UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

AXIOMAS DE SEPARACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RUBÉN JIMÉNEZ BOLAÑOS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX
2016

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres Federico y Raquel que con tanto esfuerzo, dedicación y amor me han apoyado hasta el final de mis estudios.

A mis hermanos Heber, Isaac y Daniel con quienes he compartido los momentos más felices y porque cada uno, a su manera me han enseñado a convertirme en una mejor persona y ser persistente en mis metas.

Al Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano. Gracias por todas las horas que con mucha paciencia y profesionalismo me dedicaste, aclarando mis dudas y corrigiendo mis errores. Pero sobre todo gracias por ser una gran persona que siempre se preocupó por mejorar mi desempeño y brindarme su apoyo incondicional en cualquier situación.

A Luis porque cada momento que hemos compartido dentro y fuera de la universidad me confirma su genuina amistad. Tu constancia y dedicación son un gran ejemplo para mi.

A José que en tantos años de amistad no hemos dejado de encontrar una razón para reír ante cualquier circunstancia y afrontar cualquier situación con buen humor, ánimo y cordura.

A mis sinodales que se tomaron el tiempo para leer mi trabajo. Sus correcciones y recomendaciones contribuyeron en gran medida en la mejora de esta tesis.

Índice general

Prefacio

Un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica d cuya topología generada es τ. Un problema de gran importancia que surgió a principios del siglo XX fue el de determinar condiciones bajo las cuales un espacio topológico es metrizable. Buscando una solución a este problema se introdujeron los axiomas de separación, la idea era encontrar una condición de separación que hiciera a un espacio metrizable. Intuitivamente, los axiomas de separación son condiciones adicionales que se le piden a un espacio topológico para determinar el grado en el que puntos y conjuntos del espacio en cuestión pueden ser separados por medio de conjuntos abiertos.

En un curso básico de topología se estudian algunos axiomas de separación, como por ejemplo, los axiomas T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4. Sin embargo, aún después de la solución del problema de metrización, fueron surgiendo nuevos axiomas que se nombraron de acuerdo a su relación con los axiomas ya establecidos. En el presente trabajo estudiaremos 17 axiomas de separación incluyendo los anteriormente mencionados.

En el segundo capítulo se definen los axiomas, se dan algunas caracterizaciones de éstos y se estudian las relaciones que existen entre ellos. Una parte importante de este trabajo son los ejemplos que demuestran que en realidad cada axioma define una clase distinta de espacios topológicos.

Otro aspecto que analizaremos es el comportamiento de los axiomas bajo subespacios, bajo funciones continuas y, por último, bajo productos cartesianos en el sentido siguiente:

Sea P una propiedad para un espacio topológico X. Se dice que P es una *propiedad topológica*, si cada espacio Y homeomorfo a X tiene la propiedad P. Análogamente, si X tiene una propiedad P y resulta que cada subespacio $Y \subseteq X$ también la tiene, entonces se dice que P es una *propiedad hereditaria*.

Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Si cada X_i tienen cierta propiedad P, se dice que P es una *propiedad multiplicativa* siempre que el espacio X con la topología producto tiene la propiedad P. Inversamente, si el producto X tiene la propiedad P y resulta que cada X_i también la tiene, entonces P en una *propiedad factorizable.*

El tercer capítulo está dedicado a estudiar condiciones bajo las que un axioma de separación es propiedad topológica, hereditaria, multiplicativa y factorizable.

Finalmente, estudiaremos algunos axiomas de separación en un espacio X y su relación con el conjunto $2^X = \{C \subseteq X : C \neq \emptyset \text{ y } C \text{ es cerrado}\}$ llamado el hiperespacio de cerrados de X.

Dado un espacio X que satisface el axioma T_i nos preguntamos: ¿Qué axioma satisface 2^X? Inversamente, si 2^X cumple algún axioma de separación ¿el espacio X también lo cumple? Responderemos a estas preguntas en un cuarto capítulo para los axiomas T_0, T_1, T_2, T_3 y T_4.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos los resultados básicos que usaremos a lo largo de este trabajo, así como la notación que será requerida.

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces denotaremos como $\operatorname{int} A$ y $\overline{A}$ al interior y la cerradura de A (en X), respectivamente, y como $\operatorname{int}_B(A)$ y $\operatorname{Cl}_B(A)$ al interior y la cerradura de A en B, respectivamente.

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se define el* ***derivado*** *de A, el cual denotaremos por A', como el conjunto $A' = \{x \in X\colon$ para todo U abierto tal que $x \in U$, se tiene que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$. A los elementos de A' se les llama* ***puntos de acumulación****.*

Observación 1.2. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A} = A \cup A'$.*

Demostración. Sea $x \in A \cup A'$. Si $x \in A$, entonces $x \in \overline{A}$. Si $x \in A'$, entonces para todo abierto U tal que $x \in U$ se tiene que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \cap U \neq \emptyset$. Así tenemos que $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Ahora tomemos $x \in \overline{A}$ y supongamos que $x \notin A$. Entonces para todo abierto U tal que $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$. Como $x \notin A$, se tiene que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, por lo que $x \in A'$. De esta manera $\overline{A} \subseteq A \cup A'$ y por lo tanto $\overline{A} = A \cup A'$. □

Cuando nos refiramos al conjunto $\mathbb{R}$ como un espacio topológico, siempre supondremos que tiene la topología usual, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 1.3. *Decimos que un conjunto no vacío A es* ***numerable*** *si existe una función inyectiva de A en $\mathbb{N}$, es decir, si $|A| \leq |\mathbb{N}|$.*

Definición 1.4. *Si X es un espacio topológico y $x \in X$, una* ***vecindad*** *de x es un conjunto $U \subseteq X$ el cual contiene un abierto $V \subseteq X$ que tiene a x. La colección $\mathcal{U}_x$ de todas las vecindades de x se llama el* ***sistema de vecindades*** *de x.*

Definición 1.5. *Una* ***base de vecindades*** *de x en un espacio topológico X es una subcolección $\mathcal{B}_x$ tomada del sistema de vecindades $\mathcal{U}_x$, la cual tiene la propiedad de que cada $U \in \mathcal{U}_x$ contiene algún $V \in \mathcal{B}_x$.*

Observemos que $\mathcal{U}_x$ queda determinado como sigue:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : \text{ existe } B \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } B \subseteq U\}.$$

Una vez que se haya fijado una base de vecindades de x, a sus elementos les llamaremos *vecindades básicas* de x.

Diremos que una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ de x en X es una *base local abierta* si cada uno de sus elementos es un subconjunto abierto de X.

El siguiente teorema se prueba en [10, Teorema 4.5 pág. 33].

Teorema 1.6. *Supongamos que X es un espacio topológico y que para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ es una base local abierta en x. Entonces:*

a) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces, $x \in V$.

b) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

c) Para cada $V \in \mathcal{B}_x$ y toda $y \in V$, existe $V_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $V_y \subseteq V$.

d) $G \subseteq X$ es abierto si y sólo si G contiene una vecindad básica de cada uno de sus puntos.

Supongamos ahora que X es un conjunto y que, para cada $x \in X$, tenemos una familia no vacía $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de X, tal que $\mathcal{B}_x$ satisface a), b) y c), si definimos a los abiertos como en d), lo que resulta es una topología en X tal que, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ es una base local abierta en x.

Definición 1.7. *Si X es un conjunto, una **base** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X llamados **elementos básicos** tales que:*

a) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

b) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Supongamos ahora que X es un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Si $\mathcal{B}$ satistace a) y b), se define la topología τ generada por $\mathcal{B}$ como sigue: Un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (esto es, un elemento de τ), si para cada $x \in U$ existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

Definición 1.8. *Una **subbase** $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X, tal que la familia de intersecciónes finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ es una base para una topológia de X.*

El siguiente resultado conocido como el *Lema de la Subbase de Alexander*, se prueba en [10, 17S, pág. 129].

Teorema 1.9. *Sean X un espacio topológico T_2 y $\mathcal{P}$ una subbase para X. Entonces X es compacto si y sólo si toda cubierta de X por elementos de $\mathcal{P}$ tiene una subcubierta finita.*

Lema 1.10. *[12, Teorema 8.3 pág.79] Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es continua.

b) La imagen inversa de cada subconjunto cerrado en Y es cerrado en X.

c) La imagen inversa de cada elemento de una subbase (base) para Y es abierto en X (no necesariamente un elemento subbásico o básico de X).

d) Para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta W de $f(x)$ en Y, existe una vecindad abierta V de x en X tal que $f(V) \subseteq W$.

e) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ *para todo* $A \subseteq X$.

f) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ *para todo* $B \subseteq Y$.

Definición 1.11. *Sean* X, Y *espacios topológicos,* $A \subseteq X$ *y* $f : X \to Y$ *una función. Se define la* ***restricción*** *de* f *a* A *como la función* $f|_A : A \to Y$ *tal que* $f|_A(a) = f(a)$ *para toda* $a \in A$.

Teorema 1.12. *[10, Teorema 7.5, pág .45] Sean* X, Y *espacios topológicos. Si* $A \subseteq X$ *y* $f : X \to Y$ *es continua entonces* $f|_A$ *es continua.*

Definición 1.13. *Supongamos que tenemos una familia* $\{X_s\}_{s\in S}$ *de espacios topológicos. Consideremos el producto cartesiano* $X = \prod_{s\in S} X_s$.

La ***topología producto*** *es la que tiene por base conjuntos de la forma* $\prod_{s\in S} U_s$ *que satisfacen las siguientes dos propiedades:*

a) U_s *es abierto en* X_s *para cada* $s \in S$.

b) Existe $F \subseteq S$ *finito tal que* $U_s = X_s$ *para toda* $s \in S \setminus F$ *y* $U_s \neq X_s$ *para toda* $s \in F$.

Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{s\in S} X_s$ y consideremos la familia de funciones $\{p_s\}_{s\in S}$, donde p_t asigna a cada punto $x = \{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ su coordenada $x_t \in X_t$. Las funciones $p_t : \prod_{s\in S} X_s \to X_t$ son llamadas las *proyecciones* de $\prod_{s\in S} X_s$ sobre X_t.

El siguiente teorema se prueba en [10, Teorema 8.6, pág. 54].

Teorema 1.14. *Sean* $\{X_s\}_{s\in S}$ *una familia de espacios topológicos y* $X = \prod_{s\in S} X_s$. *Entonces las proyecciones* $p_t : \prod_{s\in S} X_s \to X_t$ *son continuas y abiertas.*

Capítulo 2

Axiomas de separación

El primer tratado sistemático de los axiomas de separación es debido a Urysohn. Una discusión mas detallada fue dada por Freudenthal y Van Est en 1951. Estas dos investigaciones tratan sobre axiomas de separación más fuertes que T_1. El único axioma de separación entre T_0 y T_1 que se conocía hasta entonces se introdujo por J. W. T. Youngs quien lo encontró en el estudio de espacios localmente conexos. Otro axioma fue sugerido por C. T. Yang, quien observó que el conjunto derivado de todo conjunto es cerrado si y sólo si el conjunto derivado de todo punto es cerrado. [14]

En este capítulo definiremos los axiomas de separación, daremos formas equivalentes de enunciarlos y veremos cómo están relacionados entre sí. También se determinará cuáles axiomas son propiedades hereditarias.

2.1. Espacios T_0

La primera clase de espacios que vamos a estudiar es la de los espacios T_0.

Definición 2.1. *Un espacio topológico X es T_0, si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$.*

En 1935 se publico el libro *Topologie I* de Pavel S. Alexandroff y Heinz Hopf. En dicho texto se indica que el axioma de separación más débil es el

T_0. Fue introducido por Andreui M. Kolmogoroff. Por tanto, el axioma T_0 se conoce desde 1935.

El siguiente es un ejemplo sencillo de un espacio topológico T_0.

Ejemplo 2.2. *El conjunto* $X=\{a,b,c,d\}$ *con la topología* $\tau = \big\{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X, \emptyset\big\}$ *es un espacio* T_0.

Demostración. Observemos que para los puntos a y c, $\{b,c\}$ es un abierto que tiene a c pero no a a, para a y d, $\{a,b\}$ es un abierto que tiene a a pero no a d, para c y d, $\{b,c\}$ es un abierto que tiene a c y no a d, por último notemos que $\{b\}$ es un abierto que tiene a b pero que no tiene a ninguno de los otros puntos, por lo tanto X es T_0. □

Teorema 2.3. *Existen espacios que no son* T_0.

Demostración. La topología indiscreta en un conjunto X con más de un punto es un espacio que no es T_0. Esto es porque X es el único abierto no vacío y contiene a cualesquiera dos puntos distintos y, por tanto, no podemos separar un punto de otro con ningún abierto. □

Antes de enunciar nuestro primer resultado sobre los espacios T_0, introduciremos las siguientes dos definiciones.

Definición 2.4. *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$. *Se define el* ***núcleo*** *de* A *denotado por* $A^\wedge$ *como*

$$A^\wedge = \bigcap \{G \subseteq X : A \subseteq G \text{ y } G \text{ es abierto}\}.$$

Si $A = A^\wedge$, *entonces se dice que* A *es un* ***Λ-conjunto***.

Tomemos $x \in X$ y $A \subseteq X$. Notemos que si $x \in A$, entonces $x \in G$ para todo abierto G tal que $A \subseteq G$, por lo tanto, $x \in \bigcap\{G \subseteq X : A \subseteq G$ y G es abierto$\}=A^\wedge$. Esto lo escribimos en la siguiente:

Observación 2.5. *En un espacio topológico* X, *se tiene que* $A \subseteq A^\wedge$ *para todo* $A \subseteq X$.

Lema 2.6. *Sea* $\{U_i : i \in I\}$ *una famila de subconjuntos abiertos de* X. *Entonces* $L = \bigcap_{i\in I} U_i$ *es un* Λ*-conjunto.*

Demostración. En efecto, sea $z \in L^\wedge$. Entonces, $z \in \bigcap\{G \subseteq X : L \subseteq G$ y G es abierto$\}$. Tenemos que para toda $i \in I$, $L \subseteq U_i$ y U_i es abierto, lo que nos dice que $z \in U_i$ para toda $i \in I$, y así $z \in L$. Por lo tanto $L^\wedge \subseteq L$ y luego por la Observación 2.5 obtenemos que L es un Λ-conjunto. $\square$

Definición 2.7. *Decimos que $A \subseteq X$ es λ-**cerrado** si $A = L \cap C$, donde L es un Λ-conjunto y C es un subconjunto cerrado de X.*

El teorema que presentamos a continuación, nos da otras maneras de enunciar el axioma T_0 donde se involucran nuestras definiciones anteriores.

Teorema 2.8. *En un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es T_0.

b) Para todo $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

c) Para todo $x \in X$, $\{x\}'$ (el derivado de x) se puede escribir como unión de subconjuntos cerrados de X.

d) Para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es λ-cerrado.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es T_0 existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$, es decir, existe un abierto U tal que $\{x\} \cap U = \emptyset$ y $y \in U$ o $\{y\} \cap U = \emptyset$ y $x \in U$, luego $x \notin \overline{\{y\}}$ o $y \notin \overline{\{x\}}$. Si $x \notin \overline{\{y\}}$, entonces, como $x \in \overline{\{x\}}$, tenemos que $\overline{\{x\}} \nsubseteq \overline{\{y\}}$ y así $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$. Análogamente, si $y \notin \overline{\{x\}}$, entonces tenemos que $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$, lo cual prueba la afirmación b).

$b) \Rightarrow c)$. Tomemos $x \in X$ y veamos que $\{x\}' = \bigcup\{\overline{\{y\}} : y \in \{x\}'\}$ la cual es una unión de cerrados.
En efecto, si $y \in \{x\}'$, entonces, como $y \in \overline{\{y\}}$, se tiene que $y \in \bigcup\{\overline{\{y\}} : y \in \{x\}'\}$, así $\{x\}' \subseteq \bigcup\{\overline{\{y\}} : y \in \{x\}'\}$.

Ahora tomemos $z \in \bigcup\{\overline{\{y\}} : y \in \{x\}'\}$. Tenemos que $z \in \overline{\{y\}}$ para alguna $y \in \{x\}' = \overline{\{x\}} \setminus \{x\}$, luego $\{y\} \subseteq \overline{\{x\}}$ y $y \neq x$, por lo que $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$, y por $b)$ $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.
Observemos que si $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$, por lo que $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ y se tendrá $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, lo cual no puede pasar, de manera que $x \notin \overline{\{y\}}$. Entonces $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \{x\}'$, y como $z \in \overline{\{y\}}$, tenemos que $z \in \{x\}'$, así $\bigcup\{\overline{\{y\}} : y \in \{x\}'\} \subseteq \{x\}'$, por lo tanto, tenemos la igualdad.

c) $\Rightarrow$ *d*). Sea $x \in X$ y supongamos que $\{x\}' = \bigcup_{i\in J} C_i$, donde C_i es un subconjunto cerrado de X para toda $i \in J$. Veamos que el conjunto $L = X\backslash\{x\}' = \bigcap_{i\in J} X\backslash C_i$ es un Λ-conjunto, es decir, que $L = \bigcap\{G \subseteq X : G \supseteq L$ y G es abierto$\}$.

Por la Observación 2.5 sólo hay que demostrar que $L^\wedge \subseteq L$. Tomemos $z \in L^\wedge$. Entonces $z \in G$ para todo G abierto tal que $G \supseteq \bigcap_{i\in J} X\backslash C_i$, notemos que $X\backslash C_i$ es abierto para cada i, además cada uno de estos conjuntos contiene a $\bigcap_{i\in J} X \setminus C_i$ para cada i, por tanto tenemos que $z \in X \setminus C_i$ para toda i, luego $z \in \bigcap_{i\in J} X \setminus C_i = L$. Así $L^\wedge \subseteq L$ y concluimos que L es Λ-conjunto.

Ahora probaremos que $\{x\} = L \cap \overline{\{x\}}$. Para esto, recordemos que $L = X \setminus \{x\}'$. Entonces se tiene que:

$$L \cap \overline{\{x\}} = (X \setminus \{x\}') \cap \overline{\{x\}} = (X \cap \overline{\{x\}}) \setminus \{x\}' = \overline{\{x\}} \setminus \{x\}' = \{x\}.$$

Luego, $\{x\}$ es la intersección de un Λ-conjunto y el cerrado $\overline{\{x\}}$. Con esto hemos probado *d*).

d) $\Rightarrow$ *a*). Para finalizar tomemos dos puntos distintos $x, y \in X$. Por d), $\{x\} = L \cap C$, donde C es cerrado y L es Λ-conjunto, es decir:

$$L = \bigcap\{G \subseteq X : G \supseteq L \text{ y } G \text{ es abierto}\}.$$

Notemos que $x \in C$.Tenemos dos casos:

Caso I) $y \notin C$. Entonces $X\backslash C$ es un abierto tal que $y \in X\backslash C$ y $x \notin X\backslash C$.

Caso II) $y \in C$. En este caso, puesto que $\{x\} = L\cap C$, se tiene que $y \notin L$, luego existe un abierto G tal que $L \subseteq G$ pero $y \notin G$, y como $x \in L$ resulta que $x \in G$.

Así, en ambos casos encontramos un abierto que tiene a x y no tiene a y o un abierto que tiene a y pero no a x, lo que significa que X es T_0. □

Corolario 2.9. *Un espacio topologico X es T_0 si y sólo si, para cada $x, y \in X$ si $x \in \overline{\{y\}}$ y además $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $x = y$.*

Veamos que el axioma T_0 se preserva bajo subespacios.

Teorema 2.10. *Si X es T_0 y $Y \subseteq X$, entonces Y es T_0.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$ con $x \neq y$. Entonces $x, y \in X$ y, como X es T_0, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$. En cualquier caso tomamos $U \cap Y$, el cual es abierto en Y y tenemos que $x \in U \cap Y$ y $y \notin U \cap Y$ o $y \in U \cap Y$ y $x \notin U \cap Y$. Por lo tanto, Y es T_0. □

2.2. Espacios $T_{\frac{1}{4}}$

En 1997, F. G. Arenas, J. Dontchev y M. Ganster [3], introdujeron por la siguiente clase de espacios, que llamaron espacios $T_{\frac{1}{4}}$, en los cuales se puede separar un punto de un conjunto finito ya sea con un abierto, o bien con un cerrado.

Definición 2.11. *Un espacio topológico* X *es* $T_{\frac{1}{4}}$*, si para todo* $F \subseteq X$ *finito y para todo* $y \in X \setminus F$*, existe* $U \subseteq X$ *tal que* $F \subseteq U$*,* $y \notin U$ *y* U *es abierto o cerrado.*

Existen otras formas alternativas de enunciar el axioma $T_{\frac{1}{4}}$. Para esto definimos el concepto de conjunto localmente finito:

Definición 2.12. *Sea* X *un espacio topológico. Se dice que* $F \subseteq X$ *es* ***localmente finito****, si para todo punto* $x \in X$*, existe un abierto* U *tal que* $x \in U$ *y* $F \cap U$ *es finito.*

Teorema 2.13. *Sea* X *un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X *es* $T_{\frac{1}{4}}$.

b) Para todo $F \subseteq X$ *localmente finito y cada punto* $y \notin F$*, existe* $A \subseteq X$ *tal que* $F \subseteq A$*,* $y \notin A$ *y* A *es abierto o cerrado.*

c) Para todo $F \subseteq X$ *finito,* F *es* λ*-cerrado.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Sean $F \subseteq X$ localmente finito y $y \notin F$. Si F es finito, entonces el resultado es inmediato por definición. Vamos a suponer que F es infinito. Tenemos dos casos:

Caso I) $y \in \overline{F}$. Como $y \in \overline{F}$ y F es localmente finito, existe un abierto U tal que $y \in U$ y $U \cap F$ es finito, digamos $U \cap F$=$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Además, como $y \in \overline{F}$, si tomamos un abierto V tal que $y \in V$, entonces tenemos que $U \cap V$ es un abierto que tiene a y. Se sigue que $(U \cap V) \cap F = V \cap (U \cap F) \neq \emptyset$, es decir, V interseca a $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Por lo tanto, $y \in \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}}$.

Ahora elijamos $x \in F \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Notemos que $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es finito y ya que $y \notin F$, se tiene que $y \notin \{x, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. De esta manera, por el inciso a), existe $A_x \subseteq X$ tal que $\{x, x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq A_x$, $y \notin A_x$ y A_x es abierto o cerrado. Si A_x fuera cerrado, entonces, $\overline{\{x_1, x_2, \dots, x_k\}} \subseteq \overline{A_x} = A_x$ y como $y \in \overline{\{x_1, x_2, \dots, x_k\}}$, tendríamos que $y \in A_x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A_x es abierto.

Definamos $A = \bigcup \big\{A_x \subseteq X : x \in F \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}\big\}$. Tenemos que A es abierto por ser unión de abiertos, $F \subseteq A$ y $y \notin A$, esto prueba el primer caso.

Caso II) $y \notin \overline{F}$. Como $y \notin \overline{F}$, existe un abierto U tal que $y \in U$ y $U \cap F = \emptyset$, de manera que $X \setminus U$ es cerrado, $y \notin X \setminus U$ y $X \setminus U \supseteq F$.

En ambos casos encontramos un abierto o cerrado que contiene a F y que no tiene a y. Esto concluye la prueba de b).

$b) \Rightarrow a)$. Para esta implicación, sólo hay que notar que todo subconjunto finito de X es localmente finito.

$a) \Rightarrow c)$. Sea $F \subseteq X$ finito. Como X es $T_{\frac{1}{4}}$, para toda $y \notin F$ existe $A_y \subseteq X$ tal que $F \subseteq A_y$, $y \notin A_y$ y A_y es abierto o cerrado.

Sean $\mathcal{K} = \{A_y : y \notin F\}$, $\mathscr{L} = \{A \in \mathcal{K} : A$ es abierto$\}$ y $\mathscr{C} = \{A \in \mathcal{K} : A$ es cerrado$\}$ y definamos los siguientes conjuntos:

$$L = \bigcap \mathscr{L} \quad \text{y} \quad C = \bigcap \mathscr{C}.$$

Notemos que C es cerrado por ser intersección de cerrados. Además, por el Lema 2.6 afirmamos que L es Λ-conjunto.

Como para toda $A \in \mathcal{K}$, $F \subseteq A$ tenemos que $F \subseteq L \cap C$. Ahora, tomemos $x \in L \cap C$ y supongamos que $x \notin F$. Entonces $A_x \in \mathcal{K}$ y $x \notin A_x$. Si A_x es abierto, entonces, $x \notin L$, lo cual es absurdo. Si A_x es cerrado, entonces $x \notin C$, también una contradicción. Con esto concluimos que $L \cap C \subseteq F$ y se tiene la igualdad entre estos conjuntos.

$c) \Rightarrow a)$. Sean $F \subseteq X$ finito y $y \notin F$. Por c), $F = L \cap C$ donde C es cerrado y L es Λ-conjunto. Como $y \notin F$, entonces $y \notin L$ o $y \notin C$. Si $y \notin C$, entonces puesto que $F = L \cap C \subseteq C$, tenemos que C es un cerrado que no tiene a y y que contiene a F.

Si $y \notin L$, entonces $y \notin G$ para algún abierto G que contiene a L, pero $F = L \cap C \subseteq L$, de esta manera encontramos un abierto G tal que $G \supseteq L \supseteq L \cap C = F$ y no tiene a y. Por lo tanto, X es $T_{\frac{1}{4}}$. $\square$

El inciso *b*) del teorema anterior, describe, en apariencia, una noción más fuerte de lo que significa ser $T_{\frac{1}{4}}$. Es lo mismo que separar puntos de conjuntos localmente finitos (que no son necesariamente conjuntos finitos).

Con estas equivalencias y las del Teorema 2.8, resulta muy sencillo darse cuenta de que la clase de los espacios $T_{\frac{1}{4}}$ es más restrictiva que la de los espacios T_0.

Teorema 2.14. *Los espacios $T_{\frac{1}{4}}$ son T_0.*

Demostración. Si X es $T_{\frac{1}{4}}$, entonces, la parte *c*) del Teorema 2.13 afirma que todo subconjunto finito de X es λ-cerrado, en particular para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es λ-cerrado y, por el inciso *d*) del Teorema 2.8, tenemos que X es T_0. □

Teorema 2.15. *Existen espacios T_0 que no son $T_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Recordemos que en el Ejemplo 2.2, se probó que el espacio $X=\{a,b,c,d\}$ con la topología $\tau = \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},X,\emptyset\}$ es T_0. Ahora veremos que este espacio no es $T_{\frac{1}{4}}$.

Notemos que $\{b,d\} \subseteq X$ es finito y $a \notin \{b,d\}$. Como el único abierto o cerrado que contiene a $\{b,d\}$ es X y $a \in X$, resulta que X no es $T_{\frac{1}{4}}$. □

Ahora damos un ejemplo de un espacio $T_{\frac{1}{4}}$.

Ejemplo 2.16. *El espacio $(\mathbb{Z},\tau)$ con la topología:*

$$\tau = \{\emptyset,\mathbb{Z}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{Z} : 0 \in U \text{ y } \mathbb{Z}\setminus U \text{ es finito}\} \text{ es } T_{\frac{1}{4}}.$$

Demostración. Sean $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito, digamos $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $b \in \mathbb{Z}\setminus F$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso I: $0 \in F$. Como $b \notin F$, $b \neq 0$. Definamos $U = \mathbb{Z}\setminus\{b\}$ y notemos que $0 \in U$ y $\mathbb{Z}\setminus U = \{b\}$ es finito. Por lo tanto U es un abierto tal que $F \subseteq U$ y $b \notin U$.

Caso II: $0 \notin F$. En este caso tomamos $U = \mathbb{Z}\setminus F$. Tenemos que U es abierto porque $0 \in U$ y $\mathbb{Z}\setminus U = F$ el cual es finito, de manera que F es cerrado y $b \notin F$.
En ambos casos encontramos un abierto o cerrado que contiene a F y que no tiene a b. Por lo tanto $(\mathbb{Z},\tau)$ es $T_{\frac{1}{4}}$. □

Observación: Si en nuestra definición de espacio $T_{\frac{1}{4}}$, cambiamos la palabra “finito”por “numerable”, podríamos definir una nueva clase de espacios que está contenida en la de los espacios $T_{\frac{1}{4}}$. Esto es, una versión numerable de los espacios $T_{\frac{1}{4}}$ a la que denotaremos como $T_{\frac{1}{4}}^N$.

Definición 2.17. *Un espacio topológico X es $T_{\frac{1}{4}}^N$, si para cada $F \subseteq X$ numerable y para todo $y \notin F$, existe $U \subseteq X$ tal que $F \subseteq U$, $y \notin U$ y U es abierto o cerrado.*

Es claro entonces que los espacios $T_{\frac{1}{4}}^N$ son $T_{\frac{1}{4}}$. Además, el Ejemplo 2.16, muestra que existen espacios $T_{\frac{1}{4}}$ que no son $T_{\frac{1}{4}}^N$. Para probar esto tomamos el conjunto $N = \{2n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ el cual es numerable, y observamos que $0 \notin N$. Si A es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ tal que $N \subseteq A$ y $0 \notin A$, entonces, A no es abierto ya que todos los subconjuntos abiertos no vacíos tienen al 0. Tampoco es cerrado, ya que los cerrados no vacíos son subconjuntos finitos o son iguales a $\mathbb{Z}$.

Por lo tanto, el ejemplo anterior es un espacio $T_{\frac{1}{4}}$ pero no $T_{\frac{1}{4}}^N$.

A continuación vemos que el axioma $T_{\frac{1}{4}}$, se preserva bajo subespacios.

Teorema 2.18. *Si X es $T_{\frac{1}{4}}$ y $Y \subseteq X$, entonces Y es $T_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Sean $F \subseteq Y$ finito y $y \in Y \setminus F$. Entonces $F \subseteq X$ y $y \in X \setminus F$. Como X es $T_{\frac{1}{4}}$ existe $U \subseteq X$ tal que $F \subseteq U$, $y \notin U$ y U es abierto o cerrado. Tomamos $U \cap Y$. Si U es abierto (cerrado), entonces $U \cap Y$ es abierto (cerrado) en Y. De manera que $F \subseteq U \cap Y$, $y \notin U \cap Y$ y $U \cap Y$ es abierto o cerrado. Por lo tanto, Y es $T_{\frac{1}{4}}$. □

De manera silmilar se pueba que el axioma $T_{\frac{1}{4}}^N$ se preserva bajo subespacios.

2.3. Espacios T_D

Otra clase de espacios que vamos a estudiar, son los espacios donde el conjunto derivado de un conjunto unitario es cerrado, llamados espacios T_D. Como se mencionó al inicio del capítulo, este axioma fue sugerido por C. T Yang [14].

Definición 2.19. *Un espacio topológico X es T_D, si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.*

La siguiente observación se utilizará en la prueba del próximo teorema:

Observación 2.20. *Si U es un abierto de un espacio topológico X y M es un subconjunto de X tal que $U \cap M' \neq \emptyset$, entonces $U \cap M \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $x \in U \cap M'$, entonces tenemos que $x \in M'$, luego para todo abierto V tal que $x \in V$, sucede que $(V \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$, y en consecuencia $V \cap M \neq \emptyset$. En particular, ya que U es un abierto que tiene a x, tenemos que $U \cap M \neq \emptyset$. □

Otras maneras de enunciar el axioma de separación T_D son las siguientes, donde podemos notar que en realidad, en estos espacios no solo el derivado de los conjuntos unitarios es cerrado, sino el derivado de cualquier subconjunto lo es.

Teorema 2.21. *En un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es T_D.*

b) *Para cualquier $M \subseteq X$, M' es cerrado.*

c) *Para cualquier $x \in X$, existen un abierto U y un cerrado C, tales que $\{x\} = U \cap C$.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Para ver que M' es cerrado, vamos a mostrar que $\overline{M'} \subseteq M'$.
Sea $x \in \overline{M'}$. Entonces para todo abierto U tal que $x \in U$, $U \cap M' \neq \emptyset$. Por la Observación 2.20, para todo abierto U tal que $x \in U$, $U \cap M \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{M} = M \cup M'$(Observación 1.2).

Supongamos que $x \notin M'$. Entonces existe un abierto U que tiene a x, tal que $(U \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$. Como $x \in M$, podemos escribir:

$$\{x\} = \{x\} \cup [(U \setminus \{x\}) \cap M] = [\{x\} \cup (U \setminus \{x\})] \cap (\{x\} \cup M) = U \cap M.$$

Ahora, por hipótesis X es T_D, así que $\{x\}'$ es cerrado, por lo tanto el conjunto $W = U \cap (X \setminus \{x\}')$ es un abierto que tiene a x puesto que $x \notin \{x\}'$. Afirmamos que $W \cap M' = \emptyset$.

En efecto, si existiera $z \in W \cap M'$, entonces se tendría que $z \in [U \cap (X \setminus \{x\}')] \cap M'$, de manera que $z \in (U \cap M') \setminus \{x\}'$. Luego, para todo abierto V tal que $z \in V$ tenemos que $z \in V \cap (U \cap M')$, de modo que $V \cap (U \cap M') = (V \cap U) \cap M' \neq \emptyset$ y, nuevamente por la Observación 2.20, $(V \cap U) \cap M = V \cap \{x\} \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in V$. Como esto ocurre para todo abierto V que tiene a z, se sigue que $z \in \overline{\{x\}}$. Además como $z \in M'$, y $x \notin M'$, $z \neq x$. Ya que $\overline{\{x\}} = \{x\}' \cup \{x\}$, tenemos que $z \in \{x\}'$ lo cual contradice el hecho de que $z \in (U \cap M') \setminus \{x\}'$, de donde concluimos que $W \cap M' = \emptyset$.

Para terminar esta parte de la demostración, notemos que por la afirmación del párrafo anterior, tenemos un abierto W que tiene a x pero $W \cap M' = \emptyset$, lo que significa que $x \notin \overline{M'}$, una contradicción que surgió al suponer que $x \notin M'$. Por lo tanto debe ocurrir que $x \in M'$ y, en conclusión, $\overline{M'} \subseteq M'$. Así, el conjunto M' es cerrado.

b) $\Rightarrow$ *c*). Sea $x \in X$. Entonces $\{x\}'$ es cerrado, luego $X \setminus \{x\}'$ es abierto. Ahora veamos que $\{x\} = \overline{\{x\}} \cap (X \setminus \{x\}')$. En efecto, $\overline{\{x\}} \cap (X \setminus \{x\}') = (X \cap \overline{\{x\}}) \setminus \{x\}' = \overline{\{x\}} \setminus \{x\}' = \{x\}$, de este modo tenemos que $\{x\}$ es la intersección de un abierto con un cerrado.

c) $\Rightarrow$ *a*). Si $\{x\} = U \cap C$ donde U es abierto y C es cerrado, entonces $\{x\}' = \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \overline{\{x\}} \setminus (U \cap C)$. Como $x \in C$, $\overline{\{x\}} \subseteq C$, de manera que $\{x\} = U \cap C = U \cap \overline{\{x\}}$, entonces $\{x\}' = \overline{\{x\}} \setminus (U \cap \overline{\{x\}}) = \overline{\{x\}} \cap (X \setminus U)$, la cual es una intersección de dos cerrados. Por lo tanto, $\{x\}'$ es cerrado y X es T_D. □

Ahora veamos cómo se relacionan los espacios T_D con los espacios $T_{\frac{1}{4}}$.

Teorema 2.22. *Existen espacios T_D que no son $T_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Como se vio en el Teorema 2.15, el espacio $X=\{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X, \emptyset\}$, no es $T_{\frac{1}{4}}$. Notemos que $\{d\}, \{a, d\}$ y $\{c, d\}$ son los complementos de los abiertos $\{a, b, c\}, \{b, c\}$ y $\{a, b\}$, respectivamente, por lo tanto son cerrados, y como X es abierto y cerrado tenemos que:
$\{a\} = \{a, b\} \cap \{a, d\}, \{b\} = \{b\} \cap X, \{c\} = \{b, c\} \cap \{c, d\}$ y $\{d\} = X \cap \{d\}$, de manera que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es la intersección de un abierto con un cerrado, luego por la parte *c*) del Teorema 2.21, X es T_D. □

Teorema 2.23. *Existen espacios $T_{\frac{1}{4}}$ que no son T_D.*

Demostración. En el Ejemplo 2.16 vimos que el espacio $(\mathbb{Z}, \tau)$ con la topología:

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{Z} : 0 \in U \text{ y } \mathbb{Z} \setminus U \text{ es finito}\} \text{ es } T_{\frac{1}{4}}.$$

Notemos que en este espacio $\{0\}' = \{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: si U es un abierto con $x \in U$, entonces $0 \in U\}=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, el cual no es cerrado porque su complemento es $\{0\}$ y éste no es abierto. Por lo tanto no es T_D. □

Con los dos resultados anteriores y el que ahora exponemos, se concluye que los espacios $T_{\frac{1}{4}}$ y T_D son independientes; sin embargo, ambos son T_0.

Teorema 2.24. *Los espacios T_D son T_0.*

Demostración. Si X es T_D, entonces para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado, de manera que $\{x\}'$ se puede escribir como una unión de cerrados. Por lo tanto, de acuerdo con la parte c) del Teorema 2.8, X es T_0. □

Ejemplo 2.25. *Existen espacios T_0 que no son T_D.*

Demostración. Vimos que el espacio $(\mathbb{Z}, \tau)$ con la topología: $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{Z} : 0 \in U \text{ y } \mathbb{Z} \setminus U \text{ es finito}\}$ es $T_{\frac{1}{4}}$ pero no T_D (Ejemplo 2.23). Puesto que es $T_{\frac{1}{4}}$, también es T_0. □

Como veremos en el siguiente teorema, el axioma T_D es una propiedad hereditaria.

Teorema 2.26. *Si X es T_D y $Y \subseteq X$, entonces Y es T_D.*

Demostración. Sea $x \in Y$. Entonces $x \in X$, como X es T_D por el inciso c) del Teorema 2.21, $\{x\} = U \cap C$, donde U es abierto en X y C es cerrado en X. Notemos que $\{x\} = (U \cap Y) \cap (C \cap Y)$, donde $U \cap Y$ es abierto en Y y $C \cap Y$ es cerrado en Y. Por lo tanto Y es T_D. □

2.4. Espacios $T_{\frac{1}{2}}$

Norman Levin en el artículo *Generalized closed sets in topology* [4], publicado en 1970, definió los conjuntos g-cerrados e introduce un nuevo axioma de separación que estudiaremos a continuación.

Definición 2.27. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es g-**cerrado** si para todo abierto U tal que $A \subseteq U$ se tiene que $\overline{A} \subseteq U$.*

De la definición anterior podemos notar que todo subconjunto cerrado de un espacio topológico X es *g-cerrado*. Además, si consideramos el espacio topológico $X=\{a,b,c,d\}$ con la topología $\tau = \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},X,\emptyset\}$, tenemos que $\{a\}$ no es abierto ni cerrado, por lo que $X \setminus \{a\}$ es un g-cerrado que no es cerrado.

Definición 2.28. *Un espacio topológico X es $T_{\frac{1}{2}}$, si todo subconjunto g-cerrado A de X es cerrado.*

Cuando definimos los espacios $T_{\frac{1}{4}}$ dijimos que se trataba de separar puntos de conjuntos finitos (o localmente finitos) con abiertos o cerrados, después vimos que podemos crear una nueva clase de espacios si en lugar de considerar conjuntos finitos consideramos conjuntos numerables. Siguiendo con esta idea, es natural preguntarse qué pasa si en lugar de conjuntos numerables tomamos conjuntos arbitrarios. Resulta que entre las caracterizaciones de los espacios $T_{\frac{1}{2}}$ que veremos a continuación, es el inciso e) el que extiende a los espacios $T_{\frac{1}{4}}$.

Teorema 2.29. *En un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es $T_{\frac{1}{2}}$.

b) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es abierto o cerrado.

c) Para todo $A \subseteq X$, A se puede escribir como la intersección de subconjuntos abiertos o cerrados de X que contienen a A.

d) Para todo $A \subseteq X, A$ es λ-cerrado.

e) Para todo $A \subseteq X$ y para toda $x \notin A$, existe $U \subseteq X$ tal que $x \notin U$, $A \subseteq U$ y U es abierto o cerrado.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Supongamos que X es $T_{\frac{1}{2}}$ y que $\{x\}$ no es cerrado. Entonces $X \setminus \{x\}$ no es abierto. Además, X es el único abierto tal que $X \setminus \{x\} \subseteq X$. Como $\overline{X \setminus \{x\}} \subseteq X$, tenemos que $X \setminus \{x\}$ es g-cerrado. Luego, como X es $T_{\frac{1}{2}}$, se tiene que $X \setminus \{x\}$ es cerrado, y por lo tanto $\{x\}$ es abierto.

b) $\Rightarrow$ *c*). Sea $A \subseteq X$. Notemos que $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} \{x\}$, de donde,

$$A = X \setminus \bigcup_{x \in X \setminus A} \{x\} = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\}.$$

Como para toda $x \in A$, $\{x\}$ es abierto o cerrado y para toda $x \in X \setminus A$, $A \subseteq X \setminus \{x\}$ podemos concluir que A se puede escribir como la intersección de subconjuntos abiertos o cerrados que contienen a A.

c) $\Rightarrow$ *d*). Ahora tomemos $A \subseteq X$ y supongamos que lo podemos expresar como $A = \bigcap_{\alpha \in I} Z_\alpha$ donde, para toda $\alpha \in I$, Z_α es abierto o cerrado.

Sean

$$\Omega_1 = \{\alpha \in I : Z_\alpha \text{ es cerrado}\} \quad \text{y} \quad \Omega_2 = \{\alpha \in I : Z_\alpha \text{ es abierto}\}.$$

Definimos $L = \bigcap_{\alpha \in \Omega_2} Z_\alpha$ y $C = \bigcap_{\alpha \in \Omega_1} Z_\alpha$. Notemos que C es una intersección de cerrados y, por lo tanto, es cerrado. Además por el lema 2.6 afirmamos que L es Λ-conjunto y por lo tanto A es λ-cerrado.

d) $\Rightarrow$ *e*). Sea $A \subseteq X$. Por hipotesis, A es λ-cerrado, entonces $A = L \cap C$ donde L es Λ-conjunto, es decir, $L = \bigcap \{G \subseteq X : L \subseteq G \text{ y } G \text{ es abierto}\}$ y C es cerrado. Tomemos $x \in X$ tal que $x \notin A$. Tenemos dos casos:

Caso I). $x \notin L$. Como $x \notin L$, tenemos que $x \notin G$ para algún abierto G que contiene a L. Como $G \supseteq L \supseteq L \cap C = A$, tenemos que G es un abierto que contiene a A tal que $x \notin G$.

Caso II). $x \notin C$. Como $C \supseteq C \cap L = A$ tenemos un cerrado que contiene a A y $x \notin C$.

Así, en ambos casos hemos encontrado un abierto o cerrado que contiene a A y que no tiene a x.

e) $\Rightarrow$ *a*). Sea $A \subseteq X$ un conjunto g-cerrado. Para mostrar que A es cerrado, veamos que $\overline{A} \subseteq A$. Tomemos $x \in \overline{A}$ y supongamos que $x \notin A$. Entonces, por e), existe $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$, $x \notin U$ y U es abierto o cerrado. Si U es abierto entonces, como A es g-cerrado, $\overline{A} \subseteq U$ así que $x \in U$, lo cual no puede pasar. Si U es cerrado, entonces como $A \subseteq U$ se tiene que $\overline{A} \subseteq \overline{U} = U$, de manera que $x \in U$, nuevamente una contradicción. En cualquier caso, suponer que $x \notin A$ nos lleva a una contradicción, por lo tanto tenemos que $x \in A$, luego $\overline{A} \subseteq A$. Como también $A \subseteq \overline{A}$, tenemos que $A = \overline{A}$ y así, A es cerrado. $\square$

Teorema 2.30. *Los espacios* $T_{\frac{1}{2}}$ *son* $T_{\frac{1}{4}}$*.*

Demostración. Si X es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces, por la parte e) del Teorema 2.29, para todo subconjunto M de X y todo punto $y \notin M$, existe $A \subseteq X$ tal que $M \subseteq A$, $y \notin A$ y A es abierto o cerrado, en particular si M es finito, entonces tenemos que X es $T_{\frac{1}{4}}$. □

Teorema 2.31. *Existen espacios* $T_{\frac{1}{4}}$ *que no son* $T_{\frac{1}{2}}$*.*

Demostración. En el Ejemplo 2.16 vimos que el espacio $(\mathbb{Z}, \tau)$ donde $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{Z} : 0 \in U \text{ y } \mathbb{Z} \setminus U \text{ es finito}\}$ es un espacio $T_{\frac{1}{4}}$. A continuación veremos que no es $T_{\frac{1}{2}}$.
Basta con observar que el unitario $\{0\}$ no es abierto ni cerrado. No es abierto porque $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ no es finito, y no es cerrado porque si lo fuera, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sería abierto, pero esto no puede ser puesto que $0 \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por lo tanto debido a *b*) del Teorema 2.29, X no es $T_{\frac{1}{2}}$. □

Teorema 2.32. *Los espacios* $T_{\frac{1}{2}}$ *son* T_D*.*

Demostración. El inciso b) del Teorema 2.29 afirma que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es abierto o cerrado, luego como X es abierto y cerrado, para toda $x \in X$, $\{x\} = \{x\} \cap X$, entonces $\{x\}$ siempre es la intersección de un abierto con un cerrado, por lo tanto por la parte *c*) del Teorema 2.21, X es T_D. □

Teorema 2.33. *Existen espacios* T_D *que no son* $T_{\frac{1}{2}}$*.*

Demostración. En el Teorema 2.22, vimos que el espacio $X=\{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X, \emptyset\}$, es un espacio T_D que no es $T_{\frac{1}{4}}$. Entonces de acuerdo con el Teorema 2.30, X no puede ser $T_{\frac{1}{2}}$. □

Veamos un ejemplo de un espacio $T_{\frac{1}{2}}$.

Ejemplo 2.34. *El conjunto* $X = \{a, b\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$*, llamado el espacio de Sierpinski, es un ejemplo de un espacio* $T_{\frac{1}{2}}$*.*

Demostración. Observemos que $\{a\}$ es abierto y $\{b\}$ es cerrado, luego, según la parte b) del Teorema 2.29, X es $T_{\frac{1}{2}}$. □

Ahora veamos que el axioma $T_{\frac{1}{2}}$ es una propiedad hereditaria.

Teorema 2.35. *Si X es $T_{\frac{1}{2}}$ y $Y \subseteq X$, entonces Y es $T_{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sea $x \in Y$. Entonces $x \in X$, luego por el Teorema 2.29 inciso b), $\{x\}$ es abierto o cerrado en X, de manera que $\{x\} \cap Y = \{x\}$ es abierto o cerrado en Y, por lo tanto Y es $T_{\frac{1}{2}}$. □

2.5. Espacios $T_{\frac{3}{4}}$

En 1995 los autores Julian Dontchev y Maximilian Ganster definieron los espacios $T_{\frac{3}{4}}$ en su artículo [5]. Antes de definirlo necesitamos introducir otros conceptos.

Definición 2.36. *Sea X un espacio topológico. Decimos que un subconjunto U de X es **abierto regular** si $U = \operatorname{int} \overline{U}$.*

Observación 2.37. *a) Puesto que el interior (en X) de cualquier subconjunto de X es un abierto de X, tenemos que todo abierto regular es abierto en X.*

b) Si $U \subseteq X$ es abierto en X, como $U \subseteq \overline{U}$, se tiene que $U = \operatorname{int} U \subseteq \operatorname{int} \overline{U}$.

Definición 2.38. *Se define el δ-interior de $A \subseteq X$, denotado por $\operatorname{int}_\delta A$, como el conjunto*

$$\operatorname{int}_\delta A = \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \ \text{ y } \ U \text{ es abierto regular}\}.$$

Se dice que un subconjunto A de X es δ-abierto si $A = \operatorname{int}_\delta A$. Al complemento de un subconjunto δ-abierto se le llama δ-cerrado.

Definición 2.39. *Se define la δ-cerradura de $A \subseteq X$ denotada por $\operatorname{Cl}_\delta A$, como el conjunto*

$$\operatorname{Cl}_\delta A = \{x \in X : \text{para todo } U \text{ abierto con } x \in U \text{ se tiene que } \operatorname{int} \overline{U} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Observación 2.40. *Para todo $A \subseteq X$, $\operatorname{int}_\delta A \subseteq \operatorname{int} A$ y $\overline{A} \subseteq \operatorname{Cl}_\delta A$. En consecuencia $\operatorname{int}_\delta A \subseteq A$ y $A \subseteq \operatorname{Cl}_\delta A$.*

Demostración. Si $A \subseteq X$ y $x \in \operatorname{int}_\delta A$, entonces $x \in U$ para algún abierto regular $U \subseteq A$, luego $x \in U$ para algún abierto $U \subseteq A$, de modo que $x \in \operatorname{int} A$, esto prueba que $\operatorname{int}_\delta A \subseteq \operatorname{int} A \subseteq A$.

Por otro lado si $x \in \overline{A}$, tenemos que para todo abierto U tal que $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$, en particular esto ocurre con los abiertos regulares. Entonces $x \in \mathrm{Cl}_\delta A$ y así, $A \subseteq \overline{A} \subseteq \mathrm{Cl}_\delta A$. □

Observación 2.41. *Si $A \subseteq X$ es δ-abierto, entonces $X \setminus A = \mathrm{Cl}_\delta(X \setminus A)$, es decir, todo δ-cerrado es igual a su δ-cerradura.*

Demostración. Por la Observación 2.40 tenemos que $X \setminus A \subseteq \mathrm{Cl}_\delta(X \setminus A)$.

Para probar la otra contención, tomemos $x \in \mathrm{Cl}_\delta(X \setminus A)$ y supongamos que $x \in A$. Puesto que A es δ-abierto, $x \in U$ para algún abierto regular $U \subseteq A$, entonces $U \cap (X \setminus A) = \mathrm{int}\,\overline{U} \cap (X \setminus A) = \emptyset$, luego, $x \notin \mathrm{Cl}_\delta(X \setminus A)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $x \in X \setminus A$. Así se tiene que $\mathrm{Cl}_\delta(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$ y, por lo tanto, $X \setminus A = \mathrm{Cl}_\delta(X \setminus A)$. □

Observación 2.42. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces $\{x\}$ es δ-abierto si, y solo si $\{x\}$ es abierto regular.*

Demostración. Si $\{x\}$ es δ-abierto, entonces $\{x\} = \mathrm{int}_\delta\{x\}$, luego por definición $\{x\} = \bigcup\{U \subseteq X : U \subseteq \{x\}$ y U es abierto regular$\}$. Entonces $U = \{x\}$. Por lo tanto $\{x\}$ es abierto regular.

Por otro lado, si $\{x\}$ es abierto regular, puesto que $\{x\}$ es el único subconjunto no vacío de $\{x\}$, $\{x\} = \bigcup\{U \subseteq \{x\} : U$ es abierto regular$\}$, por lo que $\{x\} = \mathrm{int}_\delta\{x\}$, así $\{x\}$ es δ-abierto. □

Definición 2.43. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es δg-cerrado si para todo abierto U tal que $A \subseteq U$, se tiene que $\mathrm{Cl}_{\delta} A \subseteq U$.*

Observación 2.44. *Si $A \subseteq X$ es δg-cerrado, entonces $(\mathrm{Cl}_\delta A) \setminus A$ no contiene ningún cerrado distinto del vacío.*

Demostración. Sea $F \subseteq \mathrm{Cl}_\delta A \setminus A$ cerrado. Entonces $X \setminus F$ es abierto y $A \subseteq X \setminus F$, como A es δg-cerrado, tenemos que $\mathrm{Cl}_\delta A \subseteq X \setminus F$ luego, tomando complementos, $F \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}_\delta A$, así tenemos que $F \subseteq \mathrm{Cl}_\delta A \setminus A$ y $F \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}_\delta A$, por lo que $F = \emptyset$. □

Ahora podemos introducir un nuevo axioma de separación.

Definición 2.45. *Un espacio topológico X es $T_{\frac{3}{4}}$, si cualquier subconjunto de X que sea δg-cerrado, es δ-cerrado.*

A continuación veremos otras formas equivalentes de definir un espacio $T_{\frac{3}{4}}$.

Teorema 2.46. *En un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es $T_{\frac{3}{4}}$.

b) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es δ-abierto o cerrado.

c) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es abierto regular o es cerrado.

Demostración. Por la Observación 2.42, $b) \Leftrightarrow c)$ es inmediato.

$a) \Rightarrow b)$. Si $\{x\}$ no es cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ no es abierto, luego, X es el único abierto tal que $X \setminus \{x\} \subseteq X$, y además $\mathrm{Cl}_\delta(X \setminus \{x\}) \subseteq X$, es decir, $X \setminus \{x\}$ es δg-cerrado. Como X es $T_{3/4}$, se tiene que $X \setminus \{x\}$ es δ-cerrado y, por la Observación 2.41, $X \setminus \{x\} = \mathrm{Cl}_\delta(X \setminus \{x\})$, por lo tanto $\{x\}$ es δ-abierto.

$b) \Rightarrow a)$. Sea $A \subseteq X$ δg-cerrado. Queremos ver que A es δ-cerrado, lo que significa que $A = \mathrm{Cl}_\delta A$. Por la Observación 2.40, tenemos que $A \subseteq \overline{A} \subseteq \mathrm{Cl}_\delta A$. Solo falta probar que $\mathrm{Cl}_\delta A \subseteq A$, lo que hacemos a continuación.

Sea $x \in \mathrm{Cl}_\delta A$. Tenemos dos casos:

Caso I). $\{x\}$ es δ-abierto. Por la Observación 2.42, $\{x\}$ es abierto regular, luego $\{x\} = \mathrm{Int}\overline{\{x\}}$ y como $x \in \mathrm{Cl}_\delta A$ tenemos $\{x\} \cap A \neq \emptyset$, es decir, $x \in A$.

Caso II). $\{x\}$ es cerrado. Supongamos que $x \notin A$. Entonces $\{x\} \subseteq \mathrm{Cl}_\delta A \setminus A$, pero la Observación 2.44, afirma que $\{x\}$ debe ser vacío, lo cual es absurdo, por lo tanto $x \in A$.

En ambos casos tenemos que $\mathrm{Cl}_\delta A \subseteq A$, esto prueba que $\mathrm{Cl}_\delta A = A$ y así A es δ-cerrado. □

Teorema 2.47. *Los espacios $T_{\frac{3}{4}}$ son $T_{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sea X un espacio $T_{\frac{3}{4}}$. Tomemos $x \in X$ y supongamos que $\{x\}$ no es cerrado. Veremos que $\{x\}$ es abierto.

Si $\{x\}$ no es cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ no es abierto, como el único abierto que contiene a $X \setminus \{x\}$ es X y además $\mathrm{Cl}_\delta(X \setminus \{x\}) \subseteq X$, resulta que $X \setminus \{x\}$

es δg-cerrado. Como X es $T_{\frac{3}{4}}$, $X \setminus \{x\}$ es δ-cerrado luego, $\{x\}$ es δ-abierto, entonces por la Observación 2.42, es abierto regular y por lo tanto abierto, luego, por el Teorema 2.29, X es $T_{\frac{1}{2}}$. $\square$

Teorema 2.48. *Existen espacios $T_{\frac{1}{2}}$ que no son $T_{\frac{3}{4}}$.*

Demostración. El espacio de Sierpinski $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es un ejemplo de un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ que no es $T_{\frac{3}{4}}$. En el Ejemplo 2.34, vimos que es $T_{\frac{1}{2}}$. Para ver que no es $T_{\frac{3}{4}}$ notemos que $\{a\}$ no es cerrado porque $X \setminus \{a\} = \{b\}$ no es abierto. Además $\{a\}$ no es abierto regular porque $\overline{\{a\}} = X$ y $\operatorname{int} X = X \neq \{a\}$, por lo tanto el inciso c) del Teorema 2.46, nos dice que X no es $T_{\frac{3}{4}}$. $\square$

El siguiente espacio es un ejemplo sencillo de un espacio $T_{\frac{3}{4}}$.

Ejemplo 2.49. *$X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset, X\}$, es un espacio $T_{\frac{3}{4}}$.*

Demostración. En primer lugar notemos que $\{c\}$ es cerrado.

En segundo lugar, observemos que los únicos cerrados que contienen a $\{a\}$ son X y $\{a, c\}$, por lo tanto $\overline{\{a\}}$=$X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$. Ahora, los únicos abiertos contenidos en $\{a, c\}$ son $\emptyset$ y $\{a\}$, por lo que $\operatorname{int}\{a, c\}$=$\emptyset \cup \{a\} = \{a\}$, y así tenemos que $\operatorname{int} \overline{\{a\}} = \{a\}$, es decir $\{a\}$ es abierto regular.

Por último, para {b} tenemos que los únicos cerrados que lo contienen son X y $\{b, c\}$, entonces $\overline{\{b\}} = X \cap \{b, c\} = \{b, c\}$ y los únicos abiertos contenidos en {b,c} son $\emptyset$ y $\{b\}$, por lo tanto $\operatorname{int}\{b, c\} = \emptyset \cup \{b\} = \{b\}$ y así, $\operatorname{int} \overline{\{b\}} = \{b\}$, es decir $\{b\}$ es abierto regular, luego, por el inciso c) del Teorema 2.46, X es $T_{\frac{3}{4}}$. $\square$

Observación 2.50. *Los espacios $T_{\frac{3}{4}}$ no se preservan bajo subespacios.*

Demostración. Consideremos el espacio $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset, X\}$. En el Ejemplo 2.49 vimos que X es un espacio $T_{\frac{3}{4}}$. Si tomamos el conjunto $Y = \{a, c\}$ como subespacio de X, entonces tenemos que Y tiene la topología $\tau_Y = \{Y \cap \{a, b\}, Y \cap \{a\}, Y \cap \{b\}, Y \cap \emptyset, Y \cap X\} = \{\{a\}, \{a, c\}, \emptyset\}$, pero éste es el espacio de Sierpinski y en el Teorema 2.48, vimos que este espacio no es $T_{\frac{3}{4}}$. $\square$

2.6. Espacios T_1

En 1907 Friedrich Riesz introdujo el primer axioma de separación conocido como espacios T_1 [2, pág. 47].

Definición 2.51. *Un espacio topológico X es T_1, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V, tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.*

En el siguiente teorema veremos algunas caracterizaciones de estos espacios.

Teorema 2.52. *En un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es T_1.*

b) *Para todo $A \subseteq X$, $x \in A'$ si, y sólo si, cada abierto U que tiene a x contiene una infinidad de puntos de A, esto es, $U \cap A$ es infinito.*

c) *Para todo $x \in X$, $\{x\}' = \emptyset$.*

d) *Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado.*

e) *Para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{U \subseteq X : x \in U \text{ y } U \text{ es abierto}\}$.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$.

Supongamos que $x \in A'$ y que existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \cap A$ es finito. Entonces el conjunto $U \cap (A \setminus \{x\})$ también es finito, digamos $U \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Notemos que $x \neq x_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, luego, como X es T_1, existen abiertos U_i tales que $x \in U_i$ y $x_i \notin U_i$.

Definamos $V = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ y observemos que $x \in V$ y V es abierto porque es una intersección finita de abiertos. Notemos que dada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, V no contiene a x_i porque si $x_i \in V$, entonces $x_i \notin U_i$, de manera que $V \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \emptyset$, es decir, $V \cap U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Esto contradice el hecho de que $x \in A'$ porque $V \cap U$ es un abierto que tiene a x y por lo tanto debe ocurrir que $\emptyset \neq ((U \cap V) \setminus \{x\}) \cap A = V \cap U \cap (A \setminus \{x\})$. De esta contradicción concluimos que $U \cap A$ es infinito.

Reciprocamente, si cada abierto que tenga a x contiene una infinidad de puntos de A, entonces, x es punto de acumulación de A, es decir, $x \in A'$.

b) $\Rightarrow$ *c*). Sea $x \in X$ y supongamos que $y \in \{x\}'$. Como X es abierto y $y \in X$, tenemos $X \cap \{x\} = \{x\}$ es infinito, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\{x\}' = \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ *d*). Si $\{x\}'=\emptyset$, entonces $\overline{\{x\}} = \{x\}' \cup \{x\} = \emptyset \cup \{x\} = \{x\}$. Por lo tanto, $\{x\}$ es cerrado.

d) $\Rightarrow$ *e*). Sean $x \in X$ y $U_x = \bigcap\{U \subseteq \mathrm{X} : U$ es abierto y $x \in U\}$. Es inmediato que $\{x\} \subseteq U_x$.

Veamos que $U_x \subseteq \{x\}$. Supongamos que $y \in U_x$ con $y \neq x$. Como $\{y\}$ es cerrado, entonces $X \setminus \{y\}$ es un abierto que tiene a x, luego $X \setminus \{y\} \subseteq U_x$ y por lo tanto $y \in X \setminus \{y\}$ lo cual no puede ocurrir. De esta contradicción se sigue que $x = y$ y así, $U_x \subseteq \{x\}$.

e) $\Rightarrow$ *a*). Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por e) $\{x\} = \bigcap\{U \subseteq X : U$ es abierto y $x \in U\}$ y $\{y\}= \bigcap\{U \subseteq X : U$ es abierto y $y \in U\}$. Como $y \notin \{x\}$ hay un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Análogamente, como $x \notin \{y\}$ existe un abierto V tal que $y \in V$ y $x \notin V$. Por lo tanto X es T_1. $\square$

Teorema 2.53. *Los espacios T_1 son $T_{\frac{3}{4}}$.*

Demostración. Sean X un espacio T_1 y $x \in X$. Por el inciso *d*) de Teorema 2.52, $\{x\}$ es cerrado. Luego, por el inciso *b*) del Teorema 2.46, concluimos que X es $T_{\frac{3}{4}}$. $\square$

Teorema 2.54. *Existen espacios $T_{\frac{3}{4}}$ que no son T_1.*

Demostración. En el Ejemplo 2.49 probamos que $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset, X\}$ es un espacio $T_{\frac{3}{4}}$. Afirmamos que este espacio no es T_1. Basta observar que el unitario $\{b\}$ no es cerrado, luego, por el inciso *d*) del Teorema 2.52, X no es T_1. $\square$

Ahora veamos un ejemplo de un espacio T_1.

Ejemplo 2.55. *El espacio $(\mathbb{N}, \tau)$ con la topología cofinita, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus U$ es finito$\}$ es T_1.*

Demostración. Si $x, y \in \mathbb{N}$ con $x \neq y$, entonces los conjuntos $\mathbb{N}\setminus\{x\}$ y $\mathbb{N}\setminus\{y\}$ son abiertos tales que $x \in \mathbb{N} \setminus \{y\}$, $y \notin \mathbb{N} \setminus \{y\}$ y $y \in \mathbb{N} \setminus \{x\}$, $x \notin \mathbb{N} \setminus \{x\}$. Por lo tanto el espacio $(\mathbb{N}, \tau)$ es T_1. $\square$

A continuación veamos que los espacios T_1 se preservan bajo subespacios.

Teorema 2.56. *Si X es T_1 y $Y \subseteq X$, entonces Y es T_1.*

Demostración. Sea $x \in Y$. Entonces, $x \in X$ y como X es T_1, $\{x\}$ es cerrado, luego $\{x\} \cap Y = \{x\}$ es cerrado en Y. Por lo tanto, Y es T_1. $\square$

2.7. Espacios US

En el artículo [6] publicado en 1966, los autores M. G. Murdershwar y S. A. Naimpally definieron una clase de espacios donde las sucesiones convergentes tienen a lo más un límite, los llamaron espacios *semi-Hausdorff*. Una ligera modificación a estos espacios definen una clase de espacios conocidos como espacios US. [8] los cuales definimos acontinuación.

Definición 2.57. *Un espacio topológico X es US, si toda sucesión convergente en X tiene un único límite.*

Teorema 2.58. *Los espacios US son T_1.*

Demostración. Supongamos que X no es T_1. Entonces, existen $x, y \in X$, con $x \neq y$ tales que para todo abierto U tal que $x \in U$ se tiene que $y \in U$. Por un lado, observemos que la sucesión constante $\{x\}$ converge a x. Por otro lado, como para todo abierto U tal que $y \in U$, sucede que $x \in U$ esto significa que la sucesión constante $\{x\}$ también converge a y, lo que contradice el hecho de que X es US, por lo tanto X es T_1. $\square$

Teorema 2.59. *Existen espacios T_1 que no son US.*

Demostración. Consideremos el espacio $\mathbb{N}$ con la topología cofinita, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus U \text{ es finito}\}$. Ya vimos en el Ejemplo 2.55, que $(\mathbb{N}, \tau)$ es un espacio T_1, ahora veamos que no es US.

Consideremos la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $x \in \mathbb{N}$. Como para abierto U que tenga a x es de la forma $U = \mathbb{N} \setminus F$, donde F es finito, tenemos que existe solo un número finito de términos de la sucesión que no están en U, en otras palabras, para todo abierto que tenga a x, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \in U$ para toda $n > k$, es decir $\lim_{n\to\infty} n = x$ como esto pasa para toda $x \in \mathbb{N}$ tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cualquier punto de $\mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathbb{N}$ no es US. $\square$

Ahora veamos un ejemplo de un espacio US. Este espacio será utilizado en la siguiente sección.

NOTA: Para este ejemplo estamos considerando a los intervalos $[a, b]$ con la topología que hereda del espacio $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Ejemplo 2.60. *Consideremos el conjunto* $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{p, q\}$ *donde* $p, q \notin [0, 1] \cup [2, 3]$ *y* $p \neq q$. *Hagamos* $Y = [0, 1] \cup \{p\}$ *y* $Z = [2, 3] \cup \{q\}$. *A continuación vamos a definir una subbase para* X *de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = &\{U \subseteq [0,1] : U \textit{ es abierto en } [0,1]\} \cup \{U \subseteq [2,3] : U \textit{ es abierto en } [2,3]\} \\ &\cup \{Y \setminus S : S \textit{ es una sucesión convergente en } \mathbb{R} \textit{ con su límite en } [0,1]\} \\ &\cup \{Z \setminus S : S \textit{ es una sucesión convergente en } \mathbb{R} \textit{ con su límite en } [2,3]\}.\end{aligned}$$

Afirmamos que el espacio $(X, \tau_{\mathcal{S}})$ *es* US.

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$ de tal manera que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Demostraremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y para ninguna $y \in X \setminus \{x\}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I) $x \in [0, 1]$. Tenemos cuatro subcasos:

Subcaso i) $y \in [2, 3]$. Entonces, podemos encontrar abiertos ajenos U_1 y U_2 contenidos en $[0, 1]$ y $[2, 3]$ respectivamente, tales que $x \in U_1$ y $y \in U_2$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_1$ para toda $n > N$, en consecuencia se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y porque el abierto U_2 deja fuera a los términos $\{x_{N+1}, x_{N+2}...\}$ los cuales forman una cola de la sucesión.

Subcaso ii) $y \in [0, 1]$. Análogamente, existen abiertos ajenos U_1 y U_2 contenidos en $[0, 1]$, tales que $x \in U_1$ y $y \in U_2$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_1$ para toda $n > N$, por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y.

Subcaso iii) $y = \{p\}$. Sea U un abierto contenido en $[0, 1]$ que tenga a x. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para toda $n > N$. Consideremos el conjunto $C = \{x_n : n > N\} \cup \{x\}$ el cual es una subsucesión de la sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con su limite, así, el abierto $Y \setminus C$ es un abierto que tiene a y y nuevamente al no contener a la cola C, resulta que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y.

Subcaso iv) $y = \{q\}$. Sea U un abierto en $[0, 1]$ que tenga a x. Tomemos la sucesión constante $\{2\}$, ésta es una sucesión convergente contenida en $[2, 3]$, por lo que el conjunto $Z \setminus \{2\}$ es un abierto que tiene a y y que tiene a lo más un numero finito de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pues todos los demás estan en U. Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y.

Caso II) $x \in [2, 3]$. Tenemos cuatro subcasos:

Subcaso i) $y \in [0, 1]$.

Subcaso ii) $y \in [2, 3]$.

Subcaso iii) $y = \{p\}$.

Subcaso iv) $y = \{q\}$.

La prueba de este caso es similar al caso I) intercambiando los papeles que juegan los intervalos $[0, 1]$ y $[2, 3]$.

Caso III) $x = p$. Tenemos tres subcasos:

Subcaso i). $y \in [0, 1]$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ sea U un abierto en $[0, 1]$ que contiene a y. Se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para toda $n > N$. Hagamos $C = \{x_n : n > N\} \cup \{y\}$, entonces $Y \setminus C$ es un abierto que tiene a x, pero puesto que no contiene a C se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x, lo cual es una contradicción.

Subcaso ii). $y \in [2, 3]$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, sea U un abierto en $[2, 3]$ que contiene a y. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para toda $n > N$. Hagamos $C = \{x_n : n > N\} \cup \{y\}$, entonces $Z \setminus C$ es un abierto que tiene a x, pero puesto que no tiene puntos de C se concluye que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x, lo cual es una contradicción.

Subcaso iii). $y = q$. Sea U un abierto subbásico que contiene a x, como $x = p$, tenemos que $U = Y \setminus C$, donde C es una sucesión en $[0, 1]$ con su límite. Se tiene que el conjunto $Z \setminus \{2\}$ es un abierto que tiene a y, pero puesto que no contiene a ninguna cola de C se concluye que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y.

Caso IV) $x = q$. Tenemos tres subcasos:

subcaso i) $y \in [2, 3]$.

subcaso ii) $y \in [0, 1]$.

Subcaso iii) $y = p$.

La prueba es similar al caso III).

En cada caso hemos demostrado que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a y para ninguna $y \in X \setminus \{x\}$. Por lo tanto el espacio $(X, \tau_{\mathcal{S}})$ es US. $\square$

A continuación veremos que el axioma US es una propiedad hereditaria.

Teorema 2.61. *Si X es US y $Y \subseteq X$, entonces Y es US.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y y supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ con $a, b \in Y$ y $a \neq b$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en Y, para todo abierto U en X tal que $a \in U$, se tiene que $U \cap Y$ es abierto en Y que tiene a a, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \cap Y$ para toda $n > k$, de donde $x_n \in U$ para toda $n > k$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a$, en la topología de X.

Análogamente $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ en X y así tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge tanto a a como a b en X, esto es una contradicción con la hipótesis de que X es US, por lo tanto Y es US. $\square$

2.8. Espacios AB

Desde que los axiomas de separación fueron introducidos, se han ido modificando o extendido con el fin de obtener nuevos axiomas independientes de los establecidos. Por ejemplo cuando definimos el axioma $T_{\frac{1}{4}}$ vimos que se trata de separar un punto de un conjunto finito con un conjunto abierto o con un cerrado, lo cual es equivalente a decir que dados un conjunto finito F y un punto x tales que $x \notin F$, existe un abierto U que tiene a x y $F \cap U = \emptyset$ o $F \subseteq U$ y $x \notin U$. Si en esta última afirmación F fuera un punto, entonces se tendría la definición de espacio T_0. Análogamente, cuando definimos el axioma $T_{\frac{1}{2}}$, vimos que siguen la misma idea que los espacios $T_{\frac{1}{4}}$ pero usando un conjunto A de cualquier cardinalidad en lugar de un conjunto finito F (Teorema 2.29, e)).

Nos damos cuenta que cambiando un punto por un conjunto finito o infinito en la definición de axioma T_0, obtenemos nuevos axiomas de separación.

En un artículo publicado en 1965, C. E. Aull [7], introdujo una nueva clase de espacios llamados espacios AB. La idea de esta nueva clase es hacer una modificación al axioma T_0, intercambiando puntos por conjuntos compactos y pidiendo que el espacio sea T_1.

Definición 2.62. *Un espacio topológico es AB si es T_1 y para cualesquiera compactos ajenos $A, B \subseteq X$, existe un abierto U tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$ o bien $B \subseteq U$ y $U \cap A = \emptyset$.*

Lema 2.63. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$. Entonces $x \in U_j$ para alguna $j \in I$. Como $\lim_{x\to\infty} x_n = x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_i$ para toda $n > k$, de manera que para $x_1, x_2, \ldots, x_k$ podemos elegir a lo más k abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ tales que:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right) \cup U_j.$$

esto prueba que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ es compacto. $\square$

Definición 2.64. *Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es* ***eventualmente constante*** *si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que los términos x_n son iguales, para toda $n \geq k$.*

Lema 2.65. *Sean X un espacio topológico T_1 y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no eventualmente constante en X que converge a $x \in X$. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ y $x_{n_k} \neq x_{n_l}$ para $k \neq l$.*

Demostración. Como $\lim_{x\to\infty} x_n = x$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \neq x$. Puesto que X es T_1, el conjunto $U_1 = X \setminus \{x_{n_1}\}$ es un abierto de X que tiene a x. Nuevamente, como $\lim_{x\to\infty} x_n = x$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmnente constante, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ y $x_{n_2} \neq x$. Otra vez dado que X es T_1, el conjunto

$U_2 = X \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$ es un abierto que tiene a x. Continuando con esta construcción, tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$ existe un $n_k \in \mathbb{N}$ y un abierto $U_k = X \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2} \dots x_{n_k}\}$ tal que $x \in U_k$.

Tenemos que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la subsucesión buscada. En primer lugar notemos que debido a la construcción de nuestros conjuntos U_k, se tiene que $x_{n_k} \neq x_{n_l}$, para toda $k \neq l$. Además, como $\lim_{x\to\infty} x_n = x$, entonces para cualquier abierto U que tenga a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_r \in U$ para toda $r > N$, de manera que para cualquier $n_k > r$ la subsucesión $\{x_{n_k}\} \in U$. Por lo tanto $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a x. □

Teorema 2.66. *Los espacios AB son US.*

Demostración. Supongamos que X no es US y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en X, tal que $\lim_{x\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{x\to\infty} x_n = b$ con $a, b \in X$ y $a \neq b$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante, de lo contrario se tendría $a = b$. De acuerdo al Lema 2.65, podemos suponer que $x_i \neq x_j$ para toda $i \neq j$.

Por hipótesis X es T_1, así que $\{a\}$ es cerrado, por tanto $X \setminus \{a\}$ es un abierto que tiene a b. Como $\lim_{x\to\infty} x_n = b$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X \setminus \{a\}$ para toda $n > n_0$ y por el Lema 2.63, tenemos que $\{b, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3} \dots\}$ es compacto. Análogamente como $\{b\}$ es cerrado, $X \setminus \{b\}$ es un abierto que tiene a a y $\lim_{x\to\infty} x_n = a$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\{a, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+3} \dots\}$ es compacto.
Tomemos n_2=máx$\{n_0, n_1\}$ y definimos los siguientes conjuntos:
$C = \{b, x_{n_2+2}, x_{n_2+4} \dots\}$ y $D = \{a, x_{n_2+1}, x_{n_2+3}, x_{n_2+5} \dots\}$. Notemos que estos conjuntos definen dos subsucesiones de la sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por tanto también son convergentes tanto a a como a b, además C y D son dos compactos ajenos (Lema 2.63). Como X es AB, existe un abierto U tal que $C \subseteq U$ y $U \cap D = \emptyset$ o $D \subseteq U$ y $U \cap C = \emptyset$. Supongamos que $C \subseteq U$, puesto que $b \in C, b \in U$ y como $\lim_{x\to\infty} x_n = b$, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para toda $n > k$, por lo que $D \cap U \neq \emptyset$, una contradicción. Similarmente si $D \subseteq U$, entonces, $C \cap U \neq \emptyset$. De esta contradicción concluimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener dos límites distintos, por tanto $a = b$. □

Teorema 2.67. *Existen espacios US que no son AB.*

Demostración. Sea $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{p, q\}$ donde $p, q \notin [0, 1] \cup [2, 3]$ y $p \neq q$. Definamos $Y = [0, 1] \cup \{p\}$ y $Z = [2, 3] \cup \{q\}$.

En el Ejemplo 2.60 vimos que $(X, \tau_{\mathcal{S}})$ es un espacio US, donde S es una subbase para X definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = &\{U \subseteq [0,1] : U \text{ es abierto en } [0,1]\} \cup \{U \subseteq [2,3] : U \text{ es abierto en } [2,3]\}\\ &\cup \{Y \setminus S : S \text{ es una sucesión convergente en } \mathbb{R} \text{ con su límite en } [0,1]\}\\ &\cup \{Z \setminus S : S \text{ es una sucesión convergente en } \mathbb{R} \text{ con su límite en } [2,3]\}.\end{aligned}$$

Recordemos que a los intervalos $[a, b]$ los estamos considerando con la topología usual. Además usaremos el hecho de que los intervalos cerrados $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ son compactos [1, Corolario 27.2, pág. 197].

Ahora veremos que este espacio no es AB. Para esto, vamos a utilizar el Lema de la subbase de Alexander (1.9).

En primer lugar notemos que, debido a que el espacio X es US resulta ser un espacio T_1 (Teorema 2.58).

Definamos $A = [0,1] \cup \{q\}$ y $B = [2,3] \cup \{p\}$, notemos que $A \cap B = \emptyset$. Vamos a demostrar que A y B son compactos. Haremos la prueba para A, la prueba para B es análoga.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta de A formada por abiertos subbásicos de X.

Definamos $B_\alpha = U_\alpha \cap [0,1]$ para cada $\alpha \in I$. Observemos que los B_α son conjuntos abiertos en $[0,1]$ o conjuntos de la forma $Y \setminus (C \cup \{p\})$, donde C es una sucesión en $[0,1]$ con su límite. Debido a que toda sucesión convergente con su límite en $[0,1]$ es un cerrado de $[0,1]$, tenemos que el conjunto $Y \setminus (C \cup \{p\})$ es un abierto en $[0,1]$, por lo tanto $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta de abiertos usuales de $[0,1]$ y como éste es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha i}$, de manera que tomando cualquier subbásico de la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ que tenga a q, digamos U_{α_0}, tenemos que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} U_{\alpha i}$. Esto demuestra que $\{U_\alpha\}_{\alpha=0}^{n}$ es una subcubierta finita de abiertos subbásicos de A. Por lo tanto A es compacto.

Ahora probaremos que X no es AB. Sea U un abierto que contenga a A. Entonces $q \in U$ y por lo tanto existe un básico W tal que $q \in W \subseteq U$. Sea $W = U_1 \cap U_2 ... \cap U_n$ donde los conjuntos U_i son abiertos subbásicos que tienen a q, es decir, son de la forma $U_i = Z \setminus C_i$ donde cada C_i es una sucesión convergente con su limite en $[2,3]$. Se tiene que $W = \bigcap_{i=1}^{n}(Z \setminus C_i) = Z \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, por último notemos que $Z = [2,3] \cup \{q\}$ es un conjunto no numerable, mientras que $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es un conjunto numerable, pues cada sucesión C_i determina un conjunto numerable. Por esta razón existe $r \in$

$[2,3] \cap W \subseteq B \cap W \subseteq B \cap U$ y así tenemos que $B \cap U \neq \emptyset$, y por lo tanto X no es AB. $\square$

Sea X es un conjunto no vacío. A la topología: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U$ es numerable$\}$ se le conoce como la *topología conumerable* y la denotamos como (X, τ_{CN}).

Ejemplo 2.68. *Consideremos el siguiente espacio. Elejimos un elemento $a \notin \mathbb{R}$ y al conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{a\}$ le damos la siguiente topología:*

$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^*\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U$ es numerable$\} \cup \{\mathbb{R}^* \setminus U : U$ es compacto en $\mathbb{R}\}$. Afirmamos que el espacio $(\mathbb{R}^*, \tau)$ es AB.

Antes de ver la prueba debemos cerciorarnos de que $(\mathbb{R}^*, \tau)$ es un espacio topológico.

En [12, Teorema 8.4, pág 246] se demuestra un resultado conocido como la compactación de Alexandroff. El teorema dice que cualquier espacio X localmente compacto y T_2 se puede encajar en un espacio compacto X^* de manera que $X^* \setminus X$ consta en un solo elemento.

Parte de la prueba de este teorema es ver que $\tau^* = \{\emptyset, X^*\} \cup \{U \subseteq X : U$ es abierto en $X\} \cup \{X^* \setminus U : U$ es compacto en $X\}$ es una topología sobre X^*.

En la siguiente sección, en el Teorema 2.74, vamos a demostrar que una condición necesaria y suficiente para que τ^* defina una topología sobre X es que en X todo subconjunto compacto sea cerrado. También en el Lema 2.75 de la siguiente sección se verá que el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ cumple esta propiedad y por lo tanto $(\mathbb{R}^*, \tau)$ es un espacio topológico.

Ahora veamos que $\mathbb{R}^*$ es AB.

Demostración. Veamos que este espacio es T_1. Si $x, y \in \mathbb{R}^*$ con $x \neq y$ y $x \neq a \neq y$, entonces tenemos que $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ es un abierto que tiene a y y no tiene a x y $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ un es abierto tal que tiene a x y no tiene a y.

En otro caso, si $a = x$, como sabemos que $\{y\}$ es compacto, entonces $\mathbb{R}^* \setminus \{y\}$ es un abierto tal que tiene a a pero que no tiene a y, también $\mathbb{R}$ es un abierto que tiene a y y no tiene a a, por lo tanto $\mathbb{R}^*$ es T_1.

Ahora tomemos dos compactos ajenos C y D en $\mathbb{R}^*$. Primero notemos que $a \notin C$ o $a \notin D$, esto es porque $C \cap D = \emptyset$. Supongamos que $a \notin D$, entonces

D es compacto en $\mathbb{R}$, tomando $U = \mathbb{R}^* \setminus D$, resulta que U es abierto tal que $C \subseteq U$ y $D \cap U = \emptyset$. El caso donde $a \notin C$ es análogo y así encontramos para cada par de compactos ajenos, un abierto que contiene a uno y no interseca al otro, por lo tanto el espacio es AB. $\square$

Lema 2.69. *Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Si $C \subseteq Y$ es compacto en Y, entonces C es compacto en X.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, una cubierta de C de abiertos en X. Definimos $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}} = \{U_i \cap Y\}_{i\in I}$, la cual es una cubierta de C con abiertos de Y, luego, como C es compacto en Y, existe $k \in I$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}\{U_i \cap Y\}$, de manera que la familia $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$, es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ que cubre a C, por lo tanto C es compacto en X. $\square$

Veamos que la propiedad AB es una propiedad hereditaria.

Teorema 2.70. *Si X es AB y $Y \subseteq X$, entonces Y es AB.*

Demostración. Sea $Y \subseteq X$. Por el Teorema 2.56, sabemos que Y es T_1. Tomemos dos compactos ajenos $C \subseteq Y$ y $D \subseteq Y$. Por el Lema 2.69, C y D son compactos en X. Ahora, debido a que X es AB, existe un abierto U de X, tal que $C \subseteq U$ y $U \cap D = \emptyset$ o $D \subseteq U$ y $U \cap C = \emptyset$. Tenemos que $U_Y = U \cap Y$ es un abierto en Y, tal que $C \subseteq U_Y$ y $U_Y \cap D = \emptyset$ o $D \subseteq U_Y$ y $U_Y \cap C = \emptyset$, esto prueba que Y es AB. $\square$

2.9. Espacios KC

Otros espacios que han sido estudiados últimamente, son aquéllos donde los subconjuntos compactos son cerrados. Estos espacios son llamados espacios KC [8].

Definición 2.71. *Un espacio topológico es KC si todo subconjunto compacto es cerrado.*

El inciso c) del próximo teorema nos muestra que la definición de espacio KC resulta de una modificación al axioma de separación T_1 cambiando puntos por conjuntos compactos.

Teorema 2.72. *En un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es KC.*

b) *Para todo compacto $C \subseteq X$ y todo punto $x \notin C$, existen abiertos U y V tales que $x \in U \setminus V$ y $C \subseteq V \setminus U$.*

c) *Para cualesquiera compactos $C, D \subseteq X$, tales que $C \cap D = \emptyset$ existen abiertos U y V tales que $C \subseteq U \setminus V$ y $D \subseteq V \setminus U$.*

Demostración. $a) \Rightarrow c)$. Sean $C, D \subseteq X$ compactos tales que $C \cap D = \emptyset$. Como el espacio es KC tenemos que C y D son cerrados, luego $U = X \setminus C$ y $V = X \setminus D$ son abiertos tales que $C \subseteq V \setminus U$ y $D \subseteq U \setminus V$.

$c) \Rightarrow b)$ Es inmediato ya que para todo $x \in X$, el unitario $\{x\}$ es compacto.

$b) \Rightarrow a)$ Sea $C \subseteq X$ compacto. Tomemos $x \in X \setminus C$, por b) podemos hallar abiertos U y V tales que $x \in U \setminus V$, $C \subseteq V \setminus U$ y $C \cap U = \emptyset$, entonces tenemos que U es un abierto tal que $x \in U \subseteq X \setminus C$, por lo tanto $X \setminus C$ es abierto, entonces C es cerrado y tenemos X es KC. □

Teorema 2.73. *Los espacios KC son AB.*

Demostración. Como para todo $x \in X$, $\{x\}$ es compacto, si X es KC, entonces, $\{x\}$ es cerrado, y por lo tanto X es T_1 (Teorema 2.52, d)).

Ahora tomemos dos compactos ajenos C y D. Como X es KC, tenemos que C y D son cerrados; luego, $X \setminus C$ es un abierto que contiene a D y $(X \setminus C) \cap C = \emptyset$. Por lo tanto X es AB. □

Los siguientes dos resultados se utilizaron para definir la topología del espacio del Ejemplo 2.68. También nos seran útiles en esta sección.

Teorema 2.74. *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto y $a \notin X$. Definamos $X^* = X \cup \{a\}$, entonces $\tau^* = \{\emptyset, X^*\} \cup \{U \subseteq X : U$ es abierto en $X\} \cup \{X^* \setminus U : U$ es compacto en $X\}$ es una topología sobre X^* si y solo si X es KC.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea C un compacto en X. Entonces $X^* \setminus C \in \tau^*$ y como $X \in \tau^*$ se tiene que $(X^* \setminus C) \cap X = X \setminus C \in \tau^*$. Puesto que $a \notin X \setminus C$ resulta que $X \setminus C \in \tau$, luego C es cerrado en X y obtenemos que X es KC.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que X es KC. En primer lugar, notemos que $\emptyset, X^* \in \tau^*$. En segundo lugar, tomemos dos abiertos U y V en X^*. Tenemos tres casos.

Caso 1) Si $a \notin U \cup V$, entonces ambos son abiertos en X en cuyo caso su intersección es un abierto en X, luego $U \cap V \in \tau^*$.

Caso 2) Si $a \in U \cap V$, entonces U y V son el complemento en X de dos compactos C y D en X respectivamente. Como X es KC, entonces C y D son cerrados, además $U \cap V = (X^* \setminus C) \cap (X^* \setminus D) = X^* \setminus (C \cup D)$ y puesto que $C \cup D$ es compacto en X se tiene que $U \cap V \in \tau^*$.

Caso 3) Si $a \in U \setminus V$, entonces tenemos que V es abierto en X y $U = X^* \setminus C$, donde C es compacto en X, luego $U \cap V = (X^* \setminus C) \cap V = (X^* \cap V) \setminus C = V \setminus C$, como X es KC, se tiene que C es cerrado en X, de manera que $V \setminus C \in \tau$ y por lo tanto $V \setminus C = U \cap V \in \tau^*$

En cualquier caso para cada par de elementos $U, V \in \tau^*$ tenemos que $U \cap V \in \tau^*$.

Por último sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de τ^*. Supongamos que $\{U_j\}_{j \in J}$ con $J \subseteq I$, son los elementos de τ^* que tienen a a, es decir U_j es el complemento en X^* de un compacto en X para cada $j \in J$ y que $\{U_i\}_{i \in I \setminus J}$ son abiertos en X. Observemos que $\bigcup_{j \in J} U_j = X^* \setminus \bigcap_{j \in J} C_j$ donde C_j es compacto en X. Como X es KC, entonces cada C_j es cerrado en X, luego $\bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado en X contenido en un compacto C_i entonces también es compacto en X, de manera que $\bigcup_{j \in J} U_j = X^* \setminus \bigcap_{j \in J} C_j$, además

$$(X^* \setminus \bigcap_{j \in J} C_j) \cup \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i = X^* \setminus \big(\bigcap_{j \in J} C_j \setminus \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i\big).$$

Notemos que $\bigcap_{j \in J} C_j \setminus \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i$ es un cerrado menos un abierto y esta contenido en $\bigcap_{j \in J} C_j$ el cual es compacto en X, por lo tanto $\bigcap_{j \in J} C_j \setminus \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i$ es compacto, de modo que $X^* \setminus \big(\bigcap_{j \in J} C_j \setminus \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i\big) \in \tau^*$. Así, tenemos que la unión arbitraria de cualquier famila de elementos de τ^* también pertenece a τ^* y por lo tanto τ^* en una topología sobre X^*. $\square$

Lema 2.75. *En el espacio* $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$*, todo subconjunto compacto es finito, por lo tanto* $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ *es* KC*.*

Demostración. Supongamos que C es un compacto infinito. Vamos a construir un subconjunto de C, de la siguiente manera: tomamos $x_1 \in C$, luego $x_2 \in C \setminus \{x_1\}$, $x_3 \in C \setminus \{x_1, x_2\}$ y así sucesivamente. En general tenemos que el elemento $x_n \in C \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. Consideremos $N = \{x_1, x_2, \ldots\}$ el cual es un subconjunto infinito numerable de C.

Ahora definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_n = (\mathbb{R} \setminus N) \cup \{x_n\}$ y veamos que la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de C.

Como cada $U_n = (\mathbb{R} \setminus N) \cup \{x_n\} = \mathbb{R} \setminus (N \setminus \{x_n\})$, entonces $\mathbb{R} \setminus U_n = N \setminus \{x_n\}$, por lo que U_n es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$, pues $N \setminus \{x_n\}$ es numerable. Además $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$=$(\mathbb{R} \setminus N) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\})$=$(\mathbb{R} \setminus N) \cup N = \mathbb{R}$ y $C \subseteq \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de C.

Luego, como C es compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{n=1}^{n=k} U_n$, pero esto no puede ser puesto que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{n=k} U_n = (\mathbb{R} \setminus N) \cup \bigcup_{n=1}^{n=k}\{x_n\} = (\mathbb{R} \setminus N) \cup \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, pero $x_{n+1} \in C$, sin embargo $x_{n+1} \notin \bigcup_{n=1}^{n=k} U_n$, entonces $C \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{n=k} U_n$, lo cual contradice el hecho de que C es compacto. Esta contradicción surgió al suponer que C es infinito, por lo tanto concluimos que C es finito.

Por último, como los cerrados en (X, τ_{CN}) son los subconjuntos numerables de X, en particular todos los subconjutos finitos son cerrados, por lo tanto en (X, τ_{CN}) todo compacto es cerrado, es decir, (X, τ_{CN}) es KC. □

Teorema 2.76. *Existen espacios AB que no son KC.*

Demostración. En Ejemplo 2.68, probamos que el espacio $\mathbb{R}^*$ es AB.

Veamos que el espacio $\mathbb{R}^*$ no es KC.

Recordemos que $\mathbb{R}^*$=$\mathbb{R}\cup\{a\}$ donde $a \notin \mathbb{R}$ y $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^*\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R}\setminus U$ es numerable$\} \cup \{\mathbb{R}^* \setminus U : U$ es compacto en $\mathbb{R}\}$.

Consideremos $A = [0, 1] \cup \{a\}$.

Afirmamos que A es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $[0, 1] \cup \{a\}$. Entonces $a \in U_i$ para alguna $i \in I$. Como los abiertos que tienen a a son de la forma $\mathbb{R}^* \setminus U$, donde U es un compacto de $\mathbb{R}$ y puesto que por el Lema 2.75, todo compacto en $\mathbb{R}$ es finito, tenemos que U_i contiene a todos los elementos de $\mathbb{R}^*$ excepto una cantidad finita de ellos, luego U_i contiene a todos los elementos de $[0, 1] \cup \{a\}$ excepto un número finito, este número finito de elementos que no están en U_i los podemos cubrir con una cantidad finita de abiertos de $\mathcal{U}$ y así tenemos que $[0, 1] \cup \{a\}$ es compacto en $\mathbb{R}^*$.

Por último veamos que $[0,1]\cup\{a\}$ no es cerrado. Si suponemos que $[0,1]\cup\{a\}$ es cerrado, entonces $\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$ es abierto. Analicemos los siguientes dos casos:

Caso I) $\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$ es de la forma U, donde $\mathbb{R}\setminus U$ es numerable.

En este caso notemos que el complemento en $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$ es $[0,1]$, el cual no es numerable y por lo tanto no es abierto.

Caso II) $\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$ es de la forma $\mathbb{R}^*\setminus U$, donde U es compacto en $\mathbb{R}$.

En este caso notemos que $a\in\mathbb{R}^*\setminus U$ pero $a\notin\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$ no es abierto.

En ambos casos tenemos que $\mathbb{R}^*\setminus([0,1]\cup\{a\})$ no es abierto, luego $[0,1]\cup\{a\}$ no es cerrado. Así tenemos que $[0,1]\cup\{a\}$ es compacto pero no es cerrado y por lo tanto el espacio no es KC. $\square$

A continuación veamos un ejemplo de un espacio KC.

Ejemplo 2.77. *El espacio* $(\mathbb{R},\tau_{CN})$ *es un espacio* KC*.*

Demostración. Observemos que los cerrados en este espacio son $\mathbb{R}$ y los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$. Sea C un compacto en $\mathbb{R}$, por el Lema 2.75, tenemos que C es finito, luego es numerable y por lo tanto es cerrado. Así, tenemos que en este espacio todo compacto es cerrado, es decir, el espacio es KC. $\square$

Finalizaremos esta subsección demostrando que los espacios KC se preservan bajo subespacios.

Teorema 2.78. *Si* X *es* KC *y* $Y\subseteq X$*, entonces* Y *es* KC*.*

Demostración. Sea $C\subseteq Y$ compacto en Y. Por el Lema 2.69, C es compacto en X y como X es KC, tenemos que C es cerrado en X. Finalmente notemos que $C=C\cap Y$, por lo que C es cerrado en Y y así, tenemos que Y es KC. $\square$

2.10. Espacios T_2

Los siguientes espacios que estudiaremos fueron introducidos por Felix Hausdorff en 1914 y son conocidos como espacios T_2 o espacios de Hausdorff [2, pág. 47].

Definición 2.79. *Un espacio topológico X es T_2, si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Antes de enunciar otras formas equivalentes de los espacios T_2, veamos el siguiente lema:

Lema 2.80. *Sean X un espacio topológico y U y V dos abiertos de X. Definimos $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$. Entonces $(U \times V) \cap \Delta \neq \emptyset$ si y solo si $U \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. $(U \times V) \cap \Delta \neq \emptyset$ si, y solo si, existe $(x, y) \in (U \times V) \cap \Delta$, es decir, $x = y$, $x \in U$ y $y \in V$ o equivalentemente, $x \in U \cap V$ si, y solo si, $U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2.81. *En un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es T_2.*

b) *Para todo $x \neq y$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin \overline{U}$.*

c) *Para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U$ es abierto y $x \in U\}$.*

d) *$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ *b*). Sea $x \neq y$. Como X es T_2, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $x \in U$ y $y \notin \overline{U}$.

b) $\Rightarrow$ *c*). Sea $x \in U$ con U abierto. Entonces $x \in \overline{U}$, de manera que $x \in \bigcap\{\overline{U} : U \text{ es abierto y } x \in U\}$.
Por otro lado, si $x \neq y$, entonces existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin \overline{U}$, luego $y \notin \bigcap\{\overline{U} : U \text{ es abierto y } x \in U\}$ por lo que $\bigcap\{\overline{U} : U \text{ es abierto y } x \in U\} \subseteq \{x\}$ y por lo tanto $\bigcap\{\overline{U} : U \text{ es abierto y } x \in U\} = \{x\}$.

c) $\Rightarrow$ *d)*. Para ver que Δ es cerrado vamos a ver que $X \times X \setminus \Delta$ es abierto. Si $(x, y) \notin \Delta$, entonces $x \neq y$, como por hipótesis $\{x\} = \bigcap\{\overline{U}\colon U$ es abierto y $x \in U\}$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin \overline{U}$. Puesto que $U \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$ y además U y $X \setminus \overline{U}$ son abiertos tales que $x \in U$, y $y \in X \setminus \overline{U}$, por el Lema 2.80, tenemos que $(U \times (X \setminus \overline{U})) \cap \Delta = \emptyset$, de manera que $U \times (X \setminus \overline{U})$ es un abierto en $X \times X$ tal que $(x, y) \in U \times (X \setminus \overline{U}) \subseteq X \setminus \Delta$. Luego $X \setminus \Delta$ es abierto, y por lo tanto Δ es cerrado.

d) $\Rightarrow$ *a)*. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces $(x, y) \notin \Delta$. Como Δ es cerrado, existe un abierto U en $X \times X$ tal que $(x, y) \in U \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Luego, existe un abierto básico U_x tal que $(x, y) \in U_x \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$, este básico U_x es de la forma $V \times W$, donde V y W son abiertos de X, de manera que $x \in V$ y $y \in W$ y como $U_x \cap \Delta = (V \times W) \cap \Delta = \emptyset$, por el Lema 2.80, $V \cap W = \emptyset$. Por lo tanto X es T_2. $\square$

Lema 2.82. *Sean X un espacio topológico T_2 y $C \subseteq X$ compacto. Si $x \in X \setminus C$, entonces existen dos abiertos U y V tales que $x \in U$, $C \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Sean X un espacio topológico T_2 y $C \subseteq X$ compacto. Vamos a probar que $X \setminus C$ es abierto.

Tomemos $x \in X \setminus C$. Como X es T_2, para cada $y \in C$ existen abiertos U_y y V_y tal que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$.

Sea $\mathcal{V} = \{V_y\}_{y \in C}$. Es claro que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de C. Por la compacidad de C, existen $k \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_k \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i} = V$, considerando los correspondientes abiertos $U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_k}$ y tomando $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$, tenemos que U es abierto por ser una intersección finita de abiertos y además $x \in U$.

También notemos que si $z \in V$ entonces $z \in V_{y_j}$ para algún $y_j \in C$ por lo tanto $z \notin U_{y_j}$, de modo que $z \notin U$. Así tenemos $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Teorema 2.83. *Los espacios T_2 son KC.*

Demostración. Sean X un espacio topológico T_2 y $C \subseteq X$ compacto. Del Lema anterior (2.82), tenemos que para todo $x \in X \setminus C$ existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq X \setminus C$, de manera que $X \setminus C$ es abierto, por lo que C es cerrado y el espacio X es KC. $\square$

Teorema 2.84. *Existen espacios KC que no son T_2.*

Demostración. El espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es un ejemplo de un espacio KC (como lo vimos en el Ejemplo 2.77); sin embargo no es T_2, como lo veremos enseguida.

Supongamos que es T_2 y tomemos $x \neq y \in \mathbb{R}$. Entonces existen dos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, pero como U y V son abiertos, tenemos que $\mathbb{R} \setminus U$ y $\mathbb{R} \setminus V$ son numerables, de manera que $(\mathbb{R}\setminus U) \cup (\mathbb{R}\setminus V) = \mathbb{R}$ es numerable, lo cual no es posible. De esta contradicción concluimos que el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ no es T_2. □

Aunque existen muchos ejemplos sencillos de espacios T_2, a continuación daremos uno, que aunque no es complicado, es un poco más elaborado, la razón por la que lo veremos es porque lo utilizaremos en la siguiente subsección.

Ejemplo 2.85. *Consideremos el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$. A continuación definiremos una famila $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$.*

Sean a y b dos enteros positivos distintos con $b \neq 0$ y definamos $N_{(a,b)} = \{a+kb \in \mathbb{Z}^+ : k \in \mathbb{Z}\}$. Afirmamos que la familia $\mathcal{B} = \{N_{(a,b)} : mcd(a,b) = 1\}$, donde $mcd(a,b)$ denota el máximo común divisor de a y b, es una base para una topología sobre el conjunto $\mathbb{Z}^+$ y el espacio generado por $\mathcal{B}$ es T_2.

Antes de probar que la familia $\mathcal{B}$, es una base probemos el siguiente:

Lema 2.86. *Si $x \in N_{(a,b)}$, entonces $N_{(a,b)} = N_{(x,b)}$.*

Demostración. Sea $x \in N_{(a,b)}$ y consideremos $y \in N_{(a,b)}$. Tenemos que $y = a + kb$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$ y puesto que $x \in N_{(a,b)}$, resulta que $x = a + k_1 b$ para alguna $k_1 \in \mathbb{Z}$; luego, $a = x - k_1 b$, por lo que $y = (x - k_1 b) + kb = x + (k - k_1)b \in N_{(x,b)}$, y así $N_{(a,b)} \subseteq N_{(x,b)}$.

Ahora tomemos $y \in N_{(x,b)}$, entonces $y = x+kb$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$ y, como $x \in N_{(a,b)}$, $x = a + k_1 b$ para alguna $k_1 \in \mathbb{Z}$, luego $y = (a + k_1 b) + kb = a + (k + k_1)b \in N_{(a,b)}$, de manera que $N_{(x,b)} \subseteq N_{(a,b)}$ y por lo tanto $N_{(a,b)} = N_{(x,b)}$ siempre que $x \in N_{(a,b)}$. □

Ahora veamos que en efecto $\mathcal{B}$ es una base y genera un espacio T_2.

Demostración. De acuerdo a la Definición 1.7 tenemos que probar dos cosas:

1) Veamos que para todo $x \in \mathbb{Z}^+$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B}$.

Es facil ver que para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, $x \in N_{(x,x+1)}$. (simplemente tomemos $k = 0$).

2) Ahora veamos que si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Sea $x \in N_{(a,b)} \cap N_{(c,d)}$. Como $x = a + kb = c + td$, para algunas $k, t \in \mathbb{Z}$, se tiene que $mcd(x, b) = mcd(x, d) = 1$. Entonces $mcd(x, bd) = 1$. Por lo tanto $N_{(x,bd)}$ es un elemento de $\mathcal{B}$ que tiene a x. Vamos a ver que, $N_{(x,bd)} \subseteq N_{(a,b)} \cap N_{(c,d)}$. Por el Lema 2.86, $N_{(a,b)} = N_{(x,b)}$, y $N_{(c,d)} = N_{(x,d)}$, de modo que $x \in N_{(x,b)} \cap N_{(x,d)}$. Ahora, como para todo $y \in N_{(x,bd)}$, $y = x + kbd$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$, resulta que $y \in N_{(x,b)}$ y $y \in N_{(x,d)}$, es decir, $y \in N_{(x,b)} \cap N_{(x,d)}$, luego $y \in N_{(a,b)} \cap N_{(c,d)}$. Por lo tanto $N_{(x,bd)} \subseteq N_{(a,b)} \cap N_{(c,d)}$.

Con esto hemos probado que la familia $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{Z}^+$.

Veamos que este espacio es T_2.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$, con $a \neq b$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a < b$ y sea p un primo tales que $a < b < p$. Entonces $N_{(a,p)}$ y $N_{(b,p)}$, son dos básicos tales que $a \in N_{(a,p)}$ y $b \in N_{(b,p)}$.

Veamos que $N_{(a,p)} \cap N_{(b,p)} = \emptyset$. Supongamos que $x \in N_{(a,p)} \cap N_{(b,p)}$, entonces $x = a+kp = b+k_1p$ con $k, k_1 \in \mathbb{Z}$, de estas dos ecuaciones tenemos que $b - a = kp - k_1p = (k - k_1)p$ de manera que $p|b - a$, pero esto es una contradicción, pues $b-a < p$. Por lo tanto $N_{(a,p)} \cap N_{(b,p)} = \emptyset$ y de esta manera se concluye que el espacio es T_2. $\square$

El axioma T_2 es una propiedad hereditaria.

Teorema 2.87. *Si X es T_2 y $Y \subseteq X$, entonces Y es T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$ tales que $x \neq y$. Entonces $x, y \in X$, luego como X es T_2 existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Tomando $U_Y = U \cap Y$ y $V_Y = V \cap Y$, resulta que U_Y y V_Y son abiertos en Y tales que $x \in U_Y, y \in V_Y$ y $U_Y \cap V_Y = \emptyset$. Por lo tanto Y es T_2. $\square$

2.11. Espacios $T_{2\frac{1}{2}}$

Continuaremos nuestro estudio con una clase de espacios introducidos por Pavel Urysohn en 1924, llamados espacios $T_{2\frac{1}{2}}$. Estos espacios también son conocidos como espacios completamente Hausdorff.

Definición 2.88. *Un espacio topológico X es $T_{2\frac{1}{2}}$ si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V tales que $x \in U, y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Teorema 2.89. *Los espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ son T_2.*

Demostración. Sea X un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$. Como para cualesquiera $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que $x \in U, y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, se tiene que $U \cap V = \emptyset$, porque $U \subseteq \overline{U}$ y $V \subseteq \overline{V}$, y por lo tanto X es T_2. □

Para nuestro siguiente teorema utilizaremos el espacio que dimos en el Ejemplo 2.85. Recordemos que el espacio en cuestión es el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ con la topología que tiene como base a la familia $\mathcal{B} = \{N_{(a,b)} : mcd(a, b) = 1\}$, donde $mcd(a, b)$ es el máximo común divisor de a y b.

El siguiente resultado nos será de utilidad:

Lema 2.90. *Si $N_{(a,b)}$ es un abierto básico, entonces se tiene que el conjunto $b\mathbb{Z}^+ = \{bz : z \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \overline{N_{(a,b)}}$.*

Demostración. Tomemos $bk \in b\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}^+$ un abierto U tal que $bk \in U$. Por el Lema 2.86 existe un básico de la forma $N_{(bk,t)}$ tal que $bk \in N_{(bk,t)} \subseteq U$ para alguna $t \in \mathbb{Z}$ con $mcd(bk, t) = 1$.

Veamos que $N_{(bk,t)} \cap N_{(a,b)} \neq \emptyset$ y así tendríamos $bk \in \overline{N_{(a,b)}}$. En efecto, para que exista un elemento $z \in N_{(bk,t)} \cap N_{(a,b)}$ se necesita que $z = bk + xt = a + yb$ para algunos $x, y \in \mathbb{Z}$, esto es $xt - yb = a - bk$, pero esta es una ecuación diofantina y sabemos que tiene solución si y solo si $mcd(b, t) | a - bk$, lo cual es cierto porque $mcd(b, t) = mcd(bk, t) = 1$, de manera que $N_{(bk,t)} \cap N_{(a,b)} \neq \emptyset$ y así $bk \in \overline{N_{(a,b)}}$. □

Teorema 2.91. *Existen espacios T_2 que no son $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Como ya lo mencionamos, utilizaremos el espacio del Ejemplo 2.85. A continuación veremos que no es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Tomemos dos puntos distintos $a, c \in \mathbb{Z}^+$. Como el espacio es T_2, existen abiertos U, V tales que $a \in U$, $c \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces por el Lema 2.86, existen dos abiertos basicos de la forma $N_{(a,b)}$ y $N_{(c,d)}$ tales que $a \in N_{(a,b)} \subseteq U$, $c \in N_{(c,d)} \subseteq V$ y $N_{(a,b)} \cap N_{(c,d)} = \emptyset$.

Por el Lema 2.90, tenemos que $bd \in \overline{N_{(a,b)}}$ y $bd \in \overline{N_{(c,d)}}$, de manera que $\overline{N_{(a,b)}} \cap \overline{N_{(c,d)}} \neq \emptyset$, y por lo tanto el espacio no es $T_{2\frac{1}{2}}$. □

Veamos que los espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ se preservan bajo subespacios.

Teorema 2.92. *Si X es $T_{2\frac{1}{2}}$ y $Y \subseteq X$, entonces Y es $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$ con $x \neq y$. Entonces $x, y \in X$, como X es $T_{2\frac{1}{2}}$, existen abiertos ajenos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\mathrm{Cl}_X(U) \cap \mathrm{Cl}_X(V) = \emptyset$, de manera que $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son dos abiertos en Y tales que $x \in U \cap Y$ y $y \in V \cap Y$. Ahora notemos que $\mathrm{Cl}_Y(U \cap Y) \subseteq \mathrm{Cl}_X(U \cap Y) \subseteq \mathrm{Cl}_X(U)$ y $\mathrm{Cl}_Y(V \cap Y) \subseteq \mathrm{Cl}_X(V \cap Y) \subseteq \mathrm{Cl}_X(V)$, por lo tanto $\mathrm{Cl}_Y(U \cap Y) \cap \mathrm{Cl}_Y(V \cap Y) = \emptyset$. De esta manera concluimos que Y es $T_{2\frac{1}{2}}$. □

2.12. Espacios funcionalmente Hausdorff

Definición 2.93. *Un espacio topológico X es* ***funcionalmente Hausdorff*** *si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$, tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$.*

Teorema 2.94. *Los espacios funcionalmente Hausdorff son $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean X un espacio funcionalmente Hausdorff y $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Tomemos los abiertos ajenos $[0, \frac{1}{3})$ y $(\frac{2}{3}, 1]$ en $[0, 1]$ y definamos $U = f^{-1}[0, \frac{1}{3})$ y $V = f^{-1}(\frac{2}{3}, 1]$. Puesto que f es continua, U y V son abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y además, por el Teorema 1.10, $\overline{U} = \overline{f^{-1}[0, \frac{1}{3})} \subseteq f^{-1}\overline{[0, \frac{1}{3})} = f^{-1}[0, \frac{1}{3}]$. Análogamente, $\overline{V} = \overline{f^{-1}(\frac{2}{3}, 1]} \subseteq f^{-1}\overline{(\frac{2}{3}, 1]} = f^{-1}[\frac{2}{3}, 1]$ y como $f^{-1}[0, \frac{1}{3}] \cap f^{-1}[\frac{2}{3}, 1] = \emptyset$, tenemos que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. □

Más adelante en el Teorema 2.111, veremos que los espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ no son funcionalmente Hausdorff.

Por ahora terminaremos esta subsección demostrando que los espacios funcionalmente Hausdorff se preservan bajo subespacios.

Teorema 2.95. *Si X es funcionalmente Hausdorff y $Y \subseteq X$, entonces Y es funcionalmente Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$, con $x \neq y$. Como $x, y \in X$ y X es funcionalmente Hausdorff, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Definamos $g = f|_Y$. Entonces $g : Y \to [0,1]$ es continua (Teorema 1.12) tal que $g(x) = 0$ y $g(y) = 1$, por lo tanto Y es funcionalmente Hausdorff. □

2.13. Espacios T_3

En 1921 Vietoris, introdujo el axioma de separación T_3 [2, pag. 47]. Antes de definirlo, definiremos una clase muy importante de espacios topológicos, llamados *espacios regulares.*

Definición 2.96. *Un espacio topológico X es* ***regular****, si para todo cerrado $C \subseteq X$ y todo $x \in X \setminus C$, existen abiertos U y V tales que $x \in U, C \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Teorema 2.97. *En un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es regular.

b) Para toda $x \in X$ y todo abierto U tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

c) Para toda $x \in X$ y todo cerrado $C \subseteq X$ tales que $x \notin C$ existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\overline{V} \cap C = \emptyset$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Sean $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$. Tenemos que $x \notin X \setminus U$ el cual es cerrado, por lo que existen abiertos V y W tales que $x \in V$, $X \setminus U \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$, de manera que $V \subseteq X \setminus W$, luego $\overline{V} \subseteq \overline{X \setminus W} = X \setminus W$

porque W es abierto. Ahora como $X \setminus U \subseteq W$, tenemos que $X \setminus W \subseteq U$ y así $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

b) $\Rightarrow$ *c)*. Si $x \in X \setminus C$, donde C es un cerrado de X, entonces por b) existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus C$ luego, $\overline{V} \cap C = \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ *a)*. Sean $C \subseteq X$ cerrado y $x \in X$ tales que $x \notin C$. Por c) existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\overline{V} \cap C = \emptyset$, luego $C \subseteq X \setminus \overline{V}$ el cual es abierto, y además $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$, porque $V \subseteq \overline{V}$. Por lo tanto X es regular. □

El inciso b) del teorema anterior, dice que para toda $x \in X$ y todo abierto U que tenga a x, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. A continuación, veremos que podemos cambiar la hipótesis de que U sea cualquier abierto, y restringirnos a los abiertos subbásicos sin alterar el resultado.

Teorema 2.98. *X es regular si y sólo si, para todo $x \in X$, y todo abierto subbásico U de X, con $x \in U$, existe un abierto V de X, tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto subbásico de X tal que $x \in U$. Entonces U es un abierto y como X es regular, por el teorema anterior, tenemos que existe un abierto V de X, tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Inversamente, supongamos que para todo $x \in X$ y todo abierto subbásico U de X, con $x \in U$, existe un abierto V de X, tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Sea C un cerrado tal que $x \notin C$. Tenemos que $x \in X \setminus C$ el cual es abierto, entonces podemos tomar un abierto básico B de X tal que $x \in B \subseteq X \setminus C$. Luego, puesto que B es un básico de X, lo podemos escribir como una intersección finita de abiertos subbásicos, es decir, $B = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, donde U_i es un subbásico para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Como para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, se tiene que $x \in U_i$, por hipótesis, existen abiertos V_i tales que $x \in V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$. Sean

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i \quad \text{y} \quad G = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{V}_i$$

Observemos que V y G son abiertos. Además $x \in V$ y como $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \overline{V}_i$, resulta que $V \cap G = \emptyset$. Por último, ya que $\overline{V}_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos $\bigcap_{i=1}^{k} \overline{V}_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} U_i = B \subseteq X \setminus C$, tomando complementos obtenemos que $C \subseteq G$.

De esta manera concluimos que X es regular. □

Observación 2.99. *Si un espacio topológico X es regular y T_0, entonces el espacio es T_2 y por lo tanto T_1.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si X es T_0, entonces por el inciso b) del Teorema 2.8, tenemos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, luego $\overline{\{x\}} \nsubseteq \overline{\{y\}}$ o $\overline{\{y\}} \nsubseteq \overline{\{x\}}$.

Si $\overline{\{x\}} \nsubseteq \overline{\{y\}}$, entonces $x \notin \overline{\{y\}}$, porque si $x \in \overline{\{y\}}$, se tiene que $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$, lo cual no es cierto. Ahora como X es regular, existen abiertos ajenos U y V, tales que $x \in U$ y $\overline{\{y\}} \subseteq V$; luego, $y \in V$, y así dos abiertos ajenos U y V que tienen a x y y respectivamente. Análogamente, si $\overline{\{y\}} \nsubseteq \overline{\{x\}}$, entonces podemos encontrar abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$, de manera que el espacio es T_2 y por lo tanto T_1. □

La siguiente clase de espacios que vamos a introducir, se definen comúnmente como los espacios que son regulares y T_1, sin embargo la Observación 2.99 nos permite definir estos espacios como sigue:

Definición 2.100. *Un espacio topológico X es T_3 si es regular y T_0.*

Debido a que los espacios T_1 son T_0, es obvio que los espacios regulares que son T_1, son T_3, de manera que en los espacios regulares, la condiciones T_0 y T_1 son equivalentes.

Teorema 2.101. *Los espacio T_3 son $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean X un espacio T_3 y $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por la Observación 2.99, X es T_2, entonces existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$, luego, como el espacio es regular, podemos encontrar dos abiertos U_1 y V_1, tales que $x \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U$ y $y \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V$, puesto que $U \cap V = \emptyset$, se sigue que $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$ y por lo tanto X es $T_{2\frac{1}{2}}$. □

Teorema 2.102. *Existen espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ que no son T_3.*

Demostración. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathbb{R}$. Definamos $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = (a, b)$ o $A = (a, b) \setminus K$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$. Afirmamos que este conjunto es una base de una topología sobre $\mathbb{R}$.

En efecto, de acuerdo a la Definición 1.7 tenemos que ver que:

1) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces siempre existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

Esto es cierto, pues si $x \in \mathbb{R}$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, el intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon) = B$ es un elemento de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

2) Si $x \in B_1 \cap B_2$ donde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Para ver que 2) es cierto tomemos $x \in B_1 \cap B_2$. Tenemos tres casos:

Caso I): B_1 y B_2 son de la forma: $B_1 = (a, b)$ y $B_2 = (c, d)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a < c < b < d$. En este caso, la intersección $B_1 \cap B_2$ es el intervalo $(c, b) \in \mathcal{B}$, tal que $x \in (c, b) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Caso II): $B_1 = (a, b) \backslash K$ y $B_2 = (c, d) \backslash K$. Como en el caso I), supongamos que $a < c < b < d$. Tenemos que $((a, b) \setminus K) \cap ((c, d) \setminus K) = ((a, b) \cap (c, d)) \setminus K = (b, c) \setminus K$ y por lo tanto, es un elemento de $\mathcal{B}$, además cumple que $x \in (b, c) \setminus K \subseteq (B_1 \setminus K) \cap (B_2 \setminus K)$.

Caso III): $B_1 = (a, b)$ y $B_2 = (c, d) \setminus K$ con $a < c < b < d$. Aquí, tenemos que $B_1 \cap B_2 = (a, b) \cap ((c, d) \setminus K)) = ((a, b) \cap (c, d)) \setminus K = (c, b) \setminus K$ y se cumple que $x \in (c, b) \setminus K \subseteq B_1 \cap B_2$.

En cualquier caso, dada $x \in \mathbb{R}$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ con la propiedad de que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

Ahora veamos que el espacio es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Tomemos $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Definimos $a = \frac{x+y}{2}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x < r_1 < a < r_2 < y$. Por último observemos que $x \in (x - r_1, x + r_1)$ y $y \in (y - r_2, y + r_2)$, además $(x - r_1, x + r_1) \cap (y - r_2, y + r_2) = \emptyset$. Notemos que $\overline{(x - r_1, x + r_1)} = [x - r_1, x + r_1]$ y $\overline{(y - r_2, y + r_2)} = [y - r_2, y + r_2]$, de manera que, $\overline{(x - r_1, x + r_1)} \cap \overline{(y - r_2, y + r_2)} = [x - r_1, x + r_1] \cap [y - r_2, y + r_2] = \emptyset$, por lo tanto el espacio es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Por último veamos que $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ no es regular. En primer lugar observemos que K es cerrado pues para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus K$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \setminus K$ es un abierto que tiene a x y esta contenido en $\mathbb{R} \setminus K$, por lo tanto $\mathbb{R} \setminus K$ es abierto.

Si suponemos que el espacio es regular, entonces existen abiertos U y V tales que $0 \in U$, $K \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, luego podemos encontrar un abierto básico B tal que $0 \in B \subseteq U$, pero B no puede ser de la forma (a, b), porque si lo fuera, podemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} \in (a,b)$, pero $\frac{1}{N} \in K$ de manera que $(a,b) \cap K \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Si B es de la forma $(a,b) \setminus K$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} \in (a,b)$. Como $\frac{1}{N} \in K \subset V$, existe un básico de la forma (c,d), tal que $\frac{1}{N} \in (c,d) \subseteq V$. Finalmente tomamos $w = \text{máx}\{\frac{1}{N+1}, c\}$ y $z \in \mathbb{R}$ tal que $w < z < \frac{1}{N}$. Entonces $z \in U$, y $z \in V$ por lo que $U \cap V \neq \emptyset$, nuevamente una contradicción, de manera que el espacio no es regular y por lo tanto no es T_3. □

El axioma T_3 es una propiedad hereditaria, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.103. *Si X es T_3 y $Y \subseteq X$, entonces Y es T_3.*

Demostración. Veamos que Y es regular. Sean $C \subseteq Y$, cerrado en Y, y $x \in Y \setminus C$. Como C es cerrado en Y existe un cerrado D en X tal que $C = D \cap Y$, luego como $x \in Y$ y $x \notin C$ tenemos que $x \notin D$. Dado que X es T_3, existen abiertos U y V en X, tales que $x \in U$, $D \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, definimos $U_Y = U \cap Y$ y $V_Y = V \cap Y$. Entonces U_Y y V_Y son abiertos en Y, y tenemos que $x \in U_Y$, $C = D \cap Y \subseteq V \cap Y = V_Y$ y además $U_Y \cap V_Y = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset$. Por lo tanto Y es regular, y por el Teorema 2.56, Y es T_1, y concluimos que Y es T_3. □

2.14. Espacios $T_{3\frac{1}{2}}$

P. Urysohn definió el axioma de separación $T_{3\frac{1}{2}}$ en 1925; sin embargo el estudio, de estos espacios fue hecho por Tychonoff en 1930. Por esta razón, estos espacios también son conocidos como espacios de Tychonoff [2, pág. 47].

Definición 2.104. *Un espacio topológico X es **completamente regular** si para todo cerrado $C \subseteq X$ y toda $x \in X \setminus C$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in C$.*

Teorema 2.105. *Si X es completamente regular, entonces X es regular.*

Demostración. Sean $C \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus C$. Como X es completamente regular, existe una función $f : X \to [0,1]$ tal que f es continua, $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in C$. Notemos que $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son dos abiertos ajenos en $[0,1]$ y como f es continua, $f^{-1}([0,\frac{1}{2})) = U$ y $f^{-1}(\frac{1}{2},1] = V$ son abiertos ajenos en X tales que $x \in U$ y $C \subseteq V$. Por lo tanto X es regular. □

De acuerdo a la Definición 2.104, podemos decir que un espacio topológico X es completamente regular si dados $x \in X$ y un abierto $U \subseteq X$ que tenga a x, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. En realidad podemos cambiar la hipótesis de qu e U sea un abierto cualquiera pidiendo que U sea un abierto subbásico como lo veremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.106. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una subbase de X. Entonces X es completemente regular si y sólo si para todo $x \in X$ y cada $V \in \mathcal{S}$ tal que $x \in V$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$.*

Demostración. Supongamos que X es completamente regular. Sean $x \in X$ y $V \in \mathcal{S}$ tales que $x \in V$. Se tiene que $X \setminus V$ es un cerrado tal que $x \notin X \setminus V$. Como el espacio es completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$.

Ahora, supongamos que para todo $x \in X$ y cada $V \in \mathcal{S}$ tales que $x \in V$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$, tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$. Tomemos $x \in X$ y un cerrado C en X tales que $x \notin C$. Entonces $X \setminus C$ es un abierto tal que $x \in X \setminus C$. Como $\mathcal{S}$ es una subbase, sabemos que la colección de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base. Por lo tanto, existe un abierto básico W tal que $x \in W \subseteq X \setminus C$ y $W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ donde, $V_i \in \mathcal{S}$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Como $x \in W$, se tiene que $x \in V_i$ para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, de modo que existe una función continua $f_i : X \to [0,1]$ tal que $f_i(x) = 0$ y $f_i(X \setminus V_i) \subseteq \{1\}$. Tenemos que $C \subseteq X \setminus W = X \setminus (V_1 \cap V_2, \ldots, \cap V_n) = (X \setminus V_1) \cup (X \setminus V_2) \cup \cdots \cup (X \setminus V_n)$, tomando $f = \text{máx}\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ resulta que $f : X \to [0,1]$ es continua (Lema 4.4), $f(x) = 0$ y $f(C) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto X es completamente regular. □

Teorema 2.107. *Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si para toda $x \in X$ y cada cerrado no vacío C en X tal que $x \notin C$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \notin \overline{f(C)}$.*

Demostración. Supongamos que X es completamente regular y sean $x \in X$ y C un cerrado en X tales que $x \notin C$. Como X es completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(C) \subseteq \{1\}$ de manera que $\overline{f(C)} \subseteq \overline{\{1\}} = \{1\}$ y por lo tanto $0 = f(x) \notin \overline{f(C)}$.

Ahora tomemos $x \in X$ y supongamos que para cada cerrado no vacío C en X tal que $x \notin C$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \notin \overline{f(C)}$.

Como estamos trabajando en $\mathbb{R}$ con su topología usual podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que $[f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon] \subseteq X \setminus \overline{f(C)}$. Observemos que

$$f(C) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq \mathbb{R} \setminus [f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon] \subseteq \mathbb{R} \setminus (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$$

como $\mathbb{R}$ es un espacio completamente regular, porque es métrico (Lema 2.152) y $(f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, existe una función continua $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $g(f(x)) = 0$ y $g[\mathbb{R} \setminus (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)] \subseteq \{1\}$. Definamos $h = g \circ f$, entonces $h : X \to [0,1]$ es una función continua tal que $h(x) = g(f(x)) = 0$. Además si $c \in C$ tenemos que $f(c) \in \mathbb{R} \setminus (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$ de manera que $h(c) = g(f(c)) = 1$, por tanto $h(C) \subseteq \{1\}$ y así el espacio es completamente regular. □

Definición 2.108. *Un espacio topológico es $T_{3\frac{1}{2}}$ si es completamente regular y T_0.*

Teorema 2.109. *Los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ son T_3.*

Demostración. La prueba es una consecuencia directa del Teorema 2.105, pues si X es completamente regular, el espacio es regular y como es T_0 es T_3. □

Teorema 2.110. *Existen espacios T_3 que no son $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. En $\mathbb{R}^2$ definamos una familia de conjuntos:

$$T_n = \big\{\{n\} \times (-1,1) : n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \text{ par}\big\}$$

Sea $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión $\{1-\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Notemos que $\lim_{k\to\infty} t_k = 1$. Definimos para toda $n \in \mathbb{Z}$ impar y toda $k \in \mathbb{N}$, la familia $\mathcal{C}_k^n$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\mathcal{C}_k^n = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-n)^2 + y^2 = {t_k}^2\big\}$$

Sean $X_1 = \bigcup\{T_n \colon n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \text{ par}\}$ y $X_2 = \bigcup\{\mathcal{C}_k^n \colon n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \text{ impar}\}$.

Por último tomemos dos puntos distintos $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ y definamos $X = X_1 \cup X_2 \cup \{a, b\}$.

A continuación vamos a definir una base local para cada $x \in X$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ impar y para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el punto $p_k^n = (n, t_k) \in X$ y sea $\mathcal{P} = \{p_k^n : n \in \mathbb{Z}$ en impar y $k \in \mathbb{N}\} \subseteq X_2$.

1. Si $x \in X_1$, entonces x es de la forma (n, y) donde $n \in \mathbb{Z}$ es par y $-1 < y < 1$. Escribamos $L_x = \{(z, y) : n - 1 < z < n + 1\} \cap (X_1 \cup X_2)$ y $\mathcal{B}_x = \{L_x \setminus F\colon F$ es finito y $x \notin F\}$.
2. i) Si $x \in X_2$ y $x \notin \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$.

   ii) Si $x \in \mathcal{P}$, entonces $x \in C_k^n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ impar y alguna $k \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathcal{B}_x = \{C_k^n \setminus F\colon F$ es finito y $x \notin F\}$.
3. Si $x = a$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ par, hacemos $\mathcal{U}_n(a) = \{a\} \cup \{(x_1, x_2) \in X_1 \cup X_2 : x_1 < n\}$ y $\mathcal{B}_x = \bigcup\{\mathcal{U}_n(a) : n \in \mathbb{Z}$ con n par$\}$.
4. Si $x = b$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ impar, definimos $\mathcal{U}_n(b) = \{b\} \cup \{(x_1, x_2) \in X_1 \cup X_2 : x_1 > n\}$ y $\mathcal{B}_x = \bigcup\{\mathcal{U}_n(b) : n \in \mathbb{Z}$ con n impar$\}$.

Vamos a demostrar que la familia $\mathcal{B}_x$ es una base local para cada $x \in X$.

De acuerdo al Teorema 1.6, tenemos que demostrar tres cosas:

I) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces, $x \in V$.

II) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

III) Para cada $V \in \mathcal{B}_x$ y cada $y \in V$, existe $V_y \in \mathcal{U}_y$ tal que $V_y \subseteq V$.

El primer inciso se cumple debido a la forma en que se definió la familia $\mathcal{B}_x$ para cada $x \in X$.

Para ver que se cumple II), tomemos $x \in X$ y $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$. Veremos que existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$. Esto lo hacemos por casos:

Caso i) Si $x \in X_1$, entonces $V_1 = L_x \setminus F_1$, $V_2 = L_x \setminus F_2$ con F_1, F_2 finitos y $x \notin F_1 \cup F_2$. Entonces tenemos que $V_1 \cap V_2 = (L_x \setminus F_1) \cap (L_x \setminus F_2) = L_x \setminus (F_1 \cup F_2)$, puesto que $F_1 \cup F_2$ es finito y $x \notin F_1 \cup F_2$, resulta que $V_3 = L_x \setminus (F_1 \cup F_2)$ es un elemento de $\mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

Caso ii) Si $x \in X_2$ y $x \notin \mathcal{P}$, entonces $V_1 = V_2 = V_3 = \{x\}$.

Caso iii) Si $x \in \mathcal{P}$, entonces $V_1 = C_k^n \setminus F_1$, $V_2 = C_k^n \setminus F_2$ con F_1, F_2 finitos y $x \notin F_1 \cup F_2$. Por lo que $V_1 \cap V_2 = (C_k^n \setminus F_1) \cap (C_k^n \setminus F_1) = C_k^n \setminus (F_1 \cup F_2)$, y como $F_1 \cup F_2$ es finito y $x \notin (F_1 \cup F_2)$ tenemos que $V_3 = C_k^n \setminus (F_1 \cup F_2)$ es un elemento de $\mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

Caso iv) Si $V_1 = \mathcal{U}_n(a)$ y $V_2 = \mathcal{U}_m(a)$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ pares y $n \neq m$, entonces suponiendo que $n < m$, $\mathcal{U}_n(a) \cap \mathcal{U}_m(a) = \mathcal{U}_n(a)$, de modo que $\mathcal{U}_m(a) \subseteq \mathcal{U}_n(a) \cap \mathcal{U}_m(a)$. Análogamente, si $V_1 = \mathcal{U}_n(b)$ y $V_2 = \mathcal{U}_m(b)$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ y n, m impares, entonces suponiendo que $n < m$, $\mathcal{U}_n(b) \cap \mathcal{U}_m(b) = \mathcal{U}_m(b)$, de modo que $\mathcal{U}_n(b) \subseteq \mathcal{U}_n(b) \cap \mathcal{U}_m(b)$.

Ahora veamos que III) es cierto. Sean $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}_x$. Consideremos los siguientes casos:

Caso i) Si V es de la forma $L_x \setminus F$ con F finito y $x \notin F$ y tomamos $y \in L_x \setminus F$ con $y \neq x$, como $X_1 \cap (L_x \setminus F) = \{x\}$ entonces tenemos que $y \in X_2$. Puesto que $L_x \cap \mathcal{P} = \emptyset$, tenemos que $y \notin \mathcal{P}$, de manera que $U = \{y\} \in \mathcal{B}_y \subseteq V$.

Caso ii) cuando V es de la forma $V = \{x\}$ el único elemento $y \in V$ es x, de modo que si tomamos $U = V$ terminamos.

Caso iii) Si V es de la forma $V = C_k^n \setminus F$ con F finito donde $x \notin F$ y tomamos $y \in V$ con $y \neq x$, entonces $y \notin \mathcal{P}$. de manera que $U = \{y\} \in \mathcal{B}_y$ y es tal que $U \subseteq V$.

Caso iv) Si V es de la forma $V = \mathcal{U}_n(a)$ o $V = \mathcal{U}_n(b)$ y $y \in V$, entonces tenemos los siguientes subcasos:

a) $y \in X_1$. En este caso existe un conjunto de la forma $L_y \setminus F_1$ con F finito y $y \notin F_1$ tal que $U = L_y \setminus F_1 \in \mathcal{B}_y$ y $U \subseteq V$.

b) $y \in X_2$. Si $y \in \mathcal{P}$ existe un conjunto de la forma $C_k^n \setminus F_1$ con F_1 finito y $y \notin F_1$, por lo que $U = C_k^n \setminus F_1 \in \mathcal{B}_y$ y $U \subseteq V$. Si $y \notin \mathcal{P}$, entonces $U = \{y\} \in \mathcal{B}_y$, tal que $U \subseteq V$.

c) Si $y = a$, entonces para cualequiera numeros pares $m > n$, $U = \mathcal{U}_n(a) \in \mathcal{B}_y$ es tal que $U \subseteq V$.

d) Si $y = b$, entonces para cualesquiera numeros impares $m > n$, $U = \mathcal{U}_m(a) \in \mathcal{B}_y$ es tal que $U \subseteq V$.

Por lo tanto, por I), II) y III) tenemos que la familia B_x es una base local para cada $x \in X$.

A continuación veamos que el espacio es T_3.

Primero veamos que es T_1, para esto tomemos $x = (x_1, x_2) \in X$ y $y \in X \setminus \{x\}$.

Si $y \in X_1$, entonces tenemos que $L_y \setminus \{x\} \in \mathcal{B}_y$, el cual es un abierto que tiene a y, además $L_y \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \{x\}$.

Si $y \in X_2$ y $y \notin \mathcal{P}$, entonces $\{y\} \in \mathcal{B}_y$, por lo que $\{y\}$ es un abierto que tiene a y tal que $\{y\} \subseteq X \setminus \{x\}$. En caso de que $y \in \mathcal{P}$, tenemos que $C_k^n \setminus \{x\} \in \mathcal{B}_y$, de modo que es un abierto que tiene a y, tal que $C_k^n \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \{x\}$.

Si $y = b$, existe $n \in \mathbb{Z}$ impar, tal que $n > x_1$, de manera que $\mathcal{U}_n(b)$ es un abierto que tiene a y tal que $\mathcal{U}_n(b) \subseteq X \setminus \{x\}$. Análogamente, si $y = a$, existe $n \in \mathbb{Z}$ par, tal que $n < x_1$, de manera que $\mathcal{U}_n(a)$ es un abierto que tiene a y tal que $\mathcal{U}_n(a) \subseteq X \setminus \{x\}$. Por lo tanto, dada $x \in X$ y $y \in X \setminus \{x\}$, encontramos un abierto U que tiene a y tal que $U \subseteq X \setminus \{x\}$, esto implica que $X \setminus \{x\}$ es abierto y por lo tanto $\{x\}$ es cerrado, así X es T_1.

Antes de probar que el espacio es regular veremos lo siguiente:

Afirmación 1: Si $x = (x_1, x_2) \in X_1$, entonces el conjunto $L_x \setminus F$ donde F es finito y $x \notin F$ es cerrado.

En efecto, tomemos $y \in X \setminus (L_x \setminus F)$. Si $y \in X_1$, entonces, puesto que $y \notin L_x \setminus F$, se tiene que $y \neq x$ de manera que $U = L_y \setminus F$ donde F es finito, es un abierto que tiene a y tal que $U \subseteq X \setminus (L_x \setminus F)$.

Si $y \in X_2$ y $y \notin \mathcal{P}$, entonces, $\{y\}$ es un abierto que tiene a y tal que $\{y\} \subseteq X \setminus (L_x \setminus F)$.

Si $y \in \mathcal{P}$, entonces $y \in C_k^n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ con n impar, y puesto que el conjunto $C_k^n \cap (L_x \setminus F) = F_1$ tiene a lo más un punto, resulta que $U = C_k^n \setminus F_1$ es un abierto que tiene a y tal que $U \subseteq X \setminus (L_x \setminus F)$.

Si $y = b$, entonces tomamos $n \in \mathbb{Z}$ par, tal que $n > x_1$ de modo que el conjunto $U = \mathcal{U}_{n+1}(b)$ es un abierto que tiene a y tal que $\mathcal{U}_{n+1}(b) \subseteq X \setminus (L_x \setminus F)$. Análogamente, si $y = a$, entonces tomamos $n \in \mathbb{Z}$ impar, tal que $n < x_1$ de modo que el conjunto $U = \mathcal{U}_{n-1}(a)$ es un abierto que tiene a y tal que $\mathcal{U}_{n-1}(a) \subseteq X \setminus (L_x \setminus F)$.

De esta manera tenemos que para toda $y \in X \setminus (L_x \setminus F)$, existe un abierto U que tiene a y, tal que $U \subseteq X \setminus (L_x \setminus F)$. Entonces $X \setminus (L_x \setminus F)$ es abierto, luego $L_x \setminus F$ es cerrado.

Afirmación 2: Si $x = (x_1, x_2) \in X_2$, entonces el conjunto $C_k^n \setminus F$, donde F es finito y $x \notin F$, es cerrado para toda $n \in \mathbb{Z}$ con n impar y $k \in \mathbb{N}$.

Para probar esta afirmación, Sean $n \in \mathbb{Z}$ con n impar, $k \in \mathbb{N}$ y tomemos $y \in X \setminus (C_k^n \setminus F)$.

Si $y \in X_1$, entonces, $y \notin C_n^k \setminus F$. Además, el conjunto $C_k^n \cap (L_y \setminus F) = F_1$ tiene a lo más un punto, de manera que $U = (L_y \setminus F) \setminus F_1$, es un abierto que tiene a y tal que $U \subseteq X \setminus (C_k^n \setminus F)$.

Si $y \in X_2$ y $y \notin \mathcal{P}$, entonces $\{y\}$ es un abierto que tiene a y tal que $\{y\} \subseteq X \setminus (C_n^k \setminus F)$.

Si $y \in \mathcal{P}$, $y \in C_k^n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ con n impar y $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $x \neq y$, tenemos que existe $k_1 \neq k$ o $m \neq n$, tal que para la circunferencia $C_{k_1}^n$ o C_k^m ocurre que $y \in C_{k_1}^n \setminus F_1$ y $C_{k_1}^n \setminus F_1 \subseteq X \setminus (C_k^n \setminus F)$ donde F_1 es finito o $y \in C_k^m \setminus F_1$ y $C_k^m \setminus F_1 \subseteq X \setminus (C_k^n \setminus F)$ donde F_1 es finito.

Si $y = b$, entonces tomamos $n \in \mathbb{Z}$ par, tal que $n > x_1$, de modo que el conjunto $U = \mathcal{U}_{n+1}(b)$ es un abierto que tiene a y tal que $\mathcal{U}_{n+1}(b) \subseteq X \setminus (C_n^k \setminus F)$. Análgamente, si $y = a$, tomamos $n \in \mathbb{Z}$ impar, tal que $n < x_1$, de modo que el conjunto $U = \mathcal{U}_{n-1}(a)$ es un abierto que tiene a y tal que $\mathcal{U}_{n-1}(a) \subseteq X \setminus (C_n^k \setminus F)$.

De esta manera tenemos que para todo $y \in X \setminus (C_k^n \setminus F)$, existe un abierto U de y, tal que $U \subseteq X \setminus (C_k^n \setminus F)$, entonces $X \setminus (C_k^n \setminus F)$ es abierto, luego $C_k^n \setminus F$ es cerrado.

Afirmación 3: Si $n \in \mathbb{Z}$ con n impar, entonces $\overline{\mathcal{U}_{n+2}(b)} \subseteq \mathcal{U}_n(b)$.

Sea $x = (x_1, x_2) \in X \setminus \mathcal{U}_n(b)$. Tenemos tres casos:

i) Si $x \in X_2$ y $x \in \mathcal{P}$, entonces $x \in C_k^m$ para alguna m impar tal que $m < n$. De manera que C_k^m es un abierto que tiene a x, tal que $C_k^m \cap \mathcal{U}_{n+2}(b) = \emptyset$. Ahora, si $x \notin \mathcal{P}$ como $x_1 < n$, entonces $\{x\}$, es un abierto que tiene a x tal que $\{x\} \cap \mathcal{U}_{n+2}(b) = \emptyset$.

ii) Si $x \in X_1$, entonces tenemos que L_x es un abierto que tiene a x tal que $L_x \cap \mathcal{U}_{n+2}(b) = \emptyset$.

iii) Si $x = a$, entonces se tiene que para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ par, tal que $m < n + 2$, $\mathcal{U}_m(x) \cap \mathcal{U}_{n+2}(b) = \emptyset$.

De esta manera tenemos que si $x \in X \setminus \mathcal{U}_n(b)$, entonces existe un abierto que tiene a x que no interseca a $\mathcal{U}_{n+2}(b)$, esto significa que $X \setminus \mathcal{U}_n(b) \subseteq$

$X \setminus \overline{\mathcal{U}_{n+2}(b)}$, por lo tanto $\overline{\mathcal{U}_{n+2}(b)} \subseteq \mathcal{U}_n(b)$.

Afirmación 4: Si $n \in \mathbb{Z}$ con n par, entonces $\overline{\mathcal{U}_{n-2}(a)} \subseteq \mathcal{U}_n(a)$.

Sea $x = (x_1, x_2) \in X \setminus U_n(a)$. Tenemos tres casos:

i) Si $x \in X_2$ y $x \in \mathcal{P}$, entonces $x \in C_k^m$, para alguna $m \in \mathbb{Z}$ impar tal que $m > n$. De manera que C_k^m es un abierto que tiene a x, tal que $C_k^m \cap \mathcal{U}_{n-2}(a) = \emptyset$. Ahora, si $x \notin \mathcal{P}$, entonces como $x_1 > n$, $\{x\}$, es un abierto que tiene a x tal que $\{x\} \cap \mathcal{U}_{n-2}(a) = \emptyset$.

ii) Si $x \in X_1$, entonces x pertenece a un abierto de la forma L_x pero dado que $x \notin \mathcal{U}_n(a)$, se tiene que $L_x \cap (\mathcal{U}_{n-2}(a)) = \emptyset$.

iii) Si $x = b$, entonces para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ impar tal que $m > n$, se tiene que $\mathcal{U}_m(x) \cap \mathcal{U}_{n-2}(a) = \emptyset$.

De esta manera tenemos que si $x \in X \setminus \mathcal{U}_n(a)$, entonces existe un abierto que tiene x que no interseca a $\mathcal{U}_{n-2}(a)$, esto significa que $X \setminus \mathcal{U}_n(a) \subseteq X \setminus \overline{\mathcal{U}_{n-2}(a)}$, de manera que $\overline{\mathcal{U}_{n-2}(a)} \subseteq \mathcal{U}_n(a)$.

Ahora probaremos que X es regular.

Sean $x = (x_1, x_2) \in X$ y U un abierto tal que $x \in U$, entonces existe un elemento $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $V \subseteq U$.

Si $x \in X_1$, entonces existe un básico local V de la forma $V = L_x \setminus F$ donde F es finito y $x \notin F$. Por la Afirmación 1, $x \in L_x \setminus F = \overline{L_x \setminus F} \subseteq U$.

Si $x \in X_2$ y $x \notin \mathcal{P}$, entonces $V = \{x\}$ es un elemento de $\mathcal{B}_x$, tal que $x \in \{x\} = \overline{\{x\}} \subseteq U$. En el caso de que $x \in \mathcal{P}$, tenemos que existe un abierto $V = C_k^n \setminus F$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ y F finito, tal que $x \in C_k^n \setminus F$. Por la Afirmación 2, $x \in C_k^n \setminus F = \overline{C_k^n \setminus F} \subseteq U$.

Si $x = b$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ impar, tal que $b \in \mathcal{U}_n(b)$. Observemos que $\mathcal{U}_{n+2}(b)$ es un abierto que tiene a b, luego, por la Afirmación 3, $b \in \mathcal{U}_{n+2}(b) \subseteq \overline{\mathcal{U}_{n+2}(b)} \subseteq \mathcal{U}_n(b) \subseteq U$.

En el caso de que $x = a$, tenemos que existe $n \in \mathbb{Z}$ par, tal que $a \in \mathcal{U}_n(a)$. Observemos que $\mathcal{U}_{n-2}(a)$ es un abierto que tiene a a, luego, por la Afirmación 4, $a \in \mathcal{U}_{n-2}(a) \subseteq \overline{\mathcal{U}_{n-2}(a)} \subseteq \mathcal{U}_n(a) \subseteq U$.

De esta manera hemos probado que para todo $x \in X$ y todo abierto U que tenga a x, existe un elemento $V \in \mathcal{B}_x$, tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 2.98, y el hecho de que X es T_1, resulta que X es T_3.

Ahora veamos que X no es completamente regular.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Definamos para cada $m \in \mathbb{N}$ el intervalo $I_m = (f(p_k^n) - \frac{1}{m}, f(p_k^n) + \frac{1}{m})$ con $n \in \mathbb{Z}$ impar y $k \in \mathbb{N}$. Como f es continua existe un abierto básico $V_m = C_k^n \setminus F_m$ que tiene a p_k^n, donde F_m es un subconjunto finito de C_k^n, tal que $f(V_m) \subseteq I_m$. Afirmamos que el conjunto $D_k^n = \{x \in C_k^n : f(p_k^n) \neq f(x)\}$ es numerable.

En primer lugar notemos que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m = \{f(p_k^n)\}$, de manera que si $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} V_m$, entonces $f(x) = f(p_k^n)$ es decir, si $f(x) \neq f(p_k^n)$, entonces $x \notin \bigcap_{m\in\mathbb{N}} V_m$, por lo tanto

$$D_k^n \subseteq C_k^n \setminus \bigcap_{m\in\mathbb{N}} V_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_k^n \setminus V_m) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m.$$

Esta última igualdad es una unión numerable de conjuntos finitos, por lo tanto es numerable. De esta manera concluimos que D_k^n es numerable. Ahora bien, Como D_k^n es numerable el conjunto $D_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k^n$ también es numerable y por lo tanto $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ con n impar, es numerable. [16, Prop. 3, pág. 97]

Observemos que si $x \notin D$, entonces $x \notin D_k^n$ para ninguna $n, \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, de manera que $f(x) = f(p_k^n)$ para toda $x \notin D$.

Consideremos la función $p_2 : X \to (-1, 1)$ tal que $f((x, y)) = y$, es decir, p_2 es la proyección sobre la segunda coordenada. Entonces $p_2(D) \subsetneq (-1, 1)$ es numerable, de manera que existe $y \in (-1, 1) \setminus p_2(D)$. Además para toda $n \in \mathbb{Z}$ impar, el punto $(n, y) \notin D$ por lo que $f(n, y) = f(p_k^{n-1}) = f(p_k^{n+1})$. Sea U un abierto que tiene a $f(n, y)$ y notemos que hay una cantidad infinita de circunferencias C_k^n, una para cada $k \in \mathbb{N}$, de manera que si al conjunto $L_{(n,y)}$ le quitamos un conjunto finito F, se tiene que para todo abierto básico $L_{(n,y)} \setminus F$ que tiene al punto (n, y), existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k > r$, $(L_{(n,y)} \setminus F) \cap C_k^{n-1} \neq \emptyset$. Para cada $k > r$ tenemos que C_k^{n-1} es un abierto básico que tiene a p_k^{n-1}, como f es continua y $f(n, y) = f(p_k^{n-1})$ resulta que $f(C_k^{n-1}) \subseteq U$, de manera que para toda $k > r$ se tiene que $f(n, y) = f(p_k^{n-1}) \in U$, esto demuestra que $f(n, y) = \lim_{k\to\infty} f(p_k^{n-1})$. De manera similar se demuestra que $f(n, y) = \lim_{k\to\infty} f(p_k^{n+1})$.

Para finalizar, sea $\mathcal{U}_n(a)$ un abierto básico que tiene a a, como $\mathcal{U}_n(a) = \{a\} \cup \{(x_1, x_2) \in X_1 \cup X_2 : x_1 < n\}$ con n par, se tiene que el punto $p_k^{n-1} \in$

$\mathcal{U}_n(a)$ y como f es continua $f(\mathcal{U}_n(a)) \subseteq I_m = (f(p_k^{n-1}) - \frac{1}{m}, f(p_k^{n-1}) + \frac{1}{m})$ para cada n par y $m \in \mathbb{N}$, de manera que $f(\mathcal{U}_n(a)) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m = \{f(p_k^{n-1})\} = \{f(n,y)\}$. Análogamente tenemos que para cualquier abierto básico $\mathcal{U}_n(b)$ que tiene a b, $f(U_n(b)) \subseteq \{f(p_k^{n+1})\} = \{f(n,y)\}$. Por lo tanto concluimos que $f(a) = f(b)$.

Con esto hemos demostrado que para cualquier función continua $f : X \to [0,1]$ se tiene que $f(a) = f(b)$. Además ya probamos que X es T_1. Por lo tanto $\{a\}$ y $\{b\}$ son dos cerrados ajenos para los cuales no existe una función continua que los separe, de manera que X no es completamente regular y por lo tanto X no es $T_{3\frac{1}{2}}$. □

En la subsección 2.12 dejamos pendiente el siguiente resultado.

Teorema 2.111. *Existen espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ que no son funcionalmente Hausdorff.*

Demostración. En el Ejemplo anterior 2.110, demostramos que X es T_3, por lo tanto es $T_{2\frac{1}{2}}$ (Teorema 2.101). Sin embargo vimos que en este espacio para cualquier función continua $f : X \to [0,1]$ ocurre que $f(a) = f(b)$. Por lo tanto X no es funcionalmente Hausdorff.

□

Teorema 2.112. *Si X es $T_{3\frac{1}{2}}$ y $Y \subseteq X$, entonces Y es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sea $x \in Y$ y C_Y un cerrado en Y tal que $x \notin C_Y$. Se tiene que $C_Y = C \cap Y$ donde C es cerrado en X. Como $x \notin C_Y$ y $x \in Y$, tenemos que $x \notin C$. Puesto que X es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(C) \subseteq \{1\}$; entonces la función $f|_Y : Y \to [0,1]$ es continua (Teorema 1.12) y cumple que $f|_Y(x) = 0$ y $f|_Y(C_Y) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto Y es completamente regular; además, por el Teorema 2.56 resulta que Y es T_1 de manera que Y es $T_{3\frac{1}{2}}$. □

2.15. Espacios T_4

Los espacios de la siguiente clase son conocidos como espacios T_4, en los cuales se separa cada par de cerrados ajenos con conjuntos abiertos. El concepto de normalidad fue estudiado por Vietoris en 1921 [2, pág.47].

Definición 2.113. *Un espacio topológico X es **normal**, si para cada par de cerrados ajenos C_1, C_2, existen abiertos U_1, U_2 tales que $C_1 \subseteq U_1$, $C_2 \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Definición 2.114. *Un espacio topológico X es T_4 si es normal y T_1.*

Teorema 2.115. *En un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es normal.*

b) *Si $C \subseteq X$ es cerrado y U es un abierto de X tal que $C \subseteq U$, entonces existe un abierto V tal que $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

c) *Si C_1, C_2 son dos cerrados ajenos, entonces existe un abierto U tal que $C_1 \subseteq U$ y $\overline{U} \cap C_2 = \emptyset$.*

d) *Si C_1, C_2 son dos cerrados ajenos, entonces existen abiertos U_1 y U_2 tales que $C_1 \subseteq U_1$, $C_2 \subseteq U_2$ y $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$.*

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Sean C un cerrado y U un abierto de X tales que $C \subseteq U$. Se tiene que $X \setminus U$ es un cerrado tal que $(X \setminus U) \cap C = \emptyset$. Como X es normal, existen abiertos U_1, U_2 tales que $X \setminus U \subseteq U_1$, $C \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, de manera que $U_2 \subseteq X \setminus U_1$ y como $X \setminus U_1$ es cerrado, se tiene que $\overline{U_2} \subseteq \overline{X \setminus U_1} = X \setminus U_1$. Además, como $X \setminus U \subseteq U_1$, tenemos que $X \setminus U_1 \subseteq U$ y por lo tanto $C \subseteq U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq X \setminus U_1 \subseteq U$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sean C_1 y C_2 dos cerrados ajenos. Se tiene que $X \setminus C_2$, es un abierto tal que $C_1 \subseteq X \setminus C_2$, entonces por b), existe un abierto V tal que $C_1 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus C_2$, por lo que $\overline{V} \cap C_2 = \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ *d)* Sean C_1 y C_2 dos cerrados ajenos. Por c) existe un abierto V tal que $C_1 \subseteq V$ y $\overline{V} \cap C_2 = \emptyset$, como $\overline{V}$ y C_2 son dos cerrado ajenos, nuevamente por c) existe un abierto W tal que $C_2 \subseteq W$ y $\overline{W} \cap \overline{V} = \emptyset$.

d) $\Rightarrow$ *a)* Sean C_1 y C_2 dos cerrados ajenos y U_1 y U_2 abiertos tales que, $C_1 \subseteq U_1$, $C_2 \subseteq U_2$ y $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$, entonces como $U_1 \subseteq \overline{U_1}$ y $U_2 \subseteq \overline{U_2}$, se tiene que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. □

Teorema 2.116. *Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para todo cerrado $C \subseteq X$ y todo abierto U tal que $C \subseteq U$, existe una familia de abiertos $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$ y $\overline{W_i} \subseteq U$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que X es normal y sean $C \subseteq X$ cerrado y $U \subseteq X$ abierto tales que $C \subseteq U$. Por el inciso b) del Teorema 2.115, tenemos que existe un abierto $V \subseteq X$, tal que $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. En este caso hacemos $W_i = V$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Para la implicación inversa tomemos dos cerrados disjuntos C y D en X. Se tiene que $X \setminus D$ es un abierto que contiene a C, luego, por hipótesis existe una familia de abiertos $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i$ y $\overline{W_i} \subseteq X \setminus D$ para toda i, de manera que $\overline{W_i} \cap D = \emptyset$. Haciendo lo mismo para el cerrado D y el abierto $X \setminus C$, se tiene que existe una familia de abiertos $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $D \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ y $\overline{V_i} \cap C = \emptyset$ para toda i. Definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $G_i = W_i \setminus (\bigcup_{j\leq i} \overline{V_j})$ y $H_i = V_i \setminus (\bigcup_{j\leq i} \overline{W_j})$, los cuales son abiertos en X para cada i y hagamos $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ y $V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i$.

Notemos que $C \subseteq U$ porque si $x \in C$, entonces $x \in W_i$ para alguna i, pero $C \cap \overline{V_i} = \emptyset$ para toda i, de manera que $x \in G_i$ y por lo tanto $x \in U$. Análogamente, $D \subseteq V$. Además U y V son abiertos porque cada G_i es abierto. Para finalizar veamos que U y V son ajenos. Tomemos $i, j \in \mathbb{N}$, y los abiertos G_i y H_j. Si $i \leq j$, entonces $H_j \cap W_i = \emptyset$, en consecuencia $H_j \cap G_i = \emptyset$. Si $j \leq i$, entonces $G_i \cap V_j = \emptyset$, de manera que $G_i \cap H_j = \emptyset$, así, tenemos que $G_i \cap H_j = \emptyset$ para toda $i, j \in \mathbb{N}$, por lo tanto $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Otra equivalencia de la normalidad, está relacionada con contracciones de cubiertas puntualmente finitas. Definimos estos conceptos enseguida.

Definición 2.117. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de X. Una* ***contracción*** *de U es una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ tal que $\overline{V_i} \subseteq U_i$ para toda $i \in I$.*

Definición 2.118. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de X. Decimos que U es* ***puntualmente finita****, si para toda $x \in X$ el conjunto $A_x = \{\lambda \in I : x \in U_\lambda\}$ es finito.*

Teorema 2.119. *Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para toda cubierta abierta de X puntualmente finita $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, existe una contracción $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta puntualmente finita de un espacio topológico X. Utilizando el axioma de elección, podemos suponer que I es un conjunto bien ordenado y denotemos por $\leq$ esta relación de orden.

Queremos construir una familia de abiertos $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ que cumplan las siguientes condiciones:

1) $\overline{V_i} \subseteq U_i$ para cada $i \in I$.

2) $(\bigcup_{\lambda \leq i} V_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda > i} U_i) = X$, para toda $i \in I$.

Haremos la demostración por inducción transfinita. Sea $\gamma \in I$ y supongamos construida la familia de abiertos $\{V_i : i < \lambda\}$ que satisface 1) y 2), para toda $i < \gamma$. Vamos a construir V_γ de manera que $\{V_i : i \leq \lambda\}$ cumpla 1) y 2) para toda $i \leq \gamma$.

Afirmamos que $(\bigcup_{i<\gamma} V_i) \cup (\bigcup_{i\geq\gamma} U_i) = X$. En efecto, puesto que $\mathcal{U}$ es puntualmente finita se tiene que si $x \in X$, entonces el conjunto $A_x = \{\lambda \in I : x \in U_\lambda\}$ es finito, digamos $A_x = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ donde $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Luego, si $\gamma \in A_x$, entonces $\gamma \leq \lambda_n$ y se tiene que $x \in \bigcup_{i\geq\gamma} U_i$. En otro caso, $\gamma \notin A_x$, de modo que, $\gamma > \lambda_n$. Aplicando la hipotesis de inducción a λ_n tenemos que $(\bigcup_{\lambda\leq\lambda_n} V_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda>\lambda_n} U_\lambda) = X$, pero observemos que $x \notin \bigcup_{\lambda>\lambda_n} U_\lambda$ por lo que $x \in \bigcup_{\lambda\leq\lambda_n} V_\lambda$ y $\bigcup_{\lambda\leq\lambda_n} V_\lambda \subseteq \bigcup_{i<\gamma} V_i$. Por lo tanto $x \in (\bigcup_{i<\gamma} V_i) \cup (\bigcup_{i\geq\gamma} U_i)$ y tenemos que $X \subseteq (\bigcup_{i<\gamma} V_i) \cup (\bigcup_{i\geq\gamma} U_i)$.

Como V_i y U_i son abiertos de X, tenemos que $(\bigcup_{i<\gamma} V_i) \cup (\bigcup_{i\geq\gamma} U_i) \subseteq X$, de esta manera tenemos que $X = (\bigcup_{i<\gamma} V_i) \cup (\bigcup_{i\geq\gamma} U_i)$.

Consideremos el conjunto $C_\gamma = X \setminus ((\bigcup_{i<\gamma} V_i) \cup (\bigcup_{i>\gamma} U_i))$ el cual es cerrado, y notemos que por el parrafo anterior $C_\gamma \subseteq U_\gamma$, luego, como X es normal, por el Teorema 2.115 b), existe un abierto V_γ tal que $C_\gamma \subseteq V_\gamma \subseteq \overline{V_\gamma} \subseteq U_\gamma$ y así $\mathcal{V} = \{V_i : i \leq \gamma\}$, cumple 1) y 2) para toda $i \leq \gamma$, por lo tanto se tiene construida la familia $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$, cumpliendo 1) y 2) para toda $i \in I$.

Para terminar, falta mostrar que $\mathcal{V}$ es una contracción. Puesto que $\mathcal{V}$ satisface 1), sólo resta probar que $\mathcal{V}$ es una cubierta de X.

Sea $x \in X$. Considerando el conjunto finito $A_x = \{\lambda \in I : x \in U_\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, donde $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Por 2) $X = (\bigcup_{\lambda\leq\lambda_n} V_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda>\lambda_n} U_\lambda)$, pero como $x \notin \bigcup_{\lambda>\lambda_n} U_\lambda$, resulta que $x \in \bigcup_{\lambda\leq\lambda_n} V_\lambda$, así $x \in V_i$ para alguna $i \in I$, y por lo tanto $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X.

Inversamente, supongamos que para toda cubierta abierta puntualmente finita $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X, existe una contracción $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ de U. Tomemos dos cerrados ajenos C_1, C_2 en X, observemos que $\mathcal{U} = \{X \setminus C_1, X \setminus C_2\}$ es una cubierta abierta de X puntualmente finita, entonces, existe una contracción $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ de $\mathcal{U}$, de manera que $\overline{V_1} \subseteq X \setminus C_1$,

$\overline{V_2} \subseteq X \setminus C_2$ y $V_1 \cup V_2 = X$, luego, tomando $U_1 = X \setminus \overline{V_1}$ y $U_2 = X \setminus \overline{V_2}$, se tiene que U_1, U_2 son dos abiertos tales que, $C_1 \subseteq (X \setminus \overline{V_1}) = U_1$, $C_2 \subseteq (X \setminus \overline{V_2}) = U_2$ y $U_1 \cap U_2 = (X \setminus \overline{V_1}) \cap (X \setminus \overline{V_2}) = X \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2}) = \emptyset$. Con esto concluimos que X es normal. □

Una de las caracterizaciones más importantes de la normalidad fue dada por Urysohn en 1925.

Teorema 2.120. *Lema de Urysohn: Un espacio topológico X es normal si y sólo si para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos A y B se tiene que existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Demostración. Consideremos el conjunto numerable $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos a numerarlos de manera que $0, 1 \in D$, sean los dos primeros elementos de nuestra enumeración, digamos $D = \{d_0 = 0, d_1 = 1, d_2, d_3, \ldots\}$. Vamos a probar que podemos hacer una asignación, que a cada $p \in \mathbb{Q}$ le asigna un abierto U_p con la propiedad de que si $p, q \in \mathbb{Q}$ y $p < q$, entonces $\overline{U}_p \subset U_q$. Mostraremos esto por inducción.

Definimos $U_1 = X \setminus B$ el cual es abierto. Notemos que $A \subset U_1$ y como X es normal, por el Teorema 2.115 b), existe un abierto U_0 tal que $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$. En general definimos $D_n = \{d_0, d_1, ..., d_n\}$ y supongamos que U_p está definido para todo $p \in D_n$ de tal manera que cumpla lo siguiente:

Para toda $p, q \in D_n$ con $p < q$, ocurre que $\overline{U_p} \subseteq U_q$.

A continuación vamos a definir el abierto $U_{d_{n+1}}$. Sea $D_{n+1} = D_n \cup \{d_{n+1}\}$. Notemos que éste es un conjunto finito contenido en el intevalo $[0,1]$, de manera que, heredando el orden usual de $\mathbb{R}$, tenemos que D_{n+1} es un conjunto bien ordenado, además $d_{n+1} \neq 0, 1$ por lo que d_{n+1} no es el máximo ni el mínimo de D_{n+1}, de modo que d_{n+1} tiene un inmediato sucesor q y un inmediato antecesor p; así, tenemos que existen $p, q \in D_n$ tales que $p < d_{n+1} < q$ y $(p,q) \cap D_n = \emptyset$, entonces por hipotesis de inducción los abiertos U_p y U_q estan definidos de tal forma que $\overline{U_p} \subseteq U_q$. Nuevamente por el Teorema 2.115 b), existe un abierto $U_{d_{n+1}}$ tal que $\overline{U_p} \subseteq U_{d_{n+1}} \subseteq \overline{U_{d_{n+1}}} \subseteq U_q$.

Afirmamos que para todo $r, s \in D_{n+1}$ se cumple que si $r < s$, entonces $\overline{U_r} \subseteq U_s$.

En efecto, si $r, s \in D_n$, entonces la afirmación se cumple (hipótesis de inducción). Si $r = d_{n+1}$ como $p < r < q$, $r < s$ y q es el inmediato sucesor de r tenemos que $s \geq q$, por lo que $\overline{U_r} \subseteq U_q \subseteq U_s$. Análogamente Si $s = d_{n+1}$

como $p < s < q$, $r < s$ y p es el inmediato antecesor de s tenemos que $r \leq p$ por lo que $\overline{U_r} \subseteq \overline{U}_p \subseteq U_s$.

Hemos probado que si $p, q \in D_n$ con $p < q$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces los abiertos construidos U_p y U_q satisfacen que $\overline{U_p} \subseteq U_q$.

Ahora definimos para toda $p \in \mathbb{Q}$ los conjuntos $U_p = X$ si $p > 1$ y $U_p = \emptyset$ si $p < 0$. De esta manera, dada $x \in X$ definimos $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}$. Notemos que este conjunto es no vacío porque contiene a todos los racionales mayores que 1, y está acotado inferiormente por el 0, porque no existe ningún racional $x < 0$, tal que $x \in U_p$.

De esta manera podemos definir $f(x) = \operatorname{ínf} \mathbb{Q}(x)$. Notemos que f sólo está definida en $[0, 1]$. Esto es porque si $x \in X$, entonces, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todo número racional mayor que 1, porque cada $x \in X$ pertenece a U_p cuando $p > 1$, de manera que $\operatorname{ínf} \mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\} \leq 1$, y por lo tanto f sólo toma valores en $[0, 1]$.

Vamos a probar que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. Sea $x \in X$, si $x \in A$ entonces, como $A \subseteq U_0$, se tiene que $x \in U_p$ para cada $p > 0$, por lo que $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0\}$ e $\operatorname{ínf}\{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0\} = 0$, luego, se tiene que $f(x) = 0$ para toda $x \in A$, es decir, $f(A) \subseteq \{0\}$.

Si $x \in B$, como $U_1 \subseteq X \setminus B$ se tiene que $x \notin U_1$, luego, $x \notin U_p$ para ninguna $p \not\leq 1$, por lo que $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} : p > 1\}$ e $\operatorname{ínf}\{p \in \mathbb{Q} : p > 1\} = 1$. Entonces, se tiene que $f(x) = 1$ para toda $x \in B$, es decir, $f(B) \subseteq \{1\}$.

Para finalizar demostraremos que f es continua. Para ver esto probaremos las siguientes dos afirmaciones:

Afirmación 1: Para toda $r \in D$, si $x \in \overline{U_r}$, entonces $f(x) \leq r$.

En efecto, si $x \in \overline{U_r}$, entonces, $x \in U_s$ para toda $s > r$, es decir $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los racionales mayores que r, de manera que $f(x) = \operatorname{ínf} \mathbb{Q}(x) \leq r$

Afirmación 2: Para toda $r \in D$ si $x \notin U_r$, entonces $f(x) \geq r$.

En efecto, si $x \notin U_r$, entonces, $x \notin U_s$ para ninguna $s < r$, es decir $\mathbb{Q}(x)$ no contiene ningún racional menor que r, de manera que $f(x) \operatorname{ínf} \mathbb{Q}(x) \geq r$.

Ahora vamos a probar que f es continua.

Sean $x \in X$ y V un abierto básico en $[0, 1]$ tales que $f(x) \in V$. Notemos que V puede ser de la forma $[0, d)$, $(c, 1]$ o (c, d). Tomemos $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $c < p < f(x) < q < d$, y definamos $U = U_q \setminus \overline{U_p}$ el cual es abierto.

Ahora, como $f(x) < q$, tenemos que, por la Afirmación 2, $x \in U_q$, mientras que, del hecho de que $p < f(x)$ y la Afirmación 1, $x \notin \overline{U_p}$, de manera que $x \in U$.

Por último veamos que $f(U) \subseteq V$. Tomemos $x \in U$, entonces $x \in U_q \subseteq \overline{U_q}$, de modo que por la Afirmación 1, $f(x) \leq q$, además, puesto que $x \in U$, se tiene que $x \notin \overline{U_p}$, entonces $x \notin U_p$, luego, por la Afirmación 2, $f(x) \geq p$, por lo tanto, tenemos que $p \leq f(x) \leq q$, y así $f(x) \in [p,q] \subseteq (c,d) \subseteq V$. De esta manera, hemos encontrado, para cada $x \in X$ y cada abierto básico V de $[0,1]$ tal que $f(x) \in V$, un abierto U tal que $f(U) \subseteq V$, esto significa que la función f es continua. Con esto hemos finalizado la primera parte del teorema.

Para la segunda parte del teorema sean A, B cerrados ajenos y $f : X \to [0,1]$ una función continua tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. Tomemos los abiertos $U_1 = [0, \frac{1}{2})$ y $U_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ de $[0,1]$. Entonces $0 \in U_1$ y $1 \in U_2$, dado que la función f es continua tenemos que, $V_1 = f^{-1}(U_1)$ y $V_2 = f^{-1}(U_2)$ son abiertos en X tales que $A \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = U_1$, $B \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) = U_2$, además $V_1 \cap V_2 = f^{-1}[0, \frac{1}{2}) \cap f^{-1}(\frac{1}{2}, 1] = f^{-1}([0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$, por lo tanto X es normal. $\square$

Lema 2.121. *(Lema de Jones) Sea X un espacio topológico. Si X contiene un subconjunto denso D y un subespacio cerrado y discreto S tal que $|S| \geq 2^{|D|}$, entonces X no es normal.*

Demostración. Supongamos que X es normal. Observemos que para todo $I \subseteq S$, los conjuntos I y $S \setminus I$ son cerrados en S, porque ambos son subconjuntos de S el cual es un subespacio cuya topología heredada es la discreta. Entonces I y $S \setminus I$ también son cerrados en X, además $I \cap (S \setminus I) = \emptyset$.

Sean I_1,$I_2 \subseteq S$ tales que $I_1 \neq I_2$, entonces I_1 y $S \setminus I_1$ son cerrados ajenos en X. Igualmente se tiene que I_2 y $S \setminus I_2$ son cerrados ajenos en X. Como X es normal existen abiertos U_1, V_1, U_2, V_2 tales que $I_1 \subseteq U_1, S \setminus I_1 \subseteq V_1$, $I_2 \subseteq U_2, S \setminus I_2 \subseteq V_2$, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ y $U_2 \cap V_2 = \emptyset$.

Veamos que $U_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Puesto que $I_1 \neq I_2$ se tiene que $I_1 \setminus I_2 \neq \emptyset$ o $I_2 \setminus I_1 \neq \emptyset$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $I_1 \setminus I_2 \neq \emptyset$, entonces tenemos que, $\emptyset \neq I_1 \setminus I_2 = I_1 \setminus I_2 \subseteq U_1 \cap V_2$, porque $I_1 \setminus I_2$ está contenido en I_1 y en $S \setminus I_2$. Puesto que $U_1 \cap V_2$, es un abierto de X, resulta que $U_1 \cap V_2 \cap D \neq \emptyset$. Por último observemos que $U_1 \cap V_2 \cap D \subseteq U_1 \cap D$ y $U_1 \cap V_2 \cap D \nsubseteq U_2 \cap D$ porque $U_2 \cap V_2 = \emptyset$. De esta manera tenemos que $U_1 \cap D \neq U_2 \cap D$, es decir, para cada par de subconjuntos distintos I_1, I_2 de S, existen dos subconjuntos distintos $U_1 \cap D$, $U_2 \cap D$ de D, por lo tanto podemos definir una función inyectiva $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ tal que para toda i, $f(I_i) = U_i \cap D$. Entonces $|\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)|$, es decir $2^{|S|} \leq 2^{|D|}$ y como por hipotesis $2^{|D|} \leq |S|$, resulta que $2^{|S|} \leq |S|$, lo cual no puede ocurrir. De esta contradicción concluimos que X no es normal. $\square$

Teorema 2.122. *Los espacios T_4 son $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean X un espacio topológico T_4, C un cerrado en X y $x \in X$ tal que $x \notin C$. Puesto que los espacio T_4 son T_1, entonces para toda $x \in X$ el unitario $\{x\}$ es cerrado, luego por el Lema de Urysohn 2.120, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(C) \subseteq \{1\}$, por lo tanto X es $T_{3\frac{1}{2}}$. $\square$

Ejemplo 2.123. *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología que generan los subconjuntos de la forma $[a, b)$. A este espacio se le conoce como la recta de Sorgenfrey y lo denotaremos por S. Afirmamos que este espacio es T_4.*

Demostración. Primero probaremos que S es normal. Sean A y B, dos cerrados ajenos en S. Para cada $a \in A$, existe un intervalo $[a, r_a)$ tal que $[a, r_a) \cap B = \emptyset$. Análogamente, para cada $b \in B$ existe un intervalo $[b, r_b)$ tal que $[b, r_b) \cap A = \emptyset$. Tomemos $U = \bigcup_{a \in A}[a, r_a)$ y $V = \bigcup_{b \in B}[b, r_b)$. Es evidente que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, además para cada $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $[a, r_a) \cap [b, r_b) = \emptyset$, de lo contrario si $a < b$, entonces se tendría que $b \in [a, r_a)$ y si $b < a$, entonces $a \in [b, r_b)$ lo cual es imposible, por lo tanto $U \cap V = \emptyset$ y así S es normal.

Como para cualesquiera $x, y \in S$, con $x < y$ existen dos abiertos ajenos $[x, y)$, $[y, y+1)$, que contienen a x y y, respectivamente, se tiene que S es T_2 y por lo tanto T_1, luego S es T_4. $\square$

Para el siguiente teorema vamos a utilizar algunos resultados referentes a productos de espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ los cuales se demostrarán en el siguiente capítulo.

Teorema 2.124. *Existen espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ que no son T_4.*

Demostración. Sea S la recta de Sorgenfrey. Demostraremos que $S \times S$ es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ que no es T_4. En el Ejemplo 2.123 vimos que S es un espacio T_4, entonces, por el Teorema 2.122 es $T_{3\frac{1}{2}}$, luego, de acuerdo al Teorema 3.42, el producto de espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ también es $T_{3\frac{1}{2}}$, de esta manera tenemos que $S \times S$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Para demostrar que $S \times S$ no es normal utilizaremos el Lema de Jones (2.121). Consideremos el espacio $S \times S$. Observemos que el subconjunto $D = \{(x, -x) : x \in S\}$ es cerrado y discreto. Además $|D| = |\mathbb{R}|$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es numerable y denso en S, entonces aplicando el Lema de Jones, tenemos que $S \times S$ no es normal, y por lo tanto no es T_4. $\square$

El siguiente teorema es otra importante caracterización de los espacios normales; afirma que en los espacios normales, es posible extender una función continua definida en un cerrado, al espacio total.

Originalmente el resultado solo afirmaba que en ciertos espacios es posible dar una extensión como la antes mencionada. En 1915 Tietze dio una demostración a este resultado válida para espacios métricos, por esta razón el teorema es conocido como el teorema de extensión de Tietze. En 1925 Urysohn dio una demostración más general en la que caracteriza a los espacios normales, esta demostración es la que daremos aquí.

Teorema 2.125. *Teorema de extensión de Tietze. Sean X un espacio normal, A un subespacio cerrado de X y $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, entonces:*

a) Cualquier función continua $f : A \to [a, b]$, se puede extender a una función continua $g : X \to [a, b]$.

b) Cualquier función continua $f : A \to \mathbb{R}$, se puede extender a una función continua $g : X \to \mathbb{R}$.

Demostración. Vamos a probar el inciso a) del teorema cuando $f : A \to [-r, r]$ para cualquier $r \in \mathbb{R}^+$, para esto dada $r \in \mathbb{R}^+$ y una función continua $f : A \to [-r, r]$ construiremos una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que, $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ y $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$ para toda $x \in X$ y toda $a \in A$. Esto lo hacemos como sigue.

Consideramos los conjuntos $I_1 = [-r, -\frac{1}{3}r], I_2 = [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$ e $I_3 = [\frac{1}{3}r, r]$. Estos tres intervalos tienen longitud $\frac{2}{3}r$. Definimos $B = f^{-1}(I_1)$ y $C = f^{-1}(I_3)$ y notemos que B y C son cerrados ajenos en A, porque f es continua, y por lo tanto son cerrados en X. Como X es normal, por el Lema de Urysohn (2.120), existe una función $g : X \to [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$, de tal forma que

$g(B) \subseteq \{-\frac{1}{3}r\}$ y $g(C) \subseteq \{\frac{1}{3}r\}$, así tenemos que $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ para todo $x \in X$. Además notemos lo siguiente:

i) Si $a \in B$, se tiene que $g(a), f(a) \in I_1$.

ii) Si $a \in C$, entonces $g(a), f(a) \in I_3$.

iii) Si $a \notin B \cup C$, entonces $g(a), f(a) \in I_2$.

De manera que $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$, para toda $a \in A$.

Para probar el teorema, vamos a sustituir el intervalo $[a, b]$ por el intervalo $[-1, 1]$ porque son homeomorfos. Sea $f : A \to [-1, 1]$ una función continua, entonces tomando $r = 1$, existe una función continua $g_1 : X \to \mathbb{R}$ tal que $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ para toda $x \in X$ y $|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}$, para toda $a \in A$.

Ahora consideremos la función $f - g_1$. Notemos que la imagen de A bajo esta función es $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, de manera que si ahora tomamos $r = \frac{2}{3}$, entonces obtenemos una función $g_2 : X \to \mathbb{R}$, tal que, $|g_2(x)| \leq (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})$, para toda $x \in X$ y $|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq (\frac{2}{3})^2$ para toda $a \in A$.

Supongamos que tenemos construidas las funciones $g_1, g_2 \ldots g_n$, de manera que $|f(a) - g_1(a) - g_2(a) - \cdots - g_n(a)| \leq (\frac{2}{3})^n$, para toda $a \in A$. Tomando, $r = \frac{2}{3}^n$ obtenemos la función $g_{n+1} : X \to \mathbb{R}$, tal que $|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ para toda $x \in X$ y $|f(a) - g_1(a) - g_2(a) - \cdots - g_n(a) - g_{n+1}(a)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$, para toda $a \in A$. Así, por inducción tenemos definidas las funciones g_n para toda $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, definimos la función $G : X \to \mathbb{R}$, como $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, para toda $x \in X$. Para probar que esta función está bien definida, tenemos que probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es convergente. Para esto basta observar que si definimos $a_n = g_n(x)$ y $b_n = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$, entonces $|a_n| \leq b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además la serie, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$, pero esta es una serie geométrica, la cual converge a $\frac{1}{3}(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}) = 1$.

Luego, utilizando el criterio M de Weierstrass [13, 9.4.6, pág. 335], se tiene que $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es uniformente convergente. Finalmente en [13, 9.4.2, pág. 334] se demuestra que si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en I a una función f, entonces f es continua en I. Por lo tanto G es continua.

A continuación veamos que $G(a) = f(a)$ para toda $a \in A$. Sea $s_n = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$. Por definición $G(x)$ es el límite de la sucesión $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, y como $|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)| = |f(a) - s_n(a)| \leq (\frac{2}{3})^n$ para toda $a \in A$, tenemos que

$\lim_{n\to\infty} s_n(a) = f(a)$, por lo tanto $f(a) = G(a)$ para toda $a \in A$.

Por último notemos que G envía a X al $[-1,1]$, esto es porque $|G(x)| \leq \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = 1$.

Hemos demostrado el inciso a). Para demostrar b), vamos a probar que la imagen de X bajo G es todo $\mathbb{R}$. Es suficiente con probar que la imagen de X bajo G es el intervalo abierto $(-1,1)$ porque éste es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Sean f una función continua y $A \subseteq X$ tales que A es cerrado y $f : A \to (-1,1)$. Podemos considerar a f definida en el intervalo $[-1,1]$ es decir, $f : A \to [-1,1]$. Sabemos, por el inciso a), que existe una función continua $g : X \to [-1,1]$ que extiende a f. Sea $D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\})$. Como g es continua, tenemos que D es cerrado en X. Además, puesto que $g(A) = f(A) \subseteq (-1,1)$ tenemos que $A \cap D = \emptyset$. Luego, por el Lema de Urysohn, existe una función continua $\alpha : X \to [0,1]$, tal que $\alpha(D) = \{0\}$ y $\alpha(A) = \{1\}$.

Definamos $h(x) = \alpha(x)g(x)$, la cual es continua por ser el producto de funciones continuas, además observemos que para cada $a \in A$ $h(a) = \alpha(a)g(a) = 1g(a) = f(a)$. Por último, notemos que si $x \in D$, entonces $h(x) = 0g(x) = 0$ y si $x \notin D$, tenemos que $|g(x)| < 1$, por lo tanto $|h(x)| \leq 1|g(x)| < 1$, de manera que $h : X \to (-1,1)$ es una extensión continua de $f : A \to (-1,1)$. □

El Teorema de extensión de Tietze también es una caracterización de los espacios normales.

Teorema 2.126. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ cerrado tal que existe una función continua $f : A \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, de manera que se puede extender a una función $g : X \to [a,b]$. Entonces X es normal.*

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$, dos cerrados ajenos. Definamos una función $f : A \cup B \to [0,1]$ de tal manera que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. Puesto que la imagen inversa de cualquier cerrado en $[0,1]$ es $\emptyset$, X, A o B, es claro que f es continua, entonces, por hipótesis existe una función continua, $g : X \to [0,1]$ extensión de f, de manera que $g|_{(A\cup B)} = f|_{(A\cup B)}$, luego $g(A) = \{0\}$ y $g(B) = \{1\}$, por lo tanto, por el Lema de Urysohn, resulta que X es normal. □

Finalizaremos esta sección con un ejemplo de un espacio T_4, pero antes de mencionarlo demostraremos el siguiente lema.

Lema 2.127. *Si un espacio topológico X es compacto y T_2, entonces X es normal.*

Demostración. Primero probaremos que X es regular. Sean $C \subseteq X$ cerrado, y $x \in X \setminus C$. Como X es compacto, se tiene que C es compacto, luego puesto que X es T_2, por el Lema 2.82, tenemos que existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $C \subseteq V$. Por lo tanto X es regular.

Una vez probado que X es regular, demostraremos que X es normal. Para esto sean C y D dos cerrados ajenos en X. Dado que X es compacto, se tiene que C y D son compactos, luego como X es regular, tenemos que para cada $y \in D$ existen abiertos ajenos U_y, V_y tales que $C \subseteq U_y$ y $y \in V_y$. La familia $\mathcal{V} = \{V_y : y \in D\}$ es una cubierta abierta de D. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_n \in D$ tales que $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supseteq D$. Hacemos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, el cual es abierto y observemos que $C \subseteq U$. También notemos que si $z \in V$, entonces $z \in V_{y_i}$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de manera que $z \notin U_{y_i}$, luego $z \notin U$. Así, tenemos que $U \cap V = \emptyset$.

De esta manera encontramos dos abiertos ajenos U y V tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$. Por lo tanto X es normal. $\square$

Definición 2.128. *Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $\notin A$. Se define la distancia de x a A como $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ donde $d(x, y)$ denota la distancia del punto x al punto y.*

Ejemplo 2.129. *Sea $I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Vamos a definir una base para una topología en I^2 de la siguiente manera.*

Hagamos $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ la diagonal de I^2. Para cada punto $p = (s, t) \in I^2 \setminus \Delta$ y $0 < \epsilon < 1$, definimos $N_\epsilon(s, t) = (I^2 \setminus \Delta) \cap \{(s, y) \in I^2 \setminus \Delta : |t - y| < \epsilon\}$, es decir, $N_\epsilon(s, t)$ es un segmento vertical abierto de radio ϵ centrado en p.

Para los puntos $(s, s) \in \Delta$, tomemos $F \subseteq [0, 1]$ finito tal que $s \notin F$ y definamos $M_\epsilon(s, s) = I^2 \cap \{(x, y) \in I^2 : |s - y| < \epsilon$ y $x \notin F\}$. Geométricamente, $M_\epsilon(s, s)$ es la región $[0, 1] \times \{(s, y) \in I^2 : |s - y| < \epsilon\}$ menos un número finito de líneas verticales contenidas en esa región distintas de la línea vertical $\{(s, y) \in I^2 : |s - y| < \epsilon\}$.

Afirmamos que la familia $\mathcal{B} = \{M_\epsilon(s, s) : 0 < \epsilon < 1$ y $s \in [0, 1]\} \cup N_\epsilon(s, t) : 0 < \epsilon < 1$ y $(s, t) \notin \Delta\}$ forma una base para una topología τ_β para I^2. Además, el espacio (I^2, τ_β) es T_4.

Demostración. Veamos que la familia $\mathcal{B}$ forma una base.

Sea $(s, t) \in N_\epsilon(s, t) \cap N_\delta(s, t)$. Como los básicos de la forma $N_\epsilon(s, t)$ son segmentos abiertos verticales centrados en (s, t), debe ocurrir que $N_\epsilon(s, t) \subseteq$

$N_\delta(s,t)$ o $N_\delta(s,t) \subseteq N_\epsilon(s,t)$. Tomamos $r = \text{ínf}\{\epsilon, \delta\}$ y tenemos que $N_r(s,t)$ es un básico de (s,t) contenido en $N_\epsilon(s,t) \cap N_\delta(s,t)$.

Para los puntos en la diagonal, tenemos que si $(s,s) \in M_\epsilon(s,s) \cap M_\delta(s,s)$, entonces $(s,s) \in \{(x,y) \in I^2 : |y-s| < \epsilon \text{ y } x \notin F_1\} \cap \{(x,y) \in I^2 : |y-s| < \delta \text{ y } x \notin F_2\}$, donde F_1 y F_2 son dos subconjuntos finitos de $[0,1]$ tales que $s \notin F_1 \cup F_2$. Sea $r = \text{ínf}\{\epsilon, \delta\}$. Se tiene que $(s,s) \in I^2 \cap \{(x,y) \in I^2 : |y-s| < r \text{ y } x \notin F_1 \cup F_2\}$ el cual es un básico contenido en $M_\epsilon(s,s) \cap M_\delta(s,s)$.

De esta manera tenemos que la familia $\mathcal{B}$ forma una base para una topología sobre I^2.

Ahora vamos a probar que I^2 con la topología que define nuestra base, es un espacio T_4, para esto veremos que I^2 es compacto y T_2, el Lema 2.127, nos dará el resultado.

Primero veamos que I^2 es T_2. Sean (s,t) y (w,z) dos puntos distintos en I^2, vamos a examinar dos casos:

Caso I) si $t \neq z$, entonces existen ϵ , $\delta > 0$ tales que las regiones $R_1 = [0,1] \times \{(s,y) \in I^2 : |y-s| < \epsilon\}$ y $R_2 = [0,1] \times \{(w,y) \in I^2 : |y-w| < \delta\}$ son ajenas, (esto lo podemos garantizar tomando $\epsilon = \delta = \frac{|t-z|}{2}$) luego si, $(s,t), (w,z) \in \Delta$, entonces las regiones R_1 y R_2 son dos básicos ajenos que tienen a (s,t) y (w,z). Cuando los puntos $(s,t), (w,z) \in I^2 \setminus \Delta$, los segmentos $\{(s,y) \in I^2 : |y-s| < \epsilon\}$ y $\{(w,y) \in I^2 : |y-w| < \delta\}$, son dos básicos ajenos que tienen a (s,t) y (w,z), respectivamente. Finalmente si un punto está en la diagonal, digamos $(s,t) \in \Delta$ y el otro $(w,z) \in I^2 \setminus \Delta$, entonces R_1 y $\{(w,y) \in I^2 : |y-w| < \delta\}$ son dos abiertos básicos ajenos que tienen a (s,t) y (w,z).

Caso II) $t = z$. En este caso tenemos que $(s,t), (w,z) \in I^2 \setminus \Delta$ o algún punto, digamos $(s,t) \in \Delta$ y el otro $(w,z) \in I^2 \setminus \Delta$. Si ambos puntos están fuera de la diagonal, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, los segmentos $\{(s,y) \in I^2 : |y-s| < \epsilon\}$ y $\{(w,y) \in I^2 : |y-w| < \epsilon\}$ son dos abiertos básicos disjuntos que tienen a (s,t) y (w,z), respectivamente. Si $(s,t) \in \Delta$ y $(w,z) \in I^2 \setminus \Delta$, tenemos que la región R_1 contiene a (w,z), luego el conjunto $R_1 \setminus \{(w,y) \in I^2 : |y-w| < \epsilon\}$ es un abierto básico que tiene a (s,t) ajeno al básico $\{(w,y) \in I^2 : |y-w| < \epsilon\}$ que contiene a (w,z).

De esta manera hemos comprobado que el espacio es T_2.

Ahora veamos que el espacio es compacto. Sean $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de I^2 y $B = \{i \in I : \Delta \cap U_i \neq \emptyset\}$. Definamos $p_2 : I^2 \to [0,1]$ como,

$p_2(x, y) = y$, es decir, p_2 es la proyeccción sobre la segunda coordenada. Luego, $\{p_2(U_i)\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de $[0,1]$, el cual es compacto, de manera que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{p_2(U_i)\}_{i=1}^n$ cubre a $[0,1]$, luego $\{(U_i)\}_{i=1}^n$ cubre $I^2 \setminus A$ donde A es una cantidad finita de segmentos verticales, pero estos segmentos pueden ser cubiertos con un numero finito de elementos de $\{U_i\}_{i \in I}$, digamos $\{U_1, ..., U_k\}$, de manera que $\{(U_i)\}_{i=1}^n \cup \{U_1, ..., U_k\}$ es una cubierta abierta finita de I^2, por lo tanto I^2 es compacto.

Hemos visto que I^2 es un espacio compacto y T_2, entonces I^2 es normal, luego como es T_2, también es T_1 y por lo tanto es T_4. □

Observación. *Los espacios normales no se preservan bajo subespacios.*

Demostración. Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y la familia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\},$
$\{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Es fácil ver que (X, τ) es un espacio topológico. Notemos que los cerrados de X son: $\emptyset, \{b, c, d\}$,$\{c, d\}$,$\{b, d\}$,$\{d\}$ y X. Como no existen dos cerrados ajenos no vacíos, resulta (por vacuidad) que el espacio X es normal.

Sea $Y = \{a, b, c\} \subseteq X$. Si vemos a Y como un subespacio de X, entonces su topología es $\tau_Y = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, Y\}$. Notemos que $\{c\}$ y $\{b\}$ son dos cerrados en Y no vacíos pero no existen abiertos ajenos en Y tales que $\{c\} \subseteq U_1$ y $\{b\} \subseteq U_2$, por lo tanto Y no es un espacio normal. □

Es importante mencionar que *los espacios T_4 no se preservan bajo subespacios.* Daremos un argumento para demostrar ésto en la siguiente sección en el Teorema 2.137.

Aunque en general un subespacio de un espacio T_4 no es T_4, el siguiente resultado nos da una condición para que tal subespacio sea T_4.

Teorema 2.130. *Sea X un espacio topológico T_4. Si $Y \subseteq X$ es cerrado, entonces Y es T_4.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 dos subconjuntos cerrados de Y tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Como Y es cerrado tenemos que C_1 y C_2 son cerrados ajenos en X. Luego, existen dos abiertos ajenos U_1 y U_2 que contienen a C_1 y C_2 respectivamente. Finalmente $U_1 \cap Y$ y $U_2 \cap Y$ son dos abiertos ajenos en Y que contienen a C_1 y C_2 respectivamente. Por lo tanto Y es normal.

Para concluir recordemos que los espacios T_1 se preservan bajo subespacios (Teorema 2.56), por lo tanto Y es T_4. $\square$

2.16. Espacios T_5

Al final de la sección anterior se demostró que la normalidad no es una propiedad que se conserve bajo subespacios. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.131. *Un espacio topológico X es* ***completamente normal*** *si todo subespacio de X es normal.*

Definición 2.132. *Un espacio topológico X es T_5, si es T_1 y completamente normal.*

Definición 2.133. *Sean X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$. Decimos que A y B estan separados si $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $\overline{B} \cap A = \emptyset$.*

Teorema 2.134. *Un espacio topológico X es completamente normal si, y sólo si para cualesquier par de conjuntos separados $A, B \subseteq X$, existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Probaremos que Y es normal; para esto, tomemos dos cerrados disjuntos A y B en Y. Como $\mathrm{Cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Cl}_X(A)$, tenemos que $\mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \mathrm{Cl}_X(A) \cap (B \cap Y) = (\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y) \cap B = (\mathrm{Cl}_Y(A) \cap B) = \emptyset$. Análogamente, $\mathrm{Cl}_X(B) \cap A = \emptyset$, de manera que A y B están separados en X; luego, por hipótesis existen abiertos disjuntos U y V de X, tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Tomando $U \cap Y$ y $V \cap Y$, tenemos dos abiertos disjuntos en Y, que contienen a A y B, respectivamente. Por lo tanto, Y es normal.

$\Rightarrow$) Ahora supongamos que X es completamente normal, y sean A y B dos conjuntos separados en X. Tomemos $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$. Notemos que si $x \in A$, entonces $x \notin \overline{B}$, debido a que $A \cap \overline{B} = \emptyset$, de manera que $x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$, luego $x \in X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$, por lo tanto $A \subseteq Y$. Análogamente, si $x \in B$, entonces $x \notin \overline{A}$, porque $B \cap \overline{A} = \emptyset$, de modo que $x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$, entonces $x \in X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$ y así $B \subseteq Y$.

Consideremos los conjuntos $\mathrm{Cl}_Y(A)$ y $\mathrm{Cl}_Y(B)$. Ambos son cerrados en Y, además $\mathrm{Cl}_Y(A) = Y \cap \overline{A}$ y $\mathrm{Cl}_Y(B) = Y \cap \overline{B}$, de modo que $\mathrm{Cl}_Y(A) \cap \mathrm{Cl}_Y(B) = Y \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$. Por lo tanto existen dos abiertos ajenos U_1 y V_1

en Y tales que $\mathrm{Cl}_Y(A) \subseteq U_1$ y $\mathrm{Cl}_Y(B) \subseteq V_1$, pero $U_1 = Y \cap U$ y $V_1 = Y \cap V$, donde U y V son abiertos en X. Por último notemos que Y también es abierto en X y por lo tanto U_1 y V_1 son abiertos ajenos en X. Además, $A \subseteq \mathrm{Cl}_Y(A) \subseteq U_1$ y $B \subseteq \mathrm{Cl}_Y(B) \subseteq V_1$, de esta manera encontramos dos abiertos ajenos U_1 y V_1 en X que contienen a A y B, respectivamente. □

Teorema 2.135. *Los espacios T_5 son T_4.*

Demostración. Si X es T_5, entonces X es T_1 y todos sus subespacios son normales; en particular X es normal, por lo que X es T_4. □

Teorema 2.136. *Existen espacios T_4 que no son T_5.*

Demostración. En el Ejemplo 2.129 vimos que el espacio I^2 con la topología que tiene por base a la familia $\mathcal{B}$ es un espacio T_4, sin embargo no es un espacio T_5, como veremos a continuación.

Consideremos los siguientes subconjuntos de I^2: $A = \Delta \setminus \{(0,0)\}$ y $B = (0,1] \times \{0\}$. Notemos que $A \cap B = \emptyset$. Afirmamos que $\overline{B} = B \cup \{(0,0)\}$.

En efecto, en primer lugar observemos que $(0,0) \in \overline{B} \setminus B$ porque todo abierto básico que tiene a $(0,0)$ es de la forma $\{(x,y) \in I^2 : |0-y| < \epsilon$ y $x \notin F\}$ con $F \subset [0,1]$ finito y este conjunto siempre interseca a B. Por lo tanto B no es cerrado.

Por otro lado veamos que $B \cup \{(0,0)\}$ es cerrado. Si $(s,t) \notin B \cup \{(0,0)\}$, entonces $t > 0$, luego, el número $\frac{t}{2} > 0$ es tal que el segmento abierto $J = \{(s,y) \in I^2 : |t-y| < \frac{t}{2}\}$ no interseca a $B \cup \{(0,0)\}$, de manera que si $(s,t) \in \Delta$ entonces $[0,1] \times J$ es un básico que tiene a (s,t) que no interseca a $B \cup \{(0,0)\}$, y si $(s,t) \notin \Delta$ entonces J es un básico que tiene a (s,t) que no interseca a $B \cup \{(0,0)\}$, por lo tanto para cada $(s,t) \in I^2 \setminus (B \cup \{(0,0)\})$ hay un básico que tiene a (s,t) totalmente contenido en $I^2 \setminus (B \cup \{(0,0)\})$, es decir, $B \cup \{(0,0)\}$ es cerrado.

Como B no es cerrado pero $B \cup \{(0,0)\}$ si lo es, se sigue que $\overline{B} = B \cup \{(0,0)\}$. Por lo tanto, $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

Veamos que $B \cap \overline{A} = \emptyset$. Sea $(r,0) \in B$. Entonces $r > 0$, luego el número $\frac{r}{2} > 0$ es tal que el segmento $J = \{(r,y) \in I^2 : |r-y| < \frac{r}{2}\}$ es un abierto básico que tiene a $(r,0)$ y no interseca a $\Delta \setminus \{(0,0)\}$. Esto prueba que, para cada punto $(r,0) \in B$, $(r,0)$ no está en la cerradura de A, es decir $B \cap \overline{A} = \emptyset$.

Hemos probado que A y B están separados. Para finalizar, mostraremos que no hay abiertos disjuntos que los contengan. Supongamos que U es un abierto que contiene a B, entonces para cada punto $(r,0) \in B$ existe un ϵ_r tal que el segmento $\{(r,y) \in I^2 : |r-y| < \epsilon_r\} \cap I^2$ es un básico que tiene a $(r,0)$ contenido en U. Como $[0,1]$ es no numerable, hay una cantidad no numerable de radios ϵ_r, luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon_r$ para una cantidad infinita de números r, como cualquier abierto básico que tiene al punto $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es de la forma $D = I^2 \cap \{(x,y) \in I^2 : |\frac{1}{n} - y| < \epsilon \text{ y } x \notin F\}$ donde $F \subseteq [0,1]$ es finito y $\frac{1}{n} \notin F$, resulta que hay una cantidad infinita de puntos $(r,0) \in B$, cuyos abiertos básicos ϵ_r intersecan a D, y por lo tanto $U \cap D \neq \emptyset$, de modo que todo abierto que contenga a B, interseca a un básico de algún elemento de A. Con esto concluimos que no existen abiertos disjuntos U y V tales que $B \subseteq U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, I^2 no es T_5. $\square$

Teorema 2.137. *Los espacios T_4 no se preservan bajo subespacios.*

Demostración. En el Ejemplo 2.129 vimos que el espacio $I \times I$ es T_4, sin embargo, acabamos de probar que no es T_5. (Teorema 2.136). Como este espacio es T_1 tenemos que no es completamente normal, es decir, contiene un subespacio que no es normal y como el axioma T_1 se preserva bajo subespacios (Teorema 2.56) podemos afirmar que tal subespacio no es T_4. $\square$

Teorema 2.138. *Si X es T_5 y $Y \subseteq X$, entonces Y es T_5.*

Demostración. Sea $Y \subseteq X$. Como ser T_1 es una propiedad que se preserva bajo subespacios, sólo tenemos que probar que todo subespacio $Z \subseteq Y$ es normal.

Sea $Z \subseteq Y$. Notemos que por ser Z subespacio de Y, se sabe que Z también es subespacio de X y como X es completamente normal, resulta que Z es normal, así tenemos que Y es T_5. $\square$

2.17. Espacios T_6

En esta sección vamos a estudiar una clase de espacios conocida como espacios T_6. La definición de espacio perfectamente normal fue dada por Čech en 1932 [2, pág. 47]. Antes de recordarla nos serán necesarias las siguientes definiciones.

Definición 2.139. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$.*

a) *Decimos que A es un conjunto G_δ, si A puede ser escrito como la intersección de una colección numerable de abiertos de X.*

b) *Decimos que A es un conjunto F_σ, si A puede ser escrito como la unión de una colección numerable de cerrados de X.*

Definición 2.140. *Un espacio topológico X es* ***perfectamente normal****, si es normal y todo subconjunto cerrado es un conjunto G_δ.*

Definición 2.141. *Un espacio topológico X es T_6 si es T_4 y todo subconjunto cerrado es un conjunto G_δ.*

Lema 2.142. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es un conjunto G_δ si y sólo si $X \setminus A$ es F_σ.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$. Supongamos que A es G_δ. Entonces $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$, donde cada A_i es abierto en X para cada $i \in \mathbb{N}$, luego $X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus A_i)$ la cual es una unión numerable de los cerrados $X \setminus A_i$, por lo tanto $X \setminus A$ es F_σ.

Inversamente, supongamos que $X \setminus A$ es F_σ. Entonces $X \setminus A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ donde cada C_i es cerrado en X, luego para cada $i \in \mathbb{N}$, $X \setminus C_i$ es abierto, se tiene que $A = X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus C_i)$ la cual es una intersección numerable de abiertos, por lo tanto A es G_δ. □

Teorema 2.143. *Un espacio topológico X es T_6 si es T_4 y todo subconjunto abierto es un conjunto F_σ.*

Demostración. Sea U un abierto en X. Entonces $X \setminus U$ es cerrado, luego $X \setminus U$ es G_δ por lo que $X \setminus U = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ donde cada U_i es abierto. Tomando complementos se tiene que $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X \setminus U_i$. Por lo tanto U es F_σ. □

Teorema 2.144. *Un espacio topológico X es perfectamente normal si y sólo si para cada abierto $U \subseteq X$ existe una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X tales que $U \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ y $\overline{U_i} \subseteq U$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que X es perfectamente normal y sea U un abierto no vacío de X. Entonces por 2.143, $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ donde cada C_i es cerrado. Como X es normal, por el Teorema 2.115 b), para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un abierto U_i tal que $C_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq U$. Por lo tanto $U \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ y $\overline{U_i} \subseteq U$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Para la implicación inversa, sean C un cerrado y U un abierto tal que $C \subseteq U$. Entonces por hipótesis existe una familia $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos de X tales que $C \subseteq U \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ y $\overline{U_i} \subseteq U$ para toda $i \in \mathbb{N}$, luego por el Teorema 2.116 resulta que X es normal.

Para terminar la prueba veremos que cada subconjunto abierto de X es F_σ. Sea U un abierto en X. Se tiene que existe una familia $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos de X tales que $U \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ y $\overline{U_i} \subseteq U$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $U \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U_i}$ y además $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U_i} \subseteq U$. Por lo tanto $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U_i}$, es decir U es F_σ. $\square$

Definición 2.145. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un* ***conjunto-cero****, si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = A$. Decimos que A es un* ***conjunto-cocero****, si $X \setminus A$ es un conjunto-cero.*

Teorema 2.146. *(Teorema de Vedenissoff) Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es perfectamente normal.

b) Todo subconjunto cerrado de X es un conjunto-cero.

c) Todo subconjunto abierto de X es un conjunto-cocero.

d) Para todo par de cerrados disjuntos C_1 y C_2, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C_1$ y $f^{-1}(1) = C_2$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Sea C un subconjunto cerrado de X. Entonces $C = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_n$ donde U_n es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$, además notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $C \cap (X \setminus U_n) = \emptyset$. Como X es normal, utilizando el Lema de Urysohn, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n(x) = 0$ para cada $x \in C$ y $f_n(x) = 1$ para cada $x \in X \setminus U_n$. Definamos $f : X \to [0,1]$ como $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$. Observemos que $f(x) = 0$ para toda $x \in C$, además si $x \notin C$, entonces $x \in X \setminus U_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) \geq \frac{1}{2^n} > 0$ por lo tanto $f^{-1}(0) = C$.

Para ver que f es continua observemos que $|\frac{f_n(x)}{2^n}| \leq \frac{1}{2^n}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geometrica que converge a 1, se tiene por el criterio M de Weierstrass ([13, 9.4.6, pág. 335]), que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$ converge uniformemente. Por lo tanto f es continua.

$b) \Leftrightarrow c)$. Si U es un abierto, entonces $X \setminus U$ es cerrado. Luego, $X \setminus U$ es un conjunto-cero si y sólo si U es un conjunto-cocero.

b) $\Rightarrow$ *d*). Sean C_1 y C_2 dos cerrados ajenos. Por *b*) C_1 y C_2 son conjuntos-cero, de manera que existen funciones continuas $f, g : X \to [0,1]$ tales que $f^{-1}(0) = C_1$ y $g^{-1}(0) = C_2$. Definamos $h : X \to [0,1]$ como $h(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$ la cual esta bien definida porque $f(x) + g(x) \neq 0$ para toda $x \in X$, pues $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Además es claro que h es continua y $h^{-1}(0) = C_1$ y $h^{-1}(1) = C_2$.

d) $\Rightarrow$ *a*). Por el Lema de Urysohn 2.120, tenemos que X es normal. Para ver que todo cerrado es G_δ tomemos un cerrado en X, $C \neq X$. Entonces existe $x \in X \setminus C$, como X es T_1, tenemos que $\{x\}$ es cerrado, luego por d) existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C$ y $f^{-1}(1) = \{x\}$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $U_n = f^{-1}([0, \frac{1}{2^{n+1}}))$, se tiene que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, como f es continua y $[0, \frac{1}{2^{n+1}})$ es abierto en $[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que C es una intersección numerable de abiertos, por lo tanto C es G_δ. □

Lema 2.147. *Sean X un espacio normal y $A \subseteq X$. Si A es F_σ, entonces A es un subespacio normal de X.*

Demostración. Escribamos $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, donde cada F_i es cerrado en X. Sean F cerrado en A y V un abierto en A tal que $F \subseteq V$, de manera que existe un abierto U en X tal que $V = U \cap A$. Consideremos los conjuntos $F \cap F_i$, cada uno de éstos es cerrado en F y como F es cerrado en A, resulta que $F \cap F_i$ es cerrado en F_i y entonces también es cerrado en X. Como X es normal, por el Teorema 2.116 existe W_i abierto en X tal que $F \cap F_i \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U$, luego $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(W_i \cap A)$ es un abierto en A tal que $F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(W_i \cap A)$. Para finalizar observemos que

$$\mathrm{Cl}_A\big(\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(W_i \cap A)\big) = \overline{\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(W_i \cap A)} \cap A \subseteq \overline{\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i} \cap \overline{A} \cap A \subseteq U \cap A = V$$

Por lo tanto, A es normal. □

Teorema 2.148. *Los espacios T_6 son T_5.*

Demostración. Sea X un espacio topológico T_6. Entonces es T_4 y por lo tanto T_1. Además, todo subconjunto cerrado es G_δ, luego por el Lema 2.142 tenemos que todo abierto es F_σ, entonces por el Lema 2.147 se tiene que todo abierto de X es un subespacio normal.

Sea $A \subseteq X$. Para ver que X es T_5 vamos a demostrar que A es normal. Tomemos dos cerrados ajenos F y G en A, entonces $F = F' \cap A$ y $G = G' \cap A$ donde F' y G' son dos cerrados en X que por ser T_6 resulta que F' y G' son G_δ. Definamos $U = X \setminus (F' \cap G')$, notemos que U es abierto en X, además es el complemento de un conjunto G_δ, luego U es F_σ, entonces por el Lema 2.147 U es un subespacio normal. Además $U \cap F'$ y $U \cap G'$ son dos cerrados ajenos en U, de manera que existen dos abiertos ajenos W_1 y W_2 en U, tales que $U \cap F' \subseteq W_1$ y $U \cap G' \subseteq W_2$. Podemos escribir $W_1 = W_1' \cap U$ y $W_2 = W_2' \cap U$, con W_1' y W_2' abiertos en X, de esta manera, puesto que U también es abierto en X tenemos que W_1 y W_2 son abiertos en X, por lo que $W_1 \cap A$ y $W_2 \cap A$ son dos abiertos ajenos en A. Notemos que $(F' \cap G') \cap A = \emptyset$ porque $F \cap G = \emptyset$, luego $A \subseteq X \setminus (F' \cap G')$, es decir, $A \subseteq U$, por lo que $F = F' \cap A \subseteq F' \cap U \subseteq W_1$, y así $F \subseteq W_1 \cap A$. Análogamente, $G = G' \cap A \subseteq G' \cap U \subseteq W_2$, y así $G \subseteq W_2 \cap A$, por lo tanto tenemos que $W_1 \cap A$ y $W_2 \cap A$ son dos abiertos ajenos en A que contienen a F y G respectivamente, esto demuestra que A es normal, y por lo tanto X es completamente normal.

Para finalizar recordemos que, la propiedad T_1 se preserva bajo subespacios (Teorema 2.56), por lo tanto A es T_1, luego, A es T_4, y así, tenemos que X es T_5 . □

Teorema 2.149. *Existen espacios T_5 que no son T_6.*

Demostración. Como ejemplo de un espacio T_5 que no es T_6, consideremos un conjunto no numerable X y tomemos un punto $p \in X$. Definimos $\tau = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito o } p \in X \setminus A\}$.

Veamos que X es un espacio T_5.

Es claro que es un espacio T_1 porque para cada punto $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es finito y por lo tanto es cerrado (Teorema 2.52, d)).

Veamos que X es completamente normal. Sean $A, B \subseteq X$ tales que A y B están separados. Queremos encontrar dos abiertos ajenos U y V, tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Si $p \notin A \cup B$, entonces A y B son abiertos y ellos mismos son los abiertos buscados U y V.

Supongamos que $p \in A \setminus B$, entonces $p \in A \subseteq X \setminus B$, por lo tanto B es abierto. Afirmamos que B también es cerrado, porque si B no es cerrado, entonces B es infinito, pero esto no es posible porque si W es un abierto que tiene a p, entonces $X \setminus W$ es finito, por lo que $B \not\subseteq X \setminus W$, es decir $W \cap B \neq \emptyset$, en consecuencia $p \in \overline{B}$, luego, tenemos que $p \in A \cap \overline{B}$, en contradicción con la suposición de que A y B están separados, por lo tanto B es cerrado.

Así, tenemos que B y $X \setminus B$, son dos abiertos ajenos tales que $B \subseteq B$ y $A \subseteq X \setminus B$.

Para finalizar, veamos que X no es perfectamente normal. Observemos que $\{p\}$ es un cerrado que no es G_δ, porque si lo fuera, $\{p\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ con A_i abierto para toda i, entonces $X \setminus \{p\} = X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus A_i)$ y como cada A_i es abierto y tiene a p, entonces $X \setminus A_i$ es finito para cada $i \in \mathbb{N}$, de manera que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus A_i)$ es una unión numerable de conjuntos finitos, luego $X \setminus \{p\}$ es numerable, lo cual es imposible puesto que X es no numerable. De esta manera, tenemos que X no es perfectamente normal, por lo tanto X es un espacio T_5 que no es T_6. □

Teorema 2.150. *Sea X un espacio topológico perfectamente normal. Si $Y \subseteq X$, entonces Y es perfectamente normal.*

Demostración. Sea $Y \subseteq X$. Tomemos un cerrado $C_Y \subseteq Y$ en Y, entonces existe un cerrado C en X tal que $C_Y = C \cap Y$. Como X es perfectamente normal, por el Teorema 2.146 b), tenemos que C es un conjunto-cero, es decir, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C$, luego $f|_Y : Y \to [0,1]$ es una función continua ([10, Teorema 7.5, pág. 45]), tal que $f|_Y^{-1}(0) = C_Y$, por lo tanto C_Y es un conjunto-cero y así nuevamente por el Teorema 2.146, Y es perfectamente normal. □

Recordemos la siguiente definición,

Definición 2.151. *Sea X un conjunto no vacío. Una* ***métrica*** *o* ***distancia*** *en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in X$:*

a) $d(x, y) \geq 0$,

b) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$,

c) $d(x, y) = d(y, x)$, *y*

d) $d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Decimos que el par (X, d) es un espacio métrico.

Lema 2.152. *El conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sabemos que para cualquier $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ la función norma $||.|| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cumple las propiedades a), b), c) y d) de la definición 2.151, (cuando $n = 1$ la norma es el valor absoluto) por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico. $\square$

Dado un espacio métrico X con metrica d y $x \in X$, al conjunto $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ se le denomina la bola de radio ϵ centrada en x. En [12, 2.1, pág. 182] se prueba que la colección de todas las bolas $B_\epsilon(x)$, para cada $x \in X$, forman una base para una topología sobre X, a esta topología se le llama la topología métrica inducida por d. Por tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.153. *Un espacio métrico es un espacio topólogico.*

Finalizamos esta sección demostrando que los espacios metricos satisfacen el axioma T_6.

Teorema 2.154. *Los espacios métricos son T_6.*

Demostración. Sea X un espacio métrico. Vamos a demostrar que X es normal y cada que cerrado de X es G_δ.

Sean C, D dos cerrados ajenos en X. Para cada $x \in C$, tomemos $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(x) \cap D = \emptyset$. Análogamente para cada $y \in D$, tomemos $\epsilon_y > 0$ tal que $B_{\epsilon_y}(y) \cap C = \emptyset$. Observemos que los conjuntos $U = \bigcup_{x \in C} B_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x)$ y $V = \bigcup_{y \in D} B_{\frac{\epsilon_y}{2}}(y)$ son abiertos y contienen a C y D, respectivamente.

Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que existe $a \in U \cap V$, entonces existen $x \in C$, $y \in D$ tales que $d(x, a) < \frac{\epsilon_x}{2}(x)$ y $d(y, a) < \frac{\epsilon_y}{2}(y)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\epsilon_x \geq \epsilon_y$. Entonces $d(x, y) < d(x, a) + d(a, y) < \epsilon_x$, pero esto implica que $y \in B_{\epsilon_x}(x)$ es decir, $B_{\epsilon_x}(x) \cap D \neq \emptyset$, pero esto es una contradicción. El caso en que $\epsilon_x \leq \epsilon_y$ es similar. Por lo tanto U y V son ajenos. Con esto hemos demostrado que X es normal.

Ahora tomemos un cerrado $A \subseteq X$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n = \{x \in X : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$, notemos que A_n es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_n$. Por lo tanto X es G_δ. $\square$

Capítulo 3

Funciones y Productos

Sea X un espacio topológico. Si X satisface alguna propiedad P y cualquier otro espacio Y homeomorfo a X también satisface dicha propiedad diremos que P es una *propiedad topológica*.

En este capítulo veremos bajo qué tipo de funciones la imagen de un espacio que satisface cierto axioma de separación también lo satisface. Como consecuencia sabremos que algunos axiomas de separación son propiedades topológicas.

Consideremos una familia de espacios topológicos $\{X_i : i \in I\}$ y hagamos $X = \prod_{i\in I}\{X_i : i \in I\}$. Supongamos que para cada $i \in I$, X_i satisface cierta propiedad P. Diremos que P es una *propiedad multiplicativa* si X satisface la propiedad P.

Ahora supongamos que X satisface cierta propiedad P. Diremos que P es una *propiedad factorizable* si X_i satisface la propiedad P para cada $i \in I$.

El segundo objetivo de este capítulo es saber bajo qué condiciones los axiomas de separación son propiedades multiplicativas o factorizables.

3.1. Funciones

Teorema 3.1. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y biyectiva. Si X es T_0, entonces Y es T_0.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva, existen dos puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Puesto que X es T_0, existe un abierto U en X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$ o $x_2 \in U$ y $x_1 \notin U$, luego, como f es abierta e inyectiva $f(U)$ es un abierto en Y tal que $f(x_1) = y_1 \in f(U)$ y además $f(x_2) = y_2 \notin f(U)$ o $f(U)$ es un abierto en Y tal que $f(x_2) = y_2 \in f(U)$, y además $f(x_1) = y_1 \notin f(U)$. Por lo tanto, Y es T_0. □

Teorema 3.2. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y biyectiva. Si X es $T_{\frac{1}{4}}$ entonces Y es $T_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Sean $F = \{y_1, \ldots, y_n\}$ un conjunto finito y $y_0 \notin F$. Como f es biyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$, además como f es inyectiva, el conjunto $f^{-1}(F) \subseteq X$ es finito y $x_0 \notin f^{-1}(F)$. Luego, por hipótesis, existe $A \subseteq X$ tal que $f^{-1}(F) \subseteq A$, $x_0 \notin A$ y A es abierto o cerrado.

Si A es abierto, $f(A)$ es un abierto en Y tal que $F \subseteq f(A)$ y $f(x_0) = y_0 \notin f(A)$; si A es cerrado, como f es biyectiva $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ es un abierto en Y que tiene a x_0 y $(Y \setminus f(A)) \cap F = \emptyset$, entonces, $f(A)$ es un cerrado tal que $x_0 \notin f(A)$ y $F \subseteq f(A)$, por lo tanto Y es $T_{\frac{1}{4}}$. □

Teorema 3.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva y abierta. Si X es T_D, entonces Y es T_D.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, luego por el inciso c) del Teorema 2.21, $\{x\} = C \cap U$, donde U es abierto y C cerrado. Como f es biyectiva y abierta tenemos que f es cerrada y $f(x) = f(U \cap C) = f(U) \cap f(C)$, de manera que $f(U)$ y $f(C)$ son un abierto y un cerrado, respectivamente, en Y. Por lo tanto, nuevamente por el inciso c) del Teorema 2.21 tenemos que Y es T_D. □

Teorema 3.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y biyectiva. Si X es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces Y es $T_{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es $T_{\frac{1}{2}}$, se tiene que $\{x\}$ es abierto o cerrado (Teorema 2.29). Si $\{x\}$ es abierto, se tiene que $\{f(x)\} = \{y\}$ es abierto. Si $\{x\}$ es cerrado, puesto que f es abierta y biyectiva, se tiene que f es cerrada, luego $\{y\}$ es cerrado en Y y por lo tanto Y es $T_{\frac{1}{2}}$. □

Teorema 3.5. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es $T_{\frac{3}{4}}$, entonces Y es $T_{\frac{3}{4}}$.*

Demostración. Si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es $T_{\frac{3}{4}}$, se tiene que $\{x\}$ es abierto regular o cerrado (Teorema 2.46). Si $\{x\}$ es abierto regular, como f es un homeomorfismo se tiene que $\{y\} = \{f(x)\} = f(\operatorname{int} \overline{\{x\}}) = \operatorname{int} f\overline{\{x\}} = \operatorname{int} \overline{\{f(x)\}}$, por lo tanto $\{y\}$ es abierto regular.

Si $\{x\}$ es cerrado, puesto que f es abierta y biyectiva, se tiene que f es cerrada, luego $\{y\}$ es cerrado en Y y por lo tanto Y es $T_{\frac{3}{4}}$. □

Teorema 3.6. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función cerrada y suprayectiva. Si X es T_1 entonces Y es T_1.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Puesto que X es T_1, se tiene que $\{x\}$ es cerrado (2.52), luego, $\{f(x)\} = \{y\}$ es cerrado, y por lo tanto Y es T_1. □

Teorema 3.7. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y suprayectiva. Si X es US, entonces Y es US.*

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión en Y que converge a dos puntos $c, d \in Y$. Como f es suprayectiva, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in X$ en X tal que $f(x_i) = y_i$. Tomemos U, abierto en X, tal que U contenga un punto x del conjunto $f^{-1}(\{c\})$. Puesto que f es abierta, $f(U) = V$, es un abierto en Y que contiene a c, de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in V$ para toda $n > k$. Luego $f^{-1}(V)$ es un abierto que contiene a $f^{-1}(\{y_n\})$ para toda $n > k$, esto significa que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cualquier punto de $f^{-1}(\{c\})$, como X es US, el conjunto $f^{-1}(\{c\})$ consta de un punto, digamos $f^{-1}(\{c\}) = \{a\}$, análogamente, tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $b \in X$, $\{b\} = f^{-1}(\{d\})$, como X es US se tiene que $a = b$ y en consecuencia, $c = d$, por lo tanto Y es US. □

Teorema 3.8. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y biyectiva. Si X es AB, entonces Y es AB.*

Demostración. Sean $C, D \subseteq Y$ dos compactos ajenos. Como f es abierta y biyectiva, tenemos que f^{-1} es continua. Luego, $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son dos compactos ajenos en X. Como X es AB existe un abierto U tal que $f^{-1}(C) \subseteq U$ y $U \cap f^{-1}(D) = \emptyset$ o $f^{-1}(D) \subseteq U$ y $U \cap f^{-1}(C) = \emptyset$. Puesto que f es abierta, en cualquier caso se tiene que $f(U)$ es un abierto en Y tal que $C \subseteq f(U)$ y $f(U) \cap D = \emptyset$ o $D \subseteq f(U)$ y $f(U) \cap C = \emptyset$.

Por último notemos que como X es T_1, por el Teorema 3.6, tenemos que Y es T_1. Por lo tanto Y es AB. □

Teorema 3.9. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ abierta y biyectiva. Si X es KC entonces Y es KC.*

Demostración. Sean $C \subseteq Y$ compacto. Como f es abierta y biyectiva resulta que $f^{-1} : Y \to X$ es continua, por lo tanto $f^{-1}(C)$ es compacto, luego $f^{-1}(C)$ es cerrado, porque X es KC. Por último notemos que $f(f^{-1}(C)) = C$ es cerrado pues f es cerrada. □

Teorema 3.10. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y biyectiva. Si X es T_2, entonces Y es T_2.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Como X es suprayectiva, existen puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Puesto que X es T_2, existen abiertos ajenos U y V en X tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$, luego, usando el hecho de que f es abierta, $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos en Y tales que $f(x_1) = y_1 \in f(U)$, y $f(x_2) = y_2 \in f(V)$. Además, como f es inyectiva, tenemos que $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto Y es T_2. □

Teorema 3.11. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta y biyectiva. Si X es $T_{2\frac{1}{2}}$, entonces Y es $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Como X es suprayectiva, existen puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Puesto que X es $T_{2\frac{1}{2}}$, existen abiertos ajenos U y V en X tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, luego, usando el hecho de que f es abierta, $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos en Y tales que $f(x_1) = y_1 \in f(U)$, y $f(x_2) = y_2 \in f(V)$. Además, como f es inyectiva y para cualquier $A \subseteq X$ se tiene que $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$, resulta que $\overline{f(U)} \cap \overline{f(V)} \subseteq f(\overline{U}) \cap f(\overline{V}) = f(\overline{U} \cap \overline{V}) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto $\overline{f(U)} \cap \overline{f(V)} = \emptyset$ y así Y es $T_{2\frac{1}{2}}$. □

Teorema 3.12. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es funcionalmente Hausdorff, entonces Y es funcionalmente Hausdorff.*

Demostración. Sean y_1, y_2 dos puntos distintos en Y. Como f es biyectiva, existen dos puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, luego, por hipótesis, existe una función continua $g : X \to [0, 1]$ tal que $f(x_1) = 0$ y $f(x_1) = 1$, entonces la función $g \circ f^{-1} : Y \to [0, 1]$ es continua porque f^{-1} lo es, y es tal que $(g \circ f^{-1})(y_1) = 0$ y $(g \circ f^{-1})(y_2) = 1$. Por lo tanto Y es funcionalmente Hausdorff. □

Teorema 3.13. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, abierta, cerrada y suprayectiva. Si X es T_3, entonces Y es T_3.*

Demostración. Por el Teorema 3.6, tenemos que si X es T_1, entonces Y es T_1, de manera que sólo hay que probar que si X es regular, entonces Y es regular.

Sean $y \in Y$ y V un abierto en Y, tales que $y \in V$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Consideremos $U = f^{-1}(V)$ el cual es abierto en X porque f es continua, además $x \in U$. Puesto que X es regular, existe un abierto Z de X tal que $x \in Z \subseteq \overline{Z} \subseteq U$. Como f es continua, $f(x) \in f(Z) \subseteq f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$. Finalmente, ya que f es cerrada $\overline{f(Z)} \subseteq f(\overline{Z}) \subseteq f(U) \subseteq V$, por lo tanto $f(Z)$ es un abierto tal que $f(x) = y \in f(Z) \subseteq \overline{f(Z)} \subseteq V$, y así Y es regular y por lo tanto T_3. $\square$

Teorema 3.14. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es $T3_{\frac{1}{2}}$, entonces Y es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.6, tenemos que si X es T_1, entonces Y es T_1, de manera que sólo hay que probar que si X es completamente regular, entonces Y es completamente regular.

Sean $y \in Y$ y C un cerrado de Y tales que $y \notin C$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$; además, $f^{-1}(C) = F$ es un cerrado en X tal que $x \notin F$, Luego, por hipótesis, existe una función continua $g : X \to [0, 1]$, tal que $g(x) = 0$ y $g(F) \subseteq \{1\}$, entonces la función $g \circ f^{-1} : Y \to [0, 1]$ es continua porque f^{-1} lo es, y es tal que $(g \circ f^{-1})(y) = 0$ y $(g \circ f^{-1})(C) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto Y es completamente regular y así Y es $T_{3_{\frac{1}{2}}}$. $\square$

Teorema 3.15. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua, cerrada y suprayectiva. Si X es T_4, entonces Y es T_4.*

Demostración. Por el Teorema 3.6, tenemos que si X es T_1, entonces Y es T_1, de manera que sólo hay que probar que si X es normal, entonces Y es normal.

Sean C y D dos cerrados ajenos en Y. Como f es suprayectiva, y cerrada $f^{-1}(C) = A$ $f^{-1}(D) = B$ son dos cerrados ajenos en X, luego, por el Lema de Urysohn 2.120, existe una función continua $g : X \to [0, 1]$, tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. Entonces la función $g \circ f^{-1} : Y \to [0, 1]$ es continua porque f^{-1} lo es, y es tal que $(g \circ f^{-1})(C) \subseteq \{0\}$ y $(g \circ f^{-1})(D) \subseteq \{1\}$, por lo tanto, nuevamente por el Lema de Urysohn, Y es normal y así Y es T_4. $\square$

Teorema 3.16. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua, cerrada y suprayectiva. Si X es T_5, entonces Y es T_5.*

Demostración. Sea $W \subseteq Y$ un subespacio de Y. Entonces $Z = f^{-1}(W)$ es un subespacio de X y por lo tanto Z es normal.

Notemos que $f|_Z : Z \to W$ es continua (1.12) y suprayectiva. Además si C es un cerrado en Z, entonces $C = F \cap Z$ donde F es un cerrado en X, luego, $f|_Z(C) = f(C) = W \cap f(F)$ y como f es cerrada se tiene que $f(C)$ es cerrado en W, de manera que $f|_Z$ es cerrada. Luego, por el Teorema 3.15, W es normal. Por lo tanto Y es T_5. □

Teorema 3.17. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua, cerrada y suprayectiva. Si X es T_6, entonces Y es T_6.*

Demostración. Para demostrar que Y es T_6, debemos probar que Y es T_4 y que todo abierto en Y es F_σ. Como el axioma T_4 se preserva bajo funciones cotinuas, cerradas y suprayectivas (Teorema 3.15), basta probar que todo abierto en Y es F_σ.

Sea U un abierto en Y, como f es continua $V = f^{-1}(U)$, es un abierto en X, pero por hipótesis, en X, todo abierto es F_σ, por lo que escribimos $V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$, donde V_i es cerrado en X para toda i, luego, $U = f(V) = f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(V_i)$, la cual es una unión numerable de cerrados en Y, porque f es cerrada. Esto muestra que U es F_σ y por lo tanto Y es T_6. □

3.2. Productos

En esta sección estamos interesados en estudiar bajo qué condiciones los axiomas de separación que hemos definido son propiedades multiplicativas y factorizables.

Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{i\in I} X_i$. En esta sección vamos a considerar a X con la topología producto definida en 1.13.

El siguiente resultado nos será de gran utilidad en los siguientes teoremas de esta sección.

Teorema 3.18. *Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{i\in I} X_i$. Sea $s \in I$ y para cada $j \in I \setminus \{s\}$ sea a_j un elemento de X_j. Entonces*

$$Y_s = \{x \in \prod_{i\in I} X_i : x_s \in X_s \text{ y para toda } j \in I \setminus \{s\}\ x_j = a_j\}$$

es homeomorfo a X_s.

En consecuencia, para cada $s \in I$ existe un subespacio Y_s de X tal que Y_s es homeomorfo a X_s.

Demostración. Sea $p_s : X \to X_s$ la proyección sobre X_s y $t_s = p_s|_{Y_s} : Y_s \to X_s$ la restricción de p_s a Y_s. Demostraremos que t_s es un homeomorfismo, para esto veremos que t_s es biyectiva, continua y abierta.

Sean $x, y \in Y_s$ tales que $t_s(x) = t_s(y)$. Notemos que para $j \in I \setminus \{s\}$ se tiene que $x_j = a_j = y_j$. Además $x_s = t_s(x) = t_s(y) = y_s$, por lo tanto $x = y$ y tenemos que t_s es inyectiva.

Ahora tomemos un punto $z_s \in X_s$. Consideremos el punto $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ tal que $x_j = a_j$ para toda $j \in I \setminus \{s\}$ y $x_s = z_s$. Entonces $x \in Y_s$ y $t_s(x) = z_s$. Por lo tanto X_s es suprayectiva.

Como t_s es una restricción de la función continua p_s tenemos que t_s es continua [10, Teorema 7.5, pág. 45].

Ahora veamos que t_s es abierta. Sea B un abierto básico en Y_s. Entonces $B = \prod_{i\in I} B_i$ donde $B_j = \{a_j\}$ para $j \in I \setminus \{s\}$ y B_s es un abierto en X_s. Notemos que $t_s(B) = B_s$, por lo que $t_s(B)$ es abierto en X_s. Entonces todo abierto básico B en Y_s es abierto en X_s. Por último, si U es un abierto en Y_s, entonces $U = \bigcup_{i\in I} B_i$, donde cada B_i es un abierto básico de Y_s, luego

$$t_s(U) = t_s(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} t_s(B_i)$$

la cual es una unión de abiertos en X_s, luego $t_s(U)$ es abierto en X_s. Así, concluimos que t_s es abierta, por lo tanto t_s es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 3.19. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es T_0 si y sólo si X_i es T_0 para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es T_0 y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como la propiedad T_0 se preserva bajo subespacios (Teorema 2.10), se tiene que X_i es T_0.

Ahora supongamos que X_i es T_0 para toda $i \in I$. Tomemos dos puntos distintos $x = (x_i)_{i\in I}$ y $y = (y_i)_{i\in I}$ en X, entonces $x_i \neq y_i$ para alguna $i \in I$, como X_i es T_0, se tiene que existe un abierto U_i de X_i tal que $x_i \in U_i$ y $y_i \notin U_i$ o $y_i \in U_i$ y $x_i \notin U_i$, en cualquier caso, $p_i^{-1}(U_i)$ es un abierto en X tal que $x \in p_i^{-1}(U_i)$ y $y \notin p_i^{-1}(U_i)$ o $y \in p_i^{-1}(U_i)$ y $x \notin p_i^{-1}(U_i)$, y por lo tanto X es T_0. $\square$

Lema 3.20. *Sean X y Y espacios topológicos no vacíos tales que $X \times Y$ es $T_{\frac{1}{4}}$. Entonces X y Y son $T_{\frac{1}{4}}$ y además al menos uno de ellos es T_1.*

Demostración. Por el Teorema 3.18, cada uno de los espacios X y Y es homeomorfo a un subespacio de $X \times Y$ y como la propiedad $T_{\frac{1}{4}}$ se preserva bajo subespacios (2.18), se tiene que X y Y son $T_{\frac{1}{4}}$.

Ahora supongamos que ninguno de los espacios X y Y es T_1. Entonces existen elementos distintos $x_1, x_2 \in X$ tales que todo abierto que tenga a x_1 también tiene a x_2, es decir $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$. Análogamente existen elementos distintos $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \in \overline{\{y_2\}}$. Sea $F = \{(x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_1)\} \subseteq X \times Y$, notemos que $(x_1, y_2) \notin F$, como $X \times Y$ es $T_{\frac{1}{4}}$, existe $A \subseteq X \times Y$ tal que $F \subseteq A$, $(x_1, y_2) \notin A$ y A es abierto o cerrado.

Si A es cerrado, entonces $(X \times Y) \setminus A$ es abierto, de manera que existen abiertos U, V en X y Y respectivamente, tales que $x_1 \in U$ y $y_2 \in V$ y $(U \times V) \cap F = \emptyset$, pero, puesto que $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$ se tiene que $x_2 \in U$, de manera que $(x_2, y_2) \in U \times V$ y como $(x_2, y_2) \in F$ resulta que $(U \times V) \cap F \neq \emptyset$, una contradicción.

En caso de que A sea abierto, como $(x_1, y_1) \in F \subseteq A$ podemos tomar dos abiertos U y V en X y Y, respectivamente, tales que $x_1 \in U$, $y_1 \in V$ y $U \times V \subseteq A$. Como $y_1 \in \overline{\{y_2\}}$ entonces, $y_2 \in V$, de manera que $(x_1, y_2) \in A$, nuevamente una contradicción. Con esto concluimos que X es T_1 o Y es T_1. $\square$

Teorema 3.21. *Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Si $X = \prod_{i\in I} X_i$ es $T_{\frac{1}{4}}$, entonces X_i es $T_{\frac{1}{4}}$ para toda $i \in I$, además, existe a lo más un factor X_i que no es T_1.*

Demostración. Por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de

X y como la propiedad $T_{\frac{1}{4}}$ se preserva bajo subespacios (2.18), se tiene que X_i es $T_{\frac{1}{4}}$ para toda $i \in I$.

Supongamos que existe dos factores X_i y X_j que no son T_1, como $X_i \times X_j$ es homeomorfo a un subespacio de X se tiene que $X_i \times X_j$ es $T_{\frac{1}{4}}$, pero esto contradice nuestro Lema 3.20. $\square$

Como consecuencia del Lema 3.20, tenemos que en general, el producto de dos espacios $T_{\frac{1}{4}}$, no es $T_{\frac{1}{4}}$, por ejemplo, si consideramos el espacio $(\mathbb{Z}, \tau)$ con la topología definida en el Ejemplo 2.16, se tiene que $(\mathbb{Z}, \tau) \times (\mathbb{Z}, \tau)$, no es $T_{\frac{1}{4}}$, ya que $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es T_1 (porque no es T_D, como se vio en 2.23). De hecho, si X es $T_{\frac{1}{4}}$ y Y es T_i con $i = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, D\}$ pero no es T_1, entonces $X \times Y$ no es $T_{\frac{1}{4}}$.

En el siguiente resultado daremos una condición bajo la cual el producto de dos espacios $T_{\frac{1}{4}}$ es $T_{\frac{1}{4}}$.

Lema 3.22. *Sea X y Y espacios topológicos no vacíos. Si X es $T_{\frac{1}{4}}$ y Y es T_1, entonces $X \times Y$ es $T_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Sean $F = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\} \subseteq X \times Y$ y $(x_0, y_0) \in (X \times Y) \setminus F$. Consideremos las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$. Definamos

$$G = \{(x_i, y_i) \in F : y_i = y_0\} \quad \text{y} \quad H = \{(x_i, y_i) \in F : y_i \neq y_0\}$$

y observemos que $F = G \cup H$, $x_0 \notin p_1(G)$ y $y_0 \notin p_2(H)$.

Como $p_1(G)$ es un subconjunto finito de X y X es $T_{\frac{1}{4}}$, existe $A \subseteq X$ tal que $p_1(G) \subseteq A$, $x_0 \notin A$ y A es abierto o cerrado.

Si A es cerrado en X, entonces $A \times \{y_0\}$ es cerrado en $X \times Y$, además, como $G \subseteq p_1(G) \times \{y_0\}$ y $p_1(G) \subseteq A$, resulta que $G \subseteq A \times \{y_0\}$ y $(x_0, y_0) \notin A \times \{y_0\}$. También, notemos que $p_2(H)$ es un subconjunto finito de Y, el cual es T_1, por lo que $p_2(H)$ es cerrado en Y, luego, el producto $X \times p_2(H)$ es cerrado en $X \times Y$, además $H \subseteq X \times p_2(H)$ y $(x_0, y_0) \notin X \times p_2(H)$. Sea $B = (A \times \{y_0\}) \cup (X \times p_2(H))$ el cual es un cerrado de $X \times Y$ tal que $F = G \cup H \subseteq B$ y $(x_0, y_0) \notin B$. Por lo tanto esta caso está resuelto.

Si A es abierto, entonces $A \times Y$, es un abierto en $X \times Y$ que contiene a G y $(x_0, y_0) \notin A \times Y$, pero como $\{y_0\}$ es cerrado en Y, el conjunto $X \times (Y \setminus \{y_0\})$ también es un abierto en $X \times Y$ que contiene a H, además $(x_0, y_0) \notin X \times$

$(Y \setminus \{y_0\})$, de manera que $B = (A \times Y) \cup (X \times (Y \setminus \{y_0\}))$ es un abierto tal que $F \subseteq B$ y $(x_0, y_0) \notin B$. De esta manera concluimos que $X \times Y$ es $T_{\frac{1}{4}}$. $\square$

Ahora, es fácil probar que el producto arbitrario de espacios $T_{\frac{1}{4}}$ es $T_{\frac{1}{4}}$, siempre que todos los espacios sean T_1, salvo a lo más uno de ellos. Para esto utilizaremos el hecho de que el producto arbitrario de espacios T_1 es T_1, cuya demostración veremos un poco más adelante (Teorema 3.33).

Teorema 3.23. *Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos tales que para cada $i \in I$, X_i es $T_{\frac{1}{4}}$ y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Si todos los X_i son T_1 salvo a lo más uno de ellos, entonces X es $T_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Observemos que X es homeomorfo a $X_i \times \prod_{j \neq i} X_j$, entonces como el producto de espacios T_1 es T_1 (Teorema 3.33), tenemos el producto cartesiano de un espacio $T_{\frac{1}{4}}$ y un espacio T_1, luego por el Lema 3.22, X es $T_{\frac{1}{4}}$. $\square$

Teorema 3.24. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos.*

a) Si $X = \prod_{i \in I} X_i$ es T_D, entonces, X_i es T_D para toda $i \in I$.

b) Si I es finito y X_i es T_D para toda $i \in I$, entonces $X = \prod_{i \in I} X_i$ es T_D.

Demostración. a) Supongamos que X es T_D y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como la propiedad T_D se preserva bajo subespacios (Teorema 2.26), se tiene que X_i es T_D.

b) Sea $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\hat{x} = (x_i)_{i \in I} \in X = \prod_{1 \in I} X_i$. Por el inciso c) del Teorema 2.21, tenemos que para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\{x_i\} = U_i \cap C_i$ con U_i abierto en X_i y C_i cerrado en X_i. Entonces:

$$\{\hat{x}\} = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i \cap C_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \left[p_i^{-1}(U_i) \cap p_i^{-1}(C_i) \right] = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i) \cap \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(C_i).$$

Como p_i es continua, $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i)$ es abierto en X, y $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(C_i)$ es cerrado en X. Por lo tanto X es T_D. $\square$

El siguiente teorema nos muestra que el producto infinito de espacios T_D en general no es T_D.

Teorema 3.25. *Sea* $\{X_i : i \in I\}$ *una familia infinita de espacios topológicos no vacíos* T_D *tal que* X_i *no es* T_1 *para ninguna* i*, entonces* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *no es* T_D*.*

Demostración. Como para toda i, X_i no es T_1, por el inciso c) del Teorema 2.52, existe $z_i \in X_i$ tal que $\{z_i\}' \neq \emptyset$. Sean $\hat{z} = (z_i)_{i\in I} \in X$ y $Y = \prod_{i\in I} \overline{\{z_i\}}$. Vamos a probar que $\{\hat{z}\}'_Y$ no es cerrado en Y, donde $\{\hat{z}\}'_Y$ es el derivado de $\{\hat{z}\}$ en el subespacio Y. Para esto primero veamos que $\{\hat{z}\}'_Y = Y \setminus \{\hat{z}\}$.

En efecto, es evidente que $\{\hat{z}\}'_Y \subseteq Y \setminus \{\hat{z}\}$. Por otro lado, sean $\hat{x} \in Y \setminus \{\hat{z}\}$ y U un abierto básico de $\hat{x}$ en Y, entonces $p_i(\hat{x}) \in \overline{\{z_i\}}$ por lo que todo abierto que contenga a $p_i(\hat{x})$ también contiene a z_i, de manera que $z_i \in p_i(U)$ para toda i, entonces $\hat{z} \in U$, por lo tanto $\hat{x} \in \{\hat{z}\}'_Y$ y tenemos que $Y \setminus \{\hat{z}\} \subseteq \{\hat{z}\}'_Y$, así $Y \setminus \{\hat{z}\} = \{\hat{z}\}'_Y$.

Ahora veamos que $Y \setminus \{\hat{z}\}$ no es cerrado en Y. Sea U un abierto básico que tiene a $\hat{z}$ en Y, entonces $U = Y \cap \prod_{i\in I} U_i$, donde $\prod_{i\in I} U_i$ es un abierto en X. Entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $U_i \neq X_i$ es un abierto que tiene a z_i en X_i para toda $i \in J$ y $U_i = X_i$ para toda $i \in I \setminus J$. Puesto que $\{z_i\}' = \overline{\{z_i\}} \setminus \{z_i\} \neq \emptyset$ para toda i, existe $w_i \in \overline{\{z_i\}} \setminus \{z_i\}$. Tomemos un punto $\hat{y} \in Y$ tal que $y_i = z_i$ si $i \in J$ y $y_i = w_i$ si $i \in I \setminus J$, entonces $\hat{y} \in U$, y $\hat{y} \neq \hat{z}$, de manera que todo abierto que tenga a $\hat{z}$ en Y contiene puntos de $Y \setminus \{\hat{z}\}$, esto significa que $\hat{z} \in \overline{Y \setminus \{\hat{z}\}}$ y por lo tanto $Y \setminus \{\hat{z}\}$ no es cerrado.

Finalmente, puesto que $Y \setminus \{\hat{z}\} = \{\hat{z}\}'_Y \in Y$ y no es cerrado en Y, tenemos que el subespacio Y no es T_D. De esta manera, tenemos que X no es T_D, pues si lo fuera, cualquier subespacio también sería T_D. □

El teorema anterior nos dice que si un producto infinito de espacios T_D es T_D, entonces al menos un factor es T_1.

Teorema 3.26. *Sean* $\{X_i : i \in \{= 1, \ldots, n\}\}$ *una familia finita de espacios topológicos no vacíos y* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$*. Entonces* X *es* $T_{\frac{1}{2}}$ *si y sólo si se da una de las siguientes condiciones:*

a) X_i *es* T_1 *para toda* i*,*

b) para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$*,* X_j *es* $T_{\frac{1}{2}}$ *pero no* T_1 *y* X_i *tiene la topología discreta, para toda* $i \neq j$*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que X es $T_{\frac{1}{2}}$ y que a) no es cierto. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que X_j es $T_{\frac{1}{2}}$ pero no T_1. Demostraremos que X_i tiene la topología discreta para toda $i \neq j$. Sea $i \neq j$, supongamos que X_i no tiene la topología discreta, entonces, existe $x_i \in X_i$ tal que $\{x_i\}$ no es abierto en X_i. Como X_j es $T_{\frac{1}{2}}$ y no es T_1, existe un $x_j \in X_j$ tal que $\{x_j\}$ no es cerrado en X_j. Definamos $x = (x_k)_{k \in I} \in X$, como X es $T_{\frac{1}{2}}$, $\{x\}$ es abierto o cerrado. Sea p_k la proyección sobre la k-esima coordenada, entonces, si $\{x\}$ es abierto, como la proyección p_i es abierta, tenemos que $p_i(x) = \{x_i\}$ es abierto, una contradicción. Si $\{x\}$ es cerrado, entonces $\{x_k\}$ es cerrado para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que $p_j(x) = \{x_j\}$ es cerrado, nuevamente una contradicción. Por lo tanto, X_i tiene la topología discreta.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que *a*) es cierta. Como el producto de espacios T_1 es T_1 (lo cual se demostrará en el Teorema 3.33), tenemos que X es T_1, y por lo tanto es $T_{\frac{1}{2}}$.

Si la afirmación b) es cierta, entonces para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, X_j es $T_{\frac{1}{2}}$ pero no T_1, y X_i tiene la topología discreta para toda $i \neq j$. Sea $x \in X$, podemos escribir $\{x\} = \prod_{k=1}^{n}\{x_k\} = \prod_{k \neq j}\{x_k\} \times \{x_j\}$, como $x_j \in X_j$, tenemos que $\{x_j\}$ es abierto o cerrado y puesto que X_k con $k \neq j$ tiene la topología discreta, entonces, $\{x\}$ es abierto o cerrado, por lo tanto X es $T_{\frac{1}{2}}$. $\square$

Teorema 3.27. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia infinita de espacios topológicos no vacíos tales que para cada $i \in I$, $|X_i| > 2$. Entonces $X = \prod_{i \in I} X_i$ es $T_{\frac{1}{2}}$ si y sólo si X_i es T_1 para toda $i \in I$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Podemos escribir $\{x\} = \prod_{i \in I}\{x_i\}$. Observemos que para que $\{x\}$ sea abierto en X, tiene que existir un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que $X_i = \{x_i\}$ para toda $i \in I \setminus J$ y $\{x_i\}$ es abierto en X_i para toda $i \in J$, pero como $|X_i| > 2$ para toda i, resulta que $\{x\}$ no es abierto porque no existe ningún abiero básico contenido en $\{x\}$. Ahora, puesto que X es $T_{\frac{1}{2}}$, se tiene que $\{x\}$ es cerrado, así X es T_1, y por el Teorema 3.33 resulta que cada factor X_i es T_1.

Ahora supongamos que X_i es T_1 para toda $i \in I$, entonces nuevamente por el Teorema 3.33, resulta que X es T_1 y por lo tanto es $T_{\frac{1}{2}}$. $\square$

Teorema 3.28. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia infinita de espacios topológicos no vacíos tales que para cada $i \in I$, $|X_i| > 2$. Entonces $X = \prod_{i \in I} X_i$ es $T_{\frac{3}{4}}$ si y sólo si X_i es T_1 para toda $i \in I$.*

Demostración. Si X es $T_{\frac{3}{4}}$, entonces es $T_{\frac{1}{2}}$, luego, por el Teorema 3.27, X_i es T_1 para toda i.

Ahora supongamos que X_i es T_1 para toda $i \in I$. Por el Teorema 3.33, X es T_1 y por lo tanto es $T_{\frac{3}{4}}$. □

Teorema 3.29. *[10, Ejercicio 8.D.3 pág. 58] Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces para toda famila $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $A_i \subseteq X_i$ para toda i, se tiene que $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.*

Teorema 3.30. *[10, Ejercicio 8.D.3 pág. 58] Si $\{X_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$ es una familia finita de espacios topológicos no vacíos, entonces para toda famila $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $A_i \subseteq X_i$ para toda i, se tiene que $\operatorname{int}(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n \operatorname{int} A_i$.*

Lema 3.31. *Sean $\{X_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$ una familia finita de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Si $U = \prod_{i=i}^n U_i$ es abierto regular en X, entonces U_i es abierto regular en X_i para toda i.*

Demostración. Si $U = \prod_{i=i}^n U_i$ es abierto regular, por los Teoremas 3.29, y 3.30 se tiene:

$$U = \prod_{i=i}^n U_i = \operatorname{int}(\overline{\prod_{i=i}^n U_i}) = \operatorname{int}(\prod_{i=i}^n \overline{U_i}) = \prod_{i=1}^n \operatorname{int} \overline{U_i}$$

de manera que $U_i = \operatorname{int} \overline{U_i}$ y por lo tanto U_i es abierto regular para toda i. □

Teorema 3.32. *Sean $\{X_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$ una familia finita de espacios topológicos no vacíos tales que para cada i, X_i es $T_{\frac{3}{4}}$ y $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Entonces X es $T_{\frac{3}{4}}$, si y sólo si, se da una de las siguientes condiciones:*

a) X_i es T_1 para toda i.

b) para alguna $j \in \{1,\dots,n\}$, X_j es $T_{\frac{3}{4}}$ pero no T_1 y X_i tiene la topología discreta, para toda $i \neq j$.

Demostración. Supongamos que X es $T_{\frac{3}{4}}$ y que a) no es cierto. Entonces existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que X_j es $T_{\frac{3}{4}}$ pero no T_1. Demostraremos que X_i tiene la topología discreta para toda $i \neq j$. Sea $i \neq j$, supongamos que X_i no tiene la topología discreta, entonces, existe $x_i \in X_i$ tal que $\{x_i\}$ no es abierto en X_i. Como X_j es $T_{\frac{3}{4}}$ y no es T_1, existe un $x_j \in X_j$ tal que $\{x_j\}$ no es cerrado en X_j. Definamos $x = (x_k)_{k\in I} \in X$, como X es $T_{\frac{3}{4}}$, $\{x\}$ es abierto regular o cerrado. Sea p_k la proyección sobre la k-esima coordenada. Si $\{x\}$ es abierto regular, entonces como la proyección p_i es abierta, tenemos por el Teorema 3.31, $p_i(x) = \{x_i\}$ es abierto regular y por lo tanto es abierto, pero esto es una contradicción. Si $\{x\}$ es cerrado, entonces $\{x_k\}$ es cerrado para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que $p_j(x) = \{x_j\}$ es cerrado, nuevamente una contradicción. Por lo tanto, X_i tiene la topología discreta.

Ahora supongamos a) es cierta. Como el producto de espacios T_1 es T_1 (3.33), tenemos que X es T_1, y por lo tanto es $T_{\frac{3}{4}}$.

Si la afirmación b) es cierta, entonces para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, X_j es $T_{\frac{3}{4}}$ pero no T_1, y X_i tiene la topología discreta para toda $i \neq j$. Sea $x \in X$, podemos escribir $\{x\} = \prod_{k=1}^{n}\{x_k\} = \prod_{k\neq j}\{x_k\} \times \{x_j\}$, como $\{x_j\} \in X_j$, tenemos que $\{x_j\}$ es abierto regular o cerrado y puesto que X_k con $k \neq j$ tiene la topología discreta, entonces, $\{x\}$ es abierto regular o cerrado. Por lo tanto X es $T_{\frac{3}{4}}$. □

Teorema 3.33. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es T_1 si y sólo si X_i es T_1 para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es T_1 y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como la propiedad T_1 se preserva bajo subespacios (2.56), se tiene que X_i es T_1.

Ahora supongamos que X_i es T_1 para toda $i \in I$. Tomemos dos puntos distintos $\hat{x} = (x_i)_{i\in I}$ y $\hat{y} = (y_i)_{i\in I}$ en X, entonces $x_i \neq y_i$ para alguna $i \in I$, como X_i es T_1, se tiene que existen dos abiertos U_i y V_i de X_i, tales que $x_i \in U_i$ y $y_i \notin U_i$ y además $y_i \in V_i$ y $x_i \notin V_i$. Tomando $p_i^{-1}(U_i)$ y $p_i^{-1}(V_i)$ los cuales son abiertos en X, se tiene que $\hat{x} \in p_i^{-1}(U_i)$, $\hat{y} \notin p_i^{-1}(U_i)$ y $\hat{y} \in p_i^{-1}(V_i)$ y $\hat{x} \notin p_i^{-1}(V_i)$. Por lo tanto X es T_1. □

Teorema 3.34. *[1, Teorema 30.1, b) pág. 71] Sean X y Y espacios topológicos no vacíos y $f : X \to Y$. Si f es continua, entonces para cada sucesión convergente $\{x_n\}_n \in \mathbb{N}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en X, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f(x).*

Teorema 3.35. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es US si y sólo si X_i es US para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es US y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como la propiedad US se preserva bajo subespacios, se tiene que X_i es US.

Ahora supongamos que X_i es US para toda $i \in I$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{a} = (a_i)_{i\in I}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{b} = (b_i)_{i\in I}$, con $\hat{a} \neq \hat{b}$. Entonces $a_k \neq b_k$ para alguna $k \in I$, como p_k es continua para toda $k \in I$, por el Teorema 3.34, $\{p_k(\{x_n\})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X_k que converge a a_k, pero también converge a b_k y como X_i es US, tenemos que $a_k = b_k$, lo que es absurdo. Esto prueba que $\hat{a} = \hat{b}$ y por lo tanto X es US. $\square$

El siguiente resultado muestra que el producto de dos espacios KC no necesariamente es KC.

Ejemplo 3.36. *La compactación unipuntual de los racionales,* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \cup \{p\}$ *donde* $p \notin \mathbb{Q}$ *es* KC*, sin embargo* $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ *no es* KC*.*

Demostración. Sea $C \subseteq \mathbb{Q}^*$ compacto. Tenemos dos casos:

Caso I) $p \notin C$. En este caso tenemos que $C \subseteq \mathbb{Q}$, entonces C es compacto en $\mathbb{Q}$, de manera que $\mathbb{Q}^* \setminus C$ es abierto en $\mathbb{Q}^*$ y por lo tanto C es cerrado en $\mathbb{Q}^*$.

Caso II) $p \in C$. Supongamos que C no es cerrado en $\mathbb{Q}^*$. Entonces existe $x \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}^*}(C) \setminus C = \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}^*}(C \cap \mathbb{Q}) \setminus C$, luego como $C \subseteq \mathbb{Q}$ es compacto existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C \cap \mathbb{Q}$ que converge a x [10, 17.4, pág. 118]. Como $x \notin C$ y cada x_n pertenece a C, podemos suponer que los puntos x_n son todos diferentes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar un abierto U_n en $\mathbb{Q}$ de tal manera que $U_n \cap \{x_m : m \in \mathbb{N}\} = \{x_n\}$.

Definamos $B = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que B es compacto (Lema 2.63), entonces $(Q^* \setminus B)$ es abierto en $\mathbb{Q}^*$. Además la familia $D = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup (Q^* \setminus B)$ es una cubierta abierta de C, pero D no tiene una subcubierta finita para C, pues B es numerable. Esto contradice la compacidad de C. De esta manera concluimos que C es cerrado y tenemos que $\mathbb{Q}^*$ es KC.

Ahora veamos que $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ no es KC, para esto demostraremos que la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{Q}^*\}$ es un conjunto compacto que no es cerrado.

Definamos $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ por $f(q) = (q, q)$ para toda $q \in \mathbb{Q}^*$. Ésta es una función continua porque lo es entrada a entrada. Además, como la imagen continua de un compacto es compacto, se tiene que $f(\mathbb{Q}^*) = \Delta$ es compacto.

Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ compacto en $\mathbb{Q}$. Notemos que $\{(\mathbb{Q}^* \setminus K) \times (-\epsilon, \epsilon) : \epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}\}$ es una base local para el punto $(p, 0) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$.

Afirmamos que $((-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q})\setminus K\neq\emptyset$ para toda $\epsilon\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$. Si suponemos que $((-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q})\setminus K=\emptyset$, entonces $(-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q}\subseteq K$.

Tomemos un número irracional $z\in(-\epsilon,\epsilon)$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(-\epsilon,\epsilon)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = z$. De modo que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en K que no converge a ningún punto de K, pues $K\subseteq C$. Esto contradice la compacidad de K [10, 17.4, pág. 118] y prueba que $((-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q})\setminus K\neq\emptyset$.

Tomemos $x\in((-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q})\setminus K\neq\emptyset$, y observemos que $(p,0)\in(\mathbb{Q}^*\setminus K)\times((-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q})$, pero también $(x,x)\in(\mathbb{Q}^*\setminus K)\times((-\epsilon,\epsilon)\cap\mathbb{Q})$, con esto hemos mostrado que todo abierto que tiene a $(p,0)$ interseca a la diagonal. De modo que $(p,0)\in\overline{\Delta}$, mientras que $(p,0)\notin\Delta$, por lo tanto la diagonal Δ es un conjunto compacto que no es cerrado y así tenemos que el espacio $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*$ no es KC. □

Teorema 3.37. *Sean X,Y espacios topológicos no vacíos. Si X es KC y Y es T_2 entonces $X\times Y$ es KC.*

Demostración. Sea C un compacto en $X\times Y$ y definamos $p_1:X\times Y\to X$ como $p_1(x,y)=x$, y $p_2:X\times Y\to Y$ como $p_2(x,y)=y$, es decir P_1 y P_2 son las respectivas proyecciones sobre X y Y.

Supongamos que C no es cerrado, entonces existe $(x,y)\in\overline{C}$ tal que $(x,y)\notin C$.

Primero veamos que $x\in p_1(C)$. Sea W un abierto en X tal que $x\in W$, luego $W\times Y$ es un abierto en $X\times Y$ que tiene a (x,y) y como $(x,y)\in\overline{C}$ se tiene que $(W\times Y)\cap C\neq\emptyset$. Por lo tanto, si tomamos $(a,b)\in(W\times Y)\cap C\neq\emptyset$, resulta que $a\in W$ y $a\in p_1(C)$ es decir $W\cap p_1(C)\neq\emptyset$. Hemos mostrado que $x\in\overline{p_1(C)}$ el cual es compacto en X y puesto que X es KC se tiene que $p_1(C)$ es cerrado y así tenemos que $x\in\overline{p_1(C)}=p_1(C)$.

Ahora observemos que como $(x,y)\notin C$ y $x\in p_1(C)$ se tiene que $(x,y)\notin p_1^{-1}(x)\cap C$, y notemos que $K=p_1^{-1}(x)\cap C$ es compacto porque p_1 es continua, $\{x\}$ es cerrado y C es compacto.

Consideremos $p_2(K)$ el cual es compacto en Y, además $y\notin p_2(K)$ de manera que existen abiertos ajenos U y V tales que $y\in U$, $p_2(K)\subseteq V$ y $U\cap V=\emptyset$ (Lema 2.82), luego $\overline{U}\cap V=\emptyset$.

A continuación definamos $A=(X\times\overline{U})\cap C$. Veamos que $x\notin p_1(A)$. Esto lo hacemos nuevamente por contradicción. Si $x\in p_1(A)$ existe $z\in p_1^{-1}(x)$ tal que $(x,z) \in A$, entonces $z \in \overline{U}$ y $(x,z) \in C$, luego $(x,z) \in p_1^{-1}(x) \cap C$, es decir $(x,z) \in K$, por lo que $p_2(x,z) = z \in p_2(K)$, de manera que $z \in V$, así tenemos que $z \in \overline{U} \cap V$, pero esto contradice que $\overline{U}$ y V son ajenos, por lo tanto $x \notin p_1(A)$.

Por último notemos que A es cerrado en C, luego A es compacto, por lo que $p_1(A)$ también es compacto y como X es KC, resulta que $p_1(A)$ es cerrado en X. Ahora, como $x \notin p_1(A) = \overline{p_1(A)}$, existe un abierto G en X tal que $x \in G$ y $G \cap p_1(A) = \emptyset$, veamos que esto implica que $(G \times U) \cap C = \emptyset$, de otro modo existe $(a,b) \in (G \times U) \cap C \subseteq (X \times \overline{U}) \cap C = A$, de manera que $a \in G$ y $p_1(a,b) = a \in p_1(A)$, es decir $a \in G \cap p_1(A)$, lo cual no es posible.

Hemos visto que $(G \times U) \cap C = \emptyset$, pero $G \times U$ es un abierto en $X \times Y$ tal que $(x,y) \in G \times U$, entonces $(x,y) \notin \overline{C}$, en contradicción con nuestra suposición de que $(x,y) \in \overline{C}$, por lo tanto $(x,y) \in C$ y de esta manera concluimos que C es cerrado. $\square$

Teorema 3.38. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es T_2 si y sólo si X_i es T_2 para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es T_2 y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como la propiedad T_2 se preserva bajo subespacios (Teorema 2.87), se tiene que X_i es T_2.

Ahora supongamos que X_i es T_2 para toda $i \in I$. Tomemos dos puntos distintos $x = (x_i)_{i\in I}$ y $y = (y_i)_{i\in I}$ en X, entonces $x_i \neq y_i$ para alguna $i \in I$. Como X_i es T_2, se tiene que existen dos abiertos U_i y V_i de X_i, tales que $x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$ y $U_i \cap V_i = \emptyset$. Tomando los abiertos $p_i^{-1}(U_i)$ y $p_i^{-1}(V_i)$ en X, se tiene que $x \in p_i^{-1}(U_i)$, $y \in p_i^{-1}(V_i)$, y además $p_i^{-1}(U_i) \cap p_i^{-1}(V_i) = p_i^{-1}(U_i \cap V_i) = p_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto X es T_2. $\square$

Teorema 3.39. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es $T_{2\frac{1}{2}}$ si y sólo si X_i es $T_{2\frac{1}{2}}$ para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es $T_{2\frac{1}{2}}$ y sea $i \in I$. Por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como el axioma $T_{2\frac{1}{2}}$ se preserva bajo subespacios (Teorema 2.92), se tiene que X_i es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Ahora supongamos que X_i es $T_{2\frac{1}{2}}$ para toda $i \in I$. Tomemos dos puntos distintos $\hat{x} = (x_i)_{i\in I}$ y $\hat{y} = (y_i)_{i\in I}$ en X, entonces $x_i \neq y_i$ para alguna $i \in I$, como X_i es $T_{2\frac{1}{2}}$, se tiene que existen dos abiertos U_i y V_i de X_i, tales que

$x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$ y $\overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset$. Tomando los abiertos $p_i^{-1}(U_i)$ y $p_i^{-1}(V_i)$ en X, se tiene que $\hat{x} \in p_i^{-1}(U_i)$, $\hat{y} \in p_i^{-1}(V_i)$, y además $\overline{p_i^{-1}(U_i)} \cap \overline{p_i^{-1}(V_i)} \subseteq p_i^{-1}(\overline{U_i}) \cap p_i^{-1}(\overline{V_i}) = p_i^{-1}(\overline{U_i} \cap \overline{V_i}) = p_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto X es $T_{2\frac{1}{2}}$. □

Teorema 3.40. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es funcionalmente Hausdorff si y sólo si X_i es funcionalmente Hausdorff para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es funcionalmente Hausdorff y sea $i \in I$, por el teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como el ser funcionalmente Hausdorff se preserva bajo subespacios, se tiene que X_i es funcionalmente Hausdorff.

Ahora supongamos que X_i es funcionalmente Hausdorff para toda i, y tomemos dos puntos distintos $\hat{x} = (x_i)_{i\in I}$, $\hat{y} = (y_i)_{i\in I}$ en X. Entonces existe $j \in I$, tal que $x_j \neq y_j$. Como X_j es funcionalmente Hausdorff, existe una función continua $f_j : X_j \to [0,1]$ tal que $f_j(x_j) = 0$ y $f_j(y_j) = 1$, por lo tanto la función $f = f_j \circ p_j : X \to [0,1]$, es continua y cumple que $f(\hat{x}) = (f_j \circ p_j)(\hat{x}) = f_j(p_j(\hat{x})) = f_j(x_j) = 0$ y $f(\hat{y}) = f_j \circ p_j(\hat{y}) = f_j(p_j(\hat{y})) = f_j(y_j) = 1$. Por lo tanto X es funcionalmente Hausdorff. □

Teorema 3.41. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es T_3 si y sólo si X_i es T_3 para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es T_3 y sea $i \in I$. Por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como el axioma T_3 se preserva bajo subespacios (Teorema 2.103), se tiene que X_i es T_3.

Para la segunda parte probaremos primero que si cada factor X_i regular, entonces, X es regular. Supongamos que X_i es regular para toda $i \in I$. Tomemos un punto $\hat{x} = (x_i)_{i\in I}$ en X, y un abierto subbásico U que tiene a $\hat{x}$ en X. Entonces existen $i \in I$ y un abierto U_i en X_i tales que $p_i^{-1}(U_i) = U$. Puesto que X_i es regular se tiene, por el Teorema 2.98 que existe un abierto V_i en X_i, tal que $x_i \in V_i \subseteq \mathrm{Cl}_{X_i}(V_i) \subseteq U_i$; luego, $p_i^{-1}(V_i)$ es un abierto en X, tal que $\hat{x} \in p_i^{-1}(V_i) \subseteq p_i^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V_i)) \subseteq p_i^{-1}(U_i) = U$, recordemos que $p_i : X \to X_i$ es una función abierta y continua por lo que $\mathrm{Cl}_X(V) = \mathrm{Cl}_X(p_i^{-1}(V_i)) = p_i^{-1}(\mathrm{Cl}_{X_i}(V_i))$ por lo tanto tenemos que V es un abierto en X tal que $x \in V \subseteq \mathrm{Cl}_X(V) \subseteq U$, lo cual prueba X es regular.

Por último, si X_i es T_3 para toda $i \in I$, entonces X_i es regular y T_0 para toda $i \in I$, luego, por el Teorema 3.19, se tiene que X es T_0 y por lo tanto se concluye que X es T_3. □

Teorema 3.42. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ si y sólo si X_i es $T_{3\frac{1}{2}}$ para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es $T_{3\frac{1}{2}}$ y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como el axioma $T_{3\frac{1}{2}}$ se preserva bajo subespacios (2.112), se tiene que X_i es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Para la segunda parte supongamos que X_i es completamente regular para toda $i \in I$. Tomemos un punto $\hat{x} = (x_i)_{i\in I}$ en X, y un abierto subbásico U que tiene a $\hat{x}$ en X. Entonces existen $i \in I$ y un abierto U_i en X_i tales que $p_i^{-1}(U_i) = U$. Puesto que X_i es completamente regular y U_i es un abierto de x_i, se tiene por el Teorema 2.106 que existe una función continua $f_i : X_i \to [0,1]$, tal que $f_i(x_i) = 0$ y $f_i(X_i \setminus U_i) \subseteq \{1\}$. Definamos $f = f_i \circ p_i$. Entonces f es continua y además $f(x) = f_i(p_i(x)) = f_i(x_i) = 0$. También notemos que si $\hat{y} = (y_i)_{i\in I} \in X \setminus U = X \setminus p_i^{-1}(U_i) = p_i^{-1}(X_i) \setminus p_i^{-1}(U_i) = p_i^{-1}(X_i \setminus U_i)$, entonces $p_i(\hat{y}) = y_i \in X_i \setminus U_i$, luego $f(\hat{y}) = f_i(p_i(\hat{y})) = f_i(y_i) = 1$. Por lo tanto, $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$ y así, X es completamente regular.

Por último, si X_i es $T_{3\frac{1}{2}}$ para toda $i \in I$, entonces X_i es completamente regular y T_0 para toda $i \in I$, luego por el Teorema 3.19, se tiene que X es T_0 y por lo tanto X es $T_{3\frac{1}{2}}$. $\square$

Teorema 3.43. *El producto de espacios T_4 no necesariamente es T_4.*

Demostración. En el Ejemplo 2.123, demostramos que la recta de Sorgenfrey S es T_4, pero en el Teorema 2.124 vimos que $S \times S$ no es T_4. $\square$

Teorema 3.44. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Si $X = \prod_{i\in I} X_i$ es T_5, entonces X_i es T_5 para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es T_5 y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como el axioma T_5 se preserva bajo subespacios, se tiene que X_i es T_5. $\square$

Teorema 3.45. *Sean X y Y espacios topológicos no vacíos T_1. Si $X \times Y$ es T_5, entonces se da alguna de las siguientes condiciones:*

a) X es T_6.

b) Todo subconjunto infinito numerable de Y es cerrado.

Demostración. Supongamos que $a)$ y $b)$ no se cumplen. Entonces X no es T_6, como X es T_1 se tiene que X no es perfectamente normal, es decir, existe un cerrado $W \subseteq X$ tal que W no es G_δ. Sea $N = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto infinito numerable de Y que no es cerrado. Entonces existe $p \in Y$ tal que $p \in \overline{N}$ pero $p \notin N$. Vamos a demostrar que $M = (X \times Y) \setminus (W \times \{p\})$ no es un subespacio normal de $X \times Y$.

Notemos que M es abierto en $X \times Y$ porque $W \times \{p\}$ es un cerrado en $X \times Y$. Definamos

$$H = W \times (Y \setminus \{p\}) \quad \text{y} \quad K = (X \setminus W) \times \{p\}$$

y observemos que $H = (W \times Y) \cap M$ y como $W \times Y$ es cerrado en $X \times Y$ resulta que H es cerrado en M. Análogamente, $K = (X \times \{p\}) \cap M$ y como $X \times \{p\}$ es cerrado en $X \times Y$, tenemos que K es cerrado en M.

Sean U y V abiertos de M tales que $H \subseteq U$ y $K \subseteq V$. Definamos para cada $n_i \in N$, el conjunto $U_i = \{x \in X : (x, n_i) \in U\}$. Como $p \notin N$, se tiene que para toda $x \in W$ el punto $(x, n_i) \in H \subseteq U$. Por lo tanto $W \subseteq U_i$ para toda $n_i \in N$. Además U_i es abierto en X para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $W \subseteq \bigcap_{i \in N} U_i$ y como W no es G_δ, existe $t \in \bigcap_{i \in N} U_i$ tal que $t \notin W$, entonces $(t, p) \in K$ y por lo tanto $(t, p) \in V$. Notemos que como M es abierto en $X \times Y$ y V es abierto en M, entonces V es abierto en $X \times Y$. De manera que existen dos abiertos A y B en X y Y, respectivamente, tales que $(t, p) \in A \times B \subseteq V$. Como $p \in \overline{N}$ y $p \in B$, tenemos que $B \cap N \neq \emptyset$, es decir existe $n_j \in N$ tal que $n_j \in B$, luego el punto $(t, n_j) \in V$ y como $t \in U_j$, tenemos que $(t, n_j) \in U$, por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$.

Con esto hemos probado que $X \times Y$ no es T_5 porque cualquier par de abiertos U y V en M que contienen a H y K (cerrados en M), respectivamente, se intersecan, por lo tanto M no es un subespacio normal de $X \times Y$. □

Teorema 3.46. *La recta de Sorgenfrey S es un espacio T_6.*

Demostración. En el Ejemplo 2.123, vimos que S es T_4, ahora veremos que S es perfectamente normal.

Vamos a demostrar que todo abierto U de S es F_σ. Por el Lema 2.142, se tendrá que todo cerrado es G_δ.

Sea $U = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i)$ un abierto en S y definamos $W = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i)$, el cual es un abierto en $\mathbb{R}$ en la topología usual contenido en U. Veamos que $U \setminus W$ es numerable.

Tomemos dos puntos distintos $x, y \in U \setminus W$ y supongamos que $x < y$. Entonces x y y son los puntos del extremo izquierdo de distintos intervalos de la forma $[a_i, b_i)$. Denotemos a estos intervalos como $[x, h(x)$ y $[y, h(y)$. Notemos que $[x, h(x)) \cap [y, h(y)) = \emptyset$, esto es porque si $[x, h(x)) \cap [y, h(y)) \neq \emptyset$, entonces $x < y < h(x)$ o $y < x < h(y)$, lo cual implica que $y \in (x, h(x)) \subseteq W$ o $x \in (y, h(y)) \subseteq W$, pero esto es imposible. Ahora, sabemos que para cada $x \in U \setminus W$, existe un intevalo $[x, h(x))$ y para cada intervalo de esta forma, siempre hay un número racional $q(x)$ tal que $x < q(x) < h(x)$, de manera que existe una función inyectiva $f : U \setminus W \to \mathbb{Q}$ tal que para cada $x \in U \setminus W$, $f(x) = q(x)$. Esto prueba que $U \setminus W$ es numerable.

Finalmente, como W es abierto en $\mathbb{R}$ se tiene que W es F_σ en $\mathbb{R}$, luego es F_σ en S (la topología de Sorgenfrey contiene a la topología usual), y como $U \setminus W$ es una unión numerable de conjuntos unipuntuales, los cuales son cerrados en S porque S es T_1, se tiene que, $U \setminus W$ también es F_σ en S, por lo tanto $U = (U \setminus W) \cup W$ es F_σ en S. Esto prueba que S es perfectamente normal y por lo tanto es T_6. □

Teorema 3.47. *El producto de espacios T_5 no necesariamente es T_5.*

Demostración. Por el Ejemplo 3.46, el espacio S (la recta de Sorgenfrey) es T_6 y por lo tanto es T_5, sin embargo $S \times S$ no es normal, (Teorema 3.43), de manera que $S \times S$ no es T_5. □

Teorema 3.48. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Si $X = \prod_{i \in I} X_i$ es T_6, entonces X_i es T_6 para toda $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que X es T_6 y sea $i \in I$, por el Teorema 3.18, X_i es homeomorfo a un subespacio de X y como el axioma T_6 se preserva bajo subespacios, se tiene que X_i es T_6. □

Teorema 3.49. *El producto de espacios T_6 no necesariamente es T_6.*

Demostración. Por el Ejemplo 2.123, el espacio S (la recta de Sorgenfrey) es T_6. Sin embargo, $S \times S$ no es normal (Teorema 3.43), de manera que $S \times S$ no es T_6. □

Capítulo 4

Axiomas de separación en hiperespacios

Este último capítulo está dedicado a estudiar algunos de los axiomas de separación en el hiperespacio de cerrados de un espacio topológico X denotado como 2^X. Discutiremos si dado un espacio topológico X que satisface algún axioma de separación, el hiperespacio 2^X también lo satisface y viceversa.

Comenzaremos definiendo el espacio 2^X y le daremos una topología.

Sea X un espacio topológico. Consideremos la colección de los subconjuntos cerrados no vacíos de X que llamaremos 2^X, es decir:

$$2^X = \{C \subseteq X : C \neq \emptyset \text{ y } C \text{ es cerrado}\}.$$

Daremos a 2^X una topología cuya base definimos a continuación.

Si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son subconjuntos de X, entonces definimos

$$\langle S_1, S_2, \ldots, S_n \rangle = \{C \in 2^X : C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i \text{ y } C \cap S_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}.$$

Teorema 4.1. *Si X es un espacio topológico y*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle : U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología en 2^X.

Demostración. Observemos que si $A \in 2^X$, entonces $A \in \langle X \rangle \in \mathcal{B}$.

Ahora tomemos $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$ dos elementos en $\mathcal{B}$. Vamos a demostrar que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \in \mathcal{B}$. Para hacer esto, hagamos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ Demostraremos que

$$\begin{aligned}&\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \\ &\qquad = \langle U_1 \cap V, U_2 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, V_2 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle.\end{aligned}$$

Sea $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$ entonces, $K \subseteq U \cap V$. Notemos que:

$$\begin{aligned}U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U) &= (U \cap (\bigcup_{i=1}^{m} V_i)) \cup (V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)) \\ &= \big(\bigcup_{i=1}^{m} (V_i \cap U)\big) \cup \big(\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V)\big). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $K \subseteq (\bigcup_{i=1}^{m} (V_i \cap U)) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V))$.

Sabemos que $K \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \leq n$ y $K \cap V_j \neq \emptyset$ para toda $j \leq m$, por tanto para cada $x \in K \cap U_i$, ocurre que $x \in K \cap U_i \cap V$, pues $K \subseteq V$; análogamente, para toda $x \in K \cap V_j$, se tiene que $x \in K \cap V_j \cap U$, ya que $K \subseteq U$, de esta manera, obtenemos que $K \in \langle U_1 \cap V, U_2 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, V_2 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle$ y así, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \subseteq \langle U_1 \cap V, U_2 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, V_2 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle$.

Para la otra contención, tomemos $K \in \langle U_1 \cap V, U_2 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, V_2 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle$. Entonces $K \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \leq n$ y $K \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \leq m$. Además sabemos que $K \subseteq (\bigcup_{i=1}^{m} (V_i \cap U)) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap V))$; se sigue de la igualdad (4.1) que $K \subseteq U \cap V$ y así $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Por lo tanto, $K \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$.

Con esto concluimos que $\mathcal{B}$ es una base para 2^X. $\square$

La topología generada por la base $\mathcal{B}$ se conoce como la *topología de Vietoris* y a sus elementos básicos se les llama *vietóricos.*

Lema 4.2. *Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ abiertos en X y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$. Entonces* $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle = \overline{\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle}$

Demostración. Tomemos $K \in \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ y sea $\mathcal{W} = \langle W_1, W_2, \ldots, W_m \rangle$ un abierto básico que tiene a K. Para ver que $K \in \overline{\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle}$, veamos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Como $K \in \mathcal{W}$ se tiene que $K \cap W_i \neq \emptyset$ para toda $i \leq m$, tomemos $x_1 \in K \cap W_1$, también puesto que $K \in \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$, se tiene que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$, de manera que existe j_1 tal que $x_1 \in \overline{V_{j_1}}$ luego $W_1 \cap V_{j_1} \neq \emptyset$. Elijamos $y_1 \in W_1 \cap V_{j_1}$. Tomemos $x_2 \in K \cap W_2$, entonces existe j_2 tal que $x_2 \in \overline{V_{j_2}}$ luego $W_2 \cap V_{j_2} \neq \emptyset$. Elijamos $y_2 \in W_2 \cap V_{j_2}$. Si continuamos con esta construcción para toda $i \leq m$ obtenemos que $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \in \mathcal{W}$.

Si ocurre que $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \in V$, concluimos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. En otro caso supongamos que $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \notin \mathcal{V}$. Como $K \in \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$, se tiene que $K \cap \overline{V_i} \neq \emptyset$ para toda $i \leq n$, elijamos $z_1 \in \overline{V_1} \cap K$, además como $K \in \mathcal{W}$, ocurre que $K \subseteq \bigcup_{r=1}^{m} W_r$, entonces $z_1 \in W_{r_1}$ para alguna $r_1 \leq m$ lo cual implica que $V_1 \cap W_{r_1} \neq \emptyset$. Tomemos $m_1 \in V_1 \cap W_{r_1}$, continuando con esta construcción tomemos $m_k \in V_k \cap W_{r_k}$ para toda $k \leq n$. De esta manera obtenemos que el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_m, m_1, \ldots, m_n\} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, luego $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ y así tenemos que $K \in \overline{\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle}$, por lo tanto $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle}$.

Para ver que $\overline{\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle} \subseteq \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ veamos que $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ es cerrado.

Sea $A \in 2^X \setminus \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$, tenemos 2 casos:

Caso I) $A \nsubseteq \bigcup_{i_1}^{n} \overline{V}_i$. En este caso existe $x \in A$ tal que $x \notin \overline{V_i}$ para ninguna $i \leq n$, luego $U = \langle X, X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \rangle$ es un abierto que tiene a A y que no interseca a $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$, pues si existe $K \in \langle X, X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \rangle \cap \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ entonces $K \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}) \neq \emptyset$, lo que significa que $K \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ lo cual contradice el hecho de que $K \in \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$.

Caso II) $A \cap \overline{V_i} = \emptyset$ para alguna $i \leq n$. Para este caso notemos que $A \subseteq X \setminus \overline{V_i}$, por lo que $U = \langle X \setminus \overline{V_i} \rangle$ es un abierto básico que tiene a A, además si $K \in \langle X \setminus \overline{V_i} \rangle$ se tiene que $K \cap \overline{V_i} = \emptyset$ por lo que $K \notin \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$. Por lo tanto $\langle X, X \setminus \overline{V_i} \rangle \cap \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle = \emptyset$.

En ambos casos encontramos un abierto U que tiene a A y que no interseca a $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$, es decir $2^X \setminus \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ es abierto y por lo tanto $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ es cerrado.

Para finalizar, observemos que $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subseteq \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$ por lo que $\overline{\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle} \subseteq \overline{\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle} = \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$. Con esto concluimos la prueba del lema. □

Lema 4.3. *Sean X un espacio topológico y $f, h : X \to [0,1]$, dos funciones continuas. Entonces $F : 2^X \to [0,1]$ definida como $F(K) = \text{ínf}\{f(x) : x \in K\}$ y $H : 2^X \to [0,1]$ definida como $H(K) = \sup\{h(x) : x \in K\}$ son con tinuas.*

Demostración. Primero observemos que F y H estan bien definidas porque ambas funciones toman valores en el intervalo $[0,1]$.

Veamos que F es continua. Sean $K \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, tomemos

$$U = [0,1] \cap (F(K) - \epsilon, F(K) + \epsilon)$$

un abierto básico en $[0,1]$ que tiene a $F(K)$. Como $F(K) = \text{ínf}\{f(x) : x \in K\}$, existe $x_1 \in K$ tal que $F(K) \leq f(x_1) < F(K)+\epsilon$; luego, $f(x_1) \in U$. Dado que f es continua, existe un abierto W en X tal que $x_1 \in W$ y $f(W) \subseteq U$.

Definamos $t = F(K) - \frac{\epsilon}{2}$ y $C = [0,1] \cap [0,t]$. Notemos que C es cerrado en $[0,1]$ y como f es continua $f^{-1}(C)$ es cerrado, luego $X \setminus f^{-1}(C)$ es abierto. Consideremos el vietórico $V = \langle X, W\rangle \cap \langle X \setminus f^{-1}(C)\rangle$ como $x_1 \in K \cap W$ tenemos que $K \in \langle X, W\rangle$; además, $f(K) \subseteq (t,1]$, por lo tanto $f(K) \cap C = \emptyset$, de manera que $K \cap f^{-1}(C) = \emptyset$ y así $K \in \langle X \setminus f^{-1}(C)\rangle$, luego $K \in V$.

Para finalizar tomemos $A \in V$, entonces $A \cap W \neq \emptyset$, por lo que existe $z \in A \cap W$, y como $f(W) \subseteq U$, resulta que $f(z) \in U$. Además, $F(A) \leq f(z)$. También, dado que $A \subseteq X \setminus f^{-1}(C)$ tenemos que $f(A) \subseteq [0,1] \setminus C = (t,1]$. Por lo tanto,

$$F(K) - \epsilon \leq t < F(A) < f(z) < F(K) + \epsilon$$

de manera que V es un abierto que tiene a K y para cualquier $A \in V$ se tiene que $F(A) \subseteq U$. Esto prueba que F es continua.

Para demostrar que H es continua consideremos la función $g : X \to [0,1]$ dada por $g(x) = 1 - h(x)$. Por lo que hicimos para F, sabemos que la función $G(K) = \text{ínf}\{1 - h(x) : x \in K\}$ es continua. Notemos que $G(K) = 1 - sup\{h(x) : x \in K\} = 1 - H(x)$. Esto muestra que la función $1 - H$ es continua. Por lo tanto la función H también lo es. □

Lema 4.4. *Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si $f_i : X \to [0,1]$ es una función continua para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $F : X \to [0,1]$ definida como*

$$F(x) = \text{máx}\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

es continua.

Demostración. Vamos a demostrar que para cada abierto de la forma $[0, b)$ y $(a, 1]$, se tiene que

$$F^{-1}([0,b)) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}([0,b)) \quad \text{y} \quad F^{-1}((a,1]) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}((a,1]).$$

Para la primera igualdad, notemos que si $x \in F^{-1}([0,b))$, entonces $F(x) \in [0,b)$, luego $f_i(x) \in [0,b)$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, de manera que $x \in f_i^{-1}([0,b))$ y por lo tanto $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}([0,b))$.

Inversamente, si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}([0,b))$, entonces $f_i(x) \in [0,b)$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, luego $F(x) \in [0,b)$ y se tiene que $x \in F^{-1}([0,b))$.

Para la segunda igualdad si $x \in F^{-1}((a,1])$, entonces $F(x) \in (a,1]$, luego $f_i(x) \in (a,1]$ para alguna $i \in \{1,\ldots,n\}$ de manera que $x \in f_i^{-1}((a,1])$ para alguna $i \in \{1,\ldots,n\}$ y por lo tanto $x \in \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}((a,1])$.

Inversamente, si $x \in \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}((a,1])$, entonces $x \in f_i^{-1}((a,1])$ para alguna $i \in \{1,\ldots,n\}$, luego $f_i(x) \in (a,1]$ para alguna $i \in \{1,\ldots,n\}$ por lo que $F(x) \in (a,1]$ y así $x \in F^{-1}((a,1])$.

Con esto tenemos que la imagen inversa de cualquier abierto básico bajo F es abierto y por lo tanto F es continua. □

Teorema 4.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

a) 2^X *es* T_0.

b) Si X *es* T_1, *entonces* 2^X *es* T_1. *Además, el recíproco no es cierto.*

Demostración. Sean $C_1, C_2 \in 2^X$ distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $C_1 \setminus C_2 \neq \emptyset$, entonces $C_1 \in \langle X, X \setminus C_2 \rangle$ y $C_2 \notin \langle X, X \setminus C_2 \rangle$. Por lo tanto 2^X es T_0 lo cual demuestra a).

Para b), sean $C_1, C_2 \in 2^X$ distintos. Supongamos sin pérdida de generalidad que existe $x \in C_1 \setminus C_2$. Tenemos que $\langle X, X \setminus C_2 \rangle$ es un abierto que tiene a C_1 y no tiene a C_2. Además, puesto que $X \setminus \{x\}$ es abierto, $\langle X \setminus \{x\} \rangle$ es un vietórico que tiene a C_2 y no tiene a C_1, entonces 2^X es T_1.

Para concluir *b*) consideremos un conjunto no vacío X con la topología indiscreta. Este es un espacio que no es T_1 pero $2^X = \{X\}$ es T_1, pues $\{X\}$ es cerrado con la topología de Vietoris. □

Teorema 4.6. *Sea X un espacio topológico. Entonces 2^X es T_2 si y sólo si X es regular.*

Demostración. Supongamos que 2^X es T_2. Tomemos un cerrado $C \subseteq X$ y $x \in X \setminus C$. Notemos que C y $C \cup \{x\}$ son dos elementos distintos de 2^X, entonces existen dos abiertos ajenos $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$ tales que $C \in \mathcal{U}$ y $C \cup \{x\} \in \mathcal{V}$. Como $C \in \mathcal{U}$, se tiene que $C \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Puesto que $C \notin \mathcal{V}$ y sabemos que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ porque $C \cup \{x\} \in \mathcal{V}$, se tiene que $C \cap V_i = \emptyset$, para alguna $i \in \{1, \ldots, m\}$, lo cual implica que $(C \cup \{x\}) \cap V_i = \{x\}$. También observemos que $(C \cup \{x\}) \cap U_i \neq \emptyset$ y como $(C \cup \{x\}) \notin \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ tenemos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Tomemos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcap \{V_i : (C \cup \{x\}) \cap V_i = \{x\}\}$, entonces $C \subseteq U$ y $x \in V$. Para terminar demostraremos que $U \cap V = \emptyset$.

Supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe $p \in U \cap V$, tenemos que $C \cup \{p\} \in \mathcal{U}$ y $C \cup \{p\} \in \mathcal{V}$ pero $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos, de esta contradicción concluimos que $U \cap V = \emptyset$. Esto demuestra que X es regular.

Inversamente, supongamos que X es regular. Para demostrar que 2^X es T_2, tomemos dos elementos distintos $C_1, C_2 \in 2^X$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $C_1 \setminus C_2 \neq \emptyset$. Tomemos $x \in C_1 \setminus C_2$, como X es regular, existen dos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $C_2 \subseteq V$. Tomando $\langle V \rangle$ y $\langle X, U \rangle$ se tiene que $\langle V \rangle$ es un abierto que tiene a C_2 y $\langle X, U \rangle$ es un abierto que tiene a C_1.

Veamos que $\langle V \rangle \cap \langle X, U \rangle = \emptyset$. Supongamos que $F \in \langle V \rangle \cap \langle X, U \rangle$. Entonces $F \subseteq V$, $F \in \langle X, U \rangle$ y $F \cap U \neq \emptyset$, de modo que $U \cap V \neq \emptyset$, pero U y V son ajenos. De esta manera vemos que $\langle V \rangle \cap \langle X, U \rangle = \emptyset$ y concluimos que 2^X es T_2. $\square$

Teorema 4.7. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *2^X es regular.*

b) *2^X es completamente regular.*

c) *X es normal.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ c). Sean $C \subseteq X$ cerrado y $U \subseteq X$ abierto tales que $C \subseteq U$. Como $\langle U \rangle$ es un abierto que tiene a C y 2^X es regular, existe un abierto $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$ tal que $C \in \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{V}} \subseteq \langle U \rangle$. Por el Lema 4.2 tenemos que $\overline{\mathcal{V}} = \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle$, por lo tanto $W = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ es un abierto tal que $C \subseteq W$.

Veamos que $\overline{W} \subseteq U$. Primero recordemos que $\overline{W} = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} V_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{V_j}$. Sea $p \in \overline{W}$, entonces $p \in \overline{V_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\overline{V_i} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, elijamos un elemento $p_i \in \overline{V_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Sea $K = \{p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}, p, \ldots, p_{j+1}, p_n\}$. Se tiene que K es cerrado y además $K \in \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n} \rangle \subseteq \langle U \rangle$ de manera que $K \subseteq U$ y por lo tanto $p \in U$. Así, tenemos que $C \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ y se concluye que X es normal.

c) $\Rightarrow$ *b)*. Sean $C \in 2^X$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$ un abierto básico que tiene a C. Hagamos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y notemos que V es un abierto que contiene a C. Como X es normal, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(C) \subseteq \{0\}$ y $f(X \setminus V) = \{1\}$. Definimos $F : 2^X \to [0, 1]$ como $F(C) = \sup\{f(x) : x \in C\}$. Por el Lema 4.3, sabemos que F esta bien definida y es continua.

Ahora, puesto que $V_i \cap C \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elijamos un $x_i \in V_i \cap C$. Como X es normal, resulta que X es completamente regular, de manera que podemos hallar funciones continuas $g_i : X \to [0, 1]$ tales que $g_i(x_i) = 0$ y $g_i(X \setminus V_i) \subseteq \{1\}$. Definamos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, las funciones $H_i : 2^X \to [0, 1]$ como $H_i(C) = \text{ínf}\{g_i(x) : x \in C\}$, que nuevamente por el Lema 4.3 resulta que cada H_i es continua.

Para finalizar consideremos la función $H : 2^X \to [0, 1]$ definida como $H(C) = \text{máx}\{F(C), H_1(C), H_2(C), \ldots, H_n(C)\}$, por el Lema 4.4, H es continua. Veamos que $H(C) = 0$. Sabemos que $f(C) = \{0\}$ y además como $x_i \in C$ y $g_i(x_i) = 0$ se tiene que $\text{ínf}\{g_i(x) : x \in C\} = 0$ para toda i, de manera que $H_i(C) = 0$ para toda i, por lo tanto

$$H(C) = \text{máx}\{F(C), H_1(C), H_2(C), \ldots, H_n(C)\} = 0.$$

Por otra parte tomemos $B \in 2^X \setminus \mathcal{V}$, luego $B \not\subseteq V$ o $B \cap V_i = \emptyset$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si $B \not\subseteq V$, entonces, existe $b \in B$ tal que $b \notin V_i$ para ninguna $i \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que $f(b) = 1$. Se sigue que $F(B) = 1$ y por lo tanto $H(2^X \setminus \mathcal{V}) = 1$.

Si $B \cap V_i = \emptyset$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $B \subseteq X \setminus V_i$ luego para cada $b \in B$ se tiene que $g_i(b) = 1$, porque $g_i(X \setminus V_i) = 1$, de manera que $H_i(B) = 1$ y por lo tanto $H(2^X \setminus \mathcal{V}) = 1$.

Así, hemos demostrado que la función continua H, es tal que $H_i(C) = 0$ y $H(2^X \setminus \mathcal{V}) = 1$, esto demuestra que 2^X es completamente regular.

$b) \Rightarrow a)$. Esta implicación es directa del Teorema 2.105. □

En el siguiente ejemplo veremos que el hiperespacio de cerrados 2^X, de un espacio normal X, no necesariamente es normal. Primero veamos el siguiente lema.

Lema 4.8. *Sea X un espacio topológico T_2. Entonces $\mathcal{F}_2(X) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq 2\}$ es cerrado en 2^X.*

Demostración. Veamos que $2^X \setminus \mathcal{F}_2(X)$ es abierto. Sea $B \in 2^X \setminus \mathcal{F}_2(X)$. Entonces existen al menos tres puntos distintos $x_1, x_2, x_3 \in B$, como X es T_2 podemos encontrar tres abiertos U_1, U_2, U_3 en X, de tal manera que $x_i \in U_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Tomemos $\mathcal{V} = \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$, el cual es abierto en 2^X. Además notemos que $B \in \mathcal{V}$ y como $\mathcal{V}$ tiene al menos a x_1, x_2, x_3, resulta que $\mathcal{V} \subseteq\ 2^X \setminus \mathcal{F}_2(X)$. Así, se tiene que $2^X \setminus \mathcal{F}_2(X)$ es abierto y por lo tanto $\mathcal{F}_2(X)$ es cerrado. □

Ejemplo 4.9. *Sea S la recta de Sorgenfrey (2.123). Entonces 2^S no es normal.*

Demostración. Supongamos que 2^S es normal. Por Lema 4.8 tenemos que $F_2(S)$ es cerrado en 2^S, luego el Teorema 2.130 nos dice que $F_2(S)$ es normal.

Por otra parte, sea $A = \{\{x, -x\} : x \in \mathbb{R}^+\} \subseteq F_2(S)$. Es claro que $|A| = |\mathbb{R}|$, pues $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(\{x. - x\}) = x$ es biyectiva.

Como S es separable, $F_2(S)$ es separable. [11, ejercicio 1.18 pág. 8]

Ahora veamos que A es un subespacio discreto. Tomemos $\{x, -x\} \in A$. Si $x = 0$, entonces $\{0\} = \langle [0, 1) \rangle \cap A$ es un abierto en A. Si $x \neq 0$, entonces $\{x, -x\} = \langle [-x, 0), [x, x+1) \rangle \cap A$ es un abierto en A. Por lo tanto concluimos que A es discreto.

Ahora veamos que A es cerrado. Sea $\{p, q\} \in F_2(S) \setminus A$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1) $p = q \neq 0$. Si $p > 0$, entonces $\{p\} \in \langle [p, p+1) \rangle$ y como no hay números negativos en el intervalo $[p, p+1)$ se tiene que $\langle [p, p+1) \rangle \cap A = \emptyset$. Si $p < 0$, entonces $\{p\} \in \langle [p, 0) \rangle$ y como no hay números positivos en el intervalo $[p, 0)$ se tiene que $\langle [p, 0) \rangle \cap A = \emptyset$.

Caso 2) $p = 0$ y $q \neq p$. Si $q > 0$, entonces $\{0, q\} \in \langle [0, \frac{q}{2}), [q, q+1) \rangle$ y como no hay números negativos en $[0, \frac{q}{2}) \cup [q, q+1)$ se tiene que $\langle [0, \frac{q}{2}), [q, q+1) \rangle \cap A = \emptyset$.

Si $q < 0$, entonces $\{0, q\} \in \langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \rangle$. Veamos que $\langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \rangle \cap A = \emptyset$. Sea $\{x, -x\} \in A$. Supongamos que $\{x, -x\} \in \langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \rangle$. Entonces $x \in [q, \frac{q}{2})$ o $x \in [0, -\frac{q}{2})$. Si $x \in [q, \frac{q}{2})$, entonces $x < \frac{q}{2}$, de manera que $-x > -\frac{q}{2}$, por lo que $-x \notin [0, -\frac{q}{2})$. Análogamente si $x \in [0, -\frac{q}{2})$, entonces $-x \notin [q, \frac{q}{2})$. Por lo tanto $\langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \rangle \cap A = \emptyset$.

Caso 3) $p, q \neq 0$ y $p \neq q$. Si $p, q > 0$ podemos suponer que $p < q$. Entonces $\{p, q\} \in \langle [p, \infty) \rangle$ y como no hay números negativos en $[p, \infty)$, se tiene que $\langle [p, \infty) \rangle \cap A = \emptyset$.

Si $p, q < 0$, podemos suponer que $p < q$. Entonces $\{p, q\} \in \langle [-\infty, 0) \rangle$ y como no hay números positivos en $(-\infty, 0)$, se tiene que $\langle (-\infty, 0) \rangle \cap A = \emptyset$.

Si $p \neq q$ y $p > 0$, $q < 0$ tenemos dos subcasos.

Subcaso 1) $|p| > |q|$. Tenemos que $\{p, q\} \in \langle [q, \frac{p+q}{2}), [p, \infty) \rangle$. Veamos que $\langle [q, \frac{p+q}{2}), [p, \infty) \rangle \cap A = \emptyset$. Sea $\{x, -x\} \in A$ y supongamos que $\{x, -x\} \in \langle [q, \frac{p+q}{3}), [p, \infty) \rangle$. Entonces $x \in [q, \frac{p+q}{2})$ o $x \in [p, \infty)$. Si $x \in [q, \frac{p+q}{2})$, entonces $x \geq q$, por lo que $-x \leq -q < p$, por lo tanto $-x \notin [p, \infty)$, de manera que $\{x, -x\} \notin \langle [q, \frac{p+q}{2}), [p, \infty) \rangle$. Análogamente si $x \in [p, \infty)$, se tiene que $-x \notin [q, \frac{p+q}{2})$ y en consecuencia $\{x, -x\} \notin \langle [q, \frac{p+q}{2}), [p, \infty) \rangle$. Por lo tanto $\langle [q, \frac{p+q}{2}), [p, \infty) \rangle \cap A = \emptyset$.

Subcaso 2) $|p| < |q|$. En este caso tenemos que $\{p, q\} \in \langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \rangle$. Veamos que $\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \rangle \cap A = \emptyset$. Sea $\{x, -x\} \in A$ y supongamos que $\{x, -x\} \in \langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \rangle$. Entonces $x \in [q, \frac{-p+q}{2})$ o $x \in [p, \frac{p-q}{2})$. Si $x \in [q, \frac{-p+q}{2})$, entonces $x < \frac{-p+q}{2}$, por lo que $-x > \frac{p-q}{2}$, por lo tanto $\{x, -x\} \notin \langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \rangle$. Análogamente si $x \in [p, \frac{p-q}{2})$, se tiene que $-x \notin [q, \frac{-p+q}{2})$ y en consecuencia $\{x, -x\} \notin \langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \rangle$. Por lo tanto $\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \rangle \cap A = \emptyset$.

Por los tres casos anteriores concluimos que $F_2(S) \setminus A$ es abierto, luego A es cerrado en $F_2(S)$.

Por el Lema de Jones (2.121) tenemos que $F_2(S)$ no es normal. Sin embargo al principio de la prueba vimos que $F_2(S)$ es normal, de manera que suponer que 2^S es normal nos lleva a una contradicción, Por lo tanto 2^S no es normal. $\square$

Bibliografía

[1] J. R. Munkres, *Topología*, 2.^{a} edición, Pearson educación, S. A., Madrid, 2002.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Berlin: Heldermann, 1989.

[3] F. G. Arenas, J. Dontchev y M. Ganster, *On $\lambda -$ sets and the dual of generalized continuity*, Q & A in General Topology 15 (1997), 3-13.

[4] Norman Levin, *Generalized closed sets in topology*, Columbus (Ohio), January 1970.

[5] J. Dontchev y M. Ganster, *On δ-generalized closed sets and $T_{\frac{3}{4}}$-spaces*, Kochi Univ. (Math) 17 (1996), 15-31.

[6] M. G. Murdeshwar y S. A. Naimpally *Semi-Hausdorff spaces*. Canad. Math. Bull 9. (1966), 353-356.

[7] C. E. Aull, *Separation of bicompact sets*. Math. Ann. 158 (1965), 197-202.

[8] A. Wilansky, *Between T_1 y T_2*. The American Mathematical Monthly. Vol 74. No. 3, (1967) 261-266.

[9] J. Margalef Roig, E. Outerelo Domínguez y J. L. Pinilla Ferrando, *Topología ***. Alhambra, primera edición, 1979.

[10] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

[11] A. Illanes y S. B. Nadler, *Hyperspaces: Fudamental and recent advances*, Marcel dekker, Inc. 1999.

[12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston 1966.

[13] G. Bartle y R. Sherbert, *Introducción al análisis matemático de una variable*, Limusa Wiley, tercera edición, 2010.

[14] C. E. Aull y W. J. Thron, *Separation axioms between T_0 and T_1*, Indagations Math. 24 (1962), 26-37.

[15] D. Hinrichsen, J.L. Fernández Muñiz, A. Fraguela Collar y A. Álvarez Prieto *Topología General*, Aportaciones Matemáticas 22, Sociedad Matemática Mexicana (2003)

[16] J. A. Amor Montaño, *Teoria de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Facultad de Ciencias UNAM (2005)