



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ESTUDIO TEÓRICO DE LA GENERACIÓN DE POTENCIALES ELÉCTRICOS EN  
UN MICROCANAL MEDIANTE ÓSMOSIS DIRECTA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
GUILLERMO ALBERTO SÁNCHEZ LOZANO

TUTOR  
FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE  
Facultad de Ingeniería

MÉXICO, D. F. OCTUBRE 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier  
Secretario: Dr. Cervantes De Gortari Jaime G.  
1er. Vocal Dr. Méndez Lavielle Federico  
2do. Vocal Dr. González Oropeza Rogelio  
3er. Vocal: Dr. Naude De La Llave Jorge L.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería - UNAM

## **TUTOR DE TESIS:**

Dr. Federico Méndez Lavielle

## ABSTRACT

Nowadays is well known the use of direct osmosis to produce power generation in those porous media that have affinity for adsorbing charges on their surfaces, which induce a current potential due to movement of the fluid inside the corpuscular capillaries creating systems called EKFOC (Electro Kinetic Forward Osmosis Cell). Such systems promise to be a new renewable energy in the future and unlike other energies that are periodic or oscillating dependent sources, they depend on salt gradients that can be collected throughout the year. These systems could feed on freshwater rivers and seawater, and in the practice, higher power can be generated by connecting multiple microchannels in parallel to increase the current supply.

In this paper is developed a theoretical model that explains in detail the generation of electrical potentials in a microchannel formed by parallel plates by promoting of flow throughout forward osmosis. This is motivated by a membrane which provides a constant flow and separates two solutions with different concentration. This model was made for low zeta potential, which allows to use the Debye-Huckel approximation; also it considered that the properties are constant and fluid flow is developed under stationary conditions. The governing dimensionless system of equations, permits also introduce the influence of a parameter that is responsible of the current potential produced and we call as a parameter of electrical induction and in which certain properties of the working fluid are implicit and provide us information about the capacity of electric power generation in the microchannel. Finally the influence of the size of the electrical double layer on the average power generated by the microchannel have been shown.

## **Agradecimientos**

Agradezco con mucho aprecio y respeto al Dr. Federico Méndez Lavielle por aceptarme como su alumno, por compartir su tiempo y enseñanzas a lo largo del desarrollo de la maestría, las cuales han servido sobremanera en mi formación académica y profesional.

Agradecimientos para los profesores: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz, Dr. Jaime G. Cervantes De Gortari, Dr. Rogelio González Oropeza y al Dr. Jorge L. Naude De La Llave, los cuales me hicieron las observaciones y correcciones necesarias para enarbolar mi trabajo y llevar avante la conclusión adecuada de mi formación en el departamento.

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado en el tiempo que estuve realizando mis estudios de maestría.

A mis padres por todo su apoyo, amor y entereza a lo largo de toda mi vida, y que sin ellos no hubiera sido posible esto. De todo corazón, muchas gracias. Así también, a los miembros de mi familia que han estado muy cerca de mí, mil gracias.

Un agradecimiento fraternal a todos aquellos amigos que se han involucrado en mi formación y que han estado cerca durante mi crecimiento profesional y personal.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por recibirme estos grandiosos dos años de formación como uno más de su gremio.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo físico</b>	<b>6</b>
<b>3. Marco teórico</b>	<b>9</b>
<b>3.1 Ósmosis directa</b>	<b>9</b>
<b>3.2 Gasto osmótico</b>	<b>10</b>
<b>3.3 Doble capa eléctrica</b>	<b>11</b>
<b>3.4 Potencial de corriente</b>	<b>13</b>
<b>4. Modelo analítico</b>	<b>14</b>
<b>4.1 Modelo analítico de la Región 1</b>	<b>14</b>
<b>4.2 Modelo analítico de la Región 2</b>	<b>20</b>
<b>5. Orden de Magnitud</b>	<b>21</b>
<b>5.1 Orden de Magnitud: Región 1</b>	<b>21</b>
<b>5.2 Orden de Magnitud: Región 2</b>	<b>23</b>
<b>6. Ecuaciones Adimensionales</b>	<b>25</b>
<b>6.1 Adimensionalización: Región 1</b>	<b>25</b>
<b>6.2 Adimensionalización: Región 2</b>	<b>28</b>
<b>6.3 Simplificación de las Regiones 1 y 2</b>	<b>29</b>
<b>7. Condiciones de frontera</b>	<b>32</b>
<b>8. Soluciones analíticas de las Regiones 1 y 2</b>	<b>33</b>
<b>8.1 Solución analítica de la Región 1</b>	<b>33</b>
<b>8.2 Solución analítica de la Región 2</b>	<b>35</b>

<b>9. Solución numérica de la Región 1</b>	<b>36</b>
<b>10. Comparación entre la solución analítica y solución numérica</b>	<b>40</b>
<b>11. Resultados</b>	<b>42</b>
<b>11.1 Resultados y análisis de las soluciones asintóticas</b>	<b>42</b>
<b>11.2 Potencia eléctrica generada</b>	<b>48</b>
<b>12. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>A.-Solución Asintótica de la región 1</b>	<b>51</b>
<b>A.1 Solución de orden cero</b>	<b>52</b>
<b>A.2 Solución de primer orden</b>	<b>54</b>
<b>A.3 Solución asintótica general</b>	<b>56</b>
<b>B.-Solución de la región 2</b>	<b>58</b>
<b>13. Bibliografía</b>	<b>60</b>

# 1.-Introducción

La ósmosis directa es un proceso físico que se conoce como el transporte neto de agua a través de una membrana semipermeable y que se produce por una diferencia en el potencial químico de la membrana, i.e. el paso del agua se lleva a cabo del lado de menor concentración hacia el de mayor concentración de soluto. Aunque la ósmosis directa fue observada hace 260 años aproximadamente, algunos estudios fueron conducidos antes del progreso de la tecnología de las membranas y éste cobró especial importancia y desarrollo en la década de los sesenta (1). El incremento en la atención en la ósmosis directa se debe principalmente a su potencial para lograr elevados niveles de rendimiento tomando en cuenta un amplio rango de materiales porosos, los cuales pueden actuar como membranas semipermeables, restringiendo el transporte de solutos y permitiendo el paso de los solventes (2) tales como el agua de mar, que es abundante y es usada frecuentemente como solución para procesos de desalinización por lo que una gran cantidad de membranas están diseñadas con ese propósito.

Las membranas también se emplean en distintas aplicaciones, aunque son mayoritariamente diseñadas para soluciones salinas, las cuales representan aproximadamente el 40% de los experimentos. A su vez se han llevado a cabo estudios recientes orientados a entender los cambios en la morfología del sustrato y como podrían afectar sustancialmente la polarización de concentración interna dentro de membranas compósitas. Resulta entonces indispensable entender como las propiedades del sustrato pueden afectar el comportamiento de membranas usadas en procesos de ósmosis directa (3).



Otro uso particular que se le ha dado a la ósmosis es para la generación de potencia, situación que se conoce como Ósmosis por Presión Retardada (*Pressure Retarded Osmosis*) la cual emplea membranas semipermeables para separar un solvente de una solución más concentrada y presurizada permitiendo al solvente pasar del lado de mayor al de menor concentración. Este incremento en el volumen incrementa en el lado de mayor concentración la presión, que puede ser despresurizada por una hidroturbina para producir potencia (4), creando de esta manera un nuevo tipo de energía renovable y pudiendo utilizar los caudales de ríos que desembocan al mar, aprovechando la gran concentración de sales existentes en ella (5) de manera que se pueda diseñar una *bomba osmótica*.

Por otro lado, durante largos años se han venido realizando importantes hallazgos relacionados a distintos fenómenos electrocinéticos en fluidos y dentro de los mismos se tiene el descubrimiento de la denominada doble capa eléctrica en microcanales, que generalmente se relaciona con diversos fenómenos. Entre ellos destaca la generación de corriente eléctrica a través del potencial de corriente o *streaming potential*, el cual ha motivado diversos estudios. Un ejemplo de la importancia de los efectos anteriores, se encuentra en la existencia de algunos materiales, como las arcillas (que bajo ciertas condiciones se pueden comportar como membranas osmóticas) que son capaces de generar campos eléctricos asociados con las dobles capas difusas adyacentes a sus paredes (6) donde se presenta la formación de la doble capa eléctrica. En esta dirección también se han tomado en cuenta los efectos de la polarización que produce un campo eléctrico en la capa Stern y que modifica la permitividad del electrolito en ésta (7), lo que señala que las propiedades eléctricas de la doble capa dependen de la concentración de los solventes polares. Se han derivado además relaciones semianalíticas para el potencial de corriente

con una acertada predicción en flujo laminar en microcanales con secciones transversales arbitrarias, suponiendo que son conocidos el área (8), el perímetro y el gradiente normal de la velocidad cerca de la pared y con los cuales se pueden investigar flujos electrocinéticos y determinar el potencial zeta en distintas geometrías.

En el pasado se han obtenido las soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido en estado estacionario en un canal rectangular, considerando que el flujo es incompresible y laminar, encontrándose una dependencia directa del gradiente de presión con el campo de velocidades. Además, para el caso en que las paredes del microcanal son impermeables, la velocidad y el gasto son independientes de la coordenada axial (9-10) para bajos y elevados números de Reynolds (11). Por otro lado, los flujos electroosmóticos son capaces de inducir gradientes de presión, y la reducción del caudal inducido por éstos puede solo ser ignorada cuando la longitud del canal es mucho mayor que el ancho del mismo (12). Esto último sugiere que cuando existe un potencial de corriente eléctrica, se puede generar un campo de presiones debido al campo eléctrico inducido.

De manera equivalente, un campo eléctrico puede inducir movimiento en un electrolito en la vecindad de superficies cargadas, fenómeno que se denomina flujo electroosmótico y que se ha empleado con el fin de diseñar microbombas. A su vez también se ha aprovechado el fenómeno inverso el cual consiste en generar gradientes de potenciales eléctricos en canales con superficies cargadas homogéneas y no homogéneas (13). También se han desarrollado y caracterizado distintos tipos de bombas electroosmóticas las cuales pueden generar presiones de hasta 15 MPa con flujos de decenas de microlitros por minuto (14), en los cuales se observa un incremento lineal de la presión inducida en función del voltaje aplicado en dichos sistemas.

En la actualidad es bien conocido el uso de la ósmosis directa para producir generación de potencia en aquellos medios porosos que tienen afinidad a adsorber cargas en sus superficies, lo que induce un potencial de corriente debido al movimiento del fluido dentro de los capilares corpusculares (15) creando sistemas combinados denominados EKFOC por sus siglas en inglés *Electro Kinetic Forward Osmosis Cell*. Este tipo de sistemas prometen ser una nueva energía renovable en el futuro y que a diferencia de otras energías que son periódicas o dependientes de fuentes oscilantes, ésta depende de gradientes salinos que pueden ser recolectados todo el año (16). Estos sistemas podrían alimentarse de ríos de agua dulce y agua de mar, y en la práctica con la superposición de múltiples microcanales en paralelo puede generarse un incremento en la corriente que suministran dichos sistemas (17). Se han elaborado experimentos para estudiar los procesos de generación de energía mediante ósmosis directa para inducir potenciales de corriente dentro de medios porosos donde se observó que las propiedades de éstos y del fluido de trabajo afectan la densidad de generación de potencia. Para este fin se han utilizado dos modelos para estudiarlo, uno de capilares homogéneos y otro de no homogéneos (18).

Se han elaborado modelos teóricos a nivel de escala de poro (19) donde se ha estudiado el potencial de corriente producido en el microcanal, sometido a un flujo a presión dentro de un canal formado por placas paralelas con superficies hidrofóbicas que tienen coeficientes de deslizamientos asociadas a las paredes del mismo. Adicionalmente a estos microcanales se les han impuesto flujos de calor a través de sus paredes en condiciones estacionarias (20). En los mencionados trabajos se concluyó que el potencial inducido no tiene efecto sobre el campo de velocidades a menos que exista un efecto de deslizamiento en las placas, y que en caso de estar presentes retardan el flujo.

En los trabajos previos se muestra como los autores han desarrollado diversas metodologías para comprender y desarrollar avances en las áreas relacionadas a la ósmosis directa y a los potenciales de corriente inducidos en medios porosos sumergidos en soluciones salinas. La asociación entre ambos fenómenos ha permitido abrir un nuevo campo de interés que promete ser en un futuro una posible opción para cubrir las demandas energéticas globales. Falta investigar aún ciertos aspectos que permitan dilucidar los mecanismos que influyen en la generación de potenciales eléctricos para poder llevar esto a futuras aplicaciones ingenieriles.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo teórico que explica detalladamente la generación de potenciales eléctricos en un microcanal formado por placas paralelas mediante la promoción de un flujo inducido por ósmosis directa. Éste es motivado por una membrana que proporciona un gasto constante y que separa dos soluciones con diferente concentración. Este modelo se desarrolla para bajos potenciales zeta, lo que permite usar la aproximación de Debye-Hückel; además, se considera que las propiedades de fluido son constantes y el flujo se encuentra desarrollado bajo condiciones estacionarias. La adimensionalización del sistema de ecuaciones gobernantes permite introducir además la influencia de un parámetro el cual es el responsable del potencial de corriente producido y que denominamos *parámetro de inducción eléctrica*. Finalmente se muestra la influencia del tamaño de la doble capa eléctrica sobre la potencia media generada por el microcanal.

## 2.-Modelo físico

El modelo físico, como se puede apreciar en la figura 1, consiste en el acoplamiento de dos microcanales separados por una membrana semipermeable. El microcanal del lado izquierdo está inmerso en agua destilada, mientras que el microcanal del lado derecho de la membrana contiene una solución electrolítica simétrica. Ambos microcanales están formados por dos placas paralelas. Como puede observarse en la dicha figura, el microcanal que se encuentra a la derecha de la membrana contiene dos regiones yuxtapuestas. La región que tiene una longitud  $H$  permite la acumulación de cargas en sus superficies, a la cual denominaremos como región 1. La región de longitud  $L$ , tiene superficies neutras, a ésta nos referiremos como región 2.

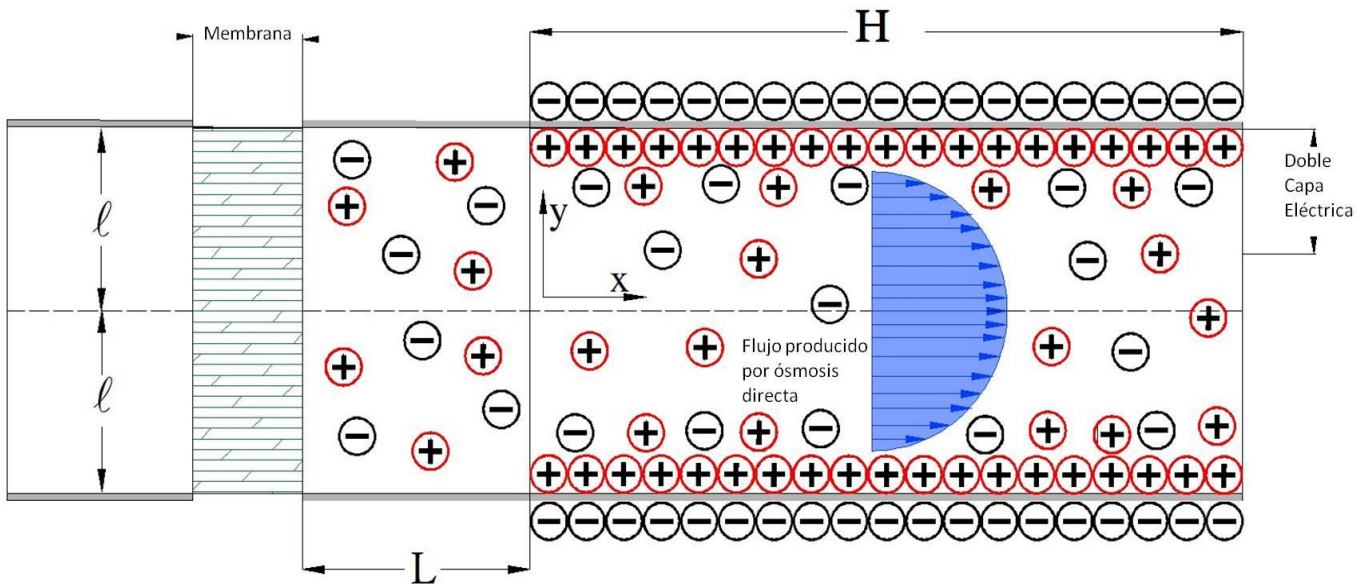


Figura 1. Esquema del modelo físico.

La región 1 permite la acumulación prácticamente espontánea de cargas en su superficie, lo que origina un fenómeno llamado *doble capa eléctrica*, en ésta hay un establecimiento de potenciales eléctricos debido al movimiento del fluido lo cual provoca una distribución de iones libres en el electrolito.

Es importante señalar que la membrana semipermeable es la responsable de inducir el movimiento del fluido dentro del microcanal mediante ósmosis directa, produciendo un flujo estacionario, unidireccional y totalmente desarrollado. Las concentraciones en ambos lados de la membrana osmótica son constantes pero diferentes entre sí. Gracias a esta diferencia de concentraciones se produce espontáneamente un gasto volumétrico. Dicho gasto hace que los iones libres en el electrolito se muevan en dirección del flujo, lo que produce una acumulación de cargas aguas abajo en el microcanal, y que a su vez induce un campo eléctrico en sentido contrario al movimiento, produciendo una diferencia de potencial eléctrico entre el inicio y final de la región 1. Este fenómeno es conocido en la lengua inglesa como *streaming potential*. Nosotros nos referiremos a él como *potencial de corriente*, siendo éste el principal objeto de estudio en este trabajo. La consideración de concentraciones constantes en ambos lados de la membrana es una simplificación del modelo físico, ya que de no tomarse así se debería establecer a estas concentraciones como variables dentro del problema.

En este modelo consideramos que el flujo es en dirección axial al canal, por tanto se considera que no hay componente de la velocidad en dirección perpendicular al plano como puede apreciarse en la figura 1, por lo que las variaciones respecto a la dirección  $z$  son despreciables; es decir:

$$w = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

La condición anterior se obtiene considerando que el ancho de las placas paralelas que forman el microcanal es mucho mayor en comparación a la distancia entre placas. Además, las fuerzas de cuerpo gravitacionales se desprecian debido a la escala usada, y se agrega la fuerza de cuerpo eléctrica. Las propiedades del fluido son constantes dentro del sistema.

### 3.-Marco teórico

#### 3.1 Ósmosis directa

En un proceso de ósmosis directa, el agua pasa a través de una membrana semipermeable desde la región donde la concentración es más baja hacia la región donde se presenta la más elevada concentración. La fuerza conductora es de hecho una diferencia en el potencial químico. En la práctica la diferencia de presión osmótica entre ambos lados de la membrana suele describir la fuerza impulsora para el transporte del agua, por lo que no se necesita aplicar físicamente presión hidráulica durante el proceso.

La presión osmótica  $\pi$  de una solución puede ser derivada usando la ecuación de Van't Hoof (4, 22, 23, 24) como sigue

$$\pi = iRTC \quad ,$$

donde  $C$  representa la concentración de la salmuera,  $\pi$  es la presión osmótica en la membrana,  $R$  es la constante universal de los gases,  $T$  representa la temperatura del fluido e  $i$  es el número de partículas activas en la solución. Si el efecto de la presión hidráulica se encuentra ausente, es decir si no existe un gradiente externo que promueva el movimiento del fluido salvo el gradiente ocasionado por el efecto osmótico, el paso del agua a través de la membrana por unidad de área (6, 21, 22, 23, 28) puede ser descrito por la siguiente ecuación:

$$J_{os} = A\Delta\pi \quad ,$$

donde  $A$  es la permeabilidad hidráulica de la membrana y  $J_{os}$  es el flujo de agua por unidad de área a través de la membrana.



La habilidad del material para actuar como una membrana osmótica se puede establecer mediante la *eficiencia osmótica* que se denota con  $\delta$ . Su rango de valor está entre dos extremos: 0 para materiales no permeables y 1 para materiales con comportamiento perfecto o de membrana ideal; este valor suele ser afectado por numerosos factores, incluyendo la tensión en el material, su composición y los tipos y concentraciones de los solutos en los poros. En general  $\delta$  se incrementa con la tensión efectiva y disminuye con la carga y concentración del soluto. No es raro que  $\delta$  pueda alcanzar valores cercanos a 0.7-0.8 ó incluso muy cercanos a 1.

### 3.2 Gasto osmótico

En la entrada a la región 2, se encuentra previamente la membrana permeable que logra separar una solución salina con concentración  $C_D$  (región 1 y 2) de otra solución salina con concentración  $C_F$  con la condición de que  $C_D > C_F$ , y con ayuda de la expresión anteriormente descrita se tiene que el gasto por unidad de área  $J_{os}$  como

$$J_{os} = A_m \Delta \pi_m = A_m (\pi_D - \pi_F) = A_m ((iRT)C_D - (iRT)C_F) = A_m f_{os} (C_D - C_F) \quad [1]$$

$A_m$  es la permeabilidad hidráulica de la membrana,  $C_D$  es la concentración de la salmuera en las regiones 1 y 2,  $C_F$  es la concentración del lado izquierdo de la membrana,  $\pi_D$  es la presión osmótica en la membrana del lado de la región 1 y 2 y  $\pi_F$  es la presión osmótica en el lado izquierdo de la membrana y  $f_{os}$  es el coeficiente osmótico de presión. Nótese que la presión osmótica es una propiedad de la solución y no depende de ninguna forma de las propiedades de la membrana. Para mezclas de NaCl se tiene que  $f_{os} = 2RT$  (5-10). En

nuestro caso consideramos que  $C_F = 0$ , lo cual reduce el gasto por unidad de área como  $J_{os} = A_m \pi_D$ . Por lo tanto, para el microcanal ilustrado en la Fig. 1 fácilmente se puede obtener

$$Q_{os} = A_c J_{os} = A_c A_m \pi_D = \int_A u dA = \int_{-1}^1 u(w) dy , \quad [2]$$

Donde  $Q_{os}$  representa el gasto osmótico producido por la membrana en el microcanal, y  $A_c$  es el área transversal del microcanal.

### 3.3 Doble capa eléctrica

Cuando una superficie está inmersa en una solución electrolítica, ésta adquiere una carga de superficie. Esta carga influirá en la distribución de iones en la solución. Iones con carga opuesta a la superficie (contraiones) serán atraídos hacia la superficie; mientras los iones con la misma carga (coiones) serán repelidos de la superficie. Como una consecuencia de la atracción y repulsión entre los iones en la solución electrolítica y la superficie cargada, habrá una distribución no uniforme de iones normal a la superficie.

La presencia de una superficie cargada influye en la distribución de iones cerca de ella. Tal redistribución de los iones libres en la solución originará lo que llamamos *doble capa eléctrica* (7, 8, 23, 24). La estructura de esta capa es descrita por el modelo de Gouy-Chapman-Stern y que consiste en dos capas superpuestas una sobre otra: Capa Stern (creada por la adsorción de iones) y la capa difusa en la que los iones pueden moverse libremente en cualquier dirección. Dentro de la doble capa eléctrica se generan potenciales

eléctricos, siendo el mayor el potencial zeta  $\zeta$  el valor del mayor inducido, el cual está presente en la interfase entre la capa difusa y la capa Stern.

Algunas superficies pueden cargarse eléctricamente por una variedad de mecanismos.

Algunos de los más importantes son mencionados a continuación (24):

- Ionización de grupos de superficie: si una superficie contiene grupos ácidos, su disociación da origen a una superficie cargada negativamente. Inversamente, una superficie básica toma una carga positiva. En ambos casos la magnitud de la carga de la superficie depende de las fuerzas ácidas o básicas de los grupos de la superficie y el pH de la solución.
- Superficies cargadas de cristales. Puede suceder que cuando un cristal se rompe o fractura, superficies con diferentes propiedades son expuestas. Algunas arcillas como la caolinita, cuando una plaqueta se rompe, las orillas expuestas contienen grupos  $\text{Al}(\text{OH})_3$  los cuales toman iones  $\text{H}^+$  para dar una orilla cargada positivamente.
- Adsorción de Iones específicos: Iones surfactantes pueden ser específicamente adsorbidos en superficies. Surfactantes de cationes pueden ser adsorbidos para cargar negativamente superficies para producir cargas netas positivas en la superficie, mientras surfactantes aniónicos pueden enmascarar las cargas positivas de una superficie por adsorción de ellos.

### 3.4 Potencial de corriente

Cuando se promueve el movimiento de un fluido con cargas libres a través de un microcanal, las cargas iónicas en la parte móvil de la doble capa eléctrica cerca de la superficie del canal son desplazadas hacia la salida del canal, lo que constituye la corriente de flujo (*streaming current*). No obstante, como no existe una conexión eléctrica entre la entrada y la salida, la acumulación de carga provoca un campo eléctrico tal que surge una corriente de conducción que fluye en dirección opuesta al flujo y es denominado potencial de corriente o *streaming potential* (23,24) y éste se manifiesta como una diferencia de potencial entre la entrada y la salida del microcanal. Debe señalarse además que en estado estacionario las corrientes de flujo y de conducción son cero.

## 4.-Modelo analítico

### 4.1 Modelo analítico Región 1

Las ecuaciones para la región 1 para la conservación de masa y cantidad de movimiento son las siguientes.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [3]$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho_e E_x \quad [4]$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_e E_y \quad [5]$$

El sistema de referencia empleado se muestra en la figura 1, con el origen justo a la mitad del microcanal y entre las regiones 1 y 2, donde  $x$  representa la coordenada longitudinal a lo largo del canal y  $y$  representa la coordenada transversal. El tercer término del miembro derecho de las ecuaciones [4] y [5] son las fuerzas de cuerpo debidas al campo eléctrico inducido en el microcanal. El campo eléctrico a su vez está ligado con la fuerza de Lorentz y que está dado por la siguiente expresión

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} \quad [6]$$

La ecuación [6] expresa la fuerza sobre una partícula cargada por unidad de volumen, donde  $\rho_e$  expresa la densidad de carga eléctrica y  $\vec{E}$  es el campo eléctrico. Dentro del microcanal, el campo eléctrico inducido tiene dos componentes

$$\vec{E}(x, y) = E_x i + E_y j \quad [7]$$

Donde el campo eléctrico inducido en dirección axial  $E_x$  se considera constante y el campo eléctrico transversal  $E_y$  solo depende de la doble capa eléctrica. Dichas componentes del campo eléctrico se obtienen a partir del negativo del gradiente del potencial eléctrico producido dentro del microcanal  $\Phi$ , siendo éste el resultado de la superposición del potencial de corriente  $\phi(x) = -xE_x$  y el potencial debido a la doble capa eléctrica  $\psi(y)$ ; es decir

$$\Phi(x, y) = \phi(x) + \psi(y) \quad [8]$$

Por lo tanto, las componentes del campo eléctrico en el microcanal quedan expresadas en función de las derivadas espaciales del potencial eléctrico como se muestra a continuación,

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx}; \quad E_y = -\frac{d\psi}{dy} \quad [9]$$

La componente del campo eléctrico en la dirección transversal puede ser obtenida al usar la ecuación de Poisson que define el potencial eléctrico dentro del microcanal, la cual se reduce a la expresión mostrada en la ecuación [10] donde  $\epsilon$  designa a la permitividad eléctrica del medio,  $F$  es la constante de Faraday,  $z$  es la valencia y  $c = (c_+ - c_-)$  es la concentración molar de iones del electrolito dada como

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} = -\frac{Fzc}{\epsilon} \quad [10]$$

Como puede observarse el problema de la doble capa eléctrica se relaciona con la concentración de iones en el microcanal y está gobernada únicamente por la distribución

del potencial en las paredes  $\psi(y)$  y es válida por el hecho de que la longitud de la región 1 es mucho mayor que el ancho del microcanal, es decir  $H \gg l$ .

Para obtener una expresión para la densidad de carga en el fluido se emplea la distribución de Boltzmann, ésta es una relación fundamental en termodinámica que describe la probabilidad de ocurrencia de estados microscópicos como una función de la energía de esos estados y es con frecuencia utilizada para describir la distribución de partículas sobre estos estados. La función de probabilidad referida se puede escribir como la probabilidad de densidad mediante la expresión siguiente

$$P \propto \exp\left(-\frac{W}{k_B T}\right) \quad [11]$$

En la ecuación [11]  $T$  es la temperatura absoluta (K),  $k_B$  es la constante de Boltzmann (J/K) dada por  $R/N_A$ , donde  $R$  es la constante universal de los gases,  $N_A$  es el número de Avogadro. En el contexto presente,  $W$  representa la energía correspondiente a una ubicación particular de un ion. La apropiada elección es el trabajo  $W$  requerido para traer un ion de valencia  $z$  desde el infinito donde  $\psi = 0$  hacia una posición con potencial  $\psi$ , y lo cual está dado por  $W = ze\psi$ , de esta forma [11] se transforma en

$$P \propto \exp\left(-\frac{ze\psi}{k_B T}\right) \quad [12]$$

aquí  $e$  es la unidad de carga elemental. La densidad de probabilidad para encontrar un ion en un estado neutral es

$$P_0 \propto \exp(0) \quad [13]$$

La razón entre  $P$  y  $P_0$  es tomada como la misma razón para la concentración de la especie en sus respectivos estados. Por lo tanto, se obtiene la concentración iónica como

$$c_{\pm} = c_0 \exp\left(\mp \frac{zF\psi}{RT}\right) \quad [14]$$

Donde  $F = eN_A$  se conoce como la constante de Faraday. Siendo la densidad de carga  $\rho_e = F(z_+c_+ + z_-c_-) = Fz(c_+ - c_-)$  y utilizando la relación anterior, se obtiene que la densidad de carga en el electrolito se puede escribir como,

$$\rho_e = 2Fzc_0 \sinh\left(\frac{zF\psi}{RT}\right) \quad [15]$$

y usando las ecuaciones [10] y [15] obtenemos la siguiente ecuación diferencial para el potencial eléctrico de la doble capa como

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{2Fzc_0}{\epsilon} \sinh\left(\frac{zF\psi}{RT}\right) \quad [16]$$

Donde  $c_0$  es la concentración alejada de la superficie de las placas. La ecuación [16] puede ser integrada explícitamente; sin embargo, para potenciales pequeños tales que  $zF\psi \ll RT$ , ésta se puede linealizar con ayuda de la expansión en series de Taylor, reduciéndose a la ecuación siguiente

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{\psi}{\lambda^2} \quad [17]$$

El parámetro  $\lambda$  que aparece en [17] se llama longitud de Debye y representa el tamaño de la doble capa eléctrica y se define como,



$$\lambda = \left( \frac{\epsilon RT}{2F^2 z^2 c_0} \right)^{1/2} \quad [18]$$

La aproximación empleada en la ecuación [17] se denomina *aproximación de Debye-Hückel*. Con las condiciones de frontera  $\psi(\pm 1) = \zeta$ , donde  $\zeta$  es el potencial eléctrico en la superficie del microcanal. Se puede obtener fácilmente entonces la solución para el potencial eléctrico en la doble capa eléctrica:

$$\psi(y) = \frac{\zeta}{\cosh\left(\frac{l}{\lambda}\right)} \cosh\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad [19]$$

Usando el potencial eléctrico en la doble capa eléctrica, obtenemos una expresión para la densidad de carga eléctrica en función del potencial de la doble capa eléctrica. Empleando las ecuaciones [10] y [17] obtenemos

$$\rho_e = -\epsilon \frac{\psi}{\lambda^2} \quad [20]$$

A partir de este punto es importante correlacionar el potencial inducido axialmente en el microcanal con el potencial debido a la doble capa eléctrica. Es de notarse que la corriente neta dentro del microcanal es cero debido a que el fenómeno se encuentra en estado estacionario. Por lo tanto, a partir de la ley de corrientes de Kirchhoff (que es un corolario de la ley de la conservación de la carga) obtenemos

$$\int_{-l}^l u \rho_e dA + A_c \sigma E_x F_{cs} = 0 \quad [21]$$

Donde el primer término de la ecuación [21] es la corriente debido al movimiento del fluido, y el segundo término es la corriente debido al potencial inducido en el microcanal.

En esta ecuación  $A_c$  es el área del canal,  $\sigma$  es la conductividad del fluido,  $F_{cs}$  es un factor que toma en cuenta la no electroneutralidad del electrolito debido a la presencia de las superficies cargadas del microcanal y cuyo valor es de uno por haber sido usada la suposición de pequeños potenciales de superficie,  $dA$  es el diferencial de área de dicho canal. Para nuestro modelo físico se tiene que  $dA = wdy$  y  $A_c = 2wl$ .

Usando las ecuaciones [9] y [20] se puede obtener una expresión para el potencial inducido que está en función del campo de velocidades dentro del microcanal y de la doble capa eléctrica. La ecuación [21] se convierte en

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\epsilon}{2l\sigma} \int_{-l}^l u \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dy \quad [22]$$

Ahora que ya están definidos todos los términos necesarios que engloban las fuerzas de cuerpo eléctricas dentro de las ecuaciones de Navier-Stokes en el microcanal, procedemos a hacer la siguiente sustitución  $p' = P - \frac{\epsilon}{2\lambda^2} \psi^2$  en las ecuaciones [4] y [5], esto con el fin de simplificar el sistema y facilitar el cálculo del potencial inducido (13). Con la sustitución mencionada anteriormente, obtenemos el siguiente sistema para la región 1:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [23]$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\epsilon}{\lambda^2} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad [24]$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad [25]$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\epsilon}{2l\sigma} \int_{-l}^l u \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dy \quad [26]$$

$$\psi(y) = \frac{\zeta}{\cosh\left(\frac{l}{\lambda}\right)} \cosh\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad [27]$$

$$Q_{os} = \int_{-l}^l u dA = \int_{-l}^l u w dy \quad [28]$$

## 4.2 Modelo analítico Región 2

Como se explicó anteriormente en el modelo físico, se considera que las placas paralelas no permiten la acumulación de cargas libres, lo que evita la generación de la doble capa eléctrica, esto implica una ausencia de fuerzas de cuerpo eléctricas. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones para la región dos está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [29]$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad [30]$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad [31]$$

$$Q_{os} = \int_{-l}^l u dA = \int_{-l}^l u w dy \quad [32]$$

## 5.-Orden de Magnitud

### 5.1 Orden de Magnitud: Región 1

Se considera que en la región 1, el ancho del microcanal es muy pequeño en comparación a la extensión de esta región, es decir  $l \ll H$ . Debido a esto, se hacen las siguientes consideraciones al orden de magnitud de las variables a determinar en el modelo.

$$x \sim H$$

$$y \sim l$$

$$u \sim u_c$$

$$v \sim v_c$$

$$\phi \sim \phi_c$$

$$\psi \sim \zeta$$

$$p' \sim \pi_D$$

[33]

Se puede apreciar que la coordenada axial y transversal son del mismo orden que las dimensiones del microcanal. El potencial  $\psi$  tiene la magnitud del potencial  $\zeta$  de la doble capa eléctrica, debido a que es el máximo valor que puede adquirir dicho potencial. La presión  $p'$  se considera es del mismo orden que la presión ósmotica de la membrana debido a que se considera que la caída de presión es muy pequeña debido al tamaño del

microcanal. El resto de los valores característicos para las velocidades y potencial inducido son determinados a continuación.

La velocidad axial característica se asume que es del orden del gasto osmótico partido por el área del microcanal, es decir

$$u_c \sim \frac{Q_{os}}{2wl} \quad [34]$$

Tomando los valores característicos y sustituyéndolos en la ecuación de continuidad [23], se obtiene que los términos en el miembro izquierdo son del mismo orden de magnitud, es decir

$$\frac{u_c}{H} \sim \frac{v_c}{l} \quad [35]$$

Despejando la velocidad característica transversal de la ecuación [35] y empleando la ecuación [34] obtenemos el orden de magnitud de ésta como

$$v_c \sim \frac{Q_{os}}{2wH} \quad [36]$$

Posteriormente suponemos que los términos viscosos y eléctricos de la ecuación [24] son del mismo orden, es decir

$$\mu \frac{u_c}{l^2} \sim \frac{\epsilon \zeta \phi_c}{\lambda^2 H} \quad [37]$$

El orden de magnitud del balance de fuerzas anterior corresponde con la descripción de un potencial de corriente inducido solamente por el campo de velocidades generado por la membrana osmótica. Esto corresponde justamente con la física del problema: establecer la

generación de potencia eléctrica gracias al gasto inducido dentro del microcanal mediante la ósmosis directa. De la ecuación [37] se obtiene el valor característico del potencial inducido en el microcanal, lo que produce la siguiente expresión:

$$\phi_c \sim \frac{\mu H}{\epsilon \zeta} \frac{Q_{os}}{2wl} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \quad [38]$$

## 5.2 Orden de Magnitud: Región 2

En la región 2 el ancho del microcanal es muy pequeño en comparación a la extensión de la región, es decir  $l \ll L$ . De manera similar a la región 1, el orden de magnitud de las variables de interés se puede escribir como

$$x \sim L$$

$$y \sim l$$

$$u \sim u_{cII} \quad [39]$$

$$v \sim v_{cII}$$

$$P \sim \pi_D$$

La presión en esta región es del mismo orden de magnitud que la presión osmótica de la membrana debido a que se consideran muy pequeñas las variaciones de la presión debido a la minúscula longitud de esta región. En conjunción, en ambas regiones las presiones son del mismo orden de magnitud que la presión osmótica de la membrana.

La velocidad axial característica en esta región es del mismo orden que el gasto osmótico dividido por el área del microcanal, es decir

$$u_{CH} \sim \frac{Q_{os}}{2wl} \quad [40]$$

Tomando los valores característicos anteriores y sustituyéndolos en la ecuación de continuidad [29], puede apreciarse que los términos correspondientes son del mismo orden de magnitud, por lo que puede obtenerse lo siguiente

$$\frac{u_{CH}}{L} \sim \frac{v_{CH}}{l} \quad [41]$$

Empleando la ecuación [40] podemos obtener entonces el orden de magnitud de la velocidad característica transversal de la región dada por

$$v_{CH} \sim \frac{Q_{os}}{2wL} \quad [42]$$

## 6.-Ecuaciones Adimensionales

### 6.1 Adimensionalización Región 1

Una vez establecido el orden de magnitud para la región 1, se pueden introducir en las sus ecuaciones de gobierno las siguientes variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{H}$$

$$Y = \frac{y}{l}$$

$$U = \frac{u}{u_c}$$

$$\varphi = \frac{\phi}{\phi_c}$$

[43]

$$V = \frac{v}{v_c}$$

$$\Psi = \frac{\psi}{\zeta}$$

$$\Pi = \frac{p'}{\pi_D}$$



Para llevar a cabo lo anterior, se utilizan las ecuaciones [23], [24], [25], [26], [27] y [28].

Esta sustitución arroja el siguiente sistema en variables adimensionales para la región 1:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad [44]$$

$$Re \alpha \left[ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = -\Pi_{D1} \frac{\partial \Pi}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial X} \quad [45]$$

$$Re \beta_1 \left[ U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \beta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \quad [46]$$

$$\frac{d\varphi}{dX} = -\tilde{\kappa} \int_{-1}^1 U \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} dY \quad [47]$$

$$\Psi(Y) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right) \quad [48]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U dY \quad [49]$$

Como puede apreciarse en la ecuación [45], en el proceso de adimensionalización se considera que los términos viscosos y los términos eléctricos son del mismo orden y compiten de igual forma entre ellos. Además, de manera homóloga se consideran del

mismo orden los términos de presión dentro del microcanal. En la ecuación [46] se considera que el término de presión es de orden unidad y por lo tanto se adimensionaliza respecto a él. A continuación se definen los números adimensionales que aparecen en el sistema asociado a la región 1.

$$Re = \frac{\rho u_c (2l)}{\mu}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{l}{H}$$

$$\xi = \frac{\lambda}{l}$$

$$\beta_1 = \frac{Q_{os} \mu}{4wH^2 \pi_D}$$

$$\beta_2 = \frac{Q_{os} \mu}{2wHl \pi_D}$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\epsilon^2 \zeta^2}{2\mu\sigma\lambda^2}$$

$$\Pi_{D1} = \frac{\pi_D/H}{\left(\frac{\epsilon\zeta\phi_c}{\lambda^2}\right)} = \frac{2\pi_D w l^3}{\mu H Q_{os}}$$

[50]

## 6.2 Adimensionalización Región 2

En base al orden de magnitud realizado anteriormente, se definen las siguientes variables adimensionales para la región 2:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{x}{L} \\ Y_2 &= \frac{y}{l} \\ U_2 &= \frac{u}{u_{cII}} \\ V_2 &= \frac{v}{v_{cII}} \\ \Pi_2 &= \frac{P}{\pi_D} \end{aligned} \quad [51]$$

Las variables definidas en [51] se introducen en el sistema formado por las ecuaciones [29], [30], [31], y [32] lo que permite escribir el siguiente conjunto de ecuaciones en variables adimensionales para la región 2:

$$\frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial V_2}{\partial Y_2} = 0 \quad [52]$$

$$Re \alpha_2 \left[ U_2 \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + V_2 \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} \right] = -\Pi_{D2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial Y_2^2} \quad [53]$$

$$Re \Lambda_1 \left[ U_2 \frac{\partial V_2}{\partial X_2} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Y_2} \right] = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial Y_2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial Y_2^2} \quad [54]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U_2 dY \quad [55]$$

Se puede apreciar en la ecuación [53] que los términos viscosos son de orden unidad debido a que son los principales efectos en esta región. En la ecuación [54] se considera el término de presión de orden unidad por ser el principal efecto en la dirección transversal . Los números adimensionales formados en esta región son los siguientes:

$$Re_2 = \frac{\rho u_{cII} (2l)}{\mu}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{l}{L}$$

$$\Lambda_1 = \frac{Q_{os} \mu}{4w L^2 \pi_D}$$

[56]

$$\Lambda_2 = \frac{\mu}{\pi_D l} \frac{Q_{os}}{2wL}$$

$$\Pi_{D2} = \frac{\pi_D/L}{\left(\frac{\mu u_{cII}}{l^2}\right)} = \frac{2\pi_D w l^3}{\mu L Q_{os}}$$

### 6.3 Simplificación de las Regiones 1 y 2

Los sistemas de ecuaciones adimensionales descritas para la región 1 y 2 son reducidos mediante la sustitución de los parámetros característicos asociados al fenómeno que son mostrados en la tabla 1.

Tabla1. Parámetros característicos
$\sigma \sim 10^{-1} [s m^{-1}]$
$\epsilon \sim 10^{-10} [C V^{-1} m]$
$\mu \sim 10^{-3} [kg m^{-1} s^{-1}]$
$\lambda \sim 10^{-9} [s m^{-1}]$
$\zeta \sim 10^{-2} [V]$
$H \sim 10^{-2} [m]$
$L \sim 10^{-2} [m]$
$l \sim 10^{-8} [m]$
$w \sim 10^{-3} [m]$
$Q_c \sim 10^{-17} [m^3 s^{-1}]$
$\pi_D \sim 10^6 [Pa]$

Con los parámetros proporcionados en la tabla 1 se pueden evaluar los números adimensionales obtenidos en [50] y [56]. Lo anterior conduce a una reducción de los sistemas de ecuaciones adimensionales de las regiones 1 y 2. La simplificación para las ecuaciones en ambas regiones queda como:

### Región 1

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad [57]$$

$$0 = -\Pi_{D1} \frac{\partial \Pi}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \tilde{\kappa} \Psi \int_{-1}^1 U \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} dY \quad [58]$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} \quad [59]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U dY \quad [60]$$

### Región 2

$$\frac{\partial U_2}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0 \quad [61]$$

$$0 = -\Pi_{D2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial Y_2^2} \quad [62]$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial Y_2} \quad [63]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U_2 dY \quad [64]$$

Las ecuaciones [57] a [64] conforman los sistemas de ecuaciones que componen el modelo físico a resolver, sujetos a las condiciones de frontera enunciadas en el siguiente apartado.

## 7.-Condiciones de frontera

El sistema de ecuaciones que constituye la región 1 se forma con las ecuaciones [57], [58], [59] y [60] y está sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

- a)  $U(\pm 1) = 0$  Condición de no deslizamiento en las paredes del microcanal.
- b)  $V(\pm 1) = 0$  Condición de impermeabilidad en las paredes del microcanal.
- c)  $\Pi(0) = d$  Condición de frontera de la presión al inicio de la región 1.
- d)  $\varphi(0) = 0$  Condición de frontera del voltaje al inicio de la región 1 (no hay acumulación de cargas al inicio de la región uno y por tanto el voltaje en este punto es cero).

El sistema de ecuaciones para la región 2 se conforma de las ecuaciones [61], [62], [63] y [64] y está sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

- e)  $\Pi_2(-1) = 1$  Presión osmótica de la membrana al inicio de la región 1.
- f)  $U_2(\pm 1) = 0$  Condición de no deslizamiento en las paredes del microcanal
- g)  $V_2(\pm 1) = 0$  Condiciones de impermeabilidad en las paredes del microcanal.

La constante  $d$  en la condición de frontera c) se obtiene a partir de la continuidad de las presiones de la región 1 y la región 2 y se expresa en variables adimensionales mediante la siguiente expresión,

$$\Pi_2(0) = \Pi(0)$$

## 8.-Soluciones analíticas de las Regiones

### 8.1 Solución analítica de la Región 1

El modelo analítico en la región 1 es un sistema integro-diferencial debido a las fuerzas de cuerpo eléctricas relacionadas al campo eléctrico inducido. Éste término está multiplicado por el parámetro  $\tilde{\kappa}$  cuyo valor es muy pequeño, y debido a ello es posible obtener una solución analítica por medio de métodos de perturbación.

La teoría de perturbación es una gran colección de métodos iterativos para obtener soluciones aproximadas de problemas que involucran al menos un pequeño parámetro. Estos métodos consisten en descomponer un problema en un número infinito de problemas relativamente más fáciles. Por lo tanto, la teoría de perturbación es principalmente útil cuando los primeros pasos revelan las más importantes características de la solución y el resto de ellas dan pequeñas correcciones.

Los métodos de perturbación consisten básicamente en tres pasos:

- 1.-Convertir el problema original en un problema de perturbación usando un parámetro pequeño, en nuestro caso  $\tilde{\kappa}$ .
- 2.-Asumir una expresión para la solución en la forma de una serie de perturbación y calcular los coeficientes de la serie.
- 3.-Recuperar la solución general al problema original, sustituyendo en la serie de perturbación el apropiado valor de  $\tilde{\kappa}$ .



Para nuestro caso planteamos una solución de perturbación en las cuales truncamos la serie hasta el segundo término debido al pequeño valor de  $\tilde{\kappa}$ , que en consecuencia hace que los términos restantes se vuelvan despreciables en comparación a los primeros. Lo anterior es equivalente a escribir estas expansiones mediante las expresiones siguientes:

$$U = U_0 + \tilde{\kappa}U_1 \dots$$

$$\Pi = \Pi_0 + \tilde{\kappa}\Pi_1 \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\kappa}\varphi_1 \dots$$

Los coeficientes de los términos en las serie de perturbación representan las soluciones para distintos ordenes del sistema definido mediante las ecuaciones [57], [58], [59] y [60]. En este caso, los coeficientes que tienen subíndice cero corresponden a las soluciones de orden cero, mientras que los coeficientes que tienen subíndice uno son las soluciones de primer orden. Las soluciones asintóticas obtenidas en la región 1 a partir del método de perturbación son las siguientes (para mayores detalles, véase el apéndice A):

$$U(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y^2) + \tilde{\kappa}\xi^2 \left[ 9 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 (1 - Y^2) + 6 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right) \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right) \right] \quad [65]$$

$$\Pi(X) = -\frac{3}{\Pi_{D1}}X - \frac{3}{\Pi_{D2}} + 1 + \tilde{\kappa} \left[ -\frac{18}{\Pi_{D1}}(\xi)^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 X \right] \quad [66]$$

$$\varphi(X) = 6\tilde{\kappa} \left[ \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right] X \quad [67]$$

Los ecuaciones [65], [66] y [67] son el campo de velocidades, el campo de presiones y el voltaje inducido en la región 1, respectivamente. En la sección 11 discutiremos con detalle estas soluciones.

## 8.2 Solución analítica de la Región 2

Las soluciones para la región 2 formada por el sistema de ecuaciones integrado por [61], [62], [63] y [64] son encontradas mediante métodos analíticos convencionales (Véase apéndice B). Tales soluciones se muestran a continuación:

$$U_2 = \frac{3}{2}(1 - \gamma_2^2) \quad [68]$$

$$\Pi_2 = -\frac{3}{\Pi_{D2}}(X_2 + 1) + 1 \quad [69]$$

## 9.- Solución numérica de la Región 1

El método de perturbación nos proporcionó una solución analítica para la región 1 como se mostró anteriormente; sin embargo, es necesario comprobar numéricamente dichas soluciones, además de averiguar cuál debe ser la cota superior mínima del parámetro de inducción para el cual la solución asintótica sigue siendo válida. En consecuencia, se procede a resolver numéricamente el sistema siguiente para la región uno:

$$0 = -\Pi_{D1} \frac{d\Pi}{dx} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \tilde{\kappa} \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \int_{-1}^1 U \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} dY \quad [70]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U dY \quad [71]$$

$$U_{(-1)} = U_{(1)} = 0$$

$$\Pi(0) = -\frac{3}{\Pi_{D1}} + 1 \quad [72]$$

Antes de proceder a la resolución de dicho problema, se usará la siguiente sustitución para poder emplear el método de separación de variables:

$$U = \frac{d\Pi}{dx} F(Y) \quad [73]$$

Con dicha sustitución se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones a resolver.

$$0 = \frac{d^2 F}{dY^2} - \tilde{\kappa} \left( \frac{1}{\xi} \right)^2 \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \int_{-1}^1 F(Y) \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} dY - \Pi_{D1} \quad [74-a]$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{2}{\int_{-1}^1 F(Y) dY} \quad [74-b]$$

$$F(-1) = F(1) = 0 \quad [74-c]$$

$$\Pi(0) = -\frac{3}{\Pi_{D1}} + 1$$

A partir de esta sustitución se obtiene una ecuación diferencial ordinaria no lineal de la cual se puede obtener la solución de  $F(Y)$ . Para la resolución de dicha ecuación se usa el *Método del disparo*, variante del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este método es apropiado para problemas de condiciones a la frontera de segundo orden. Para dicho método se hacen las siguientes sustituciones:

$$T_1 = F(Y) \quad [75]$$

$$T_2 = \frac{dF}{dY} \quad [76]$$

Por lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden con sus respectivas condiciones de frontera:

$$T'_1 = T_2$$

$$T'_2 = \tilde{\kappa} \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \int_{-1}^1 T_1(Y) \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} dY + \Pi_{D1}$$

[77]

$$T_1(-1) = 0$$

$$T_2(-1) = T'_1(-1) = d$$

$$T_2(1) = 0$$

El método del disparo consiste en encontrar el valor apropiado para  $T'_1(-1) = d$  de manera que se obtenga  $T_2(1) = 0$ . Una vez hecho esto, el problema se transforma de un problema de valores a la frontera, a un problema de condiciones iniciales.

Una vez obtenido numéricamente  $F(Y)$ , éste se emplea para calcular el gradiente de presión mediante la ecuación [74-b] (Nótese que esto muestra que el gradiente de presiones es constante) y posteriormente con el uso de la ecuación [73] conseguir el campo de velocidades. Ulteriormente, se resuelve mediante un método de Runge-Kutta de cuarto orden la siguiente ecuación diferencial con su respectiva condición inicial.

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{2}{\int_{-1}^1 F(Y) dY}$$

[78]

$$\Pi(0) = -\frac{3}{\Pi_{D1}} + 1$$

La solución de la ecuación [78] nos da el campo de presiones inducidos en el microcanal debido a la membrana osmótica y al campo eléctrico inducido. El gradiente del potencial

eléctrico en la dirección axial se obtiene de la ecuación [47], donde  $\frac{d\varphi}{dX} = \text{constante}$ . Para conocer el potencial electrostático (voltaje) generado en el microcanal se resuelve usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} = -\tilde{\kappa} \int_{-1}^1 U \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} dY$$

$$\varphi(0) = 0$$

[79]

## 10.- Comparación entre la solución analítica y la solución numérica

Las soluciones asintóticas de la región 1 dadas por las ecuaciones [65], [66] y [67] deben ser ratificadas para comprobar la validez de ellas. Ésto se hizo mediante la comparación de las soluciones numéricas de las ecuaciones [74], [78] y [79]. Además de comprobar la validez de las soluciones obtenidas mediante métodos de perturbación es necesario conocer para qué magnitud del parámetro  $\tilde{\kappa}$  siguen siendo válidas dichas soluciones.

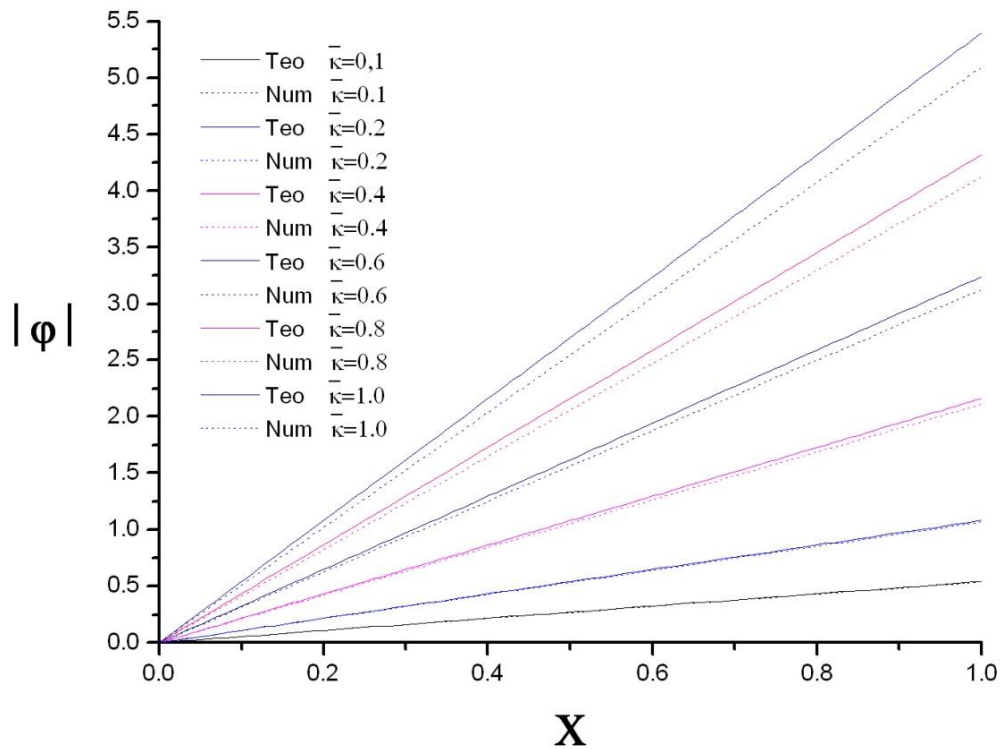


Figura 2. Comparación entre la solución teórica de la ecuación [67] y la solución numérica obtenida a partir de [74] y [79] para el voltaje adimensional  $\phi(X)$ .

La solución asintótica proporciona la solución global al modelo físico para valores de  $\tilde{\kappa} \leq 0.1$ . La diferencia del valor predicho mediante los métodos de perturbación y la

solución numérica comienza a incrementarse conforme el parámetro de inducción tome valores superiores a 0.1, es decir para  $\tilde{\kappa} > 0.1$ . Esto puede apreciarse en la figura 2.

Los datos de los valores característicos que se mencionaron anteriormente producen un  $\tilde{\kappa} \sim 0.01$ . Esto indica que las soluciones asintóticas predicen de manera satisfactoria el modelo físico planteado en este trabajo.



# 11.- Resultados

## 11.1 Resultados y análisis de las soluciones asintóticas

Las soluciones obtenidas mediante los métodos de perturbación permiten apreciar el fenómeno planteado y como es que se produce. El parámetro  $\tilde{\kappa}$  es el responsable directo del campo eléctrico inducido en el microcanal debido a las propiedades del fluido que circula a través de éste último. Por tal motivo a  $\tilde{\kappa}$  le denominamos *parámetro de inducción eléctrica*.

Las soluciones proporcionadas por las ecuaciones [74] y [78] para el campo de velocidades y presiones están compuestas por una solución de orden cero  $\tilde{\kappa}^0$  y una solución de primer orden  $\tilde{\kappa}^1$ . Las soluciones de orden cero representan la hidrodinámica del canal en ausencia de términos eléctricos. Ahora bien, las soluciones de primer orden muestran el efecto que produce el campo eléctrico inducido en el microcanal, y como éste afecta los perfiles de velocidad y presión en el mismo. La ecuación [57] por su parte muestra el comportamiento del voltaje inducido en la dirección axial. Nótese que solo tiene la solución de primer orden  $\tilde{\kappa}^1$ , esto indica que el voltaje inducido está fuertemente ligado a las propiedades del fluido. Para el caso en que  $\tilde{\kappa} \approx 0$ , se obtiene el problema hidrodinámico que se reduce al problema de Poiseuille, en el cual no está presente el flujo electroosmótico ya que se considera un fluido de trabajo neutro (sin cargas libres).

Puede apreciarse en la figura 2 que el voltaje inducido en el microcanal es directamente proporcional al parámetro de inducción eléctrica, lo que significa que  $\tilde{\kappa}$  rige la generación de energía eléctrica en el microcanal. Sin embargo, este parámetro tiene muy poca influencia en la presión y velocidad al interior del microcanal. Lo anterior se puede apreciar en la figura 3 y la figura 4 donde un cambio de 2 órdenes de magnitud en  $\tilde{\kappa}$  (i.e.

para valores de  $\bar{\kappa} = 0.01$  a  $\bar{\kappa} = 1.00$ ) produce una alteración ínfima en los perfiles. Esto quiere decir que el parámetro de inducción eléctrica no afecta de manera significativa la hidrodinámica del problema, pero es el encargado de producir todo el fenómeno de generación de potenciales eléctricos inducidos.

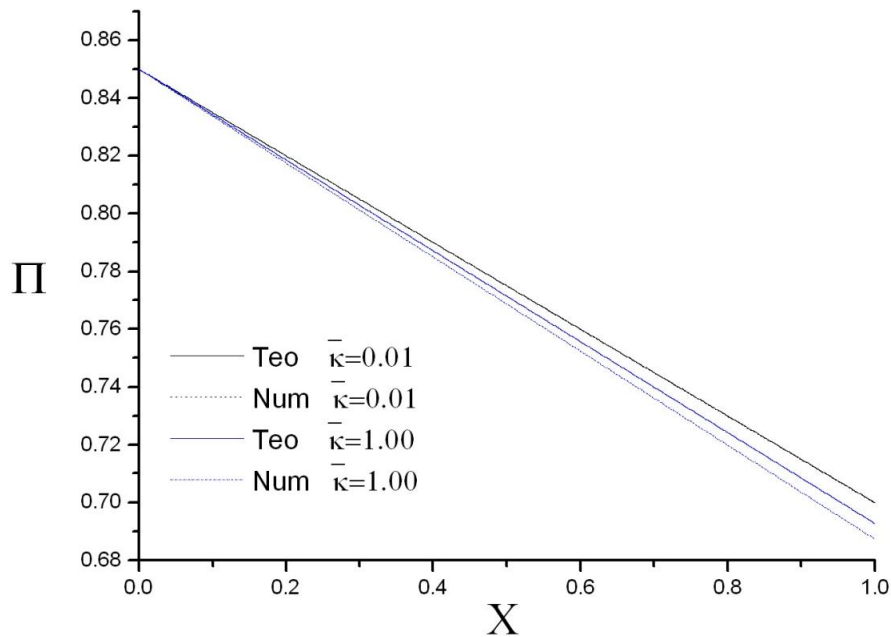


Figura 3. Comparación entre la solución teórica de la ecuación [66] y la solución numérica obtenida a partir de las Ecs. [74] y [78] para la presión adimensional en el microcanal  $\Pi(X)$ .

El gasto osmótico proporcionado por la membrana induce el movimiento del fluido dentro del canal que intrínsecamente produce un campo de velocidades dentro del mismo. Este perfil es el responsable junto con la doble capa eléctrica del campo eléctrico inducido (véase la ecuación [47]).

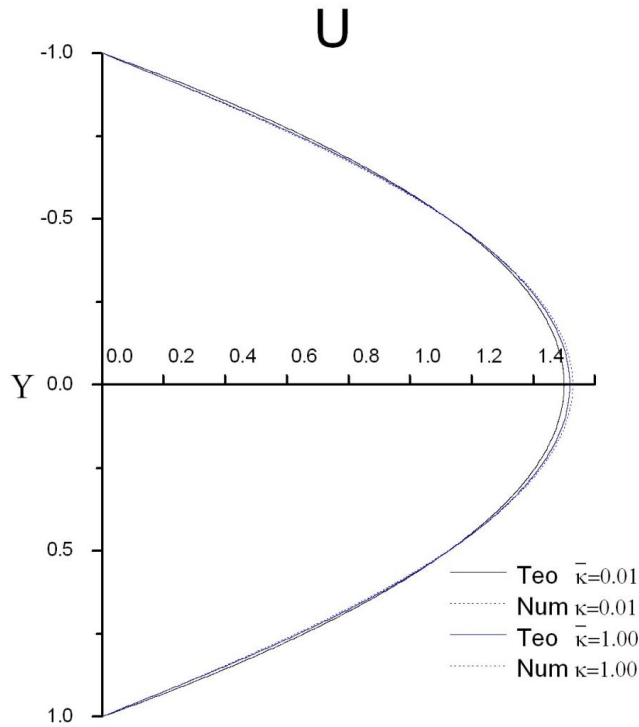


Figura 4. Comparación entre la solución teórica de la Ec. [65] y la solución numérica obtenida a partir de las ecs. [73] y [74] para el velocidad adimensional  $U(Y)$ .

La presión en la región 1 está influenciada principalmente por dos parámetros adimensionales que están relacionados directamente a la presión osmótica inherente a la membrana:  $\Pi_{D1}$  y  $\Pi_{D2}$  y que son parámetros que afectan directamente a las presiones inducidas en las regiones 1 y 2 respectivamente. Estos parámetros son los que tienen mayor influencia en la presión en la región 1.

El parámetro  $\Pi_{D1}$  afecta directamente la caída de presión inducida en el microcanal. Al observarse cuidadosamente la ecuación [73], podemos apreciar que la velocidad es directamente proporcional el gradiente de presión inducido en el microcanal y como se señaló anteriormente el voltaje inducido aumenta en proporción al perfil de velocidades (véase la ecuación [47]). Por lo antes descrito es deseable tener valores pequeños de  $\Pi_{D1}$

para obtener una mayor generación de potenciales eléctricos en el microcanal como se observa en la figura 5.

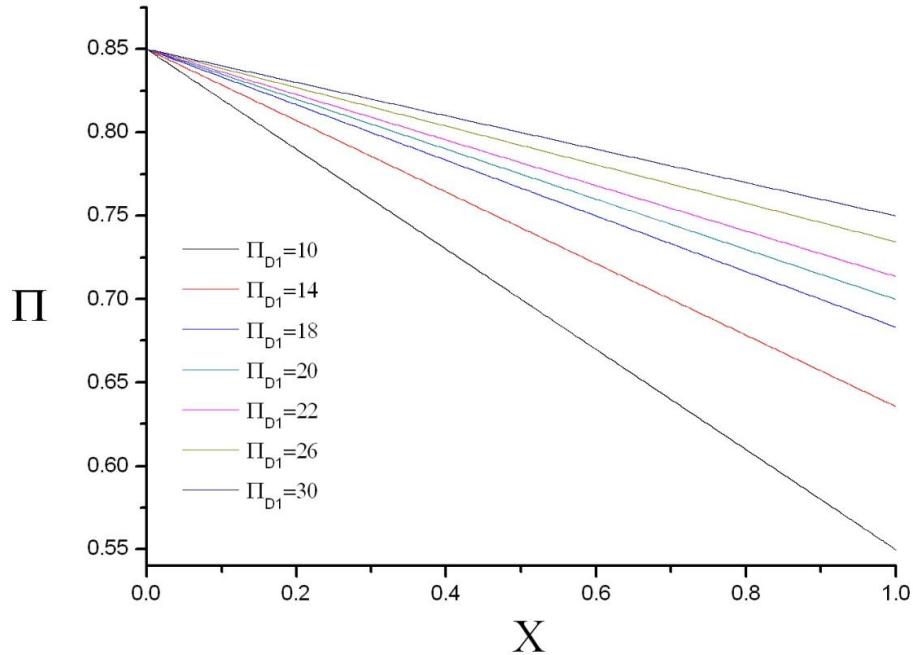


Figura 5. Familia de curvas de la presión adimensional en la región 1 debido a la variación del parámetro  $\Pi_{D1}$ .

La variación del parámetro  $\Pi_{D2}$  presente en la ecuación [66] muestra la influencia de la presión en la región 2 sobre la presión en la región 1. La figura 6 muestra una familia de curvas de la presión en la región 1 asociada a la variación del parámetro  $\Pi_{D2}$ . En tal gráfica se observa que la caída de presión en la región 1 es invariante a cambios del parámetro  $\Pi_{D2}$ ; sin embargo, dicha variación en el parámetro produce una traslación en los valores de la presión al inicio y al final de la región 1. Esto quiere decir que el gradiente de la presión a lo largo del microcanal no cambia, y como consecuencia la generación de potenciales eléctricos es independiente de  $\Pi_{D2}$ .

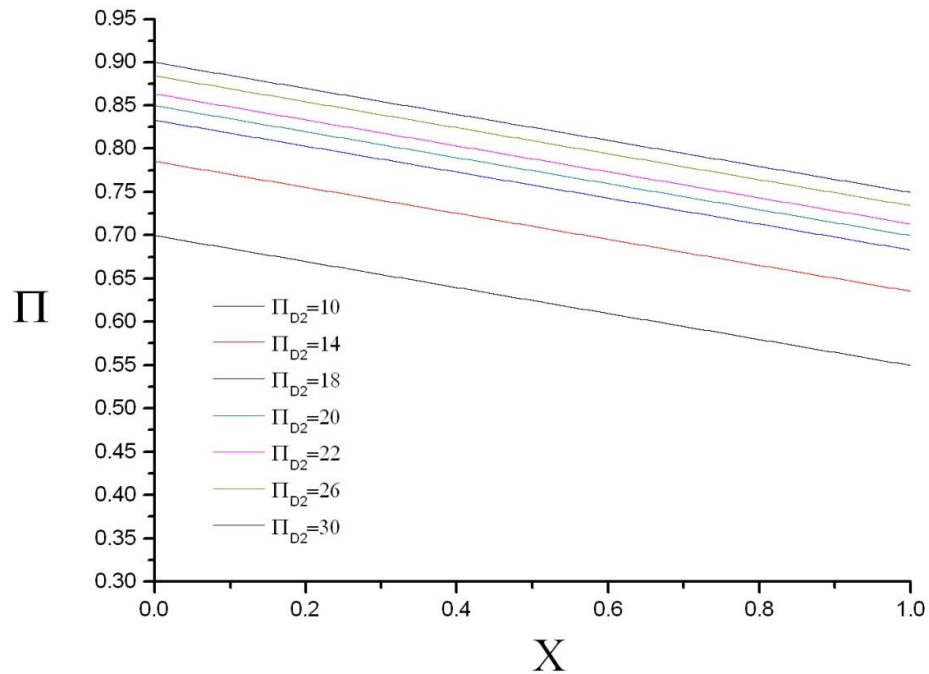


Figura 6. Familia de curvas de la presión adimensional en la región 1 debido a la variación del parámetro  $\Pi_{D2}$ .

El parámetro  $\xi$  es la razón entre la longitud de Debye y la mitad del tamaño del microcanal, y éste representa la fracción del microcanal que es ocupada por la doble capa eléctrica. Ésta razón produce una variación en los potenciales eléctricos inducidos. Para nuestro caso  $\xi = 0.1$ , lo que significa que la doble capa eléctrica abarca solamente una décima parte del microcanal. La situación  $\xi < 1$  es sostenida en este trabajo debido a que las dobles capas eléctricas formadas en las paredes no deben traslaparse. El traslape de dobles capas eléctricas en las paredes no es abordado en este trabajo. La anterior situación física corresponde a un límite donde la teoría lineal de la doble capa es insuficiente para describir el fenómeno físico ya que en esta situación se presenta la interacción eléctrica entre las dos capas que se forman en las paredes del microcanal. Dicha situación puede conducir a

inestabilidades eléctricas que están más allá de las consideraciones físicas necesarias para validar el planteamiento teórico del presente modelo.

El cociente  $\xi$  repercute directamente en la generación de potenciales generados, esto puede observarse en la Fig. 7. En dicha figura puede notarse que el voltaje generado es inversamente proporcional a  $\xi$ . Esto indica que entre menor sea el tamaño de la doble capa eléctrica generada se obtienen mayores potenciales dentro del microcanal. Por otro lado  $\xi$  no desempeña un papel importante en la hidrodinámica del fenómeno, permaneciendo prácticamente inalterables el campo de velocidades y el campo de presiones. El caso base del fenómeno presentado es de  $\xi = 0.10$ .

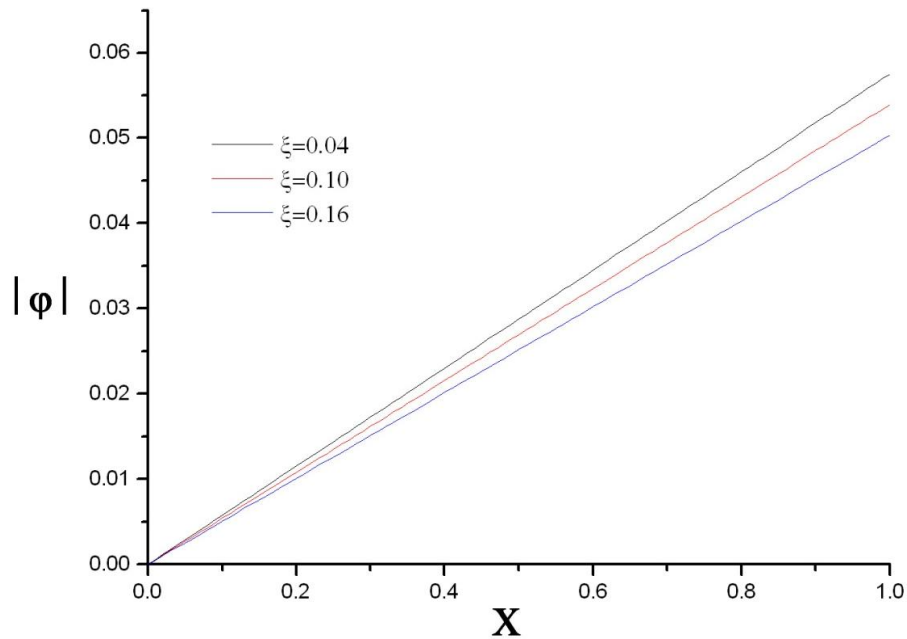


Figura 7. Familia de curvas del voltaje adimensional inducido en la región 1 debido a la variación del parámetro  $\xi$ .

Debe señalarse que las soluciones en variables adimensionales se obtuvieron a partir del supuesto de que la membrana osmótica proporciona un gasto dado constante  $Q_{os}$  el cual está en función de la permeabilidad hidráulica de la membrana  $A_m$  y de la presión osmótica

$\pi_D$  (véase ecuación [2]) los cuales juegan un papel muy importante. Se hace mención de esto ya que en variables físicas el gasto osmótico es un parámetro de suma importancia que influye directamente en los campos de velocidades y presiones, así como en el voltaje inducido, lo cual puede pasar desapercibido en variables adimensionales si no se hace énfasis en ello.

## 11.2 Potencia eléctrica generada

Una vez obtenido la relación que expresa la generación de potenciales eléctricos inducidos en el microcanal, es de sumo interés conocer cuál es la potencia que se puede obtener de él. Para conseguir esta información, definimos una potencia eléctrica adimensional, mediante la siguiente expresión

$$\Gamma = \frac{P}{P_c} \quad [80]$$

Donde  $P$  es la potencia obtenida en el microcanal y está en función de  $x$ , y  $P_c$  es la potencia característica en la región 1 y que definimos como

$$P_c = \sigma \frac{H}{2wl} \left[ \frac{\mu Q_{os}}{\epsilon \zeta} \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2 \right]^2 \quad [81]$$

La potencia adimensional del microcanal es obtenida a partir de la propia ley de Ohm y es una función de  $X$ ; es decir:

$$\Gamma(X) = \frac{P}{P_c} = [\varphi(X)]^2 \quad [82]$$

Se necesita entonces conocer la potencia media neta que se puede extraer del sistema, la cual es calculada mediante el valor medio de una función y se expresa como

$$\Gamma_{\text{Prom}} = \frac{\int_0^1 \Gamma(X) dX}{\int_0^1 dX} = 12\tilde{\kappa}^2 \left[ \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right]^2 \quad [83]$$

De la Ec. [83] se observa que la potencia promedio que entrega el microcanal está en función del parámetro de inducción eléctrica  $\tilde{\kappa}$  y del parámetro  $\xi$ . En la figura 8 se muestra una familia de curvas de la potencia media generada en el microcanal donde se aprecia la repercusión de los parámetros antes mencionados. Se puede ver que una disminución de la razón  $\xi$  produce una mayor generación de potencia, además de un incremento en la potencia proporcional al cuadrado del parámetro de inducción eléctrica  $\tilde{\kappa}$ . En variables físicas la potencia eléctrica neta generada por el microcanal es aproximadamente de  $10^{-4} \frac{\text{Watts}}{\text{m}^2}$ .

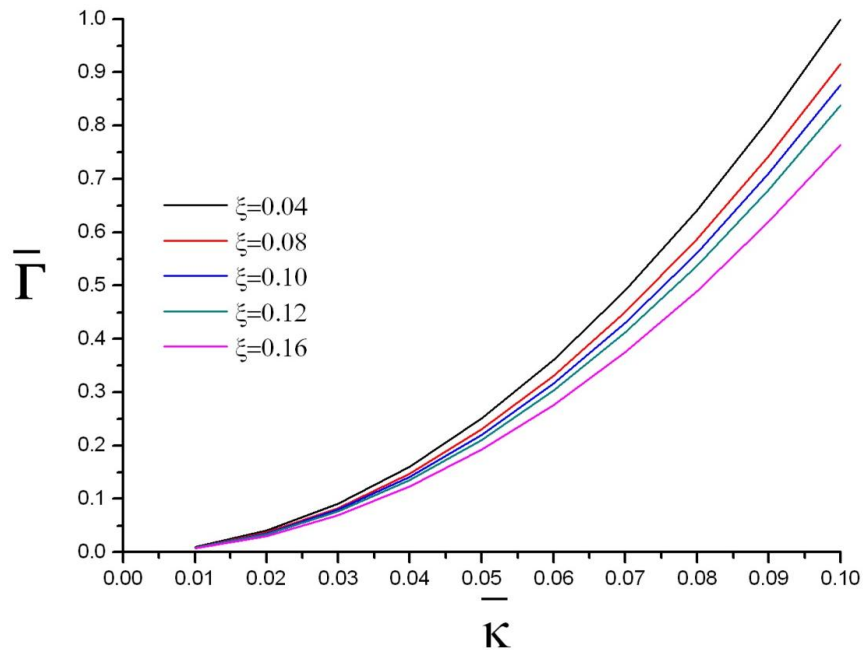


Figura 8. Potencia adimensional normalizada  $\bar{\Gamma} = \Gamma_{\text{Prom}}/\Gamma_{\text{Max}}$  generada en el microcanal con  $\Gamma_{\text{Max}} = 0.1086$



## 12.- Conclusiones

En el presente trabajo se han obtenido las soluciones analíticas para el campo de velocidades, el campo de presiones y el voltaje inducido dentro de un sistema híbrido de microcanal-membrana osmótica.

Se demostró que existe una dependencia directa del fenómeno con las propiedades del fluido, las cuales se sintetizan en un parámetro que llamamos de *inducción eléctrica*  $\tilde{\kappa}$  y que es el responsable de la generación de los potenciales eléctricos en el microcanal.

El campo eléctrico inducido en el microcanal no repercute de manera apreciable en el campo de presión y el campo de velocidades.

El voltaje inducido en el microcanal es dependiente del gasto que puede proporcionar la membrana osmótica.

La razón del tamaño de la doble capa eléctrica y el tamaño del microcanal  $\lambda/l$  juega un papel central en la generación de potenciales eléctricos, obteniéndose un incremento de éstos para razones más pequeñas; es decir, cuando el tamaño de la doble capa es varias veces menor al del tamaño del microcanal.

El gradiente de presiones influye directamente en el campo de velocidades, el cual a su vez repercute en la generación de potenciales eléctricos en el microcanal. Esta dependencia muestra que el gradiente de presión en el microcanal afecta la generación de potenciales eléctricos.

## Apéndice A. Solución Asintótica de la región 1

En el presente apartado se explica el procedimiento empleado para la obtención, mediante métodos de perturbación, de las soluciones para los campos de velocidades y presión, además del potencial inducido en el microcanal. Estas soluciones asintóticas se proponen de la forma siguiente:

$$U = U_0 + \tilde{\kappa}U_1 \dots$$

$$\Pi = \Pi_0 + \tilde{\kappa}\Pi_1 \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\kappa}\varphi_1 \dots$$

El método consiste entonces en la transformación de un sistema complejo de ecuaciones a varios más “sencillos” mediante el empleo de un parámetro de perturbación (en nuestro caso  $\tilde{\kappa}$ ), donde se obtienen distintas soluciones las cuales son superpuestas en forma de series de potencias. A continuación, se detalla la obtención de las ecuaciones de orden cero y de primer orden que son indispensables para generar la solución analítica completa al modelo.

## A.1 Solución de orden cero

El sistema de ecuaciones que describe las soluciones de orden cero son

$$\frac{\partial U_0}{\partial X} + \frac{\partial V_0}{\partial Y} = 0 \quad [\text{A-1}]$$

$$0 = -\Pi_{D1} \frac{d\Pi_0}{dX} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} \quad [\text{A-2}]$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial Y} \quad [\text{A-3}]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U_0 dY \quad [\text{A-4}]$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial X} = 0 \quad [\text{A-5}]$$

Dicho sistema está sometido a las siguientes condiciones de frontera

$$U_0(\pm 1) = 0$$

$$V_0(\pm 1) = 0$$

$$\Pi_0(0) = d$$

$$\varphi_0(0) = 0$$

[A-6]

Integrando dos veces la ecuación [A-2] y aplicando las condiciones de frontera para la velocidad axial  $U_0$  se obtiene lo siguiente

$$U_0(Y) = -\frac{1}{2} \Pi_{D1} \frac{d\Pi_0}{dX} (1 - Y^2) \quad . \quad [\text{A-7}]$$

Sustituyendo ahora el resultado anterior en la ecuación de conservación de masa [A-1], e integrando transversalmente se obtiene una ecuación diferencial que gobierna exclusivamente el comportamiento de la presión y que se puede escribir como:

$$\frac{d^2\Pi_0}{dX^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\Pi_0}{dX} = c \quad \text{[A-8]}$$

Como se puede percibir de una primera integración de la ecuación anterior se obtiene que el gradiente de presión axial es constante. Para determinar el valor de esta constante se procede se hace uso de la ecuación [A-4], de donde se puede obtener el valor de  $c = -\frac{3}{\Pi_{D1}}$ , y con la condición de frontera para la presión mostrada en la ecuación [A-6] el campo de presiones de orden cero se puede escribir como,

$$\Pi_0 = -\frac{3}{\Pi_{D1}}X + d \quad \text{[A-9]}$$

Más adelante en la subsección A.3 se encontrará el valor de la constante  $d$ . Sustituyendo el gradiente de presión en la ecuación [A-7] produce el siguiente resultado para la velocidad en el orden cero

$$U_0(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y^2) \quad . \quad \text{[A-7]}$$

Para el potencial eléctrico inducido de orden cero, se integra la ecuación [A-5] sujeto a la condición de frontera dada por la ecuación [A-6], esto da el siguiente resultado

$$\varphi_0(X) = 0 \quad \text{[A-8]}$$

## A.2 Solución de primer orden

El sistema de ecuaciones que describe las soluciones de primer orden es el siguiente

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0 \quad [\text{A-9}]$$

$$0 = -\Pi_{D1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} - \Psi \int_{-1}^1 U_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} dY \quad [\text{A-10}]$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial Y} \quad [\text{A-11}]$$

$$\int_{-1}^1 U_1 dY = 0 \quad [\text{A-12}]$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial X} = -\int_{-1}^1 U_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} dY \quad [\text{A-13}]$$

$$\Psi(Y) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right) \quad [\text{A-14}]$$

Dicho sistema está sometido a las siguientes condiciones de frontera

$$U_1(\pm 1) = 0$$

$$V_1(\pm 1) = 0$$

$$\Pi_1(0) = d_2$$

$$\varphi_1(0) = 0$$

[A-15]

Integrando dos veces la ecuación [A-10] y aplicando las condiciones de frontera para la velocidad axial  $U_1$ , se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de primer orden como

$$U_1(Y) = -\frac{1}{2}\Pi_{D1} \frac{d\Pi_1}{dX} (1 - Y^2) + 6\xi^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right) \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right) \quad [\text{A-16}]$$

Sustituyendo ahora el resultado anterior, en la ecuación de conservación de masa [A-9], e integrando transversalmente se obtiene

$$\frac{d^2\Pi_1}{dX^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\Pi_1}{dX} = c_1 \quad [\text{A-17}]$$

La ecuación [A-17] muestra como también el gradiente de presión axial de primer orden es constante. Posteriormente para encontrar el valor de la constante  $c_1$  se emplea la ecuación [A-12]. El valor que se obtiene es  $c_1 = -\frac{18}{\Pi_{D1}} \xi^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2$ , y con la condición de frontera para la presión, mostrada en la ecuación [A-15] produce que campo de presiones de orden uno se pueda escribir de esta manera

$$\Pi_1 = -\frac{18}{\Pi_{D1}} \xi^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 X + d_2 \quad [\text{A-19}]$$

Posteriormente, en la subsección A.3 se encontrará el valor de la constante  $d_2$ . Sustituyendo el gradiente de presión anterior en la ecuación [A-16], se produce el siguiente resultado para la velocidad de primer orden

$$U_1(Y) = 9\xi^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 (1 - Y^2) + 6\xi^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right) \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right) \quad [\text{A-20}]$$

Para el potencial eléctrico inducido de primer orden, se integra la ecuación [A-13] sujeta a la condición de frontera dada por la ecuación [A-15], lo cual general el potencial eléctrico de primer orden como

$$\varphi_1(X) = 6\tilde{\kappa} \left[ \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right] X \quad [\text{A-21}]$$

### A.3 Solución asintótica general

Las soluciones generales para el potencial eléctrico y los campos de velocidad y presión son obtenidas mediante la superposición de las soluciones de orden cero y primer orden desarrolladas en A.2 y A.3. Dichas soluciones generales son las siguientes

$$U(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y^2) + \tilde{\kappa}\xi^2 \left[ 9 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 (1 - Y^2) + 6 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right) \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{Y}{\xi}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right) \right] \quad [\text{A-22}]$$

$$\varphi(X) = 6\tilde{\kappa} \left[ \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right] X \quad [\text{A-23}]$$

$$\Pi(X) = -\frac{3}{\Pi_{D1}}X + d + 1 + \tilde{\kappa} \left[ -\frac{18}{\Pi_{D1}}(\xi)^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 X + d_2 \right] \quad [\text{A-24}]$$

Nótese que la solución para la presión, ecuación [A-24] tiene dos constantes indeterminadas:  $d$  y  $d_2$  que deben encontrarse. Para dicho propósito se emplea la condición de continuidad de la presión en la interfase de ambas regiones y que está dada como  $\Pi_2(0) = \Pi(0)$ ; aplicando la condición anterior se obtiene que,

$$\left[ -\frac{3}{\Pi_{D2}}(X_2 + 1) + 1 \right]_{X_2=0} = \left[ -\frac{3}{\Pi_{D1}}X + d + 1 + \tilde{\kappa} \left[ -\frac{18}{\Pi_{D1}}(\xi)^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 X + d_2 \right] \right]_{X=0} \quad [\text{A-25}]$$

$$-\frac{3}{\Pi_{D2}} + 1 = d + \tilde{\kappa}d_2 \quad [\text{A-26}]$$

De [A-26] se obtienen las constantes  $d = -\frac{3}{\Pi_{D2}} + 1$  y  $d_2 = 0$ , y cuyos valores son reemplazados en la ecuación [A-23], que produce la siguiente solución completa para el campo de presiones

$$\Pi(X) = -\frac{3}{\Pi_{D1}}X - \frac{3}{\Pi_{D2}} + 1 + \tilde{\kappa} \left[ -\frac{18}{\Pi_{D1}}(\xi)^2 \left( \xi \tanh\left(\frac{1}{\xi}\right) - 1 \right)^2 X \right] \quad [\text{A-27}]$$

Finalmente, las ecuaciones [A-22], [A-23] y [A-27] componen las soluciones generales al modelo físico planteado en este trabajo.



## Apéndice B. Solución de la región 2

El sistema de ecuaciones que describe la región 2 está compuesto por

$$\frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial V_2}{\partial Y_2} = 0 \quad [\text{B-1}]$$

$$0 = -\Pi_{D2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial Y_2^2} \quad [\text{B-2}]$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial Y_2} \quad [\text{B-3}]$$

$$2 = \int_{-1}^1 U_2 dY_2 \quad [\text{B-4}]$$

Dicho sistema está sometido a las siguientes condiciones de frontera

$$U_2(\pm 1) = 0$$

$$V_2(\pm 1) = 0 \quad [\text{B-5}]$$

$$\Pi_2(-1) = 1$$

Como primer paso, se integra dos veces la ecuación [B-2] y aplicando las condiciones de frontera para la velocidad axial  $U_2$  se obtiene

$$U_2(Y_2) = -\frac{1}{2} \Pi_{D2} \frac{d\Pi_2}{dX_2} (1 - Y_2^2) \quad [\text{B-6}]$$

Ahora, sustituyendo el resultado anterior en la ecuación de conservación de masa [B-1], e integrando transversalmente se obtiene

$$\frac{d^2\Pi_2}{dX_2^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\Pi_2}{dX_2} = c \quad \text{[B-7]}$$

Esto implica que el gradiente de presión axial es constante en esta región. Para determinar el valor de esta constante se utiliza la ecuación [B-4] y se obtiene el valor de  $c = -\frac{3}{\Pi_{D2}}$ , y con la condición de frontera para la presión mostrada en [B-5], se determina el campo de presiones para la región dos:

$$\Pi_2 = -\frac{3}{\Pi_{D2}}(X_2 + 1) + 1 \quad \text{[B-8]}$$

Sustituyendo este gradiente de presión en la ecuación [B-6], se produce el siguiente resultado para la velocidad en la región dos

$$U_2(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y_2^2) \quad \text{[B-9]}$$

Las ecuaciones [B-8] y [B-9] conforman las soluciones para el modelo físico de la región dos.

## **Bibliografia**

(1) Recent developments and future challenges of forward osmosis for desalination: a review; Jian-Jun Qin, Winson chee Loong Lay, Kiran Arun Kekre; *Desalination and Water Treatment* 39 (2012), 123-136.

(2) Forward osmosis for application in wastewater treatment: A review; Kerusha Lutchmiah, A.R.D. Verliefde, K. Roest, L.C. Rietveld, E.R. Cornelissen; *Water Research* 58 (2014), 179-197.

(3) Synthesis and characterization of thin film nanocomposite forward osmosis membrane with hydrophilic nanocomposite support to reduce internal concentration polarization; D. Emadzadeh, W.J. Lau, T. Matsuura, A.F. Ismail, M. Rahbari-Sisakht; *Journal of Membrane Science* 449 (2014), 74-85.

(4) Osmotic power with Pressure Retarded Osmosis: Theory, Performance and trends- A review; Fernanda Helfer, Charles Lemckert, Yuri G. Anissimov; *Journal of Membrane Science* 453 (2014), 337-358.

(5) Water Salination: A Source of Energy; Richard S. Norman; *Science, New Series* Vol. 186 No 4161, 350-352.

(6) Osmosis in porous media: A review of recent studies; Igor Medved, Robert Cerny; *Microporous and Mesoporous Materials* 170 (2013), 299-317.

(7) Static Dielectric Electrolyte permittivity in electric double layer; A. I. Ioanid, R. Mircea, T. M. Ciuceanu; *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures* Vol. 6 No. 3, 1427-1434.

- (8) Streaming potential for microchannels of arbitrary cross-sectional shapes for thin electric double layers; H.M. Parga, J.Y. Lim; Journal of Colloid and Interface Science 336 (2009), 834-841.
- (9) Laminar flow in channels with porous walls, revisited; Sandepp K. Karode; Journal of Membrane Science 191 (2001), 237-241.
- (10) Laminar Flow in Channels with Porous Walls, Abraham S. Berman, Journal of Applied Physics Vol. 24 No. 9, 1232-1235.
- (11) Further Investigation of Laminar flow in channels with porous walls; S.W. Yuan; Journal of Applied Physics (1956), Vol. 27 No. 3, 267-269.
- (12) An analysis of induced pressure fields in electroosmotic flows through microchannels; Yonghao Zhang, Xiao-Jun Gu, Robert W. Barber, David R. Emerson; Journal of Colloid and Interface Science 275(2004), 670-678.
- (13) Electro-Osmosis on Inhomogeneously Charged Surfaces; Armand Ajdari; Physical Review Letters (1995) ; Volume 75 No. 4, 755-758
- (14) Generating high pressure sub-microliter flow rate in packed in microchannel by electroosmotic force: potential application in microfluidic systems; Lingxin Chen, Jiping Ma, Feng Tan, Yafeng Guan; Sensors and Actuators B 88 (2003), 260-265.
- (15) A method of producing electrokinetic power through forward osmosis, Kar Cherng Hon, Cunlu Zhao Yang, Seow Chay Low, Applied Physics Letters 101,143902 (2012).
- (16) Electrokinetic Power Generation by Forward Osmosis, Technology in the Spotlight: Energy & Environment; International Power Institute (IPI) Singapore (2012).

- (17) Novel Electrokinetic Power Generation by Forward Osmosis, Charles Yang Chun, Hon Kar Cherng, Low Seow Chay, *Innovation* Vol. 11 No. 1, 2012, 64-66.
- (18) Energy Conversion from Salinity Gradients by Forward Osmosis-Electrokinetics, Yanmei Jiao, Chun Yang and Yuejun Kang, *The Journal of Physical Chemistry* 2014, 118,10574-10583.
- (19) On the competition between streaming potential effect and hydrodynamic slip effect in pressure-driven microchannel flows; Cunlu Zhao, Chun Yang; *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 386 (2011), 191-194.
- (20) Combined effects of streaming potential and wall slip on flow and heat transfer in microchannels, D.K. Tan, Y. Liu., *International Communications in Heat and Mass Transfer* 53 (2014), 39–42.
- (21) *Modeling Axisymmetric Flows, Dynamics of Films, Jets, and Drops*; Stanley Middleman, Academic Press, 33-38.
- (22) *Mass Transfer*, Thomas K. Sherwood, Robert L. Pigford, Charles R. Wilke, International Student Edition, 84-86.
- (23) *Physicochemical Hydrodynamics, an Introduction*; Ronald F. Probstein; Wiley-Interscience Publication, Second Edition.
- (24) *Electrokinetic and Colloid Transport Phenomena*; Jacob H. Masliyah, Subir Bhattacharjee; Wiley Interscience, A John Wiley & Sons, Inc. Publication
- (25) *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I, Asymptotic Methods and Perturbation Theory*; Carl M. Bender, Steven A. Orszag; Springer.

(26) Numerical Methods for Engineers; Steven C. Chapra, Raymon P. Canale; Fifth Edition  
Mg Graw Hill.

(27) Ecuaciones Diferenciales; Richard Bronson; Tercera Edición Mg Graw Hill.

(28) Modeling concentration polarization in reverse osmosis processes; Suhan Kim, Eric  
M. V. Hoek, Desalination 186 (2005), 111-128.