



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LAS DIFERENTES DINÁMICAS
ENTRE LOS PRECIOS DE CIERRE Y
APERTURA A PARTIR DEL TEOREMA DE
INMERSIÓN DE TAKENS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

RODRIGO RODRÍGUEZ VALENCIA

TUTOR

DR. RICARDO LINO MANSILLA CORONA

Ciudad Universitaria, CdMx

2016





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Rodríguez
Valencia
Rodrigo
52 11 89 31 79
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Física
40907069-1

2. Datos del tutor

Dr.
Ricardo Lino
Mansilla
Corona

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Adonis Germinal
Cocho
Gil

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Gerardo
Carmona
Ruiz

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Marcelo
Del Castillo
Mussot

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Pedro Eduardo
Miramontes
Vidal

7. Datos del trabajo escrito

Estudio de las Diferentes Dinámicas entre los Precios de Cierre y Apertura a partir del
Teorema de Inmersión de Takens
116 p

2016

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que han formado parte y contribuido a mi desarrollo académico, profesional y más importante personal.

En especial quiero mencionar a los dos pilares que me han sostenido durante todo este trayecto: mis padres. Ambos han sido ejemplos a seguir de esfuerzo, trabajo, dedicación; por mencionar solo algunas de sus cualidades. Sin duda ambos con sus consejos han facilitado y guiado el camino que he ido construyendo.

Gracias a mi familia primos y tios que siempre han creído en mí. De cada uno de ellos he tomado elementos valiosos que han ayudado al progreso y alcance de mis metas.

Agradezco a mi novia que también es un ejemplo a seguir y ha sido parte del combustible para poder finalizar y cerrar capítulos de mi vida.

A la comunidad científica y en especial al Dr. Ricardo Mansilla quien me guió en este mundo de los sistemas complejos. Siempre con su amabilidad y disposición a la enseñanza, haciendome razonar e imaginar el alcance de las aplicaciones que puede tener este tema tan interesante.

Mis amigos dentro y fuera de la facultad que han estado tanto en los buenos momentos como en los malos. Juntos hemos compartido distintas vivencias dignas a recordar.

Índice general

1. Introducción	III
2. Sistemas dinámicos: reconstrucción e inmersión	1
2.1. Sistemas dinámicos	1
2.2. Estocasticidad y Determinismo: La idea general	2
2.2.1. Intuición del teorema de Takens	4
2.2.2. Sistemas No Lineales	6
2.3. Espacio Fase	10
2.3.1. Inmersiones Dinámicas “ <i>Dynamical Embeddings</i> ”	11
2.3.2. Atractores	15
2.4. Invariantes Dinámicas	18
2.4.1. Dimensión de Correlación I	19
2.4.2. Diagnosticando Caos y No Linealidades	22
2.4.3. Requerimientos en la información	27
2.4.4. No linealidad	28
2.4.5. Información Mutua	29
2.4.6. Dimensión de Correlación II	33
2.5. Teorema de Takens	35
3. Mercados Eficientes y Bursátiles	41
3.1. Hipótesis de Mercados Eficientes	41
3.2. Las tres versiones de la Hipótesis de Mercados Eficientes	44
3.3. Historia del Dow Jones	45
3.4. Metodología del cálculo del Dow Jones	48
4. Metodología y resultados	51
4.1. Metodología	51
4.2. Resultados	55
4.3. Dow Jones	55
4.4. Empresas desglosadas del Dow Jones	62
4.4.1. Ejemplificación American Express	62
4.4.2. Ejemplificación Función de Complejidad	70
4.4.3. Ejemplificación Información Mutua	74
4.5. Histogramas y Tiempo de Retraso	77

4.5.1. Dimensión de Inmersión	77
4.5.2. Dimensión de Correlación	81
4.5.3. Reconstrucción del Atractor	85
5. Consecuencias y Conclusiones	87
6. Anexos	97
6.1. Scripts Matlab	97
6.2. Tablas	110
6.2.1. Tablas sobre Precios Open	110
6.2.2. Tablas sobre Precios Close	112
7. Bibliografía	115

Capítulo 1

Introducción

Al analizar series de tiempo con métodos lineales se tiene un número fijo de parámetros que describen al sistema en estudio; el procedimiento que se sigue está previamente determinado. Sin embargo, al analizar series de tiempo no lineales cambia la teoría desde la base, ya que no se tienen parámetros fijos ni un procedimiento determinado; aquí radica la importancia de su estudio.

Se puede definir el análisis de series de tiempo no lineales como el estudio de series de tiempo por medio de algoritmos computacionales sensibles a la información que caracteriza al comportamiento no lineal.

Originalmente, la preocupación por desarrollar nuevas herramientas matemáticas para entender la fenomenología no lineal presente en diversos sistemas, llevó a desarrollar nuevos conceptos teóricos para su comprensión, ya que los conceptos teóricos previos no le podían dar una explicación. Esto dio pie a que, durante las últimas décadas, se haya dedicado una gran atención al estudio de sistemas no lineales. Como era de esperar, por su naturaleza, la mayoría de los artículos científicos han provenido de matemáticos y físicos.

Matemáticamente, el estudio de métodos no lineales se genera a partir de la necesidad de resolver problemas cuyas soluciones no están dentro de las siguientes categorías: exponenciales (crecientes o decrecientes), movimientos amortiguados o periódicamente oscilatorios. Todo caso distinto a los anteriores se refiere a comportamientos “irregulares”, que generalmente se asocian a condiciones iniciales aleatorias. Esto no quiere decir que el estudio de métodos lineales sea irrelevante, ya que estos interpretan todas las estructuras regulares del conjunto de soluciones, como por ejemplo, la frecuencia dominante a través de correlaciones lineales.

La intención de la presente tesis es estudiar las series de tiempo de los precios de cierre y de apertura, para los activos que pertenecen al índice Dow Jones en

el NYSE¹. La hipótesis a partir de la cual se desarrolla el análisis establece que las dinámicas propias de las series de tiempo de cierre y apertura del mercado deberían ser diferentes, de acuerdo con la literatura consultada. Por tanto, el método no lineal empleado en este trabajo está basado en la Teoría de los Sistemas Dinámicos, referente a la evolución temporal definida en el espacio fase, ya que sus herramientas podrían arrojar luz al respecto. Además, el estudio tiene como soporte el Teorema de Inmersión de Takens, para desarrollar una técnica de análisis de series de tiempo no lineales calculando la dimensión de inmersión n y el tiempo de retraso τ .

El análisis eje de la presente tesis encuentra su justificación al observar que las series de tiempo del Dow Jones y las 30 empresas que lo constituyen presentan un comportamiento irregular: como condicionante, los mercados financieros funcionan de manera especulativa día a día y esto genera un caos determinista, lo que deviene de manera natural en el uso de métodos no lineales para su estudio.

Cabe subrayar que el abordaje analítico de mercados financieros es de fundamental importancia, ya que la economía está globalizada y estos tienen un papel nodal para determinar qué tipo de acontecimiento se está presentando, crecimiento o crisis. Es acucioso comprender sus dinámicas, para poder hacer un acercamiento y tratar de establecer parámetros de predicción con una mayor precisión.

De manera más común, la predicción bursátil se basa actualmente en análisis de carácter fundamental y técnico. El primero evalúa el valor del activo con base en la información económica y financiera disponible, es decir, la denominada macroeconómica. El segundo presupone que las series de tiempo de los precios contienen la suficiente información como para predecir tendencias de los activos. Ambos modelos tienen limitaciones en su capacidad prospectiva. Una razón más para tratar de explicar y predecir a partir de la dinámica natural y no lineal del sistema, sugiriendo con base en la literatura métodos de resolución no lineales; involucran caos determinista y constituyen una alternativa diferente a las usadas hasta ahora.

Otro motivo esencial para considerar dinámicas no lineales en el análisis de datos económicos es que muchos fenómenos observados se pueden explicar con conceptos como bifurcaciones dinámicas y Teoría del Caos (Day, 1985). Si representamos una serie de tiempo usando las coordenadas apropiadas (espacio fase), el resultado será un objeto geométrico (atractor). Al estudiar este atractor se pueden obtener cantidades que lo caracterizan, y que por lo tanto caracterizan a la dinámica interna del sistema.

¹New York Stock Exchange por sus siglas en inglés (NYSE), en español se conoce como el Mercado de Valores de Nueva York

En los años 80, el interés en el caos determinista llevó a los científicos a implementar métodos para extraer información dinámica de la sucesión de un conjunto de datos (series de tiempo), así se empezaron a desarrollar las técnicas de análisis de series de tiempo no lineales, que con frecuencia solo representaban información incompleta de fenómenos bajo estudio. En este marco teórico se hacía indispensable la reconstrucción del espacio fase a partir de información incompleta, esto es, de la serie de tiempo.

Objetivos de la presente tesis

La motivación principal de este trabajo es la posibilidad de utilizar sistemas dinámicos para interpretar el comportamiento de los mercados bursátiles financieros; en particular sus fenómenos de inicio y cierre. Estos permitirán analizar series de tiempo con comportamiento no lineal, derivadas de dichos mercados. Este abordaje está poco explorado, debido a que existen varias metodologías de acuerdo con los distintos autores y a que es relativamente nuevo. Por tanto, el objetivo central de la tesis es proporcionar un modelo que se obtendrá de una combinación de varias propuestas, así como de las herramientas necesarias para poder dilucidar el problema fundamental; este es: si existen efectivamente diferencias estructurales entre las series de los precios de apertura y los de cierre de las acciones de las empresas que incorporan el Dow Jones Industrial Average.

Objetivos:

- Tener la posibilidad de reconstruir los atractores de las series de tiempo de inicio y cierre diario del mercado.
- Estudiar propiedades dinámicas de las series de tiempo y de sus atractores, a saber su dimensión de inmersión y el delay necesario para reconstruir el atractor.
- Utilizar las magnitudes antes mencionadas para analizar si las dinámicas de inicio y cierre del mercado son diferentes o no.

Para lograr su implementación es necesario proporcionar algoritmos y programas de cómputo que faciliten la obtención numérica de las siguientes magnitudes:

- Algoritmo computacional para el cálculo del tamaño óptimo de los histogramas.
- Algoritmo computacional para el cálculo de la función de información mutua.
- Algoritmo computacional para el cálculo de la integral de correlación.
- Algoritmo computacional para la reconstrucción adecuada del atractor.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos: reconstrucción e inmersión

2.1. Sistemas dinámicos

Para iniciar nuestra discusión temática de la presente tesis iniciaremos con responder la siguiente pregunta: ¿Qué es un sistema dinámico? Para una definición intuitiva, podemos pensar que los sistemas dinámicos es todo lo relacionado con la evolución temporal de algún sistema. Por lo que para crear un sistema dinámico se necesitan dos cosas: 1. Decidir cuál es el sistema con el que vamos a trabajar y 2. La regla que indica cómo evoluciona en el tiempo el sistema. Dicho esto podemos dar una definición un poco menos intuitiva y decir que un sistema dinámico es un modelo para describir la evolución temporal de un sistema.

En los sistemas dinámicos nuestro objetivo principal es comprender el comportamiento del estado del sistema, dada una regla que determina cómo evoluciona el sistema en el tiempo. Los estados son caracterizados por variables, por lo cual, las llamaremos variables de estado. Cualquier cosa que podamos representar con un número la podemos considerar un estado. Algunos ejemplos que se consideran comunes en sistemas dinámicos son: la población de algún lugar, la densidad química de una solución, la cantidad de dinero de una cuenta de banco, la posición de una partícula o cualquier cosa que se pueda representar con un número o un conjunto de números. Dado un sistema dinámico el sistema necesita de una regla que definirá la dinámica o dicho de otra forma, cómo el sistema cambia. La dificultad de generar un sistema dinámico radica en determinar la regla apropiada. Aquí es en donde entra en juego la generación de modelos.

Estudios formales de sistemas dinámicos involucran estudios de modelos matemáticos, los cuales fueron creados por profesionales de las áreas como Física, Matemáticas, Química, Biología o Economía. Algunos sistemas se derivaron de principios básicos y se probaron para mostrar la precisión experimental era su-

ficientemente fuerte para crear nuevas tecnologías. Por ejemplo las Leyes de Newton son increíblemente precisas, siempre que consideremos velocidades que no estén cercanas a la velocidad de la luz, ni tamaños semejantes a la estructura atómica. Por ejemplo, problemas de la Mecánica Clásica se pueden modelar como sistemas dinámicos donde la posición y velocidad de la partícula son las variables de estados y las leyes de Newton se utilizan como la regla que determina la dinámica. En este caso tendremos un sistema escrito en ecuaciones diferenciales. Estos tipos de modelos físicos constituyen una parte de los sistemas dinámicos que se utilizan como una herramienta cuantitativa para analizar el entorno.

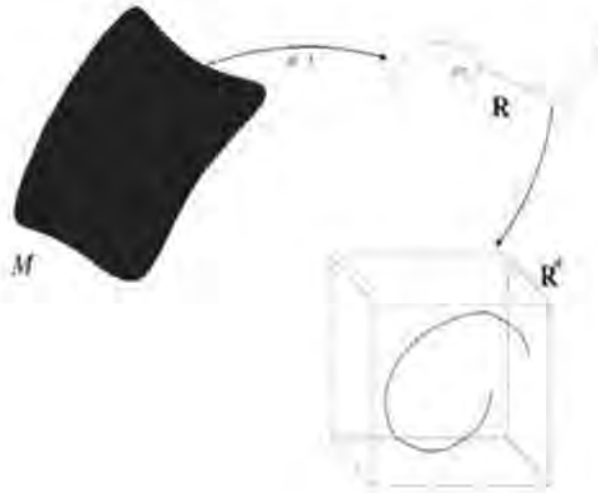
Por otro lado, algunos sistemas dinámicos usan aproximaciones y simplificaciones, por lo que no generan una precisión ni predicción del mismo grado que los valores originales. Sin embargo, estos sistemas permiten hacer afirmaciones más profundas del comportamiento general de dicha fenomenología física. Este análisis cualitativo es un objeto de estudio principal. Por ejemplo, el entendimiento de las oscilaciones químicas no requiere de un conocimiento exacto de las densidades químicas en cualquier punto y en cualquier tiempo del espacio. Esto provendría de la solución exacta del sistema dinámico cuya variable de estado representa la densidad química. Pero, soluciones exactas de sistemas complejos generalmente son muy complicados de resolver. En lugar de intentar resolverlo se hacen aproximaciones digamos por series de tiempo o ecuaciones diferenciales según sea el caso de estudio.

2.2. Estocasticidad y Determinismo: La idea general

Empezaremos a describir un sistema determinista. Estos sistemas dinámicos son en los que dados una determinada “regla” y cierto conocimiento previo del estado actual del sistema se pueden predecir estados futuros.

Sea z_n el estado actual del sistema, suponemos que $z_n \in M \subset \mathbb{R}^k$ es k dimensional, M es el “atractor” (más adelante definiremos con más precisión este concepto, por ahora diremos que es un objeto geométrico que representa la dinámica interna del sistema) donde evoluciona la dinámica, no es necesario que esté restringido y tenemos un operador de evolución que se define de la siguiente manera: $\Phi : M \times \mathbb{Z} \rightarrow M$ tal que $\Phi(z_n, t) = z_{n+t}$. En realidad no tenemos que restringir $M \subset \mathbb{R}^k$, pero hacer esto tampoco restringe nuestra discusión.

Definiendo de otro modo a los sistemas deterministas, se dice que la dinámica del sistema descrito por (M, Φ) es determinista, si la evolución del operador Φ es determinista. En otras palabras, si podemos escribir una regla matemática la cual pueda determinar el estado futuro z_{n+t} a partir del estado actual z_n para cualquier n para un valor de $t > 0$, entonces esa regla, Φ , se dice que es deter-



minista y por tanto el sistema dinámico definido por esa regla será determinista.

Por otro lado, nuestra definición insiste que nuestro operador de evolución no cambia en el tiempo, es decir, si $x_n = x_m$, entonces $\Phi(x_n, \cdot) = \Phi(x_m, \cdot)$, incluso si $m \neq n$; en este caso el sistema se dice que es estacionario. Los sistemas dinámicos que no son estacionarios son extremadamente difíciles de modelar desde las series de tiempo.

Cabe distinguir la distinción en las definiciones de estacionalidad entre sistemas lineales y sistemas no lineales. Para un sistema lineal se dice que es estacionario si todos sus momentos se mantienen sin cambios en el tiempo¹. La justificación para fijarnos en sistemas estacionarios es observando que la extensión del sistema no necesariamente está fija.

La definición de un sistema dinámico no estacionario está en relación con la dependencia temporal basada en agentes externos que la influyen. La definición de un sistema dinámico no estacionario casi siempre se puede extender a un sistema dinámico casi estacionario, ya que si en ese sistema no estacionario se añaden los agentes externos que lo hacen no estacionario se tendrá un sistema estacionario o uno muy cercano a ser estacionario. En otras palabras, si tenemos un operador de evolución Φ no estacionario, se puede construir un nuevo operador $\tilde{\Phi}$ estacionario al cual se le añade k de manera apropiada.

Ahora supondremos que tenemos un sistema dinámico que es estacionario y determinista, ahora examinaremos este sistema. Supongamos que podemos

¹Los momentos a los que nos referimos son: media, desviación estándar, kurtosis, etc.

calcular una medida escalar en cualquier momento. Esto se traduce a tener una función de observación $g : M \rightarrow \mathbb{R}$. Esta función de observación nos provee una manera de medir el estado actual del sistema $g(z_n)$. Como $g(\cdot)$ nos da sólo una medida escalar, no nos puede dar una descripción completa del sistema. Pero observando $x_n = g(z_n)$ en muchos tiempos sucesivos, nos puede acercar a describir el sistema.

2.2.1. Intuición del teorema de Takens

Trataremos de dar una intuición del teorema de Takens, el cual es un teorema topológico. Según el celebrado Teorema de Inmersión de Takens, para un valor d_e suficientemente grande, la evolución de $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-d_e})$ será la misma que la de z_n .

Intuitivamente es fácil de comprender. Suponiendo que sólo se puede medir una variable del sistema. Entonces, excepto para sistemas unidimensionales, esta única variable que se midió es insuficiente para describir la dinámica subyacente. Suponiendo que se puede medir, de igual manera, las primeras d derivadas de esa variable, entonces, si la dimensión del sistema es menor que d , se cuenta con información suficiente para describir al sistema, el cual resulta ser un sistema de d ecuaciones diferenciales.

Ahora en la práctica pensamos en cómo se pueden medir las derivadas de un sistema. La respuesta en general, es que no podemos. Sin embargo, para una muestra suficientemente grande, medir las primeras d derivadas es equivalente a medir al sistema en d distintos intervalos.

$$x_n \rightarrow (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-d_e})$$

La inmersión que tiene la forma de la ecuación anterior, contiene la información original del sistema siempre y cuando tenga las condiciones siguientes:

1. d_e sea suficientemente grande.
2. La función g es dos veces diferenciable.
3. Los datos medidos fueron recolectados con un intervalo de tiempo recurrente y son suficientemente extensos para describir al sistema.

Esto es en un caso ideal y en la práctica sabemos que esto no sucede como lo queremos, pero aun así suponemos que las condiciones se cumplen aproximadamente. Cuando menos se presenta un problema de digitalización que crea una brecha con la diferenciabilidad de g . Más aun, nuestro argumento informal sobre la diferenciabilidad del sistema se debilita ya que se toman medias sucesivas que en presencia de ruido en la serie de tiempo o señal, esto a su vez ocasiona que las derivadas de mayor orden sean más complicadas de obtener numéricamente. Sin embargo, se supone que las condiciones se mantienen aproximadamente; y que la información inmersa aproxima la topología del atractor subyacente M ;

y que la secuencia de los puntos inmersos se comporta como regla determinista aproximadamente, equivalente la evolución del operador Φ .

Todas estas aproximaciones no cumplen al pie de la letra las condiciones teóricas, pero es mejor tener en cuenta que la motivación del análisis de series de tiempo no lineales está basada en estos supuestos imperfectos. Uno probablemente no generará una inmersión perfecta (cuantificar la información y tener una serie de tiempo finita violan las condiciones suficientes del teorema de Takens), pero podemos tener esperanza en obtener una “buena” inmersión. La definición de una “buena” inmersión es relativa y depende de lo que tengamos en mente. Para lograr una “buena” inmersión, el parámetro más importante será el cálculo de la dimensión de inmersión d_e .

El problema del teorema de Takens es que demuestra que existe un d_e pero no menciona ninguna metodología para encontrarlo, por eso en trabajos de autores como el mismo Takens y Grebogi por mencionar algunos, se ha mencionado, que el dilema radica en hallar un criterio y metodología para encontrar d_e . La manera para encontrar este valor no es directa, una metodología radica en tener previo conocimiento de la dimensión fractal del objeto en estudio. En la práctica, uno podría suponer un valor adecuado de d_e , haciendo inmersiones sucesivas de dimensiones de inmersión cada vez mayores y observar consistencia en los resultados; este es el método que generalmente se emplea.

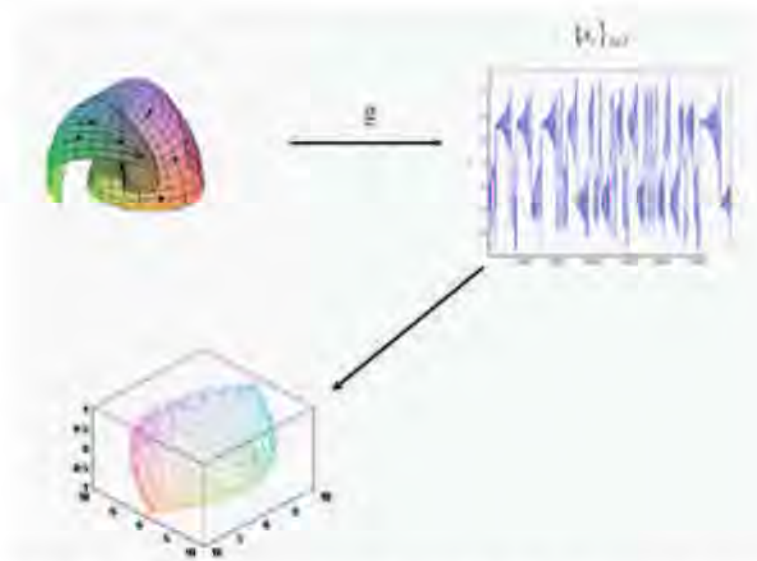


Figura 2.1: Ejemplo de una cantidad observable de un sistema obtenida por g , del cual obtenemos una serie de tiempo, y ésta a su vez es inmersa en el espacio fase para obtener su atractor.

2.2.2. Sistemas No Lineales

Los modelos previos a los modelos de sistemas no lineales fueron los modelos estocásticos lineales, siendo más precisos, fueron modelos autoregresivos (AR) y de media móvil (MA). Estos modelos tienen su base en procesos estocásticos estacionarios Gaussianos y están completamente caracterizados por su función de auto-correlación de dos puntos² o por su densidad espectral respectivamente.

Existen muchos ejemplos para los cuales este tipo de modelos caracterizan de manera correcta y muchos otros para los cuales no.

La justificación en la selección del modelo para analizar una serie de tiempo es básica para el inicio de investigación como en cualquier área de investigación que considere predecir. El análisis de series de tiempo es básicamente comprimir la información o datos a analizar, filtrar la información. La información filtrada o reducida puede generar información de la dinámica del sistema, esto interpretando las cantidades calculadas (media, varianza, etc.) que tiene cierto sentido dependiendo en el marco teórico con el que estamos trabajando.

Si la hipótesis es que los datos en estudio provienen de una distribución Gaussiana, está bien justificada, entonces estos números caracterizan completamente la serie de tiempo y no es necesario calcular alguna otra cantidad. Pero por otro lado, si los datos rechazan ser provenientes de una distribución Gaussiana, entonces estos valores aunque estén perfectamente definidos y calculados no caracterizaran esta serie de tiempo, es decir, son sus momentos estadísticos pero no describen completamente la serie, esto es lo que generalmente pasa con los sistemas no lineales.

La colección de técnicas e ideas conocidas como análisis de series de tiempo no lineales puede ser extremadamente eficiente cuando la información modelo tiene una dinámica determinista en algún estado fase. Este análisis del marco teórico nos permite resolver el problema inmerso que es de una complejidad considerable, es decir, de la información podemos inferir propiedades de medidas invariantes de la dinámica subyacente del sistema. En el mejor de los casos podemos determinar las ecuaciones de movimiento, y si el sistema subyacente es determinista y de baja dimensión, del análisis en el marco teórico se puede obtener relaciones de la geometría (dimensión fractal), inestabilidad (exponentes de Lyapunov) e impredecibilidad (entropía K-S); mencionando algunas de estas propiedades. El supuesto de considerar un sistema determinista puede hacer que estas metodologías no sean adecuadas para caracterizar los aspectos estocásticos de la información.

$${}^2c(\tau) = \frac{\langle (x_t - x_{t+\tau})^2 \rangle}{\langle x_t^2 \rangle}$$

Sistemas Dinámicos Complejos Económicos

En esta sección exploraremos como su título lo refiere, la relación que tienen los sistemas dinámicos complejos con la economía.

El origen de los sistemas dinámicos en la Economía se puede ver con más detalle en la literatura relacionada con los ciclos económicos, ciclos comerciales o fluctuaciones cíclicas de la actividad económica. Estos ciclos económicos dada su naturaleza presentan gran complejidad, en otras palabras, representar la fenomenología económica de cierto sector, país, industria, por mencionar algunos ejemplos no es una tarea sencilla ya que hay muchos factores que la afectan. Representar estos ciclos económicos desde siempre ha sido materia de debate. Las propuestas de los economistas van desde factores psicológicos, fuerzas naturales, sistemas bancarios y monetarios, donde llegan a ser muy variados.

A finales del siglo diecinueve los esfuerzos por representar y estudiar estos ciclos se centraron en los fenómenos relacionados con la industria y el empleo, con especial atención en las fluctuaciones que caracterizaban a las industrias de bienes. Muchos de estos trabajos se basaban en un análisis filosófico y no un análisis matemático. Los pocos trabajos matemáticos tenían modelos que intentaban tener condiciones suficientes para tratar de generar un comportamiento oscilatorio. Sin embargo muchos de estos modelos eran vagos y faltaban de consistencia para una comprobación empírica.

En el siglo veinte los economistas empezaron a hacer aportaciones más matemáticas con el uso de ecuaciones diferenciales. Ezeiel, 1938, trabajó en un modelo de la formación de los precios de los productos, mejor conocido como el Teorema de la Telaraña o en inglés "*Cobweb Theorem*" probablemente fue el primer modelo dinámico de la economía. Otro modelo que se generó después fue el "*Multiplier-Accelerator Model*" de Samuelson, 1939, que tiene como base la teoría Keynesian.

Esfuerzos por explicar comportamientos económicos y financieros a través de modelos dinámicos se establecieron. Estos modelos dejaban algunos aspectos económicos-financieros sin explicar dada la linealidad de estos. El interés actual por estudiar sistemas dinámicos no lineales por los economistas radica en que estos se dieron cuenta que las series de tiempo que estudiaban tienen cierto grado de aleatoriedad, lo que hace más difícil su predicción. Esta parte de aleatoriedad es justo la que los sistemas lineales no reflejan, si un sistema lineal será determinista, por ende, lo único que se necesita para su predicción serán sus condiciones iniciales.

Dinámica No Lineal - Historia

El uso de modelos lineales para modelar y predecir series de tiempo en décadas anteriores se puede justificar considerando que había limitaciones tan-

to computacionales como teóricas, para usar modelos no lineales. Además, la estimación y análisis de los modelos lineales seguían teniendo un largo camino que recorrer respecto a su creación y dejaban mucho que desear al utilizarlos en sistemas que presentan estocasticidad como se mencionó en la sección anterior.

Pasaremos a puntuar dos razones de gran importancia por las que modelos lineales fallan:

1. Los modelos lineales deterministas eran incapaces de tomar en cuenta las incertidumbres asociadas de los datos
2. Estos modelos no podían reproducir oscilaciones sustentadas de los ciclos

Para superar estas dificultades se añadieron a los modelos lineales tanto variables estocásticas como también condiciones exógenas. Esto generó que por un lado las variables estocásticas dieran presencia a la incertidumbre mientras que las condiciones exógenas proveerán de una excitación aleatoria, esto último generaba que el modelo oscilara. Una nota interesante en este tema la citaremos de Day.

“Tradicionalmente, las irregulares económicas han sido explicadas por la súper imposición de eventos exógenos aleatorios en lo que se asume un proceso estable determinista.” (Day, 1985)

El fundamento en la teoría de modelos no lineales está en la reconstrucción del espacio fase y ésta se genera con la técnica de retrasos en las coordenadas o “*Delay-coordinate embedding*” existen otros conceptos básicos en esta teoría como la estimación de los parámetros de inmersión “*Estimation of embedding parameters*”. Podemos decir que teniendo estos parámetros tenemos la información dinámica del sistema.

Con base en las razones por las cuales los modelos lineales fallan, no resulta una sorpresa que los investigadores le tomaran importancia a las dinámicas no lineales y el caos. Resulta natural considerar modelos no lineales ya que reproducen oscilaciones sustentadas sin necesidad de incorporar agentes exógenos, además estos sistemas caóticos presentan un patrón de oscilación complicado con un cierto grado de impredecibilidad. Otra propiedad es que cuantitativamente estos sistemas no lineales tienen un comportamiento distinto proveniente de la evolución temporal de los parámetros, ya sea de uno o de varios.

Otra ventaja que se tiene al trabajar con estos modelos es el poder obtener de ellos bajo ciertos parámetros, la economía “*clásica*” como ya mencionamos bajo la misma estructura de modelo, pero distinto conjunto de parámetros se obtiene una “*inestabilidad*” como la que corresponde a la economía Keynesiana o teorías más complejas. Lo cual hace de él un buen modelo, ya que produce la teoría clásica y moderna. Esta situación es muy distinta a la que se presenta en resultados dado por modelos macroeconómicos lineales donde distintas

estructuras teóricas dependen de distintas visiones políticas. Además, distintas conclusiones políticas pueden obtenerse de la misma estructura de un mismo modelo no lineal.

Por lo que se ha mencionado hasta el momento, la introducción a las no linealidades en modelos económicos, reduce la importancia del papel que juegan los accidentes externos (agentes exógenos) en la explicación de las fluctuaciones de las variables económicas.

No intentamos desacreditar los modelos lineales con estocasticidad, lo que hacemos es puntuar la distinción en la naturaleza con los modelos no lineales y que por esta naturaleza es que los modelos lineales no son una buena aproximación en algunos casos donde la aleatoriedad toma una mayor importancia. Es decir, el uso del análisis econométrico de modelos lineales con parámetros estocásticos puede llevar a resultados erróneos. Para esos casos donde los resultados de estos modelos son inadecuados hacemos referencia a los no lineales, una vez que la restricción lineal es abandonada será posible pensar en una sola estructura, que produzca diferentes recomendaciones (distintas visiones políticas), dependientes de valores específicos que se le puedan dar a los parámetros. Estos desarrollos sugieren que en lugar de tener una discusión sobre distintos modelos para modelar distintas situaciones, se deberá concentrar los esfuerzos en la determinación de los parámetros para la representación que deseamos, con base en resultados empíricos, en un único modelo.

Como consecuencia de esta tendencia de una diferente línea de investigación se ha producido una gran cantidad de literatura, en la cual los esfuerzos se han dirigido en probar que las series de tiempo económicas tienen evidencia de no linealidades y caos en la dinámica subyacente que posee (Brock et al., 1991).

Citando a M. Boldrin proveniente de la Universidad de California UCLA, establece claramente,

“probablemente no es justo decir que la dinámica no lineal no ha tenido un mayor impacto en el desarrollo de la teoría moderna de la economía. De hecho, uno estaría tentado a añadir que, hasta hace poco, era una herramienta poco conocida para los economistas matemáticos y que las implicaciones de esta herramienta eran con frecuencia ignoradas e irrelevantes para propósitos de investigación. La teoría de los sistemas dinámicos se mantuvo por mucho tiempo utilizada para estudios de estabilidad pero nunca tuvo realmente un auge”

El nuevo auge vinculado entre la economía y el caos, se puede encontrar en la literatura de varios autores y se puede intentar encontrar como *“roads to chaos in economics”*. Dicha expresión se utilizó por primera vez en el artículo de Leo Kadanoff, de Chicago, quien estudiaba la transición de la turbulencia en

los sistemas hidrodinámicos (Kadanoff, 1983).

El objetivo de estos esfuerzos es generar modelos teóricos considerando hipótesis “razonables” económicas, en especial de mercados eficientes y el comportamiento del individuo que siempre tiende a maximizar sus preferencias, y los valores de los parámetros, que hagan predicciones de ciclos y su caos implícito. De acuerdo a esto, W.A. Brock presenta una lista de factores económicos que explican el caos dinámico en la evolución económica:

1. La intensidad de la impaciencia de las personas, i.e., el grado en que los agentes económicos se comportan miopes en relación al futuro.
2. La ausencia de las usuales propiedades de curvas de indiferencia cóncavas y tecnologías.
3. Imperfección de los mercados capitales que permiten prestar-pedir contra rendimientos futuros.
4. Inequilibrio de los sistemas.
5. La existencia de externalidades en preferencias o tecnologías.

2.3. Espacio Fase

Al espacio de un sistema dinámico en donde se representan todos los posibles estados se le conoce como espacio fase o espacio fásico. Una técnica que se usa en el análisis de dinámicas no lineales es graficar las trayectorias estables de un sistema en el espacio fase. Por construcción el espacio fase tiene la siguiente forma si $x(t)$ es la trayectoria del sistema, haciendo un gráfico de $\dot{x}(t)$ contra $x(t)$ se obtiene el gráfico deseado.

Packard et al., 1980, fue el primero en proponer el asombroso resultado, el cual fundamenta que la reconstrucción del espacio fase es fundamental en el análisis de series de tiempo no lineales ya que este espacio permite ver el tipo de trayectorias o soluciones del sistema. Éste permite representar la dinámica de las complejas series de tiempo no lineales.

Cabe mencionar que esta reconstrucción no es idéntica a la dinámica interna, ni podremos a partir de ésta determinar variables de estado internas infiriendo de las señales observadas, es decir, resolver el problema del observador. Sin embargo, al hacer de manera correcta la reconstrucción sabemos que ésta es topológicamente idéntica, y bajo un difeomorfismo, sabemos que las propiedades dinámicas son las mismas que para la dinámica original del sistema.

Como en este caso en particular estamos trabajando con una serie de tiempo univariada, es decir, la serie está determinada por una única variable que es el

precio de las acciones; se tiene que hacer un cambio en cómo trabajar el espacio fase. En este tipo de casos la alternativa en el procedimiento para reconstruir el espacio fase es graficar $x(t - \tau)$ contra $x(t)$, donde τ es el tiempo de retraso, en inglés “*time lag*”. Estas variables definen el pseudo plano fase que es la representación bidimensional del espacio fase, la determinación de τ proviene esencialmente de representaciones gráficas de los datos con los que se trabajan y en teoría puede tomar casi cualquier valor. Este procedimiento es motivado por el hecho que las trayectorias inmersas en el pseudo plano fase tienen propiedades similares a las del atractor original representadas en el plano fase (Moon, 1987).

Matemáticamente, es equivalente hacer retrasos hacia adelante a hacerlos hacia atrás, como se propone, pero si queremos estudiar la predicción del sistema es más práctico trabajar con retrasos hacia atrás.

Si τ es muy pequeño, las n coordenadas en cada vector estarán fuertemente correlacionadas, por lo que el desdoblamiento de la dinámica inmersa no será la más adecuada y se encontraran cerca de la diagonal del espacio en reconstrucción. Para que la dinámica inmersa se desdoble en un subespacio adecuadamente necesitamos un τ más grande.

2.3.1. Inmersiones Dinámicas “*Dynamical Embeddings*”

Un caso especial de función para aproximar problemas es cuando los datos de entrada son dependientes del tiempo. Esto significa que la función con la que estamos tratando tiene “*memoria*”, por lo que es dinámica y nos referimos a ella como un sistema dinámico. En algunos casos se utiliza información pasada para predecir su comportamiento futuro; como es el caso de la predicción en los precios de instrumentos financieros.

Un sistema dinámico n -dimensional puede ser representado por un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden cada una de ellas gobernada por una variable de estado. En global el sistema tiene n variables de tiempo $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ y la solución del sistema se puede pensar como n series de tiempo “*n-time series*”.

Como se mencionó implícitamente en el párrafo anterior, las n series de tiempo se obtienen a partir del sistema de orden n por descomposición. De igual manera, dadas las n series de tiempo podemos recuperar las soluciones de orden n originales, esto se puede hacer tomando cada variable de estado como una coordenada del espacio de reconstrucción y representar cada serie de tiempo en ese estado. Entonces las n series de tiempo se pueden usar para componer o reconstruir la solución o trayectoria de sistema, como se ilustra en la figura 1.2.

Un punto a mencionar es que el orden n del sistema es desconocido y aunque existen técnicas para estimar este número, lo que sucede la mayoría de las veces es que tenemos un orden mayor al que realmente es, lo que produce un

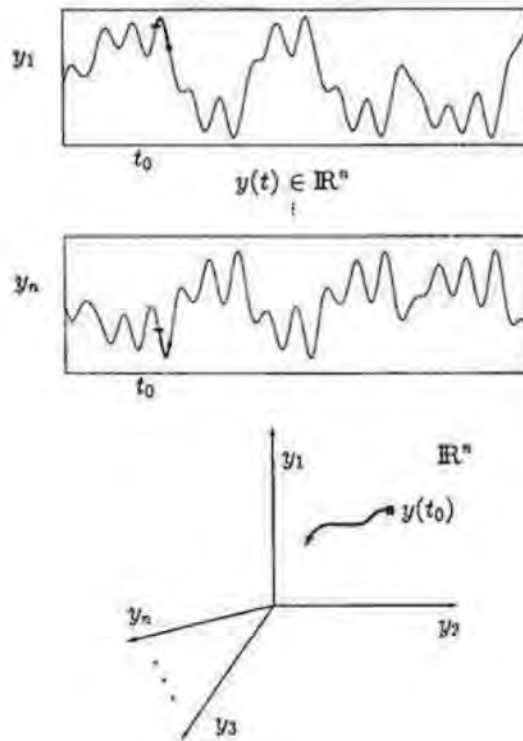


Figura 2.2: Las n series de tiempo definidas por sus variables de estado de orden del sistema dinámico n se puede utilizar para componer la trayectoria en el espacio fase.

exceso de información ya que se le esta agregando información innecesaria que se considera como ruido para nuestro análisis.

Pasando todas estas ideas a un formalismo matemático lo que intentamos hacer es a partir de una función “medidora” $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que opera en todo el espacio fase pero que sólo produce valores escalares, que se conocen como las variables medidas. Ahora la pregunta que surge naturalmente es, dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

¿Es posible reconstruir una trayectoria o solución de f a partir de una medida escalar g ? Takens, Packard et al. en 1980 se tomaron la molestia de responder esta pregunta cuya respuesta resultó afirmativa, a esto se le conoce en inglés como “*Embedology*”, nosotros trataremos este término como Embedología, Inmersología y cualquier otro derivado.

Estrictamente la inmersología se concentra en el estudio de la reconstrucción del espacio fase de un sistema dinámico de orden n a partir de un conjunto de datos limitantes q , donde $q < n$, en nuestro caso por ser una serie de tiempo $q = 1$. En otras palabras, el objetivo es reconstruir el espacio fase de un sistema desde una sola serie de tiempo. Al espacio fase resultante se le conoce como espacio fase inmerso o “*embedding phase space*”, “*embedding space*” o “*embedding*”.

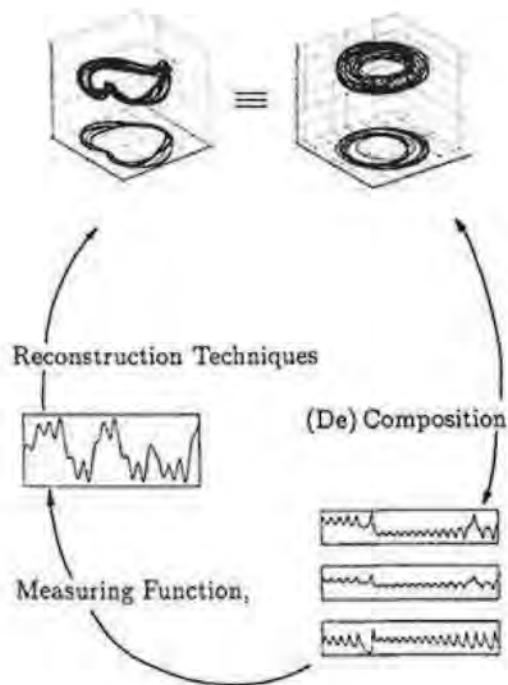


Figura 2.3: En la práctica existen muchas situaciones donde el número a medir es limitado. Las técnicas de inmersología permiten la reconstrucción del espacio fase aún con una sola medición. El espacio reconstruido y el original son espacios fases equivalentes.

Otra pregunta que debemos contestar es ¿Por qué es importante reconstruir las trayectorias en el espacio fase del sistema dinámico? Al hacer esta reconstrucción con técnicas de inmersión, se pueden utilizar para el análisis del “*atractor*” obtenido resultados de geometría diferencial y topología. Cabe mencionar, que una serie de tiempo aleatoria no tiene ninguna dinámica subyacente por lo que no se puede reconstruir ningún atractor. Un resultado que es de suma importancia, es que el “*atractor*” reconstruido y el “*atractor*” original son topológicamente

equivalentes, es decir, son difeomorfos.

Puntuando aún más la importancia del párrafo anterior, lo que se dice es que sin importar la complejidad del sistema dinámico podemos hacer un análisis de éste usando técnicas de inmersión siempre y cuando se pueda medir al menos una variable de este sistema dinámico complejo, sin importar cual sea esta. El análisis se puede realizar gracias a que el “*atractor*” reconstruido, como se mencionó en el párrafo anterior, es topológicamente equivalente al “*atractor*” original y por lo cual, al reconstruido se le pueden estimar invariantes dinámicas como su dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov, mencionando dos ejemplos (Figura 2.3).

Utilizaremos el método de retraso en coordenadas que se mencionó previamente para la reconstrucción del espacio fase (Packard et al., 1980; Takens, 1980; Sauer et al., 1991). Esta es una técnica de reconstrucción conveniente, pero no es la única que existe como por ejemplo entre otras coordenadas se encuentran las de valor “*singular*” (Broomhead, King, 1986). Para el retraso de coordenadas el vector tendrá la siguiente forma que es equivalente a la ecuación

$$x(k) = [x(k)x(k - \tau) \dots x(k - (d_e - 1)\tau)]^T \quad (2.1)$$

Donde d_e es la dimensión de inmersión y τ es el tiempo de retraso. Claramente, $x(k)$ se puede representar como un punto en el espacio de inmersión d_e dimensional. Takens demostró que las inmersiones con $d_e > 2d_c$, donde d_c es la verdadera dimensión de la dinámica subyacente (atractor), serán suaves para un mapeo $f : \mathbb{R}^{d_e} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x(k + T) = f_T(x(k))$ para los enteros k y tiempo de predicción T y τ también se asumen enteros.

Hay dos requerimientos para el Teorema de Inmersión por Retrasos:

1. $x(k)$ espacialmente debe estar uniformemente separado. La adquisición de los datos, no tiene bases de tiempo perfectamente espaciadas. Una solución obvia es interpolar pero entonces estamos estudiando una mezcla de valores reales con dinámicas interpoladas.
2. El proceso de medición que produce a $x(k)$ es suave, función generadora del estado fase del sistema.

En el caso de reconstrucción por retrasos, la elección de los parámetros de reconstrucción, d_e y τ , es de gran importancia ya que dichos parámetros afectan de manera muy correlacionada la calidad del espacio inmerso.

El teorema de Takens da condiciones suficientes para que la ecuación se cumpla, esto es, para poder inferir invariantes dinámicas del sistema original de la series de tiempo univariada, sin embargo no hace ninguna indicación de cómo estimar la función f_T que mapea.

2.3.2. Atractores

Matemáticamente se dice que un atractor de un sistema dinámico, es un conjunto de valores a los que el sistema tiende a evolucionar en el tiempo. Un atractor corresponde al subconjunto del espacio fase del sistema dinámico correspondiente al comportamiento “típico” de este, en otras palabras, es la estructura interna del sistema dinámico, por esta característica del espacio fase es de suma importancia su reconstrucción.

Por ejemplo, sea t la variable que representa al tiempo y sea $f(t, \cdot)$ una función que especifica la dinámica de sistema. Esto es, si x es un punto n -dimensional en el espacio fase, entonces $f(0, x) = x$ y para un valor positivo de t , $f(t, x)$ es el resultado de la evolución de este estado después de t unidades de tiempo.

Los atractores presentan una dinámica de estado estable (en inglés “*steady-state*”) y esto se logra de un sistema determinístico y estable que opera sin factores externos que lo modifiquen, lo cual no significa que el atractor permanezca quieto o sin movimiento; traduciendo esto en el espacio fase lo que tenemos son trayectorias que generan un objeto en particular.

La dimensión del atractor se puede calcular utilizando distintos métodos y esta dimensión será la que determine de cual atractor se trata. Si reconstruimos un atractor de una serie de tiempo constante, la dimensión que calcularíamos de este atractor en particular es una dimensión cero, a los cuales conoceremos como atractores de punto fijo o “*point attractors*”, cuando tratamos con atractores de dimensión uno se les llama ciclos límite o “*limitcycles*”, en dimensión dos tratamos con un toro o “*tori*”; esto es para sistemas lineales. Cabe señalar que para sistemas no lineales las posibilidades y formas de atractores son bastas ya que depende del sistema en sí y de las condiciones iniciales. Es claro que la forma y dimensión dependerán de la complejidad del atractor. A estos atractores les llamaremos atractores extraños o atractores caóticos “*strange attractor or chaotic attractor*”.

Una de las características de la reconstrucción del espacio fase es que las series de tiempo inmersas se pueden pensar como un objeto geométrico, ya que si un sistema es determinista y estable el cual “*opera*” por un tiempo suficientemente largo sin factores externos, presentará la dinámica de estado estable. Como se puede ver en la Figura 2.5, atractores simples con una dimensionalidad baja corresponden a series de tiempo de dinámica simple, mientras que atractores con una dimensión mayor provienen de series de tiempo más complejas.



Figura 2.4: Ejemplo de un atractor toro de dimensión 2.

Atractores Extraños o Caóticos

Pasaremos ahora a un caso especial de atractores que se mencionó anteriormente, los atractores extraños o caóticos. Aún no existe una única convención para poder definir estos, primero haremos distinción intuitiva de lo que es un atractor extraño y después continuaremos con una definición más matemática.

Primero, cuando pensamos en sistemas caóticos pensamos en algo sin orden, aleatorio, impredecible, que no tiene ningún régimen dinámico; esto es contrario a lo que pasa en los sistemas caóticos, estos presentan orden, patrones bien definidos. Segundo debemos darnos cuenta que el caos no es un régimen dinámico patológico, que sólo se exhibe cuando se diseñan parámetros de manera cuidadosa.

Se les nombró atractores extraños ya que los atractores que se conocían por los científicos hasta el momento eran completamente distintos a estos, no presentaban ninguna forma similar digamos a un toro, puntos, etc. Eran como entes con formas geométricas aleatorias; de aquí el término extraño. Las series de tiempo que generaban estas formas geométricas no presentaban ningún camino predecible; de aquí el término caótico.

Es bastante informativo pensar qué pasaría si una serie de tiempo caótica se encuentra inmersa en el espacio fase de una dimensión pequeña. ¿Qué tipo de objeto geométrico se forma en ese espacio? Al pensar esto podemos imaginar que la dimensión del espacio fase está estrictamente relacionada con el orden del sistema dinámico. De lo contrario, si la dimensión del espacio fase es menor que el orden del sistema, las soluciones o trayectorias trazadas en el espacio fase se cruzarían y en ese punto la unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales se violaría. En este caso se tendría que aumentar la dimensión hasta

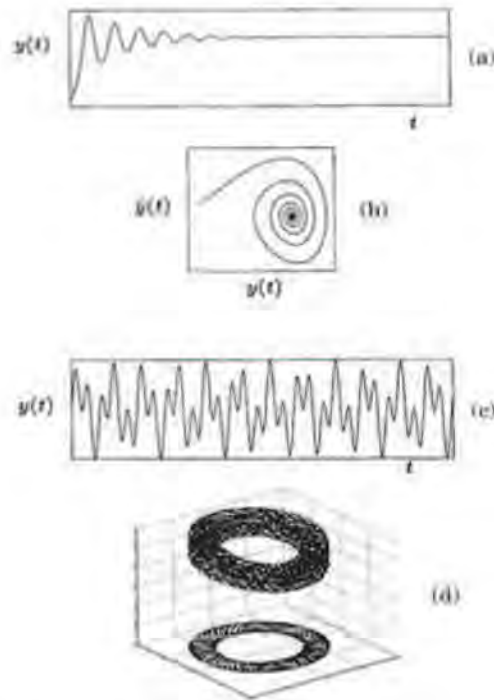


Figura 2.5: Ejemplos de series de tiempo con sus respectivos atractores. a) serie de tiempo amortiguada cuyo atractor es representado en b) el cual es un atractor de punto fijo. En c) oscilaciones cuasiperiódicas se presenta en esa serie de tiempo y su atractor se presenta en d) el cual es un toro. Atractores con dimensiones mayores y series de tiempo más complicadas tiene formas más complejas.

que igualara el orden de las ecuaciones diferenciales. Y así no se cruzarían las trayectorias.

El conjunto de trayectorias en el espacio fase forman una figura geométrica, que resulta ser el atractor. Por lo que el atractor necesitará al menos, que el espacio donde viva iguale al orden de las ecuaciones diferenciales que generan la dinámica. Una propiedad interesante de los atractores es que tienen volumen cero, lo cual genera una paradoja que se resuelve creando un objeto no convencional; para clarificar estos puntos pondremos un ejemplo donde el sistema dinámico tiene ecuaciones diferenciales de orden tres, provocando que el atractor no pueda vivir en un espacio de dimensión dos por la unicidad de las soluciones, el atractor por lo consecuente vive en un espacio de dimensión 3. El nuevo objeto geométrico es evidente que tiene que estar en una dimensión no entera entre dos y tres, a estos objetos se les llama fractales y se dice que son una imagen del caos, ya que las series de tiempo caóticas inmersas darán como

resultado un fractal en el espacio fase inmerso ³.

Por lo tanto debemos de puntuar que los atractores extraños son fractales. En conclusión podemos decir que el sistema es globalmente estable ya que está confinado a la región delimitada por el espacio fase, es decir, el atractor; y que por otra parte el sistema debe presentar cierta inestabilidad que produce las características fractales del atractor. Por lo que el atractor caótico presenta comportamiento globalmente estable pero localmente inestable.

2.4. Invariantes Dinámicas

Una invariante dinámica no es más que una cantidad que describe la dinámica del sistema sin importar las coordenadas en las que se esté representando el sistema en estudio. Esta propiedad de esta medida (invariante dinámica) que no depende del sistema coordinado con el que se represente, es de suma importancia.

La importancia radica en que si pudiéramos obtener esta medida directamente del sistema original, será el mismo que si midiéramos esta misma medida en el sistema inmerso o “*embedding*”. Aunque en nuestro caso estamos interesados a la inversa, esto no tiene ningún inconveniente y se puede seguir infiriendo que esta cantidad es válida para el sistema original.

Cabe resaltar que el resultado que acabamos de exponer no depende de ninguna manera de la función generadora que utilicemos para reconstruir el sistema. Es importante reconstruir de manera correcta el sistema por obvias razones, ya que al errar las “*invariantes*” no serán del sistema en estudio.

En la práctica errores en las condiciones iniciales siempre estarán presentes debido a diversos factores como ruido, digitalización de la información, errores de redondeo, etc. Es este efecto de errores de amplificación en las condiciones iniciales que es lo que se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales y una consecuencia inmediata de esto es la imposibilidad de hacer predicciones en el largo plazo para sistemas caóticos. Ahora nos concentraremos en cómo caracterizar atractores caóticos, sin importar si la naturaleza fractal es responsable de la sensibilidad a las condiciones iniciales o si la sensibilidad a las condiciones iniciales es responsable de la naturaleza fractal del atractor.

Caracterizando las invariantes dinámicas existen tres grandes grupos:

- I Primer Grupo: Dimensión de Correlación
- II Segundo Grupo: Teoría de la Información (Entropía y Complejidad)

³Existen algunas excepciones patológicas a esta regla.

III Tercer Grupo: Predicción de errores no lineales y divergencia de la trayectorias cercanas

Nos interesamos en dinámicas no lineales delimitadas, las dinámicas que no están delimitadas tienen invariantes que no corresponden al sistema en su totalidad por lo que se puede decir que carecen de sentido y fundamento. Ya que nos restringimos al estudio de sistemas delimitados se tiene que explorar que casos tienen este tipo de sistemas no lineales, los cuales son periódicos y aperiódicos, estos dos casos se pueden caracterizar por sus grados de libertad que son invariantes dinámicas.

Queremos estimar qué tan inestable y qué tan “*fractales*” son; para determinar estas dos características existen dos cálculos que nos ayudan para este propósito; uno es el exponente de Lyapunov y la dimensión de correlación.

Estas dos invariantes dinámicas nos ayudan a cuantificar y aterrizar la estructura compleja que presentan los atractores extraños.

2.4.1. Dimensión de Correlación I

Aunque ya introdujimos brevemente la noción de dimensión de correlación, nos falta hacer una discusión profunda de los problemas que se presentan al estimar la dimensión de correlación. Dicha discusión la haremos a continuación.

Estamos acostumbrados a pensar en objetos de la vida cotidiana de una, dos y tres dimensiones. Sin embargo los objetos fractales tienen dimensión no entera, por lo que a ésta se le llama dimensión fractal. Muchos fenómenos del mundo real, en particular los sistemas caóticos dinámicos, presentan propiedades de fractales. La definición de dimensión fractal proviene de la generalización de las propiedades de los objetos de dimensión entera.

Medidas de dimensionalidad fractal existen varias, algunos ejemplos son, “*pointwise dimension*”, dimensión de correlación, dimensión de información, dimensión de Hausdorff. Sin embargo, para muchos atractores extraños al calcular la dimensión fractal las diferencias que encontramos entre estas distintas dimensiones son mínimas, casi imperceptibles (Moon, 1897; Parker, Chua, 1989). La dimensión de correlación ⁴ es la medida de dimensionalidad más utilizada y es considerada una generalización, además es generalmente más fácil de calcular que las otras medidas. Por estas razones se trabajó con la dimensión de correlación.

Esta medida cuantifica la dimensionalidad fractal del espacio que ocupa el fractal. En teoría, los fractales caóticos tienen dimensión fractal no entera y los fractales no caóticos tienen dimensión fractal entera, aparte de estos dos casos

⁴Esta medida se puede ver como la generalización de dimensión y es considerada la manera más sencilla de ser estimada la dimensión y la más confiable. Por lo que es la más popular.

existe otro que se le conoce como “*fat fractals*”⁵ que tienen dimensión fractal entera, esta dimensión se considera inadecuada para la descripción de sus propiedades.

Otra forma de relacionar la dimensión fractal con el sistema es destacar que está relacionada con la cantidad de información que se necesita para caracterizar una trayectoria.

Grassberger y Procaccia trabajaron en este tema con mayor detalle, donde fundamentaron que la dimensión de correlación no sólo sirve para diagnosticar si se trata de un sistema caótico, sino también provee información adicional de la dinámica.

Preámbulo de la Dimensión de Correlación

Definimos la dimensión de correlación generalizando el concepto de dimensión entera a objetos fractales con dimensión no entera. En dimensión 1, 2, 3 o más, es intuitivo y fácil de establecer que la medida de volumen $V(\varepsilon)$, dependiendo de la dimensión se puede ver como una longitud, área, volumen o hipervolumen, etc.

$$V(\varepsilon) \propto \varepsilon^d. \quad (2.2)$$

Donde ε es una escala de longitud y d es la dimensión del objeto. Para un objeto fractal, en general, es natural asumir una relación como la de la ecuación 2.2, en estos casos la dimensión toma la siguiente forma:

$$d \propto \frac{\log V(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (2.3)$$

Entonces para $\delta \geq 0$ deseamos definir la dimensión de correlación de un objeto tal que la relación 2.3 se cumpla. Para la dimensión de correlación, se define la integral de correlación $C(\varepsilon)$ de un atractor M por:

$$C(\varepsilon) = Prob(\|x - y\| < \varepsilon \mid x, y \in M). \quad (2.4)$$

Entonces, tenemos la longitud de escala ε y la medida de volumen $C(\varepsilon)$. Para verificar que la ecuación de arriba se cumple y provee una medida de volumen que la podemos extender a 2.3 considera el efecto de $C(\varepsilon)$ para puntos en una sola línea en el espacio. Entonces claramente, $C(\varepsilon) \propto \varepsilon$. De manera similar considera un punto en un plano $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^2$, y en un volumen (3 dimensiones) $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^3$. Entonces podemos definir la dimensión de correlación por

$$d_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (2.5)$$

⁵Su estructura irregular es caracterizada modificando la definición de la dimensión de Minkowski.

Ahora definiendo la integral de correlación de otra manera, sea $\{z_t\}_{t=1}^N$ una inmersión de la serie de tiempo en \mathbb{R}^d . Definimos la función de correlación $C_N(\varepsilon)$ por

$$C_N(\varepsilon) = \binom{N}{2}^{-1} \sum_{0 \leq i < j \leq N} I(\|z_i - z_j\| < \varepsilon). \quad (2.6)$$

Aquí, $I(X)$ es la función indicadora, que toma los valores

$$\begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ se satisface} \\ 0 & \text{si } X \text{ no se satisface} \end{cases}$$

y $\|\cdot\|$ es la norma usual en \mathbb{R}^d . La suma $\sum_i I(\|z_i - z_j\| < \varepsilon)$ es la cantidad de puntos a distancia menor que ε de z_j . Si los puntos z_i se distribuyen uniformemente dentro del objeto, esta suma es proporcional al volumen de la intersección de una esfera de radio ε y

$$C_N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{d_c} \quad (2.7)$$

Donde d_c es la dimensión del objeto.

La dimensión fractal está relacionada con la cantidad de información requerida para caracterizar una trayectoria. Si la dimensión fractal de un conjunto atractor es $D + \delta$, $D \in \mathbb{Z}$, donde $0 < \delta < 1$, entonces el número más pequeño de ecuaciones diferenciales de primer orden que se requiere para describir los datos es $D + 1$.

Ahora daremos la definición matemática, sea $\{x_i\}_{i=1}^N$ serie de tiempo, haciendo una inmersión o “*embedded*” en el espacio fase de dimensión d_e tenemos $x_j = (x_j x_{j-1} \dots x_{j-d_e+1})$. Suponemos que la distancia ⁶ entre dos puntos es $S_{ij} = |x_i - x_j|$, entonces la función de correlación se define como

Con pares (i, j) con $S_{ij} < \varepsilon$ y la dimensión de correlación

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_l C(\varepsilon)}{\log_l \varepsilon}. \quad (2.8)$$

Para muchos atractores D_c será constante para valores de ε en cierto rango. En teoría la elección de d_e no influencia el valor final de D_c si d_e es más grande que cierto valor. En particular, se ha probado que siempre que haya suficiente información libre de ruido, $d_e = \text{Ceil}(D_c)$ donde $\text{Ceil}(D_c)$ es el mínimo entero más próximo para superar o igualar a D_c (Dinget al., 1993). En la práctica, lo que se hace debido a la poca información y a la presencia de ruido, $d_e > \text{Ceil}(D_c)$ entonces se obtienen diversos valores de la dimensión de correlación al incrementar los valores de d_e . Si los datos obtenidos se produjeran por un sistema de dimensionalidad pequeña, dichos estimados en la dimensión

⁶Dada por la norma Euclidiana.

de correlación convergerían eventualmente. Estos datos dependerían de manera directa en la calidad y cantidad de información.

Probablemente la mayor aplicación de la dimensión de correlación es diagnosticar si la dinámica subyacente de la serie de tiempo se ha producido por un sistema de orden pequeño, esto se verá con más precisión en la siguiente sección.

2.4.2. Diagnosticando Caos y No Linealidades

Uno de los primeros pasos en el análisis de las series de tiempo es verificar que la información o datos con los que se está trabajando son no lineales y, de ser así, verificar si se trata de un caso caótico. Este primer paso pondrá la atmósfera para las siguientes etapas. Es evidente que si no existe evidencia que la información presenta un comportamiento no lineal, modelos lineales y a lo mejor estocásticos deberán ser considerados. Por el contrario, si hay evidencia de que presenta comportamiento no lineal, se deberán considerar modelos no lineales o en las palabras de Brock y Sayers (1988):

“Si se tiene una fuerte evidencia proveniente de nuestros métodos que existe una estructura no lineal, entonces vale la pena gastar los recursos necesarios para tratar de identificar y estimarlo”

Caos y No Linealidad

Hasta ahora se han expuesto temas en relación con caos determinista y modelos no lineales, pero no se ha dicho en efecto como determinar si los datos con los que trabajaremos son lineales o caóticos. En esta sección se presentaran métodos para determinar este problema.

Es de gran importancia saber con que tipo de sistema que estamos trabajando ya que no tiene sentido empezar a hacer una análisis no lineal de la información que tenemos si no existe al menos algún indicador que esta sea en efecto una colección de datos que tienen una dinámica no lineal. Todo esto para reducir recursos en caso de que el sistema sea lineal.

El problema de diagnosticar caos se puede reducir a estimar invariantes, las cuales sugieren que la información o datos son caóticos. Por ejemplo dimensiones no enteras sugieren la presencia de caos. La verdadera pregunta es cómo estimar de manera correcta esas propiedades de los datos, especialmente cuando se cuenta con información relativamente poco abundantes y que posiblemente contienen ruido. Dada la relevancia de este tema, diferentes aproximaciones se han propuesto en la literatura. Nosotros sólo hablaremos de los métodos no paramétricos ya que serán los que utilizaremos.

Métodos No Paramétricos

La intención en esta sección es introducir el concepto de modelos y lo que se necesita para estudiarlos, estos generalmente son modelos probabilísticos. Equivalentemente, podemos considerar todos los modelos como códigos. Esto significa que de igual manera podemos tomar códigos y longitud de códigos seleccionados cuidadosamente, y estos considerarlos como objetos primarios, de los cuales se pueden derivar distribuciones.

Al acto de hacer sentido mediante la información observada es lo que se conoce como creación de modelos o modelar un sistema. Hemos utilizado la palabra modelo en un sentido intuitivo, que se comporta de cierta manera similar al sistema real. Por ejemplo, un mapa es un modelo de una porción de la superficie de la tierra en la que algunas propiedades se representan correctamente. Esto corresponde a lo que sucede normalmente en las disciplinas científicas, en donde el modelo es una descripción de las restricciones de la información observada. Siendo más específicos, cada cantidad observada corresponde a una variable, y el modelo especifica el número de ecuaciones o una relación general matemática entre variables.

Para entender un poco más estos conceptos empezaremos por recordar un modelo probabilístico. Definimos $x = x_1, \dots, x_n$ generado por el proceso de lanzar una moneda al aire, donde el proceso se modela en binario 0 y 1 para cada lado de la moneda. El modelo del sistema, se define por el parámetro θ , que se interpreta como la probabilidad que en el volado la moneda tenga cara 0. Más aún, se extiende a secuencias por independencia, entonces:

$$P(x | \theta) = \theta^{n_0} (1 - \theta)^{n - n_0}. \quad (2.9)$$

Esta fórmula no depende del orden, sólo del número de eventos. El modelo se identifica con una distribución P , aquí cada variable binaria está bien definida en sentido de su probabilidad, pero la manera en que restringe la información está determinada por la forma de la distribución. Por ejemplo, si θ es pequeña, el volado produce resultados con predominantes 1s y raramente 0s. Entonces el proceso está bien definido.

Este proceso previamente descrito es un caso especial de los modelos probabilísticos con la siguiente forma

$$P(x | \theta_1, \dots, \theta_k) \quad (2.10)$$

Donde $x = x_1, \dots, x_n$ representa la información observada y $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n$ son los parámetros. Frecuentemente estos son parámetros reales de un conjunto con interior no vacío y k representa la dimensionalidad o el número de parámetros libres. Cuando k depende de n se le llaman modelos no paramétricos. La

razón de esta terminología es que si dejamos crecer n , puede que no exista ninguna frontera al número de parámetros y la impresión es que el proceso real no se puede describir con un número finito de parámetros.

Estos modelos se ajustan a conjuntos finitos de información, aún en el caso de los modelos no paramétricos. Casi siempre escogemos modelos que se representan en términos de funciones de densidad $f(x | \theta)$. Como todas las observaciones realizadas de cantidades valuadas en la recta real son necesariamente números truncados, es decir, escritos con cierta precisión, la función de densidad definen las probabilidades de observación.

Para obtener la curva óptima suave, decimos que y_t sea la curva que nos permite observar toda la información en pares y la curva con la longitud de código más corto. Si escogemos una curva tan compleja donde todas sus desviaciones son cero, no ganaremos nada, porque para la codificación de esa curva necesitamos todas las observaciones. Por otro lado si escogemos una curva muy simple, necesitamos muchos bits de información para codificar las grandes desviaciones. Entonces, en algún lugar en medio de estos extremos se encuentra el óptimo de la curva suave que buscamos. Podemos escoger distintas aproximaciones a este problema como regresiones lineales y exponenciales, nosotros utilizaremos la clase descrita por el principio de mínima longitud o “*MDL*”.

La estadística más común es la paramétrica, aquí se hacen estimación y descripciones a partir de la hipótesis que los datos en estudio provienen de una distribución probabilística. Se le llama estadística paramétrica por la razón que supone el número de parámetros es fijo.

La estadística no paramétrica es una estadística que no se basa en las familias parametrizadas de la probabilidad de distribución. Incluye tanto estadística descriptiva como inferencial. Los parámetros típicos a considerar son promedio, media, varianza, etc. A diferencia de la estadística paramétrica, la estadística no paramétrica no hace supuestos sobre la probabilidad de distribución de las variables que se están evaluando.

En las series de tiempo no lineales, como por ejemplo las series de finanzas, es difícil suponer que provienen de un número fijo de parámetros dada su forma, es decir, suponer que se cumple la superposición de un número fijo de distribuciones probabilísticas, y que esta superposición da como resultado la serie de tiempo. Tenemos que recurrir a otro tipo de metodología por lo cual la estadística no-paramétrica es nuestra elección.

En esta estadística el número de parámetros crece en función de los datos en estudio, esto para poder recrear con un número no determinado de distribuciones de probabilidad, la serie de tiempo en estudio.

Dentro de los métodos no-paramétricos están las técnicas de estimación de

invariantes dinámicas, como lo son, el exponente más grande de Lyapunov, dimensión de correlación, secciones de Poincaré, por mencionar algunos; todas estas invariantes dinámicas indican la presencia de caos.

Frecuentemente en problemas estadísticos la información física es tan desconcertante que ninguna de las clases de modelos finitamente parametrizados que podemos pensar puede adecuarse para capturar características relevantes de la información. A estos problemas se les suele llamar no paramétricos. El nombre se seleccionó para relacionar que no seleccionamos una clase de modelo parametrizada, más bien permitimos distribuciones, por lo menos en principio, lo que requiere tantos parámetros como sean necesarios para poder especificar. Entonces, típicamente es el caso que el número de parámetros $k(n)$ que ajustamos en alguna función del número de observaciones. Extendiendo la definición, la complejidad estocástica como la longitud de código más corto, relativo a la clase de modelo donde los miembros no se pueden especificar por algoritmos. Un ejemplo simple de esta clase es el conjunto de todas las densidades con media y varianza finita. Progresos importantes en el cálculo del código de longitud más corta para problemas de regresiones infinitas recientemente se han generado por Speed y Yu [22].

Para esbozar el procedimiento general, sea $f(x^n | \theta_1, \dots, \theta_k)$ sea la función de densidad de las observaciones de la información, que depende de $k = k(n)$ parámetros. Esta función de densidad resultará en una curva de ajuste y suavizado tan pronto que seleccionemos una medida de las desviaciones que relacione los datos seleccionados y sus predicciones. Como $k(n)$ depende del tamaño de la muestra, la longitud del código necesaria para codificar los parámetros puede ser comparable con la longitud del código necesaria para codificar la información. Entonces, utilizando la codificación de dos partes o “two-part coding” necesitamos truncar los parámetros, lo que hace este un problema central. Sea d un número positivo que define la precisión. Si $n_i = \lceil \theta_i/d \rceil$ es el entero más cercano a θ_i/d , entonces $\bar{\theta}_i = n_i d$ se puede tomar como el punto para truncar de θ_i a la precisión de d . Podemos escribir la longitud del código necesario para codificar los parámetros truncados como:

$$L(\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_k) = L^*(N) + \log \frac{(N+k)!}{N!(k-1)!} + \log \frac{(k+1)!}{k_+!(k-k_+)!}. \quad (2.11)$$

Donde $N = \sum_i |n_i|$ y k_+ denota el número positivo de parámetros. Haciendo una minimización

$$\min_{k(n), \theta, d} \{-\log f(x^n | \theta) + L(\bar{\theta}) + \log d\} \quad (2.12)$$

Esto para poder hacer la minimización óptima de los parámetros truncados; escribimos $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_{k(n)}\}$ y de igual manera para $\bar{\theta}$.

Particularmente estamos interesados en la densidad de estimación no paramétrica. Esto se contrasta con lo que generalmente se hace que es evaluar una estimación de la densidad ya sea subjetivamente o por sus propiedades asintóticas. La técnica (1.12) se puede aplicar en teoría para estimar cualquier densidad, para observar distintos ejemplos podemos ver la bibliografía de Silverman [20]. Continuaremos con la explicación del cálculo de la complejidad estocástica para la estimación de histogramas ⁷.

Densidad de Histogramas

Expondremos el método de cálculo de histogramas basándonos en la función de complejidad estocástica, que es una mejor aproximación en la codificación de la técnica construida por MDL. La función de complejidad estocástica $I(x, M_k)$ se define a partir de

$$P(x) = \int P(x | \theta) d\pi(\theta) \quad (2.13)$$

$$I(x, M_k) = -\log P(x) \quad (2.14)$$

Donde M_k es la clase de modelo, x la información, con $P(x | \theta) = f(x | \theta)$.

Por simplicidad consideraremos el caso especial de la densidad de histogramas definida sobre un intervalo C de longitud R en la recta real. Hacemos una partición de C en m subintervalos de la misma longitud c_i , $i = 1, \dots, m$ y definimos la densidad paramétrica $f(x | \theta) = \frac{m p_i}{R}$, donde i es el índice del subintervalo que contiene a x y $p = (p_1, \dots, p_m)$ tal que $\sum_i p_i = 1$. Por lo que en este modelo hay $m - 1$ parámetros. Sea $x = x_1, \dots, x_n$ los datos observados y sea n_i el número de observaciones que caen dentro de c_i . Entonces

$$f(x | p) = \prod_i \left(\frac{m p_i}{R} \right)^{n_i} = \left(\frac{m}{R} \right)^{n_i} \prod_i p_i. \quad (2.15)$$

El volumen de simplex definido por p_i s es $1/(m - 1)!$ que nos permite definir la densidad $\pi(p) = (m - 1)!$. Para obtener la complejidad estocástica de x dado la clase de modelo $M_m = \{f(x | p), \pi(p)\}$ calculamos primero la integral

$$f(x | m, n, R) = \int f(x | p) \pi(p) dp = \left(\frac{m}{R} \right)^n \frac{(m - 1)! \prod_i n_i!}{(m + n - 1)!}. \quad (2.16)$$

Que da la complejidad estocástica como:

$$\begin{aligned} I(x | m, n, R) &= -\log f(x | m, n, R) \\ &= n \log \frac{R}{m} + \log \binom{n}{n_1, \dots, n_m} + \log \binom{n + m - 1}{n}. \end{aligned}$$

⁷Debido a Hall y Hannan.

En término del multinomial,

$$\binom{n+m-1}{n} = \frac{n!}{\prod_i n_i!}. \quad (2.17)$$

Y el binomio

$$B(n+m-1, n) = \binom{n+m-1}{n} \quad (2.18)$$

Minimizando $I(x | m, n, R)$ obtenemos el número óptimo de subintervalos o particiones como también la complejidad minimizada que se puede utilizar como índice para otros estimadores de densidad. Aunque la longitud del código no es $\min_m I(x | m, n, R)$ entre todos los estimadores de densidad posibles, excepto en un sentido asintótico como fue estudiado en Hall y Hannan, sí representa una codificación eficiente de los datos cuando los conteos n_i , son más o menos iguales. Observando el último término de la ecuación 2.11 representa la longitud del código necesario para codificar n_i . Los primeros dos términos dan la longitud del código (en forma de densidad) para las observaciones, que se puede pensar como un proceso de dos etapas: en la primera etapa el subintervalo de cada observación es codificada, que se realiza por un eficiente código enumerativo. En la segunda etapa cada observación dentro de su subintervalo es codificado con la misma cantidad de dígitos binarios, que depende de la precisión. Por ejemplo, si la precisión es $\delta = 2^{-q}$, entonces cada subintervalo tiene $R/m\delta$ distintos puntos donde la información puede caer y para especificar una observación dentro de un subintervalo requiere $\log(R/m\delta)$ dígitos binarios. Entonces poniendo $\delta = 1$ el primer término de 2.11 da la longitud necesaria del código para codificar la información en m subintervalos dados. Cuando m está optimizada no hay mucho que mejorar con el primer y último término. Sin embargo, el término de en medio tiene que ver con la forma de la densidad de la función, y si la información de los n_i son asimétricos entonces puede existir una mejor manera de codificar la información y por lo tanto una mejor estimación de la densidad.

2.4.3. Requerimientos en la información

Como ya se mencionó con anterioridad, la cantidad y calidad de información de los datos son de crucial importancia para todo el proceso de cálculos y reconstrucción de los atractores, en nuestro caso, atractores extraños. Esta es una dificultad de la cual no existe un manual para enfrentar este reto. Es decir, no existe una regla general para determinar la cantidad de información para recrear la dinámica del sistema en estudio.

“en general para un diagnóstico detallado de la dinámica caótica del sistema se requiere de una serie de tiempo larga y de alta calidad”
(Ruelle, 1987)

Cabe destacar que esta es un área de investigación relativamente nueva y que se está desarrollando rápidamente por lo que mejoras significativas se han logrado. Por consiguiente, los nuevos algoritmos necesitan de una cantidad menor de información. En la actualidad, limitaciones computacionales generalmente se pueden resolver ya que la tecnología crece exponencialmente, pudiendo hacer un número inimaginable de operaciones en el tiempo de desarrollo de estas teorías. Otro problema que no está relacionado con las limitaciones computacionales, son las limitaciones inherentes a las dinámicas complejas.

Se ha señalado en investigaciones recientes que el cálculo de la dimensión de correlación es una de estas invariantes que requiere de una gran cantidad de datos. Reconstruyendo un atractor con una cantidad insuficiente de datos, los resultados en la dimensión no serán del atractor entero, sino, será la dimensión de algunas partes del atractor (Denton, Diamond, 1991). Hay una “*regla general*” donde para el cálculo de la dimensión de correlación se requiere alrededor de 1000 datos. Otro estudio determinó que para pocos datos, muy finos y suaves, se obtienen falsas dimensiones pequeñas (Grassberger, 1986). Por otra parte, el uso de series de tiempo cortas y con ruido puede causar que las regiones escaladas sean mucho más pequeñas y esto causar que el estimado de la dimensión de correlación a converger a un resultado correcto para valores relativamente grandes de la dimensión de inmersión (Dinget al., 1993). Por lo que no existe un acuerdo universal en una regla en la cantidad de información para determinar la dimensión.

En nuestro caso particular de estudio no nos preocupa tanto la longitud como el ruido que pueda tener las series ya que las series de tiempo de las acciones son generalmente largas y el ruido no será de la medición, más bien el ruido lo consideraremos al precio de la acción por cuestiones de información privilegiada y otras cuestiones económicas.

2.4.4. No linealidad

Ya vimos que el Teorema de Inmersión de Takens consta básicamente de la determinación de dos parámetros los cuales son τ el tiempo de retraso y n la dimensión de inmersión. El problema de esto es que a pesar de que está demostrada su existencia no existe hasta el momento ninguna convención metodológica en la determinación de estos, lo que existe son estimaciones con diferentes criterios. Nosotros en este capítulo concentraremos nuestra atención a dos conceptos fundamentales que ayudan a la estimación de estos parámetros; Información Mutua e Integral de Correlación.

2.4.5. Información Mutua

La función de Información Mutua se define de la siguiente forma: dadas dos series de tiempo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, entonces $I(X, Y)$ es el promedio de bits de $\{X\}$ que se pueden predecir a partir de $\{Y\}$. Tiene la propiedad de simetría tal que $I(X, Y) = I(Y, X)$. En el análisis de información proveniente a observaciones, el cálculo de información mutua ocurre principalmente por tres razones:

- I Identificación de la correlación no lineal
- II Cálculo del óptimo de intervalos de muestreo, en inmersiones de series de tiempo
- III Investigación de relaciones causales en relación con la información mutua

Dado el primer punto podemos decir que la función de información mutua se puede usar para identificar y caracterizar cuantitativamente relaciones entre conjuntos de información que no son detectados por los métodos lineales de correlación tradicionales.

En este texto, de las tres razones que mencionamos, nos interesa el cálculo óptimo de particiones, que corresponde al segundo punto. La función de información mutua se puede utilizar para determinar un intervalo de muestreo apropiado T_s , que es el tiempo entre medidas consecutivas de una serie de tiempo. La selección de un muestreo apropiado es una consideración importante cuando se aplican métodos cuantitativos para el análisis dinámico en series de tiempo. Una primera aproximación para resolver este problema fue pensar en considerar el intervalo T_s más pequeño, a primera instancia esta aproximación puede parecer razonable, pero falla porque los cálculos con sobre muestreo utilizados, tienden a producir errores en los resultados.

Históricamente otra medida que se utilizaba era el tiempo de la función de autocorrelación, que es el tiempo requerido para que la función de autocorrelación llegue a $1/e$ de su valor inicial, se ha utilizado para establecer un aproximado en la escala de tiempo, correspondiente a que la serie de tiempo sufra cambios significativos. Sin embargo, con este intento se vio experimentalmente que dicha medida lineal caracterizaba de manera incompleta el comportamiento; lo que motivo al desarrollo y cálculo de la función de información mutua con retraso.

Por lo que la información mutua que se calculara será la siguiente $I(X_i, X_{i+lag})$ como función de retraso o “lag”. Ahora como la información mutua nos da el número promedio de bits predecibles de X_i a partir de medir $Y_i = X_{i+lag}$, teniendo esto en cuenta calcularemos el mínimo de la información mutua para tener mínima correlación entre estos dos parámetros. Lo que queremos encontrar es el punto donde existe una mayor incertidumbre entre $\{X\}$ y $\{Y\}$. La máxima incertidumbre en la relación entre $\{X\}$ y $\{Y\}$ ocurrirá en el mínimo

de $I(X_i, X_{i+lag})$. Tomando este criterio podemos decir que el tiempo de retraso del sistema es el primer mínimo de la información mutua del intervalo de la muestra, según Fraser y Swinney [10] apoyados por Abarbel [2] argumentan que dentro del conjunto de mínimos corresponde al primero.

La propiedad esencial del tiempo de retraso es que tiene que asegurar que la información tenga un máximo es su dispersión en el espacio fase. Esto para que el atractor reconstruido tenga una superficie suave; al maximizar la dispersión la posibilidad de encontrar picos o cambios abruptos en el atractor se minimiza; topológicamente es importante porque al estudiar el atractor sus características se distinguen con mayor facilidad.

Ahora revisaremos el siguiente caso particular que ocurre al hacer una inmersión de la información dinámica. En la forma más sencilla el análisis basado en la inmersión de la información empieza con $\{X\}$ serie de tiempo escalar, donde tenemos que los elementos de $\{X\}$ se utilizaran para formar un conjunto m -dimensional $\{Z\} \in \mathbb{R}^m$, es decir,

$$Z_j = \{x_j, x_{j+lag}, \dots, x_{j+(m-1)lag}\}. \quad (2.19)$$

Para después estudiar las propiedades geométricas del vector $\{Z\}$. Una dificultad crucial se encuentra cuando trabajamos con conjuntos de información de inmersión finita. Aquí nuevamente podemos observar por qué el problema está en determinar los parámetros de tiempo de retraso y m , se puede resumir en que elecciones inapropiadas de m y el tiempo de retraso pueden llevar a una falsa estructura de la dinámica de información aleatoria [10]. A la inversa una inapropiada especificación puede, en otros casos, resultar en el fracaso de identificar estructuras innecesarias que están presentes en las series de tiempo.

Existen varios candidatos para el cálculo de la función de información mutua, nosotros utilizaremos el propuesto por Cellucci, et al.. Por su lado, Fraser and Swinney propusieron que el candidato óptimo para el tiempo de retraso para usar en la reconstrucción de inmersiones es el primer mínimo de $I(X_i, x_{i+lag})$ contra el tiempo de retraso. La propuesta de Fraser-Swinney en un reciente estudio comparativo de criterios de inmersión [23].

Cálculo de la Función de Información Mutua con Partición Uniforme en el Plano

El método que utilizaremos para calcular $I(X, Y)$ utilizará particiones uniformes. Dadas $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_D}\}$ y $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_D}\}$ series de tiempo de misma longitud. Supondremos que las distribuciones de X y Y son $P_X(i)$ y $P_Y(i)$ estas se pueden aproximar por histogramas de N_X y N_Y elementos que dividen uniformemente en los siguientes rangos $x_{\min} - x_{\max}$ y $y_{\min} - y_{\max}$. No es necesario que $N_X = N_Y$. Denotaremos el número de ocupación del elemento (i, j) de la partición del plano XY por $O_{XY}(i, j)$. Ahora $P_{XY}(i, j)$ está determinado por la constante de normalización del número de ocupación contra

el numero de observaciones pareadas, es decir, $P_{XY}(i, j) = O_{XY}(i, j)/N_D$. La distribución de probabilidad conjunta será $P_{XY}(i, j)$, y tiene $N_X N_Y$ valores, de los cuales algunos pueden ser ceros. Una aproximación discreta se puede hacer con la siguiente relación:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^{N_X} \sum_{j=1}^{N_Y} P_{XY}(i, j) \log_2 \left\{ \frac{P_{XY}(i, j)}{P_X(i)P_Y(j)} \right\} \quad (2.20)$$

Donde no hay contribución a la suma si $P_{XY}(i, j)$ es igual a cero.

La función de información mutua tiene una seria deficiencia que se traduce en el siguiente problema. Determinar el número correcto de elementos N_X y N_Y , ya que evidentemente la información mutua es función de ellos, lo cual hace que al cambiar estos parámetros de valor de la información mutua también cambie. Es decir se relacionan de manera sensible.

Lo que nos lleva a preguntarnos ¿Cuál es el número óptimo de elementos?, en realidad con esta pregunta estamos rephraseando la pregunta del número de histogramas pero ahora en el contexto de información mutua.

El problema general del cálculo de histogramas es el siguiente: Dado un conjunto de escalares $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ¿Cuántos elementos son necesarios para construir histogramas de X ? Ya que si son muchos elementos, el número de ocupación es 0 ó 1, lo cual no nos da ninguna información relevante; de igual manera, si el número de elementos es pequeño (pensemos en el caso limitante de un solo elemento) la estructura de la distribución no se puede distinguir.

Autores como Tukey [10], Bendat y Piersol [10] han propuesto algunas soluciones sin mucho éxito. Tukey propuso que $n^{1/2}$, donde n es el número de observaciones. Bendat y Piersol sugirieron $1.87(n-1)^{0.4}$. Una teoría que resalta sobre las anteriores y tiene como fundamento la teoría “*Minimum Description Length (MDL)*” formulada por Rissanen [10], donde concluye que el valor óptimo del número de elementos para usar en un histograma es el valor de m , al cual denotaremos por m_{opt} , que da el valor mínimo de la complejidad estocástica.

Se conoce como complejidad estocástica de un conjunto de datos a la menor longitud de un código posible, cuyos datos se pueden obtener mediante el uso de un conjunto fijo de modelos; esto se traduce en “*Minimum Description Length (MDL)*”. Esta medida es de gran importancia teórica y práctica para tareas como la selección de modelos o agrupación de datos. Dicho esto, es evidente por qué trabajaremos con este tipo de medidas para la selección de datos.

$$F(m) = n \log_2 \left(\frac{R}{m\Delta} \right) + \log_2 \binom{n}{n_1, \dots, n_m} + \log_2 \binom{n+m-1}{n}. \quad (2.21)$$

Donde n es el número de datos en el conjunto de X , $R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$ el rango de X , m el número de elementos en la partición uniforme, Δ es la resolución deseada de x , n_i son el número de ocupaciones “*occupancies numbers*” de cada elemento en la partición. Por último el coeficiente multinomial:

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}. \quad (2.22)$$

Y para el coeficiente binomial:

$$\binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \quad (2.23)$$

Para practicidad $\Delta = 1$ ya que Δ solo desplaza por adición mediante una constante. Lo cual no afecta en el cálculo de m_{opt} . Algoritmos base dos tampoco afectan el cálculo, pueden ser de base distinta, pero Rissanen propone base dos.

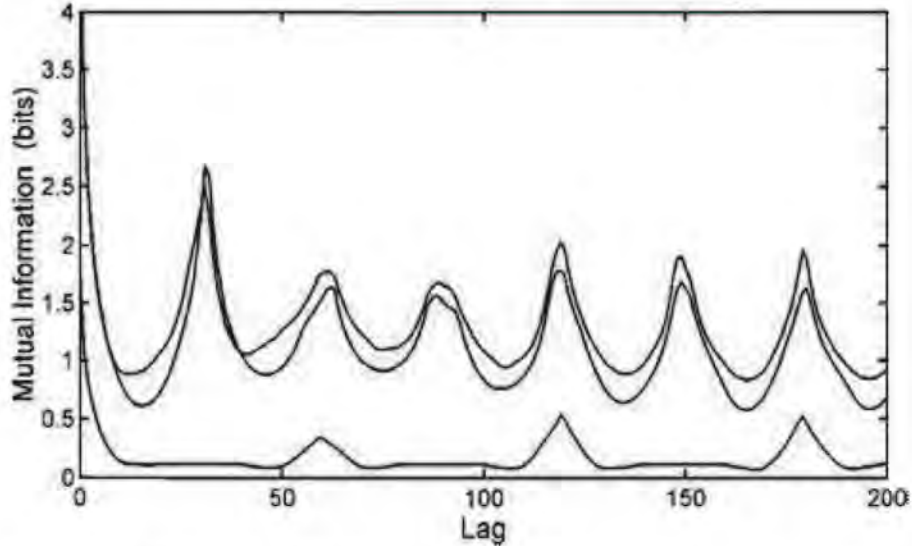


Figura 2.6: Gráfica de $I(X_i, X_{i+\text{lag}})$ como función de lag para el atractor de Rossler. Partición uniforme del plano XY se construyó utilizando 40 elementos en cada eje. 100000 datos se utilizaron. La curva con la posición más alta es la de la variable x , la intermedia es de la variable y y la curva más baja corresponde a la variable z .

La minimización, $\text{mín } F(n)$ nos da el número óptimo de subintervalos. El último término de la fórmula 2.21 representa la longitud necesaria para codificar los conteos de n_i . Los primeros dos términos de la misma fórmula dan como resultado la longitud del código en su forma de densidad para las observaciones, este resultado se realiza en dos etapas: 1) En la primera, el subintervalo de cada observación es codificado, que es realizado por una enumeración codificada eficiente que se aplica a las cadenas con n_i ocupaciones, esto lo genera

el término de en medio de 2.21 2) En la segunda etapa, cada observación dentro de su subintervalo es codificado con la misma cantidad de dígitos binarios, que depende de la precisión que se determine, es decir, cada subintervalo tiene $R/m\Delta$ distintos puntos en los cuales la información puede estar y para poder especificar una observación dentro de un subintervalo se requiere $\log_2(R/m\Delta)$ dígitos binarios. En nuestro caso como $\Delta = 1$ el primer término de 2.21 genera la longitud de código necesaria para codificar la información en subintervalos.

2.4.6. Dimensión de Correlación II

La dimensión de correlación no es más que la extensión del concepto de dimensión de cualquier objeto a objetos de dimensión fractal, en otras palabras, es la dimensión no entera que tienen los objetos conocidos como fractales o atractores extraños.

Dado un sistema con movimiento complejo una de las preguntas que hay que responder es si se trata de un sistema caótico o estocástico. En el primer caso se puede generalizar a que se deriva de un sistema “simple” y del segundo caso se deriva de un sistema complicado con muchos grados de libertad.

Como se mencionó con anterioridad la dimensión de correlación es una medida extensamente utilizada para la determinación de estos dos tipos de comportamiento de un sistema. Esta medida es la que comúnmente se usa ya que es “fácil” de calcular dada una serie de tiempo escalar.

Este método fue creado por Grassberger y Procaccia y utiliza la mayor parte de lo que se ha revisado con anterioridad, en especial el cálculo de la información mutua. Además de estas teorías utiliza también el cálculo de la integral de correlación, cuya ley de potencias se utiliza para estimar la dimensión del atractor.

El cálculo de la dimensión de correlación empieza generalmente con la inmersión del espacio para poder reconstruir las trayectorias del sistema utilizando el tiempo de retraso.

Un acercamiento o criterio que vale la pena mencionar, porque es uno de los más usados en la práctica, es al que nos referimos como “*Doctrina de Aumentar Siempre la Dimensión de Inmersión*”. Es la siguiente:

“Elegir dimensiones de inmersión crecientes y en cada caso, calcular la integral de correlación. Cuando no se observen cambios en el comportamiento de la integral de correlación con respecto al incremento de la dimensión de inmersión, entonces se habrá encontrado una dimensión de inmersión adecuada ”.

Lo anterior se traduce a que uno escoge dimensiones de inmersión de manera creciente y en cada caso se calcula la integral de correlación, cuando no se

observen cambios, es decir, se observe consistencia en el comportamiento de la integral de correlación al aumentar la dimensión de inmersión, entonces hemos encontrado una dimensión de inmersión consistente que es lo suficientemente grande.

Aunque, consistencia no necesariamente implica correcta, la razón fundamental de este enfoque es que la integral de correlación (también aplica para otras invariantes dinámicas) que es independiente de la dimensión de inmersión a condición de que esta sea suficientemente grande. Por lo tanto aplicando la doctrina, cuando no se observan cambios en la integral de correlación con respecto a la dependencia en la dimensión de inmersión, entonces esta debería ser lo suficientemente grande.

La dificultad que presenta este criterio es que como la información que se tiene es finita y con ruido, se podría observar casi siempre consistencia en el comportamiento siempre que la dimensión sea suficientemente grande; entonces lo que se aplica en la práctica es que eventualmente al incrementar la dimensión de inmersión, esta será suficientemente grande e incrementarla una unidad no será apreciable en cuanto a que las propiedades de los datos no cambiaran $n \rightarrow \infty$, $n + 1 \approx n$.

Integral de Correlación

En las series de tiempo generalmente se quieren tomar medidas de las variables de estado a intervalos constantes, recordando la teoría de Takens, donde sugirió que se podría crear una secuencia unidimensional de un conjunto de variables n dimensionales, es decir,

$$z_k = \{x_k, x_{k-\tau}, \dots, x_{k-(n-1)\tau}\}. \quad (2.24)$$

Cabe notar que $\tau, n \ll N$, por lo que se tienen casi la misma cantidad de vectores que de puntos. Regresando a la teoría de Takens, él mostró que para una cantidad suficientemente grande de n y con condiciones geométricas adecuadas, el atractor que se reconstruye del espacio fase tiene dimensión d_c y los vectores de reconstrucción estarán en un subconjunto del espacio de reconstrucción \mathbb{R}^n .

Para encontrar d_c se utiliza la integral de correlación, que se define como el número de pares (i, j) para los cuales $|z_i - z_j| \leq r$ multiplicado por $\frac{1}{N^2}$, es decir,

$$C(r, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} I(r - |z_i - z_j|) \quad (2.25)$$

Donde I es la función escalón de Heaviside. Para evitar una correlación falsa debida a medidas tomadas en un mismo tiempo, la suma solo se realiza sobre los vectores inmersos que no están espacialmente muy cercanos en el tiempo. Ahora de manera equivalente se puede escribir de la siguiente forma

$$C(r, N) = \frac{2}{N^2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N-n} I(r - |z_{i+n} - z_i|) \quad (2.26)$$

para calcular la dimensión d_c calcularemos la pendiente de la integral de correlación, por lo que

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r, N)}{\log r}. \quad (2.27)$$

Otra manera muy común para examinar la pendiente en la región ajustada es hacer la derivada de la integral de correlación, matemáticamente se puede escribir de la siguiente forma:

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dr} [\log C(r, N)]}{\frac{d}{dr} [\log r]} = D_c. \quad (2.28)$$

Generalmente, estos límites no existen, ya que N sólo puede ser tan grande como los datos a analizar y r sólo puede ser tan pequeña como la menor de las distancias de N^2 . Por lo que en la práctica lo que usualmente se hace es graficar en logaritmos $C(r, N)$ y buscar una región pequeña de r donde la pendiente sea constante.

2.5. Teorema de Takens

Teoremas de Inmersión

Una medida escalar es la proyección de las variables internas de un sistema que no son observables en un intervalo del eje real. Además de la reducción en la dimensionalidad, el proceso de proyección puede ser no lineal y una mezcla de diferentes variables internas, lo que genera una distorsión extra en la salida de los datos. Una posibilidad es que aunque tengamos un conocimiento preciso del proceso de medición, no podemos reconstruir el estado fase del sistema original. Afortunadamente, la reconstrucción del espacio fase del sistema original no es necesaria para el análisis del sistema. Es suficiente construir un nuevo espacio tal que el atractor en este espacio sea equivalente al original.

Recordando todo lo visto en las secciones anteriores, queremos explotar el determinismo de la información. Por lo que la evolución temporal de las trayectorias en el espacio reconstruido deberá depender únicamente en la posición actual en el nuevo espacio. La unicidad en la dinámica en el espacio reconstruido no es la única propiedad que queremos. Las dimensiones, exponentes de Lyapunov y entropías son invariantes bajo transformaciones no singulares suaves. Entonces, para garantizar que las cantidades calculadas para el atractor reconstruido son idénticas a las del estado fase original, se requiere que la estructura del espacio tangente, esto es, la linealización de la dinámica en cualquier punto del estado

fase, se preserva por el proceso de reconstrucción. Entonces la inmersión de una variedad⁸ compacta y suave M dentro de \mathbb{R}^m se define como un mapeo F que es una inmersión uno a uno en M , esto es, un mapeo C^1 uno a uno con un Jacobiano $DF(x)$ que tiene rango completo. El punto crucial es mostrar bajo qué condiciones la proyección debida a mediciones escalares y la reconstrucción subsecuente por los vectores de retraso forman una inmersión.

El problema con la inmersión de escalares, tiene dos aspectos. Primero, si el estado de un sistema está caracterizado solo si nosotros especificamos simultáneamente D variables, tenemos que reconstruir D variables independientes de la serie de tiempo escalar para cada t donde la señal es muestreada. Una vez que conocemos estas variables, sabemos que la dinámica vive en alguna variedad D dimensional. El primer problema radica en que esta variedad seguramente será curva. Y el segundo problema es encontrar una inmersión adecuada de una variedad curva en el espacio cartesiano ya que queremos trabajar con una representación global de la dinámica en algún espacio vectorial.

Teorema de Inmersión de Whitney

El segundo problema lo resolvió Whitney (1936), quien demostró que toda variedad D dimensional y suave se le puede hacer una inmersión en el espacio \mathbb{R}^{2D+1} y que el conjunto de mapeos forma una inmersión densa y un conjunto abierto en el espacio de C^1 . Cabe destacar que Whitney no estaba pensando ni en fractales ni en series de tiempo escalares. Por lo que asumió que la descripción de la variedad en algunas coordenadas locales, y mostró que se puede hacer inmersión en \mathbb{R}^{2D+1} .

El teorema de Whitney no es exactamente lo que necesitamos, pero sí es un primer acercamiento para tener una base teórica. Este teorema tiene dos problemas para nuestro estudio: el primero es que solo se probó para D dimensiones enteras; segundo no dice que tan probable es que dado un mapeo realmente forme una inmersión. El hecho de que un “*buen*” mapeo sea denso en el espacio de C^1 solo garantiza que existe una inmersión en una vecindad pequeña de dicho mapa.

Teorema de Inmersión de Takens

A continuación se hará una descripción más formal del Teorema de Inmersión de Takens. La situación para reconstruir un atractor M de un sistema dinámico es muy particular. El atractor es un subconjunto del estado fase del sistema. Esto garantiza que el mapeo F proveniente de los vectores de estado en un punto dado relativo a su posición de un muestreo después es único.

⁸Espacio topológico cuyos puntos n -dimensionales tienen una vecindad que es homeomorfa al espacio Euclideo de dimensión n .

La dinámica se puede representar como un mapeo único de M a M , una inmersión por retrasos de tiempo es de nuevo un mapeo independiente en el tiempo de M a \mathbb{R}^m . Sea x_n el vector de estado en el tiempo n , g la función de medición y F el mapeo que representa la dinámica, $x_{n+1} = F(x_n)$. Entonces el vector de retraso será

$$(g(x_n), g(F(x_n)), g(F \circ F(x_n)), \dots). \quad (2.29)$$

Por lo que es bastante intuitivo y claro que conociendo $g(x_{n_i})$ en los tiempos sucesivos n_i es equivalente a conocer un conjunto de diferentes coordenadas en un único momento si el mapeo F contiene los diferentes grados de libertad.

Resumiendo el último párrafo, una reconstrucción por retrasos de tiempo de una sola observable es un mapa muy particular de M a \mathbb{R}^m , ya que mezcla dinámica y geometría. Takens pudo demostrar que es una propiedad genérica del mapeo por retrasos de dimensión $m = 2D + 1$ es una inmersión de una variedad compacta de dimensión D si la función de medición $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 y si la dinámica o la función de medición de alguna de las dos sea genérica, en el sentido que acoplan todos los grados de libertad. En el teorema original de Takens, D es una dimensión entera de una variedad suave. Pero ahora se sabe que D puede ser mucho mayor que la dimensión del atractor.

Sauer et al. (1991) pudieron generalizar el teorema, al cual llamaron “Fractal Delay Embedding Prevalence Theorem” el cual se puede traducir como “Teorema del Predominio de Inmersión por Retrasos Fractal”. Sea D_F la dimensión de caja o “box counting dimension” del atractor (fractal), definida como

$$dim_{box}(S) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (2.30)$$

Donde $N(\varepsilon)$ es el número de cajas de lado ε . Entonces para casi cualquier función de medida suave g y tiempo de muestreo $\Delta t > 0$, el mapeo dentro de \mathbb{R}^m con $m > 2D_F$ es una inmersión si no hay órbitas periódicas en el sistema con periodo Δt o $2\Delta t$ y sólo un número finito de orbitas periódicas con periodo $p\Delta t$, $p > 2$.

Podemos ver el teorema de una manera más gráfica en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} x_n \in M \subset \Gamma & \xrightarrow{F} & x_{n+1} \in M \subset \Gamma \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ g_n \in \mathbb{R} & & g_{n+1} \in \mathbb{R} \\ \downarrow e & & \downarrow e \\ g_n \in \tilde{M} \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{G} & g_{n+1} \in \tilde{M} \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

Aquí e denota el procedimiento de inmersión por retrasos y se puede escribir formalmente como un mapeo en g_n introduciendo el operador de retrasos.

Por lo que el resultado principal de los teoremas de inmersión es que no es la dimensión D del espacio real inmerso lo que es realmente importante para la descripción mínima del espacio inmerso, más bien la dimensión que realmente importa es la dimensión fractal D_F generada a partir de la dinámica real subyacente.

Consecuencias del Teorema de Inmersión de Takens en el procesamiento de señales

Para examinar las consecuencias que se obtienen del teorema de Inmersión de Takens, lo primero que haremos será recordar lo que hasta ahora hemos visto para después pasar a las implicaciones o consecuencias que este teorema pueda tener en este rubro. Es decir, veremos el caso general en el procesamiento de señales⁹.

Cuando nos enfrentamos a un sistema físico, lo cual resulta bastante general. En el contexto de procesamiento de señales, se pueden presentar casos de diversos tipos, muy variados. Como por ejemplo la señal del funcionamiento de un motor de auto, señales en canales de comunicación, todas estas señales son ejemplos de series de tiempo. Como se ha mencionado en diversas ocasiones nosotros trabajaremos con señales o series de tiempo de precios en finanzas, como es la serie de tiempo del DJIA. El estado de estos sistemas cambia en el tiempo debido a ciertas leyes deterministas. Por el momento se consideran sistemas autónomos. En muchas situaciones la dinámica del sistema será suave, es decir, el sistema no cambiara abruptamente ni discontinuara. Suponemos ahora que la dinámica del sistema es continua en el tiempo, pero que nuestras observaciones ocurren de manera discreta, es decir, que nuestras mediciones se toman de manera separada en momentos distintos. Durante el proceso de medición, las mediciones se toman en los tiempos $t_i, i = 1, \dots$. Asumiremos que son tiempo igualmente espaciados.

Como el sistema en estudio es de cierta manera determinista, el estado t_i es determinado por el estado t_{i-1} . Asumiremos que el inverso también se cumple, es decir, que el movimiento es invertible. Estas condiciones son equivalentes a suponer una función $\phi : M \rightarrow M$, que mapea del estado t_i al estado t_{i+1} y que esta función es invertible y por último que ϕ y su inversa son diferenciables; esto para que las dinámicas se puedan describir por un difeomorfismo. Algunas veces las dinámicas se especificaran por algunas ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales que garantizan que ϕ sea un difeomorfismo y que se pueda hacer

⁹Por señales entendemos cualquier proceso que se pueda traducir en una serie de tiempo, desde las señales de impulsos eléctricos hasta señales en las variaciones de los precios de las acciones, estas últimas son las que tratamos en la presente tesis.

una representación a partir de las ecuaciones diferenciales.

El mapeo ϕ forma parte del enlace entre el experimento y el teorema de Takens; otra parte son las mediciones. Como se mencionó en el segundo párrafo de esta sección, tomamos una muestra o hacemos una observación cada t_i , el resultado es, por lo tanto, un escalar. Olvidemos por un momento la presencia de ruido y el error que pueda presentar la cuantización de la información. Estas observaciones pueden ser señales de la vibración de un monitoreo de equipo, cambio en voltajes, etc. En realidad muy poco conocimiento del experimento se tiene que especificar; todo lo que tenemos que asumir es que la medida al tiempo t_i está determinado por el estado del sistema en t_i , y que la dependencia es suave. Entonces las medidas se describirán por una función de observación diferenciable $g : M \rightarrow \mathbb{R}$.

El teorema de Takens lo que nos dice ahora es que si tomamos medidas de observaciones y con esto generamos una serie de tiempo y construimos n vectores de la serie seleccionada, haciendo la selección de n elementos consecutivos, donde n es mayor que dos veces la dimensión de M , entonces, si ϕ y g son generadoras, estos vectores están en el subespacio de \mathbb{R}^n que es una inmersión de M .

A primera vista puede parecer insuficiente para celebración, y de hecho, si el número de observaciones es pequeño, el conocimiento que generemos a partir de estos datos será insuficiente en valor práctico. Pero si tenemos información suficiente para hacer un sampleo correcto en el estado fase, entonces la información en nuestro espacio reconstruido será completa y podremos aprender de ésta, la cual se traduce en el sistema mismo. Uno de los elementos básicos que deseamos obtener es la dimensión del estado o espacio fase, la cual es el número de grados de libertad que tiene el sistema. Otra cosa también básica, es la topología del espacio. Aunque esta información puede parecer un poco cualitativa, se le puede dar uso: por ejemplo para un sistema con multifrecuencia periódica el estado o espacio fase debería tener una geometría de un toro n dimensional, donde n es el número de osciladores independientes. La homología de grupos del sistema nos servirá para propósitos de reconocimientos.

Mientras que la información topológica es importante, no explota por completo todas las propiedades que se preservan bajo inmersiones. Además, frecuentemente la dinámica del sistema causa que no se explore todo el espacio fase: será confinado a subconjuntos del espacio conocido como atractor.

Generalmente asumimos que el atractor está asociado con una medida invariante de ϕ en M . Si decimos que $N = \Phi M$ será la imagen del espacio fase dentro de la inmersión, hay una medida correspondiente en N inducida por Φ , y como Φ es difeomorfismo la medida inducida tiene la misma dimensión (fractal) que la original. Muchos de los estudios basados en el teorema de Takens se han concentrado en el cálculo de la dimensión de las reconstrucciones usando el método de retrasos.

Desde el punto de vista del procesamiento de señales, un punto importante a notar es que la inmersión Φ no solo produce una copia del espacio M , sino también de la dinámica. La función $\psi : N \rightarrow N$ definida por $\psi = \Phi \circ \phi \circ \Phi^{-1}$ es un sistema dinámico en N que hereda las propiedades de invertibilidad y también la de ser una función suave. Es claro que las órbitas periódicas de ϕ las mapea Φ en las órbitas correspondientes de ψ . Esto se puede ya que Φ es un homeomorfismo. La naturaleza difeomórfica de Φ implica que: se puede demostrar que los números característicos de las órbitas periódicas se preservan bajo inmersión.

Como sabemos que los puntos reconstruidos en N se relacionan por el mapeo ψ , esperaríamos poder estimar ψ de los datos. Esto es, podemos tratar de construir un modelo dinámico del sistema (ψ, N) . Si podemos hacer esto con precisión, entonces podemos hacer el procesamiento de señales de manera formal. Por ejemplo podemos utilizar este modelo para predicción: dado un n -vector de la serie de tiempo, podemos usar nuestro elemento de ψ para calcular el siguiente vector, es decir, predecir el siguiente elemento de la serie de tiempo. Esto abre las puertas a códigos para predicción y para la reducción de ruido. Para el tipo de señales que estamos considerando, las cuales son señales provenientes de sistemas con un alto grado de no linealidad, el proceso no es directo como en el caso lineal: necesitan de nuevas ideas y algoritmos. También podemos utilizar los modelos de la siguiente manera: para remover ruido al minimizar la inconsistencia entre la información y el modelo.

En general no existe una manera general para derivar ϕ , porque la información depende no solo de ϕ sino también de la función de medición g . Es posible caracterizar al sistema hasta su difeomorfismo, esto es, decidir si dos señales se pueden relacionar por cambios suaves en las coordenadas, el teorema de Takens nos dice como relacionar por medio del método de retrasos la reconstrucción del sistema original. Si es así, la reconstrucción ofrece una manera de realizar el reconocimiento y clasificación del sistema.

Todas estas cosas provienen del aparente muy abstracto y teórico teorema de Takens. Es claro que las posibilidades en la aplicación del teorema son extensas, y que probablemente para explotarlas se tienen que generar nuevas ideas y técnicas matemáticas.

Capítulo 3

Mercados Eficientes y Bursátiles

3.1. Hipótesis de Mercados Eficientes

La hipótesis de los mercados eficientes (HME), en esta hipótesis se plantea que los precios de las acciones reflejan toda la información del valor de la empresa, por lo que no hay manera de conseguir una mayor ganancia que la que refleja el mercado.

La primera vez que se utilizó el término “mercados eficientes” fue en 1965 en un artículo escrito por E.F. Fama quien dijo que era en un mercado eficiente

“en promedio, la competencia causa que los efectos de nueva información en valores intrínsecos se reflejen instantáneamente en el precio actual”.

Es evidente que los inversionistas para “ganarle” al mercado, lo que buscan son acciones, títulos cuyo valor está por debajo de lo que en “realidad” valen, por lo que estos en un futuro subirán su valor. Se busca esta estrategia para títulos los cuales se espera tenga una mayor subida en su precio.

Para este tipo de análisis los inversionistas utilizan múltiples métodos de predicción y valuación, esto para poder tener una ventaja ante sus competidores y poder ganarle al mercado y tener ganancias substanciales.

La HME afirma que ninguna de estas técnicas puede ser efectiva, lo que se puede traducir en que la ventaja obtenida no es mayor que los costos de investigación y transaccionales.

También sugiere que la predicción del cambio de los precios es difícil e improbable. Una de las maneras más comunes de utilizar para la predicción del

cambio de precios es fuente de información nueva, es decir, anuncios o comunicados de las empresas. Pero lo que dice HME es que los precios se ajustan de manera rápida, sin ninguna tendencia a la información nueva, por lo que los precios de los títulos reflejan toda la información.

Difícilmente se puede encontrar otra teoría en finanzas y economía que genere una discusión tan polarizada, ya que algunos investigadores la afirman y otros investigadores la niegan completamente.

Otro punto clave en el que se basa la HME es que mientras hay una mayor competencia es más difícil encontrar los títulos que se encuentran por debajo de su precio “real” de valuación, ya que los inversionistas utilizan cada vez más recursos.

Otro punto que cabe destacar de esta hipótesis es “confía en los precios del mercado”, ya que estos son precios justos.

El precio justo no implica que todos los títulos tendrán el mismo rendimiento, ni que tendrán el mismo comportamiento de subida y caída de precios. De acuerdo con la teoría de los mercados capitales el rendimiento esperado estará en función principalmente del riesgo.

El precio de un título refleja el valor presente de los flujos de dinero esperados, lo cual incorpora muchos factores como la volatilidad, liquidez y riesgo de entrar en banca rota.

Modelo de Rendimiento Esperado o “Juego Limpio”

Con anterioridad se mencionó que la hipótesis de los mercados eficientes radica en que los precios de los títulos reflejan en su totalidad la información disponible, esto es tan general que no tiene ninguna implicación empírica que se pueda poner a prueba.

Como todo científico lo que queremos es hacer una especie de prueba, una posibilidad es proponer que los rendimientos esperados o precios de equilibrio de los títulos se generan a partir de dos parámetros como en el mundo de Sharpe-Litner. Por esta razón como una mera ejemplificación de un modelo matemático que describe la Hipótesis de Mercados Eficientes, se mostrará un modelo.

La mayoría de los trabajos que hacen pruebas de este estilo asumen que las condiciones de los mercados en equilibrio se pueden representar con la ayuda de los valores o rendimientos esperados, donde los rendimientos esperados serán función del riesgo, es decir:

$$E(p_{j,t+1} | \Phi_t) = [1 + E(r_{j,t+1} | \Phi_t)] p_{j,t}. \quad (3.1)$$

Donde E es el operador del valor esperado; $p_{j,t}$ es el precio del título j en el tiempo t ; $r_{j,t+1}$ es el porcentaje del rendimiento en un periodo $(p_{j,t+1} - p_{j,t})/p_{j,t}$; Φ_t se utiliza para representar la información que está completamente reflejada en los precios al tiempo t . Las tildes representan que se trata de variables aleatorias.

Los supuestos del equilibrio de los mercados se pueden poner en términos de los valores esperados proyectados en la base de la información del conjunto Φ_t que mayormente tiene información empírica. Cabe mencionar que se eliminan los supuestos donde la información de Φ_t puede generar rendimientos o ganancias en exceso. Sea

$$x_{j,t+1} = p_{j,t+1} - E(p_{j,t+1} | \Phi_t) \text{ entonces } E(x_{j,t+1} | \Phi_t) = 0. \quad (3.2)$$

Que por definición es un juego justo para la secuencia $\{x_{j,t}\}$ con respecto a la información de la secuencia $\{\Phi_t\}$. De igual manera podemos definirla de la forma equivalente

$$z_{j,t+1} = r_{j,t+1} - E(r_{j,t+1} | \Phi_t) \text{ entonces } E(z_{j,t+1} | \Phi_t) = 0. \quad (3.3)$$

Que por definición es un juego justo para la secuencia $\{z_{j,t}\}$ con respecto a la información de la secuencia $\{\Phi_t\}$.

Enfocándonos en la perspectiva económica y no matemática, lo que quiere decir es que $x_{j,t+1}$ es el valor en exceso de valor en el mercado del título j al tiempo $t + 1$; que es la diferencia entre el precio observado y el valor esperado según la información Φ_t , esto mismo aplica para $z_{j,t+1}$ en términos del rendimiento.

Sea cualquier sistema de trading, donde le dice al inversionista la cantidad de fondos disponible $\alpha_j(\Phi_t)$ al tiempo t que se tiene que invertir en los n títulos disponibles, es decir,

$$\alpha(\Phi_t) = [\alpha_1(\Phi_t), \alpha_2(\Phi_t), \dots, \alpha_n(\Phi_t)]. \quad (3.4)$$

El valor en exceso al tiempo $t + 1$ que será generado por el sistema es

$$V_{t+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j(\Phi_t) [r_{j,t+1} - E(r_{j,t+1} | \Phi_t)]. \quad (3.5)$$

Y para que sea un juego justo

$$E(V_{t+1} | \Phi_t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(\Phi_t) [E(z_{j,t+1} | \Phi_t)] = 0. \quad (3.6)$$

3.2. Las tres versiones de la Hipótesis de Mercados Eficientes

La hipótesis de mercados eficientes dice que los precios de los títulos reflejan toda la información en cualquier punto del tiempo. Pero existe distintos tipos de información que afectan a la valuación de los títulos, por lo que, se consideran tres versiones de hipótesis de mercados eficientes de acuerdo a qué tipo de información se está considerando.

Forma débil de HME

Esta forma de la hipótesis afirma que el precio actual incorpora totalmente la información contenida únicamente en los precios históricos. Traducido esto implica que:

- Ningún inversor encontrará títulos mal valuados, por lo que, no se le puede ganar al mercado analizando precios.
- El análisis técnico no es útil.
- La mejor predicción para el valor de un activo mañana es utilizar el valor que tuvo hoy. El único factor que afecta a los precios es la llegada a los mercados de noticias desconocidas. Como se supone que las noticias ocurren aleatoriamente, el cambio de los precios también debe ser aleatorio.

Forma semifuerte de HME

Esta forma de la hipótesis afirma que el precio actual incorpora totalmente la información pública disponible. Por información pública entenderemos, los precios históricos y también las declaraciones financieras de las empresas (reportes anuales, declaraciones de ingresos, etc.), ganancias y dividendos, situación financiera de sus competidores, expectativas con respecto a factores macroeconómicos, etc. De hecho no solo es información financiera, es información relevante respecto a la empresa en cuestión.

La afirmación de esta hipótesis semifuerte es también que un inversionista no puede hacer ganancias de información que es accesible para cualquier persona. Esta forma de la hipótesis es más fuerte que la hipótesis de la forma débil ya que esta no solo se centra en los precios de los títulos, esta toma en valores macroeconómicos lo cual hace mucho más compleja. La implicación de la forma semifuerte va de igual manera que la forma débil, la diferencia es que abarca más categorías de información y no sólo precios.

Forma fuerte de HME

Esta forma de la hipótesis afirma que el precio actual incorpora totalmente la información existente:

- Pública.
- Privada.

La diferencia principal entre la hipótesis semifuerte y fuerte, es que esta última toma en cuenta información privada. Es decir, los gerentes de las empresas no podrán generar ganancias sistemáticas de la información interna.

3.3. Historia del Dow Jones

Charles Dow tenía un objetivo en mente cuando creó los índices Dow Jones: medir el mercado como un todo en lugar de centrarse simplemente en las acciones individuales. él quería hacer estos índices la base de una teoría global que podría ser utilizada para explicar y predecir los movimientos generales del mercado. Dow fue acreditado originalmente con la creación de la primera medida general del mercado en julio de 1884, aunque posteriormente modificó esto y comenzó a publicar por separado índices o promedios industriales y de ferrocarril el 26 de mayo de 1896. Estos promedios son la base de la Teoría de Dow.

Lo que hoy conocemos como la Teoría de Dow fue en realidad después de su muerte atribuida al Sr. Dow por Nelson en su libro de 1902, "El ABC de la especulación bursátil". Dow nunca escribió un libro sobre las inversiones y limita sus opiniones a los editores anónimos en el Wall Street Journal. En el libro de Nelson, que identifica claramente a Dow como la fuerza intelectual detrás del Wall Street Journal, y, de hecho, lamenta que Dow nunca publicó un texto exhaustivo sobre la "especulación". Nelson creía que la posición de Dow en el centro de Wall Street lo habría calificado de forma única por escribir un libro así.

En "El ABC de la especulación bursátil", los títulos de los capítulos del cinco al diecinueve llevan un asterisco con la nota adjunta sencilla: Teoría de Dow. Como George Obispo seala, "Casi un comienzo auspicioso de una denominación que ha perdurado en el lenguaje del mercado hasta la actualidad."

La Teoría de Dow contiene los principios del análisis fundamental y técnico, ninguna de estas disciplinas había sido completamente desarrollada durante el inicio de la bolsa de valores. Muchos términos que ahora se consideran cruciales para el análisis técnico aparecieron por primera vez en las ediciones del Wall Street Journal - incluyendo la idea de "tendencias" primarias, secundarias, terciarias y duraderas para diferentes duraciones. La ironía, por supuesto, es que Dow era un fundamentalista declarado, propagando la idea de que los precios siguen rendimientos y que los balances o libros de las empresas deberían hacerse

públicos para todos los inversores. Las compañías en esta época, no estaban demasiado interesadas en permitir que los inversores vieran sus libros de finanzas.

Graham y Dodd haciendo análisis de mercado sumando a Dow con la noción de acumulación y distribución, propusieron que “cuando se limitan los movimientos de varias semanas a un rango de 5%, se dice que se ha formado una “línea” que sugiere acumulación o distribución”. Un índice del mercado no era suficiente que para Dow pudiera confirmar la acumulación o distribución. Dow quería tener dos medias “romper por encima de la línea de forma simultáneamente” para confirmar la acumulación, o “romper por debajo de la línea de forma simultáneamente” para mostrar dicha acumulación o distribución. Fue esta innovación que conduce a Dow a romper su primer índice promedio de 1884 en dos medias distintas.

Se prosiguió a la creación de una media (índice) industrial y otra que involucraba el transporte especialmente los ferrocarriles, como una manera de confirmar la dirección general del mercado. Con el uso de estos promedios, uno sería capaz de decir hacia dónde se dirige el mercado, es decir, si los movimientos en los dos índices independientes se “confirmaban” el uno al otro. Si ambos promedios se movían hacia arriba y alcanzaban un nuevo máximo, el mercado de valores se dirigía a un crecimiento. Por otro lado si ambos índices alcanzaban un nuevo mínimo, entonces el mercado se dirigía hacia una depreciación. Este análisis solo tenía un conceso cuando ambos índices bursátiles apuntaban en la misma dirección.

El razonamiento detrás de este análisis tiene fundamento en que la industria de los ferrocarriles depende y es función de los bienes que transportan, es decir, ambas forman un mutualismo. En otras palabras, los industriales no podían prosperar sin aumentar el negocio de los ferrocarriles, y los ferrocarriles no podrían aumentar sus rendimientos, a menos que tengan pedidos de envío de los fabricantes industriales.

Hoy en día, los estrechos vínculos entre los índices de ferrocarril / transporte e industrial y se han disipado. El índice industrial Dow incluyen muchas compañías cuyos productos y servicios, en su mayor parte, no necesitan ser enviados (por ejemplo, AT&T, J. P. Morgan, y Walt Disney).

No fue hasta la primavera de 1896 que Dow había desarrollado sus ideas al punto en que elimina por completo los problemas ferroviarios de su promedio general del mercado y creó dos índices promedios separados - los industriales (Dow Jones Industrial Average o DJIA) y los ferrocarriles.

Al principio, los industriales eran un índice dinámico, es decir, tenían un cambio en la composición en base casi mensual. Debido a que el Promedio Industrial Dow Jones se supone que representa el entorno empresarial actual, Charles Dow buscó activamente para incluir las industrias clave de su tiempo -

azúcar, licores, cuero, cordelería, de tabaco, de gas, de plomo, caucho, carbón, hierro y productos eléctricos. Esto está muy lejos de índice de hoy, dominado por las compañías de petróleo, de tecnología, productos farmacéuticos y de entretenimiento.

La única empresa en la lista original de Industriales que ha logrado mantenerse en el tiempo es General Electric - a pesar de que se ha eliminado del índice dos veces (sólo que se aaden de nuevo más tarde). La media original de ferrocarril fue sustituido por el más generalizado promedio del transporte después de añadir un número de compañías de camiones, aéreas en 1970. Estos cambios incluyeron las primeras acciones del Dow en venir del Nasdaq en lugar de sólo a partir de la Nueva York Stock Exchange.

Los editores de los índices Dow Jones supervisar cualquier cambio en la composición de los promedios y ver que se ajusta periódicamente para asegurarse de que los promedios siguen reflejando el actual clima de negocios, así como para compensar las fusiones y quiebra de las acciones del Dow. Esta función se ha mantenido como un compromiso inicial de Charles Dow para asegurar que la mezcla de las empresas en los promedios sigue siendo análoga a un mercado más amplio.

En este momento hay 30 valores que figuran en el Dow Jones de Industriales, 20 en el Dow Jones promedio del transporte, y 15 en el Dow Jones utilidad media (primera presentación de informes en 1929). El promedio industrial Dow Jones comenzó con sólo 12 acciones en 1886 y creció a su actual 30 de turnos en dos grandes saltos: en 1916 la media se amplió de 12 a 20 acciones; y, en 1928, se hizo el movimiento final de 20 a 30 acciones.

La durabilidad del Dow, se encuentra en la selección de las empresas que componen el índice industrial. Aunque en ocasiones está sujeto a crítica ocasional, colectivamente, las 30 acciones de las empresas industriales que componen al Dow representan cada sector importante en el mercado de valores (excepto el transporte y los servicios públicos), y responden a cada factor importante en la economía.

A lo largo de su historia el índice ha obtenido un crecimiento que consistentemente ha superado los rendimientos que se obtienen en inversiones en certificados de depósitos y en bonos de Corporaciones o del Gobierno de EE.UU, su promedio de crecimiento anual a través de su historia ha sido de un 12% a 13%; y su máxima revalorización y caída ha oscilado entre una ganancia máxima de 38% y una caída máxima de 28%, las variaciones en el índice son relativamente bajas, siendo generalmente inferiores al 1% de su valor, aunque en estos últimos diez años se han presentados graves caídas y leves recuperaciones con respecto a estas, y la mayor alza en términos porcentuales en un solo día se dio el 6 de octubre de 1931 cuando el Dow Jones subió un 14.87%. Los Indices Dow Jones desarrollan, mantienen y licencian índices de mercado para usarlos como

patrones comparativos y como base para productos de inversión; Entre sus más de 3,000 índices figuran los mejores indicadores de las bolsas mundiales; El Dow Jones Industrial, y los índices europeos son suministradores de datos fiables, independientes y transparentes; De los índices Dow Jones penden una serie de productos financieros en todos los mercados internacionales, incluyendo fondos de intercambio cambiario, contratos de futuros y opciones, mutualidades, fondos de pensiones en renta variable y productos estructurados tales como opciones OTC6 , deuda privada y pública.

3.4. Metodología del cálculo del Dow Jones

Los índices mantienen premisas de claridad, metodología sistemática y transparencia común para todos los integrantes de los índices Dow Jones, esta metodología, juntos con los datos históricos está abierta para ser examinada y disponible sin costo alguno para toda la comunidad de profesionales de mercado; Las cotizaciones de los diferentes índices son difundidas en tiempo real por varias vías y los cierres diariamente en el Wall Street Journal tanto en EE.UU como en Europa; Los índices Dow Jones son propiedad de la compañía Dow Jones el cual publica el Wall Street Journal y sus diferentes versiones internacionales e interactivas.

Es un índice sin ponderación: todas las acciones tienen el mismo peso en la cartera; El índice más significativo es el Dow Jones Industrial Average, se calcula considerando la variación promedio de los precios de las acciones que componen la cartera.

$$DJIA = \frac{\sum P_x}{Divisor} \text{ donde } P_x \text{ son los precios de cada empresa.} \quad (3.7)$$

No tiene en cuenta la capitalización bursátil de sus valores, por lo que no da más peso a la evolución de un título que a la de otro, es un índice diversificado, que representa a todos los sectores y sus empresas más distintivas.

El cambio en la cartera del índice, tanto en número y en acciones es subjetivo, desde 1986 empezó a calcularse a partir de la suma de las cotizaciones de los valores que lo componen, dividido entre el número de valores, ahora, el divisor se ajusta teniendo en cuenta la división del nominal, y el divisor no siempre es igual al número de empresas integrantes de la cartera; El divisor del Dow Jones se ajusta periódicamente a fin de reflejar el fraccionamiento o división de las acciones.

“Supongamos que los precios de las 30 acciones sumadas a \$ 3,000. A continuación, el precio medio de 30 acciones serían \$ 3.000 dividido por 30, o 100.00.

Si una de las treinta acciones se cotizó a \$ 200, pero luego se separan en dos, tenemos que su precio se redujo a \$ 100, la suma de los precios sería de sólo \$ 2,900. para mantener la media en su nivel real de 100.00, el divisor de la media se altera de forma sistemática. Desde \$ 2900 dividido por 100.00 es igual a 29, el nuevo divisor se establece en 29, por debajo de 30, en efecto, preservar el precio promedio de \$ 100 (\$ 2.900 dividido por 29 todavía es igual a 100.00)".

Dow Jones actualmente ajusta el divisor si algún evento afecta el promedio industrial Dow Jones en 5 puntos o más. La división de empresas no es el único factor que afecta el Dow Jones Industrial Average, de hecho, los dividendos de acciones tienen un efecto también.

Capítulo 4

Metodología y resultados

4.1. Metodología

Hasta el momento se ha tratado con la descripción teórica de la serie de tiempo que se estudiará, también se ha propuesto como base de su estudio la construcción relacionada con el Teorema de Takens. Es decir, con estas herramientas se propuso estudiar al sistema con la reconstrucción del espacio fase por el método de inmersiones.

Para analizar la dinámica de la serie de tiempo del Dow Jones Industrial Average se recreó la dinámica subyacente en una simulación computacional. Los cálculos que se realizaron se hicieron para las series históricas de los precios de las 30 empresas que componen el DJIA, el DJIA compuesto; y para cada uno de estos se tomaron en una primera etapa los cuatro precios distintos: apertura, alto, bajo y cierre. Estos son los reflejos correspondientes al día en cuestión. En una segunda etapa sólo se consideraron los precios de apertura y de cierre, como se explicará más adelante.

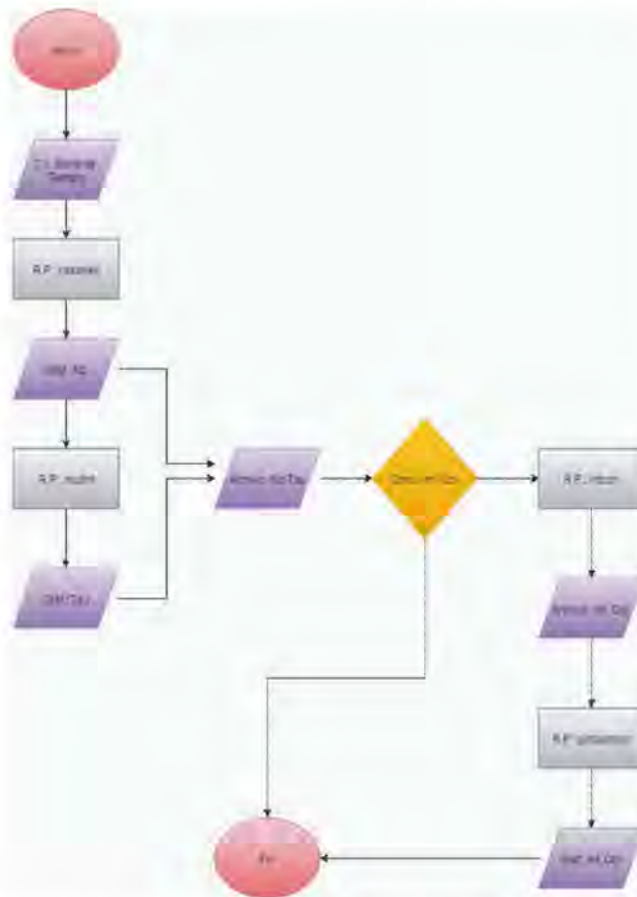
Ahora pasaremos a describir el código computacional de simulación que se decidió diseñar. Al utilizarlo se pudo empezar a obtener resultados y proceder su análisis. Se realizó la siguiente división de códigos, las divisiones fueron las siguientes:

1. Cálculo del número de particiones, por la metodología propuesta por Ris-
sanen.
2. Cálculo la función de información mutua, por la metodología propuesta
por Cellucci et al.
3. Calculo de las integrales de correlación.
4. Gráfica de las integrales de correlación.

5. Reconstrucción de las trayectorias de soluciones, espacio fase.

Todos los códigos se elaboraron en el Script de Matlab, ya que este programa es bastante robusto para cálculos numéricos complejos. A su vez tiene las herramientas necesarias para realizar análisis gráfico, también ayuda que la interfaz gráfica es interactiva con un GUI sofisticada lo cual genera un ambiente poco denso. En el Anexo 3.1 se puede observar los Scripts de todos los códigos que se usaron.

A continuación se muestra un diagrama de flujo considerando cada uno de los códigos que se utilizaron, como una representación esquemática del procedimiento utilizado, puntuando cronológicamente en qué etapa se utilizó cada uno, acompañado de una breve explicación.



A continuación se hará una descripción más completa de cada uno de los procesos que se llevaron a cabo. Cabe destacar que se está representando el

flujo de trabajo por el cual se obtuvieron resultados, más no es un diagrama de flujo de un solo código:

- *Inicio*: Se inicia el proceso del análisis de datos. El proceso se llevó a cabo para cada una de las 30 empresas y el DJIA, por separado, es decir, no es un proceso automatizado.
- *C.I. Serie de Tiempo*: Se tomaron como condiciones iniciales cada una de las series de tiempo de las 30 empresas que componen el Dow Jones y también se consideró la serie de tiempo del Dow Jones Industrial Average. Es decir, se tomaron las series de tiempo de los cuatro distintos precios apertura, cierre, alto y bajo por cada empresa.
- *R.P. rissanen*: Es la rutina principal del código de **rissanen.m**. Con las C.I. Serie de Tiempo, se calculó la función complejidad por el método propuesto por Rissanen, esto es utilizar el argumento de la mínima longitud de descripción para determinar el valor óptimo del número de elementos para usar en un histograma, es decir, el valor m_{opt} que minimiza la función de complejidad.

El intervalo a calcular para el tamaño de las particiones es de 10 a 800:

$$n_{min} = 10$$

$$n_{max} = 800$$

Esto para tener un intervalo amplio y no tener dificultad para encontrar el mínimo de la función.

- *Gráf Nb*: Una vez que el programa calculó la función de complejidad contra m ; este plasmó los cálculos en un gráfico y manualmente se buscó el mínimo de la función.
- *R.P mutinf*: Como condiciones iniciales se tomaron el número de particiones óptimo en los histogramas y las series de tiempo correspondiente a cada empresa, que anteriormente se calculó. En esta rutina principal se calculó la función de información mutua para poder determinar el tiempo de retraso o “lag” indicado para evitar correlaciones en la información tanto fuerte como débil.
- *Gráf Tau*: Aquí el código **mutinf.m** graficó la función de información mutua contra “lag” y a partir de aquí criterio que se utilizó para la selección de τ fue encontrar el primer mínimo de la función de información mutua.
- *Archivo*: En esta etapa del proceso se vació manualmente en una hoja de cálculo la información previamente obtenida del número de particiones y el tiempo de retraso para cada empresa.

- *Cond. Int. Cor.:* Este condicional hace referencia al momento donde en que se filtraron los distintos precios, es decir, cuando se empezó a trabajar solo en el análisis de los precios de apertura y de cierre. Es un proceso completamente manual pero necesario para poder enfocarnos solo en el argumento original del presente presente que se refiere a la dinámica de los precios de apertura y cierre. Por lo que este punto marca el final en el análisis para los precios más bajos y más altos intradía.
- *R.P. intcorr:* Rutina principal referente al cálculo de la integral de correlación. En este código se utiliza la función **phasespace.m** la cual reconstruye el espacio fase . Se toman como condiciones iniciales el tiempo retraso previamente calculado y las series de apertura y cierre. Se utiliza la norma euclidiana:

$$d(i_1, i_2) = |Y(i_1, :) - Y(i_2, :)|$$

Las integrales de correlación a calcular van desde dimensión 2 hasta dimensión 12:

$$dim = 2 : 13$$

- *Archivo Int. Cor.:* Es el archivo generado de la salida del código **intcorr.m**, el cual contiene las integrales de correlación para las dimensiones desde $n = 2$ hasta $n = 13$. También contiene los valores de r . Donde se definió de manera creciente como:

$$r = (\text{máx}(dat) - \text{mín}(dat)) ./ 10 * (1 : 150)' / 25$$

- *R.P. pintaintcorr:* Rutina principal que utiliza los valores de las integrales de correlación para distintas dimensiones y las grafica; donde el criterio para obtener la dimensión correcta fue aumentar la dimensión hasta que no se observaron cambios en el comportamiento. Es decir, encontrar la primera dimensión creciente con estabilidad en el comportamiento de las gráficas.
- *Gráf. Int. Cor.:* Salida del código **pintaintcorr.m**, generó los gráficos de las integrales de correlación para poder determinar la dimensión de inmersión.
- *Fin:* Finalización del flujo relizado de acuerdo a la metodología propuesta. En algunos casos se prosigió a la reconstrucción del atractor de algunas series con sus primeras tres coordenadas.

En resumen, de la simulación computacional antes mencionada; se obtuvieron el número de histogramas conveniente para el cálculo de las probabilidades, el cálculo de la función de información mutua, las integrales de correlación para distintas dimensiones y la reconstrucción del espacio fase; esta información se

obtuvo para las 30 empresas que componen el Dow Jones Industrial Average y para dicho índice bursátil.

Los cálculos para el índice Dow Jones Industrial Average de la simulación se hicieron en el periodo de Octubre de 1928 a Agosto de 2011, esto en el caso ideal. Los precios diarios que se analizaron fueron:

1. Apertura
2. Cierre
3. Bajo
4. Alto

Cabe mencionar que para cada una de las distintas empresas que componen el DJIA varía el tiempo en el que se realizó la simulación computacional, ya que como se mencionó brevemente en la sección 2.3 referente a la historia del Dow Jones Industrial Average hubo cambios en la empresas que lo incorporan, también el tiempo en el que se fueron añadiendo es factor para la discrepancia en el tiempo de análisis.

4.2. Resultados

En este capítulo se muestran los resultados que se obtuvieron de la simulación computacional realizada con los códigos y el diagrama de flujo que se mencionaron en la presente sección. En cuanto a las condiciones iniciales o entradas variaron por cada código pero en todos se utilizó la serie de tiempo correspondiente de los precios. Con esto, se hará una descripción de la dinámica subyacente del sistema caótico determinista, basándonos en las cantidades invariantes. En este capítulo se presentan tanto resultados numéricos como los gráficos que nos ayudaron a encontrarlos, así como también la reconstrucción de los atractores (algunos). No está por demás recordar que las series de los precios son intradía, es decir, cada día de la serie de tiempo es el valor que le corresponde por día y se avanza por día cada vez que registraron los precios excepto en días feriados y no laborales de los mercados financieros.

4.3. Dow Jones

La primera serie de tiempo que se analizó fue la DJIA, los datos obtenidos se muestran en la Tabla siguiente:

En esta Tabla se muestra el número de particiones y el tiempo de retraso que de acuerdo con los criterios mencionados con anterioridad se consideran

Empresa	Open		High		Low		Close	
	Nb	τ	Nb	τ	Nb	τ	Nb	τ
DJ	279	53	279	71	276	95	279	59

óptimos, que se tomaran como condiciones iniciales para cálculos posteriores y se clasifica para los precios antes mencionados. Las gráficas que ayudaron a identificar y obtener los valores óptimos son las siguientes:

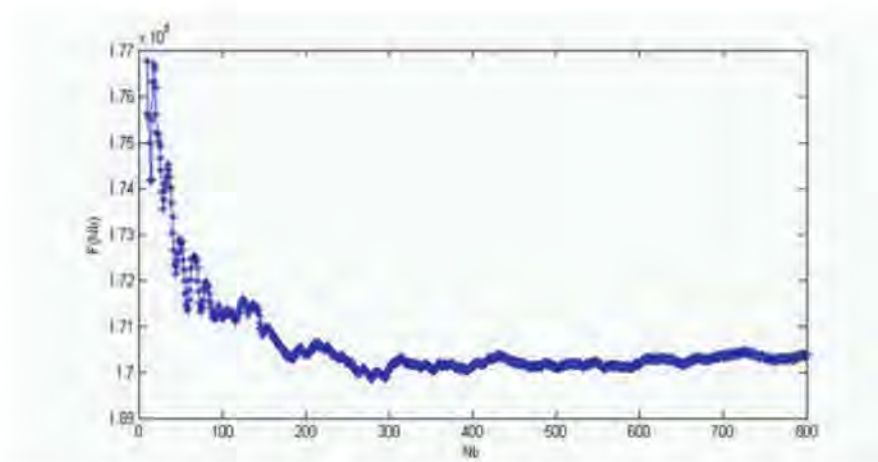


Figura 4.1: En esta figura se observa el comportamiento de los precios de apertura u open de la función de complejidad, el número de particiones óptimo es cuando esta función se minimiza, por lo que encontrando el mínimo se observa que se encuentra en $Nb = 279$. Lo que nos dice que dado el principio descripción mínima el tamaño óptimo de histogramas uniformes para esta serie de tiempo en particular es de 279.

Continuando con el análisis y utilizando como condiciones iniciales para la rutina la serie de tiempo open del DJ y el tamaño óptimo de la partición uniforme de los histogramas podemos observar en la figura 4.4 el gráfico de la función de información mutua, donde el primer mínimo que encontramos se encuentra en el tiempo 53, es decir como $d = 59$ entonces $\tau = 59$. El cual lo consideramos como la distancia en la que la función de información mutua es cero.

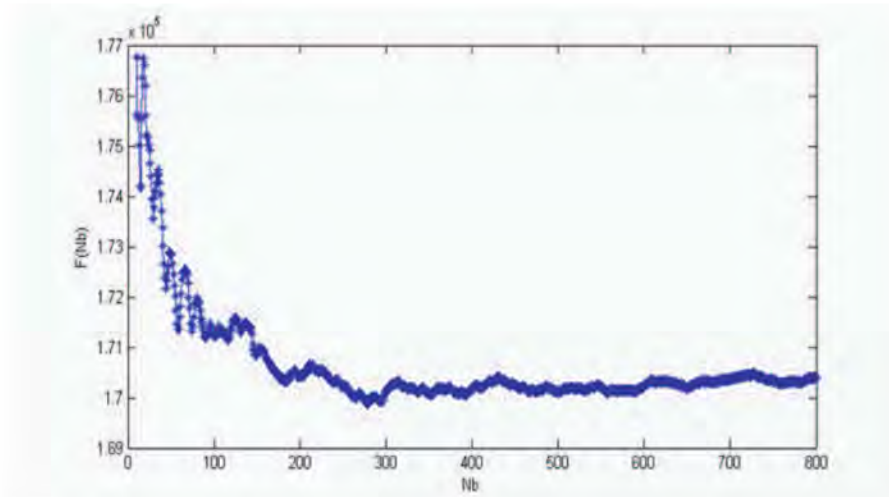


Figura 4.2: En esta figura podemos observar el mismo cálculo de la función de complejidad pero ahora para los precios de cierre o close.²

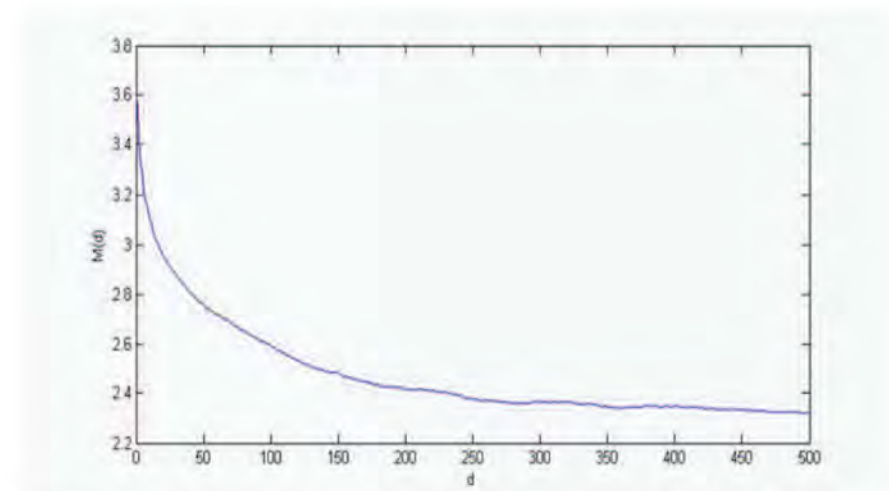


Figura 4.3: En esta figura podemos observar el cálculo de la función de información mutua para los precios de apertura u open.

²Para determinar con mayor precisión los mínimos que presentaron cada gráfico, se utilizó la herramienta zoom del software Matlab.

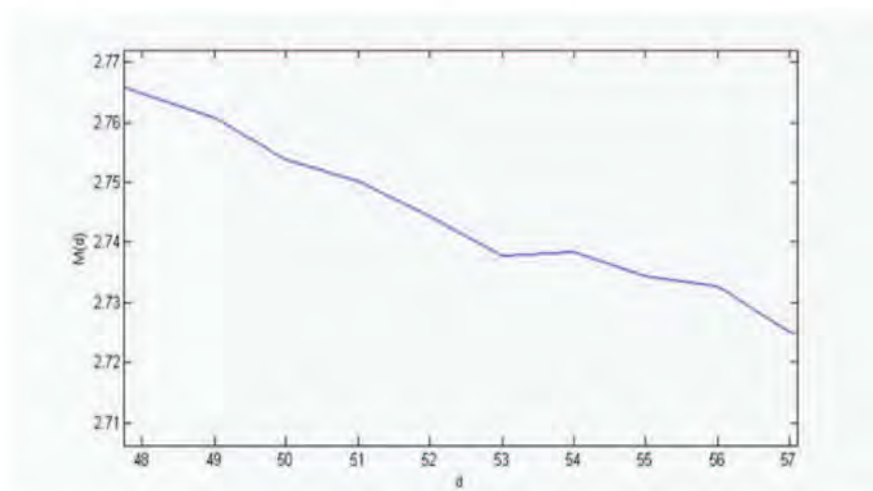


Figura 4.4: En esta figura podemos observar un acercamiento de la figura 4.3, esto para encontrar el primer mínimo de la serie de precios de apertura.

Los siguientes gráficos representan de igual manera los gráficos de la función de información mutua pero para los precios de cierre o close.

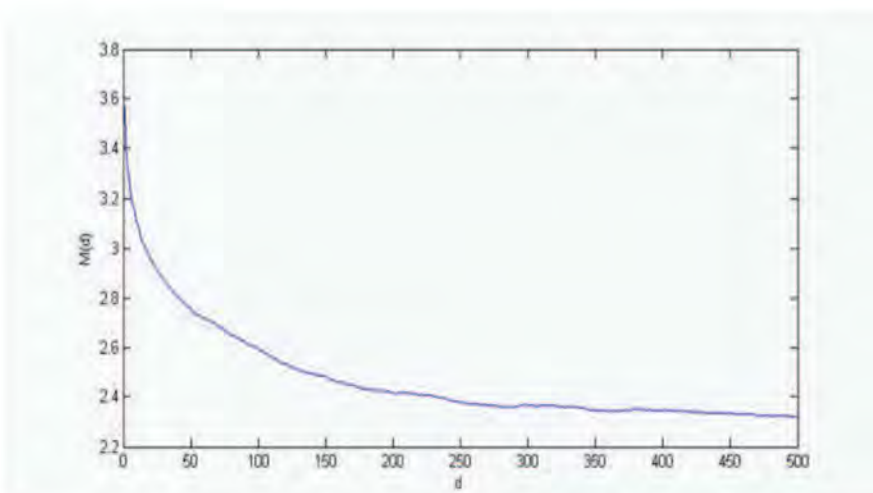


Figura 4.5: En esta figura podemos observar el cálculo de la función de información mutua para los precios de cierre o close.

Donde podemos observar que el primer mínimo se encuentra en $d = 59$. Por lo que el tiempo de retraso corresponde a $\tau = 59$.

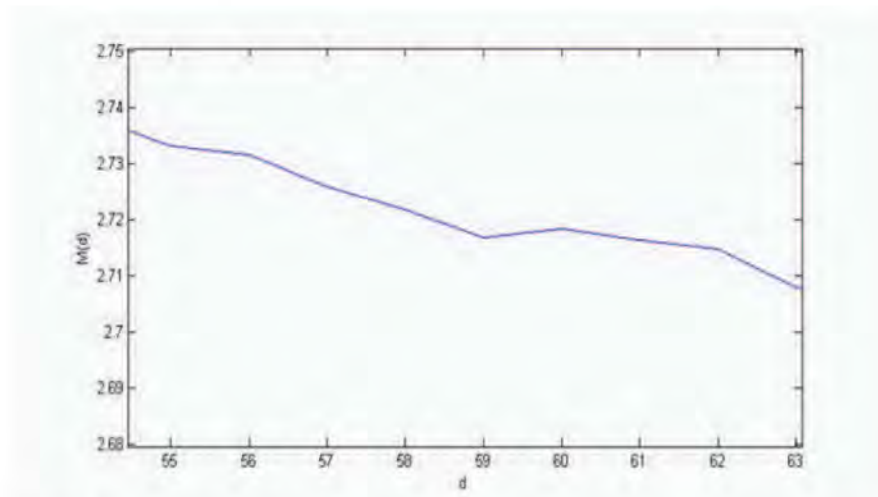


Figura 4.6: En esta figura podemos observar un acercamiento de la figura 4.5 que es la figura anterior, esto para encontrar el primer mínimo de la serie de precios de cierre close

Para los precios más altos o high y más bajos o low, se realizó el mismo procedimiento y obtuvimos las figuras correspondientes. Las cuales seguirán el orden que hasta ahora hemos propuesto: 1) función de complejidad, 2) información mutua. Primero para los precios high y en consecutivo para los precios low.

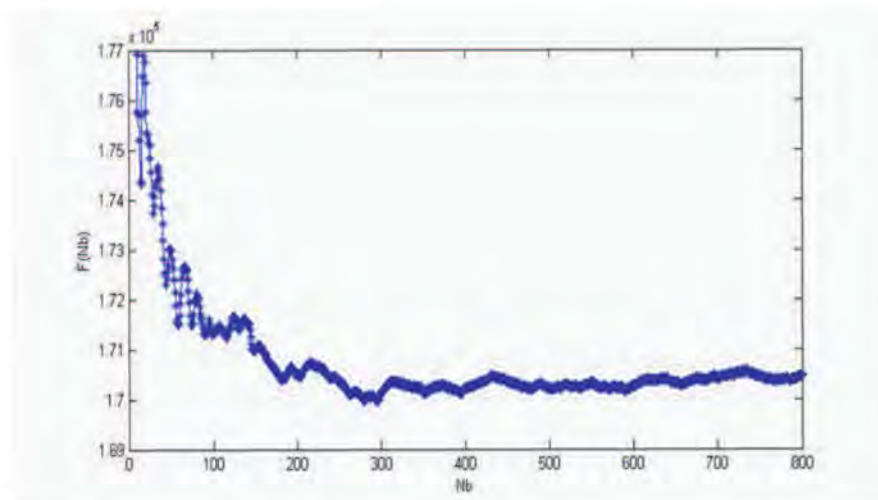


Figura 4.7: Figura de la función de complejidad para la función de complejidad de los precios más altos intradía.

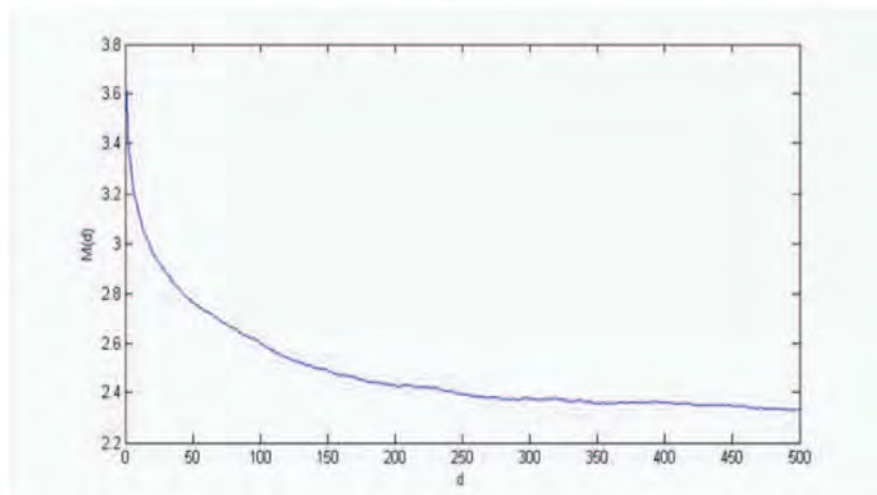


Figura 4.8: Figura de la función de información mutua de los precios más altos intradía.

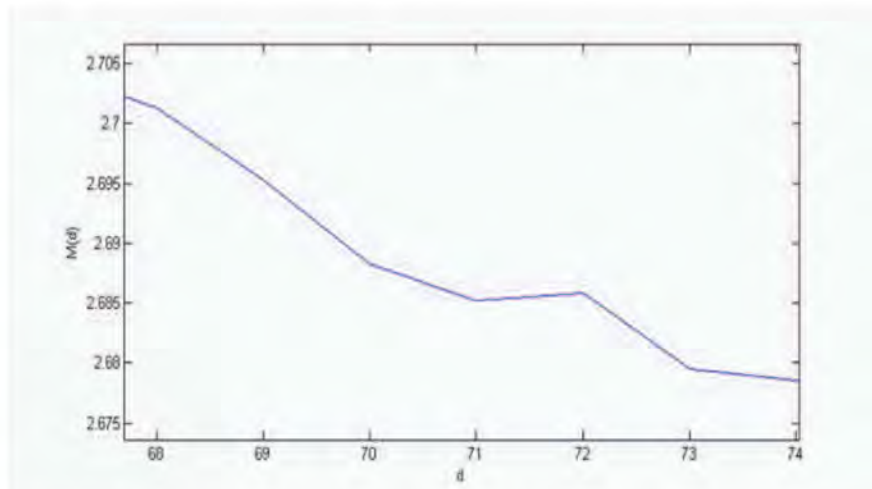


Figura 4.9: Figura de acercamiento de la figura anterior 4.8 para poder encontrar el primer mínimo de la función de complejidad de los precios más altos intradía.

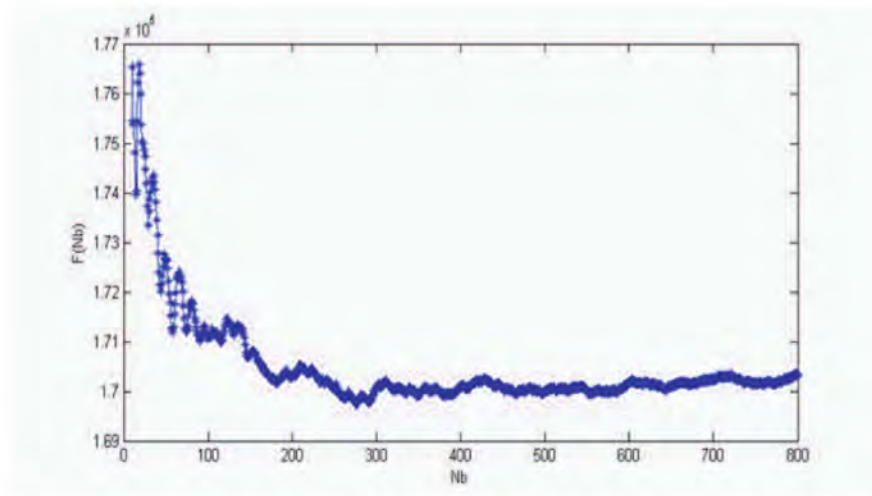


Figura 4.10: Figura de la función de complejidad de los precios más bajos intradía.

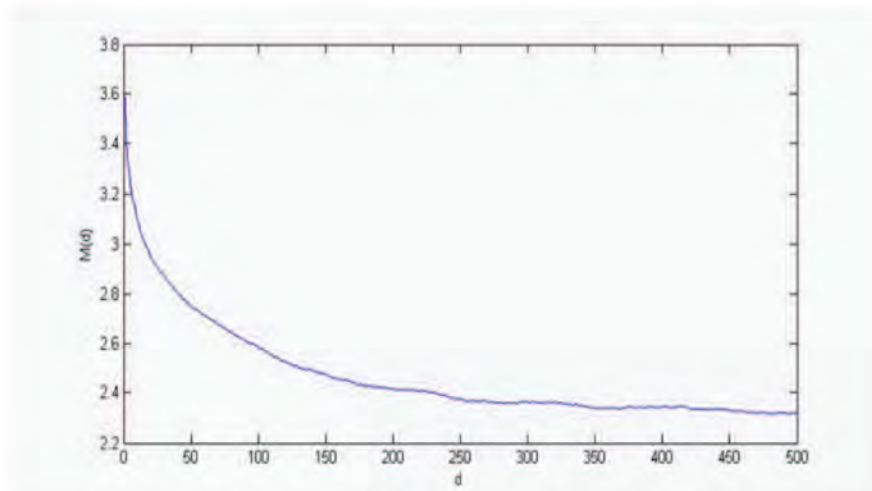


Figura 4.11: Figura de la función de información mutua de los precios más bajos intradía.

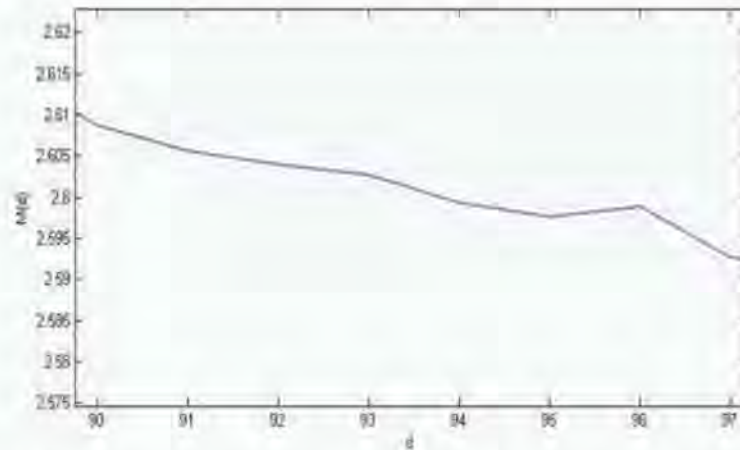


Figura 4.12: Figura de acercamiento de la figura 4.10 para poder encontrar el primer mínimo de la función de complejidad de los precios más altos intradía.

Hasta este punto como se hizo explícito en el diagrama de flujo, se realizaron todos los cálculos y gráficos para todas las series de tiempo de los distintos precios. A partir de este momento se filtraron las series de tiempo de los precios para solo seguir utilizando los precios de apertura y de cierre.

4.4. Empresas desglosadas del Dow Jones

Empezaremos como en la sección anterior, por presentar ejemplos reales de nuestro análisis en cómo se fue trabajando con cada una de las empresas, para las cuales se obtuvieron los resultados a través de gráficas que se obtuvieron tras calcular la función de complejidad, información mutua, integral de correlación. Se hará hincapié en las dificultades que se presentaron durante el desarrollo de la metodología. Al término de estas ejemplificaciones se continuará a presentar las tablas de resultados de todas las empresas que integran el índice bursátil Dow Jones.

4.4.1. Ejemplificación American Express

A continuación se empezará por mostrar el ejemplo de la empresa American Express que se considera relevante para el análisis de la presente tesis, los gráficos de la función de complejidad, información mutua, las integrales de correlación para distintas dimensiones y por último la reconstrucción del atractor.

Como ya se mencionó una de las empresas que utilizaremos de ejemplo, para explicar puntualmente la metodología, complicaciones que pudieron surgir y análisis que se aplicó a cada una de las empresas que componen el DJ será American Express, la siguiente gráfica corresponde a la función de complejidad cual se graficó para un intervalo de tamaños de histogramas desde 10 hasta 800.

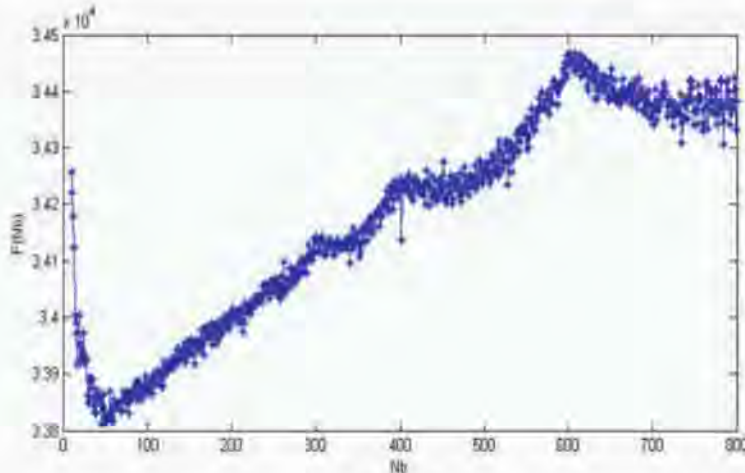


Figura 4.13: Función de complejidad para el precio de apertura de American Express.

Para poder determinar el mínimo se analizó la gráfica anterior donde el mínimo global de la función es el tamaño óptimo de elementos que componen un histograma³. Estos histogramas fueron traducidos como aproximación para el cálculo de probabilidades individuales y conjuntas de la función de información mutua; se utilizó el trabajo basado en Rissanen [17] el cual calcula la función de complejidad estocástica basada en este mismo principio, que es justo lo que podemos observar en la Figura 4.13. El mínimo que buscamos es el mínimo de la función más significativo, es decir, el mínimo global más significativo⁴. El mínimo global que encontramos en particular para esta serie de tiempo que corresponde al precio de apertura (precio open), se encuentra en $Nb = 46$. A diferencia que en la función de complejidad para el índice bursátil Dow Jones donde el mínimo global no es del todo evidente 4.1, en este ejemplo y en todas las empresas componentes de este índice podemos encontrar que presentan una función de complejidad "bien" definida donde se puede observar claramente el mínimo global de la función, ya que la naturaleza de las gráficas de las compo-

³Este tamaño óptimo está basado en el principio del tamaño de descripción mínima o en inglés Minimum Description Length (MDL).

⁴Lo que queremos decir, con el "mínimo global más significativo", es que, buscamos encontrar el mínimo de la función total, sin que este sea un mínimo por discrepancia en los cálculos. Más adelante se clarifica este punto.

nentes del índice en su mayoría caen muy rápidamente, mientras que en breve vuelven a crecer.

En las siguientes figuras podemos ver el comportamiento de los gráficos de la función de complejidad para la series de tiempo de los precios de cierre, los precios más altos y los más bajos respectivamente (close, high, low). Donde los mínimos de estas tres funciones los podemos encontrar en $Nb = 46$, $Nb = 58$ y $Nb = 48$.

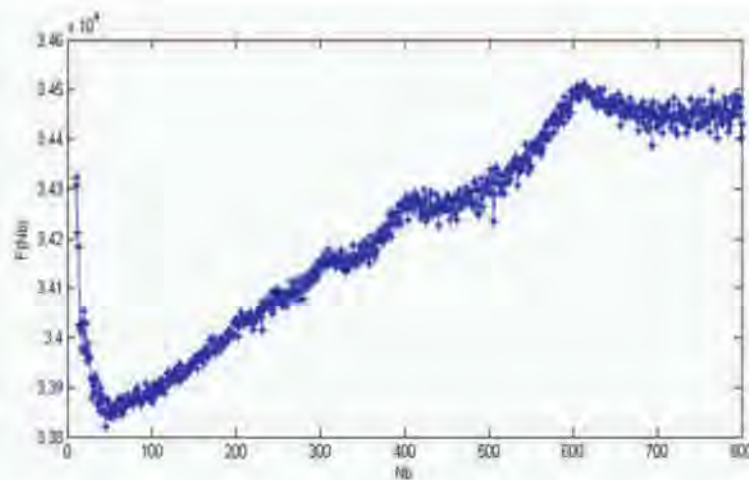


Figura 4.14: Función de complejidad para el precio de cierre de American Express.

El siguiente paso fue determinar el primer mínimo de la función de información mutua, esto para, como ya se ha mencionado en diversas ocasiones considerándolo como un criterio para elegir el tiempo de decorrelación de un sistema sin importar que se trate de un sistema no lineal; por lo que elegimos una generalización de la correlación lineal a sistemas no lineales: *la información mutua*. Esto es posible ya que el paso anterior nos ayudará (histogramas) a poder calcular las distribuciones de probabilidad aproximadas por el óptimo en particiones. Para la elección del tiempo de decorrelación se usó el siguiente criterio: 1) Sabemos que la función de información mutua tiene una máxima incertidumbre o decorrelación máxima cuando esta vale cero, 2) Cae a cero para retrasos grandes. Por lo que se determina que el retraso óptimo es un punto intermedio; un punto donde se alcanza cierta independencia estadística, pero que permite construir una base. Entonces este punto lo tomamos como el primer mínimo de la función de información mutua.

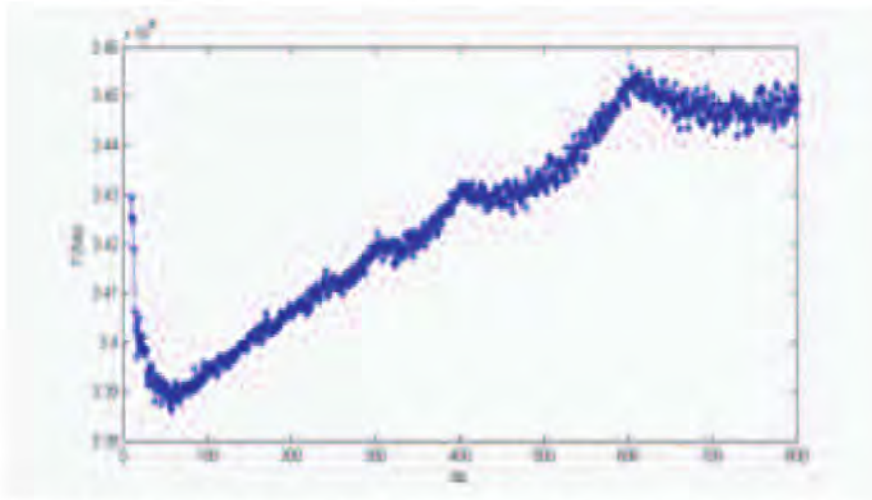


Figura 4.15: Función de complejidad para la serie de precios más altos intradía de American Express.

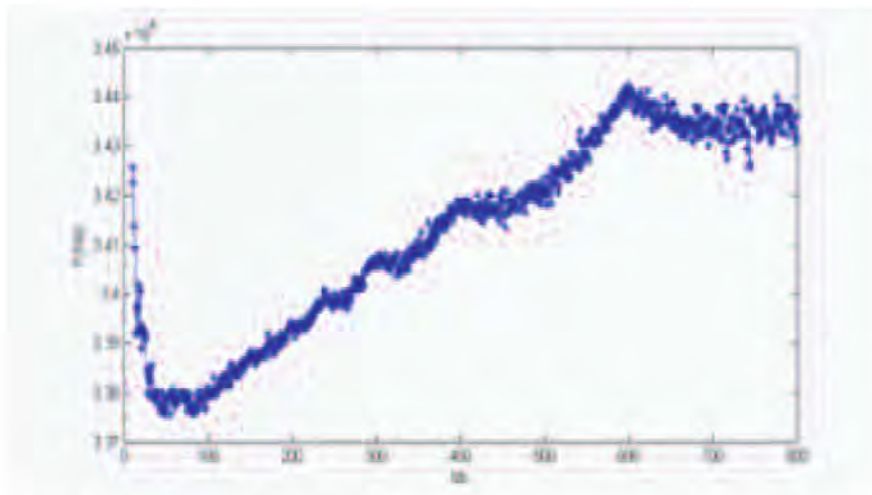


Figura 4.16: Función de complejidad para la serie de precios más bajos intradía de American Express.

Continuando con nuestro ejemplo en particular de American Express aparecerán las gráficas referentes para la función de información mutua para las distintas series de tiempo. En las primeras dos figuras se ejemplificara con la serie de tiempo de los precios open donde el primer mínimo se encontró en $Nb = 56$.

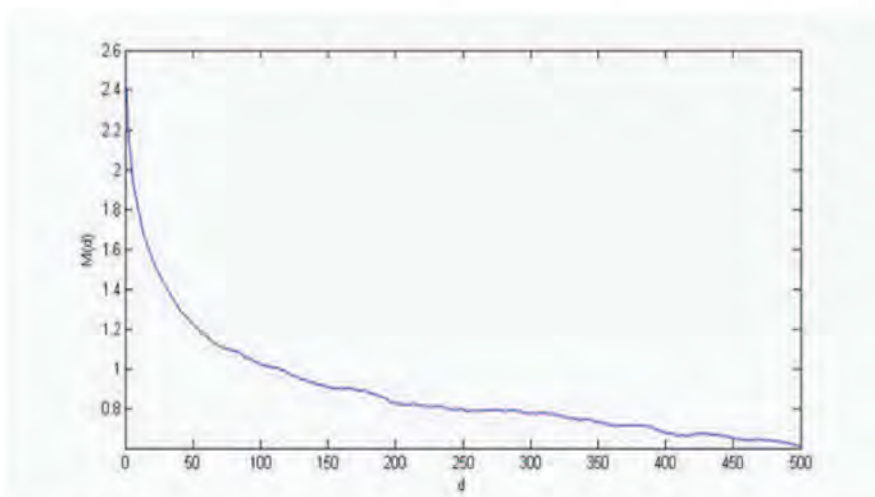


Figura 4.17: Función de complejidad para el precio de apertura de American Express.

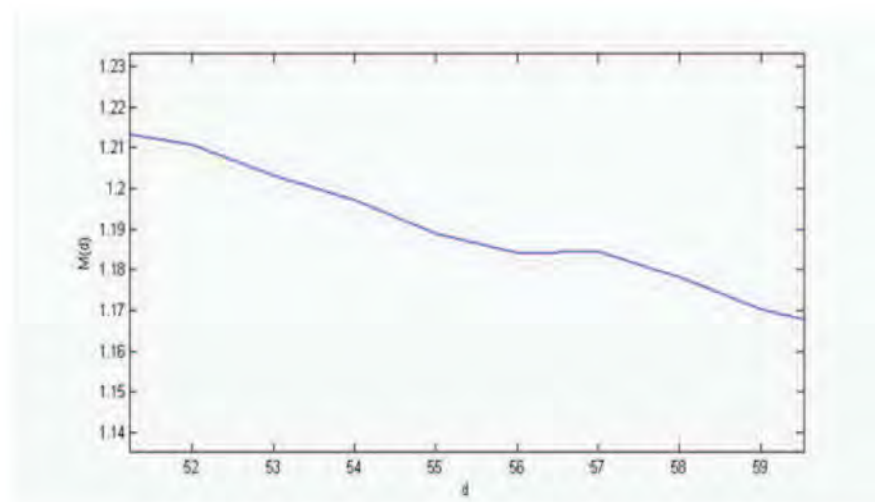


Figura 4.18: Figura de acercamiento de la figura 4.17.

Como podemos observar en las gráficas la función de información mutua tiene un comportamiento decreciente y con caída muy suave, por lo que los mínimos tuvieron que ser buscados cuidadosamente. Proseguiremos poniendo los mismos ejemplos para la serie de precios close, high y low; que tienen sus primeros mínimos en $Nb = 34$, $Nb = 54$ y $Nb = 51$ respectivamente.

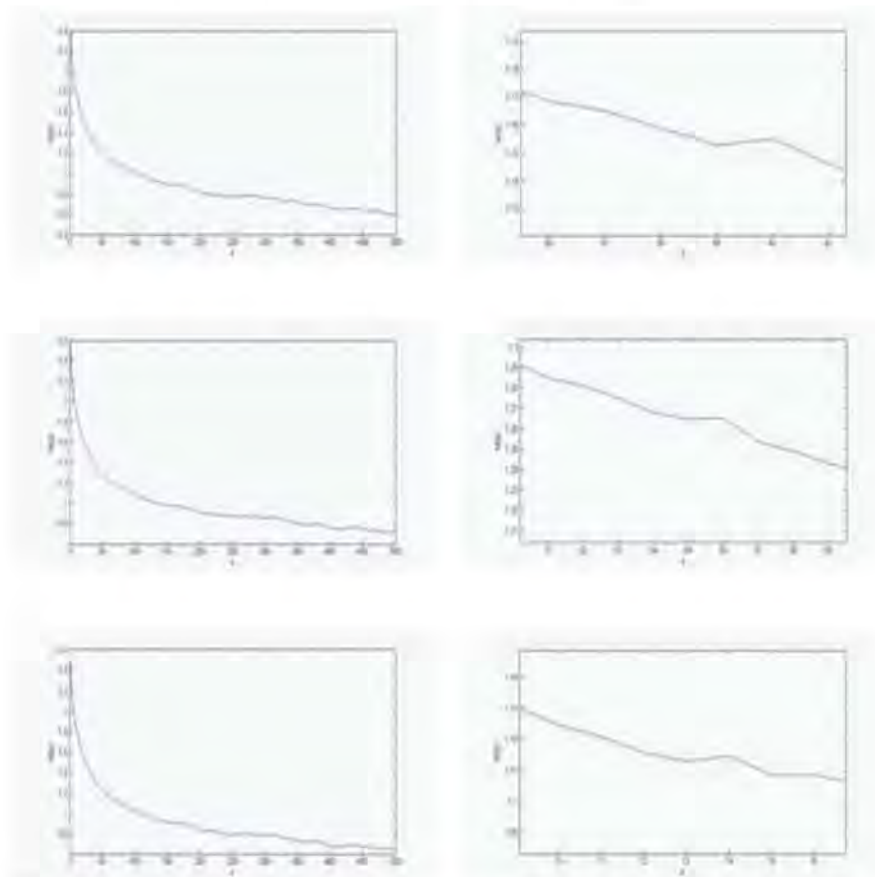


Figura 4.19: Las figuras a) b) c) d) e) y f) representan el cálculo de la función de información mutua para la empresa American Express en su series de precios de cierre correspondiente a a) y b), más alto correspondiente a c) y d) y por último más bajo correspondiente a e) y f).

Con estos datos obtenidos se puede calcular y determinar la dimensión fractal para varias dimensiones de inmersión, por lo que se prosiguió a utilizar un criterio para seleccionar esta dimensión. El criterio utilizado fue el siguiente: cuando la integral de correlación obtenida para distintas dimensiones de inmersión se estabilizara, se habría llegado a la mínima dimensión de inmersión correcta. El algoritmo utilizado es el procedente de Grassberger y Procaccia, cuenta el número de puntos que se encuentran separados por menos que r . La dimensión se estima mediante las gráficas de $\log C(r)$ contra $\log r$. A partir de la curva estabilizada se realizó una regresión sobre la curva, para obtener la dimensión correlación. A continuación se mostrará el cálculo para las dimensiones de inmersión desde $n = 2$ hasta $n = 12$ para la empresa American Express. Cabe recordar que el

análisis de la integral de correlación solo se hizo para las series de precio open y close.

Para los precios open podemos ver que para la dimensión de inmersión es $n = 7$, que es la dimensión de inmersión mínima donde se estabiliza la curva, por lo cual sobre esta dimensión de inmersión se realizó la regresión sobre el valor de la integral de correlación. Donde se puede observar que los valores de R^2 son buenos ya que son cercanos al valor 1, más adelante se podrá observar a detalle estos análisis, ya que se mostrará una gráfica con las distribuciones con los valores de las dimensiones de correlación y otra gráfica que tiene los valores correspondientes a las R^2 .

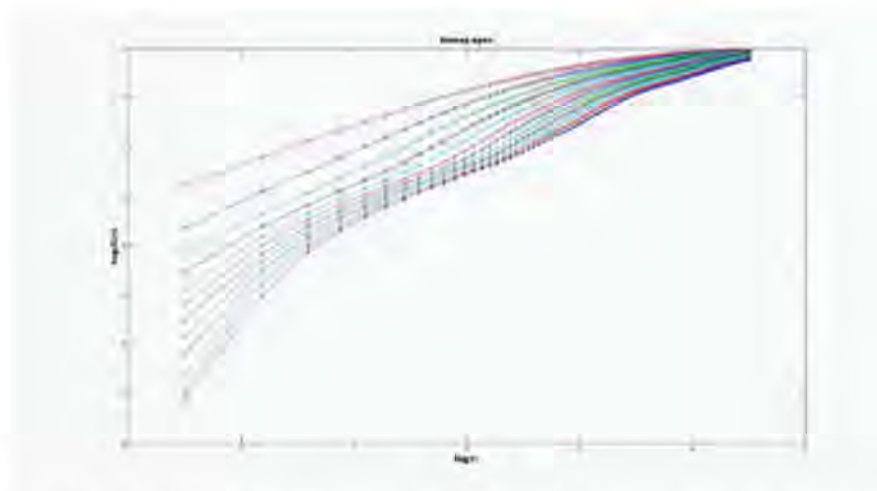


Figura 4.20: Figura de las integrales de correlación para la serie de precio de apertura de American Express.

Por último ponemos el ejemplo de como se ve el atractor reconstruido para American Express en su serie de cierre, aquí podemos observar que aunque se tomaron las primeras tres coordenadas para su reconstrucción el atractor se desdobra sobre el espacio, lo cual es un buen resultado y es un indicador que los cálculos de los parámetros utilizados son buenos.

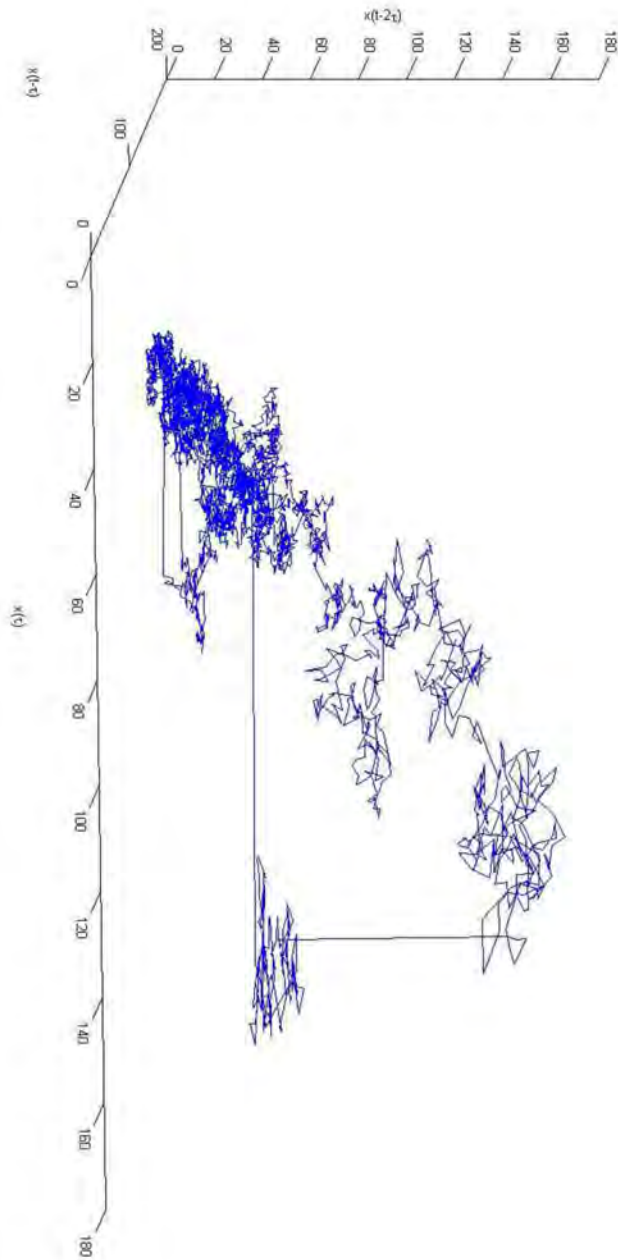


Figura 4.21: Figura del atractor para la serie de precio de cierre de American Express.

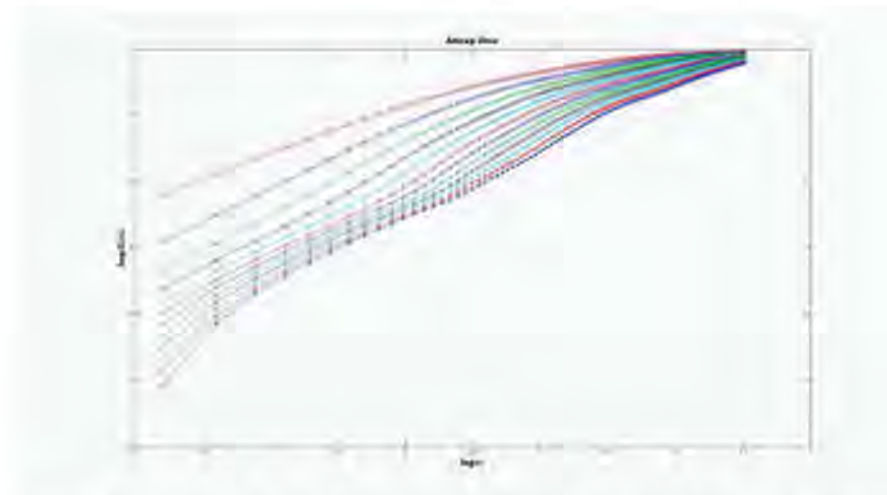


Figura 4.22: Figura de las integrales de correlación para la serie de precios de cierre de American Express.

4.4.2. Ejemplificación Función de Complejidad

Seguiremos con la series de ejemplos, continuando con el ejemplo de Coca Cola. Se considera relevante presentar este ejemplo para la representación gráfica de la función de complejidad ya que Coca Cola es una de las empresas que presenta un comportamiento distinto en la función de complejidad⁵. En general al observar las gráficas de las empresas del cálculo de la función de complejidad, estas presentan en su comportamiento una gran depresión y en seguida presentan una dinámica creciente. La diferencia con empresas como Coca Cola es que la gráfica de la función de complejidad presenta enseguida la depresión y luego crece exponencialmente para después volver a decrecer. Este comportamiento lo podemos observar en la siguiente gráfica 4.22.

En esta gráfica de la función de complejidad para la serie de precios open podemos observar una de las dificultades que encontramos y fue que el mínimo de la función podría no encontrarse dentro del intervalo en el cual calculamos la función, pero esto se puede justificar al recordar lo que dice la teoría respecto al cálculo de los histogramas, lo que dice es que, si consideramos una distribución con un número muy grande de histogramas, entonces la distribución tendrá por cada histograma un número de ocupación muy pequeño de elementos. Entonces procedemos a pensar que para $Nb < 500$ el número de histogramas es muy grande. Por lo que el óptimo lo tomamos en el mínimo más significativo que representa la función de complejidad, esto es en $Nb = 46$.

⁵Otras empresas como Alcoa, Caterpillar, GM también presentan este tipo de comportamiento.

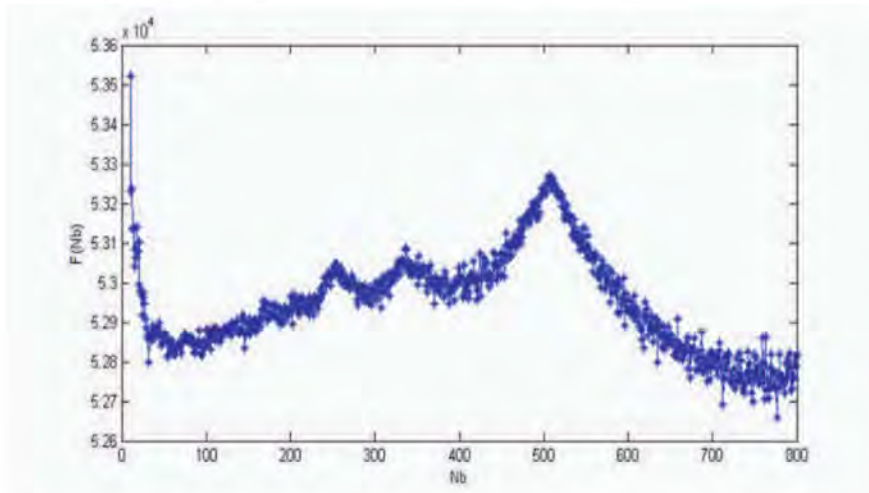


Figura 4.23: Gráfica del cálculo de la función de complejidad estocástica de los precios de apertura para la empresa Coca Cola.

Otro ejemplo relevante que hace evidente las dificultades para poder determinar el mínimo global de la función es en Alcoa y su serie de precios low, la cual podemos apreciar en la siguiente figura.

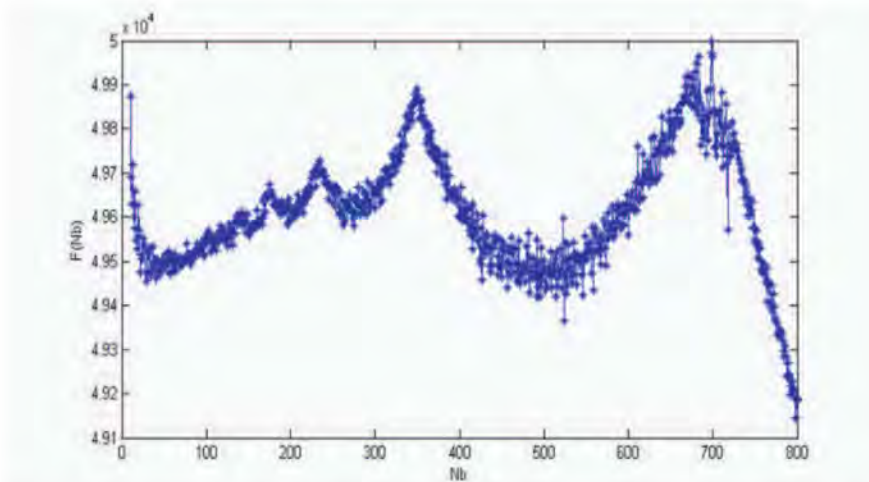


Figura 4.24: Gráfica del cálculo de la función de complejidad estocástica de los precios de más bajos para la empresa Alcoa.

Aquí podemos observar una situación similar a la gráfica 4.13 de American Express. La diferencia es que para la gráfica de Alcoa después de la segunda gran depresión (alrededor de $Nb = 500$) esta vuelve a tener un comportamiento cre-

ciente para después volver a tener una tercera gran depresión. Una explicación a simple vista que intentamos dar, comparando la serie de tiempo de Alcoa con la de American Express, la primera serie de tiempo contiene más mediciones. Ya que va desde 02/01/1962 hasta 28/11/2008 con un número de 11810 elementos o mediciones y para American Express 01/04/1977 hasta 28/11/2008 con un número de 7991 elementos. Por otro lado y utilizando este mismo argumento podemos decir que Alcoa, de cierta manera es una “extensión” en la dinámica que presenta la función de complejidad de American Express. Esto no quiere decir que estas dos series son idénticas o que presentan el mismo comportamiento, pero sí son parecidas en su dinámica para cierto intervalo. Nuestra apuesta es que si pudiéramos calcular la misma serie de tiempo pero para un periodo de tiempo mayor, la gráfica de la función de complejidad volvería a presentar un comportamiento creciente. A este comportamiento le llamaremos comportamiento Tipo I.

Otro comportamiento que se presenta en varias empresas es de una tendencia creciente sin depresiones brutas con excepción de la primera depresión, para después tener un comportamiento creciente. Este tipo de comportamiento lo presentan empresas como AT&T, bkaom, Citi Group, Intel, JP Morgan, Merck, Pfizer, Verizon, WDisney. En la siguiente gráfica podemos observar más claramente el comportamiento. A este tipo de comportamiento le llamaremos del Tipo II.

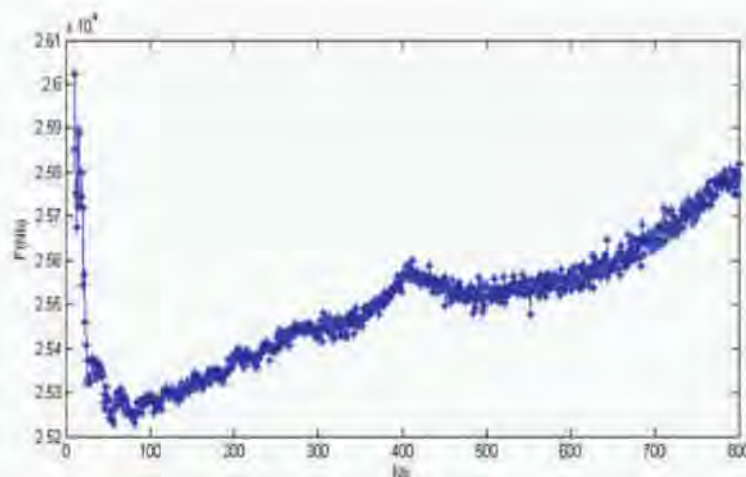


Figura 4.25: Se presenta la función de complejidad para la AT&T y su serie de precios open, donde se puede observar que es un comportamiento con gran tendencia creciente, después de su primer mínimo global.

Continuando con nuestro análisis de nuestros resultados podemos encontrar un último tipo de comportamiento general, al cual corresponde el comportamiento Tipo III. El cual es el comportamiento que más se acerca a un compor-

tamiento lineal y con una pendiente muy pequeña que encontramos en nuestros resultados. Algunas empresas que corresponden a este comportamiento Tipo III son Chevron y Exxon. En la siguiente figura se muestra un ejemplo.

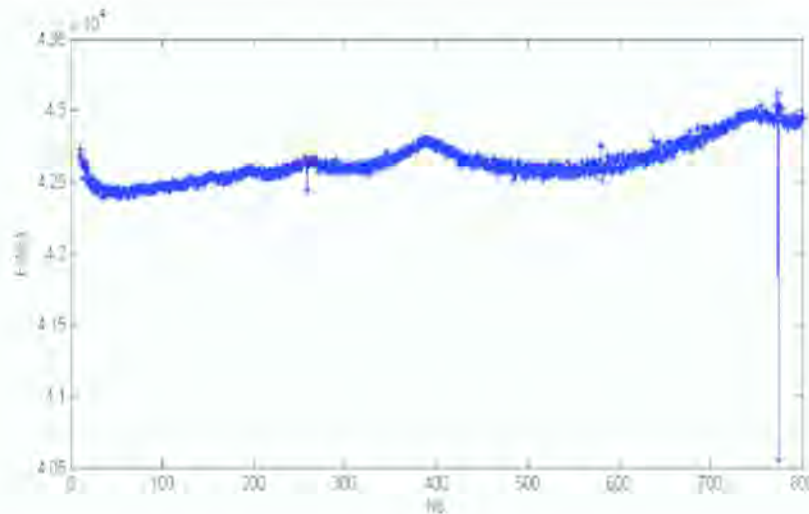


Figura 4.26: Función de complejidad de los precios high para la empresa Chevron.

Estas tres tendencias de comportamientos fueron las que se encontraron que nos permitieron categorizar a las gráficas restantes. Las empresas que no caen dentro de estas tres tendencias Tipo, se consideraron como una modificación de estos. Observado los resultados de la función de complejidad y el número de elementos de cada una de las series, podemos observar que no fue un factor determinante que sirviera para categorizar dentro de los modelos Tipos, ya que no se encontró ninguna relación en particular. Podemos decir que la gráfica de la función de complejidad está completamente determinada por la cantidad de información mínima para poder describir modelos probabilísticos. Por esta razón es que la dinámica de la función de complejidad dependerá únicamente de que tan compleja es la serie de tiempo que representa ese modelo probabilístico en particular. Más adelante mostraremos que el valor de los histogramas óptimos para las distintas series de precios (apertura y cierre) para las distintas empresas se encuentra en el intervalo de $Nb=14$ y $Nb=81$. Y para las series de precios más altos y más bajos el intervalo se encuentra entre $Nb=18$ y $Nb=131$.

Cabe recordar que este trabajo de categorizar por Tipos (I, II, III), solo se utilizó para poder determinar de manera generalizada cuantas categorías de gráficas se obtuvieron. Esta categorización no ayudó a determinar de manera directa las distintas dinámicas de las series tiempo.

4.4.3. Ejemplificación Información Mutua

Recordemos que el criterio para seleccionar un tiempo de retraso adecuado se lo debemos a Abarbanel [10], el cual recuerda en su literatura, que el primer mínimo de la función de autocorrelación es el valor óptimo que se debe tomar para el tiempo de retraso, Fraser y Swinney también proponen ese criterio. Siguiendo este procedimiento Abarbanel lo que propone hacer para sistemas no lineales es calcular la función de información mutua, buscar el primer mínimo de esta y tomarlo como el tiempo de retraso óptimo, ya que esta función calcula el número de bits de una serie que se puede calcular a partir de otra serie distinta.

En cuanto al comportamiento de la función de información mutua podemos observar en casi todos los casos que esta función cae de manera suave, sin tendencias en los mínimos muy pronunciados, por lo que la determinación del primer mínimo se tuvo que hacer bajo una inspección minuciosa. En ejemplos específicos como el de Kraft, podemos observar que no se cumple esta tendencia tan suave y podemos observar una tendencia mucho más variable, como lo podemos ver en las figuras.

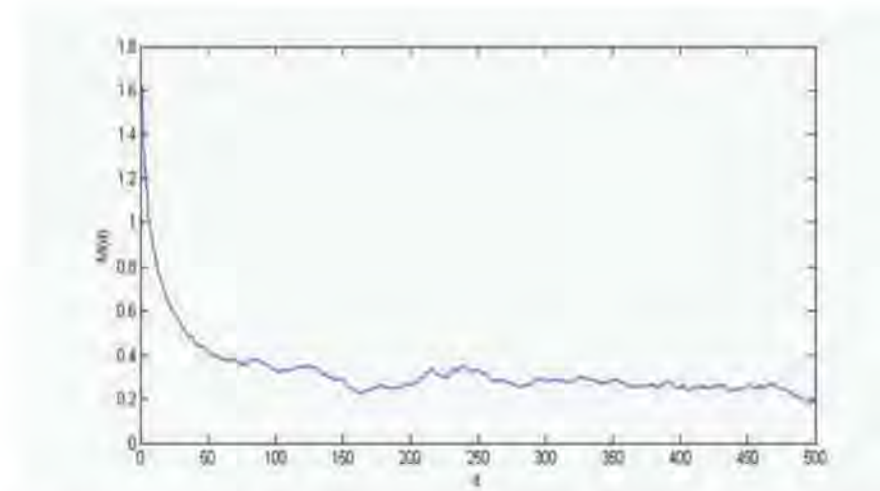


Figura 4.27: Figura que representa a la función de información mutua de la empresa Kraft en su serie de precio de cierre.

Pasaremos a mostrar un resultado que tiene un primer mínimo mucho más suave con una tendencia casi lineal. Como es en el caso de Merck en su serie de precios close. En la figura 4.30 podemos observar la tendencia que lleva la curva. Al hacer un acercamiento para encontrar el primer mínimo podemos observar

que este es sumamente suave y que se encuentra en $d = 62$, esto en la figura 4.28.

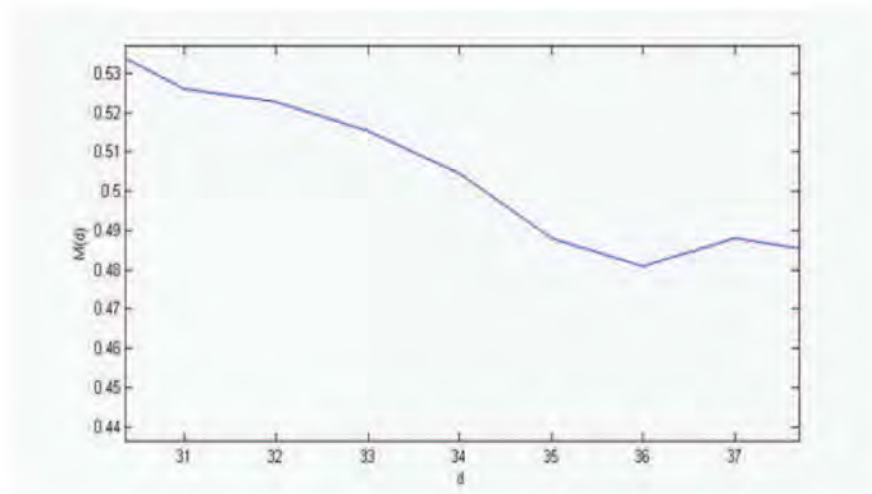


Figura 4.28: Se observa el comportamiento de la función de información mutua que presenta Kraft en su serie de precios close. Se realizó un zoom para poder inspeccionar la gráfica y poder encontrar el primer mínimo.

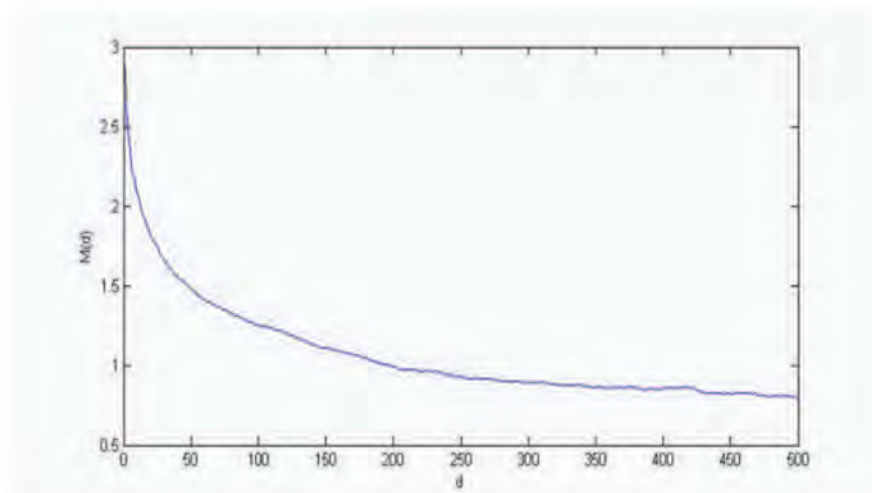


Figura 4.29: Figura que representa a la función de información mutua de la empresa Merck en su serie de precio de cierre.

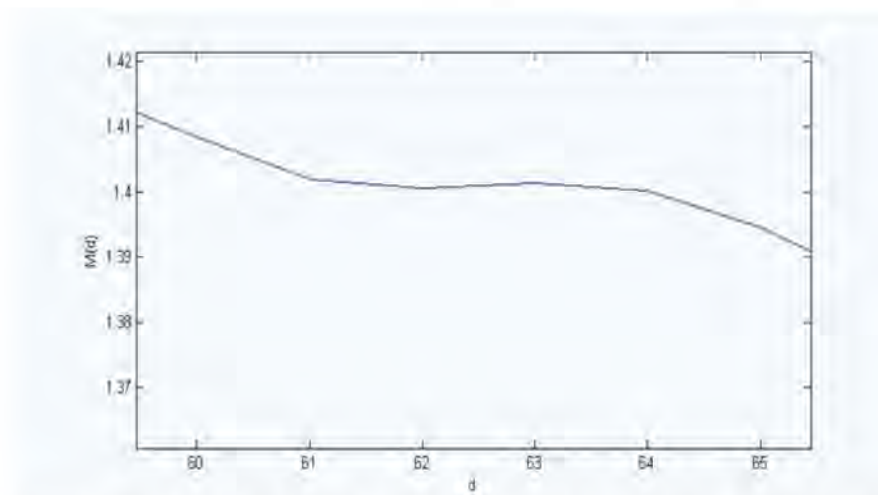


Figura 4.30: Primer mínimo de Merck para la serie de tiempo close en el cálculo de la función de información mutua. Es un mínimo muy suave pero se puede encontrar bajo una inspección minuciosa.

Todas las tendencias son similares a estas dos últimas figuras, en algunos casos podemos encontrar mínimos un poco más pronunciados, pero en general el comportamiento o la tendencia de la gráfica son de esa manera. En los cálculos de información mutua restantes podemos establecer que los distintos mínimos que se presentaron en los resultados se comportan de manera similar al caso de Merck. De acuerdo a los resultados que presentan todas las empresas se observa que la función de información mutua se comporta de acuerdo a la literatura en otras investigaciones como [7]. Dicho de otra forma, la función de información mutua en todos los casos presenta mínimos, aunque en algunos casos demasiado suaves, por lo que no se tuvo que considerar en ningún momento alguna otra técnica para estimar el tiempo de retraso τ , más que seguir el criterio antes mencionado.

Recordemos que lo calculado es el promedio de la función de información mutua y como se realizó una inmersión, la función es ella misma desplazada d unidades hacia adelante, es decir, se sustituyó $Y = X_{i+d}$. Por lo que tiene sentido que las gráficas de información mutua decrecen al aumentar el desplazamiento. Esto es justo lo que se presenta en las gráficas. Evidentemente como en la información mutua se necesitan las probabilidades de cada una de las series $P_X(i)$, $P_X(i+d)$ y la probabilidad conjunta $P_{X,X}(i, i+d)$ necesitamos hacer uso del cálculo de histogramas y por eso en la sección anterior se calculó la función de complejidad que le podemos dar el siguiente significado: la complejidad estocástica relativa a una clase probabilística de modelos, se define como el número más pequeño de dígitos binarios con los que se puede codificar la información.

En ningún caso se encontró que la función de información mutua tuviera una tendencia creciente la cual indicara que al continuar desplazando la función d unidades, tuviera un mayor número de bits de predicción. Lo más cercano a esto fueron ligeras perturbaciones en el comportamiento de la gráfica.

4.5. Histogramas y Tiempo de Retraso

A continuación en la Tabla ?? se presentarán los resultados de cada una de las empresas que componen el índice DJIA, la longitud de la serie de tiempo que corresponde a cada empresa varía dependiendo de la empresa en estudio, por las razones mencionadas en la sección anterior.

La metodología que se siguió para obtener resultados fue exactamente la misma que la que se utilizó para el Dow Jones Industrial Average, la única distinción es que en esta parte se realizó para cada empresa que componen este índice y no sólo para el índice global.

4.5.1. Dimensión de Inmersión

Como ya se mencionó en varias ocasiones, para poder calcular la dimensión de inmersión se utilizó la técnica propuesta por Grassberger y Proccacia, del cálculo de la integral de correlación para distintas dimensiones de inmersión. Una vez calculadas se prosiguió a graficar cada una de las integrales para las distintas dimensiones y observar la mínima dimensión para la cual se estabilizan la gráficas calculadas. Como podremos observar más adelante en los resultados y recurriendo a la bibliografía podemos decir que los resultados de las gráficas no presentan anomalías como “codos” como los que se presentan en [1]. Por lo que se prosiguió a encontrar la dimensión para la cual la gráfica de la integral de correlación no presenta cambios al aumentar la dimensión, esto se puede entender también como, encontrar la mínima dimensión de inmersión correspondiente para la cual el comportamiento seguido por las distintas integrales de correlación con respecto a la dimensión de inmersión d_e permanece constante. Un cálculo que se realizó para calcular la dimensión de correlación d_c fue una regresión numérica a cada una de las rectas correspondiente de cada dimensión.

A continuación se mostrarán los resultados que se obtuvieron del cálculo de las integrales de correlación d_c y de la dimensión de inmersión d_e para todas las empresas junto con τ el tiempo de retraso, exceptuando la empresa Kraft ya que esta presentó un mal comportamiento por lo que no se presenta en el cálculo de las dos dimensiones distintas. Las integrales de correlación se calcularon para $n = 2$ hasta $n = 12$, donde $d_e = n$. En estas dimensiones se calcularon los primeros 150 valores de la integral de correlación para determinar la dimensión

de inmersión d_e .

Empresa	Open		High		Low		Close	
	Nb	τ	Nb	τ	Nb	τ	Nb	τ
3m	54	52	38	89	41	69	54	68
Alcoa	36	123	42	119	29	134	45	115
Amexp	46	56	58	55	48	73	46	59
Att	81	52	58	54	73	51	57	36
Bkoam	61	33	61	34	61	35	59	33
Boeing	59	115	131	131	70	104	47	142
Caterpillar	45	98	39	116	52	95	38	120
Chevron	64	80	34	109	46	79	43	92
Citigroup	43	80	52	74	35	76	62	65
Coca Cola	32	129	56	117	32	121	32	101
Dupont	79	87	116	66	89	65	81	67
Exxon	55	98	71	62	71	52	55	70
GE	65	113	33	167	60	107	51	144
GM	75	58	65	83	45	109	63	104
HP	62	85	67	62	48	116	65	75
Home Depot	33	90	33	81	36	78	33	99
IBM	62	77	62	92	63	109	62	75
intel	55	65	54	51	45	73	47	63
Johnson	43	111	45	126	45	99	43	102
JP Morgan	51	70	58	44	39	67	40	75
Kraft	14	39	18	46	27	21	19	36
Mc Donalds	48	95	49	104	47	78	48	118
Merck	69	84	79	104	59	105	69	62
Microsoft	69	47	99	34	69	51	72	34
Pfizer	52	54	34	127	48	72	51	95
Procter	38	115	64	94	49	58	37	87
Unitech	38	116	36	89	44	116	55	78
Verizon	42	52	51	55	47	49	46	82
Wallmart	58	66	63	89	54	73	60	77
Wdisney	72	73	73	86	52	77	50	95

Figura 4.31: Tabla correspondiente a los resultados de obtenidos del número de particiones óptimas y tiempo de retraso para cada una de las 30 empresas que componen el DJIA para sus distintas series de tiempo.

Empresa	Open		Close	
		d_e		d_e
3m	52	5	68	4
Alcoa	123	5	115	4
Amexp	56	7	59	5
Att	52	5	36	4
Bkoam	33	5	33	4
Boeing	115	7	142	6
Caterpillar	98	7	120	5
Chevron	80	5	92	4
Citigroup	80	5	65	5
Coca Cola	129	7	101	6
Dupont	87	6	67	5
Exxon	98	7	70	5
GE	113	7	144	5
GM	58	7	104	6
HP	85	6	75	5
homedepot	90	7	99	6
IBM	77	8	75	7
intel	65	6	63	6
Johnson	111	7	102	6
JP Morgan	70	6	75	6
Kraft	39	8	26	7
Mc Donalds	95	7	118	6
Merck	84	6	62	5
Microsoft	47	5	34	5
Pfizer	54	7	95	6
Procter	9	7	32	6
Unitech	116	7	78	7
Verizon	52	7	82	6
Walmart	66	7	77	6
Wdisney	73	7	95	6

Figura 4.32: Tabla comparativa de la dimensión de inmersión y el tiempo de retraso para las empresas componente del DJIA con excepción de Kraft.

En esta tabla comparativa podemos observar que la dinámica subyacente en el espacio fase entre los precios open y close, no es tan distante de como se podría esperar en una primera intuición. Siendo un poco más explícitos, podríamos pensar en una primera instancia que el tiempo de retraso τ y la dimensión de inmersión d_e , para las series de tiempo open y close se encontrarían en

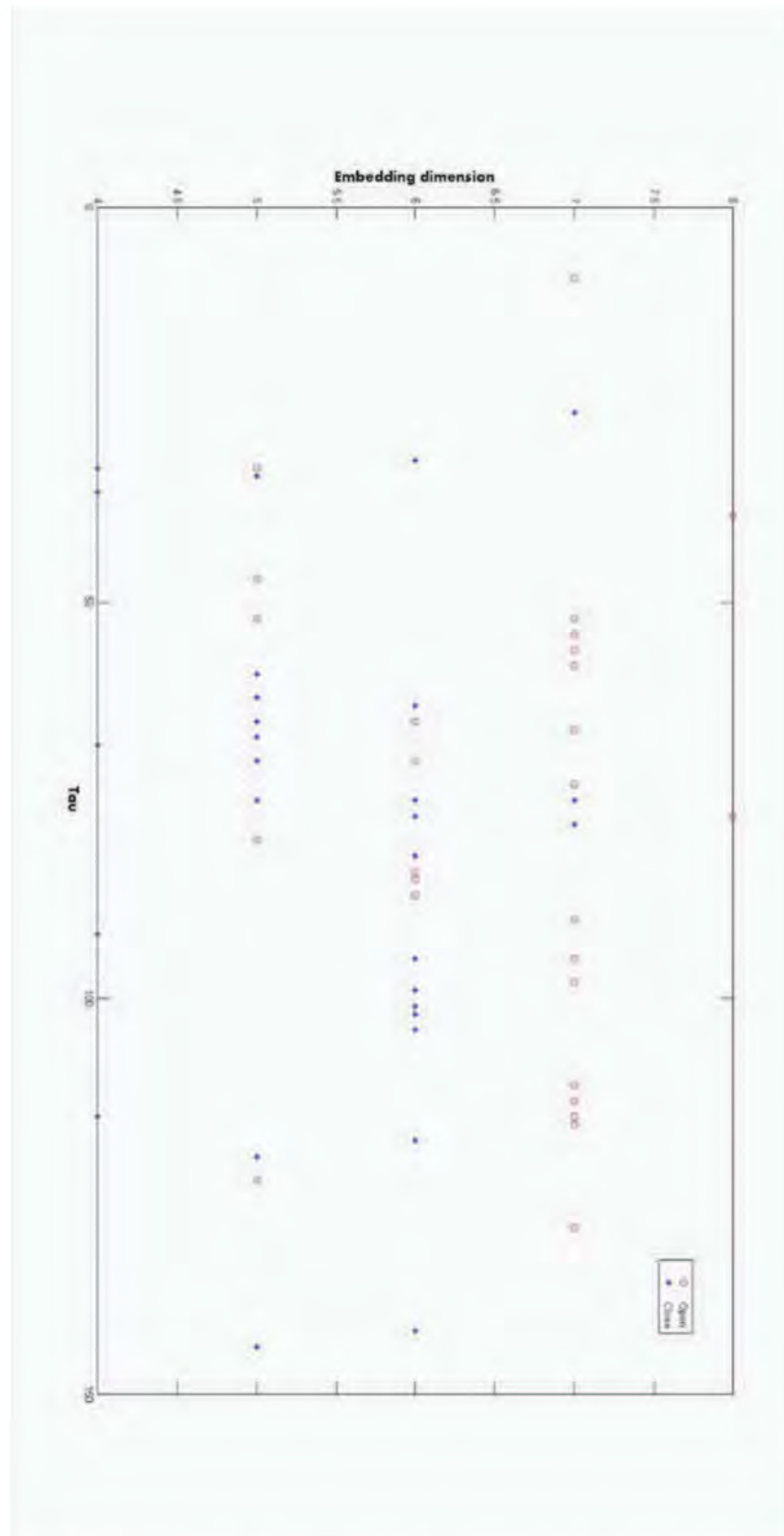


Figura 4.33: Podemos observar que es un solo conjunto para ambas series de precios.

conjuntos completamente aislados, esto al graficar d_e contra τ . Ya que intradía estos precios fluctúan de acuerdo a las noticias, comunicados y eventos que suceden durante el día o comunicados que se aproximan en los próximos meses. Lo que encontramos en realidad es que estos no se encuentran en conjuntos aislados. Esto lo podemos observar más claramente en la gráfica anterior (Fig. 4.1), la cual es una representación de las dos invariantes dinámicas antes mencionadas. En esta gráfica se puede observar que graficando los valores de la dimensión de inmersión y del tiempo de retraso para las series de tiempo de close y open, estas dos series no se encuentran ajenas y que en realidad lo que pasa es que se combinan en un intervalo muy cerca del espacio en cuestión, donde no se puede realizar una clasificación espacial dependiente del precio que estamos tratando.

4.5.2. Dimensión de Correlación

Para poder calcular la dimensión de correlación, se realizó una regresión sobre los valores de las integrales de correlación para las distintas empresas y diferentes dimensiones de inmersión, esto porque la dimensión de correlación es en realidad la tangente a la integral de correlación o la derivada de esta misma.

La comparación y el entendimiento del comportamiento de los datos, se realizó a través de una gráfica de la distribución de la dimensión de correlación y de la prueba estadística R^2 sobre las regresiones realizadas⁶. Haciendo un gráfico de la probabilidad contra la dimensión de correlación para las dos series de tiempo, podemos observar la distribución de las dimensiones de correlación. En esta figura podemos observar claramente que la distribución para las dos series de precios es muy parecida y que difieren en muy poco. Podemos observar que en las dimensiones de correlación donde existe mayor discrepancia con respecto a la probabilidad, es para los siguientes valores aproximados $d_c = \{0.7, 0.9, 1.2, 1.6\}$, donde la diferencia de probabilidades entre las series es menor a $P = 0.05$. Por último podemos decir, es claro a partir de la distribución que la probabilidad de ocurrencia tiene una concentración en $d_c = [0.7, 1.6]$.

Respecto a la distribución de las R^2 para distintas dimensiones, se encontró una mayor densidad en los valores de 0.99 y 1 en ambas series de precios, para este rango se puede observar que las probabilidades de encontrar estos valores van desde 0.1 hasta 0.55 aproximadamente; en ambas series de precio open y close. Es decir, los valores no difieren en gran medida entre las dos series. Que el valor de R^2 tenga una mayor distribución para valores cercanos a 1, es bueno ya que entre más cercano se encuentre a 1 significa que el modelo de regresión explica gran parte de la variabilidad de la respuesta alrededor de su promedio; esto tiene como implicación que nuestros cálculos en la dimensión de correlación son muy buenos ya que estos son la pendiente de los valores de la dimensión de correlación, por lo que la pendiente representa en buena medida el comporta-

⁶En el Anexo se pueden ver las tablas correspondientes de las distribuciones.

miento de la integral de correlación. Una de las diferencias relevantes es para la serie close donde el valor de R^2 se encuentra en el rango de 0.93 y 0.94 cuya probabilidad es muy baja. También podemos observar claramente que en este caso la distribución presenta pequeñas variaciones en los valores de R^2 para las dos series ya que los histogramas no se traslapan como en el caso de la distribución de la figura (anterior), aquí algunos histogramas están trasladados en el eje x . En la siguiente figura podemos observar claramente el comportamiento con el cual se distribuyen las respectivas R^2 de las diferentes dimensiones de correlación.

Observando los cálculos de las dimensiones de correlación d_c vemos que todos sus valores son números no enteros, lo cual en definitiva nos refiere a que estamos trabajando con un sistema caótico global. Más específico podemos decir que cada una de las empresas componentes del Dow Jones es un sistema caótico.

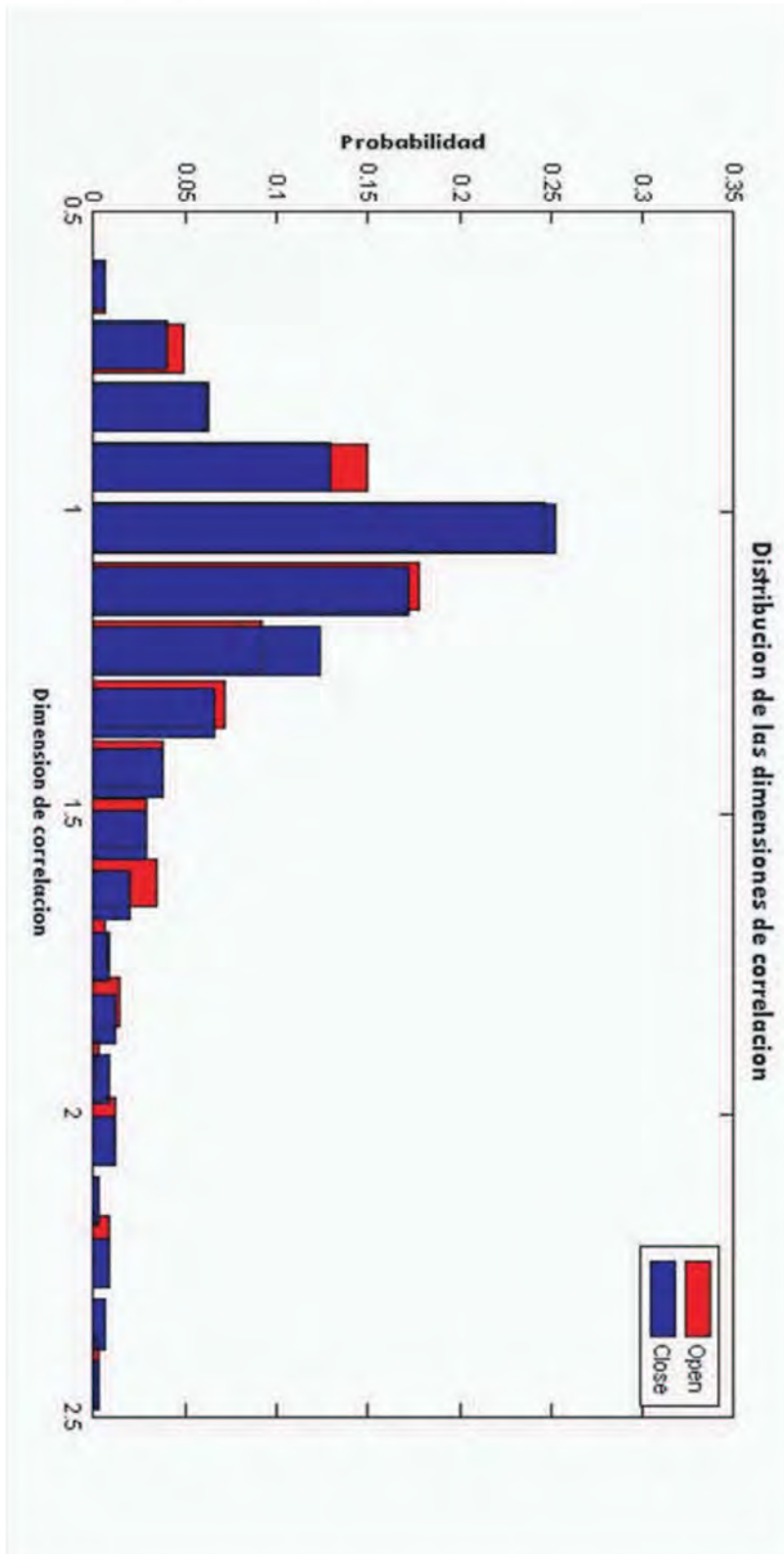


Figura 4.34: Espectro de la distribución de las dimensiones de correlación con respecto a la probabilidad.

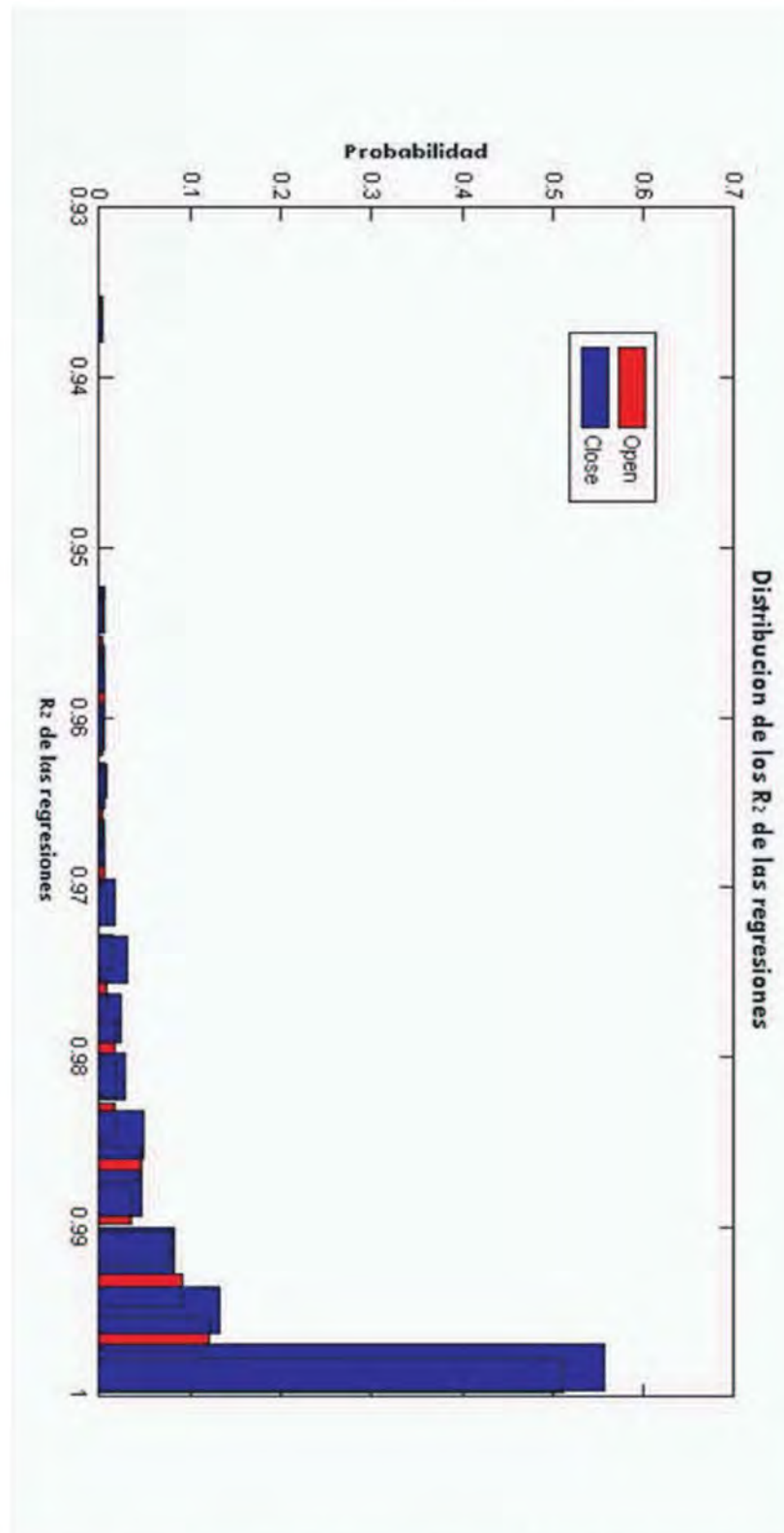


Figura 4.35: Espectro de la distribución de probabilidades obtenida de las regresiones de las integrales de correlación.

4.5.3. Reconstrucción del Atractor

A pesar de tener las dimensiones de inmersión de cada atractor y el tiempo de retraso, para su reconstrucción necesitamos definir cuáles son las tres coordenadas adecuadas para modelar. Por el momento nos restringiremos a las tres primeras coordenadas, argumentando que para sistemas dinámicos con más de 3 coordenadas, el espacio fase se puede visualizar parcialmente haciendo un mapeo del subespacio de sus coordenadas.

A continuación se presentan algunas reconstrucciones, donde se puede ver que sus soluciones claramente tienen un alto grado de sofisticación. La reconstrucción se realizó para las coordenadas $x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau)$. Esto con el único propósito de tener una idea general de la dinámica de los atractores.

Recordemos que los atractores son la representación de las soluciones de las series de tiempo en un cierto espacio fase, por lo que punto a punto la trayectoria de estos atractores corresponde a un valor de la serie de tiempo con la que se está trabajando.

Algo que se presenta en la reconstrucción que podemos observar directamente de los atractores, es que esto se desdoblan en el espacio fase, es decir, la figura no está concentrada en la diagonal del espacio fase. Esto es una observación que es un claro y directo indicador que nuestra metodología propuesta y selección de invariantes dinámicas es correcta.

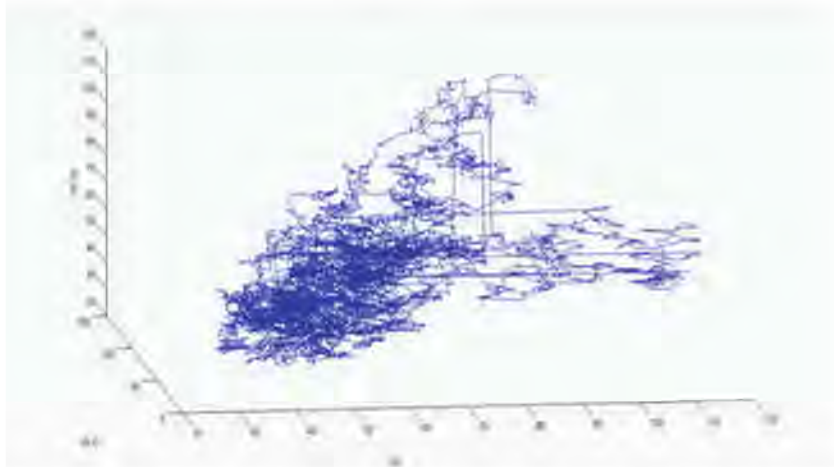


Figura 4.36: a) Figura que representa la reconstrucción del atractor para la empresa Caterpillar en su serie de precio de apertura.

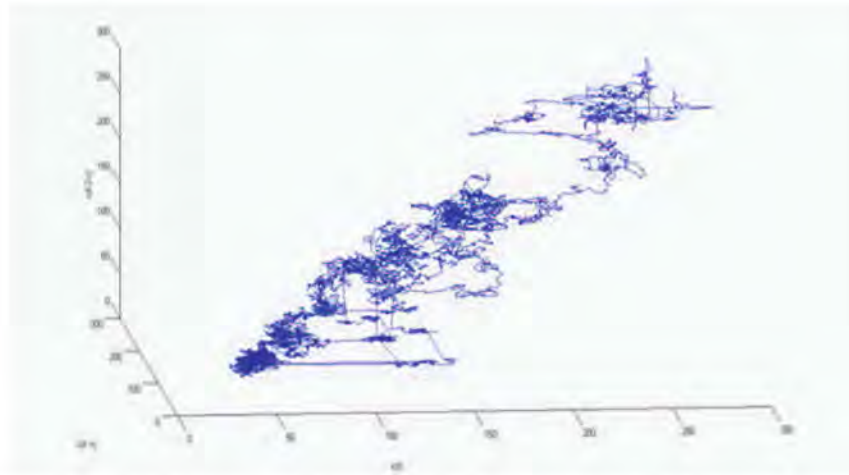


Figura 4.37: b) Figura que representa la reconstrucción del atractor para la empresa Dupont en su serie de precio de cierre.

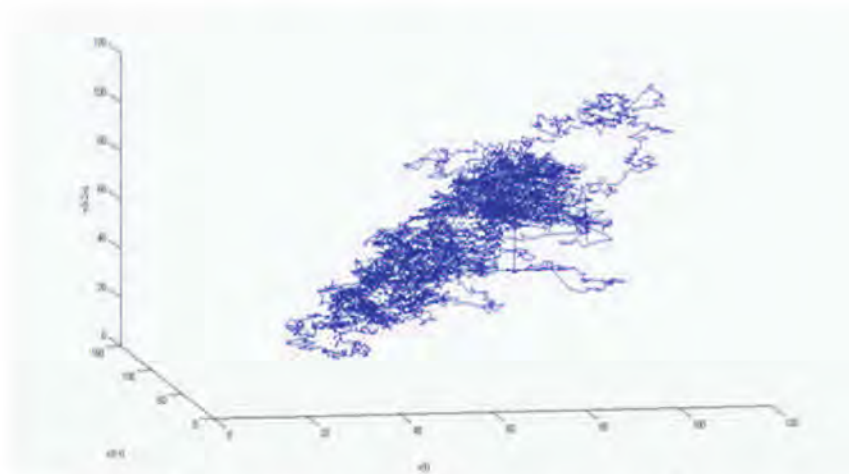


Figura 4.38: c) Figura que representa la reconstrucción del atractor para la empresa General Motors en su serie de precio de apertura.

Reconstrucción de los atractores para las coordenadas $x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau)$.
En a) se trata del Caterpillar para la serie Open, b) Dupont para la serie close
y por último c) General Motors para la serie open.

Capítulo 5

Consecuencias y Conclusiones

Consecuencias del Teorema de Inmersión de Takens

Para examinar las consecuencias que se obtienen del teorema de Inmersión de Takens, lo primero que haremos será recordar lo que hasta ahora hemos visto para después pasar a las implicaciones que este teorema pueda tener en este rubro. Es decir, veremos el caso general en el procesamiento de señales.

Cuando nos enfrentamos a un sistema físico, lo cual resulta algo bastante general. En el contexto de procesamiento de señales, se pueden presentar casos de diversos tipos, muy variados. Como por ejemplo la señal del funcionamiento de un motor de auto, señales en canales de comunicación, todas estas señales son ejemplos de series de tiempo. Como se ha mencionado en diversas ocasiones nosotros trabajaremos con señales o series de tiempo de precios en finanzas, como es la serie de tiempo del DJIA. El estado de estos sistemas cambian en el tiempo debido a ciertas leyes deterministas. Por el momento se consideran sistemas autónomos. En muchas situaciones la dinámica del sistema será suave, es decir, el sistema no cambiara abruptamente ni discontinua. Suponemos ahora que la dinámica del sistema es continua en el tiempo, pero que nuestras observaciones ocurren de manera discreta, es decir, que nuestras mediciones se toman de manera separada en momentos distintos. Durante el proceso de medición, las mediciones se toman en los tiempos t_i , $i = 1, \dots$. Asumiremos que son tiempos igualmente espaciados.

Como el sistema en estudio es de cierta manera determinista, el estado t_i por el estado t_{i-1} . Asumiremos que el inverso también se cumple, es decir, que el movimiento es invertible. Estas condiciones son equivalentes a suponer una función $\phi : M \rightarrow M$, que mapea del estado t_i al estado t_{i+1} y que esta función es invertible y por último que ϕ y su inversa son diferenciables; esto para que las dinámicas se puedan describir por un difeomorfismo. Algunas veces las dinámicas se especificarán por algunas ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales que garantizan que ϕ sea un difeomorfismo y que se pueda hacer una representación a partir de las ecuaciones diferenciales.

El mapeo ϕ forma parte del enlace entre el experimento y el teorema de Ta-

kens; la otra parte son las mediciones. Como se mencionó en el segundo párrafo de esta sección, tomamos una muestra o hacemos una observación cada t_i , el resultado es, por lo tanto, un escalar. Olvidemos por un momento la presencia de ruido y el error que pueda presentar la cuantización de la información. Estas observaciones pueden ser señales de la vibración de un monitoreo de equipo, cambio en voltajes, etc. En realidad muy poco conocimiento del experimento se tiene que especificar; todo lo que tenemos que asumir es que la medida al tiempo t_i está determinado por el estado del sistema en t_{i-1} y que la dependencia es suave. Entonces las medidas se describirán por una función diferenciable $y : M \rightarrow \mathbb{R}$.

El teorema de Takens lo que nos dice ahora es que si tomamos medidas de observaciones y con esto generamos una serie de tiempo y construimos n de la serie seleccionando n elementos consecutivos, donde n es mayor que dos veces la dimensión de M , entonces, si ϕ y y son genéricas, estos vectores están en el subespacio de \mathbb{R}^n que es una inmersión de M .

A primera vista puede parecer insuficiente para celebración, y de hecho, si el número de observaciones es pequeño, el conocimiento que generemos a partir de estos datos será insuficiente en valor práctico. Pero si tenemos información suficiente para hacer un sampleo correcto en el estado fase, entonces la información en nuestro espacio reconstruido será completo y podremos aprender de éste, la cual se traduce en el sistema mismo. Uno de los elementos básicos que deseamos obtener es la dimensión del estado o espacio fase, la cual es el número de grados de libertad que tiene el sistema. Otra cosa también básica, es la topología del espacio. Aunque esta información puede parecer un poco cualitativa, se le puede dar uso: por ejemplo para un sistema con multifrecuencia periódica el estado o espacio fase debería tener una geometría de un toro n dimensional, donde n es el número de osciladores independientes. La homología de grupos del sistema nos servirá para propósitos de reconocimientos.

Mientras que la información topológica es importante, no explota por completo todas las propiedades que se preservan bajo inmersiones. Además, frecuentemente la dinámica del sistema causa que no se explore todo el espacio fase: será confinado a subconjuntos del espacio conocido como atractor.

Generalmente asumimos que el atractor está asociado con una medida invariante de ϕ en M . Si decimos que $N = \Phi M$ será la imagen del espacio fase dentro de la inmersión, hay una medida correspondiente en N inducida por Φ . Como Φ es difeomorfismo, la medida inducida tiene la misma dimensión (fractal) que la original. Muchos de los estudios basados en el teorema de Takens se han concentrado en el cálculo de la dimensión de las reconstrucciones usando el método de retrasos.

Desde el punto de vista del procesamiento de señales, un punto más importante a notar es que la inmersión Φ no sólo produce una copia del espacio M ,

sino también de la dinámica. La función $\psi : N \rightarrow N$ definida por $\psi = \Phi\phi\Phi^{-1}$ es un sistema dinámico en N que hereda las propiedades de invertibilidad y también la de ser una función suave. Es claro que las órbitas periódicas de ϕ las mapea Φ en las órbitas correspondientes de ψ . Esto se puede ya que Φ un difeomorfismo. La naturaleza difeomórfica de Φ implica que: se puede demostrar que los números característicos de las órbitas periódicas se preservan bajo inmersión.

Como sabemos que los puntos reconstruidos en N se relacionan por el mapeo ψ esperaríamos poder estimar ψ de los datos. Esto es, podemos tratar de construir un modelo dinámico del sistema (ψ, N) . Si podemos hacer esto con precisión, entonces podemos hacer el procesamiento de señales de manera formal. Por ejemplo podemos utilizar este modelo para predicción: dado un n -vector de la serie de tiempo, podemos usar nuestro estimado de ψ para calcular el siguiente vector, es decir, predecir el siguiente elemento de la serie de tiempo. Esto abre las puertas a códigos para predicción y para la reducción de ruido. Para el tipo de señales que estamos considerando, las cuales son señales provenientes de sistemas con un alto grado de no linealidad, el proceso no es directo como en el caso lineal: necesitan de nuevas ideas y algoritmos. También podemos utilizar los modelos de la siguiente manera: para remover ruido al minimizar la inconsistencia entre la información y el modelo.

En general no existe una manera general para derivar ϕ , porque la información depende no solo de ϕ sino también de la función de medición y . Es posible caracterizar al sistema hasa su difeomorfismo, esto es, decidir si dos señales se pueden relacionar por cambios suaves en las coordenadas, el teorema de Takens nos dice relacione el método de retrasos para la reconstrucción del sistema original. Si es así, la reconstrucción ofrece una manera de realizar el reconocimiento y clasificación del sistema.

Conclusiones y Líneas de Trabajo Futuro

En el presente trabajo se intenta hacer una descripción de los modelos que aplican a este tipo de sistemas no lineales para comprender su dinámica subyacente. A continuación se exponen las conclusiones con base en los resultados obtenidos.

Se concluye que la dinámica de los sistemas no depende de la longitud de las series de tiempo y más bien depende de la complejidad de ésta.

Se concluye que la dinámica subyacente de los precios de apertura y cierre del DJIA, es una dinámica muy cercana. Esto es contrario a lo que se observa intradía donde el precio tiene un valor distinto que en el cierre. Esto concentrándonos en los valores día a día. Ahora observando el sistema desde una escala de tiempo más grande, podemos concluir que el sistema en el largo plazo tiene un equilibrio y hacemos mención a la Hipótesis de los Mercados Eficientes. Ya que no importa si tomas el precio de apertura o el de cierre, igualarás al mercado en el largo plazo. Esto no quiere decir que no tendrás pérdidas o ganancias ocasionales, pero al paso del tiempo tendrás un equilibrio y esas pérdidas o ganancias se “regresaran”. En resumen, se concluye que la hipótesis de mercados eficientes se cumple.

El presente trabajo sólo da pauta al análisis y predicción de sistemas no lineales. En la actualidad muchos trabajos se han desarrollado en sistemas no lineales, un trabajo a futuro sería considerar integrar estos trabajos con la presente tesis, por lo que podemos aprovechar esto y vincular esta tesis con estos trabajos. En este análisis más detallado podemos considerar para una predicción del sistema los coeficientes de Lyapunov. También podemos considerar hacer el cálculo del número de particiones, con particiones adaptivas como lo proponen en . En cuanto a la reconstrucción del atractor, un paso más sería buscar en la literatura cuáles componentes considerar para su reconstrucción, ya que en la presente tesis sólo se toman las primeras tres componentes sin hacer mucho detalle en por qué se escogieron, más que argumentar que para sistemas dinámicos con más de 3 coordenadas, el espacio fase se puede visualizar parcialmente

en un mapeo del subespacio de sus coordenadas. Observar la dinámica entre la serie de tiempo y la reconstrucción del atractor sería un paso a futuro de gran utilidad para la investigación de series porque así se podría saber en qué etapa se encuentra la serie en relación con su atractor y determinar la dinámica a futuro de la serie; esto sería una segunda proyección a futuro del sistema dinámico.

Concluimos también que se requiere un cuidado especial en la selección de la distribución de probabilidades. Se realizaron los códigos de simulación necesarios para realizar los cálculos de las distintas etapas del proceso, la principal ventaja es que los códigos de simulación se pueden ampliar con relativa facilidad, ya que el flujo de trabajo fue modular, lo que hace que se pueda agregar o modificar los distintos módulos independientemente.

Siendo un poco más específicos podemos concluir que nuestro criterio para la selección de histogramas tiene las siguientes ventajas. Primero, el criterio de MDL para la selección de modelos (complejidad estocástica) tiene propiedades de optimización muy buenas. Segundo, al considerar la selección de histogramas como un problema de selección de modelo, es posible obtener información genérica y también la estimación óptima del conteo de bin automático. Además, el criterio MDL por sí solo se puede utilizar como una medida de calidad de la estimación de densidad, lo que se traduce en que no hay necesidad de asumir nada en relación con cómo se genera la densidad. Como el criterio de selección se basa en la distribución del NML no existe la necesidad de especificar ningún parámetro de la distribución a priori.

Recordando que la dimensión de correlación es un indicador de lo que el sistema no es, podemos concluir que como la dimensión de correlación es finita y no es igual a la dimensión de inmersión, entonces en general las señales o series de tiempo que estamos analizando no son ruido, ni tienen ruido en gran proporción. Por otro lado, como los sistemas periódicos tienen dimensión entera y todos nuestros cálculos tienen dimensión no entera concluimos que los sistemas son aperiódicos. Es decir, concluimos que los sistemas de cada una de las series de tiempo no están dominados por ruido o por una órbita periódica. Esto era de esperarse ya que las mediciones tienen ruido relacionado porque se trata de los valores de los precios de las acciones, cuyos precios están en el mercado visible en todo momento. Respecto a que el sistema no presenta una órbita periódica dominante, también era de esperarse ya que si la tuviera presenta los precios se comportarían de una manera completamente cíclica y predecible.

Se ha diseñado un modelo probabilístico para sistemas no lineales caóticos, este modelo contiene la reconstrucción del atractor, el cual es una correspondencia punto a punto con la serie de tiempo de cada activo. Podemos concluir que tanto el tiempo de retraso τ y la dimensión de inmersión d_ϵ se obtuvieron buenos parámetros ya que al momento de reconstruir los atractores de cada activo, estos están desdoblados y no están focalizados sobre la diagonal del espacio fase, más bien los puntos que componen al atractor se encuentran distribuidos

en el espacio, que es justo lo que buscábamos sin que esta distribución fuera lo suficientemente grande como para que perdieran correlación los puntos.

Se verificó la presencia de un caos determinista, mediante el cálculo de la dimensión de correlación. Se verificó que el comportamiento del sistema en los distintos cálculos que se hicieron no depende de la longitud de la serie de tiempo y que depende en realidad del comportamiento de esta serie.

Sabemos que la garantía contra falsas identificaciones de dimensiones de correlación erróneas con la técnica de Grassberger y Proccacia, es verificar que la integral de correlación exhibe un escalamiento lineal sobre una región en particular. Por lo que podemos concluir que se verifica con éxito ya que al realizar las regresiones sobre las pendientes de las curvas y calcular las R^2 , observamos que los valores de éstas son muy cercanos a 1, lo que indica que nuestras regresiones son buenas y por tanto la dimensión de correlación.

Sin embargo se han cumplido sus objetivos principales, dentro de los cuales se encuentran el desarrollo de herramientas básicas para el análisis de sistemas no lineales, es decir, crear un pilar para la investigación y desarrollo de sistemas no lineales. Una primera interacción con los sistemas no lineales, para tener un mejor entendimiento de estos, se han construido bases sólidas para investigaciones futuras sobre este tema.

Podemos concluir que dada la evidencia obtenida de comportamiento caótico en las series es claro que no se puede captar la dinámica completa de los índices bursátiles mediante técnicas de series de tiempo lineales. El modelado no paramétrico es útil n situaciones en las que no se puede hacer ninguna suposición sobre la forma funcional del proceso que generó la serie de tiempo observable.

Podemos concluir que al elegir adecuadamente τ y d_ϵ , la órbita descrita por el teorema de Takens puede ser utilizada para aproximar la órbita descrita por el vector de estados del sistema original. La idea intuitiva que sustenta este método para reconstruir el atractor a partir de la serie temporal es que como la serie procede de la observación de las variables del sistema, su evolución en el tiempo está regida, de alguna forma, por la leyes de movimiento especificadas en el propio sistema, y por tanto, la información contenida en la serie debería retener las propiedades del sistema n dimensional original.

Como conclusión de la parte económica de la presente tesis, decimos que el objetivo final es develar la naturaleza irregular y compleja del fenómeno económico. Dicho comportamiento se caracteriza por ser complejo, irregular y no lineal. Los modelos empíricos de análisis de series temporales han sido tradicionalmente lineales. La simplicidad de las herramientas para el análisis empírico ha sido el principal argumento a favor de la linealidad. Pero teóricamente es difícilmente justificable que el fenómeno económico siga un comportamiento lineal. El estudio de la no linealidad es complejo pero se hace necesario en la economía, por lo tanto es indispensable que se introduzcan conceptos e instru-

mentos nuevos relacionados con la no linealidad.

En el caso del DJIA como índice global, decimos que para el intervalo de tiempo analizado la función de información mutua para la serie de tiempo decrece de forma monótona y no presenta mínimos. Este inconveniente se presenta cuando la serie analizada es persistente pero no estacionaria, es decir, tiene componentes de tendencia muy marcadas. Por lo que concluimos que el DJIA no presenta un comportamiento “tan” estacionario mientras que cada una de sus componentes sí son estacionarias por sí solas, ya que presentan mínimos globales en la función de información mutua.

Capítulo 6

Anexos

6.1. Scrips Matlab

En esta primera sección del anexo se puede consultar a detalle la documentación relacionada con los scrips utilizados en Matlab para la simulación computacional realizada en la presente tesis. Los scrips contiene algunos comentarios para la facilitación de la lectura.

fulltangent.m

```
% Programa FullTangent
%
%
% Calcula las pendientes de las
% integrales de correlacion.

% *****
% * Ruta de los datos de entrada *
% *****

pathdatinp = 'C:\ Rodrigo\ Datos\ fullopenclose.xls'; % < -- Actualizar ruta
pathdatout = 'C:\ Rodrigo\ Datos\ fulltangent_close.xlsx';
count = 1;
tang = zeros(29,12);
R2 = zeros(29,12);
Sheet = 'close';
A = xlsread(pathdatinp,Sheet);
[n1 n2] = size(A);

for wnd = 1:1:29

    D = A(13*(wnd-1)+1:13*wnd,:);
```

```
X = [ones(8,1) D(13,3:10)'];
for rw = 1:12
    [b,bint,r,rint,stats] = regress(D(rw,3:10)',X);
    tang(wnd,rw) = b(2);
    R2(wnd,rw) = stats(1);
end;

end;

xlswrite(pathdatout,tang,'Hoja1','A1');
xlswrite(pathdatout,R2,'Hoja2','A1');
```

intcorr.m

```

% Program Correlation Integral
%
%
%
% Calcula la Integral de Correlacion
% para una serie de tiempo, dimension
% y delay dados. Utiliza el metodo de
% Grassberger y Procaccia.
%
%
%
% Referencias:
%
% Grassberger P., Procaccia I., Characterization of strange
% attractors. Physical Review Letters vol. 50, pags. 346-349, 1983.
%
% Theiler J., Spurious dimension from correlation algorithms
% applied to limited time-series data. Physical Review A vol. 34
% pags. 2427-2432, 1986.
%
% Albano A. M., Muench J., Schwartz C., Mees A. I., Rapp P. E.,
% Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia
% algorithm, Physical Review A vol. 38: pags. 3017-3026, 1988.
%
% *****
% Actualizacion de los datos de entrada *
% *****

% Poner la columna con la que se trabajara 1 < - > OPEN, 4< - > CLOSE
columna = 4; % < - - - Actualizar Columna

% Poner aqui la compañía con la que se trabajara
company='wdisney';

% Poner aqui el valor de Tau con el que se desea trabajar
tau = 95;

% *****
% Fin de la actualizacion de datos *
% *****

ruta='C: \Users\user\Documents\Rhod\Econofisica\Tesis\dow jones\wdisney.xls';
filename=strcat(ruta,company,'.xls');
[A,B] =xlsread(filename,'table');

```

```

dat = A(:,columna);

% *****
% Ruta de los datos de salida *
% *****

rutaout='C:\Rodrigo\Datos\';
if columna==1
    typeof='_open';
end;
if columna==4
    typeof='_close';
end;
pathdataout=strcat(rutaout,'intcorr_',company,typeof,'.xlsx');

% *****
% Calculo de la integral de correlacion para *
% diferentes dimensiones *
% *****

% r es un vector de los rangos en orden creciente
r = (max(dat)-min(dat))./10*(1:150)'/25;
logr = log(r);
count = 1;
for dim = 2:13

    fprintf('%g\r',dim)
    % Reconstruyendo el espacio de fases
    [Y,T] = phasespace(dat,dim,tau);

    % Initializing data structures
    Cr = zeros(size(r));
    distancias = zeros(T-1,T-1);
    for i1 = 1:T-1
        for i2 = i1+1:T-1
            distancias(i1,i2) = norm(Y(i1,:)-Y(i2,:)); %el tipo de norma se debe
        end % elegir aqui. Ver el help
    end % de MATLAB sobre la
norma
    fprintf('%s\r','matrix')
    for k = 1:length(r)
        k1 = find(r(k) > distancias & distancias > 0);
        Cr(k) = length(k1);
    end;
    Cr = 2*Cr/(T*(T-1));
    logCr = log10(Cr);

```

```
    Cld = strcat('A',num2str(count));  
    xlswrite(pathdataout,logCr,'Hojal',Cld);  
    count = count+1;  
  
end;  
Cld = strcat('A',num2str(count));  
xlswrite(pathdataout,logr,'Hojal',Cld);
```


mutinf2.m

```

%Programa Mutinf2
% Calcula la funcion de informacion mutua
% para la serie de los datos proveniente de
% las componentes del sistema. Utiliza el
% metodo propuesto por Cellucci et al. para
% elegir el tamaño optimo de los histogramas.
% Puede utilizarse tambien el metodo sugerido
% por Rissanen.
%
%
%
% Referencias
% T. M. Cover & J. A. Thomas, "Elements of
% Information Theory", Wiley, 1991.
% Cellucci, et al., "Statistical validation
% of mutual information calculations"
% Physical Review E, vol. 71, 066208, 2005.
% Y. Rissanen, "Stochastic Complexity in
% Statistical Inquiry", World Scientific
% 1992, pag. 76.
%
%
%
% Definiendo entrada y salida de datos
filename1='C:\Users\user\Documents\Rhod\Econofisica\Tesis\dow jones\3m\open_3m.txt';
%Actualizar aqui entrada
fid1=fopen(filename1,'r');
if fid1~= -1
    dat=fscanf(fid1,'%f');
end;
[n1 n2]=size(dat);
nm=max(n1,n2);
filename2=strcat('C:\Users\user\Documents\Rhod\Econofisica\Tesis','mif_','3m_open_1','.txt');
fid2=fopen(filename2,'w'); % Actualizar aqui salida

DistMax=500;
fprintf('%g\r',DistMax); % Optativo. Solo para saber la cantidad de
% distancias a calcular.

% Numero de divisiones del histograma p(i,j)
Nb=54; %i— Actualizar aqui el tamaño del histograma
% Aqui se puede utilizar el metodo de Rissanen o el propuesto por Cellucci
% et al. usando una particion adaptativa.
% *****

```

```

% *****
% *****
%
%                               INICIO DEL PROGRAMA PRINCIPAL
% *****

% Inicializando las estructuras de datos
% Creando la particion para los histogramas
    Exti=min(dat);
    Exts=max(dat);
    Hp= (Exts-Exti)/Nb;
    for k=1:Nb+1,
        edge(k) =Exti+(k-1)*Hp;
    end;
    [e1 e2] =size(edge);
    ee=max(e1,e2);

    m=zeros(1,DistMax);
    for d=1:DistMax,
        x=dat(1:nn-d);
        y=dat(1+d:nn);
        % Calculando los histogramas
        ox=histc(x,edge);
        ox=ox/sum(ox);
        oy=histc(y,edge);
        oy=oy/sum(oy);
        oxy=zeros(ee,ee);
        for i=1:nn-d,
            c1=floor( ((x(i)-Exti)/Hp) )+1;
            c2=floor( ((y(i)-Exti)/Hp) )+1;
            oxy(c1,c2) =oxy(c1,c2)+1;
        end;
        oxy=oxy/sum(sum(oxy));
        for i=1:ee
            for j=1:ee
                if (ox(i)*oy(j) ~=0) & (oxy(i,j) ~=0)
                    m(d) =m(d)+oxy(i,j)*log(oxy(i,j)/(ox(i)*oy(j)));
                end;
            end;
        end;
        fprintf(fid2,'%f\n',m(d));
        fprintf('%g\r',d);
    end;
    primin=find(m==min(m));
    plot(m);

```

```
% *****
%
%                               FIN DEL PROGRAMA PRINCIPAL
% *****
% *****
% *****
% Cierre del file de datos.
  c1=fclose(fid1);
  c2=fclose(fid2);
```

phasespace.m

```

function [Y,T] =phasespace(x,dim,tau)
%Syntax: [Y,T] =phasespace(x,dim,tau)
%-----
%
% Realiza la reconstruccion del espacio fase de la serie de tiempo x por el
% metodo de retrasos (MOD), en la dimension de inmersion y un tiempo de
% retraso
%
% Y es la trayectoria matriz en el espacio reconstruido.
% T es la longitud del espacio fase.
% x es la serie de tiempo.
% dim dimension de inmersion.
% tau es el tiempo de retraso.
%
%
% Referencia:
% Takens F (1981): Detecting strange attractors in turbulence. Lecture notes
in
% Mathematics, 898. Springer.
%
%

if nargin<1 || isempty(x) ==1
    error('You should provide a time series.');
```

```

else
    % x debe ser vector
    if min(size(x)) >1
        error('Invalid time series.');
```

```

    end
    x=x(:);
    % N es la longitud de la serie de tiempo
    N=length(x);
end

if nargin<2 || isempty(dim) ==1
    dim=2;
else
    % dim debe ser un escalar
    if sum(size(dim)) >2
        error('dim must be scalar.');
```

```

    end
    % dim debe ser entero
    if dim-round(dim) ~ =0
        error('dim must be an integer.');
```

```

end
% dim debe ser positivo
if dim<=0
    error('dim must be positive.');
```

end

```

end

if nargin<3 || isempty(tau) ==1
    tau=1;
else
    % tau debe ser escalar
    if sum(size(tau)) >2
        error('tau must be scalar.');
```

end

```

    % tau debe ser entero
    if tau-round(tau) ~=0
        error('tau must be an integer.');
```

end

```

    % tau debe ser positivo
    if tau<=0
        error('tau must be positive.');
```

end

```

end

% Total de puntos en el espacio fase
T=N-(dim-1)*tau;

% Iniciado phase space
Y=zeros(T,dim);

% Reconstruccion con MOD
for i=1:T
    Y(i,:)=x(i+(0:dim-1)*tau)';
end
```

pintaintcorr.m

```

% Programa PintaIntcorr
% Grafica la integral de
% correlacion para diferentes
% dimensiones.

% *****
% *****

% Ruta de los datos
pathdatinp = 'C:\Rodrigo\Datos\intcorr_wdisney_close.xlsx'; %Actualizar aqui
Sheet = strcat('Hoja',num2str(1));
A = xlsread(pathdatinp,Sheet);

% *****
[n1 n2] = size(A);
lf = A(12,:);
I = find(lf==65535);
if ~ isempty(I)
    pc = max(I)+1;
else
    pc = 1;
end;

% *****

% Dibujo de las integrales de correlacion

St= ['-or', '-ob', '-og', '-ok', '-oc' '-dr' '-db' '-dg' '-dk' '-dc' '-*r'
'-*b'];

% Inicio del dibujo
for i = 1:n1-1
    txr = St(3*(i-1)+1:3*i);
    plot(A(n1,pc:n2),A(i,pc:n2),char(txr));
    hold on
end;

```

rissanen1.m

```

% Program Rissanen
% Calcula el valor optimo para el numero de particiones
% del histograma minimizando la complejidad estocastica.
%
%
% Referencia:
% Y. Rissanen, "Stochastic Complexity in Statistical Inquiry"
% World Scientific, 1992, pag. 76.
%
%
    v=1; %Actualizar aqui
% Eleccion del numero minimo y maximo de particiones a estudiar
    nmin=10; % < --- Actualizar aqui
    nmax=800; % < --- Actualizar aqui
% Definiendo entrada y salida de datos
    filename1='C:\Users\user\Documents\Rhod\Econofisica\Tesis\dowjones_cl.txt';
% < --- Actualizar aqui
    filenames='C:\Users\user\Documents\Rhod\Econofisica\Tesis\dowjones_clf.txt';
% < --- Actualizar aqui
%
fid1=fopen(filename1,'r');
if fid1~= -1
    x=fscanf(fid1,'%f');
end

% *****
% *****
% Inicio del calculo de la funcion de complejidad
data=x;
[n1 n2]=size(data);
nn=max(n1,n2);
R=max(data)-min(data);

for m=nmin:1:nmax

    h=hist(data,m);
    sd=0;
    sn=gammaln(nn+1);
    for k=1:1:m
        sd=sd+gammaln(h(k)+1);
    end;

    priterm=nn*log(R/m);
    segterm=sn-sd;

```

```
terterm=gamma(nn+m)-gamma(nn+1)-gamma(m);

f(m) =priterm+segterm+terterm;

end;

mopt=find(f == min(f(nmin:nmax)));
plot(nmin:nmax,f(nmin:nmax),'-*');
fids=fopen(filenamees,'w');
fprintf(fids,'%f\n',f);

% Fin de los calculos de la complejidad
% *****
% *****
fclose(fid1);
fclose(fids);
```


6.2. Tablas

6.2.1. Tablas sobre Precios Open

Empresas	R ² de las dimensiones de correlación para los precios open												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
3m	0,99988635	0,99999818	0,999657	0,99981834	0,99825107	0,99519069	0,9908574	0,98688681	0,98306133	0,97990909	0,97826616	0,97748104	
Alcoa	0,99996088	0,99996189	0,99958997	0,99691184	0,99147302	0,98448975	0,97764104	0,97431328	0,97253665	0,96487249	0,96075397	0,95844298	
Amexp	0,99965706	0,99991557	0,99947713	0,99795787	0,99910159	0,99913767	0,99745654	0,99598986	0,99469556	0,99345331	0,99221997	0,9909324	
Att	0,99877849	0,9994902	0,99981312	0,99930263	0,99933813	0,99932123	0,9986738	0,99726602	0,99646566	0,99706915	0,99728024	0,99707357	
Bkoam	0,99978918	0,99999198	0,99964177	0,99906156	0,99956421	0,99922421	0,99789656	0,99631198	0,99506466	0,99303629	0,99053853	0,98759237	
Boeing	0,9999438	0,99940613	0,99925949	0,99980105	0,99840767	0,99770778	0,99707847	0,9960318	0,99426444	0,99248082	0,99018087	0,9862062	
Caterpillar	0,99997065	0,99991184	0,99985584	0,99831903	0,99460966	0,98929112	0,98326906	0,9755552	0,97178877	0,96326491	0,95639171	0,95252578	
Chevron	0,999761	0,99987991	0,99999301	0,9998705	0,99920452	0,99769025	0,99613211	0,99480864	0,99430856	0,99402484	0,99264234	0,98999709	
Citigroup	0,99989361	0,99976189	0,99959849	0,99991366	0,99921268	0,99856255	0,99771708	0,99651237	0,99482024	0,99326782	0,99223367	0,99043275	
Coca Cola	0,99959214	0,99969677	0,99976084	0,99968945	0,99874521	0,99754786	0,99617994	0,99333479	0,98941321	0,98454774	0,97799458	0,97147583	
Dupont	0,99693279	0,99824728	0,99962382	0,99937386	0,99559409	0,99154075	0,99293899	0,99625534	0,99859618	0,99936427	0,99915079	0,99847279	
Exxon	0,99982457	0,99978378	0,99924133	0,99865731	0,99704472	0,99464749	0,99114459	0,98733915	0,98595878	0,98518283	0,98159863	0,97363612	
GE	0,99952416	0,99941909	0,99972752	0,99991405	0,99991772	0,99969028	0,99896679	0,99775759	0,99629753	0,99419717	0,99076922	0,98601354	
GM	0,99994819	0,99999821	0,99999372	0,99877351	0,99436409	0,98937992	0,98524062	0,9811728	0,9780072	0,97139112	0,9657861	0,95851257	
HP	0,99967285	0,99972146	0,99943122	0,99930804	0,99914513	0,99868376	0,99864276	0,9982299	0,99681902	0,99574034	0,99529429	0,99460617	
homedepot	0,99991891	0,99996058	0,99972769	0,99806385	0,9957312	0,99191589	0,98829796	0,98369869	0,98047281	0,97757848	0,97365101	0,96501209	
IBM	0,99760119	0,99907478	0,9992294	0,99396019	0,9910184	0,99221158	0,99639495	0,99867466	0,99841244	0,99788299	0,99724167	0,99669753	
intel	0,99957703	0,99957507	0,99739162	0,9972824	0,99930282	0,99955835	0,99932376	0,99864199	0,99852581	0,99852736	0,99848658	0,99813144	
Johnson	0,99995114	0,99996255	0,99979615	0,99920956	0,99663379	0,99403844	0,99174951	0,98905704	0,98540514	0,98162829	0,97732298	0,9676866	
JP Morgan	0,99956533	0,99997037	0,99897678	0,99855144	0,99948835	0,99953307	0,99833555	0,99642591	0,99350775	0,990105	0,98576286	0,98131616	
Mc Donalds	0,99980575	0,99999778	0,99985607	0,99775831	0,99530766	0,9942323	0,99343776	0,99249329	0,9914125	0,98859806	0,9860754	0,98439344	
Merck	0,99990944	0,99989678	0,99933627	0,99989127	0,99964279	0,99869236	0,99773305	0,99693719	0,99568151	0,99465213	0,9935404	0,99283435	
Microsoft	0,9911893	0,98634658	0,98534522	0,991027	0,9957373	0,996715	0,99404022	0,99072245	0,98739306	0,98539371	0,98560584	0,98894308	
Pfizer	0,99910079	0,99960994	0,99995183	0,99992902	0,99997253	0,9999526	0,99956462	0,99900459	0,99878997	0,99857918	0,99852653	0,99869944	
Procter	0,99815524	0,9974448	0,99774977	0,99898515	0,99983772	0,99933268	0,99889959	0,99896705	0,99778336	0,99413216	0,98831433	0,98220057	
Unitech	0,99992559	0,99997438	0,99969156	0,99854737	0,99716035	0,99493407	0,99241374	0,98926647	0,98506437	0,98030935	0,97442057	0,96862217	
Verizon	0,99979152	0,99992075	0,99979558	0,99988526	0,99842281	0,99605326	0,99386993	0,99238346	0,99173558	0,99040194	0,99013501	0,98826057	
Wallmart	0,9996621	0,99966109	0,99987366	0,9999747	0,99983302	0,99926336	0,9979879	0,99650157	0,99505626	0,99431835	0,99370917	0,99284385	
Wdisney	0,99930772	0,99988255	0,99923891	0,99829388	0,99904554	0,99986953	0,99922991	0,9984157	0,99824031	0,99840778	0,99825507	0,99796991	

Figura 6.1: Tabla que muestra la prueba estadística de R^2 de los precios open.

Figura 6.2: Tabla que muestra la dimensión de correlación de los precios open.

Empresas	Dimensiones de correlación para los precios open											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3m	0,80941686	1,09436182	1,16246077	1,13067575	1,13782526	1,19672207	1,27272568	1,36328243	1,46703853	1,57109001	1,67722361	1,78156201
Alcoa	0,82003754	1,01792633	1,01713387	1,05844016	1,15322762	1,282232	1,43860781	1,59807038	1,76374764	1,98408043	2,19730547	2,45342208
Amexp	0,73884631	0,999411	1,11048383	1,07294896	1,00055869	0,95549613	0,95786067	0,98751244	1,02345992	1,06298568	1,10276359	1,14336847
Att	0,71871275	0,9628298	1,10946897	1,15907499	1,15354719	1,14474834	1,14654535	1,14828459	1,16971565	1,18903804	1,212466	1,24071498
Bkoam	0,74378213	0,97871704	1,0456722	1,02437726	0,98203556	0,96138486	0,97389665	1,005833	1,03854443	1,0797755	1,12663604	1,17680097
Boeing	0,78138912	0,97400326	0,92280961	0,89590612	0,89997284	0,92739114	0,96300102	0,99747747	1,03295854	1,06815198	1,10871811	1,16010867
Caterpillar	0,83022183	1,06919469	1,05926469	1,03815863	1,08915416	1,1789099	1,29341632	1,43490587	1,57536532	1,76474097	1,97094914	2,19348215
Chevron	0,79591422	1,05364696	1,13680877	1,14302686	1,164696	1,20247005	1,25231986	1,30772025	1,36806199	1,44424557	1,53679557	1,66186699
Citigroup	0,7819039	1,004335	0,99781761	0,97518558	0,9833785	1,01271803	1,04592476	1,08725039	1,14051621	1,20646067	1,27551366	1,35685681
Coca Cola	0,73970569	0,91156633	0,94072517	0,94103159	0,94741394	0,9857356	1,03579685	1,09247316	1,16029052	1,24264021	1,34745372	1,4642782
Dupont	0,6793959	0,97206418	1,1858	1,27660883	1,27345179	1,21477309	1,13863294	1,07871939	1,04303695	1,02180411	1,01655807	1,02403192
Exxon	0,76888833	0,98859291	1,07189033	1,12930662	1,19827065	1,28813513	1,39487644	1,51274601	1,6341186	1,76080538	1,93704095	2,16554817
GE	0,75302557	0,94178797	1,00962861	1,02251329	1,02962492	1,03571177	1,05561912	1,08880074	1,13102983	1,18064637	1,24549254	1,32865395
GM	0,80717297	1,06213463	1,09647946	1,06228975	1,09049307	1,16614077	1,2631301	1,3692587	1,48279015	1,62706655	1,77817661	1,96781979
HP	0,75392587	0,95388506	1,02387272	1,04096826	1,05021581	1,0615222	1,08309614	1,10698901	1,13906492	1,18840376	1,24685927	1,31515159
homedepot	0,77845554	0,94974679	0,96814155	1,01512206	1,09188313	1,18751556	1,29037843	1,39815302	1,51133922	1,62550278	1,77187179	1,98580123
IBM	0,7019044	0,96102083	1,10271797	1,09032032	1,00195706	0,91333485	0,84733761	0,82509943	0,82213961	0,83224236	0,84713173	0,86077696
intel	0,73951178	0,93980367	0,95392175	0,91344429	0,86870889	0,85081267	0,85420679	0,86860614	0,89650955	0,9243558	0,954046	0,98259339
Johnson	0,7855993	0,96848737	0,98296269	0,94950566	0,97270425	1,02603599	1,08740334	1,15481923	1,23901173	1,32931433	1,43316619	1,58149822
JP Morgan	0,77066125	1,0286102	1,07689426	1,04035387	0,99198373	0,96266128	0,9758021	0,99687965	1,02954706	1,06833796	1,11756524	1,17488988
Mc Donalds	0,78298106	0,99873733	0,98978127	0,95867356	1,00501308	1,06714448	1,1244312	1,17916986	1,23952837	1,30544893	1,37668134	1,44661946
Merck	0,76281509	0,95705433	0,95661112	0,91571784	0,91008618	0,92259149	0,95488429	0,99254153	1,03701321	1,08719217	1,14339768	1,20172934
Microsoft	0,58111249	0,78936797	0,97535771	1,12366407	1,25021086	1,29855549	1,29258052	1,25712469	1,20964975	1,1506162	1,08612632	1,02100416
Pfizer	0,71487587	0,93963038	1,03328226	1,05204492	1,04891438	1,04211925	1,03984845	1,05008279	1,06964203	1,0949024	1,12342931	1,14990352
Procter	0,72212884	1,03168722	1,30872942	1,51353911	1,6050747	1,60422027	1,56295821	1,52185085	1,50024298	1,5197382	1,5717711	1,64322674
Unitech	0,77739073	0,97421922	0,96383992	0,97023367	1,01070199	1,07344602	1,13871702	1,21243504	1,294602	1,37693784	1,46309199	1,55616907
Verizon	0,76828595	1,01298564	1,0364164	1,02265983	1,03493058	1,07264222	1,12123579	1,1804441	1,23331643	1,29527658	1,35913771	1,42567171
Wallmart	0,75006653	0,97862826	1,07189396	1,09043509	1,07815473	1,0739693	1,08642437	1,11598008	1,15619911	1,19569963	1,2403494	1,29342552
Wdisney	0,74397257	0,98868182	1,04430193	0,99431182	0,93621041	0,90156369	0,88978644	0,89684896	0,91448075	0,93341984	0,95545128	0,97483463

6.2.2. Tablas sobre Precios Close

Empresas	R ² de las dimensiones de correlación para los precios close												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
3m	0,9999491	0,99997574	0,99989876	0,99926365	0,9957453	0,9909917	0,98652762	0,98270061	0,97912063	0,97563515	0,97453041	0,97331171	
Alcoa	0,99997241	0,99997405	0,99964487	0,99701559	0,99389174	0,99065028	0,98442035	0,97746788	0,97498237	0,9762685	0,97787306	0,97945984	
Amexp	0,99964918	0,99994301	0,99951923	0,99809815	0,9988156	0,99957358	0,99870871	0,99720036	0,99595975	0,99462379	0,99310452	0,99144691	
Att	0,99799235	0,99899524	0,99985778	0,99970118	0,99890276	0,99865717	0,99920665	0,99939029	0,99895059	0,99869696	0,99847572	0,99869802	
Bkoam	0,99980642	0,99998683	0,99972511	0,99924494	0,99959665	0,99894128	0,99734563	0,9958557	0,9937125	0,99153194	0,98989572	0,98791459	
Boeing	0,99994569	0,99980122	0,99990606	0,99929869	0,99828934	0,99721588	0,99573655	0,99419943	0,99227051	0,98971461	0,98666296	0,98154309	
Caterpillar	0,99992304	0,99997586	0,99989227	0,99760754	0,99201702	0,98600369	0,98004628	0,97288501	0,96779977	0,96002078	0,95316086	0,95289944	
Chevron	0,99984927	0,99997452	0,99998373	0,99977577	0,99854278	0,99631164	0,99393519	0,99154094	0,98825388	0,9831623	0,98018318	0,97325799	
Citigroup	0,99982138	0,99977436	0,99851201	0,99915809	0,99932245	0,99821	0,9968065	0,99545354	0,9934736	0,99025499	0,98638151	0,9836987	
Coca Cola	0,99962209	0,99961102	0,99997805	0,99994384	0,99901588	0,99763504	0,99619099	0,99499164	0,99392804	0,99221247	0,99053161	0,98758481	
Dupont	0,99565178	0,99669503	0,9985463	0,99964869	0,99810575	0,9931758	0,98950383	0,99035241	0,9948659	0,9981814	0,9993042	0,9990494	
Exxon	0,9998714	0,99969896	0,99958602	0,99848263	0,99665218	0,99363712	0,98975691	0,98616105	0,9818587	0,97442338	0,9715363	0,96714363	
GE	0,99957992	0,99965989	0,99973146	0,99956673	0,99977949	0,9998503	0,9989814	0,99712492	0,99447043	0,99045757	0,98411337	0,9756763	
GM	0,99997335	0,99997555	0,99925481	0,99686218	0,99418247	0,98963059	0,98397296	0,97727709	0,97082927	0,9637552	0,9610207	0,9578784	
HP	0,99942523	0,99953366	0,9993528	0,99904403	0,99947885	0,99967064	0,99973427	0,99958632	0,99929171	0,99880319	0,99873501	0,99851313	
homedepot	0,99997499	0,99995206	0,99975745	0,99774022	0,99454422	0,99088551	0,98606699	0,98031658	0,97266253	0,9639276	0,95766556	0,9348397	
IBM	0,99753544	0,998943	0,99922176	0,99421133	0,99097824	0,99213592	0,99628753	0,99867012	0,99882293	0,99866193	0,99813895	0,99751937	
intel	0,99951329	0,9997359	0,99791416	0,99793206	0,99931097	0,99933828	0,99829863	0,99712754	0,99634139	0,9963543	0,99638747	0,99619074	
Johnson	0,99994085	0,99998897	0,99988581	0,99963904	0,99837829	0,99649399	0,99505841	0,99351405	0,99107556	0,98802816	0,98497507	0,98047245	
JP Morgan	0,9995658	0,99995939	0,99872692	0,99877993	0,99974367	0,99859195	0,99778246	0,99698139	0,99570431	0,99331882	0,99028455	0,98601451	
Mc Donalds	0,99977427	0,99999856	0,99995742	0,9990617	0,99676048	0,9940878	0,99092845	0,98807024	0,984705	0,98035132	0,97644802	0,97109544	
Merck	0,99972568	0,99997189	0,9992513	0,99948772	0,99989469	0,99969854	0,99900127	0,99773583	0,99698569	0,99613302	0,99511932	0,99399142	
Microsoft	0,99073188	0,98491927	0,98470461	0,98995727	0,99499857	0,99544197	0,98844833	0,97884455	0,97079069	0,96959396	0,97118824	0,97314019	
Pfizer	0,99852729	0,99804474	0,99959419	0,9993691	0,99801444	0,99768984	0,9986092	0,99955208	0,99967849	0,99925047	0,99920418	0,99933539	
Procter	0,99968036	0,99986948	0,99996675	0,99977275	0,99905375	0,996765	0,99416173	0,99195587	0,99024991	0,98822399	0,98542336	0,98111321	
Unitech	0,99990666	0,99999793	0,99989212	0,99972061	0,99779992	0,99523647	0,99239216	0,98915379	0,98657411	0,98308299	0,9784807	0,97264595	
Verizon	0,99995211	0,99997341	0,99989401	0,99932974	0,99822867	0,99746585	0,99683115	0,99529007	0,99387904	0,99107567	0,98725362	0,98469924	
Wallmart	0,99958279	0,99947006	0,99980482	0,99991314	0,99951349	0,99816799	0,99599056	0,994795	0,99332751	0,99190074	0,98936795	0,98525732	
Wdisney	0,99944101	0,99994295	0,99928843	0,99880298	0,99936238	0,99853018	0,99748685	0,99738657	0,99745781	0,99770093	0,99743234	0,99688877	

Figura 6.3: Tabla que muestra la prueba estadística de $F(2)$ de los precios close.

Figura 6.4: Tabla que muestra la dimensión de correlación de los precios close.

Empresas	Dimensiones de correlación para los precios close											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3m	0,80505604	1,07033974	1,12648698	1,11104993	1,14502101	1,21782975	1,3130731	1,41906555	1,5379262	1,67114818	1,80715617	1,95241989
Alcoa	0,82229309	1,04884182	1,07404662	1,1260222	1,22174924	1,33823258	1,48336573	1,65659459	1,82951201	2,00522447	2,18921032	2,39521631
Amexp	0,7401423	0,997293	1,11258675	1,07928741	1,00981496	0,9689097	0,97481526	0,99753553	1,03280625	1,06907011	1,11089513	1,15506308
Att	0,70935306	0,96305273	1,11160698	1,19614854	1,21864378	1,20622808	1,19754443	1,19634914	1,19158068	1,19686533	1,20580277	1,21861384
Bkoam	0,74462999	0,98832565	1,06063331	1,03604748	0,98877532	0,97191472	0,9870049	1,02009387	1,06295121	1,10412589	1,14916208	1,19074018
Boeing	0,77320191	0,93678664	0,91497773	0,89488189	0,91361284	0,95409405	1,00055947	1,04293407	1,09339439	1,14843038	1,20487772	1,27045183
Caterpillar	0,82584605	1,05749058	1,05775175	1,06624248	1,15830189	1,28683362	1,43688866	1,61519125	1,78596816	2,00524773	2,25407019	2,4995313
Chevron	0,79183743	1,0476194	1,12059007	1,13255935	1,16123338	1,22182356	1,29832498	1,38790304	1,49474451	1,62481223	1,77286309	1,9785183
Citigroup	0,78604335	1,01696986	1,0313209	0,98069433	0,96004834	0,97774801	1,01845288	1,06828063	1,12039473	1,18417687	1,25893351	1,33737563
Coca Cola	0,74071755	0,95499526	1,02408797	0,9894336	0,97817686	1,0064248	1,04810677	1,10022394	1,15572859	1,22056534	1,28428581	1,36095833
Dupont	0,66710483	0,95556944	1,17787517	1,31003096	1,34847575	1,31184381	1,24147983	1,15659658	1,09029025	1,04936317	1,03323544	1,03365797
Exxon	0,77442396	1,01602152	1,1109806	1,15470403	1,21793337	1,30430703	1,4182654	1,54549496	1,68219097	1,85093599	2,01562232	2,21376064
GE	0,74997779	0,92007552	0,97930525	1,0034971	1,01103404	1,03191021	1,06154172	1,09952462	1,15334413	1,22993347	1,32942242	1,45226072
GM	0,80430164	1,00762153	1,02487257	1,07060437	1,14583937	1,25096796	1,37131975	1,5207294	1,68289673	1,87537556	2,06759079	2,26449253
HP	0,75517355	0,97814618	1,06149897	1,08922916	1,10205774	1,10901461	1,11502493	1,12161053	1,13696463	1,16264839	1,19674412	1,23411324
homedepot	0,78042748	0,93513684	0,94414577	0,98169856	1,05576734	1,14644525	1,25851755	1,38547067	1,53957819	1,72483477	1,92996365	2,3020364
IBM	0,70086582	0,96351249	1,11022082	1,10253739	1,01580879	0,92484631	0,85547764	0,83058317	0,82539601	0,83144426	0,84339563	0,85838801
intel	0,73983816	0,94802436	0,96386332	0,92971125	0,87574392	0,8606494	0,86476864	0,88229307	0,90585963	0,92872034	0,95606533	0,98264846
Johnson	0,78643589	0,9765544	1,00405902	0,98742277	0,99959437	1,04179944	1,10015311	1,16351315	1,23857835	1,31849701	1,40919437	1,51295748
JP Morgan	0,77133419	1,02513307	1,0686343	1,01395971	0,96205209	0,95493877	0,98396297	1,02371212	1,06663127	1,10220745	1,14671015	1,20089025
Mc Donalds	0,79009938	0,99185055	0,96537417	0,95635652	0,9934573	1,04734067	1,11193479	1,1820741	1,2652445	1,35734542	1,45722662	1,58149445
Merck	0,76708162	0,99389054	1,01345446	0,94163364	0,91257513	0,91122508	0,92941236	0,95987201	0,99870158	1,04011947	1,0841351	1,12875657
Microsoft	0,57124252	0,78369556	0,9935257	1,15250665	1,24282864	1,27952487	1,29647461	1,28227495	1,24281486	1,18934752	1,13605455	1,08776701
Pfizer	0,70783065	0,95402552	1,10395902	1,14895178	1,13203966	1,10341691	1,07935747	1,06305493	1,05743827	1,05675412	1,06795391	1,08521286
Procter	0,7892868	1,09110941	1,22874291	1,22600079	1,19921654	1,20722371	1,24908298	1,30948715	1,37757652	1,45457246	1,53856464	1,63419223
Unitech	0,77959327	1,03111273	1,05634317	1,0178711	1,02826407	1,07527507	1,1392482	1,21140464	1,28206232	1,36457141	1,46124338	1,56766022
Verizon	0,77509282	0,95394667	0,99043573	1,00329834	1,04532801	1,0988852	1,15556586	1,21461296	1,27037969	1,34116757	1,42916049	1,53314858
Wallmart	0,75171249	0,97871238	1,05826972	1,0595879	1,05692132	1,06432756	1,09694878	1,14058359	1,1990569	1,25782174	1,32292021	1,40150969
Wdisney	0,75781402	0,97349882	1,00884287	0,95712097	0,90676544	0,88656659	0,89798719	0,91820826	0,94040294	0,96437874	0,98548002	1,01162113

Capítulo 7

Bibliografía

- [1] A.M. Albano, J. M. (1988). Singular-Value Decomposition and the Grassberger-Procaccia Algorithm. *Phys. Rev. A* 38, 3017.
- [2] Abarbanel, H. D. (1996). *Analysis of Observed Chaotic Data*. New York: Springer-Verlag.
- [3] Albano A. M., M. J. (1988). Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm. *Physical Review A* vol. 38, 3017-3026.
- [4] Andrew M. Frase, H. L. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information . *Physical Review A*.
- [5] C. J. Cellucci, A. M. (n.d.). *Phys. Rev. E* 67.
- [6] C. J. Cellucci, A. M. (2005). Statistical Validation of Mutual Information Calculations: Comparison of Alternative Numerical Algorithms. *Phys. Rev. E* 71, 66208.
- [7] Cellucci, e. a. (2005). Statistical validation of mutual information calculations. *Phy Rev E*, vol. 71, 066208.
- [8] Elizabeth Bradley, H. K. (2015). *Nonlinear time-series analysis revisited*.
- [9] Grassberger P., P. I. (1983). Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters* vol. 50, 346-349.
- [10] Henry D. I. Abarbanel, R. B. (1993). The analysis of observeb chaotic data in physical systems. *Rev M Phys*, 65:1331-1392.
- [11] J., T. (1986). Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data. *Physical Review A* vol. 34, 2427-2432.
- [12] Lucas Lacasa, J. G.-G. (2014). Analytical estimation of the correlation dimension of integer lattices.

- [13] Luis A. Aguirre, A. A. (1997). A tutorial introduction to nonlinear dynamics in economics. Nova Economa.
- [14] Merrikh-Bayat, F. (2009). Time series analysis of Parkinsons disease, Huntingtons disease. Elsevier, Science Direct.
- [15] Nichkawde, C. (2014). Sparse model from optimal nonuniform embedding of time series.
- [16] P. E. Rapp. A. M. Albano, T. I. (1993). Phys. Rev. E 47, 2289.
- [17] Rissanen, Y. (1992). Stochastic Complexity in Statistical Inquiry. World Scientific.
- [18] Sandip V. George, G. A. (2014). Eect of uneven sampling on correlation dimension.
- [19] Shohei Hidaka, N. K. (2013). On the Estimation of Pointwise Dimension.
- [20] Silverman, B. (1986). Density Estimation. Chapman & Hall.
- [21] Small, M. (2005). Applied Nonlinear Time Series Analysis. World Scientific Publishing.
- [22] Speed, T. a. (1989). Stochastic Complexity and Model Selection. 208th IMS Meeting, abstract 208-33 in IMS Bulletin, 18, No. 1, p 42.
- [23] Swiney, A. M. (1986). A. 33, 1134. Phys. Rev.
- [24] T. M. Cover, J. A. (1991). Elements of Information Theory. Wiley.
- [25] Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. Springer Lecture Notes in Mathematics.