



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

*“CONTROL DE ROBOT PLANAR DE DOS GRADOS
DE LIBERTAD”*

T E S I S

Que para obtener el Título de:
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

JOSÉ DANIEL PANIAGUA CAMPOS



Asesor de Tesis: M. en I. Fernando Macedo Chagolla
Co Asesor de Tesis: M. en I. Sabino Henry Escamilla Toloza

Nezahualcóyotl, Estado de México

2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero dar gracias a mi familia por confiar en todo momento en mí y esperar siempre las mejores cosas en todo lo que hago. ¡Los quiero a todos!

A mis padres Noemi y Rodolfo, por la paciencia y el respaldo que me han brindado durante tantos años, agradezco que siempre han estado ahí para apoyarme en cada decisión que he tomado, he aprendido mucho de todo lo que han hecho para que yo pueda ser alguien en la vida, en ocasiones faltan las palabras para expresar lo que significan para mí... ¡los amo!

A mi hermano Gustavo por demostrarme que todo propósito de ser diferente del resto siempre nos acerca un paso más al éxito.

A mi abuelita Laura por esas charlas tan enriquecedoras y llenas de sabiduría que siempre han dado lugar a debatir la racionalidad de las cosas, gracias por alentarme siempre a ser mejor día a día y enfrentar los problemas con la mejor disposición, gracias por todo tu apoyo.

Agradezco al maestro Chagolla por la confianza, y al maestro Henry por ser un buen amigo y alentarme seguir confiando en mi capacidad para ser mejor profesional y personalmente.

Objetivo General

Controlar un Robot Planar de dos grados de libertad para lograr que el efector final sea capaz de posicionarse sobre un punto determinado en el plano cartesiano a través de la especificación de un conjunto de coordenadas que representan a dicho punto en el espacio cartesiano.

Planteamiento del Problema

El presente proyecto surge con la idea de generar material que permita llevar a cabo un estudio más a fondo acerca del análisis y control de robots manipuladores utilizando diversos medios para ello. Una de las principales motivaciones para llevar a cabo el trabajo es la de lograr en trabajos futuros controlar un robot por medio del reconocimiento de elementos visuales.

De esa manera, se encontró la problemática de crear un sistema que permitiera controlar ciertos aspectos de un robot para lograr que este cumpla con un propósito específico, el cual en un principio consiste únicamente en posicionar al efector final sobre un punto determinado sobre el plano a través de la especificación de un conjunto de coordenadas.

Con la problemática surgen una serie de necesidades que es importante resolver para dar solución a lo que se plantea en el objetivo general.

La primera necesidad surge de la manera en cómo se habrán de comportar las articulaciones del robot y como habrá de indicársele al robot que se ubique en una determinada posición. Para ello se consideró realizar el análisis cinemático del robot, para determinar de esa manera, en términos de las coordenadas articulares, la postura del robot sobre el punto de llegada.

La segunda de ellas se encuentra en resolver el problema de comunicar los resultados que se obtienen de la cinemática con los motores en el robot. Para resolver esta problemática resulta necesario contar con un sistema de adquisición de datos que permita enlazar los cálculos, para esta parte será necesarios emplear una Tarjeta Arduino UNO como tarjeta de adquisición de datos.

Justificación

El presente trabajo se realizó con el propósito de generar material útil para realizar posteriores trabajos el estudio de robots manipuladores, es por ello que se elaboró un prototipo de Robot Planar sobre el cual se realizó un análisis cinemático y se diseñó un sistema de control capaz de comunicar los resultados del análisis a las articulaciones del robot.

Además del prototipo se llevó a cabo una recopilación de los conceptos que son aplicados en el análisis de los robots manipuladores, como la cinemática directa e indirecta. Estos conceptos se aplicaron al robot de dos grados de libertad, sin embargo, los mismos pueden ser utilizados para trabajar con cualquier configuración para los diferentes tipos de manipuladores existentes.

La aplicación de tecnologías se consideró tomando en cuenta dos factores, costos y compatibilidad para trabajar. En lo referente al costo se halló que una forma de realizar la adquisición de datos de manera económica lo más útil es emplear una Tarjeta Arduino; por la parte de la compatibilidad, Arduino te permite enlazar con diferentes plataformas como Simulink®, por lo cual en conjunto con su bajo costo lo hace ideal para realizar el montaje de prototipos como el Robot Planar.

Finalmente se tomó en cuenta que el micro controlador de la tarjeta es reprogramable, lo que lo hace útil en nuevas aplicaciones para el robot, las sentencias de control sería diferentes, sin embargo Arduino seguirá manteniendo sus salidas constantes. Una capacidad que tienen las Tarjetas Arduino y por lo cual se decidió que fuera con ella que se construyera el sistema de control son las librerías pre establecidas y que permiten control una gran variedad de dispositivos electrónico, como es el caso de los servomotores.

Resumen

Cuando se habla de robots manipuladores se tiene delante una variedad de conceptos y aplicaciones demasiado extensa y que se encuentran actualmente en un proceso de crecimiento dentro del campo industrial. Las características de los manipuladores actuales se están adaptando a las tareas que surgen de los requerimientos y necesidades de la industria, especialmente en la manufactura.

Entre los aspectos que son necesarios tratar en el estudio y análisis de estos mecanismos se encuentra el análisis cinemático, ya que sobre este análisis se fundamentan tanto el control como el diseño mecánico.

Los resultados obtenidos a través del análisis de la cinemática de los robots manipuladores determinan la capacidad que estos tendrán para ejecutar una tarea y cubrir un campo de trabajo sin que se comprometan sus características mecánicas, es así como de este análisis se desprenden dos conceptos fundamentales, la matriz Jacobiana y las singularidades.

De acuerdo con los conceptos mencionados, el objetivo general de la presente investigación consiste en analizar de manera cinemática un Robot Planar de dos grados de libertad, de manera que se obtenga de dicho análisis la matriz Jacobiana correspondiente y en base a ella, y a una serie de criterios, entre los cuales destaca la existencia de una matriz inversa, el robot pueda ser capaz de alcanzar un punto y detectar cuando éste se encuentre con alguna singularidad.

La solución del análisis cinemático se realiza dentro de una serie de algoritmos diseñados para que, en base a la especificación de un par de coordenadas cartesianas, correspondientes a un punto en un plano, el robot pueda decidir por sí sólo si estas generan un punto solucionable sobre el cual puede actuar.

Con el fin de emplear tecnologías actualmente en uso y que resultaran estas ser las más idóneas para los resultados esperados, se llevó a cabo la integración de Arduino y Simulink®, de manera que gracias a un protocolo diseñado específicamente para enlazar ambas plataformas, pudo emplearse un Arduino Uno como tarjeta de adquisición de datos para comunicar con el robot. De esa forma, el diseño conceptual del control involucra la resolución de la cinemática del robot y el envío de datos al micro controlador de manera que se pueda observar el comportamiento del prototipo empleado para el análisis.

Índice General

CAPÍTULO 1. GENERALIDADES	1
1.1. LA ROBÓTICA	2
1.2. DEFINICIÓN DE ROBOT.....	5
1.3. ROBOTS INDUSTRIALES.....	8
1.3.1. <i>Grado de Libertad</i>	10
1.3.2. <i>Clasificación de los Robots Industriales</i>	12
1.4. ROBOT PLANAR	18
CAPÍTULO 2. CINEMÁTICA DEL ROBOT	20
1.1. CONCEPTOS MATEMÁTICOS	21
1.2. ANÁLISIS CINEMÁTICO	28
1.2.1. <i>Análisis Cinemático Directo</i>	29
1.2.2. <i>Análisis Cinemático Inverso</i>	32
1.2.2.1. Análisis de la posición del Robot Planar.....	36
1.2.2.2. Análisis de la velocidad del Robot Planar.....	37
1.2.2.3. Análisis de la aceleración del Robot Planar	41
CAPÍTULO 3. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL.....	43
1.1. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS	43
1.2. TARJETA DE ADQUISICIÓN DE DATOS	45
1.2.1. <i>Tarjeta Arduino Uno</i>	46
1.3. SIMULINK®	48
1.3.1. <i>Arduino IO</i>	49
1.3.2. <i>Servomotores</i>	51
1.3.3. <i>Diseño Conceptual del Sistema de Control</i>	54
CAPÍTULO 4. PRUEBAS DEL PROTOTIPO.....	62
1.4. ENSAMBLE DEL PROTOTIPO	62
1.5. PRUEBAS DINÁMICAS	64
1.6. MEJORAS AL PROTOTIPO.....	76
CAPÍTULO 5. CONCLUSIÓN.....	78
ANEXOS	80
TABLA DE FIGURAS	82
BIBLIOGRAFÍA	83

Capítulo 1. Generalidades

En ésta primera sección, de manera introductoria, se abordan los conceptos más generales, así como el desarrollo histórico, del surgimiento de la Robótica como una rama de la ciencia y la tecnología modernas, desde la primera percepción que se tuvo acerca de los robots, cuando estos se vislumbraban únicamente como una idea visionaria sobre el futuro.

Es por ello que al inicio del capítulo se presenta el concepto de la Robótica, y al mismo tiempo, se desenvuelve el concepto de robot tomando en cuenta la primera vez que se utilizó el término en el cine y obras de ciencia ficción, pasando por Asimov y la propuesta hecha con sus tres leyes, así como el momento en que el estudio de los sistemas robóticos comenzó a avanzar significativamente y que finalizara con la formalización del concepto de robot como una herramienta de tipo industrial.

En seguida, en la parte central del capítulo, se toma el concepto de Robot Industrial para presentar una clasificación cinematográfica de los diferentes tipos de robots que se pueden encontrar en servicio en la industria, de los cuales se hace una breve indicación de los procesos en donde es más común que tengan aplicación.

Dentro de la clasificación de los robots, existe el concepto de grado de libertad, el cual se define como una relación directa entre el número de articulaciones y la cantidad de actuadores que es necesario accionar para lograr la correcta postura del robot, conocer previamente el grado de libertad permite hacer una estimación sobre el tipo de mecanismo que se analiza, desde el punto de vista de las singularidades, y desde este punto de vista, generar acciones programables para la evasión de dichas configuraciones.

Por último, se hace la conceptualización del Robot Planar, que se observa en el prototipo y sobre el cual se ha realizado el análisis cinemático, partiendo del concepto establecido previamente y que permite determinar la cantidad de grados de libertad presentes en un Robot Industrial.

1.1. La Robótica

Hasta el momento no se tiene bien establecida una fecha que indique el momento exacto del surgimiento de la Robótica como rama de la ciencia y la tecnología, sin embargo, muchos coinciden en decir que ha tenido un desarrollo constante a lo largo de los años.

En un principio, la idea de los robots surgió de la visión futurista de contar con máquinas que tuvieran demasiado parecido al ser humano, que fueran capaces de imitar y aprender del comportamiento natural de las personas, y que al mismo tiempo, fueran capaces de percibir y razonar, de ser inteligentes y autosuficientes.

De esta manera el primero que empleo de forma concreta el nombre de robot, fue el escritor checo Karel Capek¹ en su obra Rossum's Universal Robot (R.U.R., 1921)².

En esta obra de ciencia ficción, los robots involucrados eran andróides³ fabricados a partir de una fórmula que había sido obtenida por un científico de nombre Rossum. En esta obra se describe también como en un momento los robots al ser alterados en su percepción descubren de qué manera los humanos los mantienen esclavizados, por lo que estos se rebelan contra ellos, trayendo al final la dominación y destrucción de la raza humana por las máquinas.

Es importante mencionar que la palabra robota, de la cual se desprende el término robot, proviene del eslavo y hace referencia al trabajo que se realiza repetidamente.

“La palabra robot se introdujo...en 1921 con el drama satírico R.U.R. de Karel Capek...En éste trabajo, los robots son máquinas que se asemejan a los seres humanos, pero que trabajan sin descanso.” (K.S. Fu, col., 1988, pág. 4).

¹ Ver más en <http://www.biografiasyvidas.com/>, (Vidas y Biografías. La enciclopedia bibliográfica en línea, 2016).

² Ver más en <http://universodecienciaficcio.blogspot.mx/2011/06/1921-rur-karel-capek.html>, (Vidas y Biografías. La enciclopedia bibliográfica en línea, 2016).

³ Autómata con figura de hombre (RAE, 2016).

Situados aún dentro de la ciencia ficción, uno de los mayores impulsores en la visión futurista del mundo, fue el escritor de origen ruso Isaac Asimov⁴, quien en una de sus obras dio un propósito general a los robots y sentó las primeras bases del comportamiento que estos deben seguir en presencia de un humano. Con la propuesta hecha en sus Leyes Fundamentales de la Robótica Asimov creó un nuevo paradigma en el tema.

Las Tres Leyes Fundamentales de la Robótica⁵

1. Un robot no puede perjudicar a un ser humano, ni con su inacción permitir que un ser humano sufra daño.
2. Un robot ha de obedecer las órdenes recibidas de un ser humano, excepto si tales órdenes entran en conflicto con la primera ley.
3. Un robot debe proteger su propia existencia mientras tal no entre en conflicto con la primera o segunda ley.

Con todo lo que había surgido a partir de la ciencia ficción, hasta ese punto, y más allá de las tres leyes, la percepción generalizada de un robot o sistema robótico era la de “...una máquina que, independientemente de su exterior, es capaz de modificar el ambiente en el cual está operando” (Sciavicco and Siciliano, 2000, pág. 2).

En la actualidad, un sistema robótico corresponde de manera más apropiada a un sistema que es capaz de percibir e interpretar para realizar acciones de manera autónoma⁶. Cada una de estas funciones está relacionada con una parte específica del robot, haciendo que de manera conjunta se forme un sistema de acciones coordinadas que doten de funcionalidad al mismo.

La capacidad perceptiva corresponde al llamado sistema propioceptivo, que se encuentra a nivel sensorial, esto es, se encuentra en los sensores que se colocan en distintos puntos del robot y que se encargan de medir un conjunto de variables físicas que rodean al sistema, y que juegan un papel fundamental en su correcto funcionamiento.

⁴ Ver más en <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/asimov.htm>, (Vidas y Biografías. La enciclopedia bibliográfica en línea, 2016).

⁵ Barrientos (1997), *Fundamentos de Robótica*, p.4.

⁶ Siciliano (1996), *Modelling and Control of Robot Manipulators*, p.2.

Una vez que el robot ha tomado lectura del estado físico dentro del cual se encuentra, el siguiente paso es el de toma de decisiones para generar una lista de instrucciones que den paso a una secuencia de movimientos o acciones coordinadas.

El sistema interpretativo entonces, corresponde a un conjunto de líneas de programación, diseñadas con un propósito específico, que toman como datos de entrada los resultados en la toma de lecturas a nivel sensorial, analizan y descartan opciones en base a algún tipo de razonamiento, y es a través de este proceso que se generan las instrucciones que gobiernan el accionar del robot.

Por último encontramos un conjunto de mecanismos que se accionan de acuerdo a las decisiones tomadas por la parte de la programación, son estos mecanismos los encargados de dotar de movilidad al robot, de forma que pueda interactuar en un entorno de trabajo con otras máquinas y operarios humanos en el desarrollo de las tareas para las cuales fue ensamblado y programado.

Si bien la visualización de un robot tuvo que ver en mayor medida con el cine y la imaginación sobre cómo sería un futuro en el que todo se moviera de manera automatizada, en algún punto de la historia alguien intuyó que los robots podrían ser parte de una realidad en la que el ser humano pudiera verse exento de labores que le resultaran incómodas, peligrosas o que requirieran de un esfuerzo que solo una máquina fuera capaz de realizar.

A partir de ese momento, las diferentes ramas de la ingeniería, ciencia y tecnología tomaron mayor interés en el estudio de estos nuevos sistemas, en la búsqueda de nuevos dispositivos que revolucionaran el ámbito industrial.

Ciencias como la computación, la electrónica, la matemática y la mecánica, comenzaron a hacer aplicaciones de diversas teorías útiles para el análisis de los sistemas robóticos, de manera que pudieran surgir dispositivos mejorados en cada nueva aplicación.

De esa manera, comenzaron a sentarse las bases para el surgimiento de una nueva rama de la ciencia y la tecnología, a la cual se le conoció como Robótica, la cual ha sido asociada desde su aparición, y de manera coloquial como la rama de la ciencia que se dedica al estudio y desarrollo de los robots.

Definición 1.1. Robótica

“La robótica es una disciplina científica que aborda la investigación y desarrollo de una clase particular de sistemas..., denominados robots manipuladores, diseñados para realizar una amplia variedad de aplicaciones...” (Reyes Cortés, 2011, pág. 3).

La definición hecha por Reyes Cortés (2011) es una sola concepción, en donde el estudio de los robots se concentra en los dispositivos propicios para su implementación como herramienta en el ámbito industrial.

Aunque bien, los tipos de robots que se pueden observar actualmente son variados, desde los robots móviles, teledirigidos, aéreos, humanoides, entre otros, las mayores aplicaciones industriales corresponden a una clasificación especial dentro de los robots.

Esta clasificación corresponde a los denominados Robots Industriales, conocidos también como robots manipuladores, o simplemente manipuladores, y que en un inicio formaron la parte medular en el diseño de este tipo de dispositivos autónomos, útiles en estos tiempos para múltiples propósitos.

1.2. Definición de Robot

“La sustitución del operador por un programa de ordenador que controlase los movimientos del manipulador dio paso al concepto de robot.” (Barrientos, 1997, pág. 5)

Los primeros robots existentes en el terreno industrial correspondieron con las configuraciones esférica y antropomórfica, aunque no tardó demasiado en que surgiera la necesidad de contar con un mecanismo cuyo propósito fuera el de manipular y ensamblar, que tuviera un bajo costo de fabricación, y que no contara con más de dos o tres grados de libertad, lo cual lo volvería mayormente controlable. Es así como uno de los primeros robots en surgir en la escena fuera el robot SCARA⁷.

⁷ Selective Compliance Assembly Robot Arm.

Los primeros robots manipuladores tenían una naturaleza totalmente mecánica, es decir, aunque mínima, aún requerían de la participación de un operario para realizar una acción por completo. Con el paso del tiempo y la creciente necesidad de contar con mecanismo más versátiles, se comenzó a añadir partes neumáticas que permitieran realizar un trabajo más pesado o de mayor complejidad para el operario, con esto se dio paso a los sistemas electro neumáticos aplicados en robots.

Tiempo después, fue necesario la introducción de sistemas electrónicos y neumáticos que permitieran al sistema una mayor precisión. El creciente desarrollo de la computación, permitió crear dispositivos y algoritmos más complejos, que a su vez aumentarían las capacidades de los robots de trabajar de manera aún más autónoma y con aplicaciones en más campos.

Con estos avances, los manipuladores comenzaron a tomar la forma con la cual se les puede identificar actualmente, sin embargo, y a pesar de ello, actualmente la investigación en este campo sigue buscando nuevas aplicaciones, sobre todo en el tema del control, con ello se busca que los robots tanto los manipuladores como nuevas formas de robots tomen parte en más aspectos de la vida cotidiana.

Cuando se habla del diseño mecánico de un Robot Industrial, resulta evidente que existen clasificaciones que detallan la configuración cinemática de cada uno, sin embargo, existe una constante en todos esos sistemas, y es que en todos ellos es posible identificar tres sistemas básicos que conforman su estructura.

1. El sistema mecánico. Éste consiste en una serie de elementos rígidos que están conectados entre ellos por medio de juntas⁸, formando articulaciones y generando movimiento relativo entre ellas con el único propósito de orientar una estructura especial denominada efector final.
2. Actuadores. Un actuador es un dispositivo que se encarga de accionar cada parte del robot, estos suelen ser por lo general pistones o motores eléctricos, de ahí que según el tipo de actuador en cada articulación, el movimiento de esta sea lineal o angular.
3. Sistema de control. Consiste en una serie de instrucciones provenientes de un ordenador, que se encarga de determinar las secuencias de pasos que el robot debe realizar para orientar sus articulaciones y lograr cierta postura.

⁸ Unión entre dos elementos.

Bajo la idea de robot que se ha venido mencionando, resulta conveniente hacer referencia ahora a las definiciones formales que se han hecho por parte de diferentes instituciones y organizaciones, y que se han empleado por varios autores para definir aun robot de tipo industrial.

Definición 1.2. Robot Industrial

“Un robot industrial es un manipulador de uso general controlado por computador que consiste en algunos elementos rígidos conectados en serie mediante articulaciones...El final de la cadena está fijo..., mientras el otro extremo está libre y equipado con una herramienta para manipular objetos o realizar tareas de montaje.” (K.S. Fu, col., 1988, pág.1)

Definición 1.3. Robot Industrial (ISO⁹)

Un manipulador mecánico es: *“Un manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de manipular materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas (Barrientos, 1997, pág.10).*

Ambas definiciones concuerdan en la idea de un robot manipulador como una máquina multipropósito, el cual debe tener la naturaleza de poder ser programado cuando se requiera para modificar el plan de trabajo de éste, sin necesidad que ello implique cambios en su estructura.

Finalmente, retomando las definiciones anteriores y sabiendo que existen más de un tipo de Robots Industriales, resulta adecuado que se presente una breve descripción de las clases de estos sistemas que son más comúnmente empleado dentro de las labores industriales.

⁹ International Asociation for Standarization.

1.3. Robots Industriales

Un Robot Industrial o robot manipulador, se entiende como una máquina de uso industrial, reprogramable y adaptable a múltiples aplicaciones, y ensamblado para ser funcional en un gran número de tareas.

Entre las principales aplicaciones en donde es más común observar a un robot trabajando se encuentran, la soldadura por arco eléctrico, aplicación de pintura en carrocerías, paletización, y en la mayoría de los caso en líneas de ensamble a mediana y gran escala.

Como parte de su diseño mecánico un manipulador, para poder ser usado como herramienta, debe poseer al menos tres capacidades de trabajo esenciales, las cuales son sujeción, manipulación y medición.

La sujeción se refiere al tipo de herramienta que se coloca en la parte que corresponde al efector final y que determina el propósito del robot. La capacidad de manipulación radica en la parte motriz, de acuerdo al número de grados de libertad presentes, es que el robot puede abarcar un determinado espacio de trabajo para operar sobre la pieza sujeta; en esta parte se lleva a cabo el análisis de singularidades para la planificación de trayectorias.

La capacidad de medición está alojada en los sensores que controlan la manipulación y la sujeción en el efector final, así como las decisiones que toma el sistema para actuar de manera autónoma ante determinadas circunstancias cuando este debe realizar una tarea.

Debido a sus características y capacidades, un robot industrial puede ser empleado en labores que incluyen inspección de objetos, verificación de piezas manufacturadas, soldadura, pintura, corte de materiales, ensamblaje y diverso procesos de manufactura.

Los Robots Industriales tienen la principal característica de estar diseñados con la forma de una cadena cinemática abierta. Dentro de la teoría del estudio de los mecanismos, una cadena cinemática¹⁰ es un conjunto de eslabones unidos entre sí de forma secuencial por medio de pares cinemáticos, formando estructuras que pueden ser abiertas o cerradas¹¹, como se ha mencionado.

¹⁰ L. Norton (2013), Diseño de Maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos, p. 28.

¹¹ L. Norton (2013), Diseño de Maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos, p. 30.

Las cadenas cinemáticas cerradas son mecanismos en los cuales más de un elemento dentro de la cadena se encuentra anclada o fija, siendo esta cuestión la que influencia en la determinación del grado de libertad del mecanismo, este tipo de estructuras se encuentran en mayor medida en los mecanismos planos, de los cuales el más empleado es el mecanismo de cuatro barras.

Por el contrario en un mecanismo en cadena cinemática abierta, sea cual sea el número de elementos en ella, solamente un uno de los extremos esta fijo a tierra, mientras que el otro extremo permanece libre.

Con respecto entonces al tema de u visualizar a un robot como una cadena cinemática abierta, uno de los principales objetivos del análisis cinemático es proporcionar un método analítico que permita cerrar la cadena cinemática para poder referenciar el extremo final del robot en donde se encuentra el elemento terminal.

Con el cierre de la cadena cinemática es posible poder predecir en donde se encuentra el efector final con respecto de un sistema de referencia general o inercial. Este sistema en la cadena cinemática abierta está localizado en una parte del robot que no se desplaza y permanece fijo en cualquier instante del tiempo, por lo general este punto fijo es tomado en la base del robot.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la movilidad del robot es posible debido a las interacción de diferentes los diferentes elementos en el mecanismo. El movimiento relativo entre los eslabones de la cadena cinemática se logra por la acción de juntas, las cuales pueden ser prismáticas o rotacionales, cada una de las cuales proporciona un tipo de movimiento relativo, y como se verá adelante, un grado de libertad.

Las juntas prismáticas por un lado permiten a los elementos desplazarse en traslación unos respecto de otros, mientras que las juntas rotacionales por otro lado, solo permiten un movimiento de rotación relativa entre dos eslabones adyacentes. Cabe mencionar que las juntas que más comúnmente se encuentran en los robot manipuladores son las juntas rotaciones.

Anteriormente se mencionó que un Robot Industrial debe poseer al menos tres capacidades esenciales entre las cuales está la manipulación, que como se ha dicho está relacionada con el número de grados de libertad y el espacio de trabajo, a continuación se menciona la forma en que se describe el grado de libertad para un robot de estas características.

1.3.1. Grado de Libertad

Generalmente el grado de libertad para un manipulador es igual al número de variables independientes que son necesarios especificar, para poder proporcionar una descripción de la localización espacial de cada uno de los elementos presentes en el mecanismo.

Si bien la anterior es la definición que se ajusta más al diseño de mecanismos, en el caso de los robots suele decirse también que el grado de libertad corresponde con el número de variables que son linealmente independientes y que describen algún movimiento en el propio robot¹².

Para comenzar es necesario mencionar que un Robot Industrial trabaja en el espacio de las articulaciones, esto es, las variables que se manejan dentro del sistema de control son las que se generan por el desplazamiento angular de las articulaciones, de esa forma todo el análisis recae en los desplazamientos que han de generarse dentro del mecanismo en ese espacio.

Así entonces, las coordenadas independientes que se necesitan saber para conocer la postura del robot son las correspondientes a las provocadas por la orientación de las articulaciones, a este conjunto de coordenadas generalizadas se les asigna el nombre de coordenadas articulares o simplemente variables de articulación.

En todo mecanismo que forme una cadena cinemática hay por lo menos un grado de libertad, la forma de determinar ese número puede ser diferente según sea el caso, por ejemplo, el método que se presentara a continuación para los manipuladores puede diferir en cierta forma con el método que se aplica para los mecanismos planos como se menciona a continuación.

En principio será necesario describir lo que se considera como un mecanismo plano. Un mecanismo de esta índole es todo aquel en el que cualquiera de los elementos que lo conforman se desplaza paralelamente respecto de los demás.

Si se colocara un punto en cualquier parte de uno de los elementos del mecanismo, al desplazarse este generaría una curva plana y el plano que contiene a esta curva es paralelo a cualquier otra curva que se genere por el desplazamiento de otro punto. En otras palabras un mecanismo plano es todo aquel que puede definirse geoméricamente sobre un plano.

¹² Gonzáles (2009), Modelado estático, cinemático, dinámico y análisis de movilidad de un robot manipulador con referencia móvil, p. 19.

La mayoría de estos mecanismos forman cadenas cinemáticas cerradas, y los métodos para determinar el grado de libertad con el que cuentan se obtienen por la cantidad de elementos que permanecen fijos, el tipo de juntas y la cantidad de estas y los pares cinemáticos que se forman, los criterios más ampliamente empleado para ellos son los de Gruebler y Kutzbach¹³.

Definición 1.4. Grado de Libertad

El número de grados de libertad de un sistema es el número de parámetros independientes, de entrada, que es necesario especificar para definir completamente la posición de dicho sistema en cualquier instante del tiempo.

Para el caso de los manipuladores, la condición que determina el grado de libertad se ha simplificado de cierta manera, tomando en cuenta que el diseño de estos es una cadena cinemática abierta y por lo tanto, criterios como los mencionados anteriormente posiblemente no tenga aplicación en esta parte.

Al tener articulaciones todas móviles, cada una de estas debe poder expresarse de manera independiente una respecto de la otra, esto se debe al hecho que implica que contar con más de una articulación que dependa de la orientación de alguna otra, el mecanismo adquiere una configuración redundante.

En el caso de los robots redundantes, estos pueden orientarse en una infinidad de formas, lo cual implica encontrar métodos para determinar la postura más adecuada para el mecanismo. Un robot manipulador redundante o singular se encuentra en aquellos en los que el número de grados de libertad es mayor al de las variables de entrada.

Cada articulación está formada por una junta y esta a su vez genera movimiento, lo más usual es encontrar en estos tipo de mecanismo juntas del tipo rotacional, por lo cual cada una de ellas se desplaza respecto de un eje de rotación.

Recordando que el robot trabaja dentro del espacio de las articulaciones y que cada una tiene un eje propio de rotación, o de traslación según sea el caso, el hecho de conocer el desplazamiento angular o lineal de cada una de las coordenadas significa conocer por completo como está orientado el robot.

¹³ L. Norton (2013), Diseño de Maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos, p. 30.

Así entonces, el grado de libertad de un Robot Manipulador puede asociarse directamente al número de articulaciones que conforman el mecanismo, tomando en cuenta que cada articulación se mueve gracias a la acción de un actuador.

“En el caso de los robots industriales..., como un manipulador es generalmente una cadena cinemática abierta y como la posición de cada articulación se define...con una sola variable, el número de articulaciones es igual al grado de libertad.” (Craig, 2006, pág. 5).

Es importante mencionar que el grado de libertad es diferente del grado de movilidad que se puede tener en el efector final, ya que el grado de movilidad únicamente se refiere a la orientación de la herramienta y de la pieza cuando el robot la sujeta. De esa manera ahora se presenta la clasificación de los Robots Industriales de acuerdo a su configuración cinemática y al grado de libertad.

1.3.2. Clasificación de los Robots Industriales

Para diseñar un robot manipulador es necesario tomar en cuenta que existen distintos tipos de configuraciones cinemáticas que se pueden emplear según el tipo de aplicación para la cual se desea implementar un sistema robótico de esta naturaleza.

Tomando en cuenta que existen diferentes clasificaciones y diseños basados en la cinemática del manipulador, hay una serie de factores que son necesarios analizar para realizar un diseño óptimo, siendo dos los más fundamentales, el diseño basado en la determinación de las singularidades del robot y el diseño basado en la acción de las cargas dinámicas que se generan sobre el mecanismo.

El primer aspecto tiene que ver directamente con el espacio de trabajo. Para llevar a cabo las tareas asignadas, el robot deberá tener la capacidad de alcanzar ciertos objetivos cuando éstos se encuentren ocupando un lugar determinado en el espacio destinado a las operaciones dentro del campo de manipulación, y es cuestión del diseño que este pueda llegar a ellos.

El diseño cinemático entonces tendrá que determinar las dimensiones articulares y la secuencia que estas formen con el fin de poder predecir los puntos singulares del robot, para que este sea capaz de manipular objetos sin restricciones, o si existen estas últimas, sea capaz de realizar a alguna acción evasiva o no ejecutar ninguna acción hasta solucionar su movimiento.

El segundo factor es el que está relacionado con la capacidad que tenga el robot para mover cargas. En esta parte es necesario tomar en cuenta la robustez de los miembros estructurales y la capacidad de los actuadores.

El análisis de las velocidades y las inercias generadas dentro del mecanismo ayudan a determinar las cargas dinámicas y entonces saber de qué manera se comportara el robot, y con esto poder conocer que tan rápido y preciso puede llegar a ser cuando esté siendo solicitado.

Ahora bien, antes de mencionar las configuraciones de robots industriales más comunes, es necesario mencionar en que se basa el hecho de la clasificación de estos.

Una vez que se ha determinado el grado de libertad del robot, debido al número de articulaciones necesarias para resolver una tarea en un determinado espacio de trabajo, lo siguiente es seleccionar la configuración cinemática adecuada, que permita posicionar al efector final respecto de un sistema de referencia.

Ante esto se hace notar que un robot industrial común cuenta con dos sistemas que ayudan a conocer su comportamiento cinemático, y estos son, el sistema de posicionamiento y el sistema de orientación¹⁴.

El sistema de orientación es atribuido a la parte de la muñeca del robot, que es el final de la cadena cinemática y donde se encuentra la herramienta del robot, la orientación se refiere a la colocación de la herramienta en la posición correcta para trabajar. El sistema de posicionamiento corresponde a la parte esencial de la cinemática y su análisis, es la parte de las articulaciones y la manera como estas se orientan relativamente desde la base hasta el final de la cadena para poder posicionar en una serie de movimiento finitos al efector final.

En esta última parte es en donde radica principalmente la diferencia entre las distintas clases de manipuladores que existen actualmente y que son los que mayormente se pueden encontrar en el ámbito industrial. Así pues, continuación se muestra cada una de estas clasificaciones y su descripción.

El primer robot en esta clasificación es el Robot Cartesiano, el cual es una de las configuraciones más simple entre las diferentes que podemos encontrar, su movimiento se caracteriza por poseer únicamente traslaciones en sus articulaciones, lo que facilita demasiado el análisis cinemático, el hecho de no poseer rotaciones elimina en gran medida las indeterminaciones en la solución.

¹⁴ Craig (2006), *Robótica*, p. 234.

Como se mencionó, las articulaciones que encontramos en este robot están formadas por juntas prismáticas, cada una de las cuales corresponde respectivamente con los ejes X , Y , Z . Debido a su configuración, la cinemática inversa de este manipulador tiene siempre una solución única en la matriz que caracteriza al mecanismo, por lo cual se dice que este robot carece de singularidades.

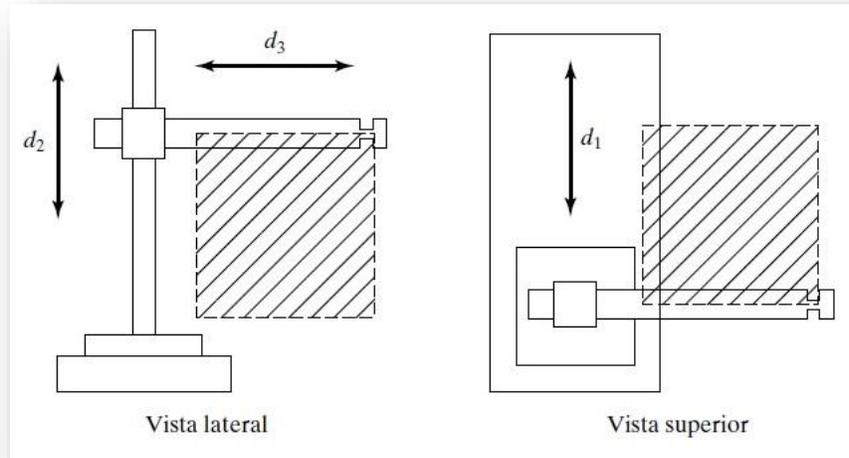


Figura 1. Robot Manipulador Cartesiano (Fuente: Craig, Robótica, 2006)

También conocidos como robots de puente transversal, estos robots pueden tener gran robustez en sus soportes, por lo cual pueden ser empleados en tareas que requieran mover grandes cargas en espacio de trabajo grandes. Una desventaja de este tipo de mecanismos es que no se pueden adaptar a espacios reducidos de trabajo.

El segundo en la clasificación, es el del robot antropomórfico, el cual consiste, al contrario del cartesiano en un mecanismo que posee tres articulaciones rotacionales. La primera de ellas rota respecto de un eje vertical, proporcionando rotación al mecanismo desde la base, la segunda y tercera articulaciones están rotando sobre ejes ortogonales al eje de giro de la base y perpendiculares entre ellos.

La primera de estas dos articulaciones se identifica como el hombro del robot y se asocia con la acción de elevación, mientras que la tercer articulación es la parte del codo del robot, todo lo anterior haciendo referencia al brazo del ser humano, es por eso que comúnmente es conocido como brazo robot.

El robot antropomórfico es empleado en tareas que requieren mayor precisión así como para el trabajo en ambientes reducidos, ya que por su diseño se pueden adaptar a este tipo de ambientes.

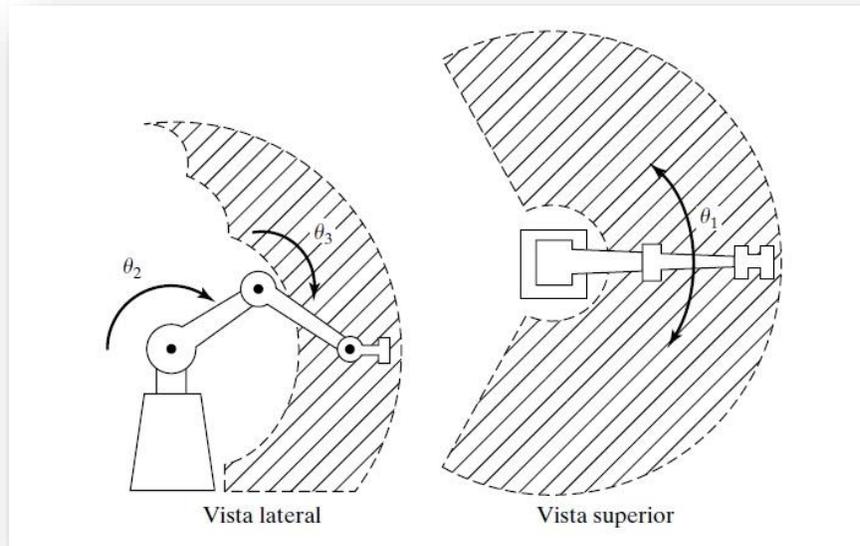


Figura 2. Robot Manipulador Antropomórfico (Fuente: Craig, Robótica, 2006)

Si siguiendo con los robots de mayor uso en el ambiente industrial, llegamos a la configuración cinemática del robot SCARA, el cual es un robot que fue diseñado para llevar a cabo tareas principalmente de manipulación y montaje de piezas de dimensiones relativamente pequeñas a una gran velocidad.

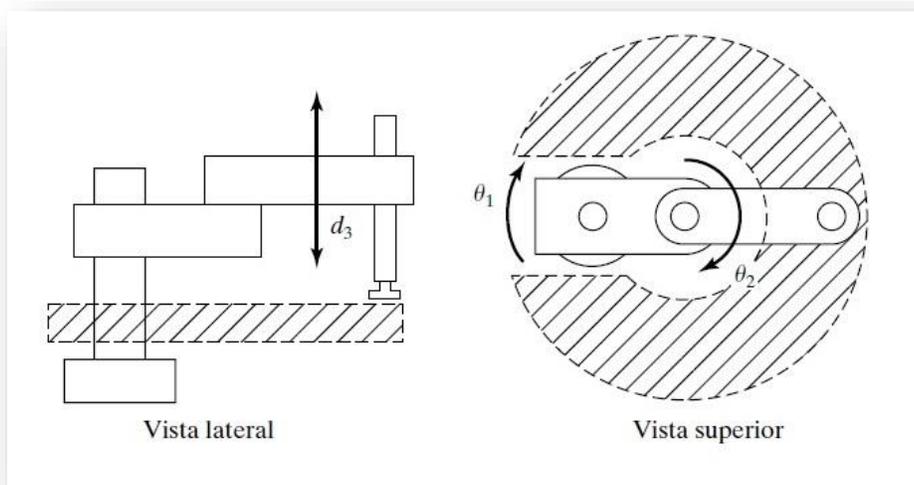


Figura 3. Robot Manipulador SCARA (Fuente: Craig, Robótica, 2006)

El robot consta de tres articulaciones rotacionales, los ejes de rotación de las articulaciones son paralelos entre ellos y se orientan en referencia a un plano, generalmente sobre el plano x, y, o plano cartesiano. La última articulación es del tipo prismática y se encarga de mover al efector final de manera vertical y paralela al plano de trabajo.

Una de las características que diferencia al robot SCARA respecto de los dos anteriores es que en el diseño del manipulador las articulaciones pueden quedar libres de soportar el peso mismo del robot o de la cara que está moviendo. Los actuadores para las primeras articulaciones pueden estar colocados sobre el eje de la articulación en la base.

Comparado con el resto de los Robots Manipuladores, el robot SCARA posee una velocidad de movimiento elevada, por lo que se hace el más apto para realizar tareas, por ejemplo en una línea de producción de equipo electrónico en donde se requiera gran precisión en la ejecución de la tarea y una velocidad por tiempo de producción que garantice la obtención de productos terminados en el menor tiempo posible.

El cuarto tipo de robots industriales corresponde al manipulador esférico, el cual se asemeja en gran medida al robot antropomórfico, con la diferencia que la tercera articulación se reemplaza por una de tipo prismática que se comporta a manera de pistón.

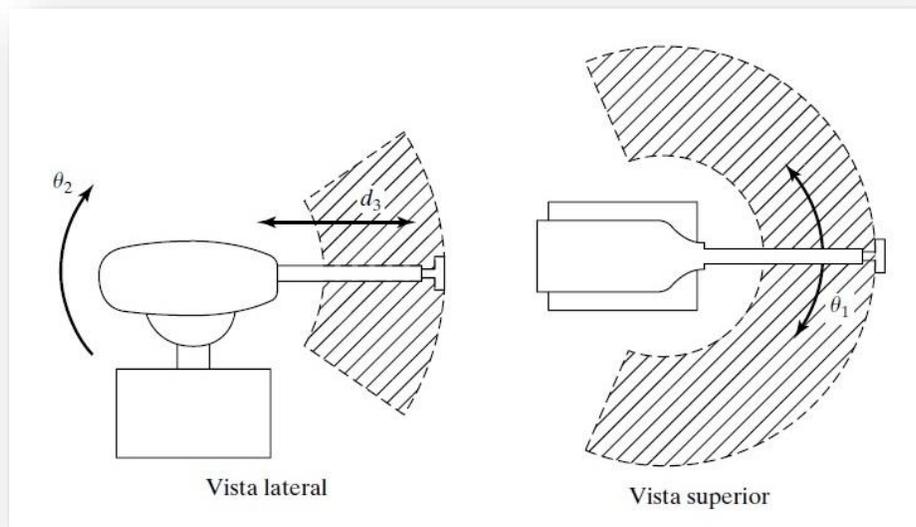


Figura 4. Robot Manipulador Esférico (Fuente: Craig, Robótica, 2006)

Finalmente atendiendo a las configuraciones sencillas, el manipulador cilíndrico es una configuración cinemática que resulta de la combinación de articulaciones primaticas y rotacionales. En el robot esférico se tiene que este se compone de dos articulaciones rotacional, en este robot es lo contrario, ahora el número de articulaciones lineales son dos mientras que solo una variable angular se encuentra presente en el mecanismo.

Una vez que se ha dado un breve descripción de la configuraciones cinemáticas más comúnmente encontradas para robots manipuladores, es momento de definir la manera en que se percibe un Robot Planar y porque es que tiene dos grados de libertad.

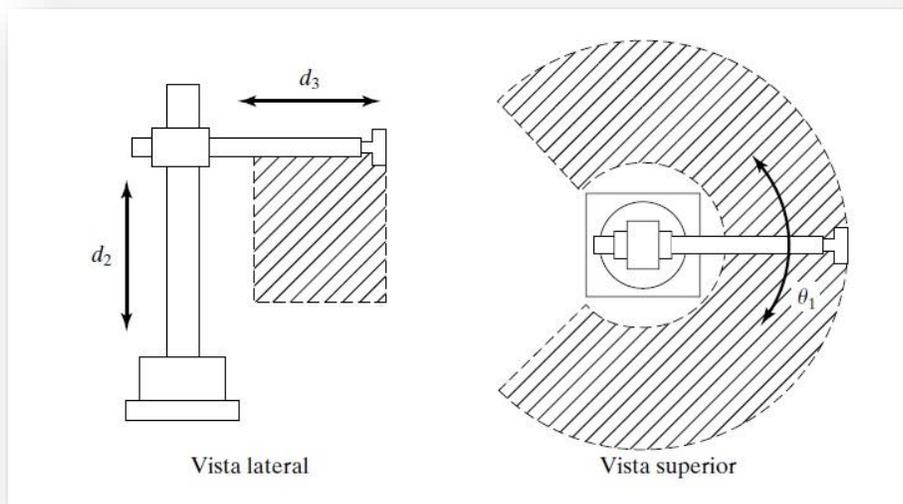


Figura 5. Robot Manipulador Cilíndrico (Fuente: Craig, Robótica, 2006)

Así entonces el Robot Planar de dos grados de libertad se definirá de acuerdo con el concepto de grado de libertad.

Una vez hecha la clasificación anterior, y mencionada la manera en cómo se obtienen el grado de libertad para un Robot Manipulador, es momento entonces de definir de manera conceptual lo que representa el Robot Planar que se ha empleado para realizar el análisis cinemático que se presenta en la sección a continuación.

1.4. Robot Planar

Se ha mencionado ya que existe un número bien clasificado y ordenado de robot manipuladores, así como también se ha definido la manera de asignar el número de grados de libertad con que cuenta un robot de esta naturaleza, sin embargo el robot sobre el cual se realizó el análisis cinemático no corresponde directamente con los mencionados y es por ello que debe clasificarse de acuerdo con los conceptos necesarios.

En el prototipo que se trabajó, los ejes de rotación de cada una de las articulaciones son paralelos entre sí, esto quiere decir que los actuadores que accionan el movimiento de las articulaciones trabajan en un mismo plano.

De acuerdo a la convención de los sistemas de referencia, y tomando en cuenta que para el análisis cinemático de cualquier robot lo recomendable es que sean sistemas derechos o dextrógiros, el eje de rotación de las articulaciones será corresponde con el eje Z , por lo tanto las coordenadas que es necesario conocer son las correspondientes a X e Y .

De esta manera, para lograr que el efector final se oriente de acuerdo con una determinada postura del robot, harán falta dos variables de entrada, que corresponde con las coordenadas del punto que el robot debe solucionar, recordando que el robot debe ser capaz de alcanzar un punto, por lo cual las coordenadas articulares corresponden al punto de la forma (X, Y) .



Figura 6. Robot Planar (Elaboración propia)

De ello se deduce entonces que cualquier punto que el robot deba alcanzar por medio de su efector final está ubicado dentro de un plano de coordenadas X e Y . De esa manera, siendo el espacio de trabajo del robot el plano cartesiano $X - Y$ es por ello que el robot estudiado es un Robot Planar.

Si se toma en cuenta nuevamente el enfoque de los mecanismos planos para determinar el grado de libertad, este sería el número de coordenadas independientes para posicionar un punto del mecanismo dentro de un espacio, para el Robot Planar sería necesario establecer las coordenadas del punto en el plano.

Regresando a la determinación del grado de libertad por medio del concepto que se dio para los robots manipuladores, y recordando que para controlarlos se debe trabajar en el espacio de las articulaciones, entonces el número de grados de libertad está en función del número de articulaciones que tenga el mecanismo.

Coincidentemente el número de coordenadas planares es el mismo que el de las articulaciones que posee el robot; al poseer dos articulaciones el robot posee dos grados de libertad y por lo tanto se puede deducir que el mecanismo es un Robot Planar de dos grados de libertad.

Capítulo 2. Cinemática del Robot

Hasta este momento se ha definido ya que el robot que se analiza es un Robot Planar y que cuenta con dos grados de libertad, de manera que el segundo paso consiste en calcular la cinemática del mecanismo.

El hecho de obtener las ecuaciones cinemáticas del robot ayudará a estudiar el propósito general del control, que consiste en hacer que el efector final sea capaz de alcanzar un punto en el plano $X - Y$, generando de esa manera una determinada configuración en las articulaciones. Para ello es necesario formular un vector de Posición que referencie al efector final con respecto de la base del robot.

La derivación paramétrica del vector de Posición dará como resultado una expresión conocida como matriz Jacobiana, cuya condición de ser invertible determinará si el punto sobre el que se debe posicionar el efector final del robot es solucionable o se presenta algún tipo de singularidad.

De manera general el análisis cinemático se divide en dos partes. La primera de ellas corresponde con el problema cinemático directo o cinemática directa, la cual se resuelve por medio de la aplicación del algoritmo propuesto por Denavit y Hartenberg para la descripción espacial de robots manipuladores por medio de matrices de transformación homogénea.

La segunda parte de la cinemática se conoce como el problema cinemático inverso o cinemática inversa, por medio del cual se obtiene un conjunto de coordenadas generalizadas¹⁵, que asigna los valores angulares para las articulaciones, mismas que describen la rotación relativa con respecto de las articulaciones adyacentes y por medio de la cual se describe la postura¹⁶ del robot sobre el punto en el plano al cual debe de alcanzar.

Dentro del análisis cinemático para manipuladores se hace necesario mencionar algunos conceptos que aparecen en varias partes del proceso y que se aplican directamente en la formulación de las ecuaciones y expresiones que modelan al robot, en este caso al Robot Planar.

¹⁵ Conjunto de coordenadas linealmente independientes que determinan la configuración de un mecanismo con un número finito de grados de libertad.

¹⁶ Posición y orientación de los elementos de un robot respecto de un sistema de referencia.

De esa manera, con la formulación del modelo cinemático se tendrá entonces una serie de ecuaciones que servirán para generar los algoritmos que serán introducidos en la simulación para enlazar la parte computacional y la física a través de la adquisición de datos.

1.1. Conceptos Matemáticos

Uno de los primeros conceptos que resultan útiles al momento de llevar a cabo el análisis cinemático directo son las matrices de transformación homogénea, las cuales tienen aplicación al momento de realizar una descripción generalizada de los movimientos de rotación y traslación de cuerpos en el espacio en referencia a un punto fijo.

En el caso de los cuerpos rígidos, estos pueden estar desplazándose en el espacio según el grado de libertad con el que cuentan. Si un cuerpo rígido se encuentra libre en el espacio cuenta con seis grados de libertad, tres coordenadas de traslación a lo largo de los ejes principales y tres coordenadas de rotación alrededor de los mismos.

Por ello es que en el estudio de mecanismos siempre se analizan dos movimientos, rotación y traslación, y aunque estos puedan estar libres en el espacio, en el caso de los robots manipuladores es conveniente tomar en cuenta el movimiento con respecto de un marco de referencia fijo, limitando así los grados de libertad al número de articulaciones, de manera que se pueda crear una cadena cinemática que se resuelve analíticamente.

La traslación de un cuerpo rígido se expresa como el cambio de coordenadas que tiene un punto del sólido al modificar su posición de un punto inicial a un punto final, esto se expresa como un vector que originalmente se encontraba en un punto (x_1, y_1, z_1) y se desplaza hacia otro con coordenadas (x_2, y_2, z_2) .

$$P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (x, y, z)$$

Lo cual de manera vectorial se expresa como $\vec{P} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$, o simplemente

como $\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$, lo cual se conoce como un vector de Posición.

En el análisis de manipuladores resulta necesario expresar un marco de referencia respecto de otro adyacente, para ello se asigna a cada articulación un sistema de referencia cuyas coordenadas se expresan con el punto (O_0, x_i, y_i, z_i) , que representa una base para cada miembro del mecanismo.

De esta manera el sistema coordinado general o base inercial, con respecto del cual se expresa la orientación de cada articulación del robot y del efector final se expresa como (O_0, x_0, y_0, z_0) .

El vector \vec{d} que se observa en la figura es entonces el vector que expresa la relación entre estos dos sistemas de referencia, como un vector de Posición.

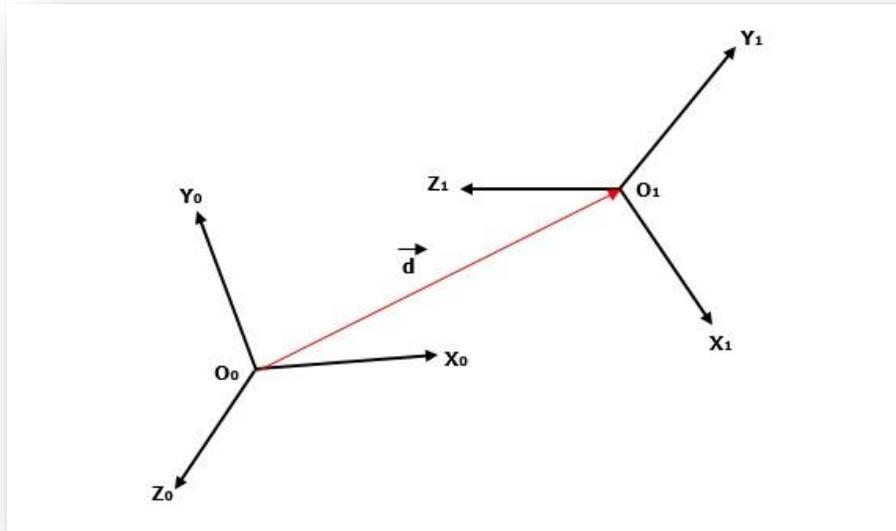


Figura 7. Vector de Posición (Elaboración propia)

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

Por otra parte la rotación de un cuerpo rígido en el espacio se expresa a través de una matriz especial llamada matriz de Rotación¹⁷, la cual se puede obtener de la proyección de los ejes de una base o sistema de referencia sobre el sistema de referencia inercial del sistema. Como se mencionó, existen tres tipos de rotaciones para un cuerpo sólido, siendo estas las que respectan a los ejes principales (x, y, z) .

Sea el sistema de coordenadas generales de la base inercial (O_0, x_0, y_0, z_0) y sean las coordenadas de un sistema ligado a una articulación (O_1, x_1, y_1, z_1) , la matriz de Rotación respecto del eje Z se obtiene de la proyección de cada uno de los ejes ligados a la articulación respecto a los del sistema general.

¹⁷ K.S. Fu, col. (1988), ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia, p.15.

$$R_{Z,\theta} = \begin{bmatrix} X_0 \cdot X_1 & X_0 \cdot Y_1 & X_0 \cdot Z_1 \\ Y_0 \cdot X_1 & Y_0 \cdot Y_1 & Y_0 \cdot Z_1 \\ Z_0 \cdot X_1 & Z_0 \cdot Y_1 & Z_0 \cdot Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los productos punto que se observan en la matriz son los cosenos directores que indican en qué dirección se encuentra rotando el sistema, esta rotación siempre se debe expresar de forma que se observe un sistema derecho, es decir, que cumpla con la definición de la regla de la mano derecha.

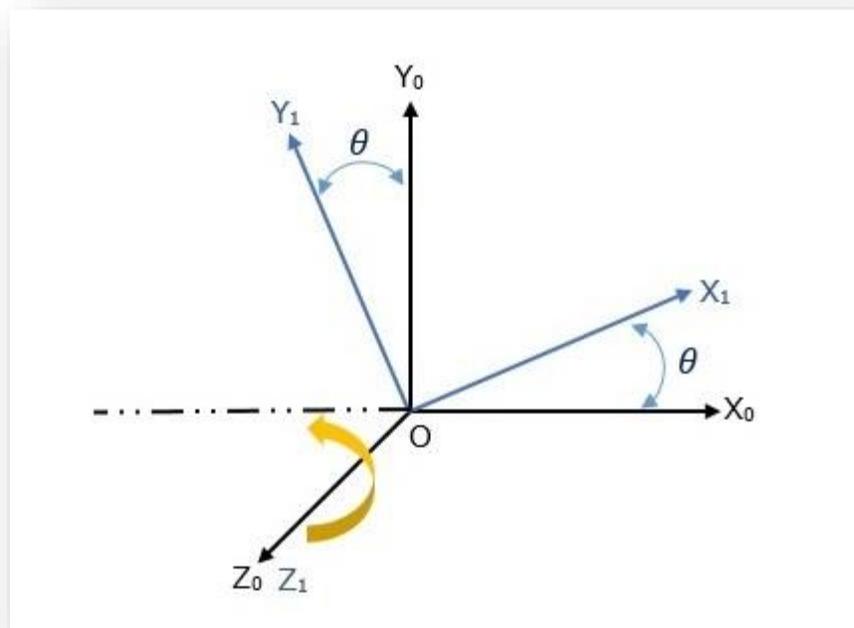


Figura 8. Matriz de Rotación respecto al eje Z (Elaboración propia)

Resolviendo los productos, se obtiene una expresión matricial que representa la rotación general del sistema respecto del eje Z. Así como se obtiene la matriz de Rotación respecto del eje Z, de la misma manera se pueden obtener las rotaciones generales con respecto de los ejes X e Y, de manera que conjunto estas tres rotaciones se conocen como rotaciones fundamentales.

$$R_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{Y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Si bien se sabe hasta este punto que es posible describir un movimiento de rotación en forma matricial, y que la traslación de un punto se puede asociar a un vector de posición, en ocasiones resulta conveniente poder expresar ambos movimientos mediante una sola expresión. Para ello es necesario emplear el término de matriz de Transformación Homogénea.

Como se verá adelante, este tipo de matrices resultan demasiado útiles cuando se requiere dar una descripción espacial de un robot tomando en cuenta las rotaciones y traslaciones de las articulaciones partiendo desde la base del mismo.

Definición 2.1. Matriz de Transformación Homogénea

Una matriz de Transformación Homogénea es una matriz cuadrada de orden 4×4 que transforma un vector de posición de un sistema de coordenadas a otro¹⁸. El arreglo matricial consiste en cuatro sub matrices con la forma:

$$H = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & d_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de Transformación Homogénea se forma a su vez de sub matrices, en donde la matriz $R_{3 \times 3}$ es una matriz de Rotación, el vector de Posición que conecta ambos sistemas está dado por el vector $d_{3 \times 1}$, mientras que la sub matriz $f_{1 \times 3}$ es un factor de cambio de perspectiva la cual tiene elementos ceros dado que no existe un cambio de este tipo por lo menos en los que respecta al análisis del robot.

Del mismo modo el número uno que aparece en la matriz corresponde a un factor de escalamiento, el cual generalmente se maneja como la perspectiva real, o sea en una escala 1: 1.

¹⁸ K.S. Fu, col.(1988), ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia, p.28.

Este tipo de matrices aparecen en el análisis cinemático directo cuando se aplica el algoritmo Denavit-Hartenberg, y como se ha mencionado son empleadas para obtener de manera general la expresión que describa espacialmente la orientación del efector final del manipulador respecto de la base del robot cuando se conocen los valores de los ángulos de cada articulación.

Además de las matrices de transformación homogénea en el análisis cinemático aparece el concepto de derivada. La derivación en este análisis se realiza sobre vectores. La primera y segunda derivada parcial del vector de Posición define conceptos de gran utilidad y que resultan de las siguientes definiciones.

Definición 2.2. Derivada de una Función Vectorial

Sea una función $f(\vec{P})$ cuyo dominio pertenece a los números reales y en donde el vector \vec{P} está formado por las variables independientes $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, cuya regla de correspondencia esta denotada por la transformación $R^n \rightarrow R$, su derivada está dada por la aplicación de la regla de la cadena¹⁹.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot dx_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

Lo descrito anteriormente corresponde con la definición de Función Escalar de Variable Vectorial o Campo Escalar. Cuando se toma al tiempo como parámetro de derivación de una función se tienen entonces una nueva expresión para la derivada para la derivada de un Campos Escalar.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

¹⁹ Gonzáles (2009), Modelado cinemático, estático, dinámico y análisis de movilidad de un robot manipulador con referencia móvil, p. 64.

Definición 2.3. Función Vectorial de Variable Vectorial

Una Función Vectorial de Variable Vectorial es una función $f(\vec{P})$ en donde el vector \vec{P} tiene como componentes un conjunto de vectores de la forma $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ y que estos a su vez son funciones de las variables $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, asignando a cada valor del dominio un valor del contra dominio a través de la regla de correspondencia $R^m \rightarrow R^n$.

$$f(\vec{P}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Este tipo de funciones, que también reciben el nombre de Campos Vectoriales, adquieren un significado muy importante cuando es necesario calcular la derivada total con respecto del tiempo. Así entonces derivando con respecto del tiempo, se obtendrá el siguiente vector, que corresponde con la derivación paramétrica del vector de Posición²⁰.

$$\frac{df(\vec{P})}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{dt} \\ \frac{f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{dt} \\ \frac{f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{dt} \end{bmatrix}$$

²⁰ Gonzáles (2009), Modelado cinemático, estático, dinámico y análisis de movilidad de un robot manipulador con referencia móvil, p. 65.

$$\frac{df(\vec{P})}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot dx_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot dx_3 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \cdot dx_n \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdot dx_3 + \dots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \cdot dx_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f_n}{\partial x_3} \cdot dx_3 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot dx_n \end{bmatrix}$$

De la ecuación que resulta se observa que es posible factorizar los productos escalares de tal manera que quede expresado como un sistema de ecuaciones.

$$\frac{df(\vec{P})}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

La matriz que resulta del sistema de ecuaciones una vez que ha sido factorizado se conoce como gradiente generalizado, o en el caso de la Robótica, se conoce con el nombre de matriz Jacobiana y tiene una forma de expresarse para hacer notar que corresponde con la primera derivada respecto del tiempo del vector de posición \vec{P} ²¹.

²¹ Gonzáles (2009)., Modelado cinemático, estático, dinámico y análisis de movilidad de un robot manipulador con referencia móvil, p. 66

$$\nabla f = J(f(\vec{P})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Y de forma general el sistema de ecuaciones que define la derivación parcial de una Función Vectorial se observa como:

$$\frac{df(\vec{P})}{dt} = J(f(\vec{P})) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}$$

En donde $J(f(\vec{P}))$ recibe el nombre de Jacobiano o matriz Jacobiana²².

1.2. Análisis Cinemático

Conceptualmente la Cinemática es la parte de la mecánica que se encarga del estudio del movimiento de los cuerpos respecto de un sistema de referencia sin tomar en cuenta las fuerzas que actúan sobre ellos. Dentro de la Robótica la cinemática se encarga de describir analíticamente el movimiento espacial de un robot en función del tiempo, la principal idea de realizar el análisis cinemático de un robot es conocer las expresiones que representen su posición, velocidad y aceleración.

Para ello existen dos métodos que son ampliamente utilizados, el problema cinemático directo y el problema cinemático inverso. Para resolver ambos problemas es pertinente mencionar nuevamente que un robot manipulador es un mecanismo articulado que puede modelarse como una cadena cinemática abierta, formada por eslabones rígidos y juntas, rotacionales, que forman pares cinemáticos, y además de eso el robot trabaja dentro del espacio de las articulaciones.

²² Craig (2006), *Robótica*, p. 149.

Craig (2006) mencionó que: “*Los manipuladores consisten de vínculos casi rígidos,...que permiten el movimiento relativo de los vínculos adyacentes. Estas articulaciones...permiten medir la posición relativa de los vínculos adyacentes.*” (pág. 5).

La medición de la posición relativa de los vínculos adyacentes hace referencia al desplazamiento angular que mantienen las articulaciones entre ellas y que se referencia en cuanto a los sistemas coordenados que se encuentran ligados a ellas.

1.2.1. Análisis Cinemático Directo

El problema cinemático directo consiste en describir la orientación del efector final respecto de un sistema de coordenadas fijas, regularmente desde la base del robot, a través de las correspondientes matrices de transformación homogéneas que se describen la orientación que mantiene cada vínculo el inmediato anterior.

Las matrices de transformación que se emplean en el análisis directo se denotan como ${}^{i-1}_iA$, en donde el índice $i - 1$ se asocia con el sistema de referencia con respecto del cual se orienta la articulación, mientras que el subíndice i denota al sistema ligado a la articulación.

La principal característica del método de la cinemática directa es que las variables de entrada son un conjunto de coordenadas angulares que son conocidas $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ que se numeran de acuerdo al grado de libertad de robot. Con respecto de la cinemática inversa los ángulos que debe solucionar el mecanismo para orientarse a una postura se conocen, en el análisis inverso se deben generar un conjunto de ecuaciones que resuelvan estos ángulos.

Aunque la parte importante son los ángulos θ_i , existen otros parámetros que son necesarios establecer para completarlas variables que son necesarias para poder aplicar el algoritmo Denavit-Hartenberg²³ para el análisis cinemático directo.

El algoritmo Denavit-Hartenberg toma en cuenta cuatro parámetros básicos que se obtienen por el establecimiento de los sistemas coordenados dextrógiros de cada articulación. Entre los cuatro parámetros se cuentan, la orientación sobre el eje principal de rotación de la articulación (θ_i) , el ángulo de torsión o giro con respecto de un ángulo ortogonal (α_i) y por último las coordenadas del vector de posición que relaciona los sistemas i e $i - 1$.

²³ K.S. Fu, col. (1988), ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia, p.37.

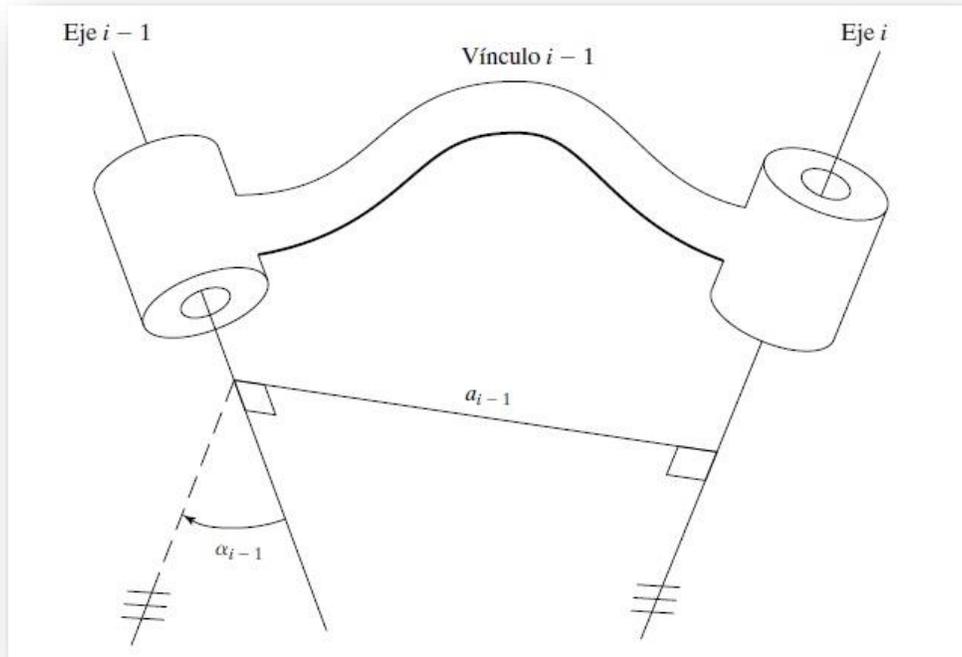


Figura 9. Convención Denavit-Hartenber para Ejes (Fuente: Craig, Robótica, 2006)

De esta manera el algoritmo sigue una serie de pasos ordenados de manera que al multiplicar las matrices de cada orientación se tenga definida por completo la postura del robot con las variables angulares establecidas.

Algoritmo Denavit-Hartenberg

- i. Localizar y numerar los ejes $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, siendo Z_0 el eje de rotación de la base del robot y Z_n el eje de rotación de la última articulación.
- ii. Establecer el sistema coordenado de la base, colocar el origen donde sea conveniente sobre Z_0 y escoger X_0 y Y_0 para formar un sistema dextrógiro.
- iii. Colocar O_i en la intersección de Z_i y Z_{i-1} ; si Z_i y Z_{i-1} son paralelos, colocar en cualquier punto sobre Z_i .
- iv. Colocar X_i normal al plano que forma Z_i y Z_{i-1} , pasando por O_i .
- v. Completar el sistema coordenado con Y_i para formar un sistema derecho.
- vi. Crear la tabla de parámetros: $\alpha_i, \theta_i, a_i, d_i$
- vii. Formar las matrices de transformación homogénea sustituyendo los parámetros de la tabla en la matriz:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & d_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & d_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

viii. Obtener la transformación total multiplicando las matrices resultantes:

$${}^{i-1}T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^{i-1}A_i \dots {}^{n-1}A_n$$

Barrientos (1997)²⁴ sugiere que para manipuladores de pocos grados de libertad no es necesario aplicar por completo el algoritmo Denavit-Hartenberg y que las expresiones cinemáticas se pueden obtener de manera analítica por inspección del vector de posición.

Como es mencionado en Barrientos (1997) para un robot con dos grados de libertad no sería estrictamente necesario seguir los pasos de Denavit-Hartenberg, sin embargo si así se hiciera, la matriz de Transformación Homogénea del sistema se observaría de la siguiente manera:

$${}^2_0T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la cinemática directa se concluye que los parámetros conocidos son las variables θ_i , por lo tanto bastaría establecer el valor deseado para dicho ángulo para posicionar al robot en algún punto de su espacio de trabajo, y así, en este caso el análisis dará como resultado un conjunto de coordenadas (x, y, z) que determinan el punto de llegada.

Sin embargo no es común que un robot trabaje de esa manera, de lo que se trata es que un robot se posicione en algún punto por medio de un conjunto de coordenadas generalizadas, o angulares y que este mismo decida si es posible o no generar una coordenada θ_i que le permita moverse con libertad.

²⁴ Barrientos (1997), Fundamentos de Robótica, p.95.

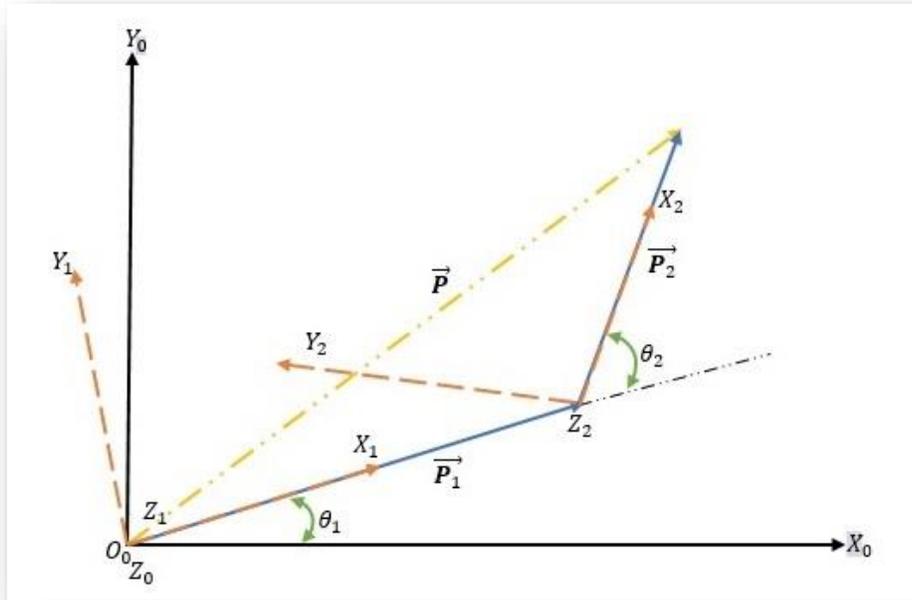


Figura 10. Convención Denavit-Hartenberg para el Robot Planar (Elaboración propia)

Al contrario de la cinemática directa, la cinemática inversa se encarga de resolver las ecuaciones necesarias para determinar los ángulos en los cuales el robot puede mantener su postura bajo una determinada configuración espacial, esto es, que en caso que se ingresara un conjunto de coordenadas que representan el punto al cual debe llegar el efector final, el robot debe ser capaz de generar las coordenadas articulares necesarias.

1.2.2. Análisis Cinemático Inverso

La cinemática inversa es el proceso por medio del cual se obtienen los valores de cada una de las θ_i que existen en el mecanismo, teniendo como resultado un vector cuyas variables son $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ que representa las coordenadas articulares en función del número de grados de libertad del mecanismo y que a su vez definen la postura del robot.

Caso contrario a la cinemática directa, el análisis inverso tiene como principal característica que los datos de entrada son las coordenadas del punto de llegada del efector final (x, y) , de manera que se resuelvan los ángulos necesarios dados una cierta configuración.

De forma general es más común emplear el método inverso para resolver y controlar un robot manipulador, recordando que estos trabajan en el espacio de coordenadas articulares y por ello resultan más factible que se introduzcan únicamente las coordenadas de un punto de llegada y sea el propio robot el que determine si es posible o no llegar a ese punto.

La obtención del vector $\vec{\theta}$ puede realizarse mediante métodos analíticos o geométricos, la particularidad de ambos es que debe de resolverse una a una las variables del sistema.

De ese modo, el análisis de la cinemática inversa del Robot Planar se resolvió por el método geométrico²⁵. De la Figura 11 se puede observar que se ha asignado un vector de posición al punto de coordenadas (x, y) para relacionarlo al origen que representa la base del robot, este vector denotado como \vec{P} , tiene una longitud $\|\vec{P}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cada una de las articulaciones están representadas como vectores, cuyas magnitudes son l_1 y l_2 respectivamente, con θ_1 y θ_2 como las orientaciones relativas. Si se unen los vectores l_1 , l_2 y \vec{P} se observa que se forma un triángulo que representa la postura del robot en el momento en que se acerca al punto que debe alcanzar.

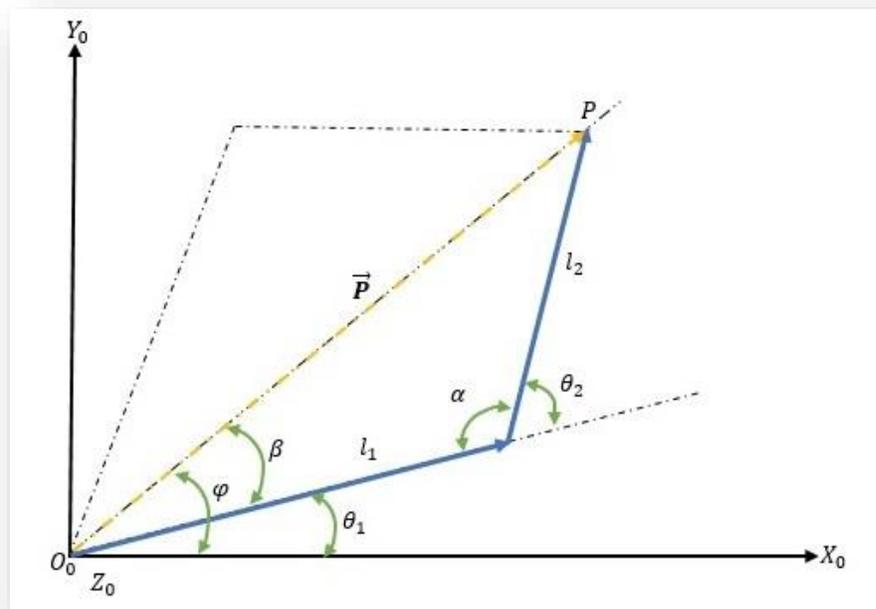


Figura 11. Configuración espacial del Robot Planar (Elaboración propia)

²⁵ Craig (2006), *Robótica*, p. 112.

Para resolver por completo el triángulo formado, es necesario contar con un conjunto de variables angulares auxiliares α , β y φ que sirvan de ayuda para poder aplicar la ley de cosenos y de esa manera determinar las ecuaciones necesarias que permitan conocer los valores para θ_1 y θ_2 .

El primero paso entonces será resolver para a variable θ_2 . Si se aplica la ley de cosenos para el ángulo α y resolviendo para el mismo se tiene lo siguiente:

$$\vec{P}^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \alpha$$

$$2l_1l_2 \cos \alpha = l_1^2 + l_2^2 - \vec{P}^2$$

$$\cos \alpha = \frac{l_1^2 + l_2^2 - \vec{P}^2}{2l_1l_2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \vec{P}^2}{2l_1l_2} \right)$$

Para obtener el valor final de θ_2 se observa que $180^\circ = \alpha + \theta_2$, de modo que $\theta_2 = 180^\circ - \alpha$.

$$\therefore \theta_2 = 180^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \vec{P}^2}{2l_1l_2} \right)$$

En esta parte se encuentra una cuestión que resalta en el hecho de tener un ángulo $-\theta_2$, esto debido a que la articulación como se verá adelante solo puede cubrir un rango de 0° a 180° , por lo cual el hecho de que la articulación se pueda orientar en dos formas diferentes que se amolden a una configuración que pueda ser resuelta, la condición codo arriba y codo abajo ayuda a resolver esta orientación.

De manera similar se puede resolver para encontrar el valor de la articulación restante θ_1 , por aplicación de la ley de cosenos se tiene ahora:

$$l_2^2 = \|P\|^2 + l_1^2 - 2\|P\|l_1 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\|P\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2\|P\|l_1}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{\|P\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2\|P\|l_1} \right)$$

Recurriendo nuevamente a la Figura 11, se tiene que $\theta_1 + \beta = \varphi$, en donde:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

En donde y y x son las coordenadas del punto al cual se orienta el efector final del robot. De ese modo se tiene como valor final para θ_1 :

$$\theta_1 = \varphi - \beta$$
$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\|P\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2\|P\|l_1}\right)$$

Una vez deducidas las ecuaciones a través de las cuales se obtienen los valores para θ_1 y θ_2 , estas se ingresan como parte de los algoritmos dentro del modelo de simulación para resolver la orientación del robot.

Una vez obtenido los valores de las articulaciones es posible llevar a cabo el análisis de las velocidades y las aceleraciones del Robot Planar, de los cuales resulta la estimación de los puntos singulares el mismo.

El cálculo de las velocidades y aceleraciones es mencionado por Fu (1988) como control de movimiento resuelto²⁶, esto es, que en el momento que un robot ejecuta un movimiento previamente se conocen las variables que están en juego al momento de actuar, de tal manera que este pueda planificar un movimiento antes de llevar a cabo alguna acción.

Las ecuaciones que describen el movimiento espacial de un manipulador se obtienen por medio del análisis cinemático mediante transformaciones homogéneas o métodos analíticos, sin embargo, debido a que el efector final debe desplazarse en diferentes direcciones es necesario utilizar métodos diferenciales.

El método diferencial permite relacionar las velocidades y aceleraciones angulares con las velocidades y aceleraciones lineales de las articulaciones del robot, de manera que se obtenga una relación directa entre el espacio cartesiano, en donde se encuentra el punto de llegada, y el espacio de articulaciones que describe la postura del robot en cualquier instante del tiempo.

²⁶ K.S. Fu, col. (1988), ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia, p.239.

Para hallar la relación numérica entre ambos espacios es necesario aplicar el concepto de matriz Jacobiana, con la cual se encuentra un vector tanto para las velocidades como para las aceleraciones, mediante la matriz se realiza el análisis de singularidades²⁷, que en la siguiente sección se hará notar su importancia en el control del robot.

Definición 2.4. Singularidades

Una singularidad ocurre cuando un sistema de ecuaciones no es solucionable debido a que la matriz de coeficientes no puede ser invertida debido a que su determinante es igual a cero²⁸.

En un robot manipulador la existencia de singularidades está ligada a la descripción de una configuración en la cual las articulaciones no pueden solucionarse²⁹, de manera que el movimiento hacia ese punto es imposible de realizarse e inclusive puede causar daños la estructura mecánica del mismo.

Una parte fundamental en el control de estos robots está relacionada con las solución que tenga un conjunto de ecuaciones particulares derivadas del análisis cinemático, en particular las que se encuentran en la matriz Jacobiana, la posibilidad de invertir esta matriz definirá en gran medida que el sistema sea o no solucionable.

1.2.2.1. Análisis de la posición del Robot Planar

Para iniciar con el análisis del robot, recordamos que el punto P de llegada del efector final tiene asociado a él un vector el cual se puede obtener de la suma de los dos vectores P_1 y P_2 , y el cual puede expresarse en forma cartesiana o vectorial y que es una función vectorial de las variables de articulación θ_1 y θ_2 , las cuales son a su vez funciones del tiempo.

²⁷ Craig (2006), *Robótica*, p. 151.

²⁸ Stanley (2008), *Álgebra Lineal*, p. 95.

²⁹ Barrientos (1997), *Fundamentos de Robótica*, p. 126.

Este vector coincide con el vector de posición que aparece en la cinemática directa como resultado de la evaluación del algoritmo Denavit-Hartenberg.

Nuevamente se hace mención que este vector \vec{P} es el vector que referenciado a la base del robot se encarga de cerrar la cadena cinemática para poder expresar cada una de las articulaciones del robot respecto de un sistema de manera general.

El vector de posición de forma vectorial expresado en términos de las articulaciones del Robot Planar se observa de la siguiente manera:

$$\vec{P} = \{(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))i + (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))j\}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

1.2.2.2. Análisis de la velocidad del Robot Planar

Si existe movilidad en el robot en un instante del tiempo, todas las articulaciones estarán moviéndose de manera uniforme, con velocidades distintas pero que se coordinan para que el movimiento sea suave y estable.

En el momento en que se analiza el movimiento cada articulación en el robot, cada actuador describe una velocidad lineal y una velocidad angular, las cuales están relacionadas por medio de la transformación que se obtiene de la derivación paramétrica del vector de Posición.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_1(\vec{q}) \\ P_2(\vec{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1(\vec{q})}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial P_1(\vec{q})}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{\partial P_2(\vec{q})}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial P_2(\vec{q})}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1(\vec{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1(\vec{q})}{\partial q_2} \\ \frac{\partial P_2(\vec{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2(\vec{q})}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \end{bmatrix}$$

El vector de derivadas que aparece en el lado derecho de la ecuación corresponde con el vector de velocidades angulares del Robot Planar, y es este el vector que se resuelve dentro de los algoritmos que se resuelven en el modelo de simulación y que son de gran interés en el control del robot.

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1(\vec{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1(\vec{q})}{\partial q_2} \\ \frac{\partial P_2(\vec{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2(\vec{q})}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

El vector \vec{P} es el resultado de la primera derivada del vector de Posición con respecto del tiempo, la relación directa que se tiene en cuanto a las velocidades, lineal y angular está dada por la ecuación matricial:

$$\vec{P} = J(P(\vec{q})) \cdot \dot{\theta}$$

La matriz Jacobiana del Robot Planar de dos grados de libertad es la parte expresada como $J(P(\vec{q}))$, y es esta matriz la encargada de llevar a cabo el mapeo de valores entre ambos conjuntos de coordenadas³⁰, del espacio cartesiano hacia el espacio de las articulaciones, recordando que es en este último donde se está llevando a cabo el análisis de la cinemática del robot.

Una condición realmente importante en el control de manipuladores como se ha venido mencionando son los puntos singulares del mecanismo, que son aquellas configuraciones de los eslabones en los cuales es imposible que el robot coloque su efector final sin que su postura pueda producir un mal comportamiento en el mecanismo.

Estos puntos singulares se muestran a partir de la resolución de la matriz Jacobiana característica del manipulador, ya que es en esa parte del sistema con ayuda del determinante es posible saber si un punto es o no alcanzable.

El determinante de la matriz Jacobiana se conoce como el Jacobiano de la matriz y se puede obtener a partir de los métodos del álgebra lineal para resolverla. Debe observarse que en principio este sistema de ecuaciones pareciera ser no lineal, pero al hacer una sustitución de ciertos valores se tiene como resultado un sistema de ecuaciones lineales sobre el cual es posible aplicar algún método para solucionar dicho sistema.

³⁰ K.S. Fu, col. (1988), ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia, p.243.

Entonces, del álgebra lineal se sabe que un sistema de ecuaciones lineales tiene la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es una matriz de coeficientes, \vec{x} es un vector de incógnitas y \vec{b} es el vector solución. La manera más usual de resolver un sistema lineal de ecuaciones es invirtiendo la matriz A de coeficientes de forma que el sistema se observe de la siguiente manera $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Se observa entonces que es necesario hallar la inversa de dicha matriz, tomando en cuenta que el sistema tendrá al menos una solución, siempre que exista una matriz inversa de A . El método que se aplicara para la resolución de las velocidades del robot, dado que cuenta con dos grados de libertad, será el método general para el cálculo de la inversa de un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En este método está implicado el hecho de la existencia del determinante para la existencia de la matriz inversa y por lo tanto la existencia de una solución única. Sea $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ la inversa de la matriz queda definida como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Aplicado a la matriz Jacobiana del Robot Planar, la existencia de la matriz inversa garantizará que el Jacobiano sea diferente de cero y por tanto el punto en el que se evalúen las ecuaciones no producirá una configuración singular, dado que existe una solución. Se ha mencionado que para resolver $\vec{P} = J(P(\vec{q})) \cdot \dot{\theta}$ la existencia de una inversa para la Matriz Jacobiana cuando $\det J(P(\vec{q})) \neq 0$ asegura que exista cuando menos una solución y por lo tanto descarta cualquier aparición de singularidades.

La cinemática inversa proporciona los valores numéricos de las variables de articulación q_1 y q_2 , los valores de las longitudes l_1 y l_2 son conocidos, por lo tanto se puede hacer una sustitución y evaluación de los elementos de la matriz Jacobiana de manera numérica, llevando a cabo la derivación parcial del vector de posición se tienen los elementos de la matriz expresados en términos de las variables articulares.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} &= -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} &= -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} &= l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se llevara a cabo la evaluación numérica en el algoritmo correspondiente y se evaluarán los puntos singulares; el sistema de ecuaciones lineales que define la obtención del vector de velocidades angulares es por lo tanto:

$$\dot{\theta} = J(P(\vec{q}))^{-1} \cdot \vec{P}$$

Donde \vec{P} es la primera derivada con respecto del tiempo del vector de posición o la velocidad lineal del vector de posición.

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, en términos de la matriz Jacobiana y la aplicación del método de la inversa para el cálculo del determinante Jacobiano se tiene la ecuación final para el cálculo del vector de velocidades angulares.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & -l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} P_x \\ \frac{d}{dt} P_y \end{bmatrix}$$

La determinación de la invertibilidad de la matriz Jacobiana es la parte medular del análisis cinemático, ya que como se ha visto además de relacionar las velocidades en el espacio de las variables articulares, proporciona una descripción del robot en cuanto a su movimiento, ya que al no poder asignarse un conjunto de velocidades al robot, esto indica que no es posible que el robot se mueva hacia un destino y por tanto debe considerarse una acción de trabajo diferente.

1.2.2.3. Análisis de la aceleración del Robot Planar

Las ecuaciones de que definen al vector de aceleraciones angulares se calculan del mismo modo que se hizo para encontrar las velocidades angulares, obteniendo las derivadas parciales del vector de Posición y derivando el mismo vector respecto del tiempo. En este caso, para las aceleraciones lo que se requieren son las segundas derivadas, para ello se parte de la ecuación $\vec{P} = J(P(\vec{q})) \cdot \dot{\theta}$.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \{J(P(\vec{q})) \cdot \dot{\theta}\}$$
$$\vec{P} = J(P(\vec{q})) \cdot \ddot{\theta} + \frac{d}{dt} J(P(\vec{q})) \cdot \dot{\theta}$$

La parte de la ecuación que implica $\frac{d}{dt} J(P(\vec{q}))$ hace referencia a la segunda derivada parcial de la matriz Jacobiana, la cual es posible determinarla mediante la aplicación del concepto de Matriz Hessiana, la cual corresponde a la segunda derivada de un vector de posición cuando este se deriva parcialmente. La matriz Hessiana para el Robot Planar consistirá en una matriz de dos por dos.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_1}{\partial q_1^2} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 P_2}{\partial q_2^2} \end{bmatrix}$$

Nuevamente esta matriz tiene que ser evaluada numéricamente, pero esto se lleva a cabo en el algoritmo correspondiente al cálculo de las aceleraciones angulares en la simulación. De la ecuación para las aceleraciones es necesario despejar al vector $\ddot{\theta}$, por lo tanto la expresión correspondiente queda de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta} = J(P(\vec{q}))^{-1} \cdot \left\{ \vec{P} - \frac{d}{dt} J(P(\vec{q})) \cdot \dot{\theta} \right\}$$

Siendo $\vec{P} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$ la segunda derivada respecto del tiempo del vector de posición, mientras que los elementos de la matriz de segundas derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial^2 q_1} &= -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) & \frac{\partial P_1}{\partial q_1 q_2} &= -l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1 q_2} &= -l_2 \sin(q_1 + q_2) & \frac{\partial^2 P_2}{\partial^2 q_2} &= -l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Capítulo 3. Diseño del Sistema de Control

Una vez que se han obtenido las ecuaciones cinemáticas del Robot Planar, es posible entonces diseñar un modelo de control que enlace los resultados de la cinemática inversa para enviar a las articulaciones los datos que generen la postura del robot para que el efector final quede orientado en una determinada dirección.

Para el diseño del modelo de control se utilizó la plataforma Simulink® debido en gran medida a la compatibilidad que ésta tiene con la plataforma de software libre Arduino. Además de la compatibilidad que existe entre ambas, Simulink® permite un manejo de funciones de manera modular, lo cual simplifica la programación del robot.

Los detalles respecto al software se describen en la parte principal del capítulo, mientras que el diseño del control se describe en la parte final, retomando conceptos del análisis cinemático del Robot Planar. Del mismo modo se menciona como se enlazan las funciones correspondientes con la librería Arduino IO para el envío de las señales de control.

Con los resultados del análisis cinemático inverso y a través del sistema de adquisición de datos elaborado, se llevarán a cabo, en apartados posteriores, una serie de experimentos que permitan observar la funcionalidad del sistema de control sobre un prototipo del robot.

1.1. Sistema de Adquisición de Datos

El envío de datos consiste en la comunicación de un sistema físico con un ordenador o viceversa, a través de una serie de acciones mediante las cuales se leen datos de entrada, mismos que se procesan y se procesan para obtener un nivel de salida útil para estudiar o controlar un fenómeno o sistema.

La comunicación de los datos de entrada y salida del sistema de adquisición de datos debe llevarse a cabo mediante protocolos de comunicación que sean comprensibles tanto un ordenador como por el sistema que se está controlando. Los protocolos de comunicación varían de acuerdo con el dispositivo de adquisición de datos que se esté implementado.

Estos dispositivos deben tener, como principal característica, la capacidad de reaccionar ante un determinado protocolo de comunicación³¹, de manera que puedan transformar señales en un conjunto de valores que puedan ser utilizados para la estimación de los datos con los cuales está operando el sistema sobre el cual se implemente el sistema de adquisición de datos.

La información computada no puede ser enviada de primera mano al sistema controlado, sino que es necesario, en primer lugar, que sea procesada y transformada a un lenguaje entendible por todos los dispositivos involucrados, para ello se necesita el uso de una tarjeta de adquisición de datos.

La tarjeta de adquisición de datos trabaja como interprete entre los datos recabados, de entrada, y los datos procesados, de salida, transformándolos en señales analógicas o digitales. El proceso de lectura y escritura de datos puede llevarse a cabo en un orden $A \rightarrow B$ o $B \rightarrow A$, siendo A y B emisor y receptor alternadamente.

En el Robot Planar, se resuelve en primera instancia la cinemática inversa y se obtiene un conjunto de resultados, los cuales son enviados través de un puerto a la tarjeta que se encarga de interpretar los mismos.

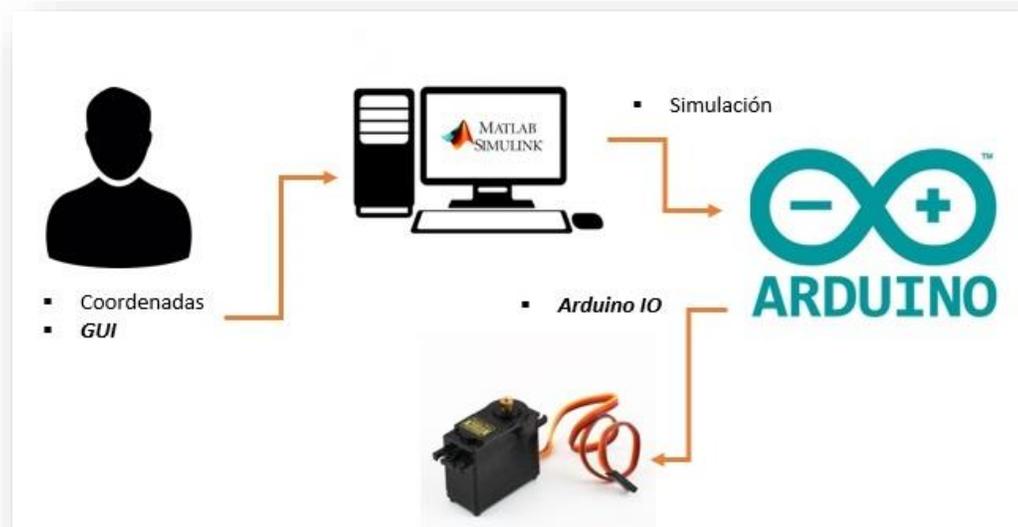


Figura 12. Sistema de adquisición de datos con Simulink® y Arduino (Elaboración propia)

³¹ Conjunto de normas que permiten el intercambio ordenado de información dentro de una red.

El sistema de control diseñado, cuenta con una interfaz gráfica a través de la cual se ingresan las coordenadas cartesianas del punto de llegada del efector final, de modo que estas ingresen al sistema y puedan generarse las secuencia de acciones que generen las coordenadas articulares correspondientes y su posterior envío al sistema de adquisición de datos por medio del micro controlador³² en la tarjeta.

De manera general un sistema de adquisición de datos está conformado por un ordenador que permite verificar la entrada y salida de información a través de un protocolo de comunicación, una tarjeta de adquisición de datos que permita la interpretación de la información y que a su vez sea capaz de comunicarla con los dispositivos periféricos que forman al sistema como pueden ser sensores, displays, motores, entre otros.

1.2. Tarjeta de adquisición de datos

Una tarjeta de adquisición de datos tiene la principal característica de contar con un conjunto de entradas y salidas, analógicas y digitales, además de un puente de comunicación con cualquier tipo de ordenador. El número de entradas, salidas, la velocidad de muestreo y la capacidad de memoria determinan la capacidad que tiene cada tarjeta.

Existe un gran número de tarjetas de adquisición de datos, y su uso se ha extendido a un gran número de aplicaciones, la automatización y la creación de sistemas inteligentes han propiciado que cada vez sean requeridos sistemas de mayor rendimiento, sin embargo la mayoría de ellas tienen costos elevados.

Atendiendo a la necesidad de desarrollar de nuevas plataformas que puedan ser empleadas para la adquisición de datos que sean de bajo costo y compatibles con gran variedad de software, aparecieron en el mercado las tarjetas desarrolladas para operar bajo la plataforma de software libre Arduino.

Arduino cuenta con un conjunto de tarjetas desarrolladas para trabajar bajo su lenguaje de programación, dentro de este conjunto destaca la llamada tarjeta Arduino UNO, esta es si no la única si la más comúnmente empleada, y precisamente el Arduino UNO se empleó dentro del sistema de adquisición de datos para el Robot Planar.

³² Circuito integrado que contiene una unidad de memoria y unidades de entrada y salida, ver más en <http://losmicrocontroladores.blogspot.mx/> , (MICROCONTROLADORES, 2016).

1.2.1. Tarjeta Arduino Uno

Arduino es una plataforma de generación de prototipos que surgió con la idea de la interacción entre software y hardware de manera que fuera fácil y accesible. El lenguaje Arduino tiene sus bases en el lenguaje de programación C y fue desarrollada bajo la plataforma Processing.

Dentro de las facilidades que brinda Arduino para trabajar en su plataforma se encuentran, como se mencionó, las tarjetas Arduino³³, dentro de estas tarjetas se encuentra presente un micro controlador que permite a cada una de ellas interactuar con señales analógicas y digitales para poder controlar una gran variedad de dispositivos electrónicos, entre los cuales se encuentran distintas clases de motores.

Además de eso, la plataforma Arduino cuenta con un conjunto de librerías que vienen cargadas de manera automática en la plataforma y que basta con colocarlas en la cabecera de un programa para que estas permitan integrar instrucciones correspondientes a un conjunto en específico de componentes que permitan establecer una comunicación serial, entre muchos otros tipo acciones.



Figura 13. Tarjeta Arduino UNO (Fuente: http://www.vetco.net/catalog/product_ingo.php?products_id=13665)

³³ Ver más en <https://www.arduino.cc/en/Main/Products>, (Arduino-Home, 2016).

La Tarjeta Arduino proporciona como se ha mencionado un conjunto de pines de entrada y salida, cuenta además con una plataforma mediante la cual a través de un ordenador es posible interactuar con partes físicas, como se ha dicho, motores o cualquier otro dispositivo electrónico.

Las tarjetas de Arduino son de bajo costo, en relación con alguna otra tarjeta de adquisición de datos, y es por eso que se ha vuelto muy común que en la práctica se empleen para el diseño de prototipos e interfaces para el análisis, control y verificación de robots.

El Arduino UNO cuenta con un micro controlador de la familia ATmega328P, de esa forma se tienen catorce pines de entrada y salida (E/S), de los cuales seis pueden ser empleados como salida de señales con modulación de ancho de pulso, PWM (Pulse Wide Modulation), así como seis pines dedicados únicamente a la lectura de entradas analógicas.

La Tarjeta Arduino UNO, y en general todas ellas, se comunica con el ordenador por medio de una conexión USB, creando un objeto COM, la frecuencia de muestreo es de 16 MHz trabajando a 8 bits.

Las características técnicas del Arduino UNO

- Micro controlador: ATmega328.
- Voltaje de operación: 5V.
- Voltaje de entrada (recomendado); 7-12V.
- Límite de voltaje de entrada: 6-20V.
- Pines digitales (E/S): 14 (de los cuales 6 pueden ser PWM).
- Pines de entrada analógica: 6.
- Intensidad DC por pin (E/S): 40mA.
- Intensidad DC por Pin: 50mA.
- Memoria flash: 32 KB (ATmega328)
- SRAM: 2 KB (ATmega328).
- EEPROM: 1 KB (ATmega328).
- Frecuencia: 16MHz.

Empleada como tarjeta de adquisición de datos, el Arduino UNO tiene la capacidad de enlazarse con diferentes plataformas como es el caso de Simulink® de Matlab®. Además de las librerías en Arduino, al instalarse el paquete de soporte Arduino IO, nuevas librerías se generan dentro del entorno de Simulink®, con las cuales es posible controlar dispositivos conectados a la tarjeta desde ese sitio.

El programa encargado de enlazar Simulink® y Matlab® con Arduino es el paquete de soporte Arduino IO, el cual cuenta con un algoritmo que fue diseñado para permitir que se creen desde estos dos programas los objetos e instrucciones necesarias para que la tarjeta los reciba en forma de datos que ella comprenda y que pueda transformarlo en señales de control.

Existen muchas ventajas al emplear el paquete de soporte Arduino IO, ya que además de permitir programar un Arduino UNO desde un programa externo a Arduino, también permite su aplicación a la creación de modelos gráficos que permitan llevar a cabo una simulación del cálculo de las variables de control y el envío de estas hacia la adquisición de datos como se describe a continuación.

1.3. Simulink®

Simulink® es un entorno, extensión de Matlab®³⁴ creado para el diseño de modelos de simulación, basados en la interacción de diagramas de bloques para la resolución de sistemas dinámicos. La plataforma posee un editor gráfico, con bloques y librerías editables, al ser una extensión de Matlab®, existe la posibilidad de que ambas partes interactúen en el análisis en tiempo real cuando se realiza una simulación.

Los bloques en Simulink® se agrupan en conjuntos de una clasificación específica, llamada librería, que al igual que Arduino agrupa comandos, en forma de bloques, para una serie de tareas específicas dentro de la simulación.

Por default el paquete cuenta con un conjunto de librerías para diferentes procesos, sin embargo dentro de una de las facilidades que ofrece es que a este también es posible agregar nuevas librerías, como es el caso de las correspondientes para la comunicación entre Simulink® y Arduino.

³⁴ Ver más en http://www.mathworks.com/help/matlab/learn_matlab/product-description.html, (MathWorks, 2016).

Dentro de los archivos que se encuentran en el paquete Arduino IO se tiene una serie de archivos con la extensión .pde que se pueden abrir con Arduino, y que contienen los protocolos necesarios para cargar las sentencias necesarias para realizar la conexión, así como las instrucciones que permiten a Simulink® crear objetos Arduino útiles para manipular la tarjeta.

Para llevar a cabo la comunicación Simulink® con Arduino, se debe, en primer lugar, instalar los archivos necesarios, la creación de la librería Arduino IO se hace a través de la ventana de comando de Matlab®, mientras que en el Arduino se carga el script que contiene el protocolo de comunicación para la interacción entre las plataformas.

El archivo adioes.pde se carga en la tarjeta, de esta manera se garantizará que el conjunto de instrucciones, que detectan el envío de información, se encuentre ejecutando de manera continua cada vez que la tarjeta se conecte al ordenador. La memoria del micro controlador permite almacenar un solo programa a la vez, por lo cual cuando se emplee como tarjeta de adquisición de datos no es posible que cumpla con otra función que no sea esta.

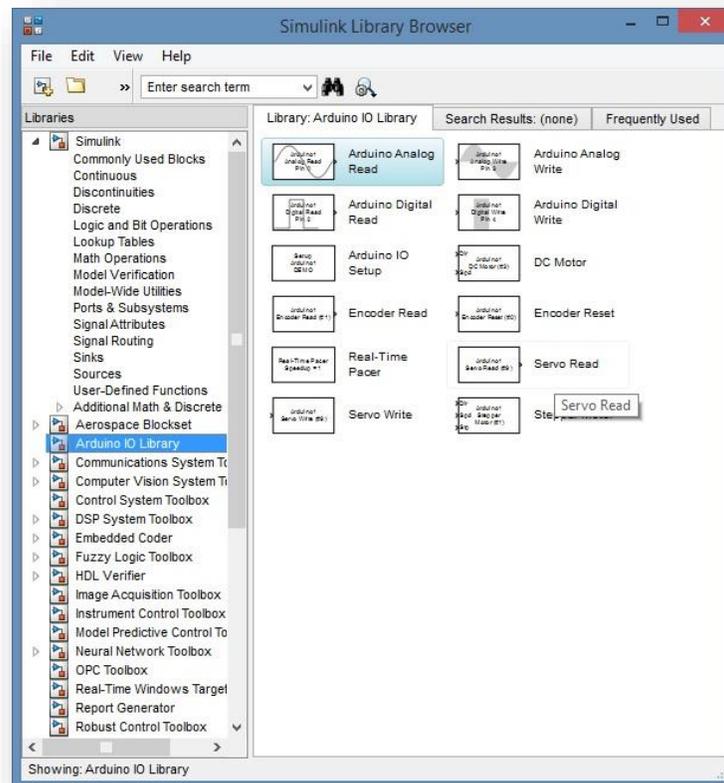


Figura 15. Librería de Simulink® Arduino IO (Elaboración propia)

Una de las ventajas de esta manera de comunicación es que la lectura de datos es constante, ya que el Arduino únicamente está a la espera de instrucciones, otra de ellas es el Arduino IO, dentro de la cual se encuentran bloques que permiten enviar y recibir datos al Arduino. Entre estos bloques se pueden encontrar aquellos que se ocupan para controlar servomotores.

1.3.2. Servomotores

Para dar movilidad al robot se tomó la decisión de emplear servomotores para que sean los actuadores del Robot Planar de dos grados de libertad, entre las características propias de los servomotores se tomó en cuenta su versatilidad y facilidad de programación, debido a que, empleando Arduino, la programación para controlarlos consiste en llamar funciones preestablecidas dentro de una librería.

Una de las ventajas que se encuentran al utilizar servomotores en la creación de prototipos, especialmente en robots, es contar con librerías que generan funciones con pocas instrucciones que permiten controlarlos de manera sencilla, un caso especial de estas librerías es la generada en Simulink®, la librería Arduino IO permite controlar, por medio de bloques, la posición de una cantidad de servomotores.

Desde el panel gráfico de Simulink® se envían señales de control a la tarjeta Arduino, por medio de los bloques Servo Write, de esta manera un valor numérico es enviado al micro controlador para que este realice el mapeo y transforme dicho valor a uno que ocasione un movimiento angular en el eje ser servomotor.

Los servomotores como se ha mencionado, debido a sus características, se han vuelto parte esencial en el diseño de prototipos. Este tipo de motores suelen elegirse por sobre otros por la variedad de cargas que pueden mover, y en general porque pueden controlarse a través de un micro controlador y plataformas como Arduino simplifican aún más esa labor.

De manera general, un servomotor o servo, se define como un motor de corriente continua que ha sido acondicionado con un conjunto de engranes reductores y un sistema de control que hace posible que el eje del motor se posicione sobre un ángulo de manera precisa.

La mayoría de los servos trabajan en un rango de giro que abarca de los 0° a los 180°, aunque también existen aquellos que logran una rotación completa de 360°. La posición angular en el eje del servomotor se debe al envío de pulsos por medio de una señal PWM, de ancho de pulso variable, la amplitud de este pulso se transforma en un valor angular sobre el cual se posiciona finalmente el eje del motor.

El servomotor se compone de cuatro partes. La primera de ellas corresponde al motor de corriente continua, este motor tiene en su extremo un par de terminales por las cuales pasa una cantidad de voltaje que hace que este gire, la polaridad del voltaje que entra en las terminales dictamina el sentido de giro del eje en el motor, por ello una inversión en la polaridad del voltaje generará un cambio en el sentido de giro.

La segunda parte del servo, es el conjunto de engranes reductores, o tren de engranaje, este se emplea para reducir la velocidad generada en el eje del motor, este efecto recae directamente en el torque nominal del servomotor.

La velocidad en el motor de corriente continua depende del voltaje que entra en él, tomando en cuenta esto, y teniendo como un hecho que a mayor velocidad de rotación menor fuerza habrá en el eje. El hecho de disminuir la velocidad hará que la fuerza sobre el eje se amplifique, de este modo a mayor fuerza sobre el eje, mayor podrá ser el torque aplicado sobre el eje del servo.

Los diferentes fabricantes especifican un rango de voltajes relacionados con el torque que se genera en ellos, de ese modo los voltajes de operación para la gran mayoría de ellos se encuentran entre 4.8 y 6 volts.

Por ultimo en la composición del servo se tiene un circuito lógico que controla el envío e interpretación de los pulsos que se envían hacia él, un circuito comparador analiza el error el cuanto a la amplitud del pulso y decide si un potenciómetro unido al eje del motor debe girar en sentido horario o anti horario de manera que se oriente a la posición necesaria.

En el circuito interno, el potenciómetro actúa como un encoder que determina si el eje debe mantenerse en la posición actual o, si es el caso, sumar o restar posiciones en uno u otro sentido para cumplir con la posición angular requerida y que es indicada por la señal recibida.

Como se ha mencionado, el servo trabaja por medio del envío de pulsos que mueven el eje hacia una determinada posición angular, sin embargo, el funcionamiento de los servomotores involucra más cuestiones que a continuación se mencionan.

La frecuencia que un servo necesita para trabajar de forma eficiente es de 50 Hz, frecuencia con la cual se tienen un periodo de lectura de los pulsos enviados que se realiza cada 20 milisegundos, esto significa que en cada intervalo de estos 20 milisegundos, el circuito comparador del servo analiza el error entre la toma de lectura anterior o siguiente, de la señal PWM³⁵.

El tren de pulsos enviados para que el servo se mantenga en una posición angular debe ser constante, ya que en la mayoría de los casos, el eje se encuentra sosteniendo una carga, que de no existir una señal consistente obligaría al eje a perder su posición predeterminada.

En cuanto al pulso que recibe el servo, este es una onda cuadrada que oscila en un rango de frecuente entre 1 y 2 milisegundos, que corresponden con los límites 0° y 180°, también se puede interpretar el rango en la amplitud de los pulsos en valores entre 0.5 y 2.5 milisegundos. De esa manera, una onda de 1.5 milisegundos mantendrá el eje del servomotor en la posición neutra de 90°, cualquier valor intermedio genera de esa manera una posición intermedia.

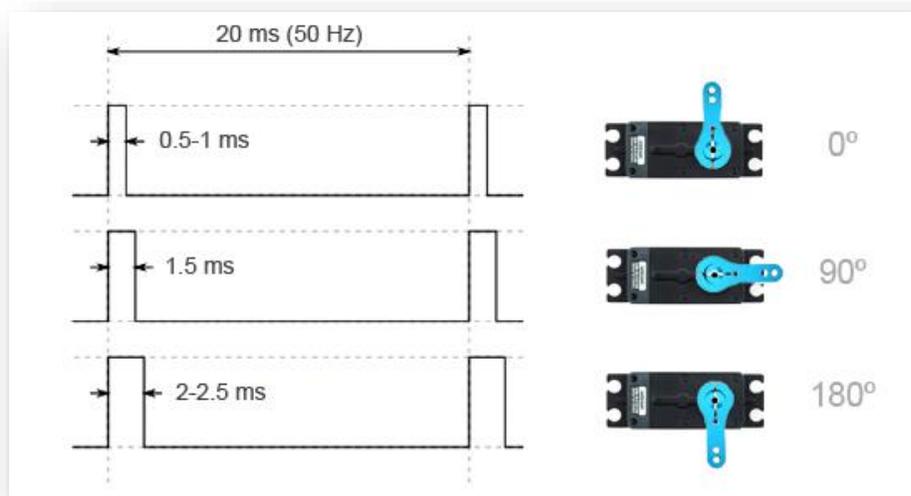


Figura 16. Frecuencia y amplitud de pulso en un servomotor (Fuente <http://www.luisllamas.es/2016/06/controlar-un-servo-con-arduino/>)

³⁵ Ver más en http://platea.pntic.mec.es/vgonzale/cyr_0204/ctrl_rob/robotica/index.htm, (Fundamentos de Robótica, 2016).

1.3.3. Diseño Conceptual del Sistema de Control

Como se estableció al inicio, el objetivo general consiste en controlar un Robot Planar de dos grados de libertad. Para tal propósito se diseñó un sistema de control en Simulink®, que se encarga de resolver la cinemática del robot y a través de Arduino, comunicar los resultados para lograr una determinada postura que oriente al efector final del mismo.

De manera general, puede darse una breve descripción del sistema de control diseñado de la siguiente manera. En primer lugar se tiene una interfaz por medio de la cual se ingresan las coordenadas del punto de llegada del robot. La segunda parte está formada por un diagrama de bloques que enlaza las funciones que resuelven la cinemática inversa, las velocidades y las aceleraciones.

Por último, se encuentran los bloques que envían las señales de control relacionadas con la orientación de las articulaciones hacia la tarjeta Arduino.

Debe recordarse que la finalidad del control es hacer que el efector final del robot pueda posicionarse sobre un punto dentro del espacio de trabajo. La mejor manera de garantizar que se cumpla esto es verificando las condiciones cinemáticas a través del análisis cinemático.

El análisis cinemático se llevó a cabo para conocer dos cuestiones fundamentales. La primera de ellas es conocer las coordenadas articulares que generan una determinada orientación en los elementos del robot, y la segunda consiste en encontrarla matriz Jacobiana que describe al Robot Planar, con ella se determina si el cambio de coordenadas es solucionable o si es que se presenta alguna singularidad.

De esa manera, se presenta a continuación la manera como se estructuró el diagrama de bloques correspondiente con la parte de la simulación y envío de datos del sistema de control, así como el orden de agrupación que se logró entre la cinemática del Robot Planar y la conexión con el Arduino.

Para comenzar con la descripción del diagrama de control, es necesario mencionar que si bien se ha creado una librería con bloques reconocibles por Arduino en la plataforma Simulink® debido a la instalación del soporte Arduino IO, es necesaria la presencia de un par de bloques dentro de la simulación para que exista la comunicación entre ambas partes.

El protocolo para la comunicación se ha cargado previamente en la tarjeta, este se encuentra ejecutándose continuamente en el micro controlador a la espera de algún dato proveniente del puerto serial, es por ello que es necesaria la presencia de los bloques Arduino IO Setup y Real-Time Pacer.

Estos dos bloques son los encargados de establecer tanto el puerto de comunicación que se abre para el envío de las señales, así como de fijar la velocidad de muestreo en la toma de lecturas y en la simulación.

El bloque Arduino IO Setup tiene la función de crear una variable que inicializar la comunicación con Arduino desde el panel gráfico, así mismo a través de él se abre el puerto serial que sirve de vía para el envío de información, de esa manera cada vez que se inicie la simulación se podrá llevar a cabo intercambio de información.

Una vez que se ha realizado el paso anterior, el siguiente bloque que debe colocarse es el que se encarga de ajustar el tiempo de muestreo entre dos tomas de lectura consecutivas, el bloque Real-Time Pacer es el encargado de dictar en la simulación la relación entre la ejecución y el envío de datos a la tarjeta.

El ajuste en la velocidad de la simulación puede hacer que esta se incremente o se ralentice según sea el caso. En el sistema de control para el Robot Planar se tomó un factor de velocidad 1, de este modo el comportamiento del prototipo reaccionará en tiempo real a la velocidad de la propia simulación.

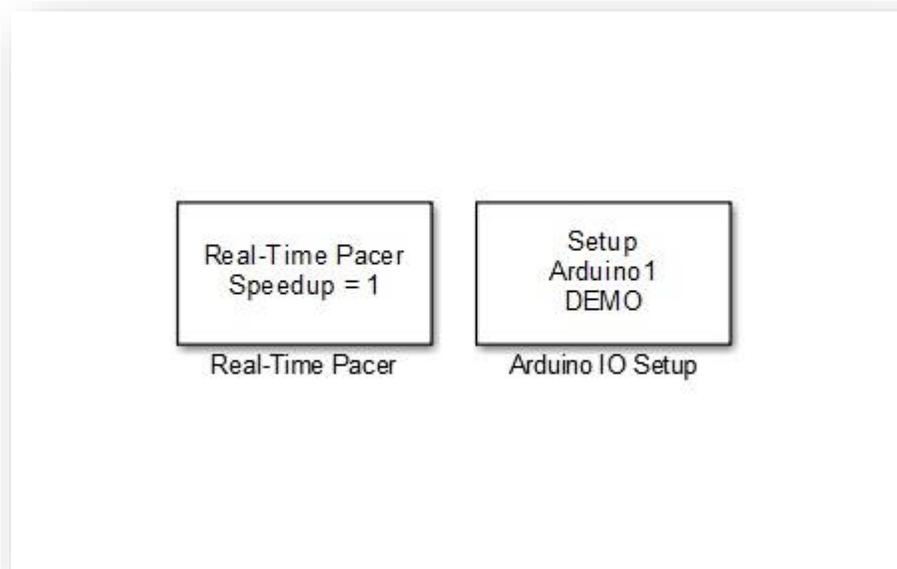


Figura 17. Bloques Setup Arduino y Real-Time Pacer (Elaboración propia)

Una vez que se han establecido las condiciones iniciales en la simulación, es posible entonces crear las funciones necesarias para resolver la cinemática del robot, dichas funciones se agrupan en dos partes, una de ellas correspondiente con el bloque de la cinemática y un segundo que es el bloque de las señales de control.

Dentro del bloque de la cinemática se encuentran los bloques función Ecuaciones Cinemáticas, Velocidades y Aceleraciones.

La función Ecuaciones Cinemáticas contiene el algoritmo que se encarga de resolver la cinemática inversa del robot, con lo cual se obtienen los valores numéricos del vector de coordenadas articulares $\vec{q} = [q_1 \ q_2]^T$, mismas coordenadas que se obtienen directamente de las ecuaciones deducidas en la parte de la cinemática inversa y que son:

$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\|P\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2\|P\|l_1}\right)$$

$$q_2 = 180^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \vec{P}^2}{2l_1l_2}\right)$$

En la cinemática inversa, para que el robot resuelva las variables articulares (q_1, q_2), es necesario especificar un par de coordenadas cartesianas (x, y) como datos de entrada. Para introducir dichas coordenadas y poder manipular esta parte desde el ordenador se diseñó una interfaz gráfica que sirve de puente entre el desarrollo de los cálculos dentro del diagrama de control.

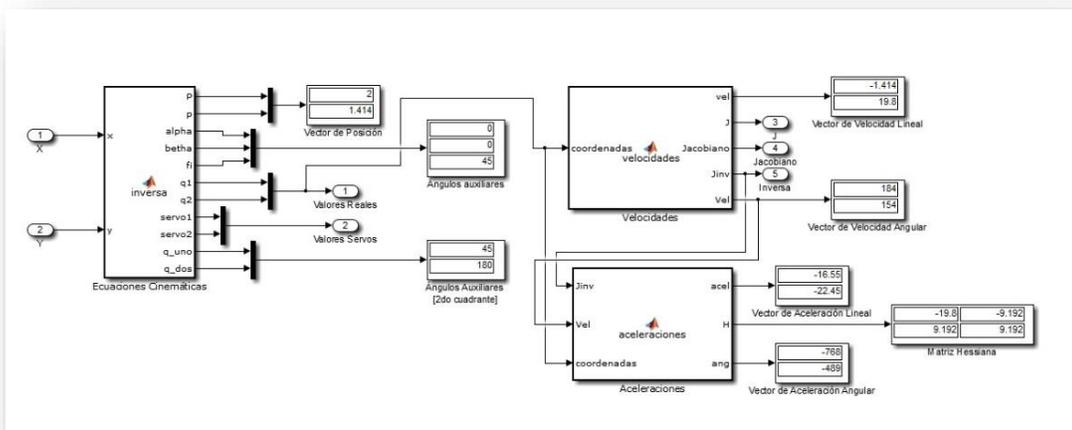


Figura 18. Bloque Cinemática (Elaboración propia)

Dentro de los cálculos de la cinemática inversa, resulta necesario tomar en cuenta una serie de factores que condicionan el comportamiento de las articulaciones, entre estas limitaciones se encuentran la distancia que delimita el alcance máximo del robot y las generadas debido a las características de los motores en cada articulación.

La condicionante en el límite de alcance máximo se encuentra en el momento en que ambas articulaciones se encuentran alineadas, si en ese momento se hiciera girar la base del robot se formaría una circunferencia de radio R , de modo que el perímetro de dicha circunferencia delimita el espacio de trabajo del robot³⁶.

De esa forma, cualquier punto que se encuentre fuera del perímetro donde $\vec{P} > R$, no puede ser un punto solucionable, bajo este criterio se estará generando una singularidad en el Robot Planar por un punto fuera del límite máximo.

Cabe mencionar que la posición inicial del robot, se toma en la posición neutra para los servomotores, que es igual a 90° , de tal manera que en el momento en que se detecta alguna singularidad por las restricciones que se hacen sobre la programación las articulaciones adoptaran dicha posición neutra.

En las ecuaciones cinemáticas también se encuentra implícito que ninguna articulación tenga una posición angular mayor a 180° debido, esto debido a dos factores, el primero de ellos está ligado a la configuración del robot sobre la cual se llevó a cabo el análisis, y el segundo se debe al rango de giro que tienen los servos.

Sin embargo, aun tomando en cuenta estas condiciones, habrá ocasiones en que los valores de q_1 y q_2 tengan al menos una de ellas un valor fuera de los límites. Esto ocurrirá en todos los casos cuando se ingrese una coordenada en y negativa, en esta caso el robot detectará nuevamente la presencia de una singularidad.

El servomotor por sus características mecánicas mantiene un rango de rotación fijo entre 0° y 180° , y como se ha mencionado, cualquier punto que requiera una rotación angular de las articulaciones más allá de estos límites se considera como un punto no solucionable. A esta condición de punto no solucionable debido a las limitaciones de los motores se ha denominado como singularidad por servomotor³⁷.

³⁶ Craig (2006), *Robótica*, p. 102.

³⁷ En estos puntos el servomotor comienza a presentar vibraciones debido a las lecturas de señal que percibe.

Recordando que el objetivo del sistema de control es llevar al efector final hacia un punto alcanzable para el robot, y que para ello es necesario transformar un par de coordenadas cartesianas en coordenadas articulares. Mediante la aplicación del concepto de función vectorial se obtienen la relación $R^m \rightarrow R^n$ por medio de la cual se lleva a cabo la transformación de coordenadas.

La segunda función en la cinemática corresponde al cálculo de las velocidades angulares para las articulaciones del Robot Planar, de esto se desprenden otros conceptos acerca de las configuraciones singulares.

La transformación $R^m \rightarrow R^n$ se expresa entonces como una matriz cuadrada que está en función de las coordenadas generalizadas (q_1, q_2) y que recibe el nombre de matriz Jacobiana.

La matriz Jacobiana del Robot Planar se puede trabajar de manera que, en conjunto con los vectores de velocidades angulares y lineales, forman un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, en donde la matriz A de coeficientes corresponde con la matriz Jacobiana.

$$A = J(P(\vec{q})) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & -l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

El vector $\vec{b} = \vec{\dot{P}}$ es la primera derivada respecto al tiempo del vector de Posición y $\vec{x} = \vec{\dot{\theta}}$ es el vector de velocidades angulares. De esa manera la solución está dada por el sistema $\vec{q} = J(P(\vec{q}))^{-1} \cdot \vec{\dot{\theta}}$.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & -l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} P_x \\ \frac{d}{dt} P_y \end{bmatrix}$$

En esta parte de la cinemática se analizan aspectos importantes en la determinación de singularidades provenientes del cálculo de las velocidades, al igual que los sistemas de ecuaciones lineales, la existencia de un determinante $\det J(P(\vec{q})) \neq 0$ garantiza que en el robot dicha matriz es invertible y por lo tanto tiene solución, descartando que se trate de una matriz singular.

En el algoritmo creado para resolver las velocidades se obtienen tres resultados que permiten monitorear las posibles singularidades en el Robot Planar, estos resultados se muestran en Simulink® como la Matriz Jacobiana, su determinante y la Matriz Jacobiana Inversa.

A pesar de tener que cumplirse la condición de invertibilidad de $J(P(\vec{q}))$, se puede mencionar algo demasiado útil en el control del robot cuando se trabajan las velocidades del mismo.

“...si trabajamos con control de velocidad, la relación es lineal... Cuando $x(t)$ y $q(t)$ son de la misma dimensión,..., entonces el manipulador es no redundante y la matriz jacobiana se puede invertir...” (K.S. Fu, col., 1988, pág. 244).

De esa manera si $m = n$, las dimensiones de los vectores de variables de articulación y de coordenadas cartesianas, el Robot Planar tiene soluciones exactas en cada punto dentro de su espacio solucionable, por lo tanto no habrá en él singularidades ocasionadas por la no invertibilidad de la matriz Jacobiana.

Como una mención importante, dentro del análisis de los robots manipuladores, cuando estos cuentan con más de tres grados de libertad en donde $m > n$, o en el caso en que el número de grados de libertad sea mayor que las coordenadas requeridas.

En este caso una o más coordenadas articulares tendrán que expresarse en función de alguna otra, por lo cual se tiene mayor número de puntos singulares, debido a que el robot es redundante³⁸.

Así entonces puede mencionarse que teóricamente el Robot Planar de dos grados de libertad no tendría puntos singulares en el caso en que los motores de las articulaciones fueran capaces de rotar en 360° , sin embargo debido a que se utilizan servomotores como actuadores, son estos los que limitan el comportamiento del robot, cayendo en singularidades por servomotor.

La parte del envío de las señales de control hacia el micro controlador en la tarjeta Arduino se encuentra dentro del bloque con el nombre Servomotores [Articulaciones], en donde se encuentran las variables que controlan la posición angular de cada articulación.

³⁸ Craig (2006), *Robótica*, p. 231.

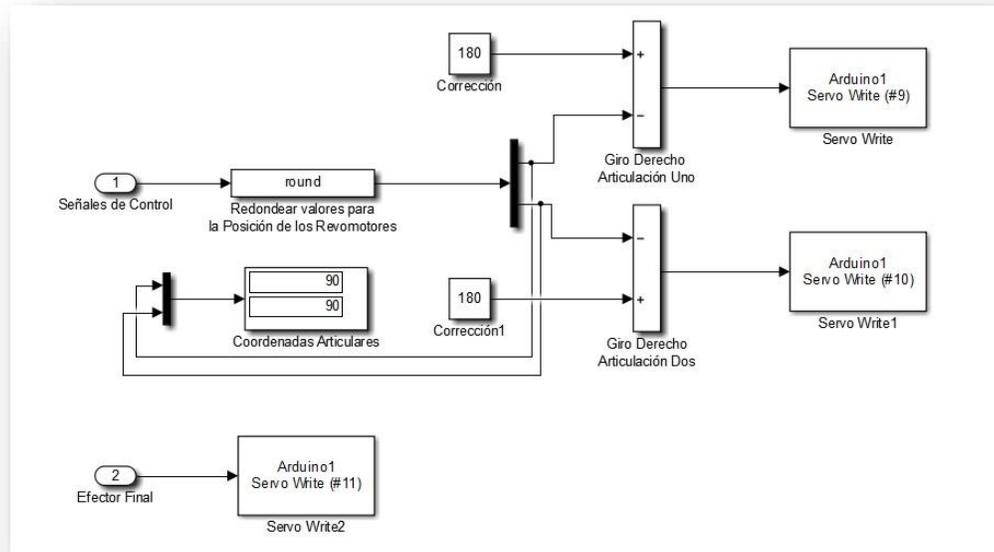


Figura 19. Bloque Señales de Control (Elaboración propia)

La posición en la cual deben colocarse los ejes de cada servomotor en el robot, se encuentran almacenadas en los bloques Servo Write de la librería Arduino IO. Los valores enviados a través de la comunicación serial se pueden observar por medio de los bloques Servo Read, cualquier cambio en las señales de control se pueden observar en estos bloques.

Es importante mencionar que la precisión en la orientación de las articulaciones para genera una postura que posicione al efector final sobre un punto específico, está ligada a las características mecánicas de los servos, tomando en cuenta que los valores que se envían a estos deben ser enteros, por lo cual se hace un redondeo, lo que genera un cierto error en la medición.

La parte final del sistema de control corresponde con la interfaz gráfica diseñada para introducir las coordenadas asociadas al punto sobre el cual se desea posicionar al efector final.

Las interfaces gráficas en Matlab® se escriben en el lenguaje de programación del propio software y se diseñan de manera similar a otras como en el lenguaje de programación BASIC, en donde se introducen los gráficos en la pantalla para posteriormente genera las líneas de comandos que ejecuten una acción programada.

Con la integración de una serie de comandos es posible llamar un archivo de Simulink®, de manera que se puedan introducir en el diagrama de bloques desde la interfaz sin necesidad de manipular directamente en la simulación.

Finalmente el control del Robot Planar estará formado por la interfaz en la que se ingresan las coordenadas (x, y) del punto de llegada en el plano cartesiano, el diagrama de control en donde se resuelve la cinemática del robot, integrando las coordenadas (q_1, q_2) y la matriz Jacobiana, en cuyos algoritmos se dictan las restricciones que generan singularidades.

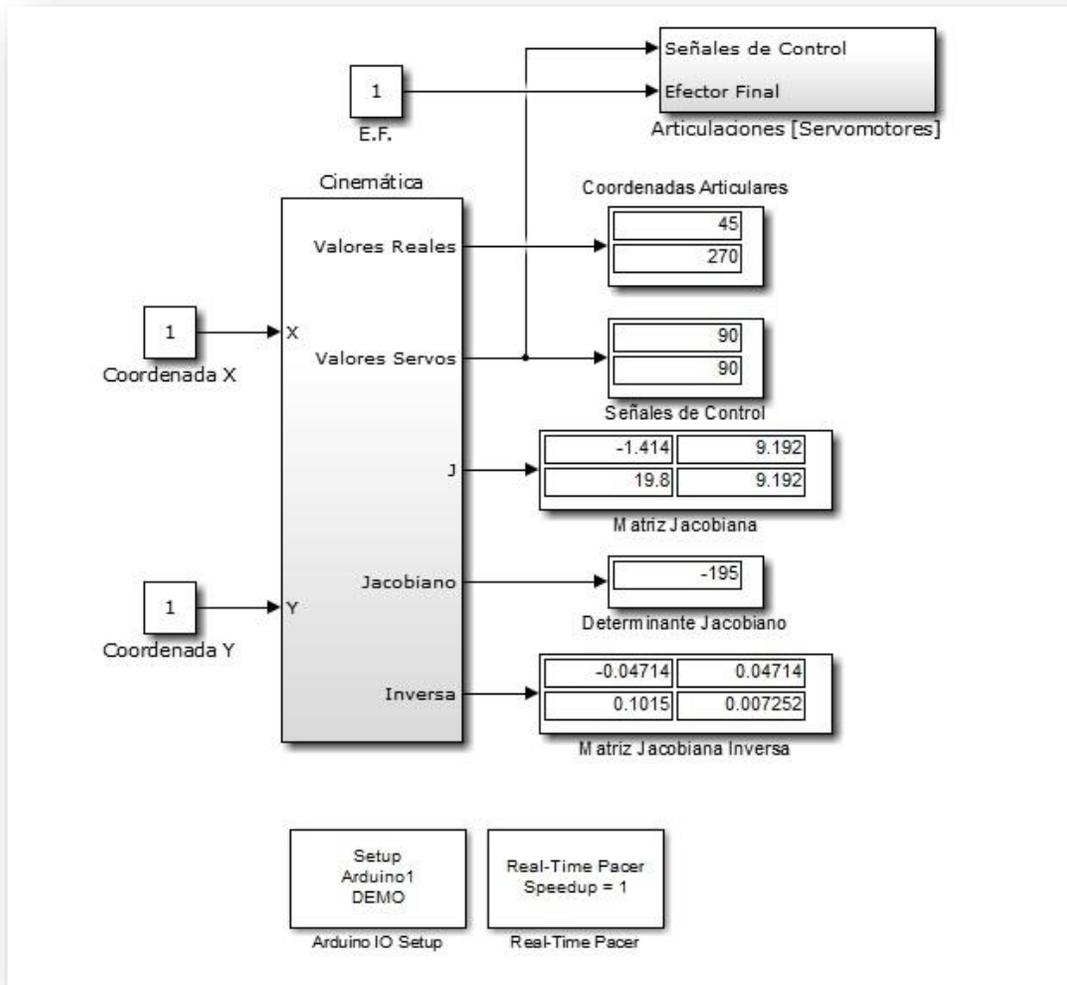


Figura 20. Sistema de Control (Elaboración propia)

Capítulo 4. Pruebas del Prototipo

En este capítulo se presenta el análisis del sistema de control diseñado y la respuesta que se genera en el prototipo de Robot Planar empleado para la realización de las pruebas dinámicas en donde se avalúa la precisión respecto a las coordenadas del punto de llegada, que se transforman y generan una determinada orientación para colocar al efector final.

Todo lo anterior tomando en cuenta que se presentaran errores en las mediciones de las coordenadas articulares que se envían al micro controlador como resultado del análisis cinemático y los valores angulares que entregan los servomotores.

En seguida se analizan un conjunto de simulaciones para una serie de puntos en los cuales se encuentran configuraciones, que por las condiciones mencionadas en apartados anteriores, generan alguna singularidad. En esta parte se describe por qué estos puntos tienen una configuración singular y la manera como los algoritmos dentro de la simulación evalúan dichas condiciones.

Al final del capítulo se mencionan las cuestiones que es necesario mejorar tanto en el prototipo como en el sistema de control con la finalidad de obtener un sistema de control que permita generar un análisis más detallado sobre el Robot Planar, así como en general, en el estudio de los robots manipuladores.

1.4. Ensamble del Prototipo

Una vez que se ha diseñado el sistema de control, es necesario contar con un modelo físico en donde sea posible observar el comportamiento real en respuesta de los datos procesados en el modelo de simulación y que son enviados al micro controlador. Para tal efecto se construyó un prototipo del Robot Planar que permite analizar la movilidad del mecanismo de acuerdo con el análisis cinemático inverso.

Con el prototipo elaborado se pudo observar los resultados de los experimentos propuestos en la siguiente sección del capítulo, en los cuales se analiza en primer lugar la respuesta de las articulaciones en cuanto a las singularidades de acuerdo a las coordenadas generadas para el punto de llegada del efector final.

Las dimensiones del prototipo corresponde a las longitudes de las articulaciones, las cuales son 15 cm y 13 cm respectivamente, estas longitudes como se ha mencionado en apartados previos, definen al alcance máximo del robot, siendo los puntos dentro del límite marcado por $\vec{P} \leq l_1 + l_2$.

Respecto de los servomotores que se colocaron en el robot, estos son de la marca GOTECK³⁹, los cuales tienen la característica de girar en sentido horario, lo cual implica que si no se modifica su sentido de giro e tendrá un mecanismo que no cumple con la regla de la mano derecha.

Para solucionar este problema únicamente se creó una entrada hacia los bloques Servo Write de cada articulación en donde se hace una diferencia entre el valor proveniente de la cinemática inversa, de tal manera que se tenga la diferencia $-q + 180^\circ$ y que esto haga que las articulaciones del robot se oriente de manera derecha y se ajuste con el análisis cinemático.

Dado que el objetivo del trabajo fue llevar a cabo el análisis cinemático del robot, se dejó de lado el caculo de las torsiones que se pudieran generar en las articulaciones, por lo cual únicamente se buscó que estas se desplazaran de manera nivelada por lo cual se colocaron un par de ruedas para tal efecto.

La principal característica que se debe observar en el prototipo, y en general en el robot, es la que tiene éste para mapear las coordenadas ingresadas para transformarlas en coordenadas útiles para la orientación de las articulaciones y con ello poder llevar el efector final hacia dicho punto.

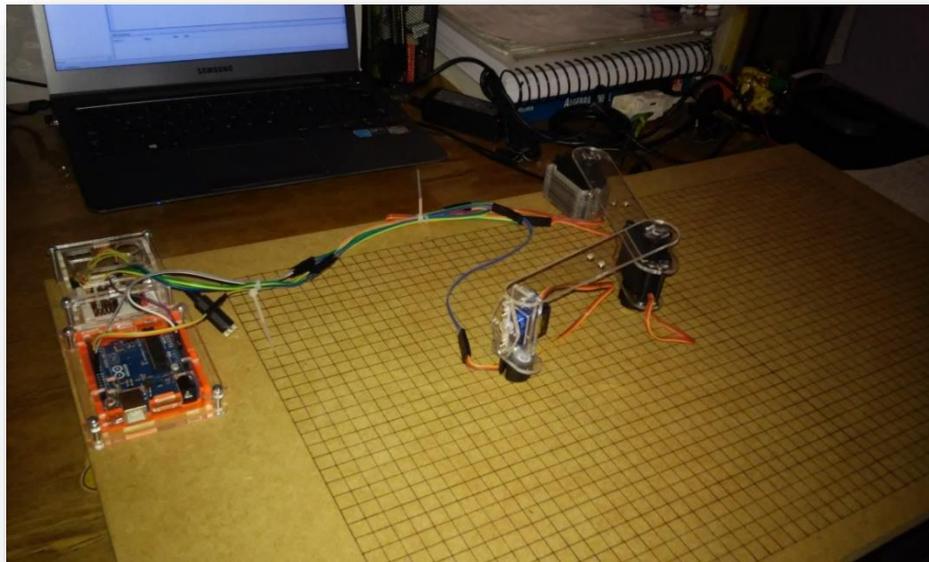


Figura 21. Prototipo de Robot Planar (Elaboración propia)

³⁹ Ver más en <http://www.goteckrc.com/>

Finalmente, para poder medir los desplazamientos del mecanismo y poder analizar la respuesta general del sistema, se unió el prototipo a una superficie graduada, la cual fue marcada con una cuadrícula con una resolución de 1 cm, de esta manera es más claro analizar la precisión en cuanto al alcance del punto de llegada por parte del Robot Planar.

1.5. Pruebas Dinámicas

Así entonces, para evaluar la respuesta de la conexión entre la simulación, en donde se lleva a cabo el análisis cinemático y el envío de datos, se llevaron a cabo una serie de experimentos en los cuales se ingresaron un conjunto de coordenadas (x, y) con los cuales se espera que el robot cumpla con las restricciones programadas en el caso en el que se encuentre una singularidad, recordando que en el mayor de los casos estas recaen en el rango de trabajo de los actuadores.



Figura 22. Ingreso de coordenadas en la GUI (Elaboración propia)

De esa manera se presentan a continuación los experimentos que se realizaron, así como un análisis de la acción que sigue cada una de las articulaciones cuando exista o no una configuración singular.

Prueba 1

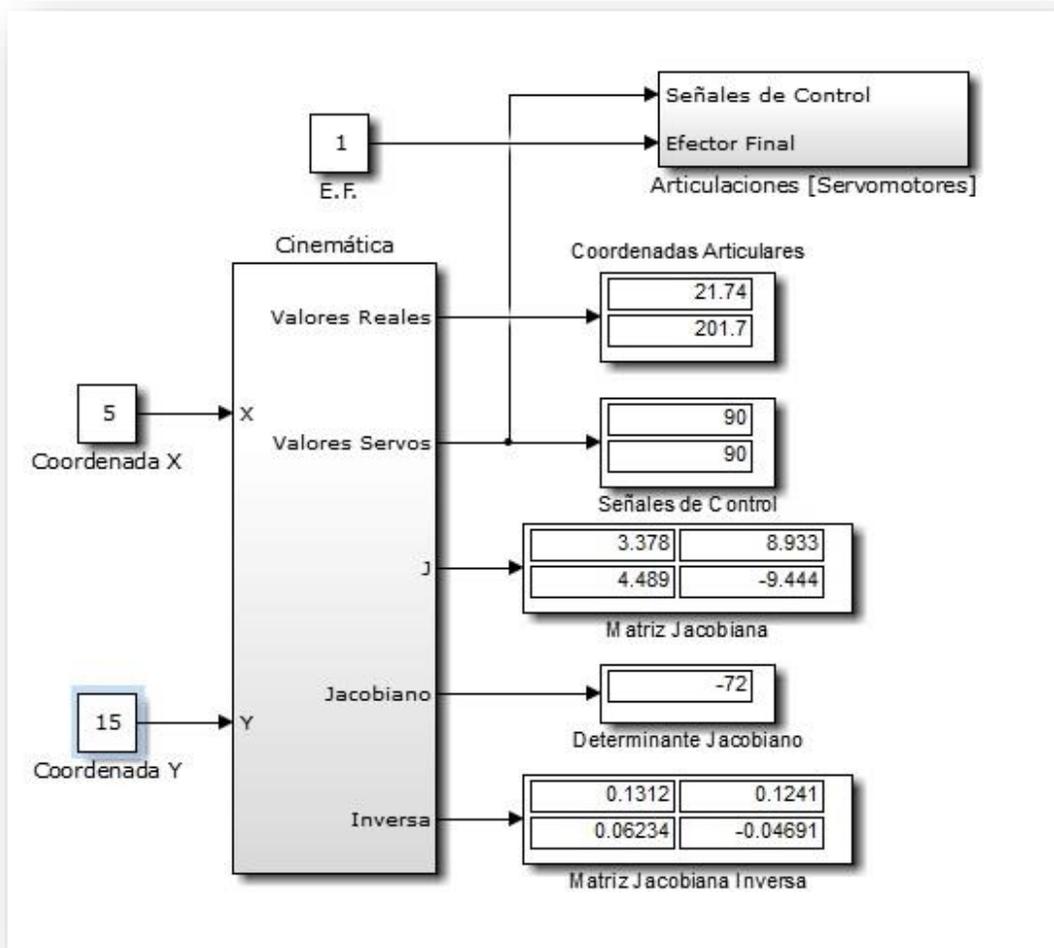


Figura 23. Prueba 1 (Elaboración propia)

Las coordenadas ingresadas para este experimento fueron las del punto $x = 5$ y $y = 15$, dentro de la simulación se obtuvieron los valores para las articulaciones de $q_1 = 21.75^\circ$ y $q_2 = 201.67^\circ$, lo cual está produciendo una singularidad en el servomotor de la articulación dos, por lo cual el mecanismo de orienta nuevamente a la posición de inicio.

Un aspecto que es importante mencionar es la decisión que toma el algoritmo de la cinemática inversa respecto a la orientación final que tomará la coordenada q_2 respecto de la primera, y que se define como la configuración de codo arriba o codo abajo.

Del análisis geométrico de la Figura 12 se dedujo un ángulo auxiliar llamado α , con el cual se obtiene un valor para la coordenada q_2 por medio de la ecuación $q_2 = 180^\circ - \alpha$, sin embargo hasta este momento, en las ecuaciones obtenidas en la sección del análisis cinemático, no se había considerado el hecho que implica que al inicio del movimiento del robot las articulaciones se encuentran alineadas entre sí y con respecto a la base del robot, formando un ángulo de 90° .

Esto se puede ejemplificar diciendo que si a primera articulación llegara hasta su posición final en primer lugar, la articulación número dos deberá tomar una orientación que parta de la posición de 90° hacia 0° o 180° según algún criterio dictado en la programación.

Entonces, partiendo de lo que se ha mencionado, se creó una nueva variable nombrada como $q'_2 = 180^\circ - \alpha$, de manera que ahora el valor para la coordenada articular número dos se determina por medio de la ecuación:

$$q_2 = 90^\circ \pm q'_2$$

El hecho de tomar alguno de los dos signos, positivo o negativo en la ecuación determina el sentido de giro que seguirá el eje del servomotor. Esta nueva consideración radicará entonces en el lugar geométrico que ocupe el punto de llegada al cual se desea que se aproxime el efector final del robot.

Mencionando nuevamente que el Robot Planar trabaja bajo restricciones de los actuadores en un rango de 0° a 180° , el lugar geométrico del punto de llegada únicamente se puede encontrar en el primer o segundo cuadrante del plano cartesiano.

Cuando este se encuentre en el primer cuadrante del plano, es decir cuando la coordenada en x sea mayor a cero se emplea la ecuación $q_2 = 90^\circ + q'_2$, mientras que si el punto de llegada se encuentra en el segundo cuadrante del plano la ecuación con la cual se obtienen la orientación final del servomotor de segunda articulación es $q_2 = 90^\circ - q'_2$. Así la configuración de codo arriba o codo abajo se determina por las coordenadas ingresadas.

Regresando a las coordenadas $x = 5$ y $y = 15$, se observa que de la simulación se obtuvieron valores para $\alpha = 68.33^\circ$ y $q'_2 = 111.67^\circ$, los cuales al ser el punto (5,15) se tiene que $q_2 = 201.67^\circ$ lo cual al estar fuera del rango de giro del motor está provocando que en ese punto se presente una configuración singular.

Prueba 2

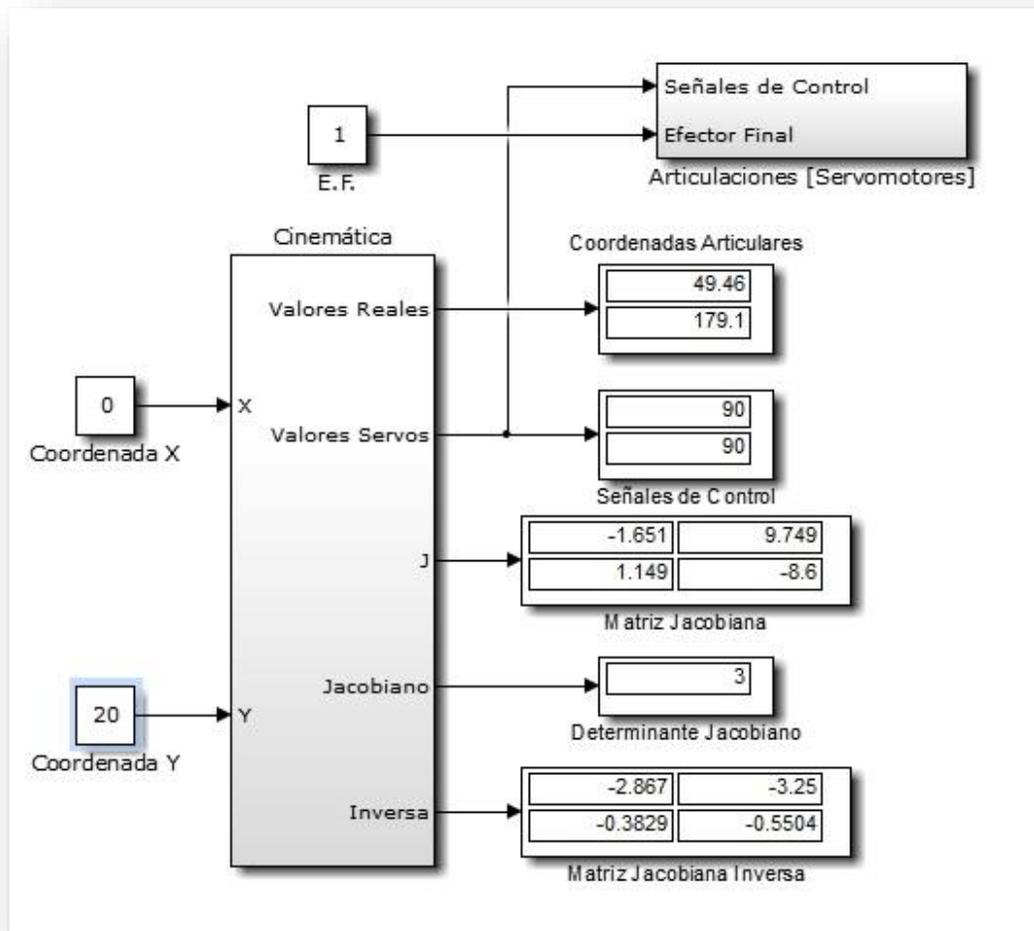


Figura 24. Prueba 2 (Elaboración propia)

Si bien la mayoría de las singularidades que se van a presentar corresponden a las limitaciones motrices, existe un caso especial en el cual las singularidades se presentan de manera generalizada por la existencia de una coordenada en especial.

Los ángulos auxiliares α , β y φ se encargan de determinar la orientación de las coordenadas de las articulaciones, pero en el caso de $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, cuando la coordenada en x es igual a cero, no es posible determinar un valor para la coordenada angular q_1 y de esa forma se presenta nuevamente una singularidad.

Prueba 3

En este caso se ingresaron las coordenadas $x = 20$ y $y = 5$. De la simulación se extraen los valores de $\varphi = 14.04^\circ$ y $\beta = 38.96^\circ$, si para $q_1 = \varphi - \beta$, esto da como resultado un valor de $q_1 = -24.92^\circ$ de manera que ahora la coordenada se encuentra fuera del rango comprendido entre 0° y 180° por debajo del límite inferior.

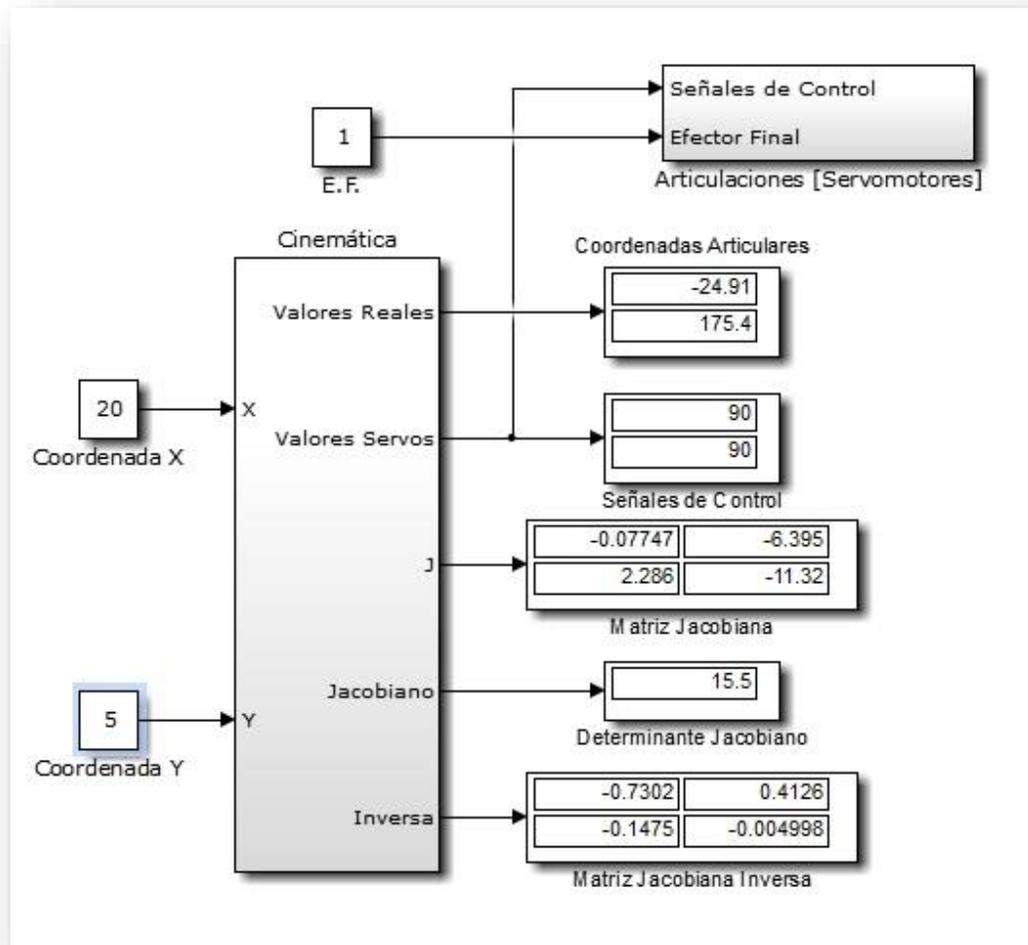


Figura 25. Prueba 3 (Elaboración propia)

Prueba 4

En los experimentos anteriores se ha determinado que si el valor de la coordenada en x es igual a cero no se puede obtener un valor para la coordenada q_1 y que de acuerdo ciertos valores puede ser que alguna de las coordenadas tenga un valor fuera del límite de giro de los servomotores, pero aún existe otro caso en el cual se puede presentar una singularidad.

Cuando se toman las coordenadas $x = -10$ y $y = 5$ se tienen los siguientes valores para $\varphi = 26.57^\circ$, $\alpha = 48.39^\circ$ y $\beta = 57.34^\circ$ con los cuales se obtienen valores $q'_1 = -30.78^\circ$ y $q'_2 = 133.6^\circ$. Estos datos dan como resultado final las coordenadas articulares $q_1 = 210.8^\circ$ y $q_2 = -43.61^\circ$, de lo cual se puede deducir que ambos valores están totalmente fuera rango.

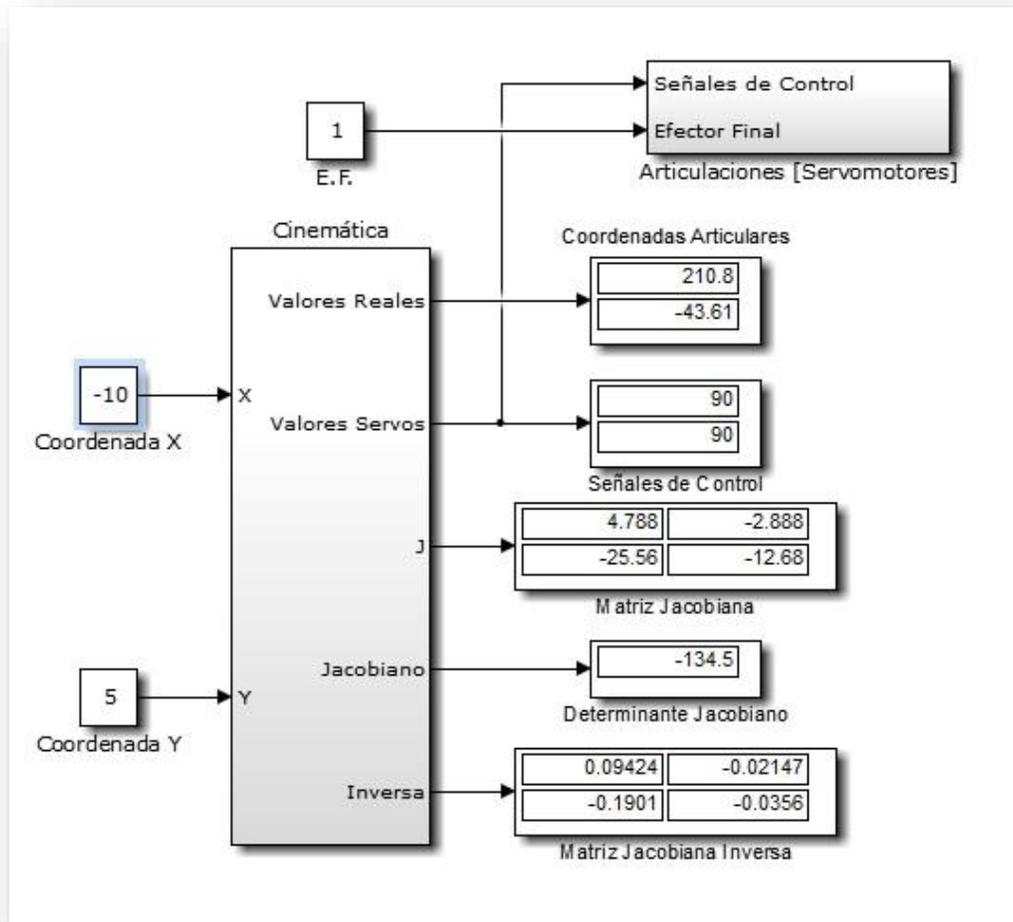


Figura 26. Prueba 4 (Elaboración propia)

En los experimentos anteriores se analizó la respuesta del modelo de control en la evaluación de las singularidades que se pueden presentar en el Robot Planar de dos grados de libertad. En la segunda parte de la experimentación las coordenadas de cada punto ingresado no presentan ningún tipo de singularidad, sin embargo se muestra en cada uno de ellos los resultados del análisis cinemático, coordenadas articulares y las matrices Jacobiana y Jacobiana Inversa.

Prueba 5

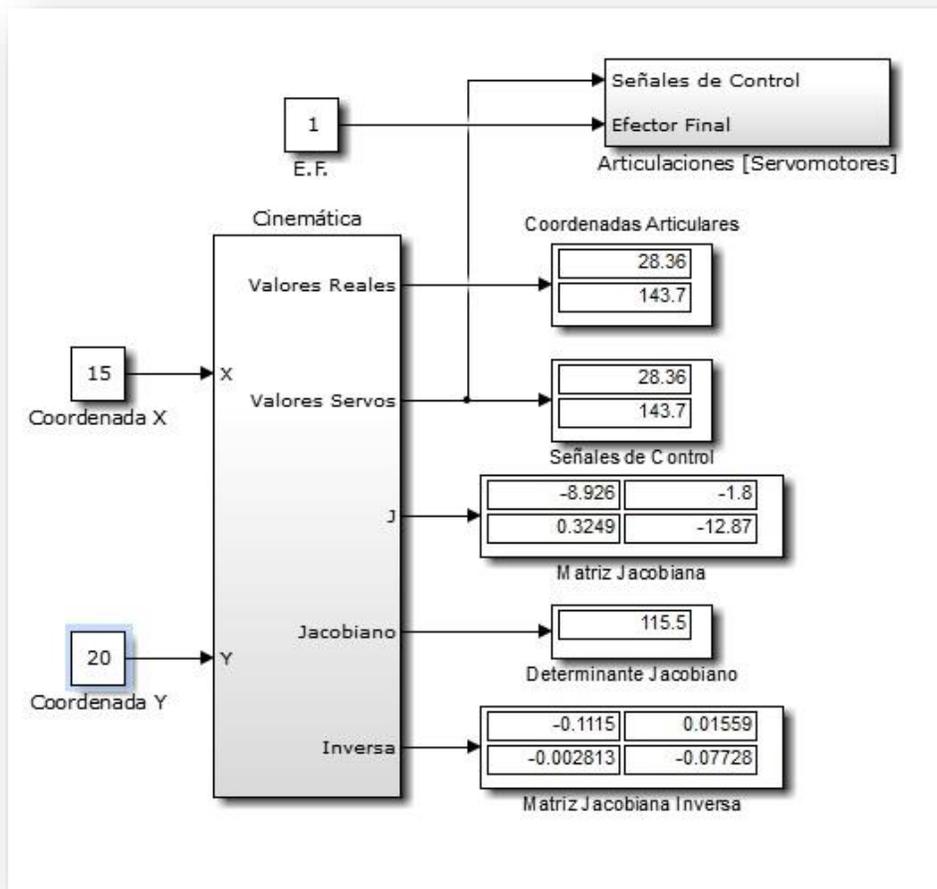
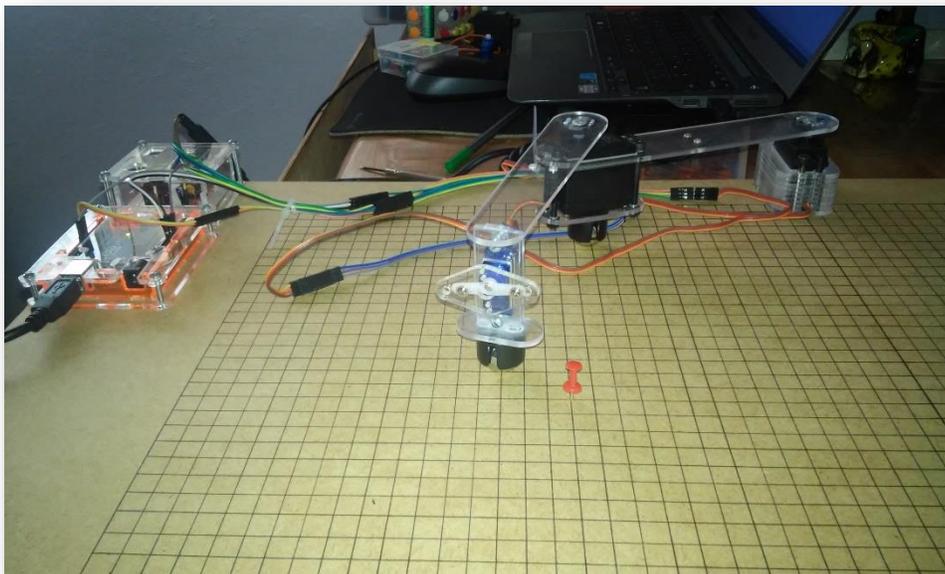


Figura 27. Prueba 5 (Elaboración propia)



Prueba 6

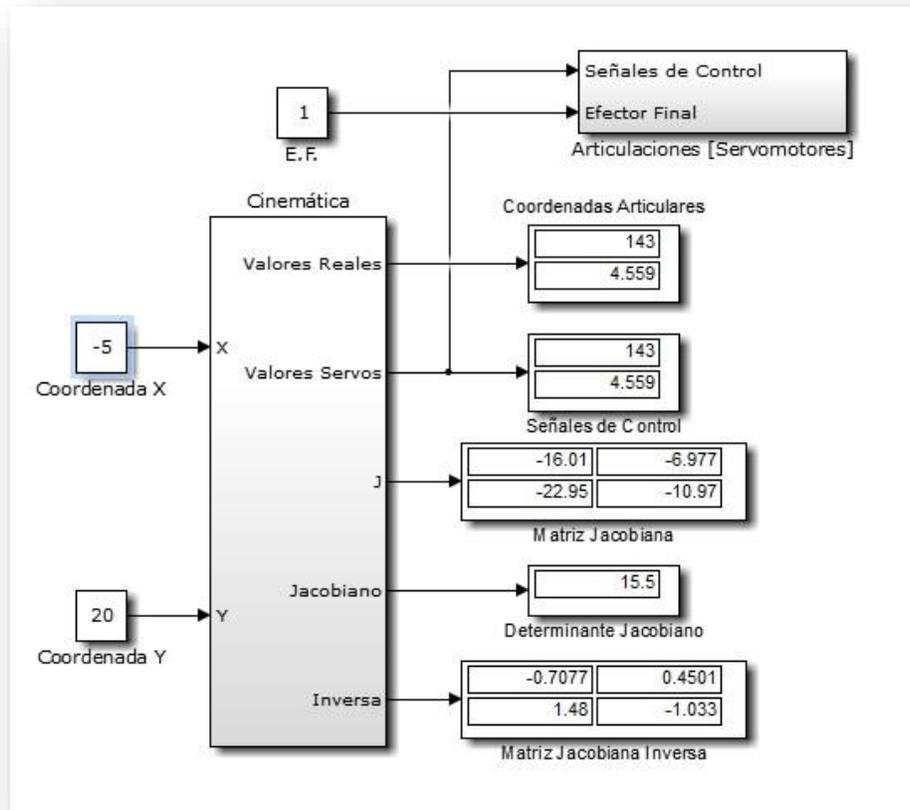
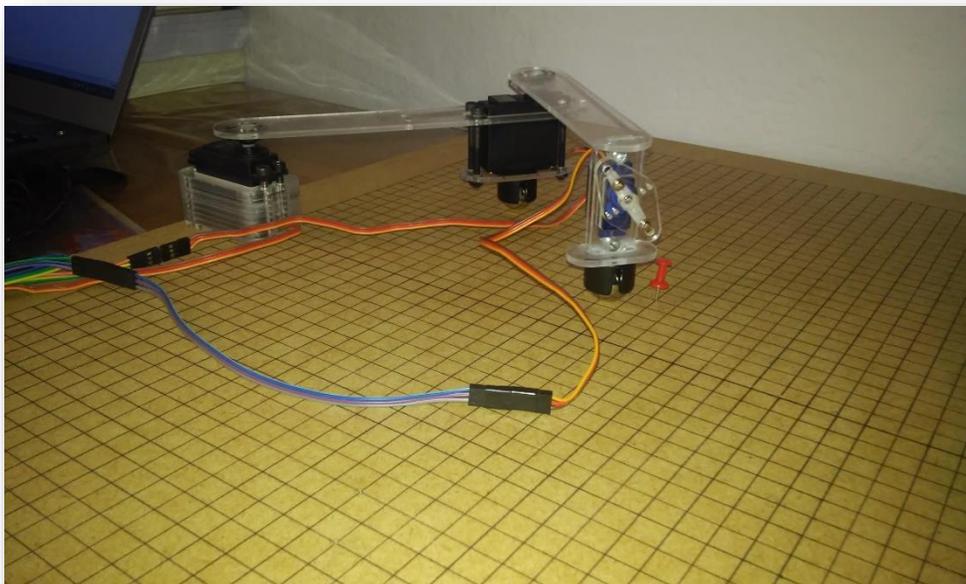


Figura 28. Prueba 6 (Elaboración propia)



Prueba 7

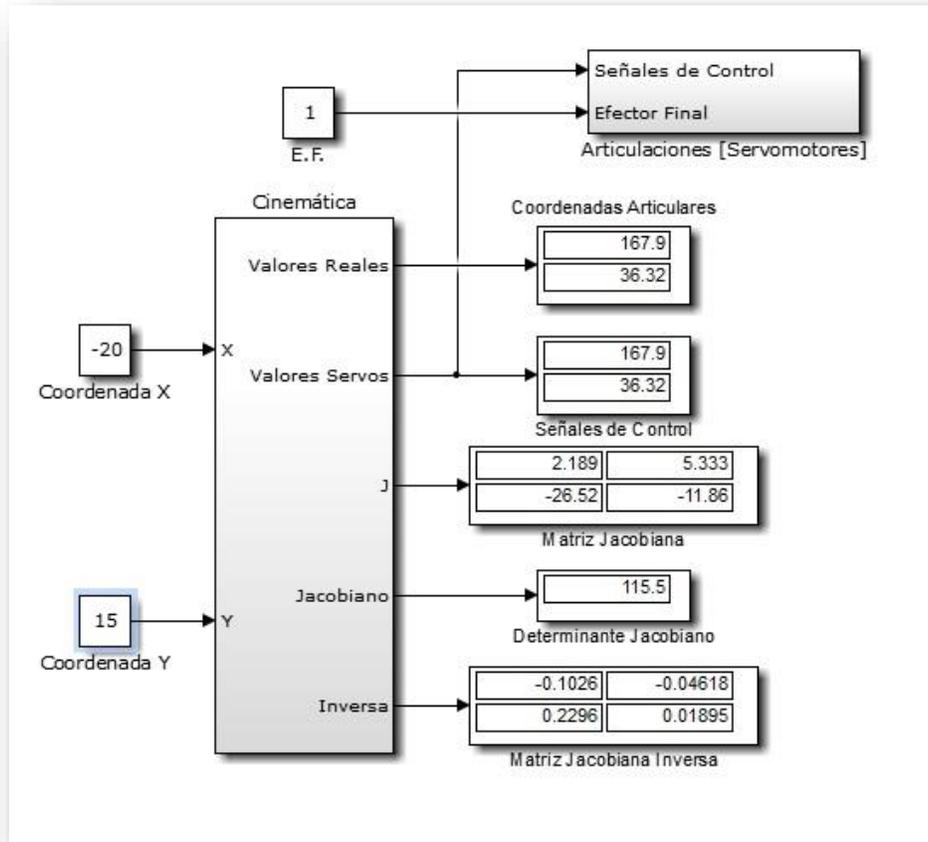
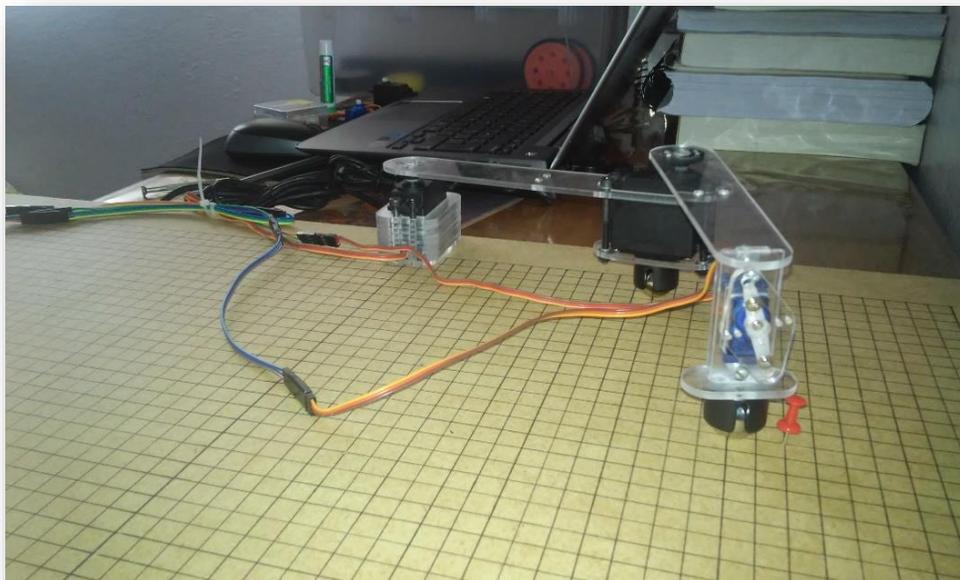


Figura 29. Prueba 7 (Elaboración propia)



Prueba 8

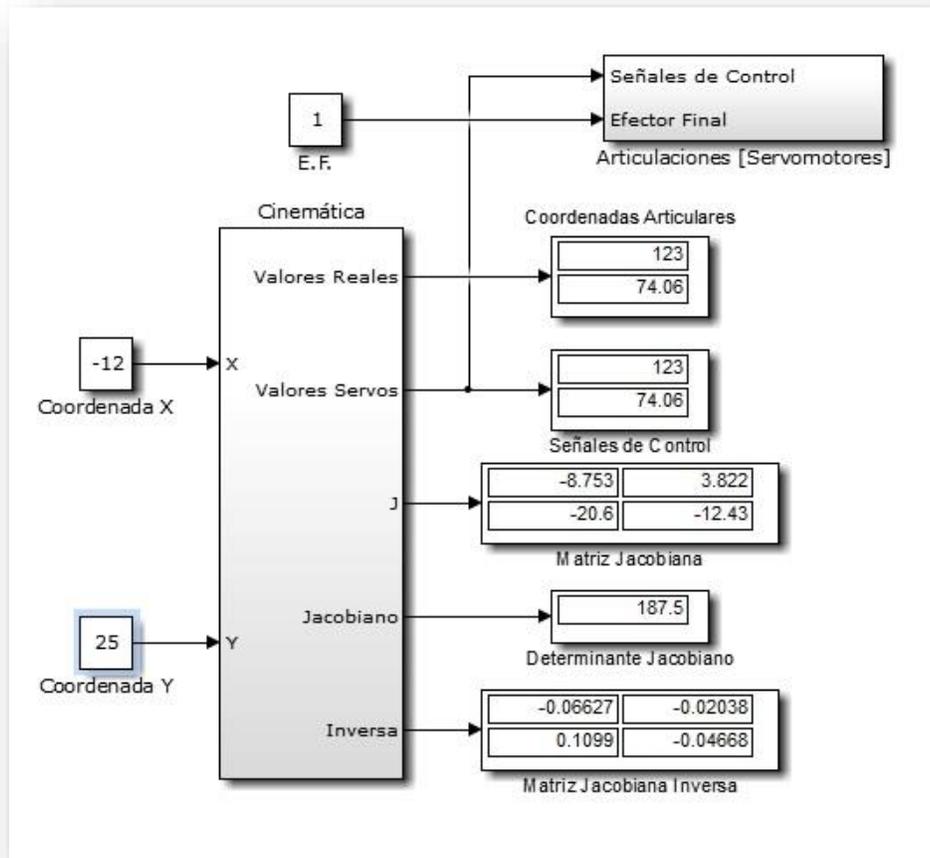
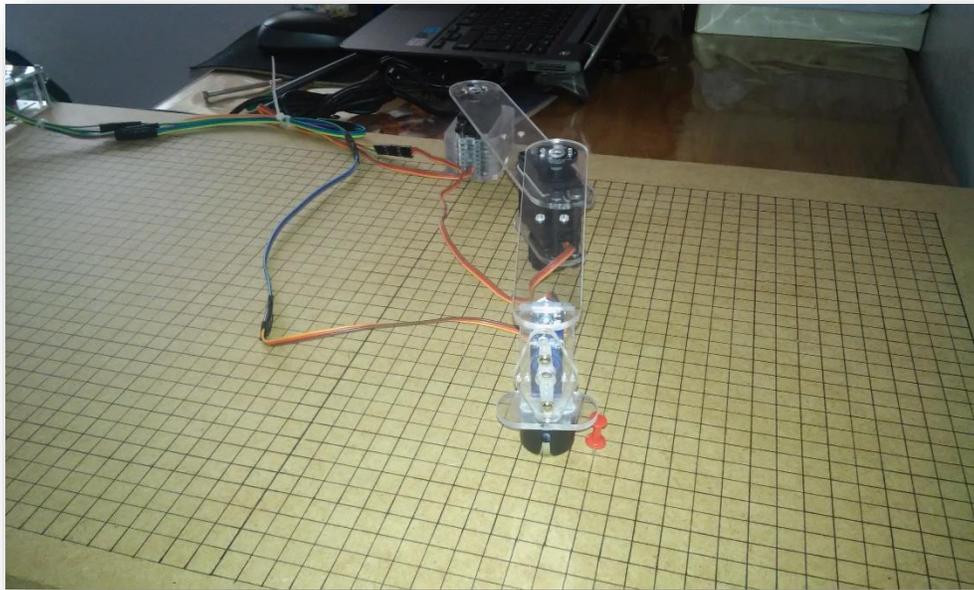


Figura 30. Prueba 8 (Elaboración propia)



Prueba 9

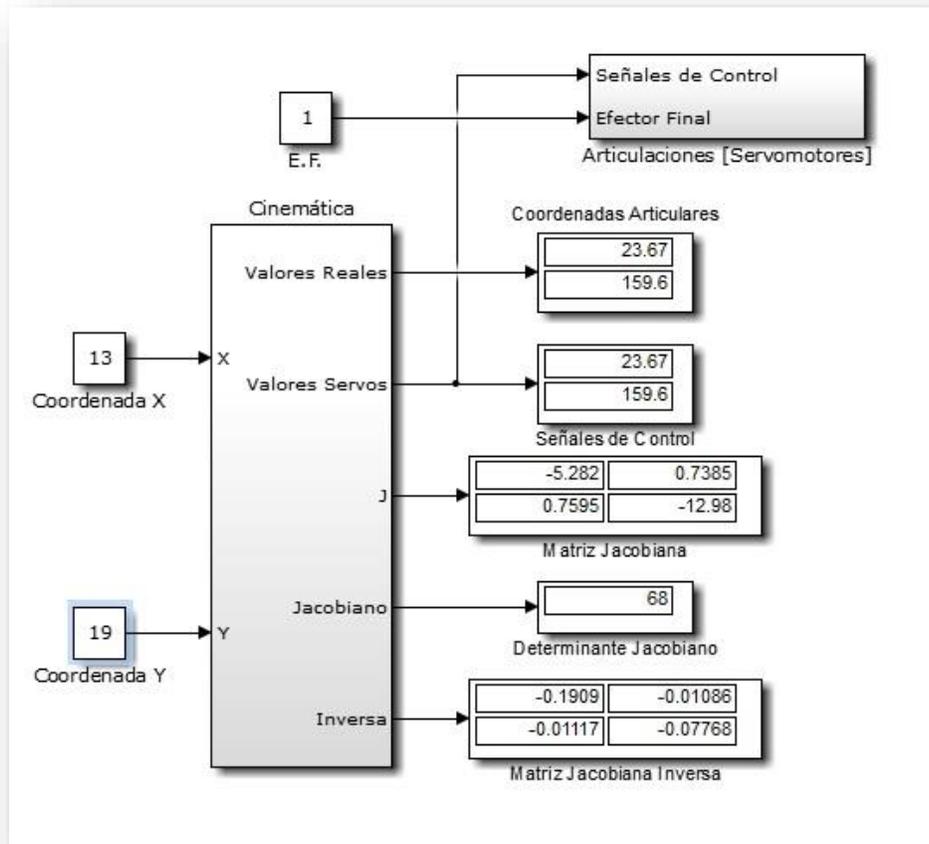
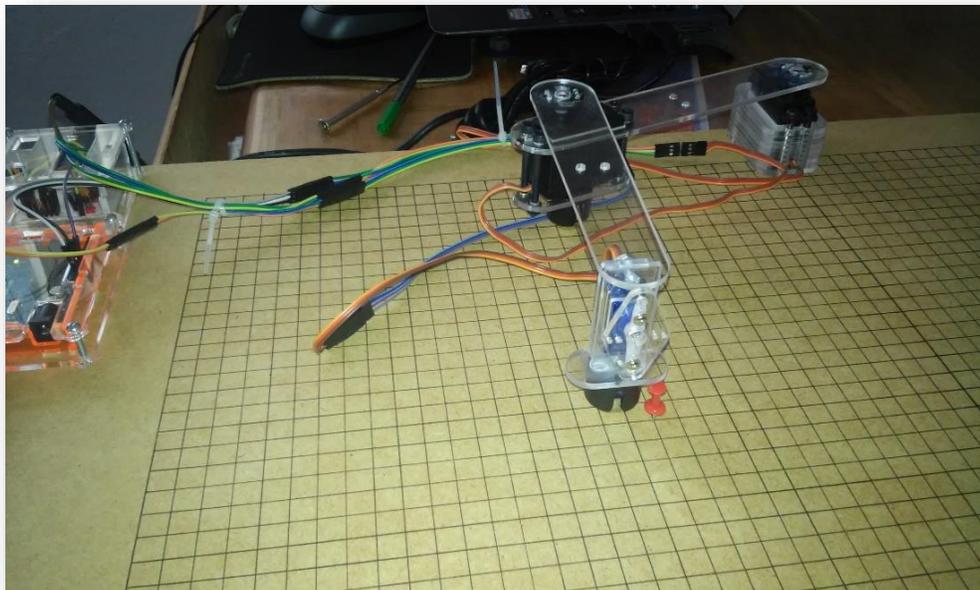


Figura 31. Prueba 9 (Elaboración propia)



Prueba 10

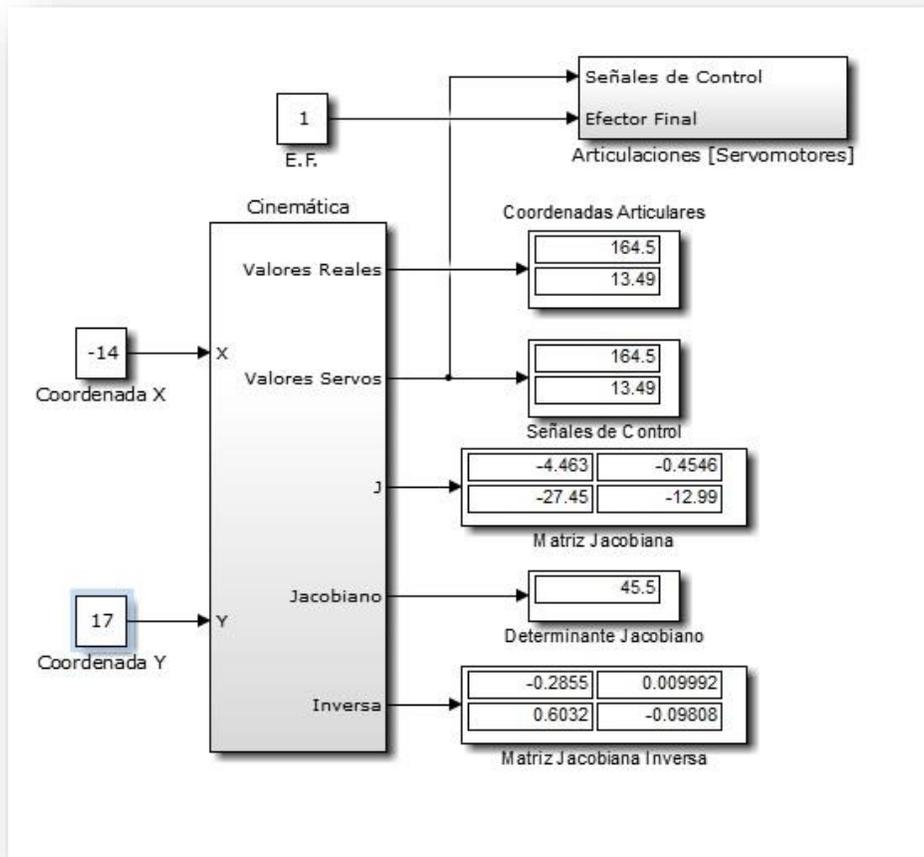
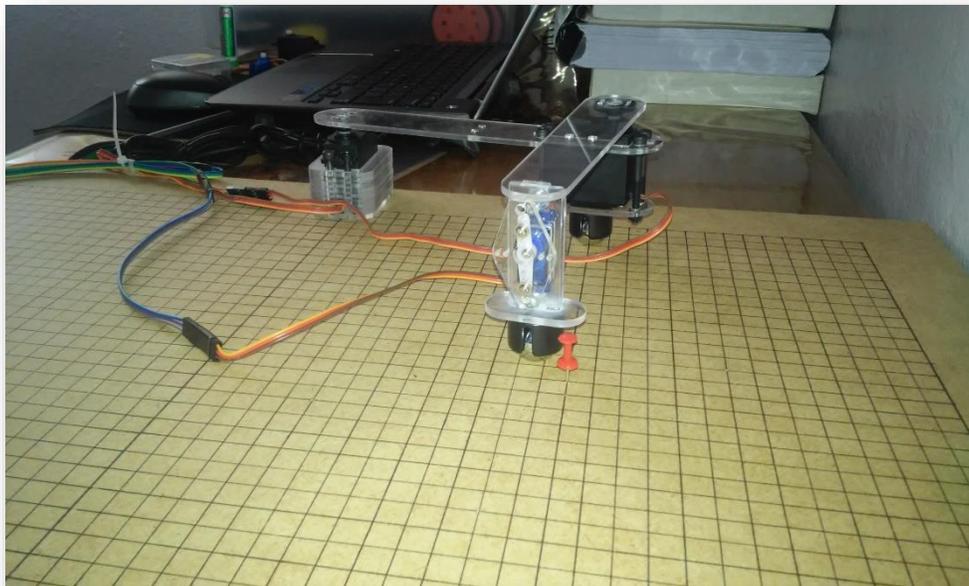


Figura 32. Prueba 10 (Elaboración propia)



1.6. Mejoras al Prototipo

Si bien el prototipo que se empleó para analizar la cinemática y la funcionalidad del sistema de control diseñado resultó útil, aún es necesario realizar una serie de mejoras al prototipo de Robot Planar, de manera que se pueda tener un robot sobre el cual sea posible llevar a cabo un análisis más completo, en donde se realicen los cálculos tanto cinemáticos como dinámicos.

Dentro de las mejoras propuestas para el prototipo de Robot Planar se encuentre el hecho de intercambiar los motores en las articulaciones. El intercambio de los motores se realizaría colocando motores de corriente directa en lugar de los servomotores que se tienen actualmente.

Los motores de corriente continua son capaces de lograr un desplazamiento angular de 360° , lo cual se traduciría inmediatamente en un campo de puntos alcanzables más amplio, que se reflejara en diferentes posturas del robot, la existencia de valores angulares menores a cero o que rebasen el límite de los 180° podrían lograrse únicamente cambiando e sentido de giro del eje del motor.

Otro de los aspectos importantes que mejoraría la funcionalidad del prototipo se encuentra en el diseño mecánico. Con la colocación de los motores en la posición actual se generan momentos flexores sobre los ejes de los motores en cada una de las articulaciones, mismo que producen efectos no deseados en el comportamiento del robot, la mejora tendría que traducirse en un diseño mecánico que resuelva el problema de cantiléver generado en las articulaciones del robot.

Los momentos generados sobre las articulaciones, especialmente en la segunda, se pueden evitar con la colocación de los motores fuera del mecanismo, colocándolos en la base del robot, de tal manera que el movimiento se transmitido por medio de una transmisión por bandas y poleas dentadas.

Con la nueva distribución de los motores resultará necesario realizar el análisis dinámico del Robot Planar con el propósito de calcular las fuerzas que se generan sobre cada articulación y general una estrategia de control en base a estas fuerzas. El cálculo de los momentos de inercia resultara en una estimación de las velocidades optimas que se deben mantener en los motores para genera movimientos controlados sin afectar o tener comportamientos inestables en el mecanismo.

La estrategia de control se reemplazara entonces con un control robusto en donde se controle al robot en base al modelo dinámico basado en las fuerzas generadas dentro del mismo, y no solo en la generación un conjunto de coordenadas articulares como en el caso del control que se tiene hasta este momento, basado en la cinemática del Robot Planar.

En cuanto al modelo de control diseñado en Simulink® también resulta necesario mejorar algunos aspectos sin que se afecte con ello el objetivo general del control para el Robot Planar de dos grados de libertad. El primer aspecto de mejora al sistema de control consiste en el cambio del tipo de funciones empleadas para almacenar los algoritmos que se encargan de resolver la cinemática del robot, así como el envío de las señales de control.

Las funciones S son bloques de función que permiten la generación de algoritmos con base en instrucciones similares a la programación en lenguaje C, recordando que la programación de Arduino se realiza de manera similar, en estas funciones es posible escribir un programa para controlar un servomotor desde Simulink® como si se estuviera haciendo desde un sketch de Arduino, lo cual resulta en ciertas ventajas sobre la propuesta hecha hasta el momento.

Si se mantuvieran los servomotores como los actuadores del robot, tendrían que reemplazarse los bloques Servo Write en el modelo de Simulink® por una función S en donde se llame a una variable servo a través de los comandos para el soporte Arduino IO.

Cuando se emplean los bloques Servo Write no es posible controlar el tiempo que los motores tardan en girar de una posición a otra, de manera que el movimiento acelerado de estos genere momentos que provocan que al final del movimiento cuando se cumplen con las coordenadas angulares el robot tenga un efecto de rebote no deseado, en el prototipo estos momentos se traducen en un error en el posicionamiento del efector final respecto de las coordenadas del punto de llegada.

Al crear una función S con un algoritmo para controlar un servomotor, se puede ajustar por medio de un delay el tiempo que tarda el motor en llegar de la posición inicial a la posición final, de manera que los movimientos en las articulaciones se estabilicen y con ello se pueda disminuir el rango de error en la orientación del robot.

Si se cambian los motores en el robot, lo apropiado para controlar tanto las velocidades como la posición de las articulaciones sería el diseño de un sistema de control basado en una ley PID que permita controlar los voltajes necesarios para encender y apagar los motores de manera que se genere un movimiento suave de las articulaciones, con ello se haría necesario la implementación de encoders e integrados que permitan lograr tal control.

A través del diseño conceptual de un sistema de control que permitiera enlazar Arduino y Simulink®, para trabajar con un Robot Planar de dos grados de libertad, se han podido aplicar los conceptos y la teoría del análisis cinemático para los robots manipuladores.

El sistema de control diseñado está integrado por un conjunto de partes que al final se enlazaron para lograr el objetivo general del proyecto. Dentro de las partes que conforman el diagrama de bloques de control resulta fundamental aquella en donde se establece la comunicación que permite enviar datos desde el ordenador hacia el robot mediante la adquisición de datos.

Para lograr la comunicación entre ambas partes, se instaló desde Matlab® el paquete de soporte para Arduino, con ello se obtuvo una biblioteca dentro de la extensión Simulink® que permitió el uso de una tarjeta Arduino como medio de adquisición de datos. Con la comunicación abierta entre el modelo de simulación y el Arduino se pudo llevar a cabo el envío de las señales de control provenientes del cálculo de la cinemática del Robot Planar.

El análisis cinemático del robot se llevó a cabo en dos partes. La primera de ellas se realizó por medio del análisis geométrico de una determinada postura del mecanismo, así entonces, a través del análisis inverso se formularon las ecuaciones con las cuales se obtienen las coordenadas articulares para orientar las articulaciones cuando el efector final debe posicionarse sobre un punto en el plano.

Tomando en cuenta el empleo de servomotores en las articulaciones, en base a sus características mecánicas, lo cual a su vez se traduce en limitaciones dentro de del rango de desplazamiento angular en los ejes, se concluyó que cierto puntos solucionables en la cinemática inversa deben ser eliminados porque se produce una configuración singular por efecto de los motores.

Los valores que se descartan se especifican dentro del algoritmo de la Cinemática Inversa, desde donde se envía la instrucción al robot de tomar la posición neutra o de 90° en cada servomotor en caso de hallar un punto singular.

En la segunda parte del análisis cinemático se derivó el vector de Posición del efector final para obtener la matriz Jacobiana del Robot Planar. A través de esta matriz se lleva a cabo la transformación de coordenadas del espacio de coordenadas cartesianas al espacio de coordenadas de articulación.

La existencia de una configuración articular solucionable para el mecanismo se determinó mediante la verificación de la inversa de la matriz Jacobiana, para lo cual se comprobó en cada prueba la existencia de un determinante de la matriz diferente de cero.

En caso de no existir una solución para dirigir las articulaciones hacia una cierta posición, el robot encontrará una singularidad, sin embargo, tomando en cuenta que el grado de libertad y las coordenadas que se ingresan generan vectores del mismo orden, es decir, ambos vectores tienen la misma cantidad de elementos, la transformación de coordenadas siempre genera una solución para el robot.

De esa forma se concluyó nuevamente que la única manera en que el Robot Planar encontrará una singularidad se deberá al caso en que las articulaciones requieran tomar ciertas coordenadas para orientar al efector final que estén fuera de los límites de rotación de los servomotores.

Finalmente se llevaron a cabo una serie de pruebas para analizar la funcionalidad del sistema de control. Los resultados de las pruebas mostraron ser preciso para determinar que el sistema y los cálculos que se realizan internamente trabajan de manera correcta, de manera que el análisis cinemático del Robot Planar es el correcto.

Si bien las coordenadas que toma el efector final presentan cierta desviación respecto de las coordenadas que se ingresan, se sabe de antemano que existen errores de redondeo proveniente de la simulación. Además del redondeo se suman factores como los momentos de inercia que se generan por el desplazamiento del eje de los motores, esto se debe a que en los bloques que se emplearon para enviar las señales no permiten controlar la velocidad de giro.

Sin embargo, a pesar de las limitaciones de rotación en los motores y de la desviación en las coordenadas reales en el prototipo, se logró establecer una vía de comunicación que permitió controlar la posición de las articulaciones, las señales de control enviadas son el resultado de la evaluación de un conjunto de algoritmos que corresponden a la resolución de la cinemática del robot.

De manera general se concluye que fue posible controlar un Robot Planar de dos grados de libertad, para lograr que el efector final se posicione sobre un punto del plano por medio de la especificación de un conjunto de coordenadas, para lo cual resultó necesario la solución de la cinemática inversa. Además se logró establecer comunicación serial para emplear una tarjeta Arduino UNO como tarjeta de adquisición de datos.

1. Algoritmo para el cálculo de Cinemática Inversa

```
function [P,p,alpha,betha,fi,q1,q2]= inversa(x,y)
%% Ecuaciones Cinemáticas
l1=15;
l2=13;
Cte1=l1^2;
Cte2=l2^2;
P=x^2+y^2;
p=sqrt(P);
% Análisis Vectorial
a=(Cte1+Cte2-P)/(2*l1*l2);
b=(P+Cte1-Cte2)/(2*p*l1);
f=(y/x);
alpha= acosd (a);
betha= acosd (b);
fi=atand(f);
q1=fi-betha;
q_dos=180-alpha;
q2=90+q_dos;
%% Cambio de Variables
q_uno=abs(fi)-betha;
q_dos=180-alpha;
if q1<0
    servo1=90;
    servo2=90;
end
if q2>180
    servo1=90;
    servo2=90;
end
if x==0
    servo1=90;
    servo2=90;
end
%% Coordenadas en el Segundo Cuadrante
if x<0
    q_uno= fi-betha;
    q_dos=180-alpha;
    q1=180-q_uno;
    q2=90-q_dos;
end
if q2<0
    servo1=90;
    servo2=90;
end
end
```

2. Algoritmo para el cálculo de la Velocidad Angular

```
function [Jacobiano,Jinv,Vel]= velocidades(articulacion)
% Constantes
l1=15;
l2=13;
% Derivada con respecto a t del Vector de Posición
vel=[- l2*sind(q1 + q2) - l1*sind(q1) ; l2*cosd(q1 + q2)
+ l1*cosd(q1)];
% Matriz Jacobiana
j11=-l1*sind(q1)-l2*sind(q1+q2);
j12=-l2*sind(q1+q2);
j21=l1*cosd(q1)+l2*cosd(q1+q2);
j22=l2*cosd(q1+q2);
J=[j11 j12; j21 j22];
% Determinante Jacobiano
Jacobiano=det(J);
% Matriz Jacobiana Inversa
Jinv=inv(J);
% Vector de Velocidades Articulares
Vel=Jinv*/vel;
end
```

3. Algoritmo para el cálculo de la Aceleración Angular

```
function [acel,H,ang]=
aceleraciones(Jinv,Vel,coordenadas)
% Constantes
l1=15;
l2=13;
% Segunda Derivada con respecto a t del Vector de
Posición
acel=[ - l2*cos(q1 + q2) - l1*cos(q1);- l2*sin(q1 + q2) -
l1*sin(q1)];
% Matriz Hessiana
h11= - l1*cosd(q1) - l2*cosd(q1+q2);
h12= - l2*cosd(q1+q2);
h21= - l2*sind(q1+q2);
h22= - l2*sind(q1+q2);
H=[h11 h12;h21 h22];
% Vector de Aceleraciones Articulares
ang=Jinv*(acel-H\coordenadas);
end
```

Tabla de Figuras

Figura 1. Robot Manipulador Cartesiano (Fuente: Craig, Robótica, 2006) ...	14
Figura 2. Robot Manipulador Antropomórfico (Fuente: Craig, Robótica, 2006)	15
Figura 3. Robot Manipulador SCARA (Fuente: Craig, Robótica, 2006)	15
Figura 4. Robot Manipulador Esférico (Fuente: Craig, Robótica, 2006).....	16
Figura 5. Robot Manipulador Cilíndrico (Fuente: Craig, Robótica, 2006).....	17
Figura 6. Robot Planar (Elaboración propia).....	18
Figura 7. Vector de Posición (Elaboración propia).....	22
Figura 8. Matriz de Rotación respecto al eje Z (Elaboración propia)	23
Figura 9. Convención Denavit-Hartenber para Ejes (Fuente: Craig, Robótica, 2006).....	30
Figura 10. Convención Denavit-Hartenberg para el Robot Planar (Elaboración propia).....	32
Figura 11. Configuración espacial del Robot Planar (Elaboración propia)....	33
Figura 12. Sistema de adquisición de datos con Simulink® y Arduino (Elaboración propia).....	44
Figura 13. Tarjeta Arduino UNO (Fuente: http://www.vetco.net/catalog/product_ingo.php?products_id=13665).....	46
Figura 14. Script adioes.pde del paquete de soporte Arduino IO (Elaboración propia).....	49
Figura 15. Librería de Simulink® Arduino IO (Elaboración propia)	50
Figura 16. Frecuencia y amplitud de pulso en un servomotor (Fuente http://www.luisllamas.es/2016/06/controlar-un-servo-con-arduino/).....	53
Figura 17. Bloques Setup Arduino y Real-Time Pacer (Elaboración propia)	55
Figura 18. Bloque Cinemática (Elaboración propia).....	56
Figura 19. Bloque Señales de Control (Elaboración propia)	60
Figura 20. Sistema de Control (Elaboración propia)	61
Figura 21. Prototipo de Robot Planar (Elaboración propia)	63
Figura 22. Ingreso de coordenadas en la GUI (Elaboración propia)	64
Figura 23. Prueba 1 (Elaboración propia)	65
Figura 24. Prueba 2 (Elaboración propia)	67
Figura 25. Prueba 3 (Elaboración propia)	68
Figura 26. Prueba 4 (Elaboración propia)	69
Figura 27. Prueba 5 (Elaboración propia)	70
Figura 28. Prueba 6 (Elaboración propia)	71
Figura 29. Prueba 7 (Elaboración propia)	72
Figura 30. Prueba 8 (Elaboración propia)	73
Figura 31. Prueba 9 (Elaboración propia)	74
Figura 32. Prueba 10 (Elaboración propia)	75

Bibliografía

- Antonio Barrientos, L. F. (1997). *Fundamentos de Robótica*. Universidad Politecnica de Madrid: McGraw-Hill.
- Arduino-Home. (10 de 3 de 2016). Obtenido de <https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>
- Arduino-Home. (10 de 3 de 2016). Obtenido de <https://www.arduino.cc/en/Main/ArduinoBoardUno>
- Arduino-Home. (10 de 3 de 2016). Obtenido de Arduino: <https://www.arduino.cc/>
- Cortés, F. R. (2011). *Robótica*. México: Alfaomega.
- Craig, J. J. (2006). *Robótica*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Fundamentos de Robótica*. (Agosto de 2016). Obtenido de Fundamentos de Robótica: http://platea.pntic.mec.es/vgonzale/cyr_0204/ctrl_rob/robotica/index.htm
- González, E. A. (2009). *Modelado estático, cinemático, dinámico y análisis de movilidad de un robot manipulador con referencia móvil*. México D.F.: Facultad de Ingeniería, UNAM.
- K.S. Fu, R. G. (1988). *ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia*. Madrid España: McGraw-Hill.
- L.Norton, R. (2013). *Diseño de Maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. México D.F.: McGraw Hill.
- MathWorks. (Agosto de 2016). Obtenido de <http://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- MathWorks. (Agosto de 2016). Obtenido de <http://www.mathworks.com/help/simulink/index.html>
- MICROCONTROLADORES. (Agosto de 2016). Obtenido de MICROCONTROLADORES: <http://losmicrocontroladores.blogspot.mx/>
- Richard M. Murray, Z. L. (1994). *A Mathematical Introduction to ROBOTIC MANIPULATION*. USA: CRC, Taylor & Francis Group.
- S., S. I. (2008). *Álgebra Lineal*. México D.F.: Mc Graw-Hill.
- Siciliano, L. S. (1996). *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Great Britain: Springer.

Un universo de Ciencia Ficción. (Agosto de 2016). Obtenido de Un universo de Ciencia Ficción: <http://universodecienciaficción.blogspot.mx/>

Vidas y Biografías. La enciclopedia bibliográfica en línea. (Agosto de 2016). Obtenido de Vidas y Biografías. La enciclopedia bibliográfica en línea: <http://www.biografiasyvidas.com/>