Z = \sum_{i=1}^{n} Ke_i$ y $M_0 = \bigoplus_{i,j} Ke_i \otimes_K T_{i,j} \otimes_K Ke_j$. Entonces $M$ está $Z$-libremente generado por $M_0$. Ahora, como en el Capítulo 4, consideremos la derivación

$$\Delta : T_S(M) \to T_S(M) \otimes_Z T_S(M)$$

tal que $\Delta(s) = 1 \otimes s - s \otimes 1$ para $s \in S$ y $\Delta(m) = 1 \otimes m$ para $m \in M_0$. Se define también un morfismo $F$-lineal $u : T_S(M) \otimes_Z T_S(M) \to T_S(M)$ como $u(a \otimes b) = cyc(ba)$. Se tiene así una derivación cíclica $h : T_S(M) \to \text{End}_F(T_S(M))$ dada por $h(a)(b) = u(\Delta(a)b)$ y la correspondiente derivada cíclica $\delta : T_S(M) \to T_S(M)$ dada por $\delta(a) = h(a)(1) = u(\Delta(a))$. La derivada cíclica anterior se puede extender a una derivada cíclica $\delta : \mathcal{F}_S(M) \to \mathcal{F}_S(M)$ de la siguiente manera. Si $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, con $f_n \in M^{\otimes n}$, entonces se define

$$\delta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(f_n)$$

Notemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ los elementos del grupo $\Gamma_i$ forman una base $K$-base $L(i)$, de $K[\Gamma_i]$, la cual de hecho es multiplicativa y por lo tanto cada base $L(i)$ satisface la condición (a) de la página 35 del Capítulo 7. Sea $L = \bigcup_{i=1}^{n} L(i)$. Entonces para cada potencial $P$ de $\mathcal{F}_S(M)$ se tiene

$$X_\psi(P) = \sum_{s\in L} \psi_*(s^{-1}\delta(P))s$$

De la Proposición 11.2 se tiene que para un potencial $P$ de la forma $P = a_1 \ldots a_n$ con $a_i \in M$:

$$X_\psi(P) = \sum_{s\in L} \psi_* \left(s^{-1}(a_1 \ldots a_n + a_2 \ldots a_n a_1 + \ldots + a_n a_1 \ldots a_{n-1})s\right)$$

Veamos ahora que cualquier $\psi \in M^*$ se puede escribir como $\psi(m) = \sum_{h\in L} \rho(mh)h^{-1}$ con $\rho : M \to K$ una $K$-transformación lineal. Sean

$$\theta : \text{Hom}_K(M, K) \to \text{Hom}_S(M, S)$$
$$\chi : \text{Hom}_S(M, S) \to \text{Hom}_K(M, K)$$

dados como sigue: $\theta(\xi)(m) = \sum_{h\in L} \xi(mh)h^{-1}$ y para $m \in M$ definimos $\chi(\psi)(m) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(\psi(me_i))$ donde $\epsilon_i : K[\Gamma_i] \to K$ es la $K$-transformación lineal que manda $\sum_{g\in\Gamma_i} c_g g$ en $c_e$. Veamos que para cada $\psi \in \text{Hom}_S(M_S, S_S)$ se tiene $\theta(\chi(\psi)) = \psi$. Sea $m \in Me_i$, entonces:

$$\theta(\chi(\psi))(m) = \sum_{h\in\Gamma_i} \chi(\psi)(mh)h^{-1} = \sum_{h\in\Gamma_i} \epsilon_i(\psi(mh))h^{-1} = \sum_{h\in\Gamma_i} \epsilon_i(\psi(m)h)h^{-1}$$

se tiene que $\psi(m) \in K[\Gamma_i]$ así que $\psi(m) = \sum_{g\in\Gamma_i} c_g g$ con $c_g \in K$. Por lo tanto $\epsilon_i(\psi(m)h) = \epsilon_i\left(\sum_{g\in\Gamma_i} c_g gh\right) = c_{h^{-1}}$. Entonces $\theta(\chi(\psi))(m) = \sum_{h\in\Gamma_i} c_{h^{-1}}h^{-1} = \psi(m)$.

De lo anterior se infiere que $R(P) = J(P)$ en el sentido de [9].

**Observación 11.1.** En [9] las matrices que se consideran son matrices antisimetrizables por la derecha. En [18], al igual que en esta tesis, las matrices que se consideran son antisimetrizables por la izquierda.

**Observación 11.2.** En nuestra versión del trabajo [9] la matriz $B$ asociada al $S$-bimódulo $M$ es la matriz transpuesta de la matriz asociada en [9].

**Observación 11.3.** De acuerdo a la Proposición 8.14 las matrices anti-simetrizables $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ que se realizan por medio de especies $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$, con $M$ un $S$-bimódulo $Z$-libremente generado, son aquellas matrices enteras $B = (b_{ij})$ tales que su anti-simetrizador $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ cumple que para cada $j$, $d_j$ divide a $b_{ij}$ para toda $i$. Toda esta clase de matrices $B$ satisfacen que $BD^{-1}$ es una matriz antisimétrica con coeficientes enteros, así que todo este tipo de matrices son realizables por $S$-bimódulos $Z$-libremente generados. Notemos también que toda la clase de matrices que aparecen en el Ejemplo 14.4 de [18] cumplen la condición de la Proposición 8.14 de la tesis y por lo tanto son realizables por $S$-bimódulos $Z$-libremente generados.

**Observación 11.4.** Veamos que la Proposición 6.6 de [9] es cierta únicamente en el caso en que $(d_i, d_j) = 1$ para toda $i \neq j$. En [9] a cada matriz antisimetrizable $B = (b_{i,j})$ con anti-simetrizador $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ se le asocia $S = K[\Gamma_1] \times K[\Gamma_2] \times \ldots \times K[\Gamma_n]$ en donde $\Gamma_i$ es el grupo cíclico de orden $d_i$. Para cada $b_{i,j} > 0$ se le asocia el $K[\Gamma_i]-K[\Gamma_j]$-bimódulo

$$M_{i,j} = K[\mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}]$$

como $d_i$ y $d_j$ dividen a $d_i b_{ij}$, el grupo cíclico $\mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}$ contiene un único subgrupo de orden $d_i$ al que podemos identificar con $\Gamma_i$ y un único subgrupo de orden $d_j$ al que podemos identificar con $\Gamma_j$. Entonces las inclusiones de $K[\Gamma_i]$ y $K[\Gamma_j]$ en $M_{i,j}$ inducen una estructura de $K[\Gamma_i] - K[\Gamma_j]$-bimódulo en $M_{i,j}$. Supongamos que con la estructura anterior $M_{i,j}$ es un $K[\Gamma_i] - K[\Gamma_j]$-bimódulo libre. Entonces existe un isomorfismo de $K[\Gamma_i] - K[\Gamma_j]$ bimódulos

$$\psi : M_{i,j} \to K[\Gamma_i] \otimes_K V \otimes_K K[\Gamma_j]$$

en donde $V$ es un $K$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_l\}$ una $K$-base para $V$, entonces el conjunto de elementos $g_i \otimes v_u \otimes g_j$ con $g_i \in \Gamma_i, g_j \in \Gamma_j$ y $v_u \in \mathcal{V}$ forman una $K$-base para $K[\Gamma_i] \otimes_K V \otimes_K K[\Gamma_j]$. Sea $h \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$. Como $\mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano entonces $hz = zh$ para toda $z \in \mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}$. Por lo tanto, como $\psi$ es un isomorfismo entonces $hw = wh$ para toda $w \in K[\Gamma_i] \otimes_K V \otimes_K K[\Gamma_j]$. En particular se tiene $h(e \otimes v_1 \otimes e) = (e \otimes v_1 \otimes e)h = e \otimes v_1 \otimes h$ lo que implica que $h = e$. En consecuencia, $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ es el subgrupo trivial.

Recíprocamente si $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \{e\}$ entonces $\Gamma_i\Gamma_j = \Gamma_i \times \Gamma_j$ y por lo tanto

$$K[\mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}] = K[\Gamma_i \times \Gamma_j]e \oplus K[\Gamma_i \times \Gamma_j]z_2 \oplus \ldots \oplus K[\Gamma_i \times \Gamma_j]z_r$$

en donde $e, z_2, \ldots, z_r$ es un sistema de representantes de las clases izquierdas de $\Gamma_i \times \Gamma_j$ en $\mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}$. Se tiene

$$K[\Gamma_i \times \Gamma_j] \cong K[\Gamma_i] \otimes_K K[\Gamma_j]$$

de aquí se sigue que $K[\mathbb{Z}/d_i b_{ij}\mathbb{Z}]$ es un $K[\Gamma_i] - K[\Gamma_j]$-bimódulo libre. Por lo tanto $M_{i,j}$ es un $K[\Gamma_i] - K[\Gamma_j]$-bimódulo libre si y sólo si $(d_i, d_j) = 1$.

Comparemos ahora con los resultados de [18]. En [18] se toma una matriz antisimetrizable $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ con anti-simetrizador $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ tal que $(d_i, d_j) = 1$ para toda $i \neq j$. A la matriz $B$ se le asocia un carcaj con peso $(Q, \mathbf{d})$ donde $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ y hay $\frac{b_{i,j}}{d_j}$ flechas de $j$ a $i$. Sea $d = \mathrm{mcm}(d_1, \ldots, d_n)$, $F$ un campo que contiene una raíz $d$-ésima primitiva de 1. Sea $E/F$ una extensión cíclica de grado $d$, y $F_i/F$ la subextensión cíclica de $E/F$ de grado $d_i$. Sea $\mathcal{B}_E$ una $F$-base de $E$ como en [18] y sea $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_E \cap F_i$ una $F$-base de $F_i$. Sea $S = \prod_{i=1}^{n} F_i$, $\sigma_{F_i} : F_i \hookrightarrow S$ la inclusión canónica, $e_i = \sigma_{F_i}(1)$

y $Z = \sum_{i=1}^{n} Fe_i$. Consideremos los $F_i - F_j$-bimódulos $M_{i,j} = \bigoplus_{\alpha: j \to i} F_i \otimes F_j$ y pongamos $M = \bigoplus_{i,j} M_{i,j}$. Finalmente pongamos $e_i M_0 e_j = \bigoplus_{\alpha: j \to i} Ze_i \otimes_F Ze_j$, entonces $M_0$ es un $Z$-subbimódulo de $M$ y $M$ está $Z$-libremente generado por $M_0$.

Veamos que en el caso de [18] se tiene que $X_{a^*}(P) = \partial_{a^*}(P)$ para cada flecha $a$. Notar que podemos suponer que $P$ es, salvo equivalencia cíclica, de la forma $P = w_0 a_1 w_1 a_2 \ldots w_{l-1} a_l$ donde $w_0, w_1, \ldots, w_{l-1} \in \mathcal{B}_E$ y $a_i \in Q_1$. Usando el Ejemplo 5.1 se tiene

$$X_{a^*}(P) = w_1 a_2 \ldots w_{l-1} a_l w_0 \delta_{a,a_1} + w_2 a_3 \ldots w_{l-1} a_l w_0 a_1 w_1 \delta_{a,a_2} + \ldots + w_0 a_1 w_1 a_2 \ldots w_{l-2} a_{l-1} w_{l-1} \delta_{a,a_l}$$

lo cual coincide con la definición de $\partial_a(P)$ dada en [18, p.62]. Por lo tanto $R(P) = J(P)$ en el sentido de [18].

# Bibliografía


[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules.* Second Edition, Springer, New York (1992).

[2] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* London Mathematical Society, Vol. **65**, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø. *Representation theory of Artin algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. **36**, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[4] R. Bautista, D. López-Aguayo. *Potentials for some tensor algebras.* arXiv:1506.05880.

[5] R. Bautista, D. López-Aguayo. *Tensor algebras and decorated representations* arXiv:1606.01974.

[6] R. Bautista, L. Salmerón, R. Zuazua. *Differential Tensor Algebras and their Module Categories.* London Mathematical Society Lecture Note Series, **362**. Cambridge University Press, Cambridge, (2009).

[7] A.B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, D. Smith. *Mutation of cluster-tilting objects and potentials.* American Journal of Mathematics, **133** (2011), no. 4, 835-887. arXiv:0804.3813.

[8] J. Dauns. *Modules and Rings.* Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

[9] L. Demonet. *Mutations of group species with potentials and their representations. Applications to cluster algebras.* arXiv:1003.5078.

[10] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky. *Quivers with potentials and their representations I: Mutations.* Selecta Math. **14** (2008), no. 1, 59-119. arXiv:0704.0649.

[11] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky. *Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras.* J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 749-790. arXiv:0904.0676.

[12] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras.* Springer-Verlag, New York-Berlin, (1994).

[13] A. Facchini. *Module Theory.* Birkhauser Verlag, Bassel, (1998).

[14] C. Faith. *Algebra: Rings, Modules and Categories I.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1973).

[15] S. Fomin, A. Zelevinsky. *Cluster algebras I. Foundations.* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no.2, 497-529. arXiv:0104151.

[16] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko. *Algebras, Rings and Modules.* Vol. **2**, Springer, The Netherlands, (2007).

[17] D. Labardini-Fragoso, J. Geuenich. *Species with potential arising from surfaces with orbifolds points of order* 2*, Part I: one choice of weights.* arXiv:1507.04304.

[18] D. Labardini-Fragoso, A. Zelevinsky. *Strongly primitive species with potentials I: Mutations.* Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (Third series), Vol. **22**, (2016), Issue 1, 47-115. arXiv:1306.3495.

[19] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1971).

[20] B.Nguefack. *Potentials and Jacobian algebras for tensor algebras of bimodules.* arXiv:1004.2213.

[21] C.M.Ringel. *Some Remarks Concerning Tilting Modules and Tilted Algebras*. Origin. Relevance. Future. Cambridge University Press, LMS Lecture Notes Series 332 edition. An appendix to the Handbook of Tilting Theory (2007).

[22] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, New York, (1979).

[23] G.-C. Rota, B. Sagan, P.R Stein. *A cyclic derivative in noncommutative algebra*, Journal of Algebra. **64** (1980), 54-75.

[24] L. H. Rowen. *Ring Theory I, II*. Academic Press, New York-Boston, (1988).

[25] D. Velasco. *Mutation of representations and nearly Morita equivalence*. arXiv:1510.05944.