UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONEXIDAD POR TRAYECTORIAS EN EL HIPERESPACIO DE SUCESIONES CONVERGENTES NO TRIVIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

FELIPE DE JESÚS LÓPEZ ORTEGA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2016

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Y por fin, depués de la noche más oscura, ha llegado el momento de celebrar.

Gracias a la Doctora Patricia Pellicer Covarrubias, quien me dedicó su tiempo y sobre todo, su paciencia. Mi respeto y admiración es tal, que siempre la veré como mi maestra y jamás dejaré de aprender de ella.

Le doy un agradecimiento especial a un amigo, un amigo que literalmente me obligó a comenzar a escribir este trabajo y cuya ayuda estuvo siempre disponible. Gracias Gustavo Adolfo García Apolonio.

Mi mayor agradecimiento es hacia mis padres. Apoyaron mi decisión de estudiar matemáticas aún antes de saber donde lo haría. Mostraron una confianza ciega hacia mi capacidad que sólo puede compararse con la fe.

Índice general

Introducción.

Dado un espacio X, una familia de subconjuntos de X que comparten una característica en particular es un *hiperespacio* de X. Denotamos por $CL(X)$ al hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X mientras que al hiperespacio de subespacios compactos y no vacíos le llamaremos $K(X)$. Dotaremos a ambos hiperespacios de la topología de Vietoris (vea Definición 2.1.1). El presente trabajo es un estudio de un hiperespacio de creación relativamente reciente: el hiperespacio de las sucesiones convergentes no triviales. Denotaremos a este hiperespacio como $S_c(X)$.

Una *sucesión convergente no trivial* S de un espacio X es un subconjunto numerable de X que tiene un elemento llamado $\lim S$ con la siguiente propiedad: para cualquier vecindad V de $\lim S$ se satisface que $S \setminus V$ es finito.

En el Capítulo 1 se establecen, se recuerdan y estudian algunos conceptos de la topología general. El conocimiento y dominio de este capítulo será necesario para entender nuestro texto.

El Capítulo 2 es una revisión y concentración de algunos resultados acerca de la topología de Vietoris para los hiperespacios $CL(X)$ y $K(X)$ y una sección dedicada al estudio de la métrica de Hausdorff.

En el Capítulo 3 definiremos al hiperespacio de sucesiones convergentes y le daremos una topología asociada a la topología de Vietoris para $K(X)$. Por su importancia para estudiar y diferenciar al hiperespacio $S_c(X)$ de algún otro hiperespacio, exhibiremos algunas propiedades intrínsecas del hiperespacio $S_c(X)$ en la Sección 3.2; tal es el caso del Lema 3.2.9, en donde veremos que el conjunto de vietóricos celulares (vea Definición 3.2.8) de un espacio X es una base para $S_c(X)$. Además, encontraremos algunas condiciones suficientes y/o necesarias para que el hiperespacio $S_c(X)$ posea alguna propiedad particular. Como ejemplo, en el Teorema 3.2.11 se establecen dos condiciones equivalentes al hecho de que $S_c(X)$ sea denso en $CL(X)$. La Sección 3.4 tiene como objetivo probar que los hiperespacios de sucesiones convergentes de $[0,1]$, de $[0,\omega_1]$ y del espacio de los números irracionales con la topología que hereda de $\mathbb{R}$ no son homeomorfos dos a dos. Los resultados de esta última sección (Sección 3.4) están basados en el artículo de S. García-Ferreira y Y. F. Ortiz-Castillo llamado "*The hyperspace of convergent sequences*"[4].

El Capítulo 4 tiene resultados acerca de conexidad por trayectorias en el hiperespacio de sucesiones convergentes. En [4, Theorem 2.4, p. 5] se probó que el hiperespacio $S_c(\mathbb{R})$ es conexo por trayectorias, lo que sirvió como base para nuestra Sección 4.1, en la que encontraremos resultados originales sobre la conexidad por trayectorias en los hiperespacios de sucesiones convergentes de $\mathbb{R}^n$ (Corolario 4.1.12), de las variedades conexas en el cubo de Hilbert (Teorema 4.1.15) y de las dendritas locales (Corolario 4.1.14). Estos resultados pueden sugerir que si un espacio X es conexo por trayectorias, entonces $S_c(X)$ también lo es. La Sección 4.2 presenta un contraejemplo de esta situación en el Teorema 4.2.9, el círculo de Varsovia. En [4, Question 2.14, p. 8] se realiza una pregunta interesante: ¿es X conexo por trayectorias cuando $S_c(X)$ lo es? Esta pregunta es resuelta de manera afirmativa para el caso en el que X es un espacio métrico en el artículo de D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza llamado "*General Properties of the Hyperspace of Convergent Sequences*"[9]. Nuestra Sección 4.3 desarrolla la teoría necesaria para la demostración de este resultado en el Teorema 4.3.26.

Además del contenido de esta tesis, se conocen algunos resultados acerca de $S_c(X)$, por ejemplo: en [4, Theorem 2.12, p. 7] se probó que si un espacio X es conexo por trayectorias, entonces su hiperespacio de sucesiones convergentes es conexo y en [4, Theorem 3.2, p. 9] se demostró que ningún hiperespacio de sucesiones convergentes satisface la propiedad de Baire. En [4, Question 2.9, p. 7] se pregunta: ¿existe algún dendroide cuyo hiperespacio de sucesiones convergentes no sea conexo por trayectorias? A manera de respuesta, en [9, Example 4.14, p. 11] se exhibe un ejemplo de un dendroide cuyo hiperespacio de sucesiones convergentes no es conexo por trayectorias.

Debido a que se alejan de los propósitos de esta tesis y a que se trata de resultados bastante conocidos, no se incluirán algunas de las demostraciones de los capítulos 1 y 2, en cuyo caso sí daremos las referencias pertinentes para la consulta de las mismas. En cambio, realizaremos las pruebas completas y detalladas de los resultados en los capítulos 3 y 4, puesto que son los que conciernen directamente a $S_c(X)$.

Todos los espacios de este texto serán T_2 a menos que se indique lo contrario.

Felipe de Jesús López Ortega
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
2016

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo estableceremos los conceptos necesarios para adentrarnos en la teoría de hiperespacios y la conexidad por trayectorias.

1.1. Notación y convenciones.

Sea A un conjunto. Utilizaremos la siguiente notación relacionada con A:

- Denotaremos como $\mathcal{P}(A)$ al conjunto potencia de A.
- Denotaremos por $|A|$ al cardinal de A.
- Si todos los elementos de A son conjuntos, nos referiremos a la unión e intersección de los elementos de A, respectivamente, por $\bigcup A$ y $\bigcap A$.

Sea f una función con dominio A y contradominio B. Sean C y D dos conjuntos tales que $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, denotamos a la imagen directa de C bajo f como $f[C]$ y a la imagen inversa de D como $f^{-1}[D]$. Al dominio A también se le identificará como $\mathrm{Dom}(f)$, mientras que a la imagen $f[A]$ se le identificará como $\mathrm{Im}(f)$.

El conjunto de números racionales será llamado $\mathbb{Q}$, mientras que el conjunto de números irracionales será $\mathbb{I}$ y generalmente tendrán la topología de subespacio de $\mathbb{R}$.

El espacio $[0, 1]$ siempre tendrá la topología de subespacio de $\mathbb{R}$.

Usaremos indistintamente a ω para denotar al conjunto de los números naturales y al primer cardinal transfinito también.

Diremos que un conjunto es numerable si su cardinal es ω.

El primer ordinal transfinito y no numerable será ω_1.

Para cada $n \in \omega$, S^n denotará a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dado un conjunto X, usualmente utilizaremos τ_X para denotar a la topología que se le dé a X; si no resulta ambiguo, escribiremos simplemente τ. De esta forma, (X, τ) será el espacio topológico X con la topología τ. A menos que se requiera hablar de la topología τ, escribiremos simplemente X para referirnos al espacio (X, τ). Si τ es la topología inducida por una métrica d, entonces (X, d) denotará al espacio métrico X con la métrica d.

Si (X, τ) es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, usaremos τ_A para denotar a la topología que hereda A como subespacio de X.

Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Denotamos la cerradura, el interior, la frontera y el exterior de A en X, respectivamente, por: $\overline{A}^X$, $\mathrm{int}_X(A)$, $\partial_X(A)$, $\mathrm{ext}_X(A)$ o simplemente $\overline{A}$, $\mathrm{int}(A)$, $\partial(A)$, $\mathrm{ext}(A)$.

Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$.

- Si $x \in X$ y $0 < \epsilon$, denotaremos a la bola abierta de radio ϵ con centro en x por $B_\epsilon(x)$. En caso de posible confusión escribiremos $B_\epsilon^d(x)$ para remarcar que se usa a la métrica d.

- El *diámetro* de A es el supremo de las distancias entre los elementos de A, que denotamos como $\mathrm{diám}(A)$.

- La *distancia entre A y B*, que denotamos como $\mathrm{dist}(A, B)$, es el ínfimo de las distancias entre los elementos de A y los de B.

Dado un subconjunto no vacío A de números reales, denotaremos por $\mathrm{ínf}\, A$, $\sup A$, $\mathrm{máx}\, A$ y $\mathrm{mín}\, A$ al ínfimo, al supremo, al máximo y al mínimo de A, respectivamente.

Nota 1.1.1. A menos que se indique lo contrario, todos los espacios topológicos de este texto serán T_2.

A lo largo de este texto, nos referiremos por *espacio* a los espacios topológicos T_2.

1.2. Definiciones.

Definición 1.2.1. Dados un espacio X y $x \in X$, decimos que un subconjunto V de X es una *vecindad* de x en X si $x \in \operatorname{int}(V)$.

Definición 1.2.2. Sean (X, τ) un espacio y $x \in X$. Un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *base local de vecindades de x en X* si:

1) para cualquier $V \in \mathcal{B}$ se tiene que $x \in \operatorname{int}(V)$;

2) para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, existe algún $W \in \mathcal{B}$ con la propiedad de que $W \subseteq U$.

Definición 1.2.3. Sean X un espacio y $x \in X$. Decimos que X es *localmente conexo en x* si existe una base local de vecindades abiertas y conexas de x en X.

Si X es localmente conexo en cada elemento de X, se dice que X es *localmente conexo.*

Definición 1.2.4. Un espacio X es *conexo por trayectorias* si para cualquier pareja de elementos x y y de X existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y una función continua $f : [a, b] \to X$ tal que $f(a) = x$ y $f(b) = y$.

Definición 1.2.5. Un espacio X es *arcoconexo* si para cualquier pareja x y y de elementos distintos de X existen un subespacio A de X tal que $x, y \in Y$ y un homeomorfismo $f : [0, 1] \to A$ que satisface que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Definición 1.2.6. Un espacio X es *localmente conexo por trayectorias* si para cualquier $x \in X$ existe una base local de vecindades conexas por trayectorias de x.

Definición 1.2.7. Un espacio X es *localmente arcoconexo* si para cualquier $x \in X$ existe una base local de vecindades arcoconexas de x.

Definición 1.2.8. Un espacio X es un *continuo* si es conexo, métrico, compacto y no vacío. Los subespacios de algún espacio X que satisfacen ser continuos son llamados *subcontinuos* de X.

Definición 1.2.9. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo y sin subespacios homeomorfos a S^1.

Ejemplo 1.2.10. Sean

$$\begin{aligned} A &= \{(x, |sen\left(\tfrac{\pi}{x}\right)|) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4} \ \wedge \ y < 0\} \\ \text{y } C &= \{0\} \times [0,1]. \end{aligned}$$

El espacio $\mathfrak{V} = A \cup B \cup C$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ es conocido como el *círculo de Varsovia* (vea Figura 1.1). El espacio $\mathfrak{V}$ es un continuo y no tiene subespacios homeomorfos a S^1 pero no es localmente conexo en los puntos de C, por lo que no es una dendrita. El círculo de Varsovia será muy importante en la Sección 4.2.

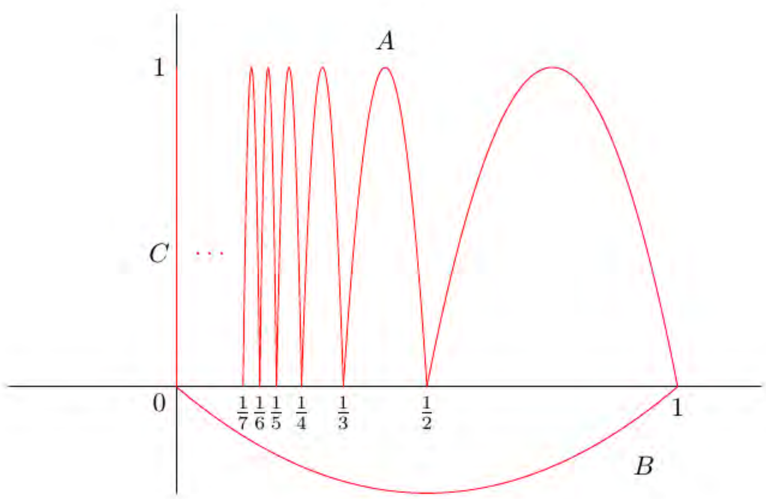

Figura 1.1: Círculo de Varsovia

Ejemplo 1.2.11. Puesto que $S^1 \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$, se tiene que $[-1,1] \times [-1,1]$ no es una dendrita a pesar de ser un continuo localmente conexo.

Ejemplo 1.2.12. El espacio $([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ es un ejemplo de una dendrita.

Definición 1.2.13. Sea X un continuo. Diremos que X es una *dendrita local* si para cada $x \in X$, existe una vecindad (compacta) de x la cual es una dendrita.

Ejemplo 1.2.14. El espacio

$$\{(t, \tfrac{t}{n}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \omega \backslash \{0\} \wedge t \in [0,1]\} \cup ([0,1] \times \{0\})$$

con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$ es conocido como el *abanico armónico* (vea Figura 1.2) y no es una dendrita local.

Demostración. Llamemos X al abanico armónico. Notemos que X no es localmente conexo en los puntos de $(0,1] \times \{0\}$, por esta razón X no es una dendrita. Por otro lado, toda vecindad de $(1,0)$ en X debe tener una cantidad numerable de puntos de la sucesión $\{(1, \frac{1}{n}) \mid n \in \omega \backslash \{0\}\}$, por lo que toda vecindad compacta y conexa de $(1,0)$ es homeomorfa a X mismo. Así, $(1,0)$ no tiene vecindades que cumplan ser dendritas, por lo tanto el abanico armónico no es una dendrita local. □

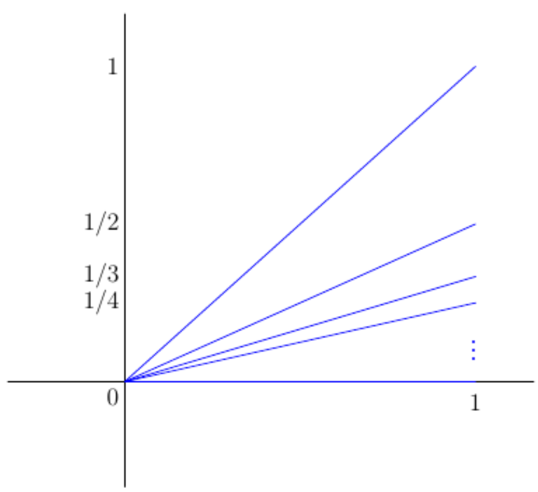

Figura 1.2: Abaníco armónico

Ejemplo 1.2.15. El espacio S^1 es un ejemplo de dendrita local que no es una dendrita.

Definición 1.2.16. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con topología τ. Decimos que X es un *espacio vectorial topológico* si la suma y el producto por escalar en X son funciones continuas.

Definición 1.2.17. Sea $\alpha \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$. Un espacio A es una *α-variedad* si para cada $x \in A$ existe una vecindad abierta V de x que es homeomorfa a $\mathbb{R}^\alpha$.

Definición 1.2.18. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto D de X es *convexo* si para cualquier par de elementos a y b en D y cualquier $t \in [0,1]$ se cumple que $bt + a(1-t) \in D$.

Definición 1.2.19. Un espacio vectorial topológico es *localmente convexo* si existe una base local de vecindades convexas para cada $x \in X$.

Ejemplo 1.2.20. Si $n \in \omega$, entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Si (X, τ) es un espacio topológico (no necesariamente T_2), entonces:

- Al *conjunto de los subconjuntos cerrados y no vacíos* de (X, τ) lo denotamos como $CL(X, \tau)$. En caso de que se deba hablar de la topología de τ, escribiremos $CL(X, \tau)$, en otro caso escribiremos $CL(X)$.

- Denotaremos por $K(X, \tau)$ al *conjunto de subespacios compactos y no vacíos* de (X, τ) y la *colección de subcontinuos* de (X, τ) será $C(X, \tau)$. A menos que se requiera hablar de la topología τ, escribiremos sólo $K(X)$ y $C(X)$ para referirnos a $K(X, \tau)$ y $C(X, \tau)$, respectivamente.

Observación 1.2.21. Debido a que sólo consideramos espacios T_2, es verdad que $K(X)$ es un subconjunto de $CL(X)$. Es esta razón por la que posteriormente, al darle topología a $CL(X)$, $K(X)$ tendrá la topología de subespacio que hereda de $CL(X)$. Similarmente ocurrirá con $C(X)$ como subespacio de $K(X)$.

1.3. Resultados preliminares.

En esta sección hablaremos de los resultados previos que requerimos en el desarrollo de nuestra teoría y del espacio $[0, \omega_1]$ (vea Definición 1.3.12) para usarlo como ejemplo de algunas propiedades. Como muestra, en el Ejemplo 1.3.16 exhibimos que el espacio $[0, \omega_1]$ tiene dimensión cero (vea Definición 1.3.3).

1.3.1. Resultados generales.

Nuestro primer teorema es muy conocido y lo usaremos en la prueba del Lema 4.3.11.

***Teorema* 1.3.1.** [5, Teorema 5.22, p. 292].
Sean X e Y espacios métricos. Si X es compacto y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f es uniformemente continua.

***Proposición* 1.3.2.** *Sean X un espacio y A y B subconjuntos de X tales que A es abierto y B es cerrado, entonces $A \backslash B$ es abierto en X y $B \backslash A$ es cerrado en X.*

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$ y que $B \backslash A = B \cap (X \backslash A)$. □

Definición 1.3.3. Un espacio X tiene *dimensión cero* si posee una base cuyos elementos son abiertos y cerrados al mismo tiempo.

Observación 1.3.4. Debido a que en un espacio conexo los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son el total y el vacío (y a que únicamente estamos considerando espacios T_2), obtenemos que cualquier espacio conexo con más de un elemento no puede tener dimensión cero.

Por otro lado, en un espacio discreto X sucede que $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X para cada $x \in X$, de donde $\{\{x\} \mid x \in X\}$ es una base para X. En un espacio discreto X se cumple también que $\{x\}$ es un subconjunto cerrado para cada $x \in X$. Concluimos así que todo espacio discreto X tiene dimensión cero.

Ejemplo 1.3.5. *El espacio $\mathbb{I}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ tiene dimensión cero.*

Demostración. Recordemos que el conjunto

$$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$$

es base para la topología usual de $\mathbb{R}$. Luego,

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \cap \mathbb{I} \mid a,b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$$

es base para la topología de $\mathbb{I}$. Notemos ahora que $\mathcal{B}$ posee la siguiente ventaja: para $a,b \in \mathbb{Q}$, se cumple que $(a,b)\cap\mathbb{I} = [a,b]\cap\mathbb{I}$. Así, podemos concluir que los elementos de $\mathcal{B}$ también son cerrados en $\mathbb{I}$. □

***Proposición* 1.3.6.** *Si un espacio X tiene dimensión cero, entonces todo subespacio de X también tiene dimensión cero.*

Demostración. Sea A un subespacio de X. Consideremos una base $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos y cerrados de X y el conjunto $\{b \cap A \in \mathcal{P}(A) \mid b \in \mathcal{B}\}$, este conjunto es una base de conjuntos abiertos y cerrados para A. □

Definición 1.3.7. Sean $f : A_1 \to B_1$ y $g : A_2 \to B_2$ funciones. Se dice que f y g son *compatibles* si para todo $a \in A_1 \cap A_2$ se cumple que $f(a) = g(a)$. La unión de estas funciones es $f \cup g : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ y está definida como:

$$(f \cup g)(a) = \begin{cases} f(a), & \text{si } a \in A_1; \\ g(a), & \text{si } a \in A_2. \end{cases}$$

Un conjunto de funciones $\mathcal{F}$ es llamado *sistema compatible de funciones* si cualesquiera dos funciones $f \in \mathcal{F}$ y $g \in \mathcal{F}$ son compatibles. En este caso, la unión de este sistema es la función $\bigcup \mathcal{F} : \bigcup_{f\in\mathcal{F}} Dom(f) \to \bigcup_{f\in\mathcal{F}} Im(f)$ que extiende a cada $f \in \mathcal{F}$ en el dominio $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} Dom(f)$, es decir, para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada $a \in Dom(f)$ se cumple que $\bigcup \mathcal{F}(a) = f(a)$. (Vea [6, Teorema 4.55, p. 60]).

Definición 1.3.8. Dado un conjunto X, una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de subconjuntos de X es una *cubierta* para X si $X \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$.

Definición 1.3.9. Una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ para un espacio X es *localmente finita* si, para cada $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que V sólo interseca una cantidad finita de elementos de la cubierta.

Lema* 1.3.10. *(Lema del pegado). [3, Proposición 2.1.13, p. 71].
Sean X y Y espacios, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta cerrada localmente finita de X y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de funciones compatibles y continuas $f_\alpha : F_\alpha \to Y$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to Y$ es una función continua.

***Corolario* 1.3.11.** *Sean X un espacio y $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq X$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una trayectoria en X que conecta a x_{i-1} con x_i, entonces existe una trayectoria en X que conecta a x_0 con x_n.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre n.

- B.I. Para $n = 2$. Sean $f_1 : [0, \frac{1}{2}] \to X$ y $f_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to X$ trayectorias en X que conecten a x_0 con x_1 y a x_1 con x_2, respectivamente. Como $f_1(\frac{1}{2}) = x_1 = f_2(\frac{1}{2})$ se tiene que $\{f_1, f_2\}$ es una familia compatible de funciones. Por el Lema 1.3.10 concluimos que la función $f : [0, 1] \to X$ definida como $f = f_1 \cup f_2$ es una trayectoria en X que conecta a x_0 con x_2.

- H.I. Supongamos que para algún $n \geq 2$ se satisface el corolario.

- P.I. Sea $A = \{x_0, \dots, x_{n+1}\} \subseteq X$ tal que existe una trayectoria en X que une a x_{i-1} con x_i para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Debido a que $|A\backslash\{x_{n+1}\}| = n + 1$, se sabe por hipótesis de inducción que existe una trayectoria en X que une a x_0 con x_n. Además, existe una trayectoria en X que conecta a x_n con x_{n+1}. Aplicando el caso base a los puntos x_0, x_n y x_{n+1} se termina la demostración. □

1.3.2. El espacio $[0, \omega_1]$.

Por su importancia para nuestros ejemplos, dedicamos una breve subsección al estudio del espacio $[0, \omega_1]$. En la Sección 3.4, particularmente en la demostración del Teorema 3.4.1, encontraremos las consecuencias de los resultados de esta subsección.

Definición 1.3.12. Dado un conjunto totalmente ordenado $(X, <)$ con al menos dos elementos, para cada $a, b \in X$ tales que $a < b$ definimos los subconjuntos $I_a = \{x \in X \mid x < a\}$, $D_a = \{x \in X \mid a < x\}$ y $(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$. Entonces, la colección

$$\mathcal{B} = \{I_x \mid x \in X\} \cup \{D_x \mid x \in X\} \cup \{(x, y) \mid x, y \in X \wedge x < y\}$$

es base para alguna topología de X (vea [1, Ejemplo 1.38, p. 25]). Se le conoce a $\mathcal{B}$ como la *base canónica* para la *topología del orden* de X con respecto al orden $<$.

Usualmente utilizaremos la notación $[a, b)$ y $(a, b]$ para referirnos a los conjuntos $\{x \in X \mid a \leq x < b\}$ y $\{x \in X \mid a < x \leq b\}$, respectivamente.

Denotaremos como $[0, \omega_1]$ al espacio $\omega_1 \cup \{\omega_1\}$ con la topología del orden.

***Teorema* 1.3.13.** *Sean X un espacio, $\mathcal{B}$ una base para X y $x \in X$. Si existe una base local numerable $\mathcal{C}$ de x, entonces existe una base local numerable $\mathcal{D}$ de x tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{C_n \mid n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_n \subseteq C_n.$$

Veamos que $\{B_n \mid n \in \omega\}$ es la base local que buscamos. Sea U un subconjunto abierto en X tal que $x \in U$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in C_n \subseteq U$. Por construcción, $x \in B_n \subseteq C_n \subseteq U$. De esta forma aseguramos que $\{B_n \mid n \in \omega\}$ es una base local numerable para x y además, $\{B_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{B}$. $\square$

***Teorema* 1.3.14.** El espacio $[0, \omega_1]$ no tiene una base local numerable para ω_1.

Demostración. La prueba se hará por contradicción.

Supongamos que $[0, \omega_1]$ tiene una base local numerable para ω_1. Por el Teorema 1.3.13, ω_1 posee una base local numerable, digamos $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \omega\}$, formada sólo por conjuntos básicos canónicos de $[0, \omega_1]$; es decir, para cada $n \in \omega$, existe $a_n \in [0, \omega_1)$ tal que $(a_n, \omega_1] = B_n$. Puesto que $\mathcal{B}$ es numerable, existe algún $b < \omega_1$ tal que $a_n < b$ para cualquier $n \in \omega$. Así, $\omega_1 \in (b, \omega_1]$ y $b \in \bigcap\{B_n \mid n \in \omega\}$. Luego, ningún $n \in \omega$ cumple que $B_n \subseteq (b, \omega_1]$, hecho que contradice que el conjunto $\mathcal{B}$ sea base local numerable para ω_1. $\square$

***Corolario* 1.3.15.** *El espacio $[0, \omega_1]$ no es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.14 se tiene que $[0, \omega_1]$ no es primero numerable, por lo tanto, no puede ser metrizable. $\square$

Ejemplo 1.3.16. *El espacio $[0, \omega_1]$ tiene dimensión cero.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \{(a, b+1) \mid a < b < \omega_1\} \cup \{(a, \omega_1] \mid a < \omega_1\} \cup \{\{0\}\}.$$

De la Definición 1.3.12 obtenemos que para cualquier $a, b < \omega_1$, se tiene que $(a, b+1)$ y $(a, \omega_1]$ pertenecen a la base canónica de $[0, \omega_1]$. Además, se cumple que

$$\begin{aligned} (a, \omega_1] &= [0, \omega_1] \backslash [0, a+1) \text{ y} \\ (a, b+1) &= [0, \omega_1] \backslash ((b, \omega_1] \cup [0, a+1)); \end{aligned}$$

por lo tanto, $(a, \omega_1]$ y $(a, b+1)$ son subconjuntos cerrados en $[0, \omega_1]$. También, $[0, 1) = \{0\} = [0, \omega_1] \backslash (0, \omega_1]$, por lo que $\{0\}$ es abierto y cerrado en $[0, \omega_1]$. De esta manera, los elementos de $\mathcal{A}$ son abiertos y cerrados en $[0, \omega_1]$.

Veamos ahora que $\mathcal{A}$ es una base para $[0, \omega_1]$. Para ω_1 y 0, los conjuntos $\{(a, \omega_1] \mid a < \omega_1\}$ y $\{\{0\}\}$ son bases locales, respectivamente. Sean entonces $x \in (0, \omega_1)$ y U una vecindad de x. Sabemos que existen $a, b \in [0, \omega_1]$ tales que $x \in (a, b) \subseteq U$. De esta forma, $x < b$ y por lo tanto, $(a, x+1) \subseteq (a, b)$. Como $(a, x+1) \in \mathcal{A}$, concluimos que $\mathcal{A}$ es una base para $[0, \omega_1]$. □

1.3.3. Compacidad

El objetivo del presente trabajo no es estudiar la compacidad en el hiperespacio de sucesiones convergentes. Sin embargo la compacidad es una propiedad que no puede separarse del estudio del hiperespacio $K(X)$ y por tanto, estará presente a lo largo de nuestro texto.

***Lema* 1.3.17.** *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \in K(X)$ y U un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\bigcup_{a \in A} B_\delta(a) \subseteq U$.*

Demostración. Notemos que si $U = X$, entonces $\bigcup_{a \in A} B_\delta(a) \subseteq X = U$ para cualquier $\delta > 0$. Supongamos entonces que $U \neq X$, de esta forma, $X \backslash U \neq \emptyset$. Como A es compacto y $X \backslash U$ es un subconjunto cerrado de X ajeno a A, se tiene que $\operatorname{dist}(A, X \backslash U) > 0$; proponemos a δ como dicha distancia. Ahora, si $b \in B_\delta(a)$ para algún $a \in A$, entonces $d(a, b) < \delta$ y por lo tanto $b \notin X \backslash U$; así, $b \in U$ y deducimos que $B_\delta(a) \subseteq U$. Concluimos que $\bigcup_{a \in A} B_\delta(a) \subseteq U$. □

Para nuestro siguiente resultado, pedimos al lector recordar que todos nuestros espacios son Hausdorff (vea Nota 1.1.1).

***Lema* 1.3.18.** *Sean X un espacio y A y B subespacios compactos de X y ajenos, entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que: $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Sea $a_0 \in A$. Para cada $b \in B$, existen subconjuntos abiertos y ajenos U_b y V_b de X tales que $a_0 \in U_b$ y $b \in V_b$. De esta forma, $B \subseteq \bigcup_{b \in B} V_b$. Como B es compacto, existen $b_0, b_1, \dots, b_n \in B$ que satisfacen que $B \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} V_{b_i}$. Sean $V_{a_0} = \bigcup_{i=0}^{n} V_{b_i}$ y $U_{a_0} = \bigcap_{i=0}^{n} U_{b_i}$. Notemos que si $x \in \bigcap_{i=0}^{n} U_{b_i} = U_{a_0}$, entonces $x \in U_{b_i}$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, y por lo tanto $x \notin V_{b_i}$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$; de este modo se tiene que $x \notin \bigcup_{i=0}^{n} V_{b_i} = V_{a_0}$. Así, U_{a_0} y V_{a_0} son subconjuntos abiertos en X, $a_0 \in U_{a_0}$, $B \subseteq V_{a_0}$ y $U_{a_0} \cap V_{a_0} = \emptyset$. Repitiendo el proceso para cada $a \in A$, encontramos dos subconjuntos abiertos U_a y V_a de X tales que $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ y $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Notamos ahora que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Por la compacidad de A, inferimos que existen $a_0, \dots, a_k \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} U_{a_j}$. Sean

$$U = \bigcup_{j=0}^{k} U_{a_j} \text{ y } V = \bigcap_{j=0}^{k} V_{a_j}$$

y veamos que son subconjuntos ajenos. Si $x \in U \cap V$, entonces existe j que cumple que: $j \in \{0, \dots, k\}$ y que $x \in U_{a_j}$. Como además $x \in V_{a_j}$, deducimos que $x \in U_{a_j} \cap V_{a_j}$, lo cual es absurdo. Concluimos que U y V son subconjuntos abiertos en X, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. $\square$

***Corolario* 1.3.19.** *Si (X, τ) es un espacio compacto, $x \in X$ y $A \in \tau$ es tal que $x \in A$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq A$.*

Demostración. Por el Lema 1.3.18 se tiene que para x y $X \backslash A$, existen V y $U \in \tau$ tales que $x \in U$, $X \backslash A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, $U \subseteq X \backslash V$ y por lo tanto

$$\overline{U} \subseteq X \backslash V \subseteq X \backslash (X \backslash A) = A$$

como se quería. $\square$

***Lema* 1.3.20.** *Sean X un espacio y $\{A_0, \dots, A_n\}$ un conjunto de subespacios compactos de X y ajenos por pares, entonces existen subconjuntos abiertos $V_0, \dots, V_n$ de X tales que $A_i \subseteq V_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción.

B.I. Para $n = 1$ usamos el Lema 1.3.18, así aseguramos que existen tales subconjuntos abiertos para A_0 y A_1.

H.I. Supongamos que el lema se satisface para cualquier subconjunto de k subespacios compactos y ajenos de X.

P.I. Sea $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_k\}$ un conjunto de $k+1$ subespacios compactos de X y ajenos por pares. Particularmente para $\mathcal{A} \setminus \{A_k\}$ se cumple la hipótesis de inducción; es decir, existen subconjuntos abiertos $V_0, \dots, V_{k-1}$ de X tales que $A_i \subseteq V_i$ para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$ y que $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Notamos ahora que $(\bigcup \mathcal{A}) \setminus A_k$ y A_k son compactos y ajenos. Por el Lema 1.3.18, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $(\bigcup \mathcal{A}) \setminus A_k \subseteq U$, $A_k \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Finalmente, $V_0 \cap U, \dots, V_{k-1} \cap U$ y V son subconjuntos abiertos de X que satisfacen: $A_i \subseteq V_i \cap U$ para cualquier $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $A_k \subseteq V$ y además,

$$(V_i \cap U) \cap (V_j \cap U) \subseteq V_i \cap V_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$
$$\text{y } (V_i \cap U) \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset.$$

Así terminamos la demostración. □

Definición 1.3.21. Un espacio X es *secuencialmente compacto* si cada sucesión de X tiene una subsucesión que converge en X.

Los teoremas 1.3.22 y 1.3.24 son resultados muy conocidos, de modo que no incluiremos una demostración de ellos pero sí una referencia para consultar sus respectivas pruebas

***Teorema* 1.3.22.** [3, Teorema 4.1.17, p. 256].
Sea X un espaco métrico. Son equivalentes:

1) X es compacto;

2) X es secuencialmente compacto.

***Lema* 1.3.23.** [7, Proposición 12.1, p. 98].
Sean X un espacio topológico y K, L y B subconjuntos de X. Son equivalentes:

1. $\overline{K} \cap L = \emptyset$, $K \cap \overline{L} = \emptyset$ y $K \cup L = X \setminus B$.

2. *Existe un subconjunto no vacío G de $X\backslash B$ abierto y cerrado en $X\backslash B$ tal que $K \subseteq G$ y $G \cap L = \emptyset$.*

Teorema* 1.3.24. *(Teorema del cable cortado).[7, Teorema 12.9, p. 101]. *Sean X un espacio compacto y E y F dos subconjuntos cerrados de X. Si no existe un subespacio conexo A de X tal que $A \cap E \neq \emptyset$ y $A \cap F \neq \emptyset$ al mismo tiempo, entonces existen dos subconjuntos K y L de X tales que $E \subseteq K$, $F \subseteq L$, $\overline{K} \cap L = \emptyset$, $K \cap \overline{L} = \emptyset$ y $K \cup L = X$.*

***Corolario* 1.3.25.** *Sean X un espacio compacto y E y F dos subconjuntos cerrados de X. Si no existe un subespacio conexo A de X tal que $A \cap E \neq \emptyset$ y $A \cap F \neq \emptyset$ al mismo tiempo, entonces existen dos subconjuntos abiertos y cerrados K y L de X tales que $E \subseteq K$, $F \subseteq L$, $K \cap L = \emptyset$ y $K \cup L = X$.*

Demostración. Del Teorema 1.3.24 sabemos que existen dos dubconjuntos K' y L' de X tales que $E \subseteq K'$, $F \subseteq L'$, $\overline{K'} \cap L' = \emptyset$, $K' \cap \overline{L'} = \emptyset$ y $K' \cup L' = X$. Usando el Lema 1.3.23 sobre K', L', y $B = \emptyset$, se obtiene que existe un subconjunto G de X que es abierto y cerrado en X tal que $K' \subseteq G$ y $G \cap L' = \emptyset$. Como $K' \cup L' = X$, se concluye que $G \cup L' = X$. Así, $K = G$ y $L = L'$ son subconjuntos abiertos y cerrados en X tales que $E \subseteq K$, $F \subseteq L$, $K \cap L = \emptyset$ y $K \cup L = X$. □

1.3.4. Conexidad

***Teorema* 1.3.26.** *Sean X un espacio y $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto finito de subespacios conexos de X. Si $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ es conexo.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n en la prueba.

B.I. $n = 1$. Sean A_0 y A_1 subespacios conexos de X tales que $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$. Sea $x \in A_0 \cap A_1$. Tomemos dos subconjuntos U y V abiertos relativos de $A_0 \cup A_1$ tales que

$$A_0 \cup A_1 = U \cup V. \tag{1.1}$$

Luego, $x \in U$ o $x \in V$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que $x \in U$ y de esta forma

$$A_0 \cap A_1 \cap U \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

Si $A_0 \cap V \neq \emptyset$, entonces (1.1) y (1.2) demuestran que $U \cap A_0$ y $V \cap A_0$ forman una disconexión para A_0, lo cual es absurdo. Concluimos que $A_0 \cap V = \emptyset$. Suponiendo que $A_1 \cap V \neq \emptyset$, (1.1) y (1.2) probarían que $V \cap A_1$ y $U \cap A_1$ forman una disconexión para A_1, contradiciendo que A_1 es conexo. Deducimos que $A_1 \cap V = \emptyset$. Hemos demostrado que $V \cap (A_0 \cup A_1) = \emptyset$. Sin embargo $V \subseteq A_0 \cup A_1$, por lo que V debe ser vacío. Así, $A_0 \cup A_1$ es conexo.

H.I. Supongamos que el resultado se tiene que para n.

P.I. Sea $\{A_0, \ldots, A_{n+1}\}$ un conjunto de subespacios conexos de X que cumple que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{0, \ldots, n\}$. Notemos que $\{A_0, \ldots, A_n\}$ satisface la hipótesis de inducción y por lo tanto $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ es conexo. Por otro lado, $\emptyset \neq A_n \cap A_{n+1} \subseteq (\bigcup_{i=0}^{n} A_i) \cap A_{n+1}$. Aplicando el caso base a $\{\bigcup_{i=0}^{n} A_i, A_{n+1}\}$, llegamos a que $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i$ es conexo. □

***Teorema* 1.3.27.** [2, Teorema 4.2, p. 113].
Un espacio X es localmente conexo si y sólo si para cada subconjunto abierto U de X se cumple que las componentes conexas de U son abiertas en X.

Notación 1.3.28. En nuestro siguiente resultado, la componente conexa por trayectorias de x en X será denotada por $C_T(x)$.

***Teorema* 1.3.29.** *Si X es un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $y \in C_T(x)$. Como X mismo es un subconjunto abierto de X, sabemos que existe una vecindad conexa por trayectorias V de y tal que $V \subseteq X$. Usando que $V \subseteq C_T(y) = C_T(x)$, concluimos que $y \in \operatorname{int}(V) \subseteq C_T(x)$, por lo que $C_T(x)$ es un subconjunto abierto de X.

Probemos ahora que $C_T(x)$ es un subconjunto cerrado de X. Sea $z \in X \backslash C_T(x)$ y consideremos una vecindad conexa por trayectorias W de z. Notemos que $W \cap C_T(x) = \emptyset$ y entonces $W \subseteq X \backslash C_T(x)$. Deducimos que $z \in \operatorname{int}(W) \subseteq X \backslash C_T(x)$, lo cual es suficiente para probar que $X \backslash C_T(x)$ es abierto en X.

Hemos probado que $C_T(x)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X. Partiendo de que X es un espacio conexo, se sigue que un subconjunto abierto y cerrado de X es $\emptyset$ o X mismo, ergo, $C_T(x) = X$. □

Las demostraciones de los teoremas 1.3.30, 1.3.31 y 1.3.32 son extensas y rebasan los objetivos de esta tesis, por lo que no se incluirá una demostración de ellos pero sí las referencias pertinentes para su consulta.

Para nuestro siguiente resultado, pedimos al lector recordar que nuestros espacios son T_2 (vea Nota 1.1.1).

***Teorema* 1.3.30.** [12, Corolario 31.6, p. 222].
Un espacio X es conexo por trayectorias si y sólo si es arcoconexo.

***Teorema* 1.3.31.** [8, Corolario 2, p. 301].
Si X es una dendrita, entonces para cualquier par de elementos distintos a y b en X, existe un único arco en X cuyos puntos extremos son a y b.

***Teorema* 1.3.32.** [8, Teorema 4, p. 301].
Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.

***Teorema* 1.3.33.** *Si X es una dendrita, entonces X es localmente arcoconexo.*

Demostración. Sea $x \in X$. Probaremos que el conjunto de vecindades arcoconexas de x en X es una base local de vecindades de x.

Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Usemos que X es un espacio T_3 para encontrar un subconjunto abierto W de X que satisface que $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. De la conexidad local de X sabemos que existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subseteq W$. Notemos ahora que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{W} \subseteq U$$

y que $\overline{V}$ es conexo. Por el Teorema 1.3.32 obtenemos que $\overline{V}$ es una dendrita y por el Teorema 1.3.31 podemos deducir que $\overline{V}$ es arcoconexo. Es así como probamos que $\overline{V}$ es una vecindad arcoconexa de x en X que además satisface que $\overline{V} \subseteq U$. Concluimos entonces que X es localmente arcoconexo. □

***Teorema* 1.3.34.** *Toda dendrita local es localmente arcoconexa.*

Demostración. Sean X una dendrita local y $x \in X$. Veamos que el conjunto de vecindades arcoconexas de x en X es una base local de vecindades para x.

Sean U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y D una vecindad de x que cumpla ser una dendrita. Notemos que $x \in \operatorname{int}(D) \cap U \subseteq D$ y que $\operatorname{int}(D) \cap$

U es un subconjunto abierto tanto en X como en D. Por la arcoconexidad local de D (vea Teorema 1.3.33) podemos encontrar una vecindad arcoconexa V de x en D y tal que $V \subseteq \mathrm{int}(D) \cap U$. Usando que $\mathrm{int}(D) \cap U$ es abierto en X, deducimos que $\mathrm{int}_D(V)$ es abierto en X también. Hemos probado que V es una vecindad arcoconexa de x en X que además satisface que $V \subseteq U$. Concluimos entonces que X es localmente arcoconexo. □

***Corolario* 1.3.35.** *Toda dendrita local es arcoconexa.*

Demostración. Sea X una dendrita local. Recordemos que X es un continuo y por lo tanto, es conexo. De los teoremas 1.3.34, 1.3.29 y 1.3.30 se sigue el resultado. □

***Teorema* 1.3.36.** *El espacio $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto es localmente convexo.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^\omega$ y supongamos que $x = \{x_m \mid m \in \omega\}$. Proponemos al conjunto

$$\left\{ \prod_{m\in\mathcal{B}} B_{r_m}(x_m) \times \prod_{m\in\omega\setminus\mathcal{B}} \mathbb{R} \ \mid\ \mathcal{B} \subseteq \omega \wedge |\mathcal{B}| \in \omega \wedge r_m \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

el cual mostraremos que es una base de vecindades convexas de x.

Sea U un subconjunto básico de la topología producto de $\mathbb{R}^\omega$ tal que $x \in U$. Es decir, existe un subconjunto finito $\mathcal{A}$ de ω y un subconjunto abierto U_n de $\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathcal{A}$ tales que

$$U = \prod_{n\in\mathcal{A}} U_n \times \prod_{n\in\omega\setminus\mathcal{A}} \mathbb{R}.$$

Para cada $n \in \mathcal{A}$, sea $\epsilon_n > 0$ tal que $B_{\epsilon_n}(x_n) \subseteq U_n$. Nombremos

$$V = \prod_{n\in\mathcal{A}} B_{\epsilon_n}(x_n) \times \prod_{n\in\omega\setminus\mathcal{A}} \mathbb{R}.$$

Inmediatamente notamos que $x \in V \subseteq U$, por lo que nos limitaremos a demostrar que V es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^\omega$. Sean $a = \{a_n \mid n \in \omega\}$ y $b = \{b_n \mid n \in \omega\}$ elementos de V, en particular, $a_n, b_n \in B_\epsilon(x_n)$ para cada $n \in \mathcal{A}$. Tomemos $t \in [0,1]$ y observemos que $bt + a(1-t) = \{b_nt + a_n(1-t) \mid n \in \omega\}$. Se sabe que $B_{\epsilon_n}(x_n)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$, luego $b_nt + a_n(1-t) \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ para cada $n \in \mathcal{A}$. Concluimos que $bt + a(1-t) \in V$ y por lo tanto, V es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^\omega$. Es así como probamos que $\mathbb{R}^\omega$ es localmente convexo. □

***Teorema* 1.3.37.** *Sean $\alpha \in (\omega\setminus\{0\}) \cup \{\omega\}$ y X una α-variedad, entonces X es localmente conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea $x \in X$. Probaremos que el conjunto de vecindades de x que son conexas por trayectorias es una base local de x. Sean U una vecindad abierta de x homeomorfa a $\mathbb{R}^\alpha$ y $h : \mathbb{R}^\alpha \to U$ un homeomorfismo.

Tomemos una vecindad V de x en X. El conjunto $V \cap U$ es una vecindad de x tanto en X como en U. Como h es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}[V \cap U]$ es una vecindad de $h^{-1}(x)$ en $\mathbb{R}^\alpha$. Usemos el Ejemplo 1.2.20 o el Teorema 1.3.36, según corresponda, para encontrar una vecindad convexa W de $h^{-1}(x)$ tal que $W \subseteq h^{-1}[V \cap U]$. El hecho de que W es un subespacio conexo por trayectorias de $\mathbb{R}^\alpha$ implica que $h[W]$ es conexo por trayectorias también. Notemos además que $h[W] \subseteq V \cap U \subseteq V$. Finalmente, puesto que h es un homeomorfismo y U es un subconjunto abierto de X, deducimos que $h[W]$ es una vecindad conexa por trayectorias de x en X. Con esto terminamos la demostración. $\square$

***Corolario* 1.3.38.** *Si $\alpha \in (\omega\setminus\{0\}) \cup \{\omega\}$ y X es una α-variedad conexa, entonces X es arcoconexo.*

Demostración. De los teoremas 1.3.37, 1.3.29 y 1.3.30 se sigue el resultado. $\square$

Capítulo 2

Los hiperespacios $CL(X)$ y $K(X)$.

El objetivo de este trabajo es estudiar el hiperespacio de sucesiones convergentes de un espacio X. Hablaremos primero sobre los hiperespacios $CL(X)$ y $K(X)$ con la topología que usualmente se les asocia, debido a que el hiperespacio de sucesiones convergentes es un subespacio de estos hiperespacios.

2.1. Topología de Vietoris en $CL(X)$.

Recordemos que para un espacio topológico X (no necesariamente T_2) hemos asignado la notación $CL(X)$ para referirnos al hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X. En nuestra siguiente definición presentamos una de las topologías que más comúnmente se le da a $CL(X)$.

Definición 2.1.1. Sean (X, τ) un espacio topológico (no necesariamente T_2) y $\{U_0, \ldots, U_n\} = \mathcal{U}$ una colección finita de subconjuntos de X. El *vietórico* de $\mathcal{U}$ será el conjunto

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \big\{ Z \in CL(X, \tau) \mid Z \subseteq \bigcup \mathcal{U} \wedge \forall i (i \in \{0, \ldots, n\} \rightarrow (Z \cap U_i \neq \emptyset)) \big\}.$$

Algunas veces denotaremos por $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle$ al vietórico de $\mathcal{U}$. Se sabe que

$$\mathcal{B} = \big\{ \langle \mathcal{U} \rangle \in \mathcal{P}(CL(X)) \mid \mathcal{U} \subseteq \tau \wedge \exists n (n \in \omega \wedge n = |\mathcal{U}|) \big\}$$

es base para una topología de $CL(X, \tau)$ (vea [7, Teorema 1.2, p. 3]). A la topología generada por dicha base se le conoce como *topología de Vietoris* para $CL(X, \tau)$.

Los vietóricos tienen algunas propiedades muy agradables, como las que presentamos a continuación. La primera de ellas nos da una manera alternativa de verificar cuándo un vietórico se encuentra contenido en otro.

***Lema* 2.1.2.** *Sean X un espacio y $\{U_0, \ldots, U_n\}$, $\{V_0, \ldots, V_k\}$ dos colecciones de subconjuntos no vacíos de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle \subseteq \langle V_0, \ldots, V_k \rangle$;
2. $\bigcup_{i=0}^{n} U_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} V_j$ *y dado* $j \in \{0, \ldots, k\}$, *existe* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *tal que* $U_i \subseteq V_j$.

Demostración. Supongamos que $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle \subseteq \langle V_0, \ldots, V_k \rangle$. Sea $x \in \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, elegimos $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. El conjunto $A = \{x, x_0, \ldots, x_n\}$ es finito y no vacío, por lo que $A \in K(X)$. Por construcción se tiene que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Como además $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, entonces $A \in \langle U_0, \ldots, U_n \rangle$. Luego, $A \in \langle V_0, \ldots, V_k \rangle$ y por lo tanto $x \in A \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} V_j$. Deducimos entonces que $\bigcup_{i=0}^{n} U_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} V_j$.

Sea $j \in \{0, \ldots, k\}$. Probaremos a continuación que existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $U_i \subseteq V_j$. Si, por el contrario, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ existe $y_i \in U_i \backslash V_j$, consideramos entonces al conjunto $D = \{y_0, \ldots, y_n\}$. Observamos que D es un subconjunto finito y no vacío de X, de lo cual se sigue que $D \in K(X)$. Además ocurre que $D \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ y que $D \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i$. De esta forma, $D \in \langle U_0, \ldots, U_n \rangle$. Por otro lado, $D \cap V_j = \emptyset$ y entonces $D \notin \langle V_0, \ldots, V_n \rangle$, lo cual es una contradicción a la hipótesis. Ergo, para algún $i \in \{0, \ldots, n\}$ se cumple que $U_i \subseteq V_j$.

Supongamos ahora que $\bigcup_{i=0}^{n} U_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} V_j$ y que dado $j \in \{0, \ldots, k\}$, existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $U_i \subseteq V_j$. Sea $F \in \langle U_0, \ldots, U_n \rangle$, entonces $F \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} V_j$. Sea $j \in \{0, \ldots, k\}$. Veamos ahora que $F \cap V_j \neq \emptyset$. Por hipótesis existe $i_0 \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $U_{i_0} \subseteq V_j$. Recordando que $F \in \langle U_0, \ldots, U_n \rangle$ obtenemos que $U_{i_0} \cap F \neq \emptyset$ y así, $F \cap V_j \neq \emptyset$. Concluimos que $F \in \langle V_0, \ldots, V_k \rangle$ como se quería. $\square$

***Lema* 2.1.3.** *Sean X un espacio y $\mathcal{A}$ una familia finita de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, entonces $\langle\mathcal{A}\rangle$ es un subconjunto cerrado de $CL(X)$.*

Demostración. Sea $A \in CL(X)\backslash\langle\mathcal{A}\rangle$. Por la Definición 2.1.1 obtenemos dos casos.

Caso 1. Existe algún $U \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq X\backslash U$.
Notemos que el conjunto $\mathcal{C} = \langle X\backslash U\rangle$ es un subconjunto abierto de $CL(X)$ que satisface que $A \in \mathcal{C}$. Como además todo $B \in \mathcal{C}$ satisface que $B \subseteq X\backslash U$, entonces $\mathcal{C} \subseteq CL(X)\backslash\langle\mathcal{A}\rangle$.

Caso 2. $A \cap (X\backslash \bigcup\mathcal{A}) \neq \emptyset$.
Para este caso, consideramos el subconjunto $\mathcal{C} = \langle X, X\backslash \bigcup\mathcal{A}\rangle$. Puesto que $\bigcup\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de X, se tiene que $\mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de $CL(X)$. Usando la hipótesis de este caso y el hecho de que $X \cup (X\backslash \bigcup\mathcal{A}) = X$, podemos deducir que $A \in \mathcal{C}$. Finalmente, si $B \in \mathcal{C}$, entonces $B \cap (X\backslash \bigcup\mathcal{A}) \neq \emptyset$ y así, $B \in CL(X)\backslash\langle\mathcal{A}\rangle$. Se concluye que $\mathcal{C} \subseteq CL(X)\backslash\langle\mathcal{A}\rangle$.

Hemos demostrado que en cualquier caso, siempre existe un subconjunto abierto $\mathcal{C}$ de $CL(X)$ tal que $A \in \mathcal{C} \subseteq CL(X)\backslash\langle\mathcal{A}\rangle$ y por lo tanto, $\langle\mathcal{A}\rangle$ es un subconjunto cerrado de $CL(X)$. □

***Lema* 2.1.4.** *Sean X un espacio y $\{U_0, \ldots, U_n\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X, entonces $\left\langle\overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\right\rangle = \overline{\langle U_0, \ldots, U_n\rangle}$.*

Demostración. Sean $F \in \left\langle\overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\right\rangle$ y $\langle V_0, \ldots, V_k\rangle$ un elemento de la base para la topología de Vietoris de $CL(X)$ tal que $F \in \langle V_0, \ldots, V_k\rangle$. Para cada $j \in \{0, \ldots, k\}$ tomemos $y_j \in F \cap V_j$, en consecuencia, $\{y_0, \ldots, y_k\} \subseteq F$. Puesto que $F \subseteq \bigcup_{i=0}^n \overline{U_i}$, obtenemos que $\{y_0, \ldots, y_k\} \subseteq \bigcup_{i=0}^n \overline{U_i} = \overline{\bigcup_{i=0}^n U_i}$. Sea $j \in \{0, \ldots, k\}$. Usando el hecho de que $y_j \in \overline{\bigcup_{i=0}^n U_i}$ y de que V_j es una vecindad abierta de y_j, aseguramos que

$$\text{existe } y'_j \in V_j \cap \bigcup_{i=0}^n U_i. \tag{2.1}$$

Similarmente, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, tomemos $x_i \in F \cap \overline{U_i}$. De esta forma, $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq F$ y entonces $\{x_0, .., x_n\} \subseteq \bigcup_{j=0}^k V_j$. Sea $i \in \{0, \ldots, n\}$. Como

$\bigcup_{j=0}^{k} V_j$ es una vecindad abierta de x_i y además, $x_i \in \overline{U_i}$, entonces

$$\text{existe } x_i' \in U_i \cap \bigcup_{j=0}^{k} V_j. \tag{2.2}$$

Nombremos $A = \{x_0', \ldots, x_n', y_0', \ldots, y_k'\}$. De (2.1) y (2.2) deducimos que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i \cap \bigcup_{j=0}^{k} V_j$. También se sigue que $x_i' \in U_i$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$ y que $y_j' \in V_j$ para cada $j \in \{0, \ldots, k\}$. Inferimos de esta manera que $A \cap V_j \neq \emptyset$ para cualquier $j \in \{0, \ldots, k\}$ y que $A \cap U_i \neq \emptyset$ siempre que $i \in \{0, \ldots, n\}$. Hemos probado que $A \in \langle U_0, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_0, \ldots, V_k\rangle$, lo cual es suficiente para justificar que $F \in \overline{\langle U_0, \ldots, U_n\rangle}$.

Probemos ahora que $\overline{\langle U_0, \ldots, U_n\rangle} \subseteq \langle \overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\rangle$. Del Lema 2.1.2 sabemos que $\langle U_0, \ldots, U_n\rangle \subseteq \langle \overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\rangle$ y por el Lema 2.1.3 tenemos que $\langle \overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\rangle$ es un subconjunto cerrado de $CL(X)$; con lo cual, concluimos que $\overline{\langle U_0, \ldots, U_n\rangle} \subseteq \langle \overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\rangle$ como se quería. □

***Teorema* 2.1.5.** [10, Teorema 4.9.7, p. 163].
Para un espacio X son equivalentes:

i) X es compacto y metrizable;

ii) $CL(X)$ es compacto y metrizable.

2.2. El hiperespacio $K(X)$.

Dado un espacio X, asignamos ya la notación $K(X)$ al hiperespacio de subespacios compactos y no vacíos de X. A fin de dotar de una topología a $K(X)$ recordemos la Observación 1.2.21. Le daremos a $K(X)$ la topología de subespacio que hereda de $CL(X)$ una vez que se le asocia la topología de Vietoris.

Notación 2.2.1. Dados un espacio X y una cantidad finita de subconjuntos $U_0, \ldots, U_n$ de X, el símbolo $\langle U_0, \ldots, U_n\rangle_K$ denotará al conjunto $\langle U_0, \ldots, U_n\rangle \cap K(X)$.

Observación 2.2.2. *Si X es un espacio compacto, entonces un subconjunto de X es cerrado si y sólo si es un subespacio compacto de X. Por esta razón ocurre que $CL(X) = K(X)$.*

***Corolario* 2.2.3.** *Si X es un espacio métrico y compacto, entonces $K(X)$ también lo es.*

Demostración. El resultado se sigue de la Observación 2.2.2 y el Teorema 2.1.5. □

La siguiente es una propiedad muy útil de $K(X)$, la usaremos en la demostración del Teorema 2.2.5.

***Lema* 2.2.4.** *Sea X un espacio. Si $\mathcal{B}$ es una base para X, entonces*

$$\mathcal{B}' = \{\langle B\rangle_K \mid B \subseteq \mathcal{B} \wedge |B| \in \omega\}$$

es una base para $K(X)$.

Demostración. Sean $F \in K(X)$ y $\mathcal{V}$ una familia finita de subconjuntos abiertos de X tal que $F \in \langle\mathcal{V}\rangle_K$. Para cada $x \in F$, definimos

$$V'_x = \bigcap\{V \in \mathcal{V} \mid x \in V\}.$$

Como V'_x es abierto para cada $x \in F$ y $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces

$$\text{para cada } x \in F, \text{ existe } V_x \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in V_x \subseteq V'_x.$$

Notemos que

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x \subseteq \bigcup \mathcal{V}. \tag{2.3}$$

Sabemos que $F \in K(X)$, por lo tanto existe $F' \subseteq F$ tal que F' es finito y $F \subseteq \bigcup_{x\in F'} V_x$. Sea $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{V} \mid V \cap F' = \emptyset\}$ y elijamos $y_V \in F \cap V$ para cada $V \in \mathcal{D}$. De esta forma, si $F'' = F' \cup \{y_V \mid V \in \mathcal{D}\}$, entonces F'' es finito, $x \in F \cap V_x$ para cada $x \in F''$ y

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F'} V_x \subseteq \bigcup_{x \in F''} V_x; \tag{2.4}$$

de este modo aseguramos que $F \in \langle\{V_x \mid x \in F''\}\rangle_K$. Finalmente, mostraremos que $\langle\{V_x \mid x \in F''\}\rangle_K \subseteq \langle\mathcal{V}\rangle_K$. Tomemos $V \in \mathcal{V}$ y analicemos los posibles casos:

Caso 1. Si $V \cap F' \neq \emptyset$.
En este caso existe $x \in V \cap F' \subseteq F''$ y por lo tanto, $V_x \subseteq V$.

Caso 2. Si $V \cap F' = \emptyset$.
Para este caso, $V \in \mathcal{D}$ y por tanto existe $y_V \in F'' \cap V$ tal que $V_{y_V} \subseteq V$.

Usando que $F' \subseteq F''$, (2.3), los casos 1 y 2 y el Lema 2.1.2, concluimos que $\langle \{V_x \mid x \in F''\} \rangle_K \subseteq \langle \mathcal{V} \rangle_K$ y entonces $\mathcal{B}'$ es una base para $K(X)$. □

***Teorema* 2.2.5.** *Si X es un espacio con dimensión cero, entonces $K(X)$ también tiene dimensión cero.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de subconjuntos abiertos y cerrados de X. Por el Lema 2.2.4 sabemos que $\mathcal{B}' = \{\langle B \rangle_K \mid B \subseteq \mathcal{B} \wedge |B| \in \omega\}$ es una base para $K(X)$. Resta demostrar que todo elemento en $\mathcal{B}'$ es un subconjunto cerrado de $K(X)$.

Si $\{U_0, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $U_i = \overline{U_i}$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, de donde $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle_K = \langle \overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n \rangle_K = \overline{\langle U_0, \ldots, U_n \rangle}_K$ por el Lema 2.1.4. En consecuencia, $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle_K$ es cerrado en $K(X)$. □

A veces necesitaremos tomar unión sobre subconjuntos de $K(X)$. Nuestros siguientes dos resultados nos dan información al respecto.

***Teorema* 2.2.6.** *Sean X un espacio y T un subespacio compacto de $K(X)$. El conjunto $\bigcup T$ es un subespacio compacto de X y $T \subseteq K(\bigcup T)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\bigcup T$. Como $T \subseteq K(X)$, para cada $F \in T$ existe un subconjunto finito $\mathcal{U}_F$ de $\mathcal{U}$ el cual es una cubierta abierta de F. Para cada $F \in T$ nombremos $V_F = \bigcup \mathcal{U}_F$ y observemos que $F \subseteq V_F$, por lo que $F \in \langle V_F \rangle_K$ para cada $F \in T$. Obtenemos que el conjunto $\{\langle V_F \rangle_K \mid F \in T\}$ es una cubierta abierta para T en $K(X)$. Usemos ahora que T es un espacio compacto para encontrar $F_0, \ldots, F_n \in T$ tales que $\{\langle V_{F_0} \rangle_K, \ldots, \langle V_{F_n} \rangle_K\}$ sea una cubierta finita de T en $K(X)$. Luego, para cada $F \in T$ existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $F \in \langle V_{F_k} \rangle_K$, de donde $F \subseteq V_{F_k}$. Así, $\bigcup T \subseteq \bigcup_{i=0}^n V_{F_i}$. Hemos demostrado que $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_{F_i}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para $\bigcup T$, lo que es suficiente para probar que $\bigcup T$ es compacto. Finalmente, cada $F \in T$ es compacto y cumple que $F \subseteq \bigcup T$, de manera que $T \subseteq K(\bigcup T)$. □

***Teorema* 2.2.7.** *Sea X un espacio. La función $\bigcup : K(K(X)) \to K(X)$ dada por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$ está bien definida y es continua.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.6, la función $\bigcup$ está bien definida.

Sean $\mathcal{B} \in K(K(X))$ y $\bigcup \mathcal{B} = B$. Tomaremos una familia finita de subconjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_n\}$ de X tal que $B \in \langle \mathcal{U} \rangle_K$. Encontraremos un subconjunto abierto $\mathfrak{U}$ de $K(K(X))$ tal que $\mathcal{B} \in \mathfrak{U}$ y $\bigcup[\mathfrak{U}] \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_K$.

Sean $U = \bigcup \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_i = \langle U_i, U \rangle_K$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Proponemos

$$\mathfrak{U} = \langle \mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n \rangle_K.$$

Notemos que $\mathfrak{U}$ es efectivamente un subconjunto abierto de $K(K(X))$.

Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, sea $x_i \in U_i \cap B$ y elijamos $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x_i \in B_i$. De esta forma, $B_i \in \langle U_i, U \rangle_K$ y así,

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Tomemos $A \in \mathcal{B}$ y observemos que $A \subseteq \bigcup \mathcal{B} = B$. Recordando que $B \in \langle \mathcal{U} \rangle_K$, se infiere que $B \subseteq U$. Por esta razón $A \subseteq U$ y, como $A \neq \emptyset$, existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $A \cap U_j \neq \emptyset$, lo cual es suficiente para mostrar que $A \in \mathcal{U}_j$. Deducimos que $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ y por tanto,

$$\mathcal{B} \in \mathfrak{U}. \tag{2.5}$$

Probaremos ahora que

$$\bigcup[\mathfrak{U}] \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_K. \tag{2.6}$$

Sea $\mathcal{D} \in \mathfrak{U}$ y llamemos $D = \bigcup \mathcal{D}$.

Si $x \in D$, entonces existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $x \in E$. Por definición de vietórico se tiene que $\mathcal{D} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} \langle U_i, U \rangle_K$. De esta forma, existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $E \in \langle U_i, U \rangle_K$. De modo que $E \subseteq U$, de donde $x \in U$. En consecuencia,

$$D \subseteq U. \tag{2.7}$$

Escojamos $E_i \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Luego, $E_i \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$, por lo que podemos tomar $y_i \in E_i \cap U_i$ para cada

$i \in \{0, \ldots, n\}$. Debido a que $E_i \in \mathcal{D}$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, se asegura que $y_i \in D$; es decir,

$$y_i \in D \cap U_i \text{ para cada } i \in \{0, \ldots, n\}. \tag{2.8}$$

Los enunciados (2.7) y (2.8) demuestran que $D \in \langle \mathcal{U} \rangle_K$, lo que implica (2.6). Finalmente, (2.5) y (2.6) justifican que $\mathcal{B} \in \mathfrak{U}$ y $\bigcup[\mathfrak{U}] \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_K$. En otras palabras, $\bigcup$ es continua. □

Nuestros siguientes dos resultados son más bien técnicos, pero serán de utilidad en la Sección 4.3, en específico en la demostración del Lema 4.3.3.

***Teorema* 2.2.8.** *Sea X un espacio. Sean las sucesiones (en el sentido tradicional de sucesión) $\{A_n\}_{n\in\omega}, \{B_n\}_{n\in\omega} \subseteq K(X)$ y $A, B \in K(X)$ tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Si $A_n \subseteq B_n$ para toda $n \in \omega$, entonces $A \subseteq B$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $x \in A \setminus B$. Por el Lema 1.3.20 existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que

$$x \in U, B \subseteq V \text{ y } U \cap V = \emptyset. \tag{2.9}$$

Luego, $A \in \langle U, X \rangle_K$. Usando que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, aseguramos que existe $N \in \omega$ que cumple que $A_n \in \langle U, X \rangle_K$ para cualquier $n \geq N$. Así, $A_n \cap U \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$ y por lo tanto

$$B_n \cap U \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N. \tag{2.10}$$

Por otro lado, de (2.9) se tiene que $B \in \langle V \rangle_K$, por lo que existe $N' \in \omega$ tal que $B_n \in \langle V \rangle_K$ siempre que $n \geq N'$; es decir,

$$B_n \subseteq V \text{ para cada } n \geq N'. \tag{2.11}$$

Por (2.10) y (2.11) se sabe que $B_{N+N'} \cap U \neq \emptyset$ y $B_{N+N'} \subseteq V$, pero esto contradice (2.9). La contradicción viene de suponer que x existe. Concluimos que $A \subseteq B$. □

***Lema* 2.2.9.** *Sea X un espacio. Si $\mathcal{A}$ es un subespacio compacto y conexo de $K(X)$ y $S \in \mathcal{A}$, entonces cada componente conexa de $\bigcup \mathcal{A}$ intersecta a S.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe una componente conexa A de $\bigcup\mathcal{A}$ tal que $S \cap A = \emptyset$. Por el Teorema 2.2.7 sabemos que $\bigcup\mathcal{A}$ es compacto, de donde $A \in K(X)$ también. Luego, el Corolario 1.3.25 asegura la existencia de dos subconjuntos cerrados y ajenos U y W de $\bigcup\mathcal{A}$ (por lo que también son subconjuntos cerrados de X) tales que

$$S \subseteq U, \ A \subseteq W \text{ y } U \cup W = \bigcup\mathcal{A}. \tag{2.12}$$

Del Lema 2.1.4 se sigue que

$$\langle U\rangle_K \text{ y } \langle W, X\rangle_K \text{ son subconjuntos cerrados de } K(X) \tag{2.13}$$

y, por hipótesis y (2.12), tenemos certeza de que

$$S \in \langle U\rangle_K \cap \mathcal{A}. \tag{2.14}$$

Como $A \subseteq \bigcup\mathcal{A}$ es no vacío, se deduce que existe algún $C \in \mathcal{A}$ tal que $C \cap A \neq \emptyset$. Gracias a (2.12) se cumple que $A \subseteq W$, así que $C \cap W \neq \emptyset$; es decir que

$$C \in \mathcal{A} \cap \langle W, X\rangle_K. \tag{2.15}$$

Notemos que si $S' \in \mathcal{A}$, entonces $S' \subseteq \bigcup\mathcal{A}$. De aquí, (2.12) deja claro que $S' \subseteq U$, o bien $S' \cap W \neq \emptyset$. De esta forma, que S' sea un elemento de $\mathcal{A}$ implica que $S' \in \langle U\rangle_K$, o bien $S' \in \langle W, X\rangle_K$, con lo que probamos que

$$\mathcal{A} \subseteq \langle U\rangle_K \cup \langle W, X\rangle_K. \tag{2.16}$$

Ahora, si $S' \in \langle U\rangle_K$, se infiere que $S' \subseteq U$, lo que justifica que $S' \cap W = \emptyset$ y por lo tanto $S' \notin \langle W, X\rangle_K$; en otras palabras

$$\langle U\rangle_K \cap \langle W, X\rangle_K = \emptyset. \tag{2.17}$$

Finalmente, (2.16), (2.17), (2.13), (2.14) y (2.15) demuestran que $\langle U\rangle_K$ y $\langle W, X\rangle_K$ forman una disconexión de $\mathcal{A}$ en $K(X)$, en contradicción al hecho de que $\mathcal{A}$ es conexo. □

***Teorema* 2.2.10.** [7, Lema 13.2, p. 106]
Sea X un espacio métrico y compacto. La función diám: $K(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que a cada elemento de $K(X)$ le asigna su diámetro, es una función continua.

***Teorema* 2.2.11.** [7, Corolario 3.7, p. 19]
Si X es un espacio métrico y compacto, entonces $C(X)$ también lo es.

2.3. La métrica de Hausdorff.

Dado un espacio métrico X, es deseable encontrar una métrica para $K(X)$ que relacione su topología con la métrica de X. Una métrica con esta propiedad es la métrica de Hausdorff, la cual conoceremos en la Definición 2.3.3. Nuestra intención no es hacer un estudio sobre la métrica de Hausdorff, de manera que sólo introduciremos algunos resultados básicos que serán usados posteriormente y no incluiremos las pruebas de resultados más elaborados. Como siempre, las referencias de los resultados que no sean probados serán incluidas para su consulta.

El objetivo de esta sección es presentar las herramientas necesarias para las demostraciones de la Proposición 4.3.9 y del Lema 4.3.14 principalmente.

Al estudiar hiperespacios de espacios métricos es conveniente recordar el concepto de nube, el cual definimos a continuación.

Definición 2.3.1. Dados un espacio métrico X, $F \subseteq X$ y $\epsilon > 0$, definimos:

$$N_\epsilon(F) = \bigcup_{x \in F} B_\epsilon(x).$$

A $N_\epsilon(F)$ se le conoce como la *nube de radio* ϵ alrededor de F en X.

***Lema* 2.3.2.** *Sean (X, d) un espacio métrico y A, B y C subconjuntos de X. Si $\epsilon, \delta > 0$ son tales que $A \subseteq N_\epsilon(B)$ y $B \subseteq N_\delta(C)$, entonces $A \subseteq N_{\epsilon+\delta}(C)$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Por definición existe $b \in B$ tal que $a \in B_\epsilon(b)$. Como $b \in N_\delta(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $b \in B_\delta(c)$. Así, $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < \epsilon + \delta$ y por lo tanto, $a \in B_{\epsilon+\delta}(c)$. Concluimos que $A \subseteq N_{\epsilon+\delta}(C)$. □

Definición 2.3.3. Sea X un espacio métrico con métrica acotada. Definimos la función $H : K(X) \times K(X) \to \mathbb{R}$ como

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq N_\epsilon(B) \wedge B \subseteq N_\epsilon(A)\}.$$

Se sabe que H es una métrica para $K(X)$ (vea [11, Teorema 0.2, p. 2]) y es comúnmente conocida como *métrica de Hausdorff.*

***Teorema* 2.3.4.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $A, B \in K(X)$ y $\epsilon > 0$. Si H es la métrica de Hausdorff para $K(X)$, entonces $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subseteq N_\epsilon(B)$ y $B \subseteq N_\epsilon(A)$.*

Demostración. Asumiremos primero que $H(A,B) < \epsilon$. De las definiciones de ínfimo y de $H(A,B)$ se sabe que existe $\delta > 0$ con las propiedades de que $H(A,B) \leq \delta < \epsilon$, $A \subseteq N_\delta(B)$ y $B \subseteq N_\delta(A)$. Luego, $A \subseteq N_\epsilon(B)$ y $B \subseteq N_\epsilon(A)$.

Supongamos que $A \subseteq N_\epsilon(B)$ y $B \subseteq N_\epsilon(A)$. Si llamamos $\mathcal{U} = \{N_\delta(A) \mid \delta \in (0,\epsilon)\}$ obtenemos que $N_\epsilon(A) = \bigcup \mathcal{U}$ y por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para B. La compacidad de B demuestra que existe un subconjunto finito Δ de $(0,\epsilon)$ tal que $B \subseteq \bigcup_{\delta \in \Delta} N_\delta(A)$. Nombremos $\delta' = \text{máx}\,\Delta$ y observemos que $B \subseteq N_{\delta'}(A)$. Similarmente, para A existe $\delta'' \in (0,\epsilon)$ tal que $A \subseteq N_{\delta''}(B)$. Concluimos que $\text{máx}\{\delta', \delta''\} \in (0,\epsilon)$, que $A \subseteq N_{\text{máx}\{\delta',\delta''\}}(B)$ y que $B \subseteq N_{\text{máx}\{\delta',\delta''\}}(A)$. Hemos probado que $H(A,B) \leq \text{máx}\{\delta', \delta''\} < \epsilon$. $\square$

***Teorema* 2.3.5.** [11, Teorema 0.13, p. 16].
Dado un espacio métrico y compacto X, la topología generada por la métrica de Hausdorff para $K(X)$ coincide con la topología de Vietoris.

***Teorema* 2.3.6.** [10, Teorema 4.9.13, p 164]
Un espacio X es metrizable si y sólo si $K(X)$ es metrizable.

Capítulo 3

El hiperespacio $S_c(X)$.

En este capítulo introduciremos una nueva definición de sucesión convergente, para dar lugar a un hiperespacio del que poco se sabe aún. Comenzaremos presentando al conjunto $S_c(X)$ y posteriormente se le dará topología a partir de lo visto en el Capítulo 2.

3.1. Sucesiones convergentes no triviales.

Definición 3.1.1. Un subconjunto S de un espacio X es una *sucesión convergente no trivial* si:

1. S es numerable;

2. existe un elemento $x \in S$ tal que para cualquier vecindad V de x en X se cumple que $S \setminus V$ es finito.

***Proposición* 3.1.2.** Sean X un espacio y S una sucesión convergente no trivial de X. Si $x, y \in S$ satisfacen el punto 2 de la Definición 3.1.1 para S, entonces $x = y$.

Demostración. Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que $x \neq y$. Debido a que X es un espacio T_2 es que podemos tomar dos subconjuntos abiertos de X y ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$. De la hipótesis se deduce que $S \setminus U$ y $S \setminus V$ son finitos. Usando que U y V son ajenos obtenemos que $S \cap V \subseteq S \setminus U$. Observemos ahora que $S = (S \cap V) \cup (S \setminus V)$, de donde S es la unión de dos conjuntos finitos, por lo que S es finito. Esto es una contradicción al punto 1 de la Definición 3.1.1. Ergo, $x = y$. $\square$

En vista de la Proposición 3.1.2, dada una sucesión convergente no trivial S, al elemento al que hace referencia el punto 2 de la Definición 3.1.1 le llamaremos el *límite* de S y lo denotaremos por $\lim S$. También diremos que S *converge* a x. Al conjunto de las sucesiones convergentes no triviales de un espacio (X, τ) lo denotamos como $S_c(X, \tau)$ o simplemente como $S_c(X)$.

Definición 3.1.3. Dados un espacio X y $S \in S_c(X)$, una *enumeración* de S será un listado de los elementos de S, de forma que a cada elemento en S se le asocie un único número natural.

Con esto último en mente, usulamente identificaremos a S con el conjunto $\{x_n \mid n \in \omega\}$.

Nuestra definición de sucesión convergente es diferente a la idea que se tiene tradicionalmente. La diferencia radica en que usualmente se piensa en una sucesión como una función, mientras que nuestra definición hace referencia a la imagen de dicha función cuando la imagen no es finita. En los espacios que estamos estudiando (i.e. espacios T_2) se tiene el siguiente resultado.

***Teorema* 3.1.4.** *Sean X un espacio y $S \in S_c(X)$, entonces $S \setminus \{\lim S\}$ es discreto.*

Demostración. Sean $x = \lim S$ y $y \in S \setminus \{x\}$. Para concluir bastará demostrar que $\{y\}$ es un subconjunto abierto de S. Como X es T_2, sabemos que existen subconjuntos abiertos ajenos U y V de X tales que $x \in U$ y $y \in V$. Por el punto 2 de la Definición 3.1.1 se cumple que $S \setminus U$ es finito. Sea $S \setminus U = \{y, z_1, \ldots, z_m\}$. Consideramos $A = (\bigcap_{i=1}^{m} X \setminus \{z_i\}) \cap V$, entonces A es abierto en X y además $A \cap S = \{y\}$, por lo tanto $\{y\}$ es abierto en S como quería probarse. $\square$

En el artículo [4], la condición de que $S \setminus \{\lim S\}$ sea discreto es parte de la definición de sucesión convergente no trivial; sin embargo, dicha condición es una consecuencia de la Definición 3.1.1 como hemos visto.

A continuación presentamos un ejemplo de una sucesión convergente no trivial, la cual nos será de utilidad en el Teorema 3.4.1.

Ejemplo 3.1.5. *El conjunto $\omega \cup \{\omega\}$ es una sucesión convergente no trivial en $[0, \omega_1]$ y converge a ω.*

Demostración. El conjunto $\omega \cup \{\omega\}$ es numerable. Así, de la Definición 3.1.1, basta probar sólo el punto 2.

Sea U una vecindad de ω en $[0, \omega_1]$, entonces existen $\alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $\omega \in (\alpha, \beta) \subseteq U$. De aquí, $\alpha < \omega$ y por lo tanto $\alpha \in \omega$. Finalmente, es verdad que

$$(\omega \cup \{\omega\}) \backslash U \subseteq (\omega \cup \{\omega\}) \backslash (\alpha, \beta) = \{0, 1, \ldots, \alpha\},$$

el cual es un conjunto finito. De esta forma, $\omega \cup \{\omega\} \in S_c([0, \omega_1])$ y converge a ω. $\square$

Observación 3.1.6. Para un espacio X, una sucesión $S \in S_c(X)$ y un subespacio A de X tal que $S \subseteq A$, es verdad que S es una sucesión convergente no trivial como subconjunto de A, por esta razón podemos afirmar que $S_c(A) \subseteq S_c(X)$.

Posteriormente (en la Proposición 3.2.4), después de haber dotado de topología a $S_c(X)$, seremos capaces de afirmar que la topología de $S_c(A)$ coincide con la topología que hereda como subespacio de $S_c(X)$.

El siguiente lema técnico ayudará a reconocer cuánto se puede modificar una sucesión convergente no trivial de forma que el nuevo conjunto aún sea una sucesión convergente no trivial.

***Lema* 3.1.7.** *Sean A un subconjunto finito de un espacio X y $S \in S_c(X)$, entonces:*

1) $S \cup A \in S_c(X)$ *y converge a* $\lim S$.

2) *Si* $K \subseteq S$ *es tal que* $\lim S \in K$ *y* $|K| = \omega$, *entonces* $K \in S_c(X)$ *y* $\lim K = \lim S$.

3) *Si* $\lim S \notin A$, *entonces* $S \backslash A \in S_c(X)$ *y converge a* $\lim S$.

4) *Si Y es un espacio, $f : X \to Y$ es una función continua y $f[S]$ es numerable, entonces $f[S] \in S_c(Y)$ y converge a $f(\lim S)$.*

Demostración. 1) Como A es finito deducimos que

$$|S| \leq |S \cup A| \leq |S| + |A| = |S|,$$

entonces $S \cup A$ es numerable. Si V es vecindad de $\text{lím}\, S$ entonces

$$|(S \cup A)\backslash V| = |(S\backslash V) \cup (A\backslash V)| \leq |S\backslash V| + |A\backslash V|.$$

Sabemos que $S\backslash V$ es finito y A también, por lo que se tiene que $|S\backslash V|+|A\backslash V|$ es finito. Concluimos que $S \cup A \in S_c(X)$ y que converge a $\text{lím}\, S$.

2) Si V es una vecindad de $\text{lím}\, S$ en X, entonces $K\backslash V \subseteq S\backslash V$. Por hipótesis sabemos que $S\backslash V$ es finito, por lo tanto $K\backslash V$ es finito y así $K \in S_c(X)$.

3) Se sigue inmediatamente de 2).

4) Por hipótesis se sabe que $f[S]$ es numerable. Sea V una vecindad de $f(\text{lím}\, S)$ en Y. Debido a que f es una función continua y a que $f(\text{lím}\, S) \in V$, ocurre que $f^{-1}[V]$ es una vecindad de $\text{lím}\, S$ en X. Usando el punto 2 de la Definición 3.1.1 conseguimos que $S\backslash f^{-1}[V]$ es finito. Usemos que $f[f^{-1}[V]] \subseteq V$ para ver que $f[S]\backslash V \subseteq f[S]\backslash f[f^{-1}[V]]$. Luego, gracias a que

$$f[S]\backslash f[f^{-1}[V]] \subseteq f[S\backslash f^{-1}[V]]$$

es que

$$f[S]\backslash V \subseteq f[S\backslash f^{-1}[V]].$$

Finalmente, como f es una función y $S\backslash f^{-1}[V]$ es finito, concluimos que $f[S\backslash f^{-1}[V]]$ es finito, de donde $f[S]\backslash V$ es finito también. Deducimos que $f[S]$ converge a $f(\text{lím}\, S)$. $\square$

Observación 3.1.8. Sean X un espacio, $S \in S_c(X)$ y sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $S \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $\text{lím}\, S \in V$. Como $S\backslash V$ es finito, se deduce que S puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$, mostrando así que S es compacto. Además, como X es T_2 se tiene que S es cerrado en X.

3.2. Propiedades de $S_c(X)$.

En vista de la Observación 3.1.8, a partir de este momento consideraremos a $S_c(X)$ como subespacio de $K(X)$ con la topología de Vietoris. Así,

$$\mathcal{B}' = \{\langle \mathcal{U} \rangle \cap S_c(X) \in \mathcal{P}(K(X)) \mid \langle \mathcal{U} \rangle \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de $S_c(X)$.

Notación 3.2.1. Dados $U_0, \ldots, U_n \subseteq X$ y $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_n\}$, usaremos la notación $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle_c$ para referirnos al conjunto $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle \cap S_c(X)$ y $\langle \mathcal{U} \rangle_c$ para hacer referencia de $\langle \mathcal{U} \rangle \cap S_c(X)$.

La siguiente observación nos dará maneras alternas de referirnos a los vietóricos en $S_c(X)$, lo cual será muy útil en secciones posteriores.

Observación 3.2.2. Sea X un espacio. Dados $W_1, \ldots, W_n \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que:

$$\langle W_1, \ldots, W_n \rangle \cap S_c(X) = \langle W_1, \ldots, W_n \rangle \cap K(X) \cap S_c(X) = \langle W_1, \ldots, W_n \rangle_K \cap S_c(X).$$

Por otro lado, si $A \subseteq X$ entonces:

$$\big(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle \cap K(A)\big) \cap S_c(A) = \langle W_1, \ldots, W_n \rangle_K \cap S_c(A).$$

El siguiente lema será necesario para probar la Proposición 3.2.4, la cual será importante tener presente al momento de considerar funciones continuas que tengan por contradominio el hiperespacio de sucesiones convergentes para algún subespacio del principal espacio en cuestión. Como ejemplo de lo anterior, si X es un espacio y $A \subseteq X$, mostraremos que una trayectoria en $S_c(A)$ es una trayectoria también en $S_c(X)$.

***Lema* 3.2.3.** *Sean X un espacio, $A \subseteq X$, $n \in \omega$ y $\{U_0, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces $\langle U_0, \ldots, U_n \rangle \cap S_c(A) = \langle A \cap U_0, \ldots, A \cap U_n \rangle \cap S_c(A)$.*

Demostración. Del Lema 2.1.2 se deduce que $\langle A \cap U_0, \ldots, A \cap U_n \rangle \subseteq \langle U_0, \ldots, U_n \rangle$; de aquí,

$$\langle A \cap U_0, \ldots, A \cap U_n \rangle \cap S_c(A) \subseteq \langle U_0, \ldots, U_n \rangle \cap S_c(A).$$

Ahora, si $S \in \langle U_0, \dots, U_n \rangle \cap S_c(A)$, entonces $S \subseteq A$ y $S \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i$; de esta forma

$$S \subseteq (\bigcup_{i=0}^{n} U_i) \cap A = \bigcup_{i=0}^{n} (U_i \cap A).$$

Debido a que $S \in \langle U_0, \dots, U_n \rangle$, se asegura que $S \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$; como además $S \subseteq A$, entonces $S \cap (U_i \cap A) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Por lo tanto, $S \in \langle A \cap U_0, \dots, A \cap U_n \rangle$ y entonces $S \in \langle A \cap U_0, \dots, A \cap U_n \rangle \cap S_c(A)$, lo cual prueba que

$$\langle U_0, \dots, U_n \rangle \cap S_c(A) \subseteq \langle A \cap U_0, \dots, A \cap U_n \rangle \cap S_c(A).$$

□

***Proposición* 3.2.4.** *Sean (X, τ) un espacio y $A \subseteq X$, entonces la topología τ_1 que hereda $S_c(A)$ como subespacio de $S_c(X, \tau)$ coincide con la topología τ_2 que se le asocia como hiperespacio de (A, τ_A).*

Demostración. Sean $\mathcal{A} \in \tau_1$ y $S \in \mathcal{A}$. Por la Observación 3.2.2 existen $n \in \omega$ y $\{U_0, \dots, U_n\} \subseteq \tau$ tales que $S \in (\langle U_0, \dots, U_n \rangle_K \cap S_c(X)) \cap S_c(A) \subseteq \mathcal{A}$. Puesto que $S_c(A) \subseteq S_c(X)$, se tiene que

$$(\langle U_0, \dots, U_n \rangle_K \cap S_c(X)) \cap S_c(A) = \langle U_0, \dots, U_n \rangle_K \cap S_c(A).$$

Del Lema 3.2.3 se sabe que $\langle U_0, \dots, U_n \rangle_K \cap S_c(A) = \langle A \cap U_0, \dots, A \cap U_n \rangle_K \cap S_c(A)$ y como $A \cap U_i \in \tau_A$ para cualquier $i \in \{0, \dots, n\}$, la Observación 3.2.2 garantiza que $\langle U_0, \dots, U_n \rangle_K \cap S_c(A) \in \tau_2$. Así, dado que $S \in \langle U_0, \dots, U_n \rangle_K \cap S_c(A) \subseteq \mathcal{A}$ inferimos que $\mathcal{A} \in \tau_2$.

Sean ahora $\mathcal{B} \in \tau_2$ y $S' \in \mathcal{B}$. Gracias a la Observación 3.2.2 sabemos que existen $V_0, \dots, V_k \in \tau$ tales que $S' \in \langle A \cap V_0, \dots, A \cap V_k \rangle_K \cap S_c(A) \subseteq \mathcal{B}$. Del Lema 3.2.3 se obtiene que

$$\langle A \cap V_0, \dots, A \cap V_k \rangle_K \cap S_c(A) = \langle V_0, \dots, V_k \rangle_K \cap S_c(A)$$

y, de esta forma, existe $W \in \tau_1$ (a saber $W = \langle V_0, \dots, V_k \rangle_K \cap S_c(X) \cap S_c(A)$) tal que $S' \in W \subseteq \mathcal{B}$. Concluimos que $\mathcal{B} \in \tau_1$. □

Ahora que hemos propuesto una topología para $S_c(X)$ es justo preguntarse si nuestra propuesta es también un espacio bajo nuestros parámetros; es decir, si $S_c(X)$ es siempre T_2. De aquí la importancia del siguiente resultado.

***Teorema* 3.2.5.** *Sea X un espacio topológico (del que no tenemos seguridad que sea T_2). Son equivalentes:*

a) X es un espacio T_2;

b) $K(X)$ es un espacio T_2.

Demostración. Supongamos que X es un espacio T_2 y sean A y B subespacios compactos, distintos y no vacíos de X. Usemos que $A \neq B$ para suponer sin pérdida de generalidad que existe $a \in A \backslash B$. Por el Lema 1.3.18 sabemos que existen dos subconjuntos abiertos U y V de X que satisfacen que $a \in U$, $B \subseteq V$ y, además, $U \cap V = \emptyset$. Notemos ahora que $A \subseteq U \cup X = X$, que $a \in A \cap U$ y que $a \in A \cap X$, por lo que $A \in \langle U, X\rangle_K$. De forma similar, $B \subseteq V$ y $B \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto $B \in \langle V\rangle_K$.

Demostremos ahora que $\langle U, X\rangle_K \cap \langle V\rangle_K = \emptyset$. Sea $C \in \langle U, X\rangle_K$, entonces $C \cap U \neq \emptyset$, de lo cual se deduce que existe $c \in C \cap U$. Como $V \cap U = \emptyset$, se tiene que $c \notin V$, lo que es suficiente para probar que $C \nsubseteq V$ y así, $C \notin \langle V\rangle_K$. Hemos probado que todo elemento en $\langle U, X\rangle_K$ no puede ser un elemento de $\langle V\rangle_K$; es decir, $\langle U, X\rangle_K \cap \langle V\rangle_K = \emptyset$ como se quería. En consecuencia, $K(X)$ es un espacio T_2.

Supongamos ahora que $K(X)$ es un espacio T_2. Sean x e y elementos distintos de X. Puesto que $\{x\}$ y $\{y\}$ son elementos distintos de $K(X)$, existen dos subconjuntos abiertos Ω y Ω' de $K(X)$ tales que $\{x\} \in \Omega$, $\{y\} \in \Omega'$ y $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Consideremos dos subconjuntos básicos $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ de $K(X)$ que cumplan que $\{x\} \in \mathcal{W} \subseteq \Omega$ y que $\{y\} \in \mathcal{W}' \subseteq \Omega'$; en otras palabras, existen subconjuntos abiertos $W_0, \ldots, W_n, W'_0, \ldots, W'_m$ de X tales que $\mathcal{W} = \langle W_0, \ldots, W_n\rangle_K$ y que $\mathcal{W}' = \langle W'_0, \ldots, W'_m\rangle_K$. Nombremos

$$D = \bigcap_{i=0}^{n} W_i \text{ y } D' = \bigcap_{i=0}^{m} W'_i.$$

Los conjuntos D y D' son subconjuntos abiertos de X. Veamos que D y D' son tales que $x \in D$, $y \in D'$ y $D \cap D' = \emptyset$. Del hecho de que $\{x\} \in \mathcal{W}$ se sabe que $\{x\} \cap W_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, de manera que $x \in W_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Similarmente, $y \in W'_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$. Inferimos que $x \in D$ y también que $y \in D'$. Para ver que D es ajeno a D' tomemos $z \in D$, lo que quiere decir que $z \in W_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$; esto basta para afirmar que $\{z\} \in \mathcal{W}$. Partamos ahora de que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}' = \emptyset$ para garantizar que $\{z\} \notin \mathcal{W}'$. Luego, $\{z\} \nsubseteq \bigcup_{i=0}^{m} W_i'$ o bien, hay algún $j \in \{0, \ldots, m\}$ para el cual $\{z\} \cap W_j' = \emptyset$. De cualquier forma, existe algún $j \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $z \notin W_j'$, ergo, $z \notin D'$. Hemos demostrado que $D \cap D' = \emptyset$. □

***Corolario* 3.2.6.** *Si X es un espacio T_2, entonces $S_c(X)$ también es un espacio T_2.*

Definición 3.2.7. Una *familia celular de conjuntos* en un espacio X es una familia de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, cuyos elementos son ajenos por pares. A la colección de familias celulares finitas de un conjunto X se le denotará por $\mathfrak{C}(X)$.

Definición 3.2.8. Se dice que $\langle U_0, \ldots, U_n\rangle$ es un *vietórico celular* si $\{U_0, \ldots, U_n\} \in \mathfrak{C}(X)$.

El concepto de vietórico celular será especialmente útil al estudiar al hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales. La razón de esto es que usar el siguiente teorema (Teorema 3.2.9) de forma adecuada simplifica notablemente algunas demostraciones.

***Teorema* 3.2.9.** *Sea (X, τ) un espacio. El conjunto*

$$\mathcal{D} = \{\langle B_0, \ldots, B_t\rangle_c \mid \{B_0, \ldots, B_t\} \in \mathfrak{C}(X)\}$$

es base para la topología de Vietoris de $S_c(X, \tau)$.

Demostración. Por definición sabemos que $\mathcal{D}$ es un conjunto de elementos de la topología de Vietoris de $S_c(X)$. Tomemos $S \in S_c(X)$. Sea $\mathcal{A} = \{U_0, \ldots, U_n\} \subseteq \tau$ tal que $S \in \langle \mathcal{A}\rangle_c$, demostraremos que

$$\text{existen } V_0, \ldots, V_m \in \tau \text{ tales que } S \in \langle V_0, \ldots, V_m\rangle_c \subseteq \langle \mathcal{A}\rangle_c$$

$$\text{y } V_i \cap V_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Para cada $s \in S$, definimos

$$U_s = \bigcap\{U \in \mathcal{A} \mid s \in U\}.$$

Si llamamos $x = \lim S$, entonces $S \backslash U_x$ es finito. Sean $F = \{i \in \{0, \ldots, n\} \mid x \notin U_i\}$ y $y_i \in U_i \cap S$ para cada $i \in F$. Observemos que el conjunto $\{y_i \in$

$X \mid i \in F\}$ es finito, de lo cual inferimos que $(S \setminus U_x) \cup \{y_i \mid i \in F\}$ también es finito. Nombremos ahora $B = (S \setminus U_x) \cup \{y_i \mid i \in F\}$ y $r = |B|$. Por el inciso 3) del Lema 3.1.7 se sabe que $S \setminus B \in S_c(X)$ y por lo tanto es un subespacio compacto de X. Además, B también es finito, lo que implica que B es compacto. Usando el Lema 1.3.18 podemos encontrar dos subconjuntos abiertos y ajenos W_1 y W_2 de X tales que $S \setminus B \subseteq W_1$ y que $B \subseteq W_2$. Utilizamos ahora el Lema 1.3.20 para encontrar una colección $\{\hat{V}_0, \ldots, \hat{V}_{r-1}\}$ de subconjuntos abiertos y ajenos de X tales que $|\hat{V}_i \cap B| = 1$ para cualquier $i \in \{0, \ldots, r-1\}$; nombremos b_i al único elemento en $B \cap \hat{V}_i$. Así, $B = \{b_0, \ldots, b_{r-1}\}$. Para cada $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, sean

$$V_i = W_2 \cap \hat{V}_i \cap U_{b_i} \text{ y } V_r = W_1 \cap U_x,$$

de esta forma, V_i es un subconjunto abierto de X y además

$$V_i \cap V_j \subseteq \hat{V}_i \cap \hat{V}_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ y } j, i \in \{0, \ldots, r-1\}.$$

También se tiene que

$$V_i \cap V_r \subseteq W_2 \cap W_1 = \emptyset \text{ si } i \in \{0, \ldots, r-1\}.$$

Como $B \subseteq S$, $b_i \in V_i$ para cualquier $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ y $S \setminus B \subseteq V_r$, es verdad que $S \in \langle V_0, \ldots, V_r \rangle_c$.

Ahora probaremos que $\langle V_0, \ldots, V_r \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle_c$. Por construcción se sabe que $V_i \subseteq U_{b_i} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ para $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ y que $V_r \subseteq U_x \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, por lo tanto $\bigcup_{i=0}^{r} V_i \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Elegimos $U \in \mathcal{A}$, analizaremos los posibles casos.

Caso 1. Si $B \cap U = \emptyset$.
En este caso, $x \in U$ y entonces $V_r \subseteq U_x \subseteq U$.

Caso 2. Si $B \cap U \neq \emptyset$.
Aquí, existe $b_j \in B \cap U$ para alguna $j \in \{0, \ldots, r-1\}$ y entonces $V_j \subseteq U_{b_j} \subseteq U$.

Finalmente, por el Lema 2.1.2 concluimos que $\langle V_0, \ldots, V_r \rangle_c \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle_c$. □

Notación 3.2.10. Sea X un espacio. Usaremos la notación L_X para hacer referencia del conjunto $\{x \in X \mid \exists S (S \in S_c(X, \tau) \land x = \lim S)\}$.

***Teorema* 3.2.11.** *Sea (X, τ) un espacio. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) El hiperespacio $S_c(X, \tau)$ es denso en $CL(X, \tau)$;

2) para cada $U \in \tau\backslash\{\emptyset\}$, existe $S \in S_c(X, \tau)$ tal que $S \subseteq U$;

3) el conjunto L_X es denso en (X, τ).

Demostración. Supongamos que $S_c(X, \tau)$ es denso en $CL(X, \tau)$. Sea $U \in \tau\backslash\{\emptyset\}$, entonces $\langle U \rangle \neq \emptyset$. Así, existe $S \in S_c(X, \tau)$ tal que $S \in \langle U \rangle$ y por definición de vietórico, $S \subseteq U$.

Supongamos ahora que para cualquier $U \in \tau\backslash\{\emptyset\}$, existe $S \in S_c(X, \tau)$ tal que $S \subseteq U$. Para ver que L_X es denso en (X, τ) tomemos $V \in \tau\backslash\{\emptyset\}$. Por hipótesis sabemos que existe $S \in S_c(X, \tau)$ tal que $S \subseteq V$ y por lo tanto, $\lim S \in V$. De esta forma $L_X \cap V \neq \emptyset$ y concluimos que L_X es denso en (X, τ).

Finalmente, supongamos que L_X es denso en (X, τ). Sea $\langle \mathcal{A} \rangle$ un subconjunto básico y no vacío de $CL(X, \tau)$, es decir que $\mathcal{A}$ es un subconjunto finito y no vacío de $\tau\backslash\{\emptyset\}$. Mostraremos ahora que $\langle \mathcal{A} \rangle \cap S_c(X, \tau) \neq \emptyset$. Tomemos $U \in \mathcal{A}$. Usando la hipótesis de este caso, existe $S \in S_c(X, \tau)$ tal que $\lim S \in U$. Del punto 2 de la Definición 3.1.1 tenemos que $U \cap S$ es numerable. Por el punto 2) del Lema 3.1.7, es verdad que $U \cap S \in S_c(X, \tau)$. Elegimos ahora algún $x_V \in V$ para cada $V \in \mathcal{A}\backslash\{U\}$. Del punto 1) del Lema 3.1.7 se sigue que si

$$S' = (U \cap S) \cup \{x_V \in X \mid V \in \mathcal{A}\backslash\{U\}\},$$

entonces $S' \in S_c(X, \tau)$. Como además $S' \cap V \neq \emptyset$ para cualquier $V \in \mathcal{A}$ y $S' \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, entonces $S' \in \langle \mathcal{A} \rangle$ y por lo tanto, $S_c(X, \tau)$ es denso en $CL(X, \tau)$. □

El Teorema 3.2.11 nos muestra que no es particularmente difícil que $S_c(X)$ sea denso en $CL(X)$ (y por lo tanto en $K(X)$). Debido a que nuestros espacios son todos T_2, la compacidad de $S_c(X)$ supondría que $S_c(X)$ es cerrado en $K(X)$. Lo anterior nos sugiere que la compacidad es una propiedad que rara vez lograremos ver en $S_c(X)$.

3.3. Funciones inducidas.

Hablaremos ahora de la función inducida, la cual resultará muy útil cuando se trate de pasar de un hiperespacio a otro.

Definición 3.3.1. Dados dos espacios X y Y y una función $f : X \to Y$, la *función inducida* se define como

$$\hat{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \text{ dada por } \hat{f}(A) = f[A].$$

A la restricción de $\hat{f} : K(X) \to K(Y)$ le llamaremos 2^f, mientras que denotaremos por f_c a la restricción $\hat{f}|_{S_c(X)} : S_c(X) \to S_c(Y)$.

Observación 3.3.2. Si X e Y son espacios y $f : X \to Y$ es una función, entonces:

1) La restricción $\hat{f}|_{CL(X)} : CL(X) \to CL(Y)$ está bien definida si y sólo si f es cerrada.

2) Suponiendo que f es continua, se tiene que las restricciones $2^f : K(X) \to K(Y)$ y $\hat{f}|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$ están bien definidas.

Ver cuándo la restricción $f_c : S_c(X) \to S_c(Y)$ está bien definida supone un problema menos evidente.

***Teorema* 3.3.3.** *Sean dos espacios X e Y y $f : X \to Y$ una función continua. Si para cada $y \in Y$ se cumple que $f^{-1}[\{y\}]$ es finito, entonces la restricción $f_c : S_c(X) \to S_c(Y)$ está bien definida.*

Demostración. Sea $S \in S_c(X)$. Notemos que si $f[S]$ es finito, entonces alguna fibra de la imagen de S es numerable, lo que contradice la hipótesis. Por el inciso 4) del Lema 3.1.7 concluimos que $f[S] \in S_c(Y)$. $\square$

***Teorema* 3.3.4.** *Sean X e Y espacios y $f : X \to Y$ una función continua y cerrada, entonces $\hat{f}|_{CL(X)} : CL(X) \to CL(Y)$ es continua. De la misma forma, si f es continua, entonces la restricción $2^f : K(X) \to K(Y)$ es continua sin necesidad de que f sea cerrada.*

Demostración. Sean C un subconjunto cerrado y no vacío de X y $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_n\}$ una familia de subconjuntos abiertos de Y tal que $f[C] \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Ya que f es continua, la imagen inversa de abiertos es abierto, por lo que el vietórico $\langle f^{-1}[U_0], \ldots, f^{-1}[U_n] \rangle$ es abierto en $CL(X)$. Probemos que $C \in \langle f^{-1}[U_0], \ldots, f^{-1}[U_n] \rangle$. Del hecho de que $f[C] \in \langle \mathcal{U} \rangle$ sabemos que si $i \in \{0, \ldots, n\}$, entonces $f[C] \cap U_i \neq \emptyset$ y que $f[C] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Así, si $i \in \{0, \ldots, n\}$, se tiene que $C \cap f^{-1}[U_i] \neq \emptyset$ y también

$$C \subseteq f^{-1}[\bigcup_{i=0}^{n} U_i] = \bigcup_{i=0}^{n} f^{-1}[U_i].$$

Por lo tanto $C \in \langle f^{-1}[U_0], \ldots, f^{-1}[U_n] \rangle$. Veamos ahora que

$$\hat{f}|_{CL(X)}[\langle f^{-1}[U_0], \ldots, f^{-1}[U_n] \rangle] \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle.$$

Si $A \in \langle f^{-1}[U_0], \ldots, f^{-1}[U_n] \rangle$, entonces $A \cap f^{-1}[U_i] \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ y además $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} f^{-1}[U_i] = f^{-1}[\bigcup_{i=0}^{n} U_i]$; luego, para cualquier $i \in \{0, \ldots, n\}$ se cumple que $f[A] \cap U_i \neq \emptyset$ y que $f[A] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i$. Concluimos que $f[A] \in \langle \mathcal{U} \rangle$ y así $\hat{f}|_{CL(X)}$ es continua. La prueba para la continuidad de 2^f se puede hacer de manera similar. □

***Corolario* 3.3.5.** *Sean dos espacios X e Y y $f : X \to Y$ una función continua y supongamos que f_c está bien definida, entonces las restricciones $\hat{f}|_{C(X)}$ y f_c son funciones continuas.*

Demostración. Puesto que $C(X)$ y $S_c(X)$ son subespacios de $K(X)$ (vea Observación 3.1.8) y 2^f es continua si f lo es, entonces $2^f|_{C(X)}$ y $2^f|_{S_c(X)}$ son continuas si f lo es. Además, como nuestros espacios son T_2, es verdad que $K(X) \subseteq CL(X)$ y así $2^f|_{C(X)} = \hat{f}|_{C(X)}$ y $2^f|_{S_c(X)} = f_c$. □

***Teorema* 3.3.6.** *Si X e Y son espacios homeomorfos, entonces $S_c(X)$ es homeomorfo a $S_c(Y)$.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ un homeomorfismo y $g = f^{-1}$. Como f y g son funciones inyectivas y continuas, por el Teorema 3.3.3 y el Corolario 3.3.5 se sabe que $f_c : S_c(X) \to S_c(Y)$ y $g_c : S_c(Y) \to S_c(X)$ están bien definidas y son continuas. Más aún, si $A \in S_c(X)$ y $B \in S_c(Y)$ se tiene que

$$g_c(f_c(A)) = g[f[A]] = f^{-1}[f[A]] = A$$

y que

$$f_c(g_c(B)) = f[g[B]] = f[f^{-1}[B]] = B,$$

por lo que f_c tiene inversa continua y por lo tanto es un homeomorfismo.

□

3.4. Algunos hiperespacios de espacios particulares.

Ahora somos capaces de hablar sobre algunos ejemplos de hiperespacios usando las herramientas que hemos presentado en las secciones anteriores; veremos que $S_c([0,1])$, $S_c([0,\omega_1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ son espacios no homeomorfos dos a dos. Para ello introducimos los siguientes resultados.

***Teorema* 3.4.1.** *El hiperespacio* $S_c([0,\omega_1])$ *no es metrizable.*

Demostración. Usaremos τ para referirnos a la topología que ya establecimos en $[0,\omega_1]$. Demostraremos que el hiperespacio $S_c([0,\omega_1])$ no es primero numerable.

Sea $S = \omega \cup \{\omega, \omega_1\}$. Del Ejemplo 3.1.5 y el punto 1) del Lema 3.1.7, deducimos que

$$S \in S_c([0,\omega_1]).$$

Bastará probar que cualquier familia numerable de conjuntos básicos de $S_c([0,\omega_1])$ no puede ser una base local para S. Tomemos una familia numerable de conjuntos básicos $\{V_n \mid n \in \omega\}$ de $S_c([0,\omega_1])$ tal que $S \in V_n$ para toda $n \in \omega$; es decir, para cada $n \in \omega$ existe una familia finita $\mathcal{V}_n \subseteq \tau$ que satisface que $V_n = \langle \mathcal{V}_n \rangle_c$. Para cada $n \in \omega$, elegimos $U_n \in \mathcal{V}_n$ que cumpla que $\omega_1 \in U_n$. Notemos que $[0,\omega]$ es un subconjunto cerrado de $[0,\omega_1]$. Del hecho de que $\omega_1 \notin [0,\omega]$ y la Proposición 1.3.2 conseguimos que $\omega_1 \in U_n \backslash [0,\omega] \in \tau$ para todo $n \in \omega$. Por el Teorema 1.3.14 sabemos que $\{U_n \backslash [0,\omega] \mid n \in \omega\}$ no es base local para ω_1, por lo que existe $A \in \tau$ tal que $\omega_1 \in A$ y $U_n \backslash [0,\omega] \nsubseteq A$ para cada $n \in \omega$.

Consideremos un subconjunto básico $(\alpha, \omega_1]$ tal que $\alpha > \omega$ y $(\alpha,\omega_1] \subseteq A$, entonces

$$U_n \backslash [0,\omega] \nsubseteq (\alpha,\omega_1] \text{ siempre que } n \in \omega.$$

Para cada $n \in \omega$ escogemos $x_n \in (U_n \backslash [0,\omega]) \backslash (\alpha,\omega_1]$. Sea $n \in \omega$. Observemos que $[0,\omega] = [0,\omega+1)$ y que $(U_n \backslash [0,\omega]) \backslash (\alpha,\omega_1] = U_n \backslash ([0,\omega] \cup (\alpha,\omega_1])$ para cualquier $n \in \omega$, de donde

$$x_n \notin [0,\omega+1) \cup (\alpha,\omega_1] \text{ para cualquier } n \in \omega. \tag{3.1}$$

Sea $k \in \omega$. Gracias a que $x_k \in U_k$ y a que $S \in V_k$, podemos afirmar que $S \cup \{x_k\} \in V_k$. Por otro lado, por (3.1) estamos seguros de que

$$S \cup \{x_k\} \notin \langle [0, \omega + 1), (\alpha, \omega_1] \rangle_c.$$

Concluimos que

$$V_n \nsubseteq \langle [0, \omega + 1), (\alpha, \omega_1] \rangle_c \text{ para cualquier } n \in \omega.$$

Sin embargo, $S \in \langle [0, \omega + 1), (\alpha, \omega_1] \rangle_c$; por lo tanto $\{V_n \mid n \in \omega\}$ no es una base local para S.

Finalmente, $S_c([0, \omega_1])$ no es primero numerable y como tal, no es metrizable. □

Lema 3.4.2. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$, si existe $S \in S_c(X \setminus A)$, entonces la función $f : A \to S_c(X)$ definida por $f(x) = S \cup \{x\}$ es un encaje.*

Demostración. La función f está bien definida por el inciso 1) del Lema 3.1.7. Si $x, y \in A$ entonces $x, y \notin S$, y si además $x \neq y$, entonces $S \cup \{x\} \neq S \cup \{y\}$; por lo tanto, f es inyectiva.

Mostremos que f es continua. Recordemos que los vietóricos celulares forman una base para la topología de Vietoris de $S_c(X)$ (vea Teorema 3.2.9). Sean $x \in A$ y $U_0, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos y ajenos dos a dos de X tales que

$$S \cup \{x\} \in \mathcal{U} = \langle U_0, \ldots, U_n \rangle_c.$$

Por la definición de vietórico sabemos que $x \in U_k$ para algún $k \leq n$, entonces $x \in U_k \cap A$ e incluso $U_k \cap A$ resulta ser un subconjunto abierto no vacío de A. Veamos que $f[U_k \cap A] \subseteq \mathcal{U}$. Como $S \cup \{x\} \in \mathcal{U}$, entonces $(S \cup \{x\}) \cap U_i \neq \emptyset$ siempre que $i \in \{0, \ldots, n\}$; por lo tanto, si $k \neq i$ y $i \in \{0, \ldots, n\}$ sabemos que $S \cap U_i \neq \emptyset$. De aquí, para cualquier $z \in U_k \cap A$ se tiene que $(S \cup \{z\}) \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$; además $f(z) = S \cup \{z\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, así que $f(z) \in \mathcal{U}$. De esta forma $f[U_k \cap A] \subseteq \mathcal{U}$, por lo tanto f es continua en x y así, f es continua en A.

Ahora veamos que la imagen directa de un subconjunto abierto de A bajo la función f es un subconjunto abierto en $f[A]$. Sea V un subconjunto abierto de A no vacío, eso significa que existe un subconjunto abierto W de

X tal que $W \cap A = V$. Sea $y \in f[V]$, de esta manera $y = f(x)$ para algún $x \in V$. Gracias a que S y $\{x\}$ son subespacios compactos y ajenos de X, podemos usar el Lema 1.3.18 para encontrar dos subconjuntos abiertos V_1 y V_2 de X que cumplen que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $S \subseteq V_1$ y que $\{x\} \subseteq V_2 \subseteq W$. Así que $\langle V_1, V_2 \rangle_c \cap f[A]$ es un subconjunto abierto en $f[A]$ y

$$f(x) = S \cup \{x\} \in \langle V_1, V_2 \rangle_c \cap f[A].$$

Ya que $V_2 \cap S = \emptyset$ y por la definición de vietórico, es verdad que si $S \cup \{z\} \in \langle V_1, V_2 \rangle_c \cap f[A]$ para alguna $z \in A$, se infiere que $z \in V_2$; puesto que $V_2 \subseteq W$ entonces $\langle V_1, V_2 \rangle_c \cap f[A] \subseteq f[W \cap A] = f[V]$. Esto último prueba que $f(x) \in \operatorname{int}_{f[A]}(f[V])$ y se deduce que $f[V]$ es abierto en $f[A]$ como se pretendía. Concluimos que f es un encaje. $\square$

***Corolario* 3.4.3.** *Sea X un espacio con un subespacio A homeomorfo a X. Si existe $S \in S_c(X \backslash A)$, entonces $S_c(X)$ tiene un subespacio homeomorfo a X.*

Demostración. Por el Lema 3.4.2 tenemos que la función $f : A \to S_c(X)$ definida por $f(x) = S \cup \{x\}$ es un encaje, por lo que $f[A]$ es un subespacio de $S_c(X)$ homeomorfo a X. $\square$

Ahora veremos que $S_c([0,1]), S_c([0,\omega_1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ son espacios no homeomorfos dos a dos.

De los ejemplos 1.3.5 y 1.3.16 se sabe que los espacios $\mathbb{I}$ y $[0,\omega_1]$ tienen dimensión cero. Ha sido probado ya en el Teorema 2.2.5 que si X tiene dimensión cero, entonces $K(X)$ tiene dimensión cero. Se sigue que tanto $K([0,\omega_1])$ como $K(\mathbb{I})$ tienen dimensión cero. Por la Observación 3.1.8 es verdad que $S_c([0,\omega_1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ son subespacios de $K([0,\omega_1])$ y $K(\mathbb{I})$, respectivamente. Como tener dimensión cero es una propiedad hereditaria (vea Proposición 1.3.6), obtenemos que $S_c([0,\omega_1])$ y $S_c(\mathbb{I})$ tienen dimensión cero.

Por otra parte, de la Observación 1.3.4 se deduce que el espacio $[0,1]$ no tiene dimensión cero. Por el Corolario 3.4.3 sabemos que $S_c([0,1])$ posee una copia de $[0,1]$. Así, si $S_c([0,1])$ tiene dimensión cero, entonces $[0,1]$ tiene dimensión cero (vea Proposición 1.3.6), lo cual es falso. Concluimos que

$$S_c([0,1]) \text{ no es homeomorfo a } S_c([0,\omega_1]) \text{ ni a } S_c(\mathbb{I}).$$

Por otro lado, el Teorema 2.3.6 asegura que $K(\mathbb{I})$ es metrizable, por lo tanto $S_c(\mathbb{I})$ es metrizable. Finalmente, probamos ya en el Teorema 3.4.1 que $S_c([0,\omega_1])$ no es metrizable. Deducimos entonces que

$$S_c([0,\omega_1]) \text{ no es homeomorfo a } S_c(\mathbb{I}).$$

Una pregunta interesante que sigue abierta es la siguiente:

Pregunta 3.4.4. *¿Es $S_c(\mathbb{Q})$ homeomorfo a $S_c(\mathbb{I})$?*

Capítulo 4

Conexidad por trayectorias.

La intención de este capítulo es estudiar la conexidad por trayectorias de $S_c(X)$ a partir de las propiedades de X. Encontraremos algunas condiciones suficientes para que un hiperespacio $S_c(X)$ sea conexo por trayectorias, tal y como hacemos en el Teorema 4.1.11, el cual será aplicado para probar el Corolario 4.1.14 y el Teorema 4.1.15. Además, en la Sección 4.3 probaremos que para un espacio métrico X, la conexidad por trayectorias de X es necesaria para la conexidad por trayectorias de $S_c(X)$.

4.1. Algunas clases de hiperespacios conexos por trayectorias.

En esta sección veremos que los hiperespacios de sucesiones convergentes de $\mathbb{R}^n$, de las α-variedades y de las dendritas locales son conexos por trayectorias; a fin de lograr esto empezaremos con un lema técnico. Las ideas presentadas en esta sección partieron de generalizar [4, Theorem 2.4, p. 5], el cual dice que el hiperespacio $S_c(\mathbb{R})$ es conexo por trayectorias.

***Lema* 4.1.1.** *Sean X un espacio y dos sucesiones convergentes no triviales $S_0 = \{x_n \mid n \in \omega\}$ y $S_1 = \{y_n \mid n \in \omega\}$ en X. Si se satisface que:*

1. $x_0 = \lim S_0 = \lim S_1 = y_0$;

2. *para cualquier* $k \in \omega \backslash \{0\}$, *existe una trayectoria* $\alpha_k : [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \to X$ *que va de* x_k *a* y_k *y*

3. *para cada vecindad* U *de* x_0 *en* X, *existe* $N \in \omega$ *tal que para cualquier* $k \geq N$ *es verdad que* $\alpha_k\big[[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]\big] \subseteq U$;

entonces la función $h : [0,1] \to S_c(X)$ *definida como:*

$$h(t) = \begin{cases} S_0, & \text{si } t = 0; \\ \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha_k(t), y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots\}, & \text{si } t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \text{ para alguna } k \in \omega \end{cases}$$

es una trayectoria en $S_c(X)$ *que va de* S_0 *a* S_1.

Demostración. De la definición de h se sabe que

$$h(1) = \{x_0, \alpha_1(1), y_2, \ldots\} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\} = S_1.$$

Si $t \in (0,1]$, mostremos que $h(t)$ toma un solo valor. Notemos que si

$$t \in [\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k}] \cap [\tfrac{1}{k+2}, \tfrac{1}{k+1}]$$

para alguna $k \in \omega$, entonces $t = \frac{1}{k+1}$; en tal caso

$$h|_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}(t) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha_k(\tfrac{1}{k+1}), y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots\}$$

y

$$h|_{[\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}]}(t) = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, \alpha_{k+1}(\tfrac{1}{k+1}), y_{k+2}, y_{k+3}, \ldots\}.$$

Como $\alpha_{k+1}(\frac{1}{k+1}) = y_{k+1}$ y $\alpha_k(\frac{1}{k+1}) = x_k$, obtenemos que

$$h|_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}(\tfrac{1}{k+1}) = h|_{[\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}]}(\tfrac{1}{k+1}). \tag{4.1}$$

Para concluir que h está bien definida, observemos que los incisos 1) y 3) del Lema 3.1.7 aseguran que siempre que $t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ para alguna $k \in \omega$, se cumplirá que $h(t) \in S_c(X)$.

Veremos ahora que para todo $k \in \omega \backslash \{0\}$ resulta que $h|_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}$ es continua. Sean $k \in \omega \backslash \{0\}$, $t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ y sea $\langle U_0, \ldots, U_m \rangle_c$ un subconjunto básico de $S_c(X)$ tal que $h(t) \in \langle U_0, \ldots, U_m \rangle_c$ y que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (recordemos que el Teorema 3.2.9 presenta una base particular para la topología de $S_c(X)$). Supongamos que $\alpha_k(t) \in U_0$, entonces

$$\emptyset \neq h(t)\setminus\{\alpha_k(t)\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} U_i \text{ y} \tag{4.2}$$

$$(h(t)\setminus\{\alpha_k(t)\}) \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cualquier } i \in \{1, \dots, m\}. \tag{4.3}$$

Por la continuidad de α_k sabemos que existe $r > 0$ tal que $\alpha_k[B_r(t) \cap [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]] \subseteq U_0$, entonces para cualquier $\lambda \in B_r(t) \cap [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ se tiene que $\alpha_k(\lambda) \in U_0$. Usando (4.2) y (4.3), para cualquier $\lambda \in B_r(t) \cap [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ se cumple que

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha_k(\lambda), y_{k+1}, \dots\} \\ &= (h(t)\setminus\{\alpha_k(t)\}) \cup \{\alpha_k(\lambda)\} \\ &\in \langle U_0, \dots, U_m \rangle_c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la restricción $h|_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}$ es continua. Luego, de (4.1) y el Lema 1.3.10 deducimos que $h|_{(0,1]}$ es continua.

Comprobemos ahora la continuidad de h en 0. Debido al Teorema 3.2.9, será suficiente considerar subconjuntos abiertos y ajenos $V_0, \dots, V_m$ de X tales que $S_0 \in \mathcal{V} = \langle V_0, \dots, V_m \rangle_c$. Supongamos que $x_0 \in V_0$. Por hipótesis existe $N \in \omega$ tal que $\alpha_k[[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]] \subseteq V_0$ para cualquier $k \geq N$. Afirmamos que

$$h[[0, \tfrac{1}{N+1})] \subseteq \mathcal{V}. \tag{4.4}$$

Sea $t \in (0, \frac{1}{N+1})$ y sea $i \geq N + 1$ tal que $t \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$. Por definición sabemos que

$$h(t) = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i(t), y_{i+1}, y_{i+2}, \dots\}. \tag{4.5}$$

Notemos que

$$\{\alpha_i(t), y_{i+1}, y_{i+2}, \dots\} \subseteq V_0 \text{ y que } \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}\} \subseteq S_0 \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} V_j. \tag{4.6}$$

Puesto que $x_k \in V_0$ para todo $k \geq N$ y $S_0 \cap V_j \neq \emptyset$ para cualquier $j \in \{0, \dots, m\}$, en adición a que $V_0 \cap V_j = \emptyset$ si $0 \neq j$, podemos concluir que

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}\} \cap V_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in \{1, \dots, m\}. \tag{4.7}$$

Finalmente, de (4.5), (4.6), (4.7) y dado que $\alpha_i[[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]] \subseteq V_0$, se sigue que $h(t) \in \mathcal{V}$, lo cual prueba (4.4). Por lo tanto h es continua. $\square$

Para espacios vectoriales topológicos hemos definido a los conjuntos convexos ya (vea Definición 1.2.18). En los próximos resultados usaremos ideas relacionadas con la convexidad de conjuntos. Para ello definimos a continuación el concepto de *trayectoria natural.*

Definición 4.1.2. Sea X un espacio vectorial topológico. Dados $x, y \in X$, la *trayectoria natural* de x a y con dominio $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ será la función continua $f : [a, b] \to X$ definida por $f(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y - x)$.

El hecho de que X sea un espacio vectorial topológico garantiza que las trayectorias naturales sean funciones continuas.

***Teorema* 4.1.3.** *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo y sean S_0 y S_1 elementos de $S_c(X)$ tales que $\lim S_0 = \lim S_1$. Entonces S_0 y S_1 están conectadas por una trayectoria en $S_c(X)$. Más aún, si B es un subconjunto convexo de X y $S_0, S_1 \subseteq B$, entonces la trayectoria se puede construir de manera que su imagen se quede contenida en $S_c(B)$.*

Demostración. Sean $\{x_n \mid n \in \omega\}$ y $\{y_n \mid n \in \omega\}$ enumeraciones de S_0 y S_1, respectivamente, tales que $\lim S_0 = x_0$ y $\lim S_1 = y_0$. Para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$ tomamos la trayectoria natural f_k en X con dominio $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ que va de x_k a y_k. Sea U una vecindad de x_0 en X. Usemos que X es un espacio vectorial topológico localmente convexo para encontrar una vecindad convexa A de x_0 tal que $A \subseteq U$. Por el punto 2 de la Definición 3.1.1 sabemos que existe $N \in \omega$ tal que $x_k, y_k \in A$ para cualquier $k > N$, por consiguiente $f_k[[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]] \subseteq A \subseteq U$ siempre que $k \geq N + 1$. Del Lema 4.1.1 deducimos que la función $h : [0, 1] \to S_c(X)$ definida por:

$$h(t) = \begin{cases} S_0, & \text{si } t = 0; \\ \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, f_k(t), y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots\}, & \text{si } t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \text{ para alguna } k \in \omega \end{cases}$$

es una trayectoria en $S_c(X)$ que une a S_0 con S_1.

Finalmente, si en adición suponemos que B es un subconjunto convexo de X que satisface que $S_0, S_1 \subseteq B$, podemos concluir que $h(t) \in S_c(B)$ para cualquier $t \in [0, 1]$. □

***Corolario* 4.1.4.** *Sean $\alpha \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$ y $S_0, S_1 \in S_c(\mathbb{R}^\alpha)$ tales que $\lim S_0 = \lim S_1$, entonces S_0 y S_1 están conectadas por una trayectoria en $S_c(\mathbb{R}^\alpha)$. Si además S_0 y S_1 están contenidos en un subconjunto convexo B de $\mathbb{R}^\alpha$, entonces la trayectoria puede ser construida de forma que su imagen quede contenida en $S_c(B)$.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{R}^\alpha$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo (vea Teorema 1.3.36), por lo que el resultado se sigue directamente del Teorema 4.1.3. $\square$

Para nuestros propósitos, será conveniente considerar un tipo particular de sucesión cuya existencia se restringe a $\mathbb{R}$.

Definición 4.1.5. Una sucesión $S \in S_c(\mathbb{R})$ con $\lim S = x_0$ es *monótona creciente* si existe una enumeración $\{x_n \mid n \in \omega\}$ de S tal que $x_n < x_{n+1}$ para cada $n \in \omega\backslash\{0\}$ y $x_0 > x_n$ para toda $n \in \omega$. Una sucesión S con $\lim S = x_0$ es *monótona decreciente* si existe una enumeración $\{x_n \mid n \in \omega\}$ de S tal que $x_n > x_{n+1}$ para cualquier $n \in \omega\backslash\{0\}$ y $x_0 < x_n$ para toda $n \in \omega$. En cualquier caso decimos que la sucesión es *dirigida.*

***Lema* 4.1.6.** *Sea $S \in S_c(\mathbb{R})$ tal que $\lim S = \min S$, entonces cualquier conjunto $A \subseteq S$ no vacío tiene elemento máximo. Similarmente, si $\lim S = \max S$, entonces cualquier conjunto $A \subseteq S$ no vacío tiene mínimo.*

Demostración. Supongamos que $\lim S = \min S$ y sea $A \subseteq S$ no vacío. Si $A = \{\lim S\}$, entonces $\lim S$ es el máximo de A. Supongamos entonces que $A\backslash\{\lim S\} \neq \emptyset$. Sea $a \in A\backslash\{\lim S\}$, por hipótesis se tiene que $\lim S < a$ y por lo tanto $\lim S \in (-\infty, a)$. Luego, $A\backslash(-\infty, a)$ es finito y no vacío y como tal, tiene máximo; éste además coincide con ser el máximo de A.

La segunda parte del lema se puede probar de manera similar. $\square$

***Teorema* 4.1.7.** *Sea $S \in S_c(\mathbb{R})$, entonces S es monótona decreciente si y sólo si $\lim S = \min S$. Similarmente, S es monótona creciente si y sólo si $\lim S = \max S$.*

Demostración. Supongamos primero que $\lim S = \min S$. La enumeración que presentaremos será la más natural en vista del Lema 4.1.6.

Sea $a_0 = \lim S$. Por el Lema 4.1.6 sabemos que S tiene máximo, sea a_1 tal máximo. Recursivamente, para cada $n \in \omega\backslash\{0, 1\}$ definimos a a_n como el máximo del conjunto $S\backslash\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. En particular,

$$a_{n-1} > a_n \text{ para cualquier } n \in \omega\backslash\{0, 1\}. \tag{4.8}$$

Para concluir que S es una sucesión monótona decreciente bastará demostrar que $\{a_n \mid n \in \omega\} = S$, para ello probaremos que $S \subseteq \{a_n \mid n \in \omega\}$. Sea

$s \in S$, si $s = \lim S$, entonces $s = a_0 \in \{a_n \mid n \in \omega\}$. Si $s \neq \lim S$, entonces $s > \lim S$ y podemos considerar el conjunto $C = S \setminus (-\infty, s)$. Por el punto 2 de la Definición 3.1.1 es verdad que C es finito, además $s \in C$ y por lo tanto C es no vacío. Sea $C = \{x_1, \ldots, x_k\}$ ordenado de mayor a menor. Observemos que

$$x_i \geq s > r \text{ para cualesquiera } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ y } r \in S \setminus C.$$

El proceso de recursión alcanza a s en el paso k, pues coincide con ser el mínimo de C.

Supongamos ahora que S es monótona decreciente. De la Definición 4.1.5 se concluye que $s > \lim S$ para cualquier $s \in S \setminus \{\lim S\}$ y entonces $\min S = \lim S$.

Similiarmente, usando mínimos en lugar de máximos se puede probar que si $\lim S = \max S$, entonces S es una sucesión monótona creciente.

Análogamente al caso decreciente, de la Definición 4.1.5 se concluye inmediatamente que: si S es monótona creciente, entonces $\lim S = \max S$. □

Observación 4.1.8. De la Observación 3.1.8 sabemos que si $S, S' \in S_c(\mathbb{R})$, entonces S y S' son subespacios compactos de $\mathbb{R}$ y por lo tanto son acotados. Luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq b$ y $S, S' \subseteq (a, b)$ o bien, si se prefiere, $S, S' \subseteq [a, b]$.

***Lema* 4.1.9.** *Cualesquiera dos sucesiones convergentes no triviales S_0 y S_1 de $\mathbb{R}$ dirigidas en el mismo sentido están conectadas por una trayectoria en $S_c(\mathbb{R})$. Si además, $S_0, S_1 \subseteq [a, b]$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, entonces la trayectoria se puede construir de forma que su imagen quede contenida en $S_c([a, b])$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que ambas sucesiones son monótonas crecientes. Sean $\{x_n \mid n \in \omega\}$ y $\{y_n \mid n \in \omega\}$ las enumeraciones de S_0 y S_1, respectivamente, que corresponden a la Definición 4.1.5 y recordemos que $\lim S_0 = x_0$ y que $\lim S_1 = y_0$. Para cada $n \in \omega$ sea f_n la trayectoria natural con dominio $[0, 1]$ que va de x_n a y_n. Definimos la función $g : [0, 1] \to S_c(\mathbb{R})$ como $g(t) = \{f_n(t) \mid n \in \omega\}$. Ocurre entonces que $g(0) = \{x_n \mid n \in \omega\} = S_0$ y que $g(1) = \{y_n \mid n \in \omega\} = S_1$.

Mostremos primero que

$$g(t) \text{ es numerable para cada } t \in [0, 1]; \tag{4.9}$$

para ello, dada $t \in [0,1]$, basta probar que para todo $n \in \omega$ es verdad que $f_{n+1}(t) > f_n(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) - f_n(t) &= x_{n+1} + t(y_{n+1} - x_{n+1}) - (x_n + t(y_n - x_n)) \\ &= x_{n+1} - x_n - t(x_{n+1} - x_n) + t(y_{n+1} - y_n) \\ &= (1-t)(x_{n+1} - x_n) + t(y_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Para $t \in [0,1)$ se tiene que $(1-t)(x_{n+1} - x_n) > 0$ y $t(y_{n+1} - y_n) \geq 0$, mientras que si $t = 1$ ocurre que $f_{n+1}(1) - f_n(1) = y_{n+1} - y_n > 0$. Así concluimos que $f_{n+1}(t) > f_n(t)$ para cualesquiera $t \in [0,1]$ y $n \in \omega$, y esto prueba (4.9). Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_n + t(y_n - x_n) = x_0 + t(y_0 - x_0) = f_0(t)$$

para cada t, lo que muestra que $g(t) \in S_c(\mathbb{R})$ y converge a $f_0(t)$. Por lo tanto, g está bien definida y para cada $t \in [0,1]$ se cumple que $\{f_n(t) \mid n \in \omega\}$ es dirigida en el mismo sentido que S_0.

De la Observación 4.1.8 sabemos que existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c \neq d$ y $S_0, S_1 \subseteq (c,d) \subseteq [c,d]$. Usando ahora que (c,d) es un conjunto convexo y que $S_0, S_1 \subseteq (c,d)$, estamos seguros de que $f_n(t) \in (c,d)$ para cualesquiera $n \in \omega$ y $t \in [0,1]$. Por lo tanto $g(t) \in S_c((c,d)) \subseteq S_c([c,d])$ para cualquier $t \in [0,1]$.

Para probar que g es continua fijemos $t \in [0,1]$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_0, \ldots, U_n \rangle_c$ un elemento de la base exhibida en el Teorema 3.2.9 para $S_c((c,d))$ y tal que: $U_0, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos y ajenos de (c,d) que satisfacen que $g(t) \in \langle U_0, \ldots, U_n \rangle_c$. Utilizamos la Observación 3.1.8 para asegurar que $g(t)$ es compacto. Notemos además que $g(t) \subseteq \bigcup_{k=0}^n U_k$; así, por el Lema 1.3.17 sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\bigcup_{k\in\omega} B_\delta(f_k(t)) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} U_k. \tag{4.10}$$

Sean $V = (t - \frac{\delta}{d-c}, t + \frac{\delta}{d-c}) \cap [0,1]$ y $r \in V$. Mostraremos a continuación que

$$\text{si } f_i(t) \in U_j \text{ para algún } i \in \omega \text{ y algún } j \leq n, \text{ entonces } f_i(r) \in U_j. \tag{4.11}$$

Para ello notemos que:

$$\begin{aligned} |f_i(r) - f_i(t)| &= |x_i + r(y_i - x_i) - (x_i + t(y_i - x_i))| \\ &= |r - t||y_i - x_i| \\ &< \frac{\delta}{d-c}(d-c) = \delta. \end{aligned}$$

De (4.10) se sigue que $g(r) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} U_k$ y más particularmente que $f_i(r) \in B_\delta(f_i(t)) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} U_k$. Haciendo uso de que $B_\delta(f_i(t))$ es conexo, que $U_j \cap U_k = \emptyset$ si $j \neq k$ y que $f_i(t) \in U_j$, obtenemos que $B_\delta(f_i(t)) \subseteq U_j$. Así, deducimos que $f_i(r) \in U_j$ como se quería.

Del hecho de que $g(t) \in \langle U_0, \ldots, U_n \rangle_c$, podemos asegurar que para cualquier $j \in \{0, \ldots, n\}$ siempre existe $i \in \omega$ tal que $f_i(t) \in U_j$ y por (4.11), obtenemos que $f_i(r) \in U_j$; concluimos que $g(r) \cap U_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$. Luego, es verdad que $g(r) \in \mathcal{U}$. En consecuencia, g es continua.

Por último, si $S_0, S_1 \subseteq [a, b]$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, la convexidad de $[a, b]$ garantiza que $f_n(t) \in [a, b]$ para cualesquiera $n \in \omega$ y $t \in [0, 1]$. Por ende, $g(t) \in S_c([a, b])$ para cualquier $t \in [0, 1]$. $\square$

***Teorema* 4.1.10.** *Si $A \in \{(0, 1), [0, 1], [0, 1)\}$, entonces $S_c(A)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Fijemos $S_0 \in S_c(A)$ tal que $\lim S_0 = \frac{1}{2}$. Demostraremos que cada $S \in S_c(A)$ está conectada por una trayectoria en $S_c(A)$ con S_0.

Usemos el hecho de que S y S_0 son compactos (Observación 3.1.8) para definir $a' = \min(S \cup S_0)$, $b' = \max(S \cup S_0)$, $a = \min\{a', \frac{1}{4}\}$ y $b = \max\{b', \frac{3}{4}\}$. De esta manera, a y b son tales que

$$S_0, S \subseteq [a, b] \subseteq A \text{ y } a < \frac{1}{2} < b.$$

Según sea el caso, tomamos $S' \in S_c([a, b])$ de tal forma que $\lim S' = \lim S$ y además, $\lim S' = \min S'$ en caso de que $\lim S = a$, o bien, $\lim S' = \max S'$ en otro caso. De esta manera, el Teorema 4.1.7 asegura que S' es una sucesión dirigida. Elegimos $S_1 \in S_c([a, b])$ de modo que $\lim S_1 = \min S_1 = \frac{1}{2}$ en caso de que $\lim S = a$ o que $\lim S_1 = \max S_1 = \frac{1}{2}$ en cualquier otro caso. El Teorema 4.1.7 asegura que S_1 está dirigida en el mismo sentido que S'.

El Corolario 4.1.4 muestra que existe una trayectoria en $S_c([a,b])$ que conecta a S_0 con S_1 y otra más que va de S' a S. Además, por el Lema 4.1.9, existe una trayectoria en $S_c([a,b])$ que une a S_1 con S'. Así pues, apliquemos el Corolario 1.3.11 al conjunto $\{S_0, S_1, S', S\}$ para concluir que existe una trayectoria en $S_c(A)$ que conecta a S_0 con S y, por lo tanto, $S_c(A)$ es conexo por trayectorias. □

***Teorema* 4.1.11.** *Sea X un espacio conexo por trayectorias. Son equivalentes:*

1. *para cualesquiera $S, S' \in S_c(X)$ tales que $\lim S = \lim S'$, existe una trayectoria en $S_c(X)$ que conecta a S con S';*

2. *$S_c(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Por definición, la condición 2 implica la condición 1.

Supongamos entonces que siempre que S y S' sean dos sucesiones en $S_c(X)$ tales que $\lim S = \lim S'$, existirá una trayectoria en $S_c(X)$ que las conecte.

Sean S_1 y S_2 en $S_c(X)$. Como X es arcoconexo (vea Teorema 1.3.30), existe un subespacio A de X, homeomorfo al intervalo $[0,1]$, que tiene por puntos extremos a $\lim S_1$ y $\lim S_2$. Elegimos S_3 y S_4 en $S_c(A)$ tales que $\lim S_3 = \lim S_1$ y $\lim S_4 = \lim S_2$. Usando nuestra hipótesis, existe una trayectoria en $S_c(X)$ que conecta a S_1 con S_3 y otra más que une a S_4 con S_2. Del Teorema 4.1.10 y el Teorema 3.3.6 obtenemos una trayectoria en $S_c(A) \subseteq S_c(X)$ que va de S_3 a S_4. Finalmente, apliquemos el Corolario 1.3.11 al conjunto $\{S_1, S_3, S_4, S_2\}$ para concluir que hay una trayectoria en $S_c(X)$ entre S_1 y S_2. □

***Corolario* 4.1.12.** *Para cualquier $\alpha \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$ se cumple que $S_c(\mathbb{R}^\alpha)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. El resultado se sigue del Corolario 4.1.4 y el Teorema 4.1.11. □

***Lema* 4.1.13.** *Si X es una dendrita local y $S, S' \in S_c(X)$ son tales que $\lim S = \lim S'$, entonces S y S' están conectadas por una trayectoria en $S_c(X)$.*

Demostración. Sean $\{x_n \mid n \in \omega\}$ y $\{y_n \mid n \in \omega\}$ enumeraciones de S y S', respectivamente. Supongamos que $\lim S = x_0 = y_0 = \lim S'$. Sea A una vecindad de x_0 que cumpla ser una dendrita. Sea $N \in \omega$ para la cual $x_n, y_n \in A$ siempre que $n \geq N$. Para cada par de puntos a y b en A, gracias al Teorema 1.3.31 podemos usar la siguiente notación: si $a \neq b$ denotamos por ab al único arco en A cuyos puntos extremos son a y b. En caso de que $a = b$, el símbolo ab denotará al conjunto $\{a\}$.

Así, para cualquier $n \geq N$ existe una trayectoria $\alpha_n : \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to x_n y_n$ tal que $\alpha_n(\frac{1}{n+1}) = x_n$ y $\alpha_n(\frac{1}{n}) = y_n$. Observemos que

$$\text{si } x_n = y_n, \text{ entonces } \alpha_n(t) = x_n \text{ para toda } t \in \left[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}\right].$$

Para $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, el Corolario 1.3.35 nos permite considerar sencillamente alguna trayectoria $\alpha_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to X$ que conecte a x_n con y_n.

Sea U una vecindad de x_0, entonces $x_0 \in \text{int}(A) \cap \text{int}(U)$ y notemos que $\text{int}(A) \cap \text{int}(U)$ es abierto en X. Usemos que X es un espacio T_3 para encontrar un subconjunto abierto V de X tal que $x_0 \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(U)$. Apliquemos el Teorema 1.3.34 para hallar una vecindad conexa W de x_0 en X tal que $x_0 \in W \subseteq V$. Luego, tenemos que

$$\overline{W} \subseteq \overline{V} \subseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(U) \subseteq A \cap U.$$

Dado que $\overline{W}$ es conexo y compacto, $\overline{W}$ es un subcontinuo de A. Gracias al Lema 1.3.32 podemos asegurar que $\overline{W}$ es una dendrita. Debido a que S y S' convergen a x_0, existe $N' \in \omega$ con $N' \geq N$ tal que $x_n, y_n \in W$ para cualquier $n \geq N'$. Sea $n \geq N'$. A continuación mostraremos que $\alpha_n[[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]] \subseteq U$, lo cual es inmediato si $x_n = y_n$. Supongamos entonces que $x_n \neq y_n$: nuevamente por el Teorema 1.3.31 tenemos que en $\overline{W}$ existe un único arco cuyos puntos extremos son x_n y y_n. Sin embargo, $\alpha_n[[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]]$ es el único arco en A que tiene por puntos extremos a x_n y y_n; de esta manera, $\alpha_n[[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]] \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Del Lema 4.1.1 obtenemos que una trayectoria en $S_c(X)$ une a S con S'. □

***Corolario* 4.1.14.** *Si X es una dendrita local, entonces el hiperespacio $S_c(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Del Teorema 1.3.35 se sabe que X es conexo por trayectorias. El Lema 4.1.13 y el Teorema 4.1.11 aseguran que $S_c(X)$ es conexo por trayectorias. □

***Teorema* 4.1.15.** *Sean $\alpha \in (\omega\backslash\{0\}) \cup \{\omega\}$ y X una α-variedad conexa, entonces $S_c(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean S y $S' \in S_c(X)$ tales que $\lim S = \lim S'$. Tomemos $\{x_n \mid n \in \omega\}$ y $\{y_n \mid n \in \omega\}$ enumeraciones de S y S', respectivamente, y supongamos que $\lim S = x_0$ y que $\lim S' = y_0$. Sean U una vecindad abierta de x_0 homeomorfa a $\mathbb{R}^\alpha$ y $N \in \omega$ tal que x_k y y_k están en U para cada $k \geq N$. Debido a que X es conexo por trayectorias (Corolario 1.3.38), podemos considerar una trayectoria f_k entre x_k y y_k para cada $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ y con dominio $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$. Sea $h : \mathbb{R}^\alpha \to U$ un homeomorfismo. Para cada $k \geq N$, consideremos a la trayectoria natural f_k que va de $h^{-1}(x_k)$ a $h^{-1}(y_k)$ en $\mathbb{R}^\alpha$ y que tiene dominio $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$. Obtenemos ahora que $h \circ f_k$ es una trayectoria en X que conecta a x_k con y_k para cada $k \geq N$.

Sea V una vecindad de x_0. El conjunto $V \cap U$ resulta ser una vecindad de x_0 y recordando que h es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}[V \cap U]$ es una vecindad de $h^{-1}(x_0)$ en $\mathbb{R}^\alpha$. Puesto que $\mathbb{R}^\alpha$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo (Teorema 1.3.36), existe una vecindad convexa W de $h^{-1}(x_0)$ en $\mathbb{R}^\alpha$ tal que $W \subseteq h^{-1}[V \cap U]$. En consecuencia, $h[W] \subseteq V \cap U$ y usando que h es un homeomorfismo se puede inferir que $h[W]$ es una vecindad de x_0 en U. Como U es un subconjunto abierto de X, el conjunto $h[W]$ es una vecindad de x_0 en X y por lo tanto, existe $N' \in \omega$ tal que x_k y y_k están en $h[W]$ siempre que $k \geq N'$. Sea $k \geq N' + N$. Tenemos que $h^{-1}(x_k)$ y $h^{-1}(y_k)$ están en W el cual es un conjunto convexo, por lo que la imagen de la trayectoria natural f_k queda contenida en W. Luego, $h \circ f_k$ es una trayectoria en X que conecta a x_k con y_k cuya imagen queda contenida en $h[W] \subseteq V \cap U \subseteq V$. Aplicando el Lema 4.1.1 concluimos que S y S' están conectadas por una trayectoria en $S_c(X)$.

Finalmente, el Corolario 1.3.38 y el Teorema 4.1.11 muestran que $S_c(X)$ es conexo por trayectorias. □

4.2. Un contrajemplo importante.

Dado un continuo X, se sabe que el hiperespacio $CL(X)$ es conexo por trayectorias (vea [7, Theorem 14.9, p. 113]). En esta sección veremos un contraste entre esta situación y la de $S_c(X)$. Probaremos que no todos los espacios conexos por trayectorias tienen un hiperespacio de sucesiones convergentes conexo por trayectorias. Dicha prueba fue realizada en [4, Example 2.8, p. 6]. Aquí presentamos una prueba detallada que resuelve los problemas de la demostración original.

***Lema* 4.2.1.** *Sean X un espacio y $f : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Si C es subconjunto cerrado y no vacío de $\bigcup f[[0,1]]$ y*

$$u = \inf\{s \in [0,1] \mid f(s) \cap C \neq \emptyset\},$$

entonces $f(u) \cap C \neq \emptyset$.

Demostración. Llamemos $A = \{s \in [0,1] \mid f(s) \cap C \neq \emptyset\}$. Debido a que f es una función continua y a que $S_c(X)$ es un subespacio de $K(X)$, el conjunto $f[[0,1]]$ es un subespacio compacto de $K(X)$. El Teorema 2.2.6 demuestra que $\bigcup f[[0,1]]$ es un subespacio compacto de X, con lo que probamos que $\bigcup f[[0,1]]$ es un subconjunto cerrado de X. Como C es un subconjunto cerrado de $\bigcup f[[0,1]]$, se tiene que C es un subconjunto cerrado de X también, de esta forma $X \backslash C$ es un subconjunto abierto de X.

Para continuar, supondremos que $f(u) \cap C = \emptyset$, de donde $f(u) \subseteq X \backslash C$. Luego, $f(u) \in \langle X \backslash C \rangle_c$ y por la continuidad de f, el conjunto $f^{-1}[\langle X \backslash C \rangle_c]$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$ que satisface que $u \in f^{-1}[\langle X \backslash C \rangle_c]$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$u \in (u - \epsilon, u + \epsilon) \cap [0,1] \subseteq f^{-1}[\langle X \backslash C \rangle_c].$$

Usemos que $u = \inf A$ para encontrar algún $t \in [u, u + \epsilon) \cap [0,1]$ que cumpla que

$$f(t) \cap C \neq \emptyset. \tag{4.12}$$

Notemos que $t \in (u - \epsilon, u + \epsilon) \cap [0,1] \subseteq f^{-1}[\langle X \backslash C \rangle_c]$, es decir, $f(t) \in \langle X \backslash C \rangle_c$ y entonces $f(t) \subseteq X \backslash C$. De esta forma

$$f(t) \cap C = \emptyset. \tag{4.13}$$

Hay una contradicción entre (4.12) y (4.13). Concluimos que $f(u) \cap C \neq \emptyset$. $\square$

En lo que sigue, probaremos resultados concernientes al círculo de Varsovia $\mathfrak{V}$ expuesto en el Ejemplo 1.2.10. Es por esta razón que recordaremos la notación de dicho ejemplo y la respetaremos en el resto de esta sección:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, |sen\left(\tfrac{\pi}{x}\right)|) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4} \ \wedge \ y < 0\}, \\ C &= \{0\} \times [0,1] \\ \text{y } \mathfrak{V} &= A \cup B \cup C. \end{aligned}$$

El objetivo de esta sección es probar que $S_c(\mathfrak{V})$ no es conexo por trayectorias (Teorema 4.2.9), pero para ello hará falta exponer primero una serie de resultados técnicos.

La siguiente función será usada en el resto de esta sección. Se recomienda tener presente su definición.

Definición 4.2.2. Sea $\Omega : A \to (0,1]$ la proyección sobre la primera coordenada, es decir, $\Omega((x, |sen\left(\frac{\pi}{x}\right)|)) = x$. Para cada $q \in (0,1]$ nombraremos $\Omega_q = \Omega^{-1}[(0,q)]$.

***Proposición* 4.2.3.** *La función Ω es un homeomorfismo.*

Demostración. Proponemos $\Omega^{-1} : (0,1] \to A$ como $\Omega^{-1}(x) = (x, |sen\left(\frac{\pi}{x}\right)|)$. Luego, tanto Ω^{-1} como Ω son funciones continuas y cumplen que $\Omega \circ \Omega^{-1}(x) = x$ y que $\Omega^{-1} \circ \Omega((x, |sen\left(\frac{\pi}{x}\right)|)) = (x, |sen\left(\frac{\pi}{x}\right)|)$. $\square$

En el resto de esta sección usaremos la siguiente notación para referirnos a las componentes conexas.

Notación 4.2.4. *Sean X un espacio y $x \in X$, denotaremos a la componente conexa de x en X por $C_X(x)$.*

***Lema* 4.2.5.** *Sean D un subespacio conexo de $\mathfrak{V}$ y $q \in (0,1)$ tales que $\Omega^{-1}(q) \in D$.*

a) Si $D \cap C \neq \emptyset$, entonces diám$(D) \geq 1$.

b) Si $p \in (q,1]$ es tal que $\Omega^{-1}(p) \notin D$ y diám$(D) < 1$, entonces $D \subseteq \Omega_p$.

Demostración. Para demostrar a) probaremos que

$$B \subseteq D \text{ o bien, que } \Omega_q \subseteq D. \tag{4.14}$$

Supongamos por el contrario que existen $x \in B \backslash D$ e $y \in \Omega_q \backslash D$, esto implica que

$$D \subseteq \mathfrak{V} \backslash \{x, y\}. \tag{4.15}$$

Llamemos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Notemos que $\mathfrak{V} \backslash \{x, y\}$ es la unión de los conjuntos abiertos y ajenos: $\{(a, b) \in A \mid a > y_1\} \cup \{(a, b) \in B \mid a > x_1\}$ a quien llamaremos U, y $\mathfrak{V} \backslash (U \cup \{x, y\})$ a quien llamaremos W. Observemos que $C \subseteq W$ y por hipótesis se tiene que $C \cap D \neq \emptyset$; deducimos que

$$D \cap W \neq \emptyset. \tag{4.16}$$

Por otro lado, $y \in \Omega_q$, de donde $q > y_1$ y por lo tanto $\Omega^{-1}(q) \in U$; se sigue que

$$\Omega^{-1}(q) \in U \cap D. \tag{4.17}$$

De (4.15), (4.16) y (4.17) obtenemos que $U \cap D$ y $W \cap D$ forman una disconexión para D, lo cual es absurdo. Esto prueba (4.14). En consecuecia $\text{diám}(D) \geq \text{mín}\{\text{diám}(B), \text{diám}(\Omega_q)\} \geq 1$.

Ahora probaremos b). Por a) sabemos que $D \cap C = \emptyset$. Como $\Omega^{-1}(p) \notin D$, entonces $D \subseteq \Omega_p \cup B \cup \Omega^{-1}[(p, 1]]$. Dado que D es conexo y $\Omega^{-1}(q) \in D \cap \Omega_p$, concluimos que $D \subseteq \Omega_p$. □

***Corolario* 4.2.6.** *Sean $p \in (0, 1]$ y V un subconjunto abierto de $\mathfrak{V}$ tal que $\text{diám}(V) < 1$. Supongamos que existe $z \in V \cap \Omega_p$. Si $\Omega^{-1}(p) \notin C_V(z)$, entonces $C_{V \cap \Omega_p}(z) = C_V(z)$.*

Demostración. Por el inciso b) del Lema 4.2.5 se tiene que $C_V(z) \subseteq \Omega_p$, por lo que $C_V(z)$ es un subespacio conexo de $\Omega_p \cap V$ y así, $C_V(z) \subseteq C_{V \cap \Omega_p}(z)$.

Por otro lado, $C_{V \cap \Omega_p}(z)$ es un subespacio conexo de V y $z \in C_{V \cap \Omega_p}(z)$. Se sigue que $C_{V \cap \Omega_p}(z) \subseteq C_V(z)$. □

***Lema* 4.2.7.** *Sea $S \in S_c(\mathfrak{V})$ tal que para cualquier $s \in (0, 1]$ se cumple que $S \cap \Omega_s \neq \emptyset$. Sean $p \in (0, 1]$ y V un subconjunto abierto de $\mathfrak{V}$ tal que $\text{diám}(V) < 1$ y $\text{lím}\, S \in V$, entonces:*

1) $S \cap V \cap \Omega_s \neq \emptyset$ para cada $s \in (0, 1]$;

2) existe $z \in S \cap V \cap \Omega_p$ tal que $\Omega^{-1}(p) \notin C_V(z)$.

Demostración. Sea $s \in (0,1]$. Del punto 2 de la Definición 3.1.1 sabemos que $S \backslash V$ es finito y en caso de ser vacío la afirmación 1) se cumple inmediatamente. Supongamos que $S \backslash V$ es no vacío y sea

$$m = \begin{cases} \text{mín}\{\Omega(x) \in (0,1] \mid x \in S \backslash V\}, & si\ (S \backslash V) \cap A \neq \emptyset; \\ 1, & si\ (S \backslash V) \cap A = \emptyset. \end{cases}$$

Por hipótesis tenemos que $S \cap \Omega_{\text{mín}\{m,s\}} \neq \emptyset$ y notamos que si $w \in S \cap \Omega_{\text{mín}\{m,s\}}$, entonces $w \in S \cap \Omega_s$ y $\Omega(w) < m$, de donde $w \in S \cap V \cap \Omega_s$. Así demostramos 1).

Probemos ahora 2). Observemos que en caso de que $\Omega^{-1}(p) \notin V$, por 1) la afirmación 2) se cumple de inmediato. Asumiremos entonces que $\Omega^{-1}(p) \in V$.

Llamemos $D = C_V(\Omega^{-1}(p))$. Sea $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{n} \leq p$ y usemos 1) para encontrar algún $z \in S \cap V \cap \Omega_{\frac{1}{n+1}}$. Probaremos que $z \notin D$. Como

$$\text{diám}(D) \leq \text{diám}(V) < 1,$$

el inciso a) del Lema 4.2.5 demuestra que $D \cap C = \emptyset$. Si suponemos que $z \in D$, obtenemos que $\Omega^{-1}[[\Omega(z), p]] \subseteq D$. Puesto que $\Omega^{-1}[[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]] \subseteq \Omega^{-1}[[\Omega(z), p]]$, deducimos que $\Omega^{-1}[[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]] \subseteq D$, lo cual implica que

$$\text{diám}(V) \geq \text{diám}(\Omega^{-1}[[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}]]) \geq 1.$$

Hemos encontrado una contradicción y podemos afirmar que $z \notin D$. En otras palabras, probamos que z satisface 2). □

Lema 4.2.8. *Sean* $f : [0,1] \to S_c(\mathfrak{V})$, $t \in [0,1]$, $p \in (0,1]$ *y* $z \in \mathfrak{V}$ *tales que* f *es una función continua y* $z \in f(t) \cap \Omega_p$. *Sea* $\mathcal{U}$ *una familia celular finita de subconjuntos abiertos de* $\mathfrak{V}$ *tal que* $f(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ *y que* $\text{diám}(U) < 1$ *para cada* $U \in \mathcal{U}$. *Sea* $V \in \mathcal{U}$ *aquel que cumple que* $z \in V$. *Llamemos* $D = C_{V \cap \Omega_p}(z)$. *Sean además* $a, b \in [0,1]$ *tales que* $t \in [a,b] \subseteq f^{-1}[\langle \mathcal{U} \rangle_c]$, *entonces:*

i) D *es un subconjunto abierto de* $\mathfrak{V}$.

Más aún, si $\Omega^{-1}(p) \notin C_V(z)$, *entonces*

ii) $D \cap \bigcup f[[a,b]]$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathfrak{V}$.

Demostración. Comencemos observando que Ω_p es un subconjunto abierto de $\mathfrak{V}$. De la Proposición 4.2.3 sabemos que Ω_p es homeomorfo a $(0,1)$, por lo que es localmente conexo. Notemos ahora que $V \cap \Omega_p$ es un subconjunto abierto de Ω_p. Usando el Teorema 1.3.27 obtenemos que D es un subconjunto abierto de Ω_p y por lo tanto también es un subconjunto abierto de $\mathfrak{V}$.

Supongamos ahora que $\Omega^{-1}(p) \notin C_V(z)$. El Corolario 4.2.6 demuestra que $D = C_V(z)$, de donde D es un subconjunto cerrado de V. Conseguimos entonces que $V \backslash D$ es un subconjunto abierto de V y así,

$$V \backslash D \text{ es un subconjunto abierto de } \mathfrak{V}. \tag{4.18}$$

Como $f[[a,b]] \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_c$, entonces $\bigcup f[[a,b]] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Los elementos de $\mathcal{U}$ son ajenos por pares, así que

$$V \cap \bigcup f[[a,b]] = (\bigcup f[[a,b]]) \backslash \bigcup_{W \in \mathcal{U} \backslash \{V\}} W.$$

Luego, el Teorema 2.2.6 y la Proposición 1.3.2 comprueban que

$$V \cap \bigcup f[[a,b]] \text{ es un subconjunto cerrado de } \mathfrak{V}. \tag{4.19}$$

Utilizamos ahora que $D \subseteq V$ para hacer notar que $D = V \backslash (V \backslash D)$. De esta forma

$$\begin{aligned} D \cap \bigcup f[[a,b]]) &= (V \backslash (V \backslash D)) \cap \bigcup f[[a,b]]) \\ &= (V \cap \bigcup f[[a,b]]) \backslash (V \backslash D). \end{aligned}$$

Por (4.18), (4.19) y la Proposición 1.3.2 conseguimos que $D \cap \bigcup f[[a,b]]$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{V}$. $\square$

Concluimos esta sección con un resultado que significa más de lo que su enunciado dice. El siguiente, es el ejemplo de que no todo espacio conexo por trayectorias tiene un hiperespacio de sucesiones convergentes conexo por trayectorias.

***Teorema* 4.2.9.** *El hiperespacio $S_c(\mathfrak{V})$ no es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $S_0 = \{(0, \frac{1}{n}) \in \mathfrak{V} \mid n \in \omega\backslash\{0\}\} \cup \{(0,0)\}$ y $S_1 = \{(\frac{1}{n}, 0) \in \mathfrak{V} \mid n \in \omega\backslash\{0\}\} \cup \{(0,0)\}$ y supongamos que existe una función continua $f : [0,1] \to S_c(\mathfrak{V})$ tal que $f(0) = S_0$ y $f(1) = S_1$. Sea

$$\Lambda = \{s \in [0,1] \mid \forall t(t \in [0,s] \to \exists q(q \in (0,1] \wedge f(t) \cap \Omega_q = \emptyset))\}.$$

Observemos que $0 \in \Lambda$, por lo que Λ es no vacío. Sean $r = \sup \Lambda$ y $\mathcal{U}$ una familia celular finita de subconjuntos abiertos de $\mathfrak{V}$ tal que $f(r) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ y diám$(U) < 1$ para cada $U \in \mathcal{U}$. La continuidad de f asegura que existe $\alpha > 0$ tal que

$$r \in (r-\alpha, r+\alpha) \cap [0,1] \subseteq f^{-1}[\langle \mathcal{U} \rangle_c]. \tag{4.20}$$

Continuaremos la prueba por casos.

Caso 1 Existe $p \in (0,1]$ tal que $f(r) \cap \Omega_p = \emptyset$.

Puesto que $S_1 \cap \Omega_s \neq \emptyset$ para cualquier $s \in (0,1]$, r debe ser distinto de 1; es decir que $r \in [0,1)$.

Sea $t_0 \in (r, r+\alpha) \cap [0,1]$ tal que $f(t_0) \cap \Omega_s \neq \emptyset$ para cada $s \in (0,1]$. Por (4.20) sucede que $f(t_0) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $\text{lím}\, f(t_0) \in V$. Usemos el Lema 4.2.7 para hallar algún $z \in f(t_0) \cap \Omega_p \cap V$ tal que $\Omega^{-1}(p) \notin C_V(z)$. Llamemos $D = C_{\Omega_p \cap V}(z)$. Por el Lema 4.2.8 tenemos que

$$D \text{ es un subconjunto abierto de } \mathfrak{V} \tag{4.21}$$

y

$$D \cap \bigcup f[[r, t_0]] \text{ es un subconjunto cerrado de } \mathfrak{V}. \tag{4.22}$$

Sean $E = D \cap \bigcup f[[r, t_0]]$ y $M = \{s \in [r, t_0] \mid f(s) \cap E \neq \emptyset\}$. Recordando que $z \in f(t_0) \cap D$, obtenemos que $t_0 \in M$, es decir, M es no vacío. Sea $u = \text{ínf}\, M$. Por el Lema 4.2.1 y (4.22) tenemos que $f(u) \cap E \neq \emptyset$, lo que implica que $f(u) \cap D \neq \emptyset$ y así, $f(u) \cap \Omega_p \neq \emptyset$. Retomando que $f(r) \cap \Omega_p = \emptyset$, aseguramos que

$$r < u. \tag{4.23}$$

Llamamos $\mathcal{W} = \langle \mathcal{U} \cup \{D\} \rangle_c$. Dado que $u \in [r, t_0]$, (4.20) asegura que $f(u) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ y como $f(u) \cap D \neq \emptyset$, deducimos que $f(u) \in \mathcal{W}$. Por la continuidad de f y (4.21) llegamos a que $f|_{[r,t_0]}^{-1}[\mathcal{W}]$ es una vecindad abierta de u en $[r, t_0]$. Por otro lado, si existe algún $s \in f|_{[r,t_0]}^{-1}[\mathcal{W}] \cap [r, u)$, entonces $f(s) \cap D \neq \emptyset$, hecho que contradice que $u = \text{ínf}\, M$. Es así como probamos que $f|_{[r,t_0]}^{-1}[\mathcal{W}] \cap [r, u) = \emptyset$, pero esto y (4.23) contradicen que $f|_{[r,t_0]}^{-1}[\mathcal{W}]$ es una vecindad abierta para u en $[r, t_0]$. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.

Caso 2 Para todo $p \in (0, 1]$ se cumple que $f(r) \cap \Omega_p \neq \emptyset$.

En este caso sabemos que $f(r) \neq S_0$, de donde $0 < r$. Sea $t_0 \in (r - \alpha, r) \cap [0, 1]$. Como $t_0 < r$, entonces existe $q \in (0, 1]$ que satisface que

$$f(t_0) \cap \Omega_q = \emptyset. \tag{4.24}$$

Sea $U \in \mathcal{U}$ aquel que cumple que $\text{lím}\, f(r) \in U$. Por (4.20) ocurre que

$$f[[t_0, r]] \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle_c. \tag{4.25}$$

Del Lema 4.2.7 podemos hallar

$$z \in f(r) \cap \Omega_q \cap U \tag{4.26}$$

tal que $\Omega^{-1}(q) \notin C_U(z)$. Sean $D = C_{\Omega_q \cap U}(z)$ y $E = D \cap \bigcup f[[t_0, r]]$. Nuestro Lema 4.2.8 asegura que

$$D \text{ es un subconjunto abierto de } \mathfrak{V} \tag{4.27}$$

mientras que

$$E \text{ es un subconjunto cerrado de } \mathfrak{V}. \tag{4.28}$$

Gracias a (4.26) encontramos que $r \in \{s \in [t_0, r] \mid f(s) \cap E \neq \emptyset\}$ y si llamamos $M' = \{s \in [t_0, r] \mid f(s) \cap E \neq \emptyset\}$ y $u = \text{ínf}\, M'$, el Lema 4.2.1 y (4.28) revelan que $f(u) \cap E \neq \emptyset$. Se prueba entonces que $f(u) \cap D \neq \emptyset$ y ya que $D \subseteq \Omega_q$, se sigue que $f(u) \cap \Omega_q \neq \emptyset$; de (4.24) concluimos que

$$t_0 < u. \tag{4.29}$$

Hacemos $\mathcal{W} = \langle \mathcal{U} \cup \{D\} \rangle_c$. Por (4.25) se tiene que $f(u) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ y a partir de que $f(u) \cap D \neq \emptyset$ se implica que $f(u) \in \mathcal{W}$. La continuidad de f asegura que $f|_{[t_0,r]}^{-1}[\mathcal{W}]$ es una vecindad abierta de u en $[t_0, r]$. Como antes, si $s \in f|_{[t_0,r]}^{-1}[\mathcal{W}] \cap [t_0, u)$, entonces $f(s) \cap D \neq \emptyset$, contradiciendo que $u = \text{ínf}\, M'$. Si por otro lado, $f|_{[t_0,r]}^{-1}[\mathcal{W}] \cap [t_0, u) = \emptyset$, encontramos una contradicción a que $f|_{[t_0,r]}^{-1}[\mathcal{W}]$ es una vecindad abierta de u en $[t_0, r]$. En consecuencia este caso es imposible también.

De cualquier forma llegamos a un absurdo. Deducimos que f no puede existir y, así, $S_c(\mathfrak{V})$ no es conexo por trayectorias. $\square$

4.3. Resultados en espacios métricos.

Nuestra última sección está dedicada a probar que si X es un espacio métrico, entonces la conexidad por trayectorias de $S_c(X)$ implica la conexidad por trayectorias de X (Teorema 4.3.26). Dicho resultado fue originalmente probado en [9, Theorem 4.12, p. 11].

Notación 4.3.1. Dado un espacio X, usaremos la notación $\{x_n\}_{n\in\omega}$ para referirnos en el sentido tradicional de sucesión a la función $f : \omega \to X$, definida por $f(n) = x_n$.

Observación 4.3.2. Sea $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Si $x, y \in [0,1]$ son tales que $x \leq y$, entonces $\alpha[[x,y]] \in K(S_c(X)) \subseteq K(K(X))$. Luego, por el Teorema 2.2.7 conseguimos que $\bigcup \alpha[[x,y]] \in K(X)$.

A partir del Lema 4.3.3 y hasta el Teorema 4.3.26 tratamos con resultados acerca de $S_c(X)$ cuando X es un espacio métrico. En el resto de esta sección, X será algún espacio métrico y d denotará a alguna métrica acotada que genere a la topología de X.

***Lema* 4.3.3.** *Sea $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ con la siguiente propiedad: si $x, y \in [0,1]$ son tales que $0 \leq y - x < \delta$ y L es una componente conexa de $\bigcup \alpha[[x,y]]$, entonces* $\text{diám}(L) < \epsilon$.

Demostración. Procederemos por contradicción en la prueba.

Supongamos que para cada $n \in \omega\backslash\{0\}$ existen $x_n, y_n \in [0,1]$ tales que: $0 \leq y_n - x_n < \frac{1}{n}$ y existe una componente conexa L_n de $\bigcup \alpha[[x_n, y_n]]$ que cumple que $\text{diám}(L_n) \geq \epsilon$. Notemos que $[x_n, y_n] \in C([0,1])$ para cualquier $n \in \omega\backslash\{0\}$. Debido a que $C([0,1])$ es un espacio métrico y compacto (vea Teorema 2.2.11) y al Teorema 1.3.22 obtenemos que $\{[x_n, y_n]\}_{n\in\omega\backslash\{0\}}$ posee una subsucesión que converge a algún $A \in C([0,1])$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que es $\{[x_n, y_n]\}_{n\in\omega\backslash\{0\}}$ quien converge. Puesto que A es un subespacio conexo y compacto de $[0,1]$, podemos afirmar que $A = [x, y]$ para algunos $x, y \in [0,1]$. Por el Teorema 2.2.10 y el hecho de que $\text{diám}([x_n, y_n]) < \frac{1}{n}$

para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, deducimos que diám$([x, y]) = 0$. Concluimos entonces que

$$x = y. \tag{4.30}$$

Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, por la Observación 4.3.2 se tiene que $\bigcup \alpha[[x_n, y_n]]$ es un espacio compacto, de donde L_n es un espacio compacto también. Más aún, si llamamos $Y = \bigcup \alpha[[0, 1]]$, llegamos a que $L_n \in C(Y)$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Gracias a que Y es métrico y compacto, el Teorema 2.2.11 muestra que $C(Y)$ es también un espacio métrico y compacto. Luego, el Teorema 1.3.22 revela que $\{L_n\}_{n \in \omega \setminus \{0\}}$ tiene una subsucesión que converge a algún $L \in C(Y)$. Como diám$(L_n) \geq \epsilon$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ y la función diám es continua, deducimos que

$$\text{diám}(L) \geq \epsilon.$$

Usemos el punto 2) de la Observación 3.3.2 para mostrar que sucede que $\{\alpha[[x_n, y_n]]\}_{n \in \omega \setminus \{0\}} \subseteq K(K(X))$. Si $2^\alpha : K[[0, 1]] \to K(K(X))$ es como en la Definición 3.3.1, utilizamos el Corolario 3.3.5 para evidenciar que 2^α es una función continua. Así, la sucesión $\{\alpha[[x_n, y_n]]\}_{n \in \omega \setminus \{0\}}$ converge a $\alpha[[x, y]]$ en $K(K(X))$. Con el Teorema 2.2.7 justificamos que $\{\bigcup \alpha[[x_n, y_n]]\}_{n \in \omega \setminus \{0\}} \subseteq K(X)$ y que además, converge en $K(X)$ a $\bigcup \alpha[[x, y]]$. Finalmente, como $L_n \subseteq \bigcup \alpha[[x_n, y_n]]$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, de (4.30) y el Teorema 2.2.8 obtenemos que $L \subseteq \bigcup \alpha[\{x\}] = \alpha(x)$. La conexidad de L asegura que $|L| = 1$, lo cual contradice que diám$(L) \geq \epsilon$. $\square$

Observación 4.3.4. Si δ es algún número real positivo que satisface el Lema 4.3.3, entonces cualquier número real positivo δ' que cumpla que $\delta' \leq \delta$ satiface el Lema 4.3.3.

A lo largo de esta sección, estableceremos notación (como se hace en la Notación 4.3.5) que será fundamental para el entendimiento de nuestros resultados. Sugerimos al lector tener presente estos conceptos para facilitar la lectura.

Notación 4.3.5. Sea $\alpha : [0, 1] \to S_c(X)$ una función continua. Para cada $\epsilon = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ con $n \in \omega \setminus \{0\}$, denotaremos por δ_n a aquel real positivo que el Lema 4.3.3 asegura que existe.

En vista de la Observación 4.3.4, asumiremos que $\delta_n \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Notación 4.3.6. Sea $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Para cada $n \in \omega\setminus\{0\}$, elegimos alguna partición $\{t_i^n \mid i \in \{0,1,\ldots,m_n\}\}$ del intervalo $[0,1]$ tal que $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = 1$ y $t_i^n - t_{i-1}^n < \delta_n$ para cualquier $i \in \{1,\ldots,m_n\}$.

Llamaremos $P_n = \{t_i^n \mid i \in \{0,1,\ldots,m_n\}\}$, mientras que $h(n) = m_n$ para cada $n \in \omega\setminus\{0\}$.

***Lema* 4.3.7.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Si $n \in \omega\setminus\{0\}$, entonces para cada $i \in \{1,\ldots,h(n)\}$ existe una componente conexa L_i de $\bigcup \alpha[[t_{i-1}^n, t_i^n]]$ tal que $L_{i+1} \cap L_i \cap \alpha(t_i^n) \neq \emptyset$ y $p \in L_1$.*

Demostración. Sea $n \in \omega\setminus\{0\}$. Puesto que $p \in \alpha(0)$, tenemos que $p \in \bigcup \alpha[[t_0^n, t_1^n]]$. Sea L_1 la componente conexa en $\bigcup \alpha[[t_0^n, t_1^n]]$ de p. Por el Lema 2.2.9 sabemos que $L_1 \cap \alpha(t_1^n) \neq \emptyset$. Tomemos $y_1 \in L_1 \cap \alpha(t_1^n) \subseteq \bigcup \alpha[[t_1^n, t_2^n]]$ y sea L_2 la componente conexa en $\bigcup \alpha[[t_1^n, t_2^n]]$ de y_1. De esta forma $y_1 \in L_1 \cap L_2 \cap \alpha(t_1^n)$. Usando este método podemos definir recursivamente para cada $i \in \{1,\ldots,h(n)\}$ una componente L_i de $\bigcup \alpha[[t_{i-1}^n, t_i^n]]$ que satisface la conclusión del lema. $\square$

Notación 4.3.8. Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Dados $n \in \omega\setminus\{0\}$ e $i \in \{1,\ldots,h(n)\}$, llamaremos L_i^n a la componente conexa de $\bigcup \alpha[[t_{i-1}^n, t_i^n]]$ que el Lema 4.3.7 asegura que existe.

***Proposición* 4.3.9.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua e $Y = \bigcup \alpha[[0,1]]$.*

a) Si H es la métrica de Hausdorff para $K(Y)$, entonces H induce la topología de Vietoris en $K(Y)$;

b) la función $D : [0,1] \times K(Y) \to \mathbb{R}$ dada por

$$D((s_1,K_1),(s_2,K_2)) = |s_1 - s_2| + H(K_1,K_2)$$

es una métrica que induce en $[0,1] \times K(Y)$ la topología producto;

c) $K([0,1] \times K(Y))$ es un espacio compacto y la métrica de Hausdorff H^D inducida por D coincide con la topología de Vietoris para $K([0,1] \times K(Y))$.

Demostración. Por la Observación 4.3.2 y el hecho de que X es metrizable sabemos que Y es un espacio compacto y metrizable. El Corolario 2.2.3 asegura que $K(Y)$ es un espacio compacto y metrizable. El Teorema 2.3.5 garantiza que la topología generada por la métrica de Hausdorff H para $K(Y)$ es la misma que le es asignada por la topología de Vietoris como subespacio de $K(X)$. Luego, la función D es una métrica que induce en $[0,1] \times K(Y)$ la topología producto, por lo que

$$[0,1] \times K(Y) \text{ es un espacio metrizable también.} \tag{4.31}$$

Como $[0,1]$ y $K(Y)$ son espacios compactos,

$$[0,1] \times K(Y) \text{ es un espacio compacto.} \tag{4.32}$$

De (4.31), (4.32) y el Corolario 2.2.3 obtenemos que $K([0,1] \times K(Y))$ es un espacio compacto y metrizable. El Teorema 2.3.5 prueba que la métrica de Hausdorff H^D en $K([0,1] \times K(Y))$ le induce la topología de Vietoris. □

Notación 4.3.10. Dada una función continua $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$, en lo que resta de la sección, H será la métrica de Hausdorff para $K(\bigcup \alpha[[0,1]])$, D será la métrica dada por

$$D((s_1, K_1), (s_2, K_2)) = |s_1 - s_2| + H(K_1, K_2)$$

en $[0,1] \times K(\bigcup \alpha[[0,1]])$ y H^D será la métrica de Hausdorff para $K([0,1] \times K(\bigcup \alpha[[0,1]]))$.

Lema 4.3.11. *Sea $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Si $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ son tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, entonces existen $r, \eta > 0$ tales que $N_r(\alpha(t) \cap U) \subseteq U$ para cualquier $U \in \mathcal{U}$ y, siempre que $|s_1 - s_2| < \eta$, se cumplirá que $H(\alpha(s_1), \alpha(s_2)) < r$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ y $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, se tiene que

$$\alpha(t) \cap U = \alpha(t) \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} V. \tag{4.33}$$

Usando que $\alpha(t) \in K(X)$, la Proposición 1.3.2 y (4.33) llegamos a que $\alpha(t) \cap U \in K(X)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Del Lema 1.3.17 se sabe que existe $r_U > 0$ tal que $N_{r_U}(\alpha(t) \cap U) \subseteq U$. Sea $r = \text{mín}\{r_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Así, r es tal que $N_r(\alpha(t) \cap V) \subseteq V$ para cualquier $V \in \mathcal{U}$. Recordemos que $[0,1]$ es un espacio compacto, por lo que el Teorema 1.3.1 asegura que α es uniformemente continua. Luego, el inciso a) de la Proposición 4.3.9 nos indica que para r, existe $\eta > 0$ tal que $H(\alpha(s_1), \alpha(s_2)) < r$ si $|s_1 - s_2| < \eta$. □

Notación 4.3.12. Sea $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua. Dados $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, llamaremos $r(\mathcal{U})$ y $\eta(\mathcal{U})$ a los reales positivos que el Lema 4.3.11 afirma que existen.

Notación 4.3.13. Dados $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$, para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$ llamaremos $\Lambda_n = \bigcup_{i=1}^{h(n)}([t_{i-1}^n, t_i^n] \times \{L_i^n\})$ (vea Notación 4.3.8).

***Lema* 4.3.14.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Sean $Y = \bigcup \alpha[[0,1]]$, $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Si para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$ tomamos $j_n \in \{1, 2, \ldots, h(n)\}$ tal que $t \in [t_{j_n-1}^n, t_{j_n}^n]$, entonces:*

i) *existe una subsucesión $\{\Lambda_{n_k}\}_{k\in\omega}$ de $\{\Lambda_n\}_{n\in\omega\backslash\{0\}}$ que converge en $K([0,1] \times K(Y))$;*

ii) *existen un conjunto numerable $\Gamma \subseteq \omega$ y $w_t \in \alpha(t)$ tales que $B_{\frac{r(\mathcal{U})}{4}}(w_t) \cap \alpha(t) \cap L_{j_{n_k}}^{n_k} \neq \emptyset$ para todo $k \in \Gamma$;*

iii) *existe $\mu \in \omega$ tal que:*

a) $H^D(\Lambda_{n_\mu}, \Lambda_{n_k}) < \text{mín}\{\frac{r(\mathcal{U})}{4}, \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}\}$ *para cualquier $k \geq \mu$,*

b) $\frac{1}{\mu} < \text{mín}\{\frac{r(\mathcal{U})}{4}, \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}\}$,

c) $B_{\frac{r(\mathcal{U})}{4}}(w_t) \cap \alpha(t) \cap L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu} \neq \emptyset$.

Demostración. Para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que L_i^n es compacto y por lo tanto, Λ_n es un subespacio compacto de $[0,1] \times K(Y)$; es decir, $\{\Lambda_n\}_{n\in\omega\backslash\{0\}} \subseteq K([0,1] \times K(Y))$. Por el Teorema 1.3.22 existe una subsucesión $\{\Lambda_{n_k}\}_{k\in\omega}$ de $\{\Lambda_n\}_{n\in\omega\backslash\{0\}}$ que converge en $K([0,1] \times K(Y))$. Lo anterior demuestra *i*).

Del Lema 2.2.9 aplicado a $\mathcal{A} = \alpha[[t_{j_{n_k}-1}^{n_k}, t_{j_{n_k}}^{n_k}]]$ y $S = \alpha(t)$, se sigue que $\alpha(t) \cap L_{j_{n_k}}^{n_k} \neq \emptyset$ para cada $k \in \omega$. Si para cada $k \in \omega$ tomamos $z_k \in \alpha(t) \cap L_{j_{n_k}}^{n_k} \subseteq \alpha(t)$, el Teorema 1.3.22 garantiza que $\{z_k\}_{k\in\omega}$ tiene una subsucesión $\{z_{k_l}\}_{l\in\omega}$ que converge a algún $z \in \alpha(t)$. Proponemos

$$w_t = z.$$

Debido a que $\{z_{k_l}\}_{l\in\omega}$ converge a w_t y a que $\frac{r(\mathcal{U})}{4} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z_{k_l} \in B_{\frac{r(\mathcal{U})}{4}}(w_t)$ siempre que $l \geq N$. Definimos

$$\Gamma = \{k_l \in \omega \mid l \geq N\}.$$

Luego, $z_k \in B_{\frac{r(\mathcal{U})}{4}}(w_t) \cap \alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}}$ para cada $k \in \Gamma$, lo que demuestra *ii*).

Llamemos $M = \text{mín}\{\frac{r(\mathcal{U})}{4}, \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}\}$. Usando que $\{\Lambda_{n_k}\}_{k\in\omega}$ es una sucesión convergente y por lo tanto es una sucesión de Cauchy en $K([0,1] \times K(Y))$, llegamos a que existe $N' \in \omega$ tal que

$$H^D(\Lambda_{n_s}, \Lambda_{n_k}) < M \text{ para cualesquiera } s, k \geq N'. \tag{4.34}$$

Finalmente, como Γ es un conjunto numerable, estamos seguros de que existe $\mu \in \Gamma \subseteq \omega$ tal que

$$\mu > \text{máx}\{N', \frac{1}{M}\}. \tag{4.35}$$

Por (4.34) y (4.35), μ satisface *a*). De (4.35) se sigue directamente que μ satisface *b*). Recordando que $\mu \in \Gamma$ se concluye que μ satisface *c*). □

Notación 4.3.15. Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Dados $n \in \omega\setminus\{0\}$, $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle\mathcal{U}\rangle_c$, elegimos un número $j_n \in \{1, 2, \ldots, h(n)\}$ tal que $t \in [t^n_{j_n-1}, t^n_{j_n}]$ (vea Notación 4.3.5), mientras que $\Gamma(\mathcal{U})$, w_t y $\mu(\mathcal{U})$ serán aquellos que los incisos *ii*) y *iii*) del Lema 4.3.14 afirman que existen. Conservaremos la notación $\{\Lambda_{n_k}\}_{k\in\omega}$ para referirnos a la subsucesión de $\{\Lambda_n\}_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ que converge en $K([0,1] \times K(\bigcup \alpha[[0,1]]))$.

Lema 4.3.16. *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Sean $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle\mathcal{U}\rangle_c$. Sea $k \geq \mu(\mathcal{U})$. Existen $l \in \{1, 2, \ldots, h(n_k)\}$ y $s \in [t^{n_k}_{l-1}, t^{n_k}_l]$ tales que $|s-t| < \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}$ y $L^{n_k}_l \subseteq B_{r(\mathcal{U})}(w_t)$.*

Demostración. Llamaremos $r = r(\mathcal{U})$, $\eta = \eta(\mathcal{U})$, $\mu = \mu(\mathcal{U})$ y $M = \text{mín}\{\frac{r}{4}, \frac{\eta}{2}\}$. Por el punto *c*) de *iii*) del Lema 4.3.14 podemos tomar $z \in B_{\frac{r}{4}}(w_t) \cap \alpha(t) \cap L^{n_\mu}_{j_{n_\mu}}$. Debido a la elección de $L^{n_\mu}_{j_{n_\mu}}$ (vea Notación 4.3.8 y Lema 4.3.3), sabemos que $\text{diám}(L^{n_\mu}_{j_{n_\mu}}) < \frac{1}{n_\mu}$. Luego, si $x \in L^{n_\mu}_{j_{n_\mu}}$, entonces $d(x, w_t) \leq d(x, z) + d(z, w_t) < \frac{1}{n_\mu} + \frac{r}{4}$ y así,

$$L^{n_\mu}_{j_{n_\mu}} \subseteq B_{\frac{1}{n_\mu}+\frac{r}{4}}(w_t).$$

Usando que $\mu \leq n_\mu$ y el punto $b)$ de $iii)$ del Lema 4.3.14 se llega a que

$$L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu} \subseteq B_{\frac{1}{n_\mu}+\frac{r}{4}}(w_t) \subseteq B_{\frac{1}{\mu}+\frac{r}{4}}(w_t) \subseteq B_{\frac{r}{2}}(w_t). \tag{4.36}$$

Utilizando ahora el punto $a)$ de $iii)$ del Lema 4.3.14 y el Teorema 2.3.4, conseguimos que

$$\Lambda_{n_\mu} \subseteq N_M(\Lambda_{n_k}).$$

Así, como

$$(t, L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}) \in [t_{j_{n_\mu}-1}^{n_\mu}, t_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}] \times \{L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}\} \subseteq \Lambda_{n_\mu},$$

entonces existen $l \in \{1, \ldots, h(n_k)\}$ y $s \in [t_{l-1}^{n_k}, t_l^{n_k}]$ tales que

$$(s, L_l^{n_k}) \in [t_{l-1}^{n_k}, t_l^{n_k}] \times \{L_l^{n_k}\} \quad \subseteq \quad \Lambda_{n_k} \tag{4.37}$$

$$\text{y } D((t, L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}), (s, L_l^{n_k})) \quad < \quad M. \tag{4.38}$$

De esta forma, por la definición de D (vea Notación 4.3.10) y de M, obtenemos que $|s-t| + H(L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}, L_l^{n_k}) < \text{mín}\{\frac{\eta}{2}, \frac{r}{4}\}$, de donde

$$|s-t| < \frac{\eta}{2} \ \text{ y } \ H(L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}, L_l^{n_k}) < \frac{r}{4}.$$

Es por esto que

$$L_l^{n_k} \subseteq N_{\frac{r}{4}}(L_{j_{n_\mu}}^{n_\mu}). \tag{4.39}$$

Finalmente, debido a (4.36), a (4.39) y al Lema 2.3.2, estamos seguros de que

$$L_l^{n_k} \subseteq B_{\frac{r}{2}+\frac{r}{4}}(w_t) \subseteq B_r(w_t).$$

$\square$

Definición 4.3.17. Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua, $p \in \alpha(0)$, $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $k \geq \mu(\mathcal{U})$. Dados $l \in \{1, 2, \ldots, h(n_k)\}$ y $s \in [t_{l-1}^{n_k}, t_l^{n_k}]$ tales que $|s-t| < \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}$, definimos

$$L_k^t(s) = \begin{cases} L_{j_{n_k}}^{n_k} \cup L_{j_{n_k}+1}^{n_k} \cup \ldots \cup L_l^{n_k}, & \text{si } j_{n_k} \leq l; \\ L_l^{n_k} \cup L_{l+1}^{n_k} \cup \ldots \cup L_{j_{n_k}}^{n_k}, & \text{si } l < j_{n_k}. \end{cases}$$

(Vea Notación 4.3.8, i. e., revisar la definición de los conjuntos L_i^n).

Lema 4.3.18. *Sean $S \in S_c(X)$ y $\epsilon > 0$. Si $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ es tal que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, entonces $N_\epsilon(S) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} N_\epsilon(S \cap U)$.*

Demostración. Si $x \in N_\epsilon(S)$, entonces existe $y \in S$ tal que $x \in B_\epsilon(y)$. Como $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ que cumple con que $y \in U_0$. Luego, $y \in S \cap U_0$ y por lo tanto $x \in N_\epsilon(S \cap U_0)$; es decir que $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} N_\epsilon(S \cap U)$.

Supongamos ahora que $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} N_\epsilon(S \cap U)$. Inferimos que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in N_\epsilon(S \cap U)$, de donde existe $y \in S \cap U$ con la propiedad de que $x \in B_\epsilon(y)$. Particularmente sabemos que $y \in S$, por lo que $x \in N_\epsilon(S)$. $\square$

***Lema* 4.3.19.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Sean $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $k \geq \mu(\mathcal{U})$. Sean $r(\mathcal{U})$ y $\eta(\mathcal{U})$ como en la Notación 4.3.12. Sean $l \in \{1, 2, \ldots, h(n_k)\}$ y $s \in [t_{l-1}^{n_k}, t_l^{n_k}]$ tales que $|s - t| < \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}$.*

i) Si $j_{n_k} \leq l$ (vea Notación 4.3.15) y $q \in [t_{j_{n_k}-1}^{n_k}, t_l^{n_k}]$, entonces $H(\alpha(t), \alpha(q)) < r(\mathcal{U})$.

ii) Similarmente, si $l < j_{n_k}$ y $q \in [t_{l-1}^{n_k}, t_{j_{n_k}}^{n_k}]$, ocurre que $H(\alpha(t), \alpha(q)) < r(\mathcal{U})$.

Demostración. Tomaremos $r = r(\mathcal{U})$, $\eta = \eta(\mathcal{U})$ y $\mu = \mu(\mathcal{U})$. El caso *ii*) se resuelve de manera similar al caso *i*), de modo que analizaremos sólo este último.

Debido a la elección de δ_{n_k} (vea Notación 4.3.5), es verdad que $\delta_{n_k} \leq \frac{1}{n_k}$. Retomando que $k \geq \mu$ y el punto *b*) del inciso *iii*) del Lema 4.3.14, llegamos a que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{n_\mu} \leq \frac{1}{\mu} < \frac{\eta}{2}$; es decir

$$\delta_{n_k} < \frac{\eta}{2}. \tag{4.40}$$

Sea $q \in [t_{j_{n_k}-1}^{n_k}, t_l^{n_k}]$. Probaremos primero que

$$|t - q| < \eta. \tag{4.41}$$

Recordando la elección de j_{n_k}, bajo el supuesto de que $s \leq t$ ocurre que $l = j_{n_k}$, por lo que $q \in [t_{j_{n_k}-1}^{n_k}, t_{j_{n_k}}^{n_k}]$. Luego, de (4.40) se sigue que $|t - q| < \delta_{n_k} < \eta$, lo cual prueba (4.41) si es que $s \leq t$.

Asumamos pues que $t < s$. De esta forma, $[t_{j_{n_k}-1}^{n_k}, t_l^{n_k}] = [t_{j_{n_k}-1}^{n_k}, t) \cup [t, s] \cup (s, t_l^{n_k}]$. Revisemos entonces los posibles casos.

Caso 1. Si $q \in [t^{n_k}_{j_{n_k}-1}, t)$.
Gracias a la elección de j_{n_k} es verdad que $|t-q| \leq |t^{n_k}_{j_{n_k}-1} - t^{n_k}_{j_{n_k}}|$. De la elección de la partición P_{n_k} (vea Notación 4.3.6) se sabe que $|t^{n_k}_{j_{n_k}-1} - t^{n_k}_{j_{n_k}}| < \delta_{n_k}$. Por (4.40) se infiere que

$$|t-q| \leq |t^{n_k}_{j_{n_k}-1} - t^{n_k}_{j_{n_k}}| < \delta_{n_k} < \frac{\eta}{2}.$$

Caso 2. Si $q \in [t, s]$, entonces

$$|t-q| \leq |t-s| < \frac{\eta}{2}.$$

Caso 3. Si $q \in (s, t^{n_k}_l]$.
La desigualdad del triángulo nos dice que $|t-q| \leq |t-s| + |s-q|$. Nuevamente, la forma en que elegimos a la partición P_{n_k} y a l aseguran que $|s-q| < \delta_{n_k}$. Por hipótesis se cumple que $|t-s| < \frac{\eta}{2}$. Finalmente, con la desigualdad (4.40) justificamos que

$$|t-q| \leq |t-s| + |s-q| < \frac{\eta}{2} + \delta_{n_k} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

En cada caso obtenemos (4.41); así, el Lema 4.3.11 garantiza que $H(\alpha(t), \alpha(q)) < r$. □

***Lema* 4.3.20.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Sean $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $k \geq \mu(\mathcal{U})$. Si $s \in [0,1]$ es tal que $|s-t| < \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $L^t_k(s) \subseteq U$.*

Demostración. Nombremos $r = r(\mathcal{U})$ y $L^t_k(s) = L_k(s)$. Sea j_{n_k} como en la Notación 4.3.15 y tomemos $l \in \{1, 2, \ldots, h(n_k)\}$ tal que $s \in [t^{n_k}_{l-1}, t^{n_k}_l]$. Los casos $l < j_{n_k}$ y $j_{n_k} \leq l$ se resuelven de forma similar; demostraremos el lema sólo tomando el caso $j_{n_k} \leq l$.

De la definición de $L_k(s)$ se sigue que

$$L_k(s) \subseteq \bigcup \alpha[[t^{n_k}_{j_{n_k}-1}, t^{n_k}_l]]. \tag{4.42}$$

Por el Lema 4.3.19 sabemos que $H(\alpha(t), \alpha(q)) < r$ para cualquier $q \in [t^{n_k}_{j_{n_k}-1}, t^{n_k}_l]$; es decir que $\alpha[[t^{n_k}_{j_{n_k}-1}, t^{n_k}_l]] \subseteq B^H_r(\alpha(t))$. Luego,

$$\bigcup \alpha[[t^{n_k}_{j_{n_k}-1}, t^{n_k}_l]] \subseteq N_r(\alpha(t)). \tag{4.43}$$

Por hipótesis tenemos que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Aplicando el Lema 4.3.18 conseguimos que

$$N_r(\alpha(t)) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} N_r(\alpha(t) \cap U). \tag{4.44}$$

Usando ahora el Lema 4.3.11 podemos decir que

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} N_r(\alpha(t) \cap U) \subseteq \bigcup \mathcal{U}. \tag{4.45}$$

Demostramos con (4.42), (4.43), (4.44) y (4.45) que

$$L_k(s) \subseteq \bigcup \mathcal{U}. \tag{4.46}$$

Los lemas 4.3.7 y 1.3.26 prueban que $L_k(s)$ es conexo. Debido a que $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$, a (4.46) y a que $L_k(s)$ es conexo encontramos que $L_k(s) \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. En otras palabras, se ha probado el resultado. $\square$

***Lema* 4.3.21.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Sean $t \in [0,1]$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $k \geq \mu(\mathcal{U})$. Si $s \in [0,1]$ es tal que $|s-t| < \frac{\eta(\mathcal{U})}{2}$ y $U_0 \in \mathcal{U}$ es tal que $w_t \in U_0$ (vea Notación 4.3.15), entonces $L_k^t(s) \subseteq U_0$.*

Demostración. Llamaremos $\eta = \eta(\mathcal{U})$ y $r = r(\mathcal{U})$. Gracias al Lema 4.3.16 es que se pueden tomar $l_0 \in \{1, 2, \ldots, h(n_k)\}$ y $s_0 \in [t_{l_0-1}^{n_k}, t_{l_0}^{n_k}]$ tales que $|s_0 - t| < \frac{\eta}{2}$ y

$$L_{l_0}^{n_k} \subseteq B_r(w_t). \tag{4.47}$$

Debido a que $w_t \in \alpha(t) \cap U_0$, obtenemos que

$$B_r(w_t) \subseteq N_r(\alpha(t) \cap U_0). \tag{4.48}$$

Además, el Lema 4.3.11 revela que

$$N_r(\alpha(t) \cap U_0) \subseteq U_0. \tag{4.49}$$

De (4.47), (4.48) y (4.49) se sigue que

$$L_{l_0}^{n_k} \subseteq U_0. \tag{4.50}$$

Para continuar, el Lema 4.3.20 afirma que existen algunos $U', U \in \mathcal{U}$ que satisfacen que $L_k^t(s_0) \subseteq U'$ y que $L_k^t(s) \subseteq U$. Si recordamos la definición de $L_k^t(s_0)$, nos damos cuenta de que $L_{l_0}^{n_k} \subseteq L_k^t(s_0)$. Es gracias a este hecho y a (4.50) que deducimos que $U' = U_0$. Como $L_{j_{n_k}}^{n_k} \subseteq L_k^t(s) \cap L_k^t(s_0)$, el Lema 1.3.26 asegura que $L_k^t(s) \cup L_k^t(s_0)$ es conexo. Finalmente, a causa de que $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ es que $U_0 = U$. Por lo tanto $L_k^t(s) \subseteq U_0$. $\square$

***Lema* 4.3.22.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $t \in [0,1]$. Para cada $\rho > 0$ existen $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}(X)$ y $V_0 \in \mathcal{V}$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{V} \rangle_c$ y $w_t \in V_0 \subseteq B_\rho(w_t)$.*

Demostración. Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1 Si $w_t = \lim \alpha(t)$.

Bajo el supuesto de que $\alpha(t) \subseteq B_\rho(w_t)$, bastará tomar $V_0 = B_\rho(w_t)$ y $\mathcal{V} = \{V_0\}$.

Asumiremos entonces que $\alpha(t) \backslash B_\rho(w_t) \neq \emptyset$. El punto 2 de la Definición 3.1.1 afirma que $\alpha(t) \backslash B_\rho(w_t)$ es un conjunto finito y por lo tanto, es un subespacio compacto de X. Como $\alpha(t) \cap B_\rho(w_t) = \alpha(t) \backslash (\alpha(t) \backslash B_\rho(w_t))$, $\alpha(t) \backslash B_\rho(w_t)$ es finito y $\lim \alpha(t) \notin \alpha(t) \backslash B_\rho(w_t)$, el punto 2) del Lema 3.1.7 demuestra que $\alpha(t) \cap B_\rho(w_t)$ es un subespacio compacto de X, además, $\alpha(t) \cap B_\rho(w_t)$ es ajeno a $\alpha(t) \backslash B_\rho(w_t)$. Luego, por el Lema 1.3.20 se sabe que existen dos subconjuntos abiertos U y W de X tales que $\alpha(t) \backslash B_\rho(w_t) \subseteq U$, $\alpha(t) \cap B_\rho(w_t) \subseteq W$ y $U \cap W = \emptyset$. Notemos ahora que

$$\alpha(t) \cap B_\rho(w_t) \subseteq B_\rho(w_t) \cap W \subseteq B_\rho(w_t).$$

De modo que $\{B_\rho(w_t) \cap W, U\} = \mathcal{V}$ y $B_\rho(w_t) \cap W = V_0$ funcionan para nuestros propósitos.

Caso 2 Si $w_t \neq \lim \alpha(t)$.

El punto 2) del Lema 3.1.7 asegura que $\alpha(t) \backslash \{w_t\} \in S_c(X)$. Usemos el Lema 1.3.20 para hallar dos subconjuntos abiertos y ajenos U y W de X tales que $w_t \in U$ y $\alpha(t) \backslash \{w_t\} \subseteq W$. De esta manera, $\mathcal{V} = \{U \cap B_\rho(w_t), W\}$ y $V_0 = U \cap B_\rho(w_t)$ satisfacen el lema. □

***Lema* 4.3.23.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Sea $t \in [0,1]$. Para cada $\rho > 0$ existe $k_0 \in \omega$ tal que $\emptyset \neq \alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}} \subseteq B_\rho(w_t)$ para cualquier $k \geq k_0$.*

Demostración. Sea $\rho > 0$. Usemos el Lema 4.3.22 para encontrar $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}(X)$ y $V_0 \in \mathcal{V}$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{V} \rangle_c$ y $w_t \in V_0 \subseteq B_\rho(w_t)$. Proponemos $k_0 = \mu(\mathcal{V})$ (vea Notación 4.3.15). Sean $k \geq \mu(\mathcal{V})$ y $s \in [0,1]$ tal que $|s - t| < \frac{\eta(\mathcal{V})}{2}$. Del Lema 2.2.9 aplicado a $\mathcal{A} = \alpha[[t_{j_{n_k}-1}, t_{j_{n_k}}]]$ y $S = \alpha(t)$, se tiene que $\emptyset \neq \alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}}$ para cualquier $k \in \omega$, en particular esto ocurre para cada $k \geq \mu(\mathcal{V})$. Finalmente, como $L^{n_k}_{j_{n_k}} \subseteq L^t_k(s)$ (vea Definición 4.3.17), el Lema 4.3.21 demuestra que $\alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}} \subseteq L^t_k(s) \subseteq V_0 \subseteq B_\rho(w_t)$. □

***Corolario* 4.3.24.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Si $t \in [0,1]$, entonces la sucesión $\{\alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}}\}_{k\in\omega}$ converge a $\{w_t\}$ en $K(X)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 4.3.23 existe $k_0 \in \omega$ tal que

$$\emptyset \neq \alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}} \subseteq B_\epsilon(w_t) \text{ para cualquier } k \geq k_0. \tag{4.51}$$

Sea $k \geq k_0$. De (4.51) inferimos que

$$\alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}} \subseteq N_\epsilon(\{w_t\}). \tag{4.52}$$

Por (4.51) también es verdad que existe $z \in \alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}} \subseteq B_\epsilon(w_t)$. Esto quiere decir que $w_t \in B_\epsilon(z)$ y por lo tanto,

$$w_t \in N_\epsilon(\alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}}). \tag{4.53}$$

Finalmente, de (4.52), (4.53) y el Lema 2.3.2 se obtiene que $H(\alpha(t) \cap L^{n_k}_{j_{n_k}}, \{w_t\}) < \epsilon$ para cada $k \geq k_0$, lo que termina la demostración. □

A continuación probaremos el Teorema 4.3.25, el cual será la piedra angular en la demostración del Teorema 4.3.26. Todos los resultados previos de esta sección (de la Observación 4.3.2 al Corolario 4.3.24) fueron realizados pensando en la demostración del Teorema 4.3.25.

***Teorema* 4.3.25.** *Sean $\alpha : [0,1] \to S_c(X)$ una función continua y $p \in \alpha(0)$. Existe una función continua $\gamma : [0,1] \to \bigcup \alpha[[0,1]] \subseteq X$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) \in \alpha(1)$.*

Demostración. Definimos $\gamma : [0,1] \to \bigcup \alpha[[0,1]]$ como $\gamma(t) = w_t$ (vea Notación 4.3.15). Sea $t \in [0,1]$. Probaremos que γ es continua en t. Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 4.3.22 existen $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}(X)$ y $W_0 \in \mathcal{W}$ tales que $\alpha(t) \in \langle \mathcal{W} \rangle_c$ y $w_t \in W_0 \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_t)$. Sea $s \in [0,1]$ tal que $|s-t| < \frac{\eta(\mathcal{W})}{2}$ (vea Notación 4.3.11). Basta probar entonces que $d(\gamma(s), \gamma(t)) < \epsilon$.

Para cada $k \in \omega$, sea $a_k \in \{1, 2, \ldots, h(n_k)\}$ tal que $s \in [t^{n_k}_{a_k-1}, t^{n_k}_{a_k}]$. El Lema 4.3.23 asegura que existe $k_s \in \omega$ tal que

$$\emptyset \neq \alpha(s) \cap L^{n_k}_{a_k} \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_s) \text{ para cualquier } k \geq k_s. \tag{4.54}$$

Sea $\kappa \geq \max\{k_s, \mu(\mathcal{W})\}$ (vea Notación 4.3.15). Del Lema 4.3.21 conseguimos que

$$L^t_\kappa(s) \subseteq W_0 \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_t). \tag{4.55}$$

Debido a que $L_{a_\kappa}^{n_\kappa} \subseteq L_\kappa^t(s)$ y a (4.54), se tiene que

$$\emptyset \neq \alpha(s) \cap L_{a_\kappa}^{n_\kappa} \subseteq L_\kappa^t(s) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_s);$$

es decir, existe

$$z \in L_\kappa^t(s) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_s). \tag{4.56}$$

Gracias a (4.55) comprobamos que $z \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_s) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(w_t)$, de donde

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = d(w_t, w_s) \leq d(w_t, z) + d(z, w_s) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Hemos probado que γ es continua.

Recordando que $p \in L_1^n$ para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$ (vea Notación 4.3.8), se llega a que $p \in \alpha(0) \cap L_1^{n_k}$ para toda $k \in \omega$; es decir, $\{p\} \subseteq \alpha(0) \cap L_1^{n_k}$. El Corolario 4.3.24 afirma que $\{w_0\} = \text{lím}_{k\to\infty} \alpha(0) \cap L_1^{n_k}$. Luego, del Teorema 2.2.8 estamos seguros de que

$$\{p\} \subseteq \lim_{k\to\infty} \alpha(0) \cap L_1^{n_k} = \{w_0\}.$$

Inferimos que $\gamma(0) = w_0 = p$ y por construcción se sabe que $\gamma(1) = w_1 \in \alpha(1)$, lo que termina la demostración. $\square$

Concluimos este trabajo con el resultado más importante de la Sección 4.3.

***Teorema* 4.3.26.** *Sea X un espacio métrico. Si $S_c(X)$ es un espacio conexo por trayectorias y no vacío, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $S \in S_c(X)$ y $w \in S \backslash \{\text{lím}\, S\}$. Por el punto 3) del Lema 3.1.7 se tiene que $S \backslash \{w\} \in S_c(X)$. Por hipótesis existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \to S_c(X)$ tal que $\alpha(0) = S$ y $\alpha(1) = S \backslash \{w\}$. Del Teorema 4.3.25 se sabe que existe una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = w$ y $\gamma(1) \in S \backslash \{w\}$. Notemos que $\gamma(1) \neq w$, lo que demuestra que la componente por trayectorias de w en X tiene más de un punto. Sea C la componente por trayectorias de w en X.

Probemos ahora que $X \subseteq C$. Sean $p \in X$, $S' \in S_c(C)$ y $S_1 = S' \cup \{p\}$. El punto 1) del Lema 3.1.7 prueba que $S_1 \in S_c(X)$. Por hipótesis sabemos que hay una trayectoria en $S_c(X)$ que une a S_1 con S', nuevamente por el

Teorema 4.3.25 existe una función continua $\gamma' : [0,1] \to X$ tal que $\gamma'(0) = p$ y $\gamma'(1) \in S' \subseteq C$. Debido a que $\gamma'(1) \in C$, existe una trayectoria en X que une a $\gamma'(1)$ con w. Aplicando el Lema 1.3.11 al conjunto $\{p, \gamma'(1), w\}$, se sigue que existe una trayectoria en X que va de p a w; es decir, $p \in C$. Hemos probado que $X \subseteq C$ y por lo tanto, X es conexo por trayectorias. $\square$

Bibliografía

[1] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de la Topolgía General*, Aportaiones Matemáticas, Serie Textos 37, Sociedad Matemática Mexicana, 2015.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Verlag Berlin, 1988.

[4] S. García-Ferreira y Y. F. Ortiz-Castillo, *The hyperspace of convergent sequences*, Topology Appl., Vol. 196, (2015), p. 795-804.

[5] A. García-Máynez y A. Tamariz-Mascarúa, *Topología General*, Editorial Porrúa, S. A., Ciudad de México, 1988.

[6] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos*, Segunda edición, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[7] A. Illanes y S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[8] K. Kuratowski, *Topology*, PWN-Polish Scientific Publishers Warszawa, Vol. 2, New York, 1968.

[9] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza, *General Properties of the Hyperspace of Convergent Sequences*. En arbitraje.

[10] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math Soc., Vol 71, No. 1, (1951), p. 152-182.

[11] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Lecture notes in pure and applied mathematics, vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.

[12] S. Willard, *General topology*, Dover Publications, Inc., New York, 2004.