Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Medidas de riesgo para la determinación de estructuras de reaseguro

T E S I S

Que para obtener el título de
Actuario

Presenta
Berenice Domínguez Sánchez.

Director de tesis:
Act. Eduardo Selim Martínez Mayorga.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Octube 2016

A mis papás,
hermanos,
Javier Emilio,
Melba,
Eduardo y
amigos.

Agradecimientos

Con el mayor de los agradecimientos a mis papás.

Berenice Domínguez Sánchez

Índice general

Introducción

El sector de seguros juega un papel fundamental en la economía. Un mundo sin seguros sería mucho menos desarrollado económicamente y menos estable.

El reaseguro es un mecanismo financiero que aumenta la capacidad para aceptar riesgos mayores a los que normalmente podría aceptar una aseguradora, aumenta el volumen de los negocios, permite el desarrollo de la aseguradora y disminuye el riesgo de una posible pérdida al distribuir los riesgos parcial o totalmente.

Este trabajo está formado por cuatro capítulos en el primer capítulo se expone a detalle propiedades deseables en una prima y tres principios de primaje (esquema *ad hoc*, esquema de caracterización y esquema económico). Y finalmente especificaciones sobre primas y reaseguro.

En el segundo capítulo se explica a detalle qué es el reaseguro y tipos de reaseguro. Se obtendrán ecuaciones que se deben resolver para encontrar solución óptima para diferentes combinaciones de varios tipos de protección de reaseguro con criterio de media-varianza, se obtendrán las ecuaciones que se deben resolver para encontrar una solución óptima de las posibles combinaciones citadas.

En el tema central del trabajo capítulo tres se dan las definiciones, suposiciones y se establecerá el modelo matemático. En particular se recordarán las definiciones de medidas de riesgo: Valor en Riesgo (VaR), Valor en Riesgo de la Cola (TVaR), la transformada de Esscher, medida de riesgo de Wang, medida de riesgo por distorsión y se concluye con la comparación de riesgos y medidas de riesgo.

En el capítulo cuarto se estudian algunos modelos de reaseguro óptimo suponiendo algunos otros principios de primaje con criterios de optimización basados en medidas de riesgo (VaR, CTE y CVaR).

En principio se considerarán sólo formas de reaseguro cuota-parte y *stop-loss*. Entonces, el problema consistirá en determinar el coeficiente cuota-parte óptimo, $c^* \in [0, 1]$, y la retención óptima, $d^* \in [0, \infty)$ para los acuerdos de *stop-loss*. La optimalidad de éstos sera con respecto a la optimización del VaR y CTE para funcionales (determinado por los principios de primaje) de la pérdida (re)aseguradora.

Posteriormente, sólo bajo el principio de primaje del valor esperado, se buscará dentro de una clase de funciones de riesgo cedido la forma de reaseguro óptimo, i.e. no se pre-supondrá que se está trabajando con una forma de reaseguro particular. Es decir, la solución al problema de reaseguro óptimo en esta parte es más ambiciosa ya que también dará una forma explícita a la forma de reaseguro óptima (*stop-loss*, cuota-parte, *share-loss*, *surplus*, etc).

Capítulo 1

Principios de Primaje

Algunos conceptos de teoría del riesgo como propiedades deseables que posea cualquier método para calcular primas, continuando con principios de primaje, se describirán tres esquemas que en la ciencia actuarial se utilizan: esquema *ad hoc*, esquema de caracterización y esquema económico.

1.1. Primas y ordenamientos de riesgos

1.1.1. Elementos básicos de Teoría de Utilidad

Definición 1.1.1. *(Función de utilidad)*

Se dice que una función $v : (b_1, b_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, no-decreciente y cóncava en el intervalo $(b_1, b_2) \subseteq \mathbb{R}$ es una función de utilidad.

Supóngase que una utilidad $v(x)$ está relacionada con la riqueza de x unidades. Suena razonable que la utilidad crezca conforme se tiene más riqueza, por tanto es natural suponer que la función v es no-decreciente, además, los incrementos de $v(x)$ para valores pequeños de x deben ser mayores para valores grandes de x, por tanto se supondrá que v es cóncava.

Considérese dos variables aleatorias X, Y que toman valores en los números reales ($\mathbb{R}$). Estas variables se interpretarán como resultados riesgosos bajo dos diferentes tipos de decisiones. También, supóngase que se pueden comparar las utilidades esperadas y que

$$\mathbb{E}(v(X)) \leq \mathbb{E}(v(Y)).$$

Entonces, con respecto a la utilidad esperada, la decisión correspondiente a Y es mejor que la correspondiente a X.

Ejemplo 1.1.1. *(Funciones de utilidad comunes)*

(i) $v(x) = x$, $x \in (b_1, b_2)$.

(ii) $v(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{ax})$, $a > 0$, $x \in (0, \infty)$.

(iii) $v(x) = -(a - x)_+ = -\max\{a - x, 0\}$, $\quad a \in \mathbb{R}$, $x \in (0, \infty)$.

$\bigtriangledown$

Si las variables aleatorias X, Y representan los riesgos ó pérdidas bajo dos tipos de decisiones, entonces el razonamiento es ligeramente diferente. En este caso, la utilidad de X y Y están dadas por $v(-X)$ y $v(-Y)$ respectivamente y se preferirá al riesgo X que el Y si $v(-X) \geq v(-Y)$.

Notación 1.1.1.

$w(x) := -v(-x)$. Y nótese que w es no-decreciente y convexa. $\bigtriangledown$

La desigualdad anterior es equivalente a

$$\mathbb{E}(w(X)) \leq \mathbb{E}(w(Y)).$$

Definición 1.1.2. *(Función de pérdida en Teoría Económica)*

Se dice que una función $w : (b_1, b_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ no-decreciente y convexa en el intervalo $(b_1, b_2) \subseteq \mathbb{R}$ es una función de pérdida.

Ejemplo 1.1.2. *(Funciones de pérdida comunes)*

(i) $w(x) = x$, $x \in (b_1, b_2)$.

(ii) $w(x) = e^{ax}$, $a > 0$, $x \in (0, \infty)$.

(iii) $w(x) = (x - a)_+$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in (0, \infty)$.

$\bigtriangledown$

En la mayoría de las situaciones de aseguramiento (y la vida) no se conoce explícitamente la forma de las funciones de utilidad ó pérdida subyacentes.

Sin embargo, en algunos casos se pueden demostrar las dos desigualdades anteriores para todas las funciones de utilidad ó pérdida.

Esto motiva los siguientes tres ordenamientos de distribuciones.

Definición 1.1.3. *(Orden parcial)*

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto. Un orden parcial en $\mathcal{X}$ es una relación binaria, $\prec$, que satisface

(i) $x \prec x$ (reflexividad).

(ii) Si $x \prec y$ y $y \prec z$, entonces $x \prec z$ (transitividad).

(iii) Si $x \prec y$ y $y \prec x$, entonces $x = y$ (antisimetría).

En este trabajo se centrará la atención en el caso en el que $\mathcal{X}$ es el conjunto de distribuciones de variables aleatorias univariadas.

Lema 1.1.1.

Para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$

$$x - a = (x-a)_+ - (a-x)_+.$$

Demostración:

Caso 1: $x > a$

$$\begin{aligned}(x-a)_+ - (a-x)_+ &= \max\{x-a, 0\} - \max\{a-x, 0\} \\ &= x - a - 0 = x - a.\end{aligned}$$

Caso 2: $x \leq a$

$$\begin{aligned}(x-a)_+ - (a-x)_+ &= \max\{x-a, 0\} - \max\{a-x, 0\} \\ &= 0 - (a-x) = x - a.\end{aligned}$$

En ambos casos se concluye que $x - a = (x-a)_+ - (a-x)_+$. $\square$

Definición 1.1.4. *(Función inversa generalizada)*

Sea $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no-decreciente. Se define la función inversa generalizada de g, denotada por g^{-}, como $g^{-} : Im(g) \to A$ tal que

$$g^{-}(y) = \text{ínf}\{z : g(z) \leq y\}.$$

Proposición 1.1.1.

Sea F_X una distribución sobre $\mathbb{R}$ y S_X su correspondiente función de supervivencia (i.e $S_X(x) = 1 - F_X(x)$) tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$, entonces

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)_+ \, dF_X(x) = \int_a^{\infty} S_X(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (a-x)_+ \, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{a} S_X(x)dx.$

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} & (x-a)_+ \, dF_X(x) - \int_a^{\infty} S_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} (a-x)_+ \, dF_X(x) + \int_a^{\infty} (x-a)_+ \, dF_X(x) - \int_a^{\infty} S_X(x)dx \\
&= \int_a^{\infty} (x-a)_+ \, dF_X(x) - \int_a^{\infty} S_X(x)dx \\
&= \int_a^{\infty} x dF_X(x) - a \int_a^{\infty} dF_X(x) - \left[\lim_{b\to\infty} x S_X(b) - a S_X(a) + \int_a^{\infty} x dF_X(x)\right] \\
&= \int_a^{\infty} x dF_X(x) - a(1 - F_X(a)) - 0 + a S_X(a) - \int_a^{\infty} x dF_X(x) \\
&= -a(1 - F_X(a)) + a S_X(a) = -a S_X(a) + a S_X(a) = 0.
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)_+ \, dF_X(x) = \int_a^{\infty} S_X(x)dx.$$

(ii) Análoga. □

Notación 1.1.2.

Sean X, Y variables aleatorias. Se escribirá $X \prec Y$ si $F_X \prec F_Y$. $\triangledown$

Definición 1.1.5. *(Órdenes estocástico y stop-loss)*

Sean X, Y variables aleatorias

(a) Se dice que X es estocásticamente dominado por Y (ó X es estocásticamente más pequeña que Y) si para toda función creciente $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\xi(X)) \leq \mathbb{E}(\xi(Y)),$$

y se escribe $X \leq_{st} Y$ (siempre que $\mathbb{E}(\xi(X)), \mathbb{E}(\xi(Y)) < \infty$).

(b) Supóngase que $\mathbb{E}(X_+), \mathbb{E}(Y_+) < \infty$. Se dice que X es más pequeña que Y en orden *stop-loss* si para toda función creciente y convexa $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\xi(X)) \leq \mathbb{E}(\xi(Y)),$$

y se escribe $X \leq_{sl} Y$ (siempre que $\mathbb{E}(\xi(X)), \mathbb{E}(\xi(Y)) < \infty$).

1.1.1.1. Orden estocástico

A continuación se darán algunos resultados que harán un poco más intuitivo el orden estocástico.

Teorema 1.1.1.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $X \leq_{st} Y$.

(ii) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $S_X(x) \leq S_Y(x)$.

(iii) Existe un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}')$ y dos variables aleatorias X', Y' definidas en este espacio tales que $X' \leq Y'$, $X \stackrel{d}{=} X'$ y $Y \stackrel{d}{=} Y'$ (Teorema de acoplamiento).

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Para $x \in \mathbb{R}$, considérese la función

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ 1 & \text{si } t \geq x, \end{cases}$$

Y nótese que

$$\mathbb{E}(\xi(X)) = \mathbb{P}(X > x) = S_X(x) \ \text{ y } \mathbb{E}(\xi(Y)) = S_Y(x).$$

Pero, $\mathbb{E}(\xi(X)) \leq \mathbb{E}(\xi(Y))$, entonces $S_X(x) \leq S_Y(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Considérese una variable aleatoria $Z \sim \text{Unif}[0,1]$ definida en algún espacio de probabilidad $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}')$. Sea $X' := F_X^-(Z)$ y $Y' = F_Y^-(Z)$; por el Teorema de Transformada Integral (ó Fundamental de la Simulación) $X' \stackrel{d}{=} X$ y $Y' \stackrel{d}{=} Y$.

Y también, como $S_X(x) \leq S_Y(x)$, entonces $F_Y(x) \leq F_X(x)$ entonces

$$\text{mín}\{t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq Z\} \leq \text{mín}\{t \in \mathbb{R} : F_Y(t) \geq Z\} \ \text{ i.e. } F_X^-(Z) \leq F_Y^-(Z)$$

$$\therefore X^{'} \leq Y^{'}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$\mathbb{E}(\xi(X')) \leq \mathbb{E}(\xi(Y'))$ pues $X' \leq Y'$ y ξ es no-decreciente. Entonces

$$\mathbb{E}(\xi(X)) = \mathbb{E}(\xi(X')) \leq \mathbb{E}(\xi(Y')) = \mathbb{E}(\xi(Y)).$$

$\square$

1.1.1.2. Orden *stop-loss*

Ahora, se darán algunos resultados que facilita el entendimiento del orden *stop-loss* y su importancia en reaseguro.

Teorema 1.1.2.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $X \leq_{sl} Y$.

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X-x)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-x)_+]$.

Demostración:

Considérese la función $\xi(t) = (t-x)_+$. Nótese que $\xi(t)$ es no-decreciente y convexa, entonces $\mathbb{E}(\xi(X)) \leq \mathbb{E}(\xi(Y))$, i.e $\mathbb{E}[(X-x)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-x)_+]$. □

Observación 1.1.1.

La caracterización dada por $\mathbb{E}[(X-x)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-x)_+]$ hace natural el nombre que orden *stop-loss*. Si X es un riesgo que se quiere asegurar, con un nivel de retención d, entonces la prima neta $\mathbb{E}[(X-d)_+]$ se conoce como prima *stop-loss*. ▽

Tal como se hizo para el ordenamiento estocástico, también se puede demostrar un Teorema de Acoplamiento para ordenamiento *stop-loss*. Para la demostración de éste se requerirá del concepto de esperanza condicional, $\mathbb{E}\left(Y'|X'\right)$.

Teorema 1.1.3.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $X \leq_{sl} Y$.

(b) Existe un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathscr{F}'.\mathbb{P}')$ y variables aleatorias X', Y' definidas en dicho espacio de probabilidad tales que $X' \leq \mathbb{E}\left(Y'|X'\right)$, $X \stackrel{d}{=} X'$ y $Y' \stackrel{d}{=} Y$.

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$. Por la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-x)_+] &\leq \mathbb{E}[(\mathbb{E}(Y'|X') - x)_+] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left((Y'-x)_+ |X'\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[(Y'-x)_+] \\ &= \mathbb{E}[(Y-x)_+]\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}[(X-x)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-x)_+].$$

□

Ahora se obtendrá una condición suficiente para que se puedan ordenar *stop-loss* dos variables aleatorias.

Teorema 1.1.4. *(Criterio de corte de Karlin-Novikoff)*

Supóngase que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$ y $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. Si $F_X(t) \leq F_Y(t)$ para todo $t < t_0$ ($t_0 \in \mathbb{R}$ fijo) y $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo $t > t_0$, entonces $X \leq_{sl} Y$.

Pero primero se demostrará un lema que facilitará la demostración del criterio de corte de Karlin-Novikoff.

Lema 1.1.2.

Sea $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible no-negativa tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(t)|dt < \infty$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)dt \geq 0$. Si $\eta(t) \leq 0$ para todo $t < t_0$ y $\eta(t) \geq 0$ para todo $t > t_0$ (con $t_0 \in \mathbb{R}$), entonces $\displaystyle\int_x^{\infty} \eta(t)dt \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Demostración del Lema:

La función $x \mapsto \int_x^{\infty} \eta(t)dt$ es continua y no-decreciente en $(-\infty, t_0)$, no-creciente en (t_0, ∞) y no-negativa en $-\infty$. □

Demostración del Criterio de corte de Karlin-Novikoff:

Sea

$$\eta(t) = F_X(t) - F_Y(t) = [1 - F_Y(t)] - [1 - F_X(t)] = S_Y(t) - S_X(t)$$

, entonces $\eta(t) \leq 0$ para todo $t < t_0$ y $\eta(t) \geq 0$ para todo $t > t_0$.

Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)dt &= -\int_{-\infty}^{0} F_Y(t)dt + \int_{0}^{\infty} S_Y(t)dt \\ &- \left(-\int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt + \int_{0}^{\infty} S_X(t)dt\right) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geq 0,\end{aligned}$$

Por tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)dt \geq 0$. Entonces, por el Lema anterior $\int_{x}^{\infty} \eta(t)dt \geq 0$.

Es decir, $\int_x^{\infty}(S_Y(t) - S_X(t))dt = \int_x^{\infty} S_Y(t)dt - \int_x^{\infty} S_X(t)dt \geq 0$. Entonces por la Proposición 1.1.1, $\mathbb{E}[(X-x)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-x)_+]$. □

1.1.2. Tarificación y primas

El seguro es un contrato a través del cual el asegurador se obliga, mediante el cobro de un prima, a indemnizar dentro de los límites pactados, el daño producido al asegurado cuando ocurra un siniestro sobre los riesgos objeto de cobertura de dicho seguro.

El reaseguro es un acuerdo a través del cual una compañía reaseguradora, accede a indemnizar a otra compañía aseguradora por toda ó parte de la pérdida bajo los acuerdos de las pólizas emitidas. Por este servicio la compañía cedente (aseguradora) paga a la reaseguradora una prima.

En esta sección se pretende estudiar brevemente algunas reglas para establecer un precio adecuado, la prima, para un contrato de riesgos (pérdidas) X que se desea (re)asegurar. Intuitivamente, las primas no pueden ser muy bajas ya que podría resultar en pérdidas muy grandes para las (re)aseguradoras, pero por otro lado, las primas no pueden ser muy altas debido a la competencia entre (re)aseguradoras.

Siendo informales, se puede considerar un principio de primaje como una regla para asignar una prima a un riesgo a asegurar.

Definición 1.1.6. *(Principio de primaje)*

Considérese una familia de riesgos (pérdidas) X. Un principio para cálculo de primas es una regla que determina la prima como un funcional, al asignar un valor $\pi(F_X) \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ a la distribución del riesgo F_X.

Notación 1.1.3.

Se utilizará $\pi(X)$ en vez de $\pi(F_X)$. $\triangledown$

Generalmente dicha prima depende de ciertas características de F_X, como por ejemplo la esperanza de X, ó la varianza X. Por ejemplo, el principio de primaje más simple es el principio de prima neta para el que se establece que $\pi(X) = \mathbb{E}(X)$.

Definición 1.1.7. *(safety loading)*

A la diferencia $\pi(X) - \mathbb{E}(X)$ se le conoce como *safety loading*.

El *safety loading* debiése ser positivo a menos que la distribución de X esté concentrada en un sólo punto.

Observación 1.1.2.

El riesgo se modela como una variable aleatoria no-negativa X; sin embargo algunas veces es útil definir $\pi(X)$, para una variable aleatoria que también pueda tomar valores negativos. $\triangledown$

1.1.3. Propiedades deseables en una prima

A continuación, se analizarán algunas de las propiedades generales que se asocian con la idea de un "buen" principio de primaje. Una primera realidad muy intuitiva que se debe indicar en cualquier modelo de tarificación es que "generalmente", la prima $\pi(X)$ es finita.

Definición 1.1.8.

Se dice que un riesgo (pérdida) X es asegurable si $\pi(X) < \infty$.

Sean X, Y, Z pérdidas arbitrarias bien definidas y con primas finitas. Se considerarán algunas propiedades deseables.

1. Independencia.

   $\pi(X)$ depende sólo de la función de supervivencia S_X, i.e. la prima de X sólo depende de la probabilidad de las colas de X. Esta propiedad establece que la prima sólo depende de la pérdida del riesgo asegurable y de la probabilidad de que dicha pérdida ocurra, no de la causa de la pérdida.

2. Recargo de riesgo (*risk loading*).

$$\mathbb{E}(X) \leq \pi(X),$$

   El recargo para el riesgo es deseable ya que generalmente se necesita que el principio de primaje cobre al menos el valor esperado de la pérdida por (re)asegurar el riesgo.

3. Ausencia de *safety loading* injustificado.
   Si $k \geq 0$ es una constante, entonces $\pi(k) = k$.
   A diferencia de la propiedad de recargo de riesgo, si se sabe (con probabilidad 1) que el riesgo es constante al nivel k, entonces no hay razón para cobrar recargo de riesgo pues no hay incertidumbre en dicho riesgo.

4. Pérdida maximal ó ausencia de *rip-off*.

$$\pi(X) \leq esssup(X) := \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < 1\},$$

5. Proporcionalidad, equivarianza ante escalamientos ú homogeneidad en primer grado.
   Si $c \geq 0$ es una constante, entonces $\pi(cX) = c\pi(X)$.

6. Sub-aditividad

$$\pi(X+Y) \leq \pi(X) + \pi(Y),$$

   La propiedad de sub-aditividad implica que las (re)aseguradoras no puedan tomar ventajas de dividir el riesgo en partes.

7. Super-aditividad

$$\pi(X+Y) \geq \pi(X) + \pi(Y),$$

8. Aditividad

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y),$$

   Generalmente cuando los riesgos son independientes es deseable que se cumpla la propiedad de aditividad. En general, $\pi(X+Y)$ depende de la distribución conjunta de X e Y.

9. Aditividad para riesgos independientes.
   Si X e Y son independientes, entonces $\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$.

10. Aditividad para riesgos comonótonos.
    Si X e Y son comonótonos, entonces $\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$.

11. Equivarianza, consistencia ó invarianza ante translaciones.
    Si $k \geq 0$ es una constante, entonces $\pi(X+k) = \pi(X) + k$.

12. Monotonía puntual.
    Si para todo $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$, entonces $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

13. Preservación de dominancia estocástica de primer orden.
    Si $S_X(x) \leq S_Y(x)$ para todo $x \geq 0$, entonces $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

14. Preservación del orden estocástico.
    Si $X \leq_{st} Y$, entonces $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

15. Preservación del orden *stop-loss*.
    Si $\mathbb{E}[(X-d)_+] \leq \mathbb{E}[(X-d)_+]$ para todo $d \geq 0$, entonces $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

16. Continuidad.

$$\lim_{d \to 0^+} \pi((X-d)_+) = \pi(X) \ \text{ y } \ \lim_{c \to \infty} \pi(X \wedge c) = \pi(X).$$

17. Compatibilidad bajo mezclas.
    Para cualquier $\alpha \in [0,1]$ y Z si $\pi(X) = \pi(Y)$, entonces

$$\pi(\alpha F_X + (1-\alpha)F_Z) = \pi(\alpha F_Y + (1-\alpha)F_Z).$$

Proposición 1.1.2.

(a) Si se cumplen las propiedades de ausencia de *safety loading* injustificado y de aditividad, entonces se cumple la propiedad de consistencia.

(b) Si se cumplen las propiedades de translación y proporcionalidad, entonces se cumple la propiedad de ausencia de *safety loading* injustificado.

(c) Si se cumplen las propiedades de monotonía puntual e independencia, entonces se cumple la propiedad de dominancia estocástica de primer orden.

Demostración:

(a) Sea X una pérdida y $\pi(\cdot)$ un principio de primaje que cumple con las propiedades de ausencia de *safety loading* injustificado y de aditividad. Entonces,

$$\begin{aligned} \pi(X+k) &= \pi(X) + \pi(k) \ \text{ por la aditividad} \\ &= \pi(X) + k \ \text{ por la ausencia de } \textit{safety loading} \text{ injustificado} \end{aligned}$$

$$\therefore \pi(X+k) = \pi(X) + k.$$

(b) Sea X una pérdida y $\pi(\cdot)$ un principio de primaje que cumple con las propiedades de translación y proporcionalidad. Entonces,

$$\begin{aligned}
\pi(k) = \pi(0 \cdot X + k) &= \pi(0 \cdot X) + k \quad \text{por la propiedad de translación} \\
&= 0 \cdot \pi(X) + k \quad \text{por la proporcionalidad} \\
&= 0 + k = k
\end{aligned}$$

$$\therefore \pi(k) = k$$

(c) Inmediata.

$\square$

1.2. Principios de primaje

En esta sección se describirán tres esquemas que la ciencia actuarial utiliza para establecer principios de primaje. Esta división en tres esquemas es un tanto arbitraria ya que un principio de primaje puede surgir a partir de más de uno de los esquemas.

El primer esquema se conoce como esquema ***ad hoc*** ya que en éste se define un principio de primaje potencialmente razonable y posteriormente se verifica que satisfaga algunas de las propiedades deseables de una prima.

De manera inversa, el **esquema de caracterización** primero establece las propiedades que debe satisfacer el principio de primaje y posteriormente se encuentra el ó los principios de primaje que satisfagan dichas propiedades. Inmediatamente se puede observar que este esquema es más complicado y riguroso, es por esto que muchas veces no necesariamente se puede caracterizar al conjunto de principios de primaje que satisfaga la lista de propiedades deseadas. La práctica más común es que se encuentra al menos un principio de primaje que satisfaga las propiedades y con éste se trabaja.

Quizá el esquema más subjetivo y anquilosado para desarrollar un principio de primaje es el **esquema económico**. Bajo este esquema, se adopta una teoría económica particular y se determina el principio de primaje resultante. Algunas propiedades surgen más de un razonamiento teórico que práctico, las que se puedan explicar se detallan a continuación.

1.2.1. Esquema *ad hoc*

En esta sección se dará una lista de los principios de primaje más conocidos. La profesión actuarial ha propuesto diversos principios, entre los que se encuentran.

(P0) Principio de prima neta
$$\pi(X) = \mathbb{E}(X),$$
Este principio aunque parezca muy simple es muy utilizado ya que en éste subyacen ideas de Teoría de Grandes Números al "suponer" que el riesgo es esencialmente inexistente si la aseguradora vende una cantidad suficiente de pólizas sobre riesgos independientes e idénticamente distribuidos.

(P1) Principio de la esperanza ó del valor esperado
$$\pi(X) = (1+\rho)\mathbb{E}(X),$$
con $\rho > 0$ que se interpreta como un escalamiento del *safety loading*.

(P2) Principio de la varianza
$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta \cdot Var(X),$$
para algún $\beta > 0$.

(P3) Principio de la desviación estándar
$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta\sqrt{Var(Z)},$$
con $\theta > 0$.

(P4) Principio mixto
$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)},$$
con $\theta > 0$.

(P5) Principio de la variación modificada
$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + k_1\sqrt{Var(X)} + k_2\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad k_1, k_2 > 0.$$

(P6) Principio del valor medio
$$\pi(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}.$$

(P7) Principio de la p-media

$$\pi(X) = (\mathbb{E}(X^p))^{1/p},$$

para algún $p > 1$.

(P8) Principio de la semidesviación

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + k_1 \sqrt{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))_+^2\right]}, k_1 \in (0,1).$$

(P9) Principio Holandés

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))_+\right], \beta \in (0,1].$$

(P10) Principio de Wang

$$\pi(X) = \int_0^\infty \lambda(S_X(t))dt,$$

donde $\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es no-decreciente, cóncava, $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(1) = 1$.

(P11) Principio de Gini

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}\left[|X - X'|\right],$$

donde $\beta > 0$ y X' es una variable con la misma distribución de X pero independiente de X.

(P12) Principio del percentil generalizado

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\left[F_X^-(1-p) - \mathbb{E}(X)\right] \text{ con } \beta, p \in (0,1).$$

(P13) Principio del TVaR

$$\pi(X) = \frac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_X^-(x)dx, p \in (0,1).$$

(P14) Principio de la semivarianza

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))_+^2\right], \beta > 0.$$

(P15) Principio de la utilidad cuadrática

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \mathrm{Var}(X)}, \text{ con } \gamma > 0 \text{ y } \gamma^2 > \mathrm{Var}(X).$$

(P16) Principio de la covarianza

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + 2\beta\mathrm{Var}(X) - \beta\mathrm{Cov}(X,Y),$$

con $\beta > 0$ y Y una variable aleatoria.

(P17) Principio exponencial

$$\pi(X) = \frac{1}{\beta}\log\left(\mathbb{E}(e^{\beta X})\right), \beta > 0.$$

(P18) Principio de Esscher

$$\pi(X) = \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{\lambda Z}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right]},$$

para alguna variable aleatoria Z.

(P19) Principio de Riesgos Proporcionales

$$\pi(X) = \int_0^\infty (S_X(x))^\vartheta dx,$$

para algún $\vartheta \in (0,1)$.

(P20) Principio Suizo.
La prima resuelve la ecuación

$$\mathbb{E}[u(X - p\pi(X))] = u((1-p)\pi(X)),$$

para algún $p \in [0,1]$ y una función u creciente y convexa.

(P21) Principio de riesgo ajustado

$$\pi(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^{1/p}\, dx,$$

para algún $p \geq 1$.

(P22) Principio del ε-cuantil

$$\pi(X) = F_X^{-}(1-\varepsilon),$$

i.e. la prima más pequeña tal que la probabilidad de una pérdida es a lo más ε.

(P23) Principio de la desviación absoluta.
Defínase $\xi(X) = \mathbb{E}(|X - \mathrm{med}(X)|)$. Para $\beta \geq 0$ constante

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta \cdot \xi(X).$$

1.2.2. Esquema de caracterización

Primero se notará que el principio de primaje de Wang se puede obtener a partir de este esquema.

Teorema 1.2.1.

(i) Si el principio de primaje, $\pi(\cdot)$, satisface las propiedades de independencia, monotonía puntual, aditividad para riesgos comonótonos, ausencia de *safety loading* injustificado y continuidad. Entonces existe una función $\eta : [0,1] \to [0,1]$ no decreciente tal que $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1$ y

$$\pi(X) = \int_0^\infty \eta(S_X(x))dx.$$

Además, si entre los riesgos asegurables se encuentra una variable aleatoria con distribución Bernoulli con parámetro p, entonces η es única.

(ii) Si además de las hipótesis del inciso (i) se cumple la propiedad de subaditividad, entonces η es cóncava y se obtiene el principio de primaje de Wang.

Ahora, se obtendrá el principio de riesgos proporcionales agregando una propiedad a las hipótesis de Teorema anterior.

Corolario 1.2.1.

Sea $\pi(\cdot)$ un principio de primaje que satisface las propiedades de independencia, monotonía puntual, aditividad para riesgos comonótonos, ausencia de *safety loading* injustificado y continuidad. Si $\pi(\cdot)$ cumple además con la propiedad de que para $X := I \cdot Y$ con $I \sim Bnlli(q)$ y Y independientes se cumple que $\pi(X) = \pi(I)\pi(Y)$, entonces existe $\vartheta > 0$ tal que $\eta(x) = x^\vartheta$ para todo $x \in [0,1]$.

Finalmente, si se supone que se satisface la propiedad de Recargo de Riesgo, entonces la constante ϑ en el Corolario anterior está en el intervalo $[0,1]$. Por tanto, también se caracterizó al principio de primaje de Riesgos Proporcionales.

1.2.3. Esquema económico

Quizá la teoría más conocida para fines de primaje sea la Teoría de la Utilidad Esperada; con ésta, se obtiene el principio de la Utilidad Equivalente. Si se utiliza Teoría Dual de

Yaari en vez de Teoría de la Utilidad Esperada se obtendrá el principio de primaje de Wang.

El principio de Esscher también se puede obtener a partir de Teoría de la Utilidad Esperada. Supóngase que la aseguradora j toma el riesgo X_j $(j \in \{1, 2 \ldots, n\})$ y tiene una función de utilidad $u_j(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Bühlmann (1980, 1984) definió un equilibrio cuando la utilidad esperada de cada aseguradora se maximiza. Este equilibrio coincide con lo que en Teoría Económica se conoce como Intercambio óptimo de Pareto (Borch (1963, 1968), Taylor (1992I, 1992II)).

Teorema 1.2.2.

En equilibrio, el precio de la pérdida X está dado por

$$\pi(X) := \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{\lambda Z}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right]},$$

donde $Z := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ es el riesgo agregado y $\frac{1}{\lambda} := \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}$.

Este Teorema establece que un intercambio de riesgos de Pareto óptimo con utilidad exponencial, el precio está dado por el principio de Esscher para el riesgo agregado Z y una tolerancia al riesgo agregada de $1/\lambda$. Bühlmann (1984) generalizó este resultado para aseguradoras con otras funciones de utilidad. Wang (2001 a y 2001 b) comparó el principio de Wang con el que se establece en el Teorema 1.2.2.

1.2.3.1. El principio de utilidad cero

Considérese una función de utilidad $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente.

Definición 1.2.1.

El principio de utilidad cero define la prima del riesgo X, $\pi(X)$, como la solución a la ecuación

$$\mathbb{E}\left[v(\pi(X) - X)\right] = v(0).$$

Es decir, la aseguradora establece la prima de tal manera que, con respecto a la función de utilidad $v(x)$, la utilidad $v(0)$ del *surplus* inicial $x = 0$, sea igual a la utilidad esperada del *surplus* $\pi(X) - X$ que resulta de asegurar el riesgo X a la prima $\pi(X)$.

Observación 1.2.1.

La prima $\pi(X)$ es la misma para todas las funciones de utilidad $v^*(x) := av(x) + b$ con $v(\cdot)$ que satisface $\mathbb{E}\left[v(\pi(X) - X)\right] = v(0)$ pues

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[v^*(\pi(X) - X)\right] &= \mathbb{E}\left[av(\pi(X) - X) + b\right]\\ &= a\mathbb{E}\left(v(\pi(X) - X)\right) + b\\ &= av(0) + b = v^*(0),\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}\left[v^*(\pi(X) - X)\right] = v^*(0).$$

$\bigtriangledown$

Definición 1.2.2.

Se dice que un principio de primaje es monótono con respecto al orden $\prec$ en cierta familia de funciones de distribución si $F_X \prec F_Y$ implica que $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

Teorema 1.2.3.

El principio de utilidad cero dado por $\mathbb{E}\left[v(\pi(X) - X)\right] = v(0)$ tiene *safety loading* no-negativo y no tiene *safety loading* injustificado. También es monótono con respecto al orden *stop-loss*, $\leq_{sl}$.

Demostración:

Sea $c > 0$ una constante, entonces $\mathbb{E}(v(\pi(c) - c)) = v(0)$ si y sólo si $v(\pi(c) - c) = v(0)$ pues $v(\pi(c) - c)$ no es aleatorio. Entonces como $v(\cdot)$ es estrictamente creciente $\pi(c) - c = 0$. De aquí que $\pi(c) = c$. Es decir, no hay *safety loading* injustificado.

Ahora, por la desigualdad de Jensen $\mathbb{E}(v(\pi(X) - X)) \leq v\left(\mathbb{E}(\pi(X) - X)\right)$ es decir, $v(0) = \mathbb{E}(v(\pi(X) - x)) \leq v(\pi(X) - \mathbb{E}(X))$ i.e $v(0) \leq v(\pi(X) - \mathbb{E}(X))$ y por la monotonía de $v(\cdot)$ se tiene que $0 \leq \pi(X) - \mathbb{E}(X)$, i.e. el principio de primaje tiene *safety loading* no negativo.

Finalmente, sean X, Y dos riesgos tales que $X \leq_{sl} Y$. Considérese la función

$$\xi(x) = -v(c - x).$$

Afirmación: ξ es no-decreciente y convexa.

Prueba:

Si $x_1 \leq x_2$ entonces $c - x_1 \geq c - x_2$; por tanto $v(c - x_1) \geq v(c - x_2)$ i.e $-v(c - x_1) \geq -v(c - x_2) \therefore \xi(x_1) \leq \xi(x_2)$

Como $X \leq_{sl} Y$ entonces $\mathbb{E}(\xi(X)) \leq \mathbb{E}(\xi(Y))$, es decir $\mathbb{E}[-v(c - X)] \leq \mathbb{E}[-v(c - Y)]$ ó equivalentemente $\mathbb{E}[v(c - Y)] \leq \mathbb{E}[v(c - X)]$. De aquí que $\pi(X) \leq \pi(Y)$.

□

Ejemplo 1.2.1. *(Principio exponencial)*

Considérese la función de utilidad $v(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{ax})$ $(a > 0)$. Nótese que $v(0) = 0$, de aquí que

$$\begin{array}{l}\mathbb{E}(v(\pi(X) - X)) = v(0) = 0 \text{ si y sólo si } \mathbb{E}\left[\frac{1}{a}(1 - e^{-a(\pi(X)-X)})\right] = 0 \\ \text{ si y sólo si } 1 - \mathbb{E}\left[e^{-a(\pi(X)-X)}\right] = e^{-a\pi(X)}\mathbb{E}(e^{aX}) \text{ si y sólo si } e^{a\pi(X)} = \mathbb{E}(e^{aX}) \\ \text{ si y sólo si } \pi(X) = \frac{1}{a}\log(\mathbb{E}(e^{aX})).\end{array}$$

▽

Proposición 1.2.1.

$\pi(X) = \frac{1}{a}\log(\mathbb{E}(e^{aX}))$ es aditivo para riesgos independientes.

Demostración:

Sean X, Y riesgos independientes. Entonces,

$$\begin{aligned}\pi(X+Y) &= \frac{1}{a}\log\left(\mathbb{E}\left(e^{a(X+Y)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{a}\log\left(\mathbb{E}\left(e^{aX}e^{aY}\right)\right) \\ &= \frac{1}{a}\log\left(\mathbb{E}(e^{aX})\mathbb{E}(e^{aY})\right) \\ &= \frac{1}{a}\left[\log\left(\mathbb{E}(e^{aX})\right) + \log\left(\mathbb{E}(e^{aY})\right)\right] \\ &= \frac{1}{a}\log(\mathbb{E}(e^{aX})) + \frac{1}{a}\log(\mathbb{E}(e^{aY})) = \pi(X) + \pi(Y),\end{aligned}$$

$$\therefore \pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y).$$

□

Bajo ciertas condiciones de regularidad sobre la función de utilidad, el principio exponencial se caracteriza como el único principio de utilidad cero que es aditivo para riesgos independientes.

Teorema 1.2.4.

Supóngase que la función de utilidad $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene primera y segunda derivadas continuas tales que

$$v(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}v(x)\bigg|_{x=0} = 1, \quad \frac{d^2}{dx^2}v(x)\bigg|_{x=0} = -a,$$

para algún $a \geq 0$. Sea $\pi(\cdot)$ la prima definida por el principio de utilidad cero $\mathbb{E}\left[v(\pi(X) - X)\right] = v(0)$ para variables aleatorias no-negativas y supóngase que

$$\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y),$$

para cualesquiera riesgos asegurables independientes X y Y. Entonces,

$$\pi(X) = \begin{cases} \frac{1}{a}\log(\mathbb{E}(e^{aX})) & \text{si } a > 0 \\ \mathbb{E}(X) & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

1.2.4. Algunos resultados para diferentes principios de primaje

En esta pequeña sección se establecerán algunas propiedades que serán utilizadas en Capítulos posteriores.

Proposición 1.2.2.

Los siguientes principios de primaje son homogéneos en primer grado, i.e. $\pi(cX) = c\pi(X)$ para $c \geq 0$.

(1) $\pi(X) = (1+\beta)\mathbb{E}(X), \quad \beta > 0.$

(2) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)}, \quad \beta > 0.$

(3) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad \beta > 0.$

(4) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)} + \gamma\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad \beta, \gamma > 0.$

(5) $\pi(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}.$

(6) $\pi(X) = \mathbb{E}(X^p)^{1/p}, \quad p > 1.$

(7) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]}, \quad \beta \in (0,1).$

(8) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+], \quad \beta \in (0,1].$

(9) $\pi(X) = \int_0^\infty (\mathbb{P}(X \geq t))^{1/p} \; dt.$

(10) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(|X - X'|)$ donde X' es una variable con la misma distribución de X pero independiente de X.

(11) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta[F_X^{-1}(1-p) - \mathbb{E}(X)]$, $\beta > 0$ $p \in (0,1)$.

(12) $\pi(X) = \frac{1}{p}\int_{1-p}^1 F_X^{-1}(x)dx$, $p \in (0,1)$.

Demostración:

(1) $\pi(cX) = (1+\beta)\mathbb{E}(cX) = (1+\beta)c\mathbb{E}(X) = c\,[(1+\beta)\mathbb{E}(X)] = c\pi(X).$

(2)

$$\begin{aligned}\pi(cX) &= \mathbb{E}(cX) + \beta\sqrt{Var(X)} = c\mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{c^2Var(X)} \\ &= c[\mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)}] = c\pi(X).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \mathbb{E}(cX) + \beta\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)} = c\mathbb{E}(X) + \beta\frac{c^2Var(X)}{c\mathbb{E}(X)} \\ &= c\left[\mathbb{E}(X) + \beta\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}\right]. \end{aligned}$$

(4) Inmediata de (2) y (3).

(5)

$$\pi(cX) = \sqrt{\mathbb{E}[(cX^2)]} = \sqrt{c^2\mathbb{E}[(X^2)]} = c\sqrt{\mathbb{E}[(X^2)]} = c\pi(X).$$

(6)

$$\begin{aligned} \pi(cX) &= \mathbb{E}^{1/p}[(cX^p)] = \mathbb{E}^{1/p}[(c^pX^p)] = (c^p)^{1-p}\mathbb{E}^{1/p}(X^p) \\ &= c\mathbb{E}^{1/p}(X^p) = c\pi(X). \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} \pi(cX) &= \mathbb{E}(cX) + \beta\sqrt{\mathbb{E}[(cX - \mathbb{E}(cX))_+^2]} \\ &= c\mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{c^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]} \\ &= c[\mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]} = c\pi(X). \end{aligned}$$

(8) Inmediata del inciso anterior.

(9) Nótese que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(cX > t) &= \mathbb{P}(X > t/c) \text{ y con el cambio de variable } \ u = t/c \\ \pi(cX) &= \int_0^\infty (\mathbb{P}(cX > t))^{1/p}dt = \int_0^\infty (\mathbb{P}(X > u))^{1/p}cdu \\ &= c \int_0^\infty \mathbb{P}(X > u)^{1/p}du = c\pi(X). \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \pi(cX) &= \mathbb{E}(cX) + \beta\mathbb{E}[|cX - cX'|] \\ &= c\mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[c|X - X'|]. \\ &= c\pi(X) \end{aligned}$$

(11) Nótese que

$$
\begin{aligned}
F_{cX}^{-1}(1-p) &= \text{ínf}\,\{z\in\mathbb{R} : F_{cX}(z)\geq 1-p\} = \text{ínf}\,\{z\in\mathbb{R} : \mathbb{P}(cX)\leq z)\geq 1-p\} \\
&= \text{ínf}\,\{z\in\mathbb{R} : \mathbb{P}(X)\leq z/c)\geq 1-p\} \\
&= c\,\text{ínf}\,\{z\in\mathbb{R} : \mathbb{P}(X)\leq z/c)\geq 1-p\} \\
&= c\cdot F_X^{-1}(1-p).
\end{aligned}
$$

(12)

$$
\begin{aligned}
\pi(cX) &= \frac{1}{p}\int_{1-p}^{1} F_{cX}^{-1}(x)dx = \pi(cX) = \frac{1}{p}\int_{1-p}^{1} cF_X^{-1}(x)dx = c\pi(X) = c\frac{1}{p}\int_{1-p}^{1} F_X^{-1}(x)dx. \\
&= c\pi(X)
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposición 1.2.3.

1. Si X e Y no están correlacionados, entonces el principio de la varianza es aditivo.
2. Si X e Y están correlacionados negativamente, entonces el principio de la varianza es subaditivo.
3. Los prinicipios de la desviación estándar y de la varianza modificada son proporcionales.
4. Si X e Y están correlacionados negativamente, entonces los principios de la desviación estándar y varianza modificada son subaditivos.

Demostración:

1. Sean X, Y no correlacionados

$$
\begin{aligned}
\pi(X+Y) &= \mathbb{E}(X+Y)+\gamma Var(X+Y) \\
&= \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)+\gamma(Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)) \\
&= \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)+\gamma(Var(X)+Var(Y)+0) \\
&= (\mathbb{E}(X)+\gamma Var(X))+(\mathbb{E}(Y)+\gamma Var(Y)) \\
&= \pi(X)+\pi(Y)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y).$$

2. Sean X, Y correlacionados negativamente

$$\begin{aligned}
\pi(X+Y) &= \mathbb{E}(X+Y) + \gamma Var(X+Y) \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \gamma(Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)) \\
&\leq \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \gamma(Var(X) + Var(Y)) \\
&= (\mathbb{E}(X) + \gamma Var(X)) + (\mathbb{E}(Y) + \gamma Var(Y)) \\
&= \pi(X) + \pi(Y)
\end{aligned}$$

$$\therefore \pi(X+Y) \leq \pi(X) + \pi(Y).$$

3. Para el principio de la desviación estándar.
   Sea $c \geq 0$

$$\begin{aligned}
\pi(cX) &= \mathbb{E}(cX) + \theta\sqrt{\mathrm{Var}(cX)} \\
&= c\mathbb{E}(X) + \theta\sqrt{c^2\mathrm{Var}(X)} \\
&= c\mathbb{E}(X) + \theta \cdot c\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \\
&= c\left[\mathbb{E}(X) + \theta\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right] = c\pi(X).
\end{aligned}$$

   Para el principio de la varianza modificada

$$\begin{aligned}
\pi(cX) &= \mathbb{E}(cX) + \theta\frac{\mathrm{Var}(cX)}{\mathbb{E}(cX)} \\
&= c\mathbb{E}(X) + \theta\frac{c^2\mathrm{Var}(X)}{c\mathbb{E}(X)} \\
&= c\mathbb{E}(X) + \theta\frac{c\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)} \\
&= c\left[\mathbb{E}(X) + \theta\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)}\right] = c\pi(X).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.2.4.

(i) El principio de la desviación absoluta es aditivo.

(ii) El principio de la desviación absoluta es proporcional.

(iii) El principio de la desviación absoluta es consistente.

(iv) Si $a \leq 1$, el principio de la desviación absoluta es monótono con respecto al ordenamiento estocástico.

Lema 1.2.1.

Sean $v, w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones no-decrecientes y Y una variable aleatoria. Entonces, para todo $y \in [0,1]$

$$F^{-}_{v(Y)+w(Y)}(y) = F^{-}_{v(Y)} + F^{-}_{w(Y)}(y).$$

Demostración:

Nótese que para cualesquiera $y \in (0,1), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F^{-}_{v(Y)}(y) \leq t \quad & \text{si y sólo si} \quad F_{v(Y)}(t) \geq y \text{ si y sólo si } \mathbb{P}(v(Y) \leq t) \geq y \\ & \text{si y sólo si} \quad \mathbb{P}(Y \leq v^{-1}(t)) \geq y \text{ si y sólo si } \Leftrightarrow F_Y(v^{-1}(t)) \geq y \\ & \text{si y sólo si} \quad F^{-}_{Y}(y) \leq v^{-1}(t) \text{ si y sólo si } v(F^{-}_{Y}(y)) \leq t \end{aligned}$$

$$\therefore F^{-}_{v(Y)} = v \circ F^{-}_{Y}.$$

Análogamente, se puede demostrar que $F^{-}_{w(Y)} = w \circ F^{-}_{Y}$ y $F^{-}_{(v+w)(Y)} = (v+w) \circ F^{-}_{Y}$.

Entonces,

$$F^{-}_{(v+w)(Y)} = (v+w) \circ F^{-}_{Y} = v \circ F^{-}_{Y} + w \circ F^{-}_{Y} = F^{-}_{v(Y)} + F^{-}_{w(Y)}.$$

$\square$

Definición 1.2.3. *(Comonoticidad)*

Se dice que dos riesgos X, Y son comonótonos si existen dos funciones no-decrecientes $v, w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, un espacio de probabilidad y una variable aleatora Z en este espacio tales que

$$(X, Y) \stackrel{D}{=} (v(Z), w(Z)).$$

Lema 1.2.2.

Si X, Y son riesgos comonótonos tales que $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y) < \infty$, entonces el principio de primaje de la desviación absoluta es aditivo, i.e.

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y).$$

Demostración: Como para el principio de la desviación absoluta se cumple que

$$\pi(X) = \int_0^{1/2} (1-a) F_X^{-}(t) dt + \int_{1/2}^{1} (1+a) F_X^{-}(t) dt,$$

y por el Lema anterior se satisface que

$$
\begin{aligned}
\pi(X+Y) &= \int_0^{1/2}(1-a)F^-_{X+Y}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{X+Y}(t)dt \\
&= \int_0^{1/2}(1-a)F^-_{v(Z)+w(Z)}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{v(Z)+w(Z)}(t)dt \\
&= \int_0^{1/2}(1-a)F^-_{v(Z)}(t)dt + \int_0^{1/2}(1-a)F^-_{w(Z)}(t)dt \\
&\quad + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{v(Z)}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{w(Z)}(t)dt \\
&= \left(\int_0^{1/2}(1-a)F^-_{v(Z)}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{v(Z)}(t)dt\right) \\
&\quad + \left(\int_0^{1/2}(1-a)F^-_{w(Z)}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{w(Z)}(t)dt\right) \\
&= \left(\int_0^{1/2}(1-a)F^-_{X}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{X}(t)dt\right) \\
&\quad + \left(\int_0^{1/2}(1-a)F^-_{Y}(t)dt + \int_{1/2}^1(1+a)F^-_{Y}(t)dt\right) \\
&= \pi(X) + \pi(Y).
\end{aligned}
$$

□

1.3. Especificaciones sobre primas y reaseguro

En un acuerdo de reaseguro se divide a la pérdida X de manera que $X = I_g(X) + g(X)$, donde $I_g(X)$ es la parte que retiene la aseguradora y $g(X)$ es la parte que se cede a reaseguro. A I_g se le conoce como *función de retención* y a g se le conoce como *función de pérdida cedida*. Además, se supondrá que tienen la siguientes propiedades

- $I_g(\cdot)$ y g son no-decrecientes. Esta suposición hace sentido ya que cuando una pérdida crece, la aseguradora y la reaseguradora tienden a pagar más por dicha pérdida.
- $0 \leq I_g(x) \leq x$ y $I_g(0) = 0$.

Ejemplo 1.3.1. *(Ejemplos clásicos de función de retención)*

Algunos ejemplos de funciones de retención son

- $I_g(x) = cx$ para un reaseguro proporcional, donde $c \in (0,1)$.
- $I_g(x) = d \wedge x =: \text{mín}\{x, d\}$ para un reaseguro *stop-loss*, donde $d > 0$.

$\triangledown$

En el capítulo 2 se darán más detalles de estos tipos de reaseguro.

Considérese riesgos de la forma $X = \sum_{j=1}^{N} U_i$, donde N es una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{N}$ y las variables aleatorias $U_1, U_2, \ldots$ se interpretan como riesgos "individuales". Se puede interpolar la idea de función de retención a las pérdidas locales de tal manera que para la i-ésima reclamación (de tamaño U_i), la reaseguradora sea responsable de $g_i(U_i) = U_i - I_{g_i}(U_i)$. Se supondrá que las funciones de retención "individual" $I_{g_i}(\cdot)$ tiene las mismas propiedades que la función de retención "global" I_g.

Sea v una función de utilidad y $\pi_g(X)$ la prima que se paga a la reaseguradora; entonces la utilidad de la reaseguradora está dada por

$$v\left(\pi_g(X) - \sum_{j=1}^{N} g_i(U_i)\right),$$

Si en el acuerdo "global" se utiliza una función de retención I_g entonces la utilidad de la reaseguradora estará dada por $v(\pi_g(X) - g(X))$.

El siguiente Teorema sugiere que para la reaseguradora un acuerdo global algunas veces es "mejor".

Teorema 1.3.1.

Sea X una pérdida asegurable de la forma $X = \sum_{i=1}^{N} U_i$ y $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava no-decreciente. Para reaseguro local con funciones de riesgo cedido $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, existe una función g tal que

$$\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i)\right),$$

y

$$\mathbb{E}\left[v\left(\pi_g(X) - \sum_{i=1}^{N} g_i(U_i)\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[v(\pi_g(X) - g(X))\right].$$

Demostración:

Para cualquier $x \geq 0$, defínase $g(x) := \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i) \middle| X = x\right]$.

Por la definición constructiva de la esperanza condicional se tiene que

$$\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i)\right).$$

Y como la aplicación $x \mapsto v(\pi_g(X) - x)$ es cóncava, entonces por la desigualdad de Jensen y la propiedad de torre para esperanza condicional se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[v\left(\pi_g(X) - \sum_{i=1}^{N} g_i(U_i)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(v\left(\pi_g(X) - \sum_{i=1}^{N} g_i(U_i)\right) \middle| X\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[v\left(\pi_g(X) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i) \middle| X\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[v(\pi_g(X) - g(X))\right].
\end{aligned}$$

□

Observación 1.3.1.

Es importante notar que la función $g(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i) \middle| X = x\right]$ del Teorema anterior no necesariamente es una función de pérdida cedida ya que no se puede agurar siempre que sea no-decreciente. Se tienen que dar algunas condiciones para que g efectivamente sea una función de pérdida cedida. ▽

Definición 1.3.1.

Sean $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n), \underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ vectores aleatorios en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\underline{X}$ esta dominado estocásticamente por $\underline{Y}$ si para cualquier función medible $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente en todos sus argumentos

$$\mathbb{E}(\xi(\underline{X})) \leq \mathbb{E}(\xi(\underline{Y})),$$

siempre que $\mathbb{E}(\xi(\underline{X})), \mathbb{E}(\xi(\underline{Y}))$ estén bien definidas. Se escribe $\underline{X} \leq_{st} \underline{Y}$.

Definición 1.3.2. *(Función de frecuencia de Pólya de orden 2)*

Se dice que una funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de frecuencia de Pólya de orden (2 ó PF_2) si para cualesquiera $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$

$$\begin{vmatrix} f(x_1 - y_1) & f(x_1 - y_2) \\ f(x_2 - y_1) & f(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Ejemplo 1.3.2.

Las distribuciones $Unif(a, b)$, $Gamma(a, \lambda)$ con $a \geq 1$ y $Weibull(r, \lambda)$ con $r \geq 1$ son funciones de frecuencia de Pólya. $\triangledown$

Lema 1.3.1. *(Teorema de Efron)*

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias no-negativas independientes con funciones de densidad $f_1, \ldots, f_n$, respectivamente. Si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ f_i es función de frecuencia de Pólya entonces para cualesquiera $0 \leq t_1 \leq t_2$, $\underline{X}_{t_1} \leq_{st} \underline{X}_{t_2}$.

A continuación se darán condiciones suficientes para que $g(x) := \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i) \middle| X = x\right]$ sea efectivamente una función de pérdida cedida.

Teorema 1.3.2.

Sea $n \in \mathbb{N}_+$ fijo y $g_1, \ldots, g_n$ funciones de pérdida cedida arbitrarias. Considérese el riesgo $X = \sum_{i=1}^{N} U_i$, donde $N = n$ es determinista, $U_1, \ldots, U_n$ independiente y U_i continua con función de densidad PF_2, f_{U_i}. Entonces

$$g(x) := \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} g_i(U_i) \middle| X = x\right],$$

es una función de pérdida cedida

Demostración:

Nótese que

$$\begin{aligned} x - g(x) &= \mathbb{E}\left[x - \sum_{i=1}^{n} g_i(U_i) \middle| X = x\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(U_i - g_i(U_i)) \middle| X = x\right]. \end{aligned}$$

además la función $\ell(\underline{u}) := \sum_{i=1}^{n}(u_i - g_i(u_i))$ es no-decreciente en cada argumento. Entonces por el Teorema de Efron $g(x)$ y $x - g(x)$ son no-decrecientes. Y como $g_i(U_i) \leq U_i$, entonces para cualquier $x \geq 0$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(U_i) \middle| X = x\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} U_i \middle| X = x\right] = x$$

$$\therefore 0 \leq g(x) \leq x \;\text{ y } g(0) = 0.$$

□

Finalmente, se dará una propiedad deseable para que un principio de primaje haga sentido con una estructura de reaseguro.

Definición 1.3.3.

Para un riesgo X, se dice que un acuerdo de reaseguro con función de retención I_g es compatible con respecto al principio de primaje $\pi(\cdot)$ si

$$\pi(X) = \pi(I_g(X)) + \pi(X - I_g(X)).$$

Proposición 1.3.1.

Para cualquier función de retención I_g, el correspondiente acuerdo de reaseguro es compatible con respecto al principio de la desviación absoluta.

Demostración:

Como las funciones I_g y g son no-decrecientes y las variables $I_g(X), g(X) = X - I_g(X)$ son comonótonas, entonces por el Lema (1.2.2) se cumple que para el principio de la desviación absoluta

$$\pi(X) = \pi(I_g(X)) + \pi(X - I_g(X)).$$

□

Capítulo 2

Esperanza y varianza como criterio de optimización en reaseguro

2.1. Concepto de Reaseguro

El reaseguro es un acuerdo a través del cual una compañía reaseguradora, accede a indemnizar a una compañía aseguradora por toda ó parte de la pérdida bajo los acuerdos de las pólizas emitidas. Por este servicio la compañía cedente (aseguradora) paga a la reaseguradora una prima.

El propósito del reaseguro es diversificar el riesgo. El reaseguro ayuda a proteger a las aseguradoras en contra de las pérdidas imprevistas ó extraordinarias permitiendo así expandir su capacidad de tomar más riesgo.

La operación se plasma en un contrato de reaseguro el cual contiene una serie de cláusulas de carácter técnico, comercial y legal, que regula la relación entre asegurador y reasegurador.

En la operación del reaseguro es muy común hablar de los siguientes conceptos:

(i) **Asegurado:** objeto del riesgo (persona o bien o conjunto de ambos).

(ii) **Aseguradora:** la compañía que asume directamente el riesgo.

(iii) **Cedente:** es el nombre que asume la aseguradora cuando *cede* el(los) riesgo(s) a la reaseguradora.

(iv) **Retrocesionaria:** es el nombre que se da a otra reaseguradora que recibió de la cedente, parte del riesgo que ésta asumió. Debido a que la operación de reaseguro puede repertirse tantas veces como sean necesarias.

(v) **Reaseguradora:** la compañía hacia la cual se transfiere total o parcialmente el riesgo por parte de la aseguradora.

(vi) **Retención:** es el límite que sobre cada riesgo, una institución de seguro puede retener por su cuenta.

(vii) **Prioridad:** es el límite que por concepto de siniestros en cada ramo, una institución de seguros acuerda retener, en caso de siniestro (o siniestros acumulados) sobre un mismo riesgo según sea el tipo de contrato, que se definirán en el transcurso del documento.

A continuación se ilustra el ciclo del seguro:

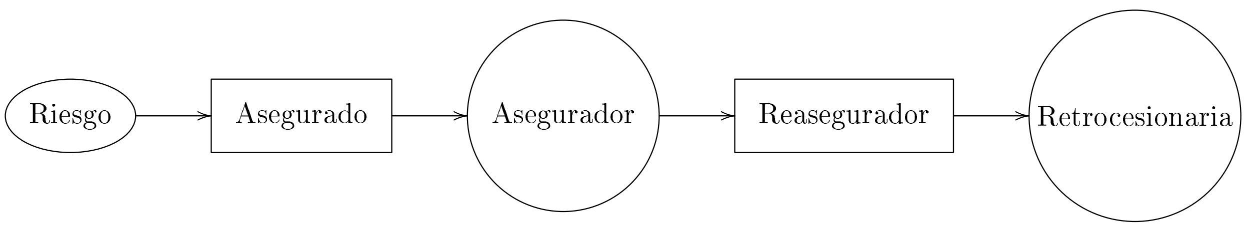

Figura 1. *Ciclo del seguro.*

2.1.1. Tipos de contrato de Reaseguro

Por su naturaleza contractual el reaseguro puede ser obligatorio ó facultativo:

En el contrato de **reaseguro obligatorio (automático)**: una vez que se establecieron las condiciones de reaseguro para un tipo de operación el asegurador está obligado a ceder y el reasegurador está obligado a aceptar.

El contrato de **reaseguro facultativo**: tanto el asegurador como el reasegurador tienen la facultad de ceder y aceptar el riesgo respectivamente.

2.1.2. Estructuras de Reaseguro

Por su naturaleza técnica los contratos podrán ser proporcionales ó no-proporcionales:

En Reaseguro Proporcional, el reasegurador acepta una parte proporcional de la responsabilidad asumida sobre un riesgo suscrito por la cedente (asegurador), haciéndose cargo tanto de las obligaciones (siniestros), como de los derechos (primas, previa deducción de una comisión de reaseguro destinada a cubrir los gastos de adquisición y administración). En este tipo de contratos, se hace una transferencia proporcional de: suma asegurada, prima y siniestro.

En los contratos proporcionales exiten al menos dos formas en las que se puede desarrollar el reaseguro: cuota parte y *surplus.*

En Reaseguro no-proporcional: se basa en que la repartición de responsabilidades entre la cedente y el reasegurador se establece sobre siniestros y no con base en la suma asegurada, dando un límite de retención (el reparto es no proporcional entre la cendente y el reasegurador).

Existen al menos tres formas en que se puede desarrollar el reaseguro no-proporcional: *Working Cover*, XL Catástrofico y *Stop Loss.*

2.1.3. Estructuras de Reaseguro Proporcional

2.1.3.1. Reaseguro *Cuota-parte*

En este contrato de reaseguro, la cesión al reasegurador consiste en un porcentaje proporcional de la suma asegurada, prima y siniestros que se consideren.

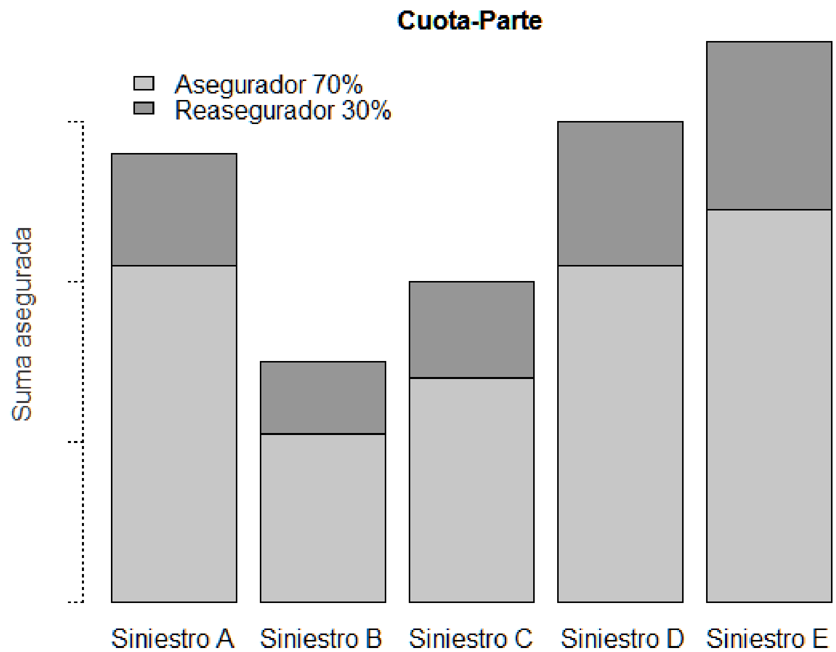

Figura 2. *Repartición de suma asegurada en reaseguro cuota-parte.*

Ejemplo 2.1.1. *(Reaseguro Cuota-parte)*

A continuación se presenta un ejemplo de este tipo de contrato, en el cual una aseguradora coloca un riesgo en un contrato de reaseguro *cuota-parte* (Aseguradora 70 % , Reaseguradora 30 %). La suma asegurada es de \$100,000. Si se cobra una prima de \$20,000 para el riesgo y se tiene un siniestro de \$50,000 entonces la forma de distribuir la prima, suma asegurada y siniestro es la siguiente:

	Aseguradora (Retención)	Reaseguradora
Suma Asegurada \$100,000	\$100,000(0.7)=70,000	\$100,000(0.3)=30,000
Prima \$20,000	\$20,000(0.7)=14,000	\$20,000(0.3)=6,000
Siniestro \$50,000	\$50,000(0.7)=35,000	\$50,000(0.3)=15,000

2.1.3.2. Reaseguro *surplus*

En este contrato *surplus* la retención de la cedente se establece en forma de una cantidad sobre cada riesgo se le denomina línea ó pleno de retención. La responsabilidad de la reaseguradora se establece como un múltiplo de la línea . La capacidad de cobertura de un contrato: es la suma de la responsabilidad máxima que asume el reasegurado más la responsabilidad del asegurado.

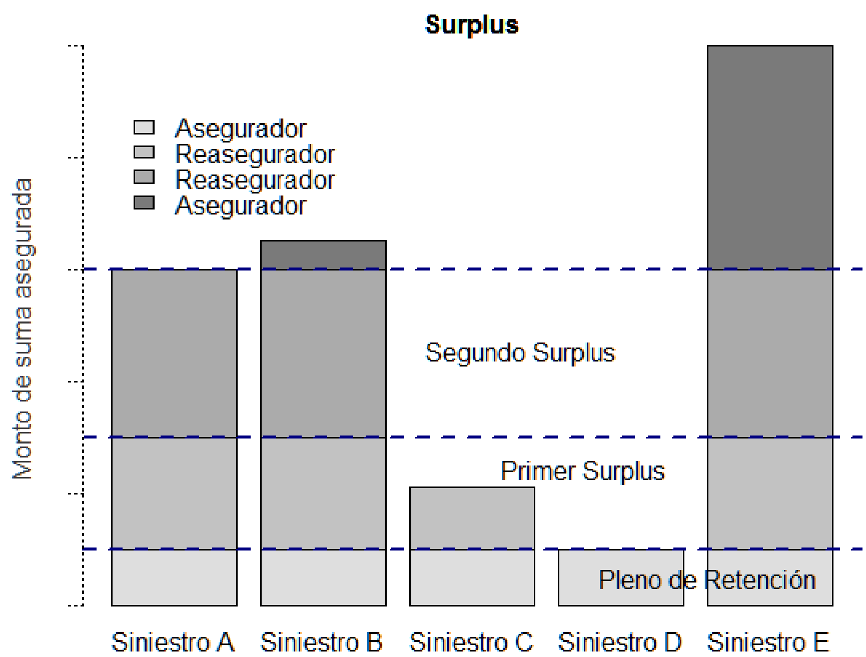

Figura 3. *Repartición de suma asegurada en reaseguro surplus.*

Ejemplo 2.1.2. *(Reaseguro surplus)*

A continuación se presenta un ejemplo de este tipo de contrato. En él la compañía aseguradora tiene una línea de $52,000 y cederá parte del riesgo a una reaseguradora a través de un contrato de *surplus*. El primer *surplus*, cuenta con 20 líneas, cada línea es de $52,000 por lo que el primer contrato tiene una capacidad de \$1,040,000. El segundo *surplus* tiene una cobertura de 10 líneas y su capacidad es por \$520,000. La suma asegurada del riesgo es de \$1,500,000, la prima que se cobra es de \$46,000 y se presenta un siniestro de \$175,000. A continuación se presenta la distribución de cada uno de los rubros:

	Capacidad del contrato=\$1,612,000		
		Capacidad de reaseguro=\$1,560,000	
	Retención 1L	1° *surplus* 20L	2° *surplus* 10L
Suma asegurada \$1,500,000	$\frac{52{,}000}{1{,}500{,}000} = 3.47\,\%$	$\frac{1{,}040{,}000}{1{,}500{,}000} = 69.33\,\%$	$\frac{408{,}000}{1{,}500{,}000} = 27.2\,\%$
Prima \$46,000	(46,000)(3.47 %)=\$1,596.20	(46,000)(69.33 %)=\$31,891.80	(46,000)(27.2 %)=\$12,512
Siniestro \$175,000	(175,000)(3.47 %)=\$6,072.5	(175,000)(69.33 %)=\$121,327.5	(175,000)(27.2 %)=\$47,600

Observación 2.1.1.

Obsérvese que es de naturaleza proporcional con base en la suma asegurada ya que de ella depende la proporción de prima y siniestro correspondiente a cada parte. ∇

2.1.4. Estructuras de Reaseguro No-Proporcional

2.1.4.1. Reaseguro *Exceso de pérdida por riesgo*

También llamado WXL- *Working Cover*. Este tipo de contrato cubre los montos de siniestros "individuales" que sobrepasa la prioridad, hasta una capacidad del contrato de reaseguro *Working Cover*. Hay que destacar que este contrato opera riesgo por riesgo, por lo tanto, si en un acontecimiento se afectan varias pólizas, se analizara por separado cada póliza para saber en cual de ellas entra la cobertura de este contrato.

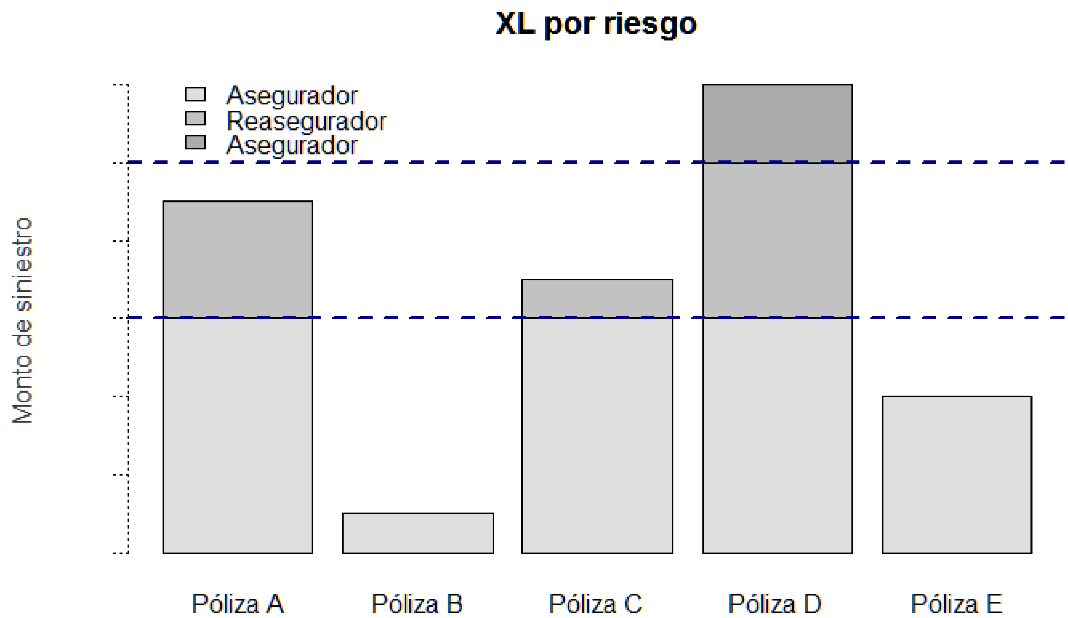

Figura 4.*Repartición de monto de siniestro en exceso de pérdida por riesgo.*

Ejemplo 2.1.3. *(Exceso de pérdida por riesgo)*

Una compañía contrató un reaseguro de exceso de pérdida por riesgo, con la siguiente estructura: una cobertura de \$60,000 en exceso de \$ 40,000. Si se produce un siniestro de \$75,000, la cedente tendrá que tomar a su cargo \$40,000 y el reasegurador pagará \$35,000.

2.1.4.2. Reaseguro *Exceso de pérdida por evento*

También llamado XL-Catástrofe (Cat XL), se suma los siniestros de un mismo riesgo y la prioridad se aplica sobre el total de esa suma. Cubre a todos los siniestros causados por un mismo evento así como a todas las pólizas que afectó.

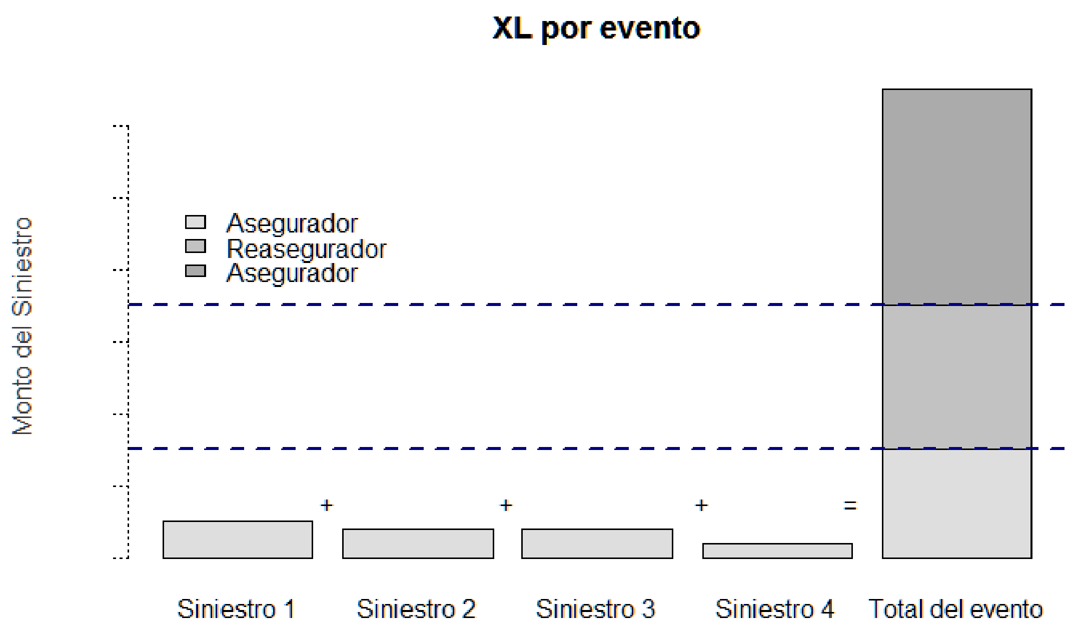

Figura 5. *Repartición de monto de siniestro en exceso de pérdida por evento*

Ejemplo 2.1.4. *(Exceso de pérdida por evento)*

Se considera que la compañía aseguradora cuenta con un contrato de reaseguro de exceso de pérdida por evento que cubre $350,000 en exceso de $150,000. La responsabilidad de los siguientes siniestros :

	Siniestros	Aseguradora	Reaseguradora
	$120,00	$-	$-
	$250,000	$-	$-
	$600,000	$-	$-
Total	$970,000	$150,000	$350,000

Observación 2.1.2.

Obsérvese que el total de los siniestros $970,000, la aseguradora participa con $150,000+$470,000=$620,000. La reaseguradora participa con $350,000. ▽

2.1.4.3. Reaseguro *stop-loss*

Mediante este tipo de contrato el asegurador establece el porcentaje máximo de siniestralidad global que está dispuesto a soportar al final de un ejercicio (anual), corriendo a cargo del reasegurador el exceso que se produzca. El reasegurador pagará el exceso de Índice de Siniestralidad=Siniestralidad total dividido por la prima emitida, cuando este sobrepase una cierta prioridad por ejemplo si la prioridad es de 110 % y si el Índice de Siniestralidad es de 130 %, el reasegurador pagará los 20 puntos encima de la prioridad.

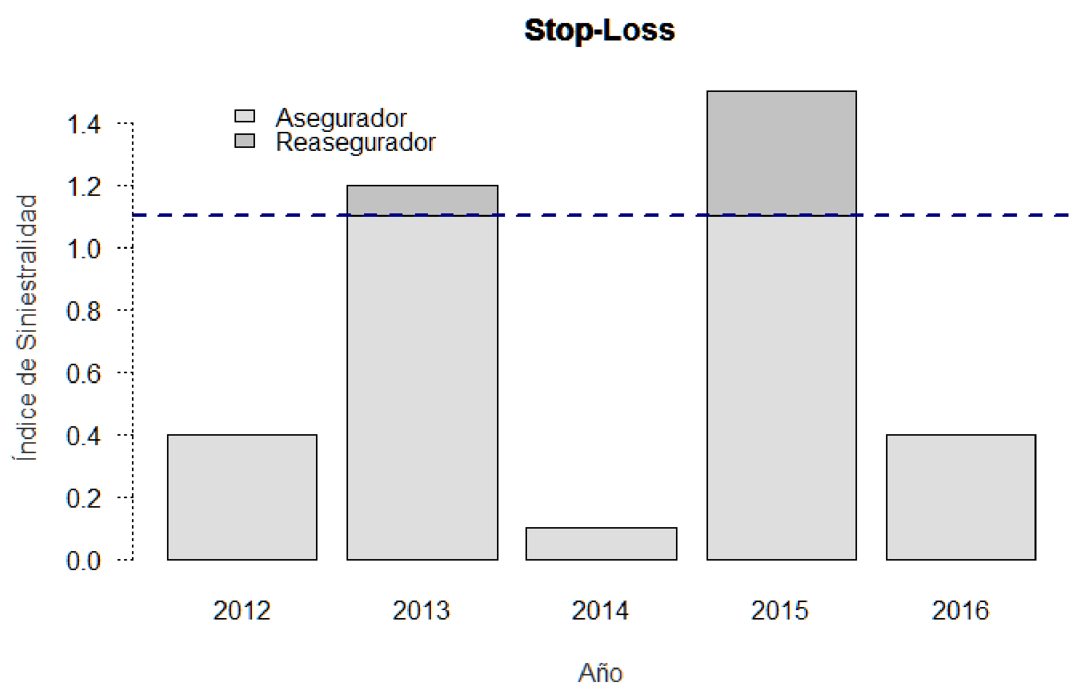

Figura 6. *Repartición de índice de siniestralidad en Stop-Loss*

Ejemplo 2.1.5. *(stop-loss)*

Una compañía durante el año 2014, emitió una prima de $\$4,376,000$ y tuvo $\$7,220,400$ de siniestros ocurridos. De acuerdo al índice de siniestralidad al final del año, se contrato la siguiente estructura de reaseguro para el año 2015: la primer capa de reaseguro paga el 80 % del 35 % del índice de siniestralidad en exceso de 85 %. La segunda capa de reaseguro paga el 90 % del 40 % del índice de siniestralidad en exceso de 120 %.

	Prima emitida=\$4,376,000		
		Siniestralidad ocurrida=\$7,220,400	
	Retención	1° Capa (35 % XS 85 %)	2° Capa (35 % XS 85 %)
Aseguradora	$(85\,\%)$ $(\$4376000) = \$3,719,600$	$(20\,\%)$ $(35\,\%)$ $(\$4376000) = \$306,320$	$(10\,\%)$ $(40\,\%)$ $(\$4376000) = \$175,040$
Reaseguradora		$(80\,\%)$ $(35\,\%)$ $(\$4376000) = \$1,225,280$	$(90\,\%)$ $(40\,\%)$ $(\$4376000) = \$1,575,360$

Índice de Siniestralidad es de $IS = \frac{7{,}220{,}400}{4{,}376{,}000} = 1.65 = 165\,\%$

Aseguradora(sobrante) $5\,\%$

$$(5\,\%)(4,376,000) = 218,800$$

Total Aseguradora

$$3,719,600 + 306,320 + 175,040 + 218,000 = 4,419,760$$

Total Reaseguradora

$$1,225,280 + 1,575,360 = 2,800,640$$

2.2. Recuento de estructuras de reaseguro

Hoy en día es bastante natural que en la operación del seguro no se utilice solamente un tipo de reaseguro tal como el cuota-parte, *surplus*, exceso de pérdida ó *stop-loss*; es bastante común (y principalmente en grandes riesgos) que se utilice una combinación de varios tipos de protección de reaseguro en un programa más completo de reaseguro.

La idea de este capítulo es estudiar programas de reaseguro para un portafolio dado utilizando un criterio de media-varianza.

Particularmente, se pondrá atención en un reaseguro *surplus* en combinación con un exceso de pérdida por protección de riesgo en portafolios heterogéneos de suscripción.

Se obtendrán las ecuaciones que se deben resolver para encontrar solución óptima para las siguientes combinaciones:

- Exceso de pérdida después de un *surplus*.
- Exceso de pérdida después de un cuota-parte.
- *Stop-loss* después de un cuota-parte.
- Cuota-parte después de un *stop-loss*.

- Cuota-parte después de un exceso de pérdida.
- Cuota-parte después de un *surplus*.
- Cuota-parte antes de un *surplus*.

Hasta el momento, sólo se han considerado problemas de reaseguro óptimo que consideran un único tipo de reaseguro y un criterio de optimización dado; sin embargo, la práctica del reaseguro involucra coberturas más intricadas y complejas.

Si se observa el comportamiento del mercado de reaseguro, se pueden concluir algunas afirmaciones con respecto a la operación de reaseguro:

- Generalmente se combinan coberturas proporcionales y no-proporcionales.
- Muchas veces el reaseguro proporcional incluye una protección *surplus*. Sin embargo, la mayoría de los problemas de optimización de reaseguro proporcional, se les considera como protecciones separadas.
- Es muy común combinar coberturas "por riesgo" y "por evento". Si ambos tipos de protecciones son independientes en el sentido de que la cobertura por riesgo no ejerce influencia en la cobertura por evento, entonces se puede describir al programa de reaseguro a través de coberturas independientes. Si esta hipótesis de independencia no se cumple, se necesitarán modelos más complejos para describir el riesgo y la interacción de las diferentes coberturas de reaseguro.
- Las coberturas no-proporcionales y el reaseguro *surplus* generalemente se divide en "capas" y cada "capa" tiene sus propias condiciones. Combinar las condiciones de cada "capa", no necesariamente es equivalente a considerar una gran "capa"; por ejemplo, cada capa puede tener diferentes clausulas de co-reaseguro, diferente número de reinstalaciones, clausulas pro-rata (por tiempo, reclamaciones ó ambos), claúsulas de bonos por no-reclamación, etc.
- En reaseguro no-proporcional se cede el riesgo muchas veces hasta cierto nivel. Aquellos riesgos que superen este límite superior regresarán a la retención de la aseguradora original. Lo mismo aplica a aquellos riesgos después de que se supera el número de reinstalaciones por capa. Generalmente este exceso depende del primer riesgo retenido, lo que hace que el análisis de la retención sea más complicado.
- La mayoría de los portafolios son bastante heterogéneos y esta heterogeneidad implica una desviación adicional de lo que se desea ceder al mercado de reaseguro. De hecho; la mayoría de las veces, esta falta de homogeneidad es un factor importante para combinar diferentes estrategias de reaseguro.

Aunque ya se ha teorizado con respecto a varios puntos de los mencionados anteriormente, sólo se centrará la atención en tres tópicos relacionados con éstos:

- Descubrir la combinaciones básicas de coberturas de reaseguro. Para esto, se hará la suposición de que no hay subdivisión de las capas, no hay subdivisión de las diferentes condiciones (contractuales) y no hay exceso de riesgo debido a las limitaciones de reaseguro.
- Analizar y caracterizar la influencia de la heterogeneidad inducida por la diferencia en la exposición en el riesgo por póliza, por ejemplo a través de la suma asegurada.
- Siguiendo el objetivo del trabajo; describir y aplicar un criterio de optimización práctico para reaseguro.

Implícitamente, no se considerarán riesgos de cola-larga ya que la mayoría de los razonamientos están motivados por negoción de cola-corta (por ejemplo, incendio, accidentes personales, etc). Sin embargo, si se ignora el tiempo entre la ocurrencia del siniestro y la reclamación del mismo, esta limitación se puede evitar.

El reaseguro clásico se puede clasificar en dos tipos: proporcional y no-proporcional. Para estudiar estos tipos de reaseguro se considerará un portafolio de n riesgos. Para cada i, el i-ésimo riesgo se caracterizará por una exposición al riesgo κ_i (por ejemplo, la suma asegurada, la pérdida máxima posible ó términos de la póliza original), la prima π_i, las reclamaciones individuales $X_{i,j}$ y las reclamaciones por año y entidad $X_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}$, para $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}$

2.2.1. Reaseguro proporcional

En este caso, se comparten proporcionalmente todas las características de cada riesgo, i.e. se comparten proporcionalmente la exposición al riesgo, la prima y las reclamaciones entre la aseguradora y la reaseguradora.

Supóngase que se cede proporcionalmente por riesgo en una proporción $1-c_i \in [0,1]$, i.e. la retención por riesgo de la aseguradora se hace en proporción c_i. En este caso, la prima, la exposición y las reclamaciones se dividirán de la siguiente forma:

	Retención	Cesión
Prima	$\sum_{i=1}^n c_i\pi_i$	$\sum_{i=1}^n (1-c_i)\pi_i$
Exposición	$\sum_{i=1}^n c_i\kappa_i$	$\sum_{i=1}^n (1-c_i)\kappa_i$
Reclamación	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} c_i X_{i,j} = \sum_{i=1}^n c_i X_i$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (1-c_i) X_{i,j} = \sum_{i=1}^n (1-c_i) X_i$

En términos prácticos, se utilizan reglas simples para definir dichas proporciones de estas cesiones de riesgo. Dichas reglas se conocen como tipo *surplus* y cuota-parte.

2.2.1.1. Reaseguro *surplus*

Para el reaseguro *surplus* se distribuye la exposición de manera proporcional con respecto a la exposición por cada riesgo κ_i. Si ℓ es la exposición que retiene la aseguradora (que se conoce como línea, prioridad ó pleno), entonces la proporción de riesgos que se hace está dada por

$$1 - c_i = \frac{(\kappa_i - \ell)_+}{\kappa_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \geq \kappa_i \\ \frac{\kappa_i - \ell}{\kappa_i} & \text{si } \ell < \kappa_i \end{cases}$$

Es decir,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \geq \kappa_i \\ \frac{\ell}{\kappa_i} & \text{si } \ell < \kappa_i \end{cases}$$

2.2.1.2. Reaseguro cuota-parte

En este caso, la aseguradora cede un proporción fija de todos los riesgos, i.e. para todo i, $c_i \equiv c$.

2.2.2. Reaseguro no-proporcional

Con esta forma de reaseguro se intenta mitigar los incrementos en las reclamaciones (tanto en frecuencia como en severidad). El reasegurador tomará las reclamaciones que, en cierto sentido, son muy altas. Esto significa que la reaseguradora toma las reclamaciones que exceden un *franchise* ó prioridad. En este caso, para cada riesgo X, la retención está dada por $\text{mín}\{X, \delta\}$ y la cesión no-proporcional está dada por $\text{máx}\{X - \delta, 0\} =: (X - \delta)_+$, donde δ es lo que se conoce como "prioridad" ó "retención".

En la práctica, existen diferentes formas de definir dicho nivel de reclamación (en la cesión no proporcional).

- Por riesgo: $X = (X_{ij} - \delta)_+$, que corresponde a lo que se conoce como reaseguro de exceso de pérdida por riesgo (facultativamente).
- Por accidente ó evento: $X = (X_\Xi - \delta)_+$, donde $X_\Xi = \sum_{(i,j)\in\Xi} X_{ij}$ si la reclamación j del riesgo i es conscuencia del evento ó accidente Ξ, que corresponde a lo que se conoce como reaseguro de exceso de pérdida por evento ó accidente.
- Por año: $X = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}\right) - \delta\right)_+$, que corresponde a lo que se conoce como reaseguro *stop-loss*

2.2.3. Combinación de protecciones de reaseguro en la práctica

Para combinar el reaseguro no-proporcional de manera estructurada, se respeta el siguiente orden: primero un exceso de pérdida por riesgo, después un exceso de pérdida por evento ó accidente y finalmente un *stop-loss*. Una protección *surplus* debiése ser la primera en un conjunto de protecciones aunque un *cuota-parte* siempre podría ir antes.

Una cesión cuota-parte se puede hacer en cualquier orden ya que la proporción fija siempre es aplicable al portafolio como un todo o después de cualquier protección de reaseguro.

Si se separa una parte específica de los riesgos asegurados, entonces se puede construir dos ó más protecciones de reaseguro paralelas: una para los riesgos asegurados separados y otra reasegurando todos los riesgos restantes. En la práctica, esto se hace generalmente para eventos naturales catastróficos ya que éstos generalmente están protegidos de manera exclusiva por coberturas de exceso de pérdida por evento.

Una protección *surplus* después de un exceso de pérdida implicará que los riesgos asegurados mas grandes (que se ceden sistemáticamente a través del *surplus*) tengan mucho mayor potencial de recuperarse gracias al exceso de pérdida.

2.3. Criterio de optimización

En la literatura existen diferentes criterios de optimización en reaseguro. Uno de los criterios más usados es el criterio de media-varianza, que consiste en la maximización de la ganancia esperada con la restricción de una varianza fija ó bien, la minimización de la varianza bajo la restricción de una ganancia esperada constante.

Otro criterio muy popular es el criterio de probabilidad de ruina[1] que consiste en la maximización de la ganancia esperada con la restricción de que la probabilidad de ruina sea menor que cierto nivel (fijo) ó bien la minimización de la probabilidad de ruina con la restrcción de que la ganancia esperada esté por debajo de un nivel específico (fijo). Bajo este criterio también se puede seleccionar si la probabilidad de ruina se calculará en horizonte finito u horizonte infinito.

En este capítulo se utilizará el criterio de media-varianza. Sin embargo, se modificará un poco para poder darle una mejor interpretación: Se minimizará el costo del riesgo neto retenido i.e. el riesgo retenido después de la intervención de todo el programa de reaseguro.

[1] $\mathbb{P}\left(\cup_n^{\infty}(R_n < 0)\right) = \mathbb{P}\left(\text{mín}\{n \in \mathbb{N} : R_n < 0\}\right)$ (horizonte infinito) ó bien $\mathbb{P}\left(\cup_n^{m}(R_n < 0)\right)$ (horizonte finito) donde $R_n = u + n - \sum_{i=1}^{n} X_i$ con u la reserva inicial de la aseguradora y $\{X_i\}$ variables aleatorias que representam los montos de los siniestros.

Definición 2.3.1. *(Costo del riesgo retenido)*

El costo del riesgo retenido se define como el precio adicional a pagar, superior al riesgo esperado cedido a reaseguro más un múltiplo fijo de la desviación estándar retenida.

Este precio adicional superior al riesgo esperado de lo que se cede a reaseguro se conoce como *loading* de reaseguro. Se supondrá que el *loading* de reaseguro es proporcional al riesgo (esperado) cedido a reaseguro, i.e. el principio de primaje del valor esperado. Esta proporción puede variar por tipo de protección y puede depender del orden de las protecciones de reaseguro.

El múltiplo de la desviación estándar retenida se interpreta como el costo de asignación de capital para tener el riesgo. Se supondrá que el capital asignado es proporcional a la desviación estándar (por ejemplo en un factor 4.5), pero debido a la compensación con otros riesgos retenidos se reduce en un algún otro factor (por ejemplo 80 %). Esta asignación de capital debe tener cierto rendimiento (por ejemplo 25 %). Esto implica que el costo de capital asignado también es proporcional a la desviación estándar retenida (por ejemplo, $4.5 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.9$).

Observación 2.3.1.

La suposición de una relación explícita entre la desviación estándar y el capital asignado implícitamente implica que sólo se están considerando riesgos con volatilidad acotada. También al establecer esta restricción con respecto a la desviación estándar implica que el costo de asignación de capital como un múltiplo de la desviación estándar no necesariamente implica la existencia de una solución de reaseguro óptima. Y como trabajar con desviación estándar es equivalente al criterio de media-varianza "modificado", entonces el criterio de media-varianza "clásico" también es equivalente. $\triangledown$

Notación 2.3.1.

- π^*: Prima recibida por la aseguradora (neta de reaseguro facultativo). Aunque no se está suponiendo una forma de valuación (primaje) de la aseguradora pero en general $\pi^* > \mathbb{E}(X)$.

- $I_g(X)$: Riesgo retenido por la aseguradora. Este es el riesgo retenido por la asegura-dura después de la aplicación de todas las protecciones de reaseguro.

- $\theta \cdot \sigma(I_g(X))$: Costo del capital colocado; donde $\sigma(Y)$ denota la desviación estándar de Y y θ es un parámetro fijo.

- Riesgo cedido ó reasegurado: $\sum_{i=1}^{n} g_i(X)$, donde g_i es la i-ésima protección de reaseguro (no ordenada), i.e. cuota-parte, surplus, stop-loss o exceso de pérdida.
- Costo del recargo de reaseguro: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}[g_i(X)]$ donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son parámetros fijos.

$\triangledown$

Nótese entonces que se cumple la relación

$$X = I_g(X) + \sum_{i=1}^{n} g_i(X)$$

por tanto

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[I_g(X)] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(X)\right]$$

y

$$\sigma(X) \leq \sigma(I_g(X)) + \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(X)\right)$$

Definición 2.3.2. *(Ganancia del sub-portafolio de la aseguradora después de reaseguro)*

Se define la ganancia del sub-portafolio de la aseguradora después de reaseguro, G_1, como

$$G_1 = \pi^* - I_g(X) - \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\mathbb{E}(g_i(X)) - \theta\sigma(I_g(X))$$

Proposición 2.3.1.

$$\mathbb{E}(G_1) = \pi^* - \mathbb{E}(X) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(g_i(X)) - \theta\sigma(I_g(X))$$

Se desea maximizar esta ganancia esperada $\mathbb{E}(G_1)$ con una desviación estándar fija $\sigma(I_g(X))$.

Para optimizar esta ganancia se utilizarán multiplicadores de Lagrange; donde w_j serán los parámetros no especificados para describir a las protecciones de reaseguro (por ejemplo, la retención cuota-parte, la linea *surplus*, la prioridad del exceso de pérdida, la prioridad del *stop-loss*, etc.) y η^* el multiplicador de Lagrange. Entonces, para todo j se tiene que resolver

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial w_j}\mathbb{E}(G_1) = \frac{\partial}{\partial w_j}\left(\pi^* - \mathbb{E}(I_g(X)) - \sum_{i=1}^n (1+\lambda_i)\mathbb{E}(g_i(X)) + (\eta^* - \theta)\frac{\partial}{\partial w_j}\sigma(I_g(X))\right) \\ \text{sujeto a} \\ \sigma(I_g(X)) = k \end{cases}$$

Si $\eta = \eta^* - \theta$, este problema de Lagrange se puede describir mediante la variable

$$G = \pi^* - \mathbb{E}(X) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(g_i(X))$$

con la restricción $Var(I_g(X)) = k^2$.

Si se define $\Psi = \mathbb{E}(G) + \eta Var(G)$, entonces

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial w_j}\Psi = \frac{\partial}{\partial w_j}\mathbb{E}(G) + \eta\frac{\partial}{\partial w_j}Var(G) = 0 \\ \text{sujeto a} \\ Var(I_g(X)) = k^2 \end{cases}$$

Ó equivalentemente,

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial w_j}\mathbb{E}(g_i(X)) + \eta\frac{\partial}{\partial w_j}Var(I_g(X)) = 0 \\ \text{sujeto a} \\ Var(I_g(X)) = k^2 \end{cases}$$

Observación 2.3.2.

En adelante, se expresará a la restricción de la varianza como $\sigma(I_g(X)) = x \cdot \sigma(X)$, donde $x \in [0,1]$ y por supuesto $\sigma(X) < \infty$. $\triangledown$

Esta representación tiene la ventaja de que será más sencillo controlar los valores condicionales y representación gráfica de soluciones óptimas. Esto también facilita la interpretación del capital asignado ya que aunque no se sepa exactamente cómo se asigna el capital, es fácil discutir las consecuencias de programa de reaseguro en términos de la volatilidad retenida a través de la minimización del costo de reaseguro (en vez de centrarse en los márgenes de ganancia que, por cierto, son desconocidos).

2.3.1. Restricciones de la estructura de *loading* de reaseguro

Dado el número limitado de coberturas y lo competitivo del mercado de reaseguro, se puede decir que los *loadings* no están muy influenciados por los parámetros de protección así que suena razonable que una primera aproximación considere porcentajes constantes de *loading*.

Algunos factores que sí inciden en los porcentajes de *loading* son el ramo, el riesgo asegurado (el reaseguro de desastres naturales tiene *loadings* diferentes a los de reaseguro de incendio), la ubicación geográfica, los márgenes de la tárifa de seguro (particularmente en reaseguro proporcional), etc. Esto significa que antes de analizar algún problema de optimización de reaseguro se debe conocer muy bien el mercado que se está considerando y como en la mayoría de los modelos, mientras más variables se incorporan, su tratamiento se vuelve más complejo.

2.4. Exceso de pérdida después de un *surplus*

Ya se mencionó antes que una cobertura exceso de pérdida generalmente se aplica después de una protección *surplus*. Por supuesto que se puede aplicar primero un exceso de pérdida y posteriormente un surplus, sin embargo, es más usado desde una perspectiva facultativa (lo que significa que se tendrán condiciones individuales). Entonces, sin pérdida de generalidad, los riesgos retenidos después de reaseguro facultativo se pueden ver como riesgo suscrito directamente en condiciones retenidas.

Se supondrá un portafolio de riesgo que se describirá a través de una variable aleatoria X que representa al proceso compuesto $X = \sum_{i=0}^{N} X_i$ donde N es una variable aleatoria que cuenta el número de reclamaciones y X_i representa la variable aleatoria de la reclamación individual i que depende de un valor de exposición k (como la suma asegurada) que se caracteriza por una variable aleatoria K con función de densidad f_K y función de distribución $F_K(k) = \int_0^k f_K(k)dk$. Se supondrá que X es una mezcla de las posibles reclamaciones, $X^{(k)}$, con exposición k.

Observación 2.4.1.

$F_K(\cdot)$ es la función de distribución de los valores expuestos de las pólizas que tienen una reclamación NO la función de distribución de los valores expuestos de (todas) las pólizas aseguradas. $\triangledown$

Se supondrá un reaseguro surplus con una línea retenida L y una prioridad de exceso de pérdida R. Algunas veces, se expresa a dicha prioridad como una proporción, r, de la línea L, i.e. $r = \frac{R}{L}$.

Notación 2.4.1.

- Se denotará al riesgo individual retenido con exposición k después de *surplus* como $X_L^{(k)}$ y después de la prioridad R como $X_L^{(k)} \wedge R$
- Se denotará a la combinación de todos los riesgos retenidos después de *surplus* como X_L y después de la prioridad R como $X_L \wedge R$

$\triangledown$

El riesgo retenido después de la línea de surplus L y prioridad exceso de pérdida R está dado por

$$I_g^{L,R} = \sum_{i=0}^{N}((X_L)_i \wedge R)$$

Con el Teorema de la esperanza iterada se puede demostrar que

$$\mathbb{E}[I_g^{L,R}] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}[X_L \wedge R]$$

También con el Teorema de la varianza iterada

$$Var(I_g^{L,R}) = \mathbb{E}(N)\left[\mathbb{E}[(X_L \wedge R)^2] + \frac{Var(N) - \mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(N)}\mathbb{E}^2(X_L \wedge R)\right]$$

El costo total de reaseguro es igual a $(1+\lambda_e)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X_L)]$ para el *surplus* más la parte para el exceso de pérdida después de surplus está dada por $(1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X_L \wedge R)]$.

Notación 2.4.2.

- $DSX_1 := \mathbb{E}[I_g^{L,R}]$
- $DSX_2 := Var(I_g^{L,R})$
- $DSX_3 := (1+\lambda_e)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X_L)]$
- $DSX_4 := (1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X_L \wedge R)]$
- $\varsigma := \frac{Var(N)-\mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(N)}$

$\triangledown$

Nótese que $\Psi(L,R) = \eta \cdot DSX_2 - (DSX_1 + DSX_2 + DSX_3)$. Entonces las ecuaciones de Lagrange toman la forma

$$\frac{\partial}{\partial w_j}\Psi(L,R) = \frac{\partial}{\partial w_j}DSX_2 - \frac{\partial}{\partial w_j}(DSX_1 + DSX_2 + DSX_3) \tag{2.1}$$

donde $w_1 = L$ y $w_2 = R$.

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene el siguiente resultado. La prueba no se realiza por su complejidad. Robert Verlaak (2002).

Proposición 2.4.1.

$$\begin{aligned} r + \varsigma\mathbb{E}(Y_L \wedge r) &= \frac{\int_L^\infty f_K(k)\mathbb{E}[(Y^{(k)} \wedge r)^2]dk + \varsigma\mathbb{E}(Y_L \wedge r)\int_L^\infty f_K(k)\mathbb{E}(Y^{(k)} \wedge r)dk}{\int_L^\infty f_K(k)\mathbb{E}(Y^{(k)} \wedge r)dk - q \cdot \int_L^\infty f_K(k)\mathbb{E}(Y^{(k)})dk} \\ &= \frac{\int_L^\infty \left[\mathbb{E}[(Y^{(k)} \wedge r)^2] + \varsigma\mathbb{E}(Y_L \wedge r)\mathbb{E}(Y^{(k)} \wedge r)\right] f_K(k)dk}{\int_L^\infty \left[\mathbb{E}(Y^{(k)} \wedge r) - q\mathbb{E}(Y^{(k)})\right] f_K(k)dk} \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $q = \frac{\lambda_x - \lambda_e}{\lambda_x} \in (0,1)$, $r = \frac{R}{L}$; para todo $k > 0$ $Y^{(k)} = \frac{X^{(k)}}{k}$ y para todo $L > 0$ $Y_L = \frac{X_L}{L}$.

Observación 2.4.2.

Nótese que cuando $r \to \infty$, el lado izquierdo de la ecuación (2.2) vale ∞ y el lado derecho está acotado si $q < 1$. Entonces, para $x < 1$, siempre se usará una protección de exceso de pérdida (excepto para $L = 0$ que implicará que x sea cero). $\triangledown$

Hasta el momento no se ha utilizado la restricción de la varianza

$$Var(I_g^{L,R}) = x^2 Var(X), x \in [0,1]$$

ó equivalentemente

$$\mathbb{E}[(X_L \wedge R)^2] + \varsigma \cdot \mathbb{E}^2(X_L \wedge R) = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)],\ x \in [0,1] \tag{2.3}$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{E}[(X_L \wedge rL)^2] + \varsigma \cdot \mathbb{E}^2(X_L \wedge rL) = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)],\ x \in [0,1] \tag{2.4}$$

Para un retención L dada, esta expresión tiene una solución única para R, si en caso de que $R = \infty$ el lado izquierdo de la fórmula es mayor que el lado derecho. Analogamente, dado R, extra expresión tiene una solución única para L; si $L = \infty$, el lado izquierdo es mayor que el lado derecho.

Para encontrar una solución factible para L y R, se utiliza el siguiente proceso iterativo:

- Paso 0: Seleccionar un valor inicial de L (por ejemplo al resolver la ecuación (2.4) con respecto L haciendo $R = L$ ó $R = \infty$).
- Paso 1: Para la solución resultante L, resolver la ecuación (2.2) con respecto a r.
- Paso 2: Para la prioridad resultante r, resolver la ecuación (2.4) con respecto a L. Si L se convierte en ∞, resolver la ecuación (2.4) para R y detener la iteración.
- Paso 3: Repetir hasta la convergencia de R y L.

Sin embargo, no es claro si este algoritmo induce una solución única ó si se obtiene un óptimo local. Se necesita agregar algunas hipótesis con respecto al comportamiento de $X^{(k)}$ ó de $Y^{(k)}$ con respecto a K.

2.4.1. Caso $\varsigma = 0$

En caso de que $\mathbb{E}(N) = Var(N)$ (el ejemplo por excelencia es cuando N tiene distribución Poisson) entonces el exceso de pérdida después de un *surplus* se reduce a

$$r = \frac{\int_L^\infty \mathbb{E}[(Y^{(k)} \wedge r)^2] f_K(k)dk}{\int_L^\infty \left[\mathbb{E}(Y^{(k)} \wedge r) - q\mathbb{E}(Y^{(k)})\right] f_K(k)dk} \tag{2.5}$$

Nótese que esta ecuación en r es independiente del número de reclamaciones pero sí depende de la retención L y la distribución de la exposición K.

Si $r > 0$, entonces $\int_L^\infty \mathbb{E}(Y^{(k)} \wedge r) f_K(k)dk > q \cdot \int_L^\infty \mathbb{E}(Y^{(k)}) f_K(k)dk$.

En este caso, la restricción de la varianza está dada por

$$\mathbb{E}[(X_L \wedge rL)^2] = x^2\mathbb{E}(X^2), \ x \in [0,1]$$

2.4.2. Caso $X^{(k)} = kZ$

Como $X^{(k)} = kZ$, entonces $Y^{(k)} = \frac{X^{(k)}}{k} \sim Z$ para todo k. De aquí que la ecuación (2.2) se reduce a

$$r + \varsigma \cdot \mathbb{E}(Y_L \wedge r) = \frac{\mathbb{E}[(Z \wedge r)^2] + \varsigma\mathbb{E}(Y_L \wedge r)\mathbb{E}(Z \wedge r)}{\mathbb{E}(Z \wedge r) - q\mathbb{E}(Z)} \tag{2.6}$$

Es decir,

$$r = \frac{\mathbb{E}[(Z \wedge r)^2] + \varsigma \cdot q \cdot \mathbb{E}(Y_L \wedge r)\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(Z \wedge r) - q\mathbb{E}(Z)} \tag{2.7}$$

A partir de esta expresión es claro que r depende del número de reclamaciones (ponderado por el factor ς), de la retención L y de la distribución de la exposición por el uso del factor $\mathbb{E}(Y_L \wedge r)$.

Observación 2.4.3.

Nótese que si $\mathbb{E}(Z \wedge r) - q \cdot \mathbb{E}(Z) > 0$, entonces $r > 0$. Inversamente, esta condición es verdadera si se se supone que $r \in (0, \infty)$ ya que

(i) Si $\varsigma \geq 0$, entonces $r + \varsigma \cdot \mathbb{E}(Y_L \wedge r)$ es positivo.

(ii) Si $\varsigma \in [-1, 0)$, entonces $\mathbb{E}(Y_L \wedge r) \leq \mathbb{E}(Z \wedge r) \leq r$ lo cual implica que ambos lados de la ecuación (2.6) son positivos.

$\triangledown$

En este caso, la restricción de la varianza está dada por

$$\mathbb{E}[(X_L \wedge R)^2] + \varsigma \mathbb{E}^2(X_L \wedge R) = x^2[\mathbb{E}(Z^2)\mathbb{E}(K^2) + \varsigma \cdot \mathbb{E}^2(Z)\mathbb{E}^2(K)]$$

2.4.3. Caso $\varsigma = 0$ y $X^{(k)} = kZ$

A partir de los dos casos particulares anteriores se tiene que

$$r = \frac{\mathbb{E}[(Z \wedge r)^2]}{\mathbb{E}(Z \wedge r) - q\mathbb{E}(Z)} \tag{2.8}$$

En esta expresión, r no depende de la retención L, ni del número de reclamaciones, ni de la distribución de la exposición K.

Una vez que se tiene una prioridad, es relativamente fácil resolver la expresión para L utilizando la restricción de la varianza. Esta restrcción es un poco menos compleja aritméticamente y tiene la ventaja de que ambas ecuaciones se pueden resolver por separado. En este caso la restricción de la varianza está dada por $\mathbb{E}[(X_L \wedge R)^2] = x^2\mathbb{E}(Z^2)\mathbb{E}(K^2),\ x \in [0, 1]$.

2.4.4. Cuota-parte como caso especial de un *surplus*

Si se define una medida de exposición igual a 1 para todos los riesgos en el portafolio asegurado y la retención L cualquier valor fijo en el intervalo [0,1], entonces el correspondiente reaseguro *surplus* es un cuota-parte con una cesión en proporción $1 - L$.

Para esta medida de exposición se tiene que para todo $k > 0$, $Y^{(k)} = X^{(k)} \sim X$, $X_L = L \cdot X$, $Y_L \sim X$, $r = R$ y $f_K(k) = 0$ para $k \neq 1$ y $f_K(k) = 1$.

$$R = -\varsigma \cdot \mathbb{E}(X \wedge R) + \frac{\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma \mathbb{E}^2(X \wedge R)}{\mathbb{E}(X \wedge R) - q\mathbb{E}(X)}, \; 0 < q = \frac{\lambda_x - \lambda_q}{\lambda_x} < 1$$

La restricción de la varianza $Var(I_g^{L,R}) = x^2 Var(X), \; x \in [0,1]$ se convierte en

$$L^2[\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma \mathbb{E}^2(X \wedge R)] = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma \mathbb{E}^2(X)], \; x \in [0,1], L \in [x,1]$$

2.5. Exceso de pérdida y cuota-parte

En este caso, los riesgos retenidos están dados por $I_g^{c,R} = \sum_{i=0}^{N}(cX_i \wedge cR) = c\sum_{i=0}^{N}(X_i \wedge R)$, donde R representa la prioridad del exceso de pérdida en términos del 100 % del tamaño de la reclamación.

La expresión para el riesgo retenido establece por un lado que primero se aplica un cuota-parte y después un exceso de pérdida con una prioridad $c \cdot R$; y por otro lado que primero se aplica una prioridad de exceso de pérdida R y posteriormente un cuota-parte con una retención c.

Evidentemente ambas aplicaciones tendrán el mismo riesgo retenido para la aseguradora, sin embargo la diferencia en el orden de la aplicación es fundamentalmente diferente.

La aplicación $\sum_{i=0}^{N}(cX_i \wedge cR)$ establece que los reaseguradores cuota-parte no están participando en el exceso de pérdida. Esta falta de participación significa que no se tiene participación en las recuperaciones de la intervención de exceso de pérdida pero tampoco participan en la prima de exceso de pérdida.

La apliación $c\sum_{i=0}^{N}(X_i \wedge R)$ establece que los reaseguradores cuota-parte también participan en la protección exceso de pérdida. Esto significa que estos reaseguradores tienen derecho de manera proporcional a las primas del exceso de pérdida. Este hecho se conoce como el principio de compartir la fortuna del reaseguro cuota-parte, que en la práctica casi nunca ocurre.

Esta observación con respecto al principio de compartir fortuna es oportuna ya que ésta genera una contradicción con las suposiciones que se están haciendo.

Si el reasegurador cuota-parte paga su parte en la protección exceso de pérdida común, entonces éste incrementará su costo de estructura. Para compensar este costo adicional es necesario incremientar el *loading-factor* del cuota-parte. Para garantizar que se obtendrá el mismo resultado este incremiento debe ser nominalmente igual al *loading* del exceso de pérdida. En teoría este *loading* puede ser más pequeño debido a la disminución de los costos de administración y la menor volatilidad pero no se considerará esta potencial reducción. Sin embargo, ambos *loadings* no están en la misma base, lo cual implica que para diferentes prioridades de exceso de pérdida se considerarán diferente factor de *loading*. Todo esto significa que la hipótesis del principio de primaje medio constante ya no es válido.

Sin embargo, para evitar este problema, se supondrá que la aseguradora cedente paga directamente la prima de exceso de pérdida. Esto hace que en vez de pasar la prima de exceso de pérdida a través del contrato cuota-parte y recuperarlo en una forma indirecta a partir de la estructura de loading. En la práctica es fácil de entender, pero es difícil de encontrar. La situación inversa es la más común.

Esta interpretación alternativa permitirá, al menos teóricamente, el mismo resultado de la corrección del loading y se aproxima razonablemente con el principio de primaje del valor esperado constante.

2.5.1. Exceso de pérdida después de un cuota-parte

Como ya se mencionó antes, el riesgo retenido es igual a $I_g^{c,R} = \sum_{i=0}^{N}(cX_i \wedge cR) = c\sum_{i=0}^{N}(X_i \wedge R)$. Por tanto

$$\mathbb{E}(I_g^{c,R}) = c \cdot \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X \wedge R)$$

y

$$Var(I_g^{c,R}) = c^2 \left[\mathbb{E}(N)\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \frac{Var(N) - \mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(N)}\mathbb{E}(N)\mathbb{E}^2(X \wedge R)\right]$$

El costo de reaseguro total es $(1-c)(1+\lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ para el cuota-parte más la parte del exceso de pérdida después del cuota-parte $(1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)\left[\mathbb{E}(cX) - \mathbb{E}(cX \wedge cR)\right]$

Notación 2.5.1.

- $DQX_1 := \mathbb{E}[I_g^{c,R}]$
- $DQX_2 := Var(I_g^{c,R})$
- $DQX_3 := (1-c)(1+\lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$
- $DQX_4 := (1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)\left[\mathbb{E}(cX) - \mathbb{E}(cX \wedge cR)\right]$
- $\varsigma := \frac{Var(N)-\mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(N)} \in (-1, \infty)$

$\triangledown$

Por toda la discusión que se tuvo como un caso especial del planteamiento para el surplus, entonces

$$R + \varsigma\mathbb{E}(X \wedge R) = \frac{\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)}{\mathbb{E}(X \wedge R) - q \cdot Var(X)}, q = \frac{\lambda_x - \lambda_q}{\lambda_x} \in (0,1) \tag{2.9}$$

Se puede comparar la ecuación (2.9) con las ecuaciones (2.2), (2.6) y (2.8). El numerador del lado derecho de la ecuación (2.2) se puede ver como una fórmula generalizada de la varianza con ponderación. La ecuación (2.6) es muy comparable con la ecuación (2.9); las únicas diferencias son la que generan el factor $\mathbb{E}(Y_L \wedge r)$ y el hecho de que X y R re reemplazan por Z y r, respectivamente. Es decir, es de notarse cuánto se parecen estos dos programas de reaseguro totalmente diferentes cuando se considerán "unidos" (como en la ecuación (2.8)).

Se puede concluir que la prioridad de exceso de pérdida óptima es independiente de la protección cuota-parte y en un principio será independiente de la restricción de la varianza, siempre que el parámetro R implique que $c \in [0,1]$.

Como $\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R) > 0$ y para $\varsigma \in (-1, \infty)$, $R \geq \varsigma\mathbb{E}(X \wedge R)$, se puede considerar que una solución factible para R debe satisfacer la desigualdad $\mathbb{E}(X \wedge R) - q \cdot \mathbb{E}(X) \geq 0$ y por tanto $R \geq q \cdot \mathbb{E}(X)$.

Si $R \to \infty$, el lado izquierdo de la ecuación tiende a ∞ y el lado derecho está acotado (si $q, x < 1$), esto implica que siempre se usará una protección exceso de pérdida.

En este caso, la restricción de la varianza $Var(I_g^{c,R}) = x^2 Var(X), x \in [0,1]$ se convierte en

$$c^2 \left[\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)\right] = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)], x \in [0,1] \tag{2.10}$$

y dicha condición implica que $c \in [x, 1]$.

Observación 2.5.1.

Si $c = 1$, i.e. no hay protección cuota-parte, sólo es necesario resolver la siguiente ecuación en R

$$\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R) = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)] \tag{2.11}$$

$\triangledown$

Para encontrar una solución factible para c y R, se puede aplicar el siguiente algoritmo:

- Resolver la ecuación (2.9) para R.
- Verificar con la ecuación (2.10) si el correspondiente valor de c es menor ó igual que 1. Si $c < 1$, se puede tomar a dicho R y su correspondiente c como solución óptima combinada. Si $c = 1$, se resuelve la ecuación (2.11) para R.

2.5.2. Cuota-parte después de un exceso de pérdida

En esta combinación también se presenta el problema de que no necesariamente se satisface el principio de primaje de valor medio constante. Si el reasegurador que está participando como cuota-parte incrementa su *loading* con la correspondiente proporción en el *loading* del exceso de pérdida entonces se obtienen los siguientes costos de reaseguro:

- Para el exceso de pérdida $(1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X\wedge R)]$
- Para el cuota-parte $(1-c)(1+\lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X\wedge R)$
- Para el *loading* del exceso de pérdida, los reaseguradores con la participación cuota-parte directamente recuperarán la correspondiente parte proporcional $(1-c)\lambda_x\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X\wedge R)]$, pero se supondrá que éstos recuperarán este costo adicional indirectamente a través de la estructura de *loading*.

En este caso, el riesgo retenido es $I_g^{c,R} = c\sum_{i=0}^{N}(X_i\wedge R)$; por tanto se satisfacen las expresiones para esperanza y varianza de la sección anterior. El costo de reaseguro es igual a $(1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X\wedge R)]$ para el exceso de pérdida (antes del cuota-parte) más la participación en el cuota-parte $(1-c)(1+\lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X\wedge R)$.

Notación 2.5.2.

- $DXQ_1 := DQX_1$
- $DXQ_2 := DQX_2$
- $DXQ_3 := (1+\lambda_x)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X\wedge R)]$
- $DXQ_4 := (1-c)(1+\lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X\wedge R)$

$\triangledown$

En este caso, en vez de resolver las ecuaciones de Lagrange, se obtendrá la solución de este problema optimizando el beneficio esperado con respecto a c, manteniendo bajo control el parámetro R.

En este caso la función de ganancia, $G(c,R)$, se define como

$$G(c,R) = \pi^* - I_g(X) - \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\mathbb{E}(g_i(X))$$

Entonces, el valor esperado de dicha ganancia está dado por

$$\mathbb{E}[G(c,R)] = \pi^* - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(N)\left[\lambda_q(1-c)\mathbb{E}(X \wedge R) + \lambda_x[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge R)]\right]$$

y la restricción de la varianza

$$c^2\left[\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)\right] = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)]$$

A partir de esto se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial c}R(c) = \frac{-x^2}{c^3}\frac{\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)}{[R(c) + \varsigma\mathbb{E}(X \wedge R(c))]S(R(c))} = \frac{-1}{c}\frac{\mathbb{E}[(X \wedge R(c))^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R(c))}{[R(c) + \varsigma\mathbb{E}(X \wedge R(c))]S(R(c))}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c}\mathbb{E}[G(c,R)] &= \mathbb{E}(N)\left[-\lambda_q(1-c)S(R)R'(c) + \lambda_q\mathbb{E}(X \wedge R) + \lambda_x S(R)R'(c)\right] \\ &= \lambda_q\mathbb{E}(N)\left[\mathbb{E}(X \wedge R) - \left(1 + \frac{q}{c}\right)\frac{\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)}{R + \varsigma\mathbb{E}(X \wedge R)}\right]\end{aligned}$$

Esta derivada es igual a 0 si

$$c = q \cdot \frac{\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)}{R\mathbb{E}(X \wedge R) - \mathbb{E}[(X \wedge R)^2]},\ q = \frac{\lambda_x - \lambda_q}{\lambda_q} \in (0,\infty) \tag{2.12}$$

y como $R\mathbb{E}(X \wedge R) \geq \mathbb{E}[(X \wedge R)^2]$, entonces $c \geq 0$.

Observación 2.5.2.

Nótese que si $R \to \infty$, entonces el lado derecho de la ecuación tiende a 0 y el lado izquiero está acotado por $c \in [0,\infty)$ (por supuesto si $q > 0$). Entonces para $x < 1$, una protección exceso de pérdida siempre se usará, excepto en el caso en el que $c = 0$ (y por tanto $x = 0$). $\triangledown$

Si se combina la última ecuación con la restricción de la varianza (2.10) se obtiene que

$$q^2\frac{\left[\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)\right]^3}{[R\mathbb{E}(X \wedge R) - \mathbb{E}[(X \wedge R)^2]]^2} = x^2[\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)]$$

De nuevo, como $R\mathbb{E}(X \wedge R) - \mathbb{E}[(X \wedge R)^2] \geq 0$, entonces todos los otros términos son positivos. Por tanto,

$$R\mathbb{E}(X \wedge R) - \mathbb{E}[(X \wedge R)^2] = \frac{q}{x}\sqrt{\frac{\left[\mathbb{E}[(X \wedge R)^2] + \varsigma\mathbb{E}^2(X \wedge R)\right]^3}{\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)}}$$

Ó equivalentemente

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\mathbb{E}[(X\wedge R)^2]}{\mathbb{E}(X\wedge R)} + \frac{q}{x\mathbb{E}(X\wedge R)}\sqrt{\frac{[\mathbb{E}[(X\wedge R)^2]+\varsigma\mathbb{E}^2(X\wedge R)]^3}{\mathbb{E}(X^2)+\varsigma\mathbb{E}^2(X)}} \\
&= -\varsigma\mathbb{E}(X\wedge R) + \frac{\mathbb{E}[(X\wedge R)^2]+\varsigma\mathbb{E}^2(X\wedge R)}{\mathbb{E}(X\wedge R)}\left[1+\frac{q}{x}\sqrt{\frac{\mathbb{E}[(X\wedge R)^2]+\varsigma\mathbb{E}^2(X\wedge R)}{\mathbb{E}(X^2)+\varsigma\mathbb{E}^2(X)}}\right] \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

donde $q=\frac{\lambda_x-\lambda_q}{\lambda_q}\in(0,\infty)$.

Nótese que esta expresión sólo depende de R y no de c, donde ambos son desconocidos. Para encontrar una solución factible para c y R, se puede aplicar el siguiente algoritmo:

(i) Resolver la ecuación (2.13) para R.

(ii) Verificar con la ecuación (2.10) si el correspondiente valor de c es menor ó igual que 1. Si $c<1$, se puede tomar a dicho R y su correspondiente c como solución óptima combinada. Si $c=1$, se resuelve la ecuación (2.11) para R.

2.5.3. *Stop-loss* como un caso particular del exceso de pérdida

Si el número de reclamaciones es fijo, i.e. $\varsigma=-1$ y $N=n$, entonces la protección exceso de pérdida se reduce a una suma asegurada de protecciones *stop-loss*. Para $n=1$, el exceso de pérdida se reduce a un *stop-loss*.

Como antes, el riesgo retenido es igual a $I_g^{c,R}=\sum_{i=0}^n(cX_i\wedge cR)=c\sum_{i=0}^n(X_i\wedge R)$. DE aquí que

$$\mathbb{E}[I_g^{c,R}]=c\cdot n\mathbb{E}(X\wedge R)$$

y

$$Var(I_g^{c,R})=c^2\left[n\mathbb{E}[(X\wedge R)^2]-n\mathbb{E}^2(X\wedge R)\right]$$

Estas expresiones hacen evidente que se tiene una formulación análoga a la del *stop-loss*, excepto por el múltiplo no aleatorio n.

2.5.3.1. Stop-loss después de un cuota-parte

La ecuación (2.9) se convierte en

$$P=\mathbb{E}(X\wedge P)+\frac{Var(X\wedge P)}{\mathbb{E}(X\wedge P)-q\cdot\mathbb{E}(X)},\ q=\frac{\lambda_s-\lambda_q}{\lambda_s}\in[0,1] \qquad (2.14)$$

Esto implica que la prioridad *stop-loss* óptima es independiente de la protección cuota-parte y tampoco depende de la restricción de la varianza (en el caso de que el P obtenido tenga un corresponiente $c \leq 1$).

Observación 2.5.3.

Si en la ecuación (2.14) se hace $P \to \infty$, entonces el lado izquierdo tiende a ∞ y el lado dererecho está acotado (si $q < 1$). Por tanto, para $x < 1$, siempre se utilizará el *stop-loss*. $\triangledown$

La restricción de la varianza se convierte en

$$c = x\frac{\sigma(X)}{\sigma(X \wedge P)}, x \in [0,1], c \in [x,1] \tag{2.15}$$

2.5.3.2. Cuota-parte después de un stop-loss

La ecuación (2.12) se convierte en

$$c = q \cdot \frac{Var(X \wedge P)}{P \cdot \mathbb{E}(X \wedge P) - \mathbb{E}[(X \wedge P)^2]},\ q = \frac{\lambda_s - \lambda_q}{\lambda_q} \in [0, \infty) \tag{2.16}$$

Y como $\mathbb{E}[(X \wedge P)^2] \leq \mathbb{E}(X \wedge P)$, se cumple que $c \geq 0$.

Observación 2.5.4.

Nótese que si en la ecuación (2.16) se hace $P \to \infty$, entonces el lado derecho de la ecuación tiende a 0 y el lado izquierdo es la constante $c \in (0, \infty)$. Por tanto, para $x < 1$, siempre se utilizará el stop-loss; excepto si $c = 0$ (en este caso $x = 0$) $\triangledown$

Finalmente, la ecuación (2.13) se convierte en

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mathbb{E}[(X \wedge P)^2]}{\mathbb{E}(X \wedge P)} + \frac{q}{x\mathbb{E}(X \wedge P)}\sqrt{\frac{Var^3(X \wedge P)}{Var(X)}} \\ &= \mathbb{E}(X \wedge P) + \frac{Var(X \wedge P)}{\mathbb{E}(X \wedge P)}\left[1 + \frac{q}{x}\sqrt{\frac{Var(X \wedge P)}{Var(X)}}\right],\ q = \frac{\lambda_s - \lambda_q}{\lambda_q} \in [0, \infty) \end{aligned}$$

que es interesante pues en esta ecuación sólo hay dependencia del parámetro desconocido P y es independiente de c.

2.6. *Surplus* y cuota-parte

Como las protecciones cuota-parte y *surplus* son proporcionales, cuando se combinan entonces el principio de primaje de la media constante no es importante.

La descripción de esta combinación se puede hacer desde un contexto del modelo individual y del modelo colectivo. Por congruencia con las otras combinaciones se hará desde el contexto del modelo colectivo.

En este caso, para cualesquiera $c, k, L > 0$ se satisface que

$$c \cdot X_L^{(k)} = \begin{cases} c \cdot X^{(k)} & \text{si } k \leq L \\ c \cdot \frac{L}{k} X^{(k)} & \text{si } k > L \end{cases} = \begin{cases} (cX)^{(k)} & \text{si } k \leq L \\ \frac{cL}{ck}(cX)^{(k)} & \text{si } k > L \end{cases}$$

Entonces, se puede concluir que $cX_L^{(k)} = (cX)_{cL}^{(k)}$ y por tanto $cX_L = (cX)_{(cL)}$. Esta expresión establece que el orden de aplicación de la combinación cuota-parte y *surplus* no tiene influencia en el riesgo retenido.

Se supondrá que el reaseguro *surplus* tiene una retención L (expresada en términos del 100 % del tamaño la reclamación) y una retención c del cuota-parte.

Se denotará por $X_L^{(k)}$ al riesgo individual retenido con una exposición k después de la retención *surplus* L y se denotará por X_L a la combinación de todos los riesgos retenidos.

El portafolio de riesgos retenido después de la retención surplus L y la retención cuota-parte c está dada por

$$I_g^{c,L} = c\sum_{i=0}^{N}(X_L)_i = \sum_{i=0}^{N}(c \cdot X_L)_i = \sum_{i=0}^{N}[(cX)_{cL}]_i \tag{2.17}$$

2.6.1. *Surplus* después de un cuota-parte

A partir de la expresión para el portafolio de riesgo retenido (2.17), la esperanza y varianza de dicho portafolio están dadas por

$$\mathbb{E}[I_g^{c,L}] = c\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_L)$$

$$Var(I_g^{c,L}) = c^2\mathbb{E}(N)\left[\mathbb{E}[X_L^2] + \frac{Var(N) - \mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(N)}\mathbb{E}^2(X_L)\right]$$

El costo total de reaseguro es $(1 - c)(1 + \lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ para el cuota-parte más $(1 + \lambda_e)c\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X_L)]$ que es la parte del *surplus* después de cuota-parte

Notación 2.6.1.

- $DQS_1 := \mathbb{E}[I_g^{c,L}]$
- $DQS_2 := Var(I_g^{c,L})$
- $DQS_3 := (1-c)(1+\lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$
- $DQS_4 := (1+\lambda_e)c\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X_L)]$
- $\varsigma := \frac{Var(N)-\mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(N)}$

$\triangledown$

En este caso, $\Psi(c, L) = \eta \cdot DQS_2 - [DQS_1 + DQS_3 + DQS_4]$, entonces la ecuaciones de Lagrange están dada por

$$\frac{\partial}{\partial w_j}\Psi(c, L) = \eta\frac{\partial}{\partial w_j}DQS_2 - \frac{\partial}{\partial w_j}[DQS_1 + DQS_3 + DQS_4],\ w_1 = c,\ w_2 = L$$

Entonces,

$$L = \left[-\varsigma\mathbb{E}(X_L) + \frac{\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)}{\mathbb{E}(X_L) - Q\mathbb{E}(X)}\right]\frac{\int_L^\infty \mathbb{E}[Y^{(k)}]f_K(k)dk}{\int_L^\infty \mathbb{E}[(Y^{(k)})^2]f_K(k)dk} \tag{2.18}$$

donde para todo $k > 0$, $Y^{(k)} = \frac{X^{(k)}}{k}$ y $Q = \frac{\lambda_e - \lambda_q}{\lambda_e}$.

Obsérvese que la prioridad *surplus* óptima es independiente de la protección cuota-parte y de la restricción de la varianza (Si la L que se obtiene hace que $c \leq 1$).

La última ecuación es muy parecida a la que se obtuvo para el caso de exceso de pérdida (si en la ecuación (2.9) se intercambia R por L). Si se interpreta al numerados como una varianza normalizada del portafolio, entonces la diferencia más significativa es la que se debe al cociente de las integrales.

La restricción de la varianza $Var(I_g^{a,L}) = x^2 Var(X),\ x \in [0, 1]$ se convierte en

$$c^2\left[\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)\right] = x^2\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X), x \in [0, 1], c \in [0, 1] \tag{2.19}$$

Si no hubiese protección cuota-parte, i.e. $c = 1$, sólo se tendría que resolver la siguiente ecuación con respecto a L

$$\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L) = x^2\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X) \tag{2.20}$$

Observación 2.6.1.

En general, la varianza del portafolio retenido después de una protección *surplus* es una función no-decreciente de L; entonces la ecuación (2.20) no necesariamente tiene solución única. Sin embargo, si se supone que $\varsigma \in [-1, \infty)$ entonces la derivada siempre será positiva, se tendrá decreciemiento estricto y por tanto solución única. También, a partir de la ecuación (2.18) se establece que el conjunto de soluciones factibles para L debe cumplir $\mathbb{E}(X_L) > Q\mathbb{E}(X)$ para que se satisfaga que $Q\frac{\mathbb{E}(X)}{(E)(Y)} < L$. ∇

Para encontrar una solución factible para c y L, se puede aplicar el siguiente algoritmo:

(i) Resolver la ecuación (2.18) para L en el conjunto $\{L \in \mathbb{R} : L > L^*, \mathbb{E}(X_L) - q \cdot \mathbb{E}(X) = 0\}$

(ii) Verificar con la ecuación (2.19) si el correspondiente valor de c es menor ó igual que 1. Si $c < 1$, se puede tomar a dicho L y su correspondiente c como solución óptima combinada. Si $c = 1$, se resuelve la ecuación (2.20) para L.

2.6.2. Cuota-parte después de *Surplus*

El riesgo retenido es igual a

$$I_g^{c,L} = c\sum_{i=0}^{N}(X_L)_i = \sum_{i=0}^{N}(cX_L)_i = \sum_{i=0}^{N}[(cX)_{cL}]_i$$

De aquí que $DQS_1 := DSQ_1$ y $DQS_2 := DSQ_2$ como se estableció en la sección anterior.

El costo total de reaseguro es igual a $(1 + \lambda_e)\mathbb{E}(N)[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X_L)] =: DSQ_3$ para el *surplus* (antes del cuota-parte) más el cuota-parte $(1 - c)(1 + \lambda_q)\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_L) =: DSQ_4$.

En este caso, $\Psi(c, L) = \eta \cdot DSQ_2 - [DSQ_1 + DSQ_3 + DSQ_4]$, entonces la ecuaciones de Lagrange están dada por

$$\frac{\partial}{\partial w_j}\Psi(c, L) = \eta\frac{\partial}{\partial w_j}DSQ_2 - \frac{\partial}{\partial w_j}[DSQ_1 + DSQ_3 + DSQ_4], \; w_1 = c, \; w_2 = L$$

Entonces,

$$c = Q[\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)]\left[L\frac{\int_L^\infty \mathbb{E}[(Y^{(k)})^2]f_K(k)dk}{\int_L^\infty \mathbb{E}[Y^{(k)}]f_K(k)dk}\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X_L^2)\right]^{-1}, \tag{2.21}$$

donde $Q = \frac{\lambda_e - \lambda_q}{\lambda_q} \in (0, \infty)$.

Observación 2.6.2.

En esta expresión, la retención del cuota-parte puede ser negativa, por tanto L debe satisfacer que

$$L\frac{\int_L^\infty \mathbb{E}[(Y^{(k)})^2]f_K(k)dk}{\int_L^\infty \mathbb{E}[Y^{(k)}]f_K(k)dk}\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X_L^2) > 0$$

Esta es una condición técnica bastante complicada de probar en general. A partir de ahora, se supondrá que dicha condición se cumple. $\triangledown$

La restricción de la varianza $Var(I_g^{c,L}) = x^2 \cdot Var(X),\ x \in [0,1]$ en este caso toma la forma

$$\left[L\frac{\int_L^\infty \mathbb{E}[(Y^{(k)})^2]f_K(k)dk}{\int_L^\infty \mathbb{E}[Y^{(k)}]f_K(k)dk}\mathbb{E}(X_L) - \mathbb{E}(X_L^2)\right]^2 = \frac{Q^2}{x^2}\frac{[\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)]^3}{\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)}$$

Como se está suponiendo que las expresión entre corchetes es estrictamente positiva, entonces

$$\left[1 + \frac{Q}{x}\sqrt{\frac{\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)}{\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)}}\right]$$

$$L\frac{\int_L^\infty \mathbb{E}[(Y^{(k)})^2]f_K(k)dk}{\int_L^\infty \mathbb{E}[Y^{(k)}]f_K(k)dk} = -\varsigma\mathbb{E}(X_L) + \frac{\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)}{\mathbb{E}(X_L)}\left[1 + \frac{Q}{x}\sqrt{\frac{\mathbb{E}(X_L^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X_L)}{\mathbb{E}(X^2) + \varsigma\mathbb{E}^2(X)}}\right] \tag{2.22}$$

donde $Q = \frac{\lambda_e - \lambda_q}{\lambda_q} \in (0, \infty)$.

La última ecuación es muy parecida a la que se obtuvo para el caso de exceso de pérdida (si en la ecuación (2.13) se intercambia R por L). Si se interpreta al numerados como una varianza normalizada del portafolio después de una protección *surplus*, entonces la diferencia más significativa es la que se debe al cociente de las integrales.

Para encontrar una solución factible para c y L, se puede aplicar el siguiente algoritmo:

(i) Resolver la ecuación (2.22) para L.

(ii) Verificar con la ecuación (2.21) si el correspondiente valor de c es menor ó igual que 1. Si $c < 1$, se puede tomar a dicho L y su correspondiente c como solución óptima combinada. Si $c = 1$, se resuelve la ecuación (2.20) para L.

2.7. La varianza como medida de riesgo en el reaseguro óptimo

Ya se dijo en los capítulos anteriores que el reaseguro es la transferencia de riesgo de una aseguradora (directa) a una segunda entidad de seguros: una reaseguradora.

Los ejemplos más conocidos son el *cuota-parte* y el *stop-loss*. En el reaseguro *cuota-parte*, la reaseguradora cubre parte de la reclamación X, esta parte está dada por $g_q(X) := c \cdot X$, donde $c \in (0, 1)$ es un parámetro y en el reaseguro *stop-loss*, $g_{sl}(X) := (X - d)_+$, donde $d \geq 0$ también es un parámetro.

Proposición 2.7.1.

La aplicación $g \longmapsto \mathrm{Var}(X - g(X)) = \mathrm{Var}(I_g(X))$ sujeto a que $\pi = \mathrm{Var}(g(X))$ se minimiza si $g^*(X) = cX$, i.e un *cuota-parte* donde $\pi > 0$ es un número fijo que se interpreta como la prima que se paga al reasegurador.

Proposición 2.7.2. *(Daykin et. al. 1994)*

La función $g_{sl}(t) = (t - d)_+$ es la solución al problema de minimización

$$\min\{\mathrm{Var}(X - g(X))\} \text{ sujeto a la condición } \pi = (1 + \rho)\mathbb{E}(g(X))$$

donde, como antes,$\rho > 0$ se conoce como *safety loading*.

La idea de esta sección o es obtener reaseguro óptimo bajo otros principios de primaje basados en la media y la varianza por parte de la reaseguradora.

Ya en el capítulo 1 se dieron dos principios de primaje que son muy utilizados en la práctica. Dichos principios son

$$\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))} \text{ y } \pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\mathrm{Var}(g(X))$$

y éstos se conocen como principios de la desviación y la varianza, respectivamente. También se definieron algunos otros principios como

1. El principio mixto
$$\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\frac{\mathrm{Var}(g(X))}{\mathbb{E}(g(X))}$$

2. El principio modificado
$$\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta_1\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))} + \beta\mathrm{Var}(g(X))$$

Estos principios son de la forma

$$\mathbb{E}(g(X)) = \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}(g(X))})$$

donde $\xi : (0,\infty) \times [0, t_\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} < t_\pi \leq \infty$ y se satisfacen las siguientes características:

(i*) $\xi(\pi, 0) = \pi$

(ii*) $t \mapsto \xi(\pi, t)$ es no-creciente, cóncava y diferenciable.

La condición (i*) está relacionada con la propiedad de ausencia de *safety loading* injustificado.

Si π_X^* denota a la solución de la ecuación $\mathbb{E}(X) = \xi(x, \sqrt{\mathrm{Var}(X)})$ en $x > 0$, entonces (i*) implica que $\pi_c^* = c$ para cualquier $c > 0$.

Definición 2.7.1. *(Función óptima)*

Se dice que una función g es óptima si es una solución del siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{mín} \sqrt{\mathrm{Var}(X - g(X))} \text{ sujeto a } \mathbb{E}(g(X)) = \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}) \\ &0 \leq g(x) \leq x \text{ para todo } x \geq 0 \end{aligned}$$

Más adelante se demostrará que las funciones óptimas son de la forma $g^*(x) = c\,(x-d)_+$ con $c \in (0,1]$, $d \geq 0$. Este tipo de reaseguro se conoce como reaseguro *change-loss*.

2.7.1. Reaseguro global

Sea X una variable aleatoria no-negativa de pérdida y supóngase que $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$.

Notación 2.7.1.

$\sup(X) = \sup\{x \in \mathbb{R} : S_X(x) > 0\}$. $\triangledown$

El objetivo es encontrar una regla que minimice el riesgo de la cedente, medida en términos de la varianza de $X - g(X)$ sujeto a la restricción de que $g \in \mathcal{G}(\xi)$ donde

$$\mathcal{G}(\xi) = \left\{ g : \mathbb{E}(g(X)) = \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}), 0 \leq g(x) \leq x \text{ para todo } x \geq 0 \right\}$$

De aquí que se tiene el problema de optimización

$$\min_{g\in\mathcal{G}(\xi)} \{\mathrm{Var}(X-g(X))\} \tag{3}$$

Teorema 2.7.1.

1. Si existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que

   (i) $c \in (0,1], d \in (0, \sup(x))$

   (ii) $-\mathbb{E}\left[(d-X)_+\right] = \xi_2'(\pi, c\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)}) = (1-c)\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)}$ donde $\xi_2'(\pi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\xi(\pi,t)$

   (iii) $c\mathbb{E}\left[(X-d)_+\right] = \xi(c, \sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)})$

   Entonces $g^*(x) = c\,(x-d)_+$ es una solución al problema (3)

2. Si $\mathbb{E}(X) > \xi(\pi, \sigma_x)$, entonces existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que cumplen (i), (ii) y (iii).

Demostración:

1. Nótese que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X-g(X)) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(-g(X)) + 2\mathrm{Cov}(x, -g(X))\\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(g(X)) - 2\mathrm{Cov}(X, g(X))\end{aligned}$$

También obsérvese que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, g(X)) &= \mathrm{Cov}(X-d, g(X))\\ &\leq \mathrm{Cov}((X-d)_+, g(X)) + \mathbb{E}(g(X))\left[\mathbb{E}[(X-d)_+] - \mathbb{E}(X-d)\right]\end{aligned}$$

y como $\mathbb{E}[(X-d)_+] - \mathbb{E}(X-d) = \mathbb{E}[(d-X)_+]$ entonces

$$\mathrm{Cov}(X, g(X)) \leq \mathrm{Cov}((X-d)_+, g(X)) + \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}[(d-X)_+] \tag{5}$$

donde (5) se convierte en igualdad si $g(x) = 0$ para $x \in [0, d]$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X-g(X)) \geq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(g(X)) - 2\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)\mathrm{Var}(g(X))}\\ - 2\mathbb{E}[(d-X)_+]\xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}(g(X))})\end{aligned}$$

Si se define $t = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(g(X))}{\mathrm{Var}((X-d)_+)}}$ se tiene que

$$\mathrm{Var}(X-g(X)) \geq \mathrm{Var}(X)+(t^2-2t)\mathrm{Var}((X-d)_+)-2\mathbb{E}[(d-X)_+]\xi(\pi, t\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)}) \quad (6)$$

y (6) se convierte en igualdad si $g(x) = c\,(x-d)_+$, por las hipótesis (ii*) y (ii) el lado derecho de (6) es una función en t convexa que alcanza su mínimo en $t = c$.

Por (i) y (iii) se puede concluir que $g^* \in \mathcal{G}(\xi)$; y de aquí que para cada $g \in \mathcal{G}(\xi)$

$$\mathrm{Var}(X-g(X)) \geq \mathrm{Var}(X-g^*(X))$$

2. Ahora, se demostrará que existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que se cumplen (i),(ii) y (iii) del inciso 1.

   Para $s \in [0, b_1]$, $t \in [0,1]$, defínase $\mathcal{C}(s,t) := t\mathbb{E}[(X-s)_+] - \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}((X-s)_+)})$, donde $b_1 \in \mathbb{R}$ es tal que $\mathcal{C}(b_1, 1) = 0$.

   Nótese que $\mathcal{C}(0,1) = \mathbb{E}(X_+) - \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}(X_+)}) > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \mathcal{C}(b,1) &= \lim_{b\to\infty} \left\{\mathbb{E}[(X-b)_+]\right\} - \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}((X-b)_+)}) \\ &= 0 - \xi(\pi,0) = -\pi < 0\end{aligned}$$

   y la aplicación $s \mapsto \mathcal{C}(s,1)$ es continua, entonces existe $b_1 \in (0, \sup(X))$.

   Por la convexidad en (ii*), para cada $s \in [0, b_1]$, existe un único punto t_s tal que $\mathcal{C}(s, t_s) = 0$ y como $\mathcal{C}$ es continua, entonces la aplicación $s \mapsto t_s$ es continua.

   Ahora, para $s \in [0, b_1], t \in [0,1]$ defínase

$$\gamma(s,t) = \mathrm{Var}(X) + (t^2-2t)\mathrm{Var}((X-s)_+) - 2\mathbb{E}[(s-X)_+]\xi(\pi, t\sqrt{\mathrm{Var}((X-s)_+)})$$

   Como para cada $s \in [0, b_1]$ la función $\gamma(s,t)$ es estrictamente convexa en t, existe un único punto τ_s tal que $\gamma(s,\tau_s) = \min_{t\in[0,1]} \gamma(s,t)$.

   Nótese que $\tau_0 = 1$ y que la aplicación $s \mapsto \tau_s$ ($s \in [0, b_1]$) es continua ya que $\gamma_2'(s,t)$ es continua.

   Entonces se tiene que $0 < t_0 < 1 = \tau_0$ y $t_{b_1} = 1$, de aquí que existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $d \in (0, b_1)$, $c \in (0,1]$ y $c = t_d = \tau_d$.

$\square$

Lema 2.7.1.

Si se cumplen las condiciones (i), (ii) y (iii) y $F_X(d) > 0$, entonces $\mathbb{E}(X) > \xi(\pi, \sigma_X)$.

Demostración:
Como $\mathrm{Var}((x-d)_+) \leq \mathrm{Var}(X)$ y $\mathbb{E}((x-d)_+) \leq \mathbb{E}(X)$ entonce

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) \geq c\mathbb{E}(X) \quad &> c\mathbb{E}[(x-d)_+] = \xi(\pi, c\sqrt{\mathrm{Var}((x-d)_+)})) \\ &\geq \xi(\pi, c\sigma_X) \geq \xi(\pi, \sigma_X)\end{aligned}$$

$\square$

Otra perspectiva importante en problemas de reaseguro óptimo es la que propusieron Deprez & Gerber (1985). Deprez & Gerber decían que una función de pérdida cedida es óptima si maximiza la esperanza de la función de utilidad de la cedente sobre el espacio de todas las reglas de cesión de riesgo. i.e

$$\text{maximizar } \mathbb{E}\left[u\left(g(X) - H(g(X)) - X\right)\right] \text{ sobre todo } g(X)$$

donde $H(g(X))$ es un principio de primaje convexo y con derivada de Gâteaux, y u es una función no-decreciente y cóncava.

Young (1999) generalizó los trabajos de Deprez & Gerber (1985) para cubrir el principio de primaje de Wang (ya que este principio no es Gâteaux-derivable).

Ejemplo 2.7.1. *(Principio de primaje del valor esperado, Pesonen (1984))*

Supóngase que $\pi = (1+\rho)\mathbb{E}(g(X))$, donde $\rho > 0$ es el coeficiente de *safety-loading*. En este caso, $\xi(\pi, t) = \frac{\pi}{1+\rho}$. Por el Teorema anterior, $g^*(x) = (X-d)_+$ es una función de retención óptima si $\pi = (1+\rho)\mathbb{E}[(X-d)_+]$, que en este caso se cumple. $\triangledown$

Ejemplo 2.7.2. *(Principio de la desviación estándar, Gajek & Zagrodny (2000))*

Supóngase que $\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}$, $\beta > 0$. Entonces $\xi(\pi, t) = \pi - \beta t$. De nuevo, por el Teorema 1, si $\mathbb{E}(X) + \beta\sigma_X > \pi$, entonces una función de pérdida cedida óptima está dada por $g^*(x) = c\,(X-d)_+$, donde $c, d \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$-\beta\mathbb{E}[(d-X)_+] + (1-c)\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)} = 0$$

y

$$c\mathbb{E}[(X-d)_+] + c\beta\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)}$$

$\triangledown$

Ejemplo 2.7.3. *(Principio de la varianza)*

Supóngase que $\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\mathrm{Var}(g(X))$, $\beta > 0$. También se supondrá que $\mathbb{E}(X) + \beta\sigma_X^2 > \pi$. Entonces, una función de pérdida cedida óptima está dada por $g^*(x) = c\,(x-d)_+$, donde $c, d \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$-2c\beta\mathbb{E}((d-X)_+) + 1 - c = 0, \quad \text{y } c\mathbb{E}[(X-d)_+] + c^2\beta\mathrm{Var}((X-d)_+) = \pi$$

$\triangledown$

Ejemplo 2.7.4. *(Principio de la varianza modificada)*

Supóngase que $\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\frac{\mathrm{Var}(g(X))}{\mathbb{E}(g(X))}$, $\beta > 0$. Entonces $\xi(\pi, t) = \frac{1}{2}(\pi + \sqrt{\pi^2 + 4\beta t^2})$ para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right]$. Si $2\sqrt{\beta}\sigma_X < \pi < \mathbb{E}(X) + \beta\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)}$, entonces $g^*(X) = c\,(x-d)_+$ es una función de pérdida cedida óptima, donde $c, d \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$-2c\beta\mathbb{E}[(d-X)_+] + (1-c)\sqrt{\pi^2 - 4\beta c^2\mathrm{Var}((X-d)_+)} = 0$$

y

$$c\mathbb{E}((X-d)_+) + c\beta\frac{\mathrm{Var}((X-d)_+)}{\mathbb{E}[(X-d)_+]} = \pi$$

$\triangledown$

2.7.2. Reaseguro local

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sea N una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{E}(N) < \infty$ e independiente de $X_1, X_2, \ldots$. De la manera clásica en teoría de riesgo $X_1, X_2, \ldots$, se interpretan como una sucesión de reclamaciones en un periodo de tiempo y N el número de relamaciones sobre ese periodo. Considérese un reaseguro local con la misma función de pérdida cedida g, i.e cada reclamación se dividirá entre la cedente y la reaseguradora de tal forma que para una reclamación de tamaño X_i, la reaseguradora tome $g(X_i)$. La (re)aseguradora querrá una estructura de reaseguro que minimice la varianza de su responsabilidad sujeto a las restricciones $0 \leq g(x) \leq x$ y $\mathbb{E}(g(X)) = \xi(\pi, \sqrt{\mathrm{Var}(g(X))})$.

El problema de minimización correspondiente está dado por

$$\min_{g\in\mathcal{G}(\xi)} \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) \tag{8}$$

El problema (4.37) se puede estudiar de manera análoga al problema (3), ya que

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) = \mathbb{E}(N)\operatorname{Var}(X - g(X)) + (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(g(X)))^2 \operatorname{Var}(N)$$

Para $t \in [0,1]$, $s \geq 0$ sea

$$\begin{aligned}\gamma(s,t) = \mathbb{E}(N)\Big(&\operatorname{Var}(X) + (t^2 - 2t)\operatorname{Var}((X-s)_+) - 2\mathbb{E}((s-X)_+)\xi(\pi, t\sqrt{\operatorname{Var}((X-s)_+)})\Big)\\ &+ \operatorname{Var}(N)\Big(\mathbb{E}(X) - \xi(\pi, t\sqrt{\operatorname{Var}((X-s)_+)})\Big)^2\end{aligned}$$

Teorema 2.7.2.

1. Si existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que

   (i) $c \in (0,1]$, $d \in (0, \sup(X))$

   (ii) $\gamma_2'(d,c) = 0$, donde $\gamma_2'(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}\gamma(s,t)$

   (iii) $c\mathbb{E}((X-d)_+) = \xi(\pi, \sqrt{\operatorname{Var}((X-d)_+)})$

   Entonces $g^*(x) = c\,(x-d)_+$ es una solución del problema (4.37).

2. Si $\mathbb{E}(X) > \pi$ y $-\xi_2'(\pi, t_0\sigma_X) \leq \frac{\mathbb{E}(N)\sigma_X}{\operatorname{Var}(N)\mathbb{E}(X)}$ donde $t_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $t_0\mathbb{E}(X) = \xi(\pi, t_0\sigma_X)$, entonces existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que cumplen (i), (ii) y (iii).

Demostración:

1. Notando que

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) = \mathbb{E}(N)\operatorname{Var}(X - g(X)) + (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(g(X)))^2 \operatorname{Var}(N)$$

con argumentos análogos a los del Teorema anterior se tiene que Var $\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) \geq \gamma(d,t)$ para cualquier $g \in \mathcal{G}(\xi)$ y $t \in [0,1]$. Esta desigualdad se convierte en igualdad si $g(x) = c\,(x-d)_+$ con c que haga que g pertenezca a $\mathcal{G}(\xi)$.

Nótese que para cualesquiera $t, d \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}(X) - \xi(\pi, t\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)}) \geq \mathbb{E}(X) - \xi(\pi, 0) = \mathbb{E}(X) - \pi > 0$$

Por tanto, la aplicación $t \mapsto \gamma(d,t)$ es convexa ($t \geq 0$) y por (ii), para cada $g \in \mathcal{G}(\xi)$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) \geq \gamma(d,c) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g^*(X_i))\right)$$

i.e

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g^*(X_i))\right) \leq \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right)$$

2. La demostración de esta parte es análoga a la del Teorema anterior, sin embargo τ_0 ahora no necesariamente es 1 y se supondrá que $t_0 < \tau_0$ i.e $\gamma_2'(0,t_0) \leq 0$, que es equivalente a

$$-\mathrm{Var}(N)\left[\mathbb{E}(X) - \xi(\pi, t_0\sigma_X)\right]\xi_2'(\pi, t_0\sigma_X) \leq \mathbb{E}(N)\sigma_X(1-t_0) \qquad (16)$$

Como $t_0\mathbb{E}(X) = \xi(\pi, t_0\sigma_X)$ para $t_0 < 1$ y

$$-\xi_2'(\pi, t_0\sigma_X) \leq \frac{\mathbb{E}(N)\sigma_X}{\mathrm{Var}(N)\mathbb{E}(X)}$$

Entonces se cumple (16)

□

Ejemplo 2.7.5. *(Principio de la desviación estándar)*

Supóngase que $\pi = \mathbb{E}(g(X)) + \beta\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}$, $\mathbb{E}(X) > \pi$ y $\beta \in \left[0, \frac{\mathbb{E}(N)\sigma_X}{\mathrm{Var}(N)\mathbb{E}(X)}\right]$. Una función de pérdida cedida óptima esta dada por $g^*(x) = c\,(x-d)_+$, donde $c, d \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$-\mathbb{E}[(d-X)_+]\beta + \frac{\mathbb{E}(X) - \pi + c\beta\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)}\sigma_N^2}{\mathbb{E}(N)} + (1-c)\sqrt{\mathrm{Var}((X-d)_+)} = 0$$

y

$$c\mathbb{E}[(X-d)_+ + c\beta\mathbb{E}[(X-d)_+]] = \pi$$

$\triangledown$

Ahora, se estudiará el problema (4.37)

$$\min_{g\in\mathcal{G}(\xi)} \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) \tag{8}$$

pero con una restricción más "relajada" que $g \in \mathcal{G}(\xi)$ i.e

$$\mathbb{E}(g(X)) = \xi(\pi, \sqrt{\operatorname{Var}(g(X))}) \text{ y } 0 \le g(x) \le x$$

i.e se considerará el siguiente problema de optimización

$$\min_{g\in\mathcal{G}_{\mathbb{E}}(\xi)} \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) \tag{17}$$

donde

$$g \in \mathcal{G}_{\mathbb{E}}(\xi) = \left\{g : 0 \le \mathbb{E}(g(X)) \le \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(g(X)) = \xi(\pi, \sqrt{\operatorname{Var}(g(X))})\right\}$$

Claramente $\mathcal{G}(\xi) \subseteq \mathcal{G}_{\mathbb{E}}(\xi)$ de aquí que la regla óptima g^{**}, induce a un riesgo más pequeño que g^* en el primer Teorema de esta sección.

Teorema 2.7.3.

Si $\mathbb{E}(N^2) < \infty$ y la aplicación

$$t \mapsto (1-t)^2\,\mathbb{E}(N)\sigma_X^2 + (\mathbb{E}(X) - \xi(\pi, t\sigma_X))^2\,\sigma_N^2$$

alcanza su mínimo en $t = c$, bajo la restricción $0 \le \xi(\pi, t\sigma_X) \le \mathbb{E}(X)$.
Entonces la solución al problema (4.12) está dada por

$$g^{**}(x) = c\,(x - \mathbb{E}(X))_+ + \xi(\pi, c\sigma_X)$$

Demostración:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X - g(X)) &= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(g(X)) - 2\operatorname{Cov}(X, g(X)) \\ &\ge \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(g(X)) - 2\sigma_X\sigma_{g(X)} = \left(\sigma_X - \sigma_{g(X)}\right)^2\end{aligned}$$

i.e $\mathrm{Var}(X-g(X)) \geq \left(\sigma_X - \sigma_{g(X)}\right)^2$ y la igualdad se da si $g(x) = tx+s$ para algunos $s, t \in \mathbb{R}$.

Entonces, para cualquier $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{E}}(\xi)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right) &\geq \mathbb{E}(N)\left(\sigma_X - \sigma_{g(X)}\right)^2 + \sigma_N^2\left(\mathbb{E}(X) - \xi(\pi, \sigma_{g(X)})\right)^2 \\
&\geq (1-c)^2\mathbb{E}(N)\sigma_X^2\left(\mathbb{E}(X) - \xi(\pi, c\sigma_X)\right)^2 = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g^{**}(X_i))\right)
\end{aligned}$$

i.e

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g^{**}(X_i))\right)^2 \leq \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - g(X_i))\right)^2$$

y como $g^{**} \in \mathcal{G}_{\mathbb{E}}(\xi)$ entonces se cumple el resultado. □

Ejemplo 2.7.6.

Supóngase que $\pi = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{\mathrm{Var}(g(X))}$ por el Teorema anterior, se tiene que la regla de reaseguro óptimo está dada por

$$g^{**}(x) = c(x - \mathbb{E}(X) - \beta\sigma_X) + \pi$$

donde c minimiza $(1-t)^2\,\mathbb{E}(N)\sigma_X^2\left(\mathbb{E}(X) - \pi + t\beta\sigma_X\right)^2$ con respecto a $t \in \left[\frac{\pi-\mathbb{E}(X)}{\beta\sigma_X}, \frac{\pi}{\beta,\sigma_X}\right]$.
$\triangledown$

Capítulo 3

Medidas de riesgo

3.1. Introducción

Generalmente los agentes económicos que se encuentran en una situación de riesgo tienen que evaluar y comparar sus posiciones financieras. Gracias a acuerdos internacionales como Basilea II y Solvencia II, las instituciones financieras y las compañíías de seguros deben estar atentos a la creación de reservas para hacer frente a los riesgos a los que se enfrentan, es decir, necesitan una cuantificación de riesgo asumido. Dichos riesgos pueden ser riesgos de mercado (cambio en el valor de un título), de crédito (riesgo de no cumplir sus compromisos financieros), operativo (fallo de los procesos internos ó externos) ó de modelo (por ejemplo, suponer rendimientos Gaussianos cuando no lo son).

La idea de este capítulo es estudiar un poco de la teoría tradicional de medidas de riesgo. Primero se revisará la definición axiomática de éstas, posteriormente se definirán el Valor en Riesgo (VaR), Valor en Riesgo de la Cola (TVaR), Valor en Riesgo Condicional (CVaR), y *Expected Shorfall* (ES). Después se generalizarán estas medidas particulares a partir de la transformada de Esscher, las medidas de riesgo de Wang y las medidas de riesgo por distorsión. Finalmente, se relacionarán algunas de estas medidas con el valor esperado de coberturas de reaseguro *stop-loss*.

3.2. Descripción axiomática de las medidas de riesgo

El estudio tradicional de las medidas de riesgo generalmente inicia con las condiciones que se tendrían que establecer para poder hablar de un orden parcial ó relación de preferencia en la que se construyan medidas de riesgo tales que

$$X \preceq Y \text{ si y sólo si } \rho(X) \leq \rho(Y),$$

donde, como antes, X representará el monto de una pérdida y se interpretará a $\rho(X)$ como el capital que se debe poseer para hacerle frente a la pérdida X. Es decir, ρ cuantifica el nivel de peligro inherente del riesgo X. Valores grandes de $\rho(X)$ indicarán que X es "peligroso" en cierto sentido (que se especificará más adelante).

Observación 3.2.1.

En este capítulo no se le dará una componente temporal a las variables de riesgo, y muchas de las definiciones se pueden extender para riesgos que evolucionan a través del tiempo de manera relativamente sencilla. $\triangledown$

Definición 3.2.1.

Una medida de riesgo es una función que se define en el espacio de las variables aleatorias y toma valores en $\mathbb{R}$.

Algunas propiedades naturales ó deseables de las medidas de riesgo son:

(i) **Invarianza en ley:** Si $X \stackrel{D}{=} Y$, entonces $\rho(X) = \rho(Y)$.

(ii) **No decrecimiento ó monotonía:** Si $X \geq Y$ c.s., entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

(iii) **Invarianza ante translaciones:** Para todo $k \in \mathbb{R}$, $\rho(X + k) = \rho(X) + k$.

(iv) **Homogeneidad:** Para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\rho(\lambda X) = \lambda \cdot \rho(X)$.

(v) **Sub-aditividad:** $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

(vi) **Convexidad:** Para todo $\beta \in [0, 1]$, $\rho(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta\rho(X) + (1 - \beta)\rho(Y)$.

Este enfoque constructivista ayudó al desarrollo de la Teoría de Decisiones con la definición axiomática de las medidas de riesgo ρ al definir los conceptos de coherencia y convexidad en las medidas de riesgo.

Observación 3.2.2.

Generalmente se considerarán medidas de riesgo invariantes en ley. $\triangledown$

En la ciencia actuarial hay cierto paralelismo entre las medidas de riesgo y los principios de tarificación que se revisaron en el Capítulo 1 (incluso hay cierta discusión sobre su origen histórico), las primeras muy relacionadas con cuestiones "financieras" y las segundas con la "industria aseguradora".

Definición 3.2.2.

(i) Se dice que una medida de riesgo es monetaria si es monótona e invariante ante translaciones.

(ii) Se dice que una medida de riesgo es convexa si es monetaria y convexa.

(iii) Se dice que una medida de riesgo es coherente si es monetaria, homogénea y sub-aditiva.

Proposición 3.2.1.

(i) Si ρ es una medida de riesgo invariante ante translaciones, entonces

$$\rho(X - \rho(X)) = 0$$

(ii) Si ρ es una medida de riesgo coherente, entonces $\rho(0) = 0$.

(iii) Si ρ es una medida de riesgo convexa y $\rho(0) = 0$, entonces

(a) Para $\lambda \in [0,1]$, $\quad \rho(\lambda X) \leq \lambda \cdot \rho(X)$.

(b) Para $\lambda \in [1,\infty)$, $\quad \rho(\lambda X) \geq \lambda \cdot \rho(X)$.

Demostración:

(i) Imediata.

(ii) $\rho(0) = \rho(0 \cdot X) = 0 \cdot \rho(X) = 0,$ pues $\rho(\cdot)$ es homogénea.

(iii) (a) Sea $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda X) &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)0) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(0) \\
&= \lambda\rho(X) + 0 \\
&= \lambda \cdot \rho(X).
\end{aligned}$$

$$\therefore \rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X).$$

(b) Sea $\lambda \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \rho(X) = \rho\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda X\right) &= \rho\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda X + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) 0\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\rho(\lambda X) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \rho(0) \\ &= \frac{1}{\lambda}\rho(\lambda X). \end{aligned}$$

Es decir, $\rho(X) \leq \dfrac{1}{\lambda}\rho(\lambda X)$, i.e. $\lambda \cdot \rho(X) \leq \rho(\lambda X)$

$\square$

Proposición 3.2.2.

Si ρ es una medida de riesgo monetaria y homogénea, entonces la convexidad y la sub-aditividad son equivalentes.

Demostración:

Sea ρ una medida de riesgo, monetaria y homogénea.

Si ρ es sub-aditiva, entonces para $\beta \in [0, 1]$ y X, Y riesgos,

$$\begin{aligned} \rho(\beta X + (1-\beta)Y) &\leq \rho(\beta X) + \rho((1-\beta)Y), \text{ pues } \rho \text{ es sub-aditiva} \\ &= \beta\rho(X) + (1-\beta)\rho(Y), \text{ pues } \rho \text{ es homogénea} \end{aligned}$$

Si ρ es convexa, entonces

$$\rho\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) \leq \frac{1}{2}\rho(X) + \frac{1}{2}\rho(Y)$$

de aquí que por la homogeneidad,

$$\frac{1}{2}[\rho(X+Y)] = \rho\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)$$

$$\therefore \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

□

Definición 3.2.3.

Sea ρ una medida de riesgo. Se define la región de riesgos aceptables por la medida ρ como

$$\mathcal{A} := \{X : \rho(X) \leq 0\}.$$

Definición 3.2.4.

Sea $\mathcal{A}$ una región de riesgos aceptables. Se define la medida de riesgo inducida por $\mathcal{A}$ como

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) := \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} : X - m \in \mathcal{A}\}.$$

Proposición 3.2.3.

Sea ρ una medida de riesgo monetaria.

(i) ρ es convexa si y sólo si $\mathcal{A}$ es convexo.

(ii) ρ es homogénea positivamente si y sólo si $\mathcal{A}$ es un cono.

Demostración:

(i) ($\Rightarrow$) Trivial
($\Leftarrow$) Supóngase que $\mathcal{A}$ es convexo. Sean X_1, X_2 variables aleatorias y m_1, m_2 números reales tales que $X_1 - m_1,\ X_2 - m_2 \in \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ es convexo, para todo $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda(X_1 - m_1) + (1 - \lambda)(X_2 - m_2) \in \mathcal{A}$$

Entonces $\quad \rho(\lambda(X_1 - m_1) + (1 - \lambda)(X_2 - m_2)) \leq 0,$

equivalentemente

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 - \lambda m_1 - (1-\lambda)m_2) \leq 0$$

De aquí que por la invarianza ante translaciones

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \leq \lambda m_1 + (1-\lambda)m_2$$

En particular, para $m_1 = \rho(X_1)$ y $m_2 = \rho(X_2)$

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho X_2$$

$$\therefore \rho \text{ es convexa .}$$

(ii) ($\Leftarrow$) Supóngase que $\mathcal{A}$ es un cono. Entonces para todo $X - m \in \mathcal{A}$ se cumple que $\lambda(X-m) \in \mathcal{A}$ (para $\lambda > 0$). Entonces $\rho(\lambda(X-m)) \leq 0$, y por la invarianza ante translaciones $\rho(\lambda X) \leq \lambda m$. En particular si $m = \rho(X)$, $\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$.

($\Rightarrow$) Si $X - m \notin \mathcal{A}$, entonces $\lambda(X-m) \notin \mathcal{A}$, por tanto $\rho(\lambda(X-m)) > 0$, i.e. $\rho(\lambda X) > \lambda m$. En particular para $m = \rho(X)$ se cumple que $\rho(\lambda X) > \lambda\rho(X)$

□

Definición 3.2.5.

Sean X, Y variables aleatorias. Se dice que X e Y son comonótonas si existe una variable aleatoria Z y transformaciones ϕ, ψ tales que $X \stackrel{D}{=} \phi(Z)$, $\quad Y \stackrel{D}{=} \psi(Z)$.

Proposición 3.2.4.

Sea ρ una medida de riesgo coherente. ρ es aditiva para riesgos comonótonos si y sólo si existe una función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ no-creciente tal que $\rho(X) = \displaystyle\int_0^1 g(t)F_X^{-1}(1-t)dt$.

Definición 3.2.6.

Sea ρ una medida de riesgo

(i) Se dice que ρ es aditiva para riesgos comonótonos si para X, Y comonótonos, $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

(ii) Se dice que ρ es de correlación máximal con respecto a una medida μ si para todo X, $\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}(X \cdot U) : U \sim \mu\}$.

(iii) Se dice que ρ es de coherencia fuerte si para cualesquiera X, Y
$\sup\{\rho(\tilde{X} + \tilde{Y})\} = \rho(X) + \rho(Y)$ donde $\tilde{X} \overset{D}{=} X$ y $\tilde{Y} \overset{D}{=} Y$

Proposición 3.2.5.

Sea ρ una medida de riesgo convexa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) ρ es de coherencia fuerte.

(ii) ρ es aditiva para riesgos comonótonos.

(iii) ρ es de correlación maximal.

Definición 3.2.7.

Sea u una función de utilidad cóncava y estrictamente creciente. Se dice que $\rho(X)$ es un equivalente cierto, asociado a una pérdida X, si se satisface

$$u(\rho(X)) = \mathbb{E}(u(X)) \text{ ó bien } \rho(X) = u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)])$$

Ejemplo 3.2.1.

Considérese una función de utilidad exponencial $u(x) = 1 - e^{-\theta x}$ (que está asociado a aversión al riesgo).

Nótese que $u'(x) = \theta e^{-\theta x}$ y $u''(x) = -\theta^2 e^{-\theta x}$, de aquí que

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-\theta^2 e^{-\theta x}}{\theta e^{-\theta x}} = \theta$$

Además,

$$y = 1 - e^{-\theta x} \text{ si y sólo si } x = -\frac{1}{\theta}\log(1-y)$$

Entonces un equivalente cierto asociado a la pérdida X es

$$\rho(X) = -\frac{1}{\theta}\log(\mathbb{E}(e^{-\theta X}))$$

Esta medida de riesgo se conoce como medida de riesgo de entropía. Y nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X}\rho(X) &= \frac{\partial}{\partial X} - \frac{1}{\theta}\log(\mathbb{E}(e^{-\theta X})) \\
&= -\frac{1}{\theta}\frac{\frac{\partial}{\partial X}\mathbb{E}(e^{-\theta X})}{\mathbb{E}(e^{-\theta X})} \\
&= \frac{e^{-\theta X}}{\mathbb{E}(e^{-\theta X})}
\end{aligned}$$

Esta última expresión se conoce como transformada de Esscher y se estudiaría más adelante.

$\triangledown$

3.3. Algunas medidas de riesgo importantes

3.3.1. Valor en Riesgo (VaR)

El concepto de Valor en Riesgo (VaR, por sus siglas en inglés *Value-at-Risk*) se definió en los años 1990's para "cuantificar" los desastres financieros de ese periodo. A continuación se dará la definición formal de este concepto.

Definición 3.3.1. *(Función inversa generalizada)*

Sea $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función no-decreciente. Se define la función inversa generalizada de g, que se denota por g^{-}, como $g^{-} : Im(A) \to A$ tal que

$$g^{-}(y) = \text{ínf}\{z : g(z) \geq y\}.$$

Definición 3.3.2.

Se define el valor en riesgo, VaR al nivel $\alpha \in (0,1)$ como el cuantil al nivel $(1-\alpha)$,

$$\text{i.e. } \rho_\alpha(X) := VaR_X(\alpha) = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 1-\alpha\}.$$

Observación 3.3.1.

(i) Con esta notación, $\rho_\alpha(X)$ es una función no-creciente con respecto a α.

(ii) $VaR_X(\alpha) \leq x$ si y sólo si $S_X(x) \leq \alpha$ y se supondrá que $0 < \alpha < S_X(0)$ para evitar casos triviales (pues si $\alpha \geq S_X(0)$, entonces $VaR_X(\alpha) = 0$).

(iii) Si F_X es continua entonces, $VaR_X(\alpha) = S_X^{-1}(\alpha) = F_X^{-1}(1-\alpha)$.

$\triangledown$

Teorema 3.3.1.

Sea $\alpha \in (0,1)$.

(i) Si g es una función creciente y continua por la izquierda entonces $VaR_{g(X)}(\alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) = g(VaR_X(\alpha))$.

(ii) Si g es una función decreciente, continua por la derecha y F_X es biyectiva entonces $VaR_{g(X)}(\alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1-\alpha)) = g(VaR_X(1-\alpha))$.

Corolario 3.3.1.

El VaR es una medida de riesgo homogénea e invariante ante translaciones, i.e.

(i) Para $\lambda > 0$, $VaR_{\lambda X}(\alpha) = \lambda \cdot VaR_X(\alpha)$.

(ii) Para $k \in \mathbb{R}$, $VaR_{X+k}(\alpha) = VaR_X(\alpha) + k$.

Demostración:

(i) Considérese la aplicación $g(x) = \lambda x$.

Nótese que g es creciente, entonces por el Teorema anterior.

$$VaR_{\lambda X}(\alpha) = VaR_{g(X)}(\alpha) = g(VaR_X(\alpha)) = \lambda \cdot VaR_X(\alpha)$$

(ii) Considérese la aplicación $g(x) = x + k$.

Nótese que g es creciente, entonces por el Teorema anterior.

$$VaR_{X+k}(\alpha) = VaR_{g(X)}(\alpha) = g(VaR_X(\alpha)) = VaR_X(\alpha) + k$$

Aunque también se pudo demostrar a partir de la definición,

$$\begin{aligned} VaR_{X+k}(\alpha) &= \inf\{z \in \mathbb{R} : F_{X+k}(z) \geq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{z \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X+k \leq z) \geq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{z \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq z-k) \geq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{z \in \mathbb{R} : F_X(z-k) \geq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{z \in \mathbb{R} : F_X(z) \geq 1-\alpha\} + k \\ &= VaR_X(\alpha) + k \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3.1. *(El VaR no es sub-aditivo)*

Considérese dos riesgos independientes X, Y tales que $X \sim Pareto(1,1), Y \sim Pareto(1,1)$, i.e.
$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(Y > t) = \dfrac{1}{1+t}, \quad t > 0.$

Nótese que $f_X(t) = f_Y(t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{(1+t)^2}$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y\leq t) &= \int_0^t\int_0^{t-x}\frac{1}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+y)^2}dydx\\
&= \int_0^t(1+x)^{-2}\left[-(1+y)^{-1}\big|_0^{t-x}\right]dx\\
&= \int_0^t(1+x)^{-2}dx-\int_0^t(1+x)^{-2}(1+t-x)^{-1}dx\\
&= 1-\frac{1}{1+t}-\int_0^t\frac{dx}{(1+x)^2(1+t-x)}\\
&= 1-\frac{1}{1+t}-\left[\frac{1}{2+t}\int_0^t\frac{dx}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2+t)^2}\int_0^t\frac{dx}{(1+x)}+\frac{1}{(2+t)^2}\int_0^t\frac{dx}{(1+t+x)}\right]\\
&= 1-\frac{1}{1+t}-\left[\frac{1}{2+t}-\frac{1}{(1+t)(2+t)}+\frac{\log(1+t)}{(2+t)^2}+\frac{\log(1+t)}{(2+t)^2}\right]\\
&= 1-\frac{(2+t)+(1+t)-1}{(1+t)(2+t)}-\frac{2\log(1+t)}{(2+t)^2}\\
&= 1-\frac{2(1+t)}{(1+t)(2+t)}-\frac{2\log(1+t)}{(2+t)^2}\\
&= 1-\frac{2}{2+t}-\frac{2\log(1+t)}{(2+t)^2}
\end{aligned}
$$

También nótese que

$$F_X(x)=1-\alpha \text{ si y sólamente si } 1-\frac{1}{1+x}=1-\alpha \text{ si y sólo si } x=\frac{1}{\alpha}-1.$$

Por tanto,

$$VaR_X(\alpha)=VaR_Y(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-1$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y \leq 2VaR_X(\alpha)) &= 1-\frac{2}{2+2VaR_X(\alpha)}-\frac{2\log(1+2VaR_X(\alpha))}{(2+2VaR_X(\alpha))^2} \\
&= 1-\frac{1}{1+VaR_X(\alpha)}-\frac{1}{2}\frac{\log(1+2VaR_X(\alpha))}{(1+VaR_X(\alpha))^2} \\
&= 1-\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}-1}-\frac{1}{2}\frac{\log\left(1+2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right)}{(1+\frac{1}{\alpha}-1)^2} \\
&= 1-\alpha-\frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)}{(\frac{1}{\alpha})^2} \\
&= 1-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\log\left(\frac{2}{\alpha}-1\right) < 1-\alpha
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(X+Y \leq VaR_X(\alpha)+VaR_Y(\alpha)) < 1-\alpha.$$

Por tanto,

$$VaR_X(\alpha)+VaR_Y(\alpha) < VaR_{X+Y}(\alpha).$$

$\therefore$ El VaR no es una medida de riesgo sub-aditiva.

∇

3.3.2. Valor en Riesgo de la cola (TVaR)

El VaR analiza la probabilidad de eventos raros y extremos, el TVaR está interesado en qué sucede (en promedio) cuando ocurren estos eventos extremos.

Definición 3.3.3. *(Tail-Value-at-Risk (TVaR))*

Se define el Tail-Value-at-Risk (TVaR) al nivel $\alpha \in (0,1)$, como

$$TVaR_X(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR_X(1-t)dt.$$

En otras palabras, el TVaR es el "promedio" de los valores en riesgo con nivel superior a $1-\alpha$.

Observación 3.3.2.

Existe una función de distribución $\widetilde{F}_X$ (que se conoce como la transformada de Hardy-Littlewood de F_X) tal que para todo $\alpha \in (0,1)$

$$\widetilde{F}_X^{-1}(\alpha) = TVaR_X(\alpha)$$

i.e. existe una variable aleatoria $\widetilde{X}$ con función de distribución $\widetilde{F}_X$ tal que $TVaR_X(\alpha) = VaR_{\tilde{X}}(\alpha)$. Es decir, el TVaR de un riesgo X es el VaR de la transformada de Hardy-Littlewood de X. ∇

Lema 3.3.1.

(i) $TVaR_X(\alpha) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\mathbb{E}(X) - \displaystyle\int_0^\alpha VaR_X(t)dt\right]$.

(ii) $TVaR_X(0) = \mathbb{E}(X)$.

(iii) La aplicación $\alpha \mapsto TVaR_X(\alpha)$ es no-decreciente.

(iv) $TVaR_X(\alpha) \geq \mathbb{E}(X)$.

Demostración:

Nótese que

$$\begin{aligned}
TVaR_X(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt \geq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_X(\alpha)dt \\
&= \frac{1}{1-\alpha}VaR_X(\alpha)(1-\alpha) = VaR_X(\alpha).
\end{aligned}$$

Entonces, $TVaR_X(\alpha) \geq VaR_X(\alpha)$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^\alpha VaR_X(t)dt + \int_\alpha^1 VaR_X(t)dt - \int_0^\alpha VaR_X(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^1 VaR_X(t)dt - \int_0^\alpha VaR_X(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left[\mathbb{E}(X) - \int_0^\alpha VaR_X(t)dt\right].
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$TVaR_X(0) = \frac{1}{1-0}\left[\mathbb{E}(X) - \int_0^0 VaR_X(t)dt\right] = \mathbb{E}(X).$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt\right) &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt\right) + \left(\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \\
&= -\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_1^\alpha VaR_X(t)dt\right] + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt \\
&= -\frac{1}{1-\alpha}\left[VaR_X(\alpha) - VaR_X(1)\right] + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt \\
&= \frac{TVaR_X(\alpha) - VaR_X(\alpha)}{(1-\alpha)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto la aplicación $\alpha \mapsto TVaR_x\alpha$ es no-decreciente.

Finalmente, $TVaR_X(\alpha) \geq TVaR_X(0) = \mathbb{E}(X)$. □

Definición 3.3.4. *(Esperanza Condicional de la cola)*

Se define la esperanza condicional de la cola al nivel de probabilidad $\alpha \in [0,1]$ de X, $CTE_X(\alpha)$, como

$$CTE_X(\alpha) := \mathbb{E}(X \mid X > VaR_X(\alpha)).$$

Es decir que el CTE es la pérdida media en el "peor" de los casos (al nivel $1-\alpha$).

Si X es una variable aleatoria con función de distribución F_X, se puede definir alternativamente a la esperanza condicional de la cola de X al nivel α, $CTE_X(\alpha)$, como la media de la distribución de la α- cola superior

$$\Psi_X(\xi,\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \xi < VaR_X(\alpha) \\ \dfrac{F_X(\xi - (1-\alpha))}{\alpha}, & \text{si } \xi > VaR_X(\alpha). \end{cases} \tag{3.1}$$

Esta definición alternativa hace sentido pues

(i) $\lim\limits_{\xi\to\infty} \Psi_X(\xi,\alpha) = \lim\limits_{\xi\to\infty} \dfrac{F_X(\xi) - (1-\alpha)}{\alpha} = \dfrac{1-(1-\alpha)}{\alpha} = 1$

(ii) $\lim\limits_{\xi\to\infty} \Psi_X(\xi,\alpha) = 0$

(iii) $\Psi_X(\xi,\alpha)$ es no-creciente pues F_X es no-creciente

(iv) $\Psi_X(\xi,\alpha)$ es continua por la derecha y con límite por la izquierda pues

$$\lim_{\xi\to VaR_X(\alpha)^-} \Psi_X(\xi,\alpha) = 0 = \Psi_X(VaR_X(\alpha),\alpha)$$

El VaR garantiza que la pérdida no sea mayor que su valor (el VaR) con la alta probabilidad $(1-\alpha)$ y el CTE refleja la magnitud de la pérdida catastrófica (ó riesgo de la cola) en su α - cola superior.

Proposición 3.3.1.

(i) Para $k \in \mathbb{R}$ constante, $CTE_{X+k}(\alpha) = CTE_X(\alpha) + k$.

(ii) $CTE_X(\alpha) = VaR_X(\alpha) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx$.

Demostración:

(i)

$$\begin{aligned} CTE_X(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi d\Psi_X(\xi,\alpha) = \int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} \xi d\left(\frac{F_X(\xi)-(1-\alpha)}{\alpha}\right) + VaR_X(\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} \xi dF_X(\xi) + VaR_X(\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx + VaR_Z(\alpha) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} CTE_{X+k}(\alpha) &= VaR_{X+k}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_{X+k}(\alpha)}^{\infty} S_{X+k}(x)dx \\ &= k + VaR_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)+k}^{\infty} S_{X+k}(x)dx \\ &= k + VaR_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)+k}^{\infty} S_X(x-k)dx \\ &= k + VaR_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx \\ &= k + CTE_X(\alpha) \end{aligned}$$

□

Definición 3.3.5. *(Valor en Riesgo Condicional)*

Se define el Valor en Riesgo Condicional al nivel de probabilidad $\alpha \in [0,1]$ de X, $CVaR_X(\alpha)$, como

$$CVaR_X(\alpha) := \mathbb{E}(X - VaR_X(\alpha)|X > VaR_X(\alpha)).$$

Proposición 3.3.2.

Para $\alpha \in [0,1)$

(i) $CVaR_X(\alpha) = CTE_X(\alpha) - VaR_X(\alpha)$.

(ii) $CVaR_X(\alpha) \geq CTE_X(\alpha) := \mathbb{E}(X|X \geq VaR_X(\alpha))$.

Definición 3.3.6.

Se define el *expected-shortfall* al nivel de probabilidad $\alpha \in [0,1]$ de X, $ES_X(\alpha)$, como

$$ES_X(\alpha) := \mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+].$$

Lema 3.3.2.

Se puede calcular alternativamente el *expected-shortfall* como

(i) $ES_X(\alpha) = \mathbb{E}\left[X - VaR_X(\alpha)|X > VaR_X(\alpha)\right] \cdot S_X(VaR_X(\alpha))$.

(ii) $ES_X(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt - (1-\alpha)VaR_X(\alpha)$.

Demostración:

(i) Por la fórmula de Probabilidad Total

$$\begin{aligned}
ES_X(\alpha) &= \mathbb{E}\left[(X - VaR_X(\alpha)_+ | X \leq VaR_X(\alpha)\right] \cdot \mathbb{P}(X \leq VaR_X(\alpha)) \\
&\quad + \mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+ | X > VaR_X(\alpha)] \cdot \mathbb{P}(X > VaR_X(\alpha)) \\
&= 0 + \mathbb{E}[X - VaR_X(\alpha) | X > VaR_X(\alpha)] \cdot \mathbb{P}(X > VaR_X(\alpha)) \\
&= \mathbb{E}[X - VaR_X(\alpha) | X > VaR_X(\alpha)] \cdot S_X(VaR_X(\alpha))
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.3.

Sea $\alpha \in [0,1]$.

(i) $TVaR_X(\alpha) = VaR_X(\alpha) + \dfrac{1}{1-\alpha} ES_X(\alpha)$.

(ii) $CTE_X(\alpha) = VaR_X(\alpha) + \dfrac{1}{S_X(VaR_X(\alpha))} ES_X(\alpha)$.

Demostración:

(ii) Por el inciso (i) del Lema anterior.

$$\begin{aligned}
ES_X(\alpha) &= CVaR_X(\alpha) \cdot S_X(Var_X(\alpha)) \\
&= \left[CTE_X(\alpha) - VaR_X(\alpha)\right] S_X(VaR_X(\alpha))
\end{aligned}$$

Es decir

$$CTE_X(\alpha) = VaR_X(\alpha) + \frac{ES_X(\alpha)}{S_X(VaR_X(\alpha))}.$$

(i) Por el inciso (ii) del Lema anterior.

$$\frac{ES_X(\alpha)}{(1-\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_X(t)dt - VaR_X(\alpha)$$

Es decir,

$$TVaR_X(\alpha) = VaR_X(\alpha) + \frac{ES_X(\alpha)}{(1-\alpha)}.$$

□

Corolario 3.3.2.

Sea X un riesgo. Si F_X es continua entonces,

$$CTE_X(\alpha) = TVaR_X(\alpha).$$

Demostración:

Como F_X es continua entonces $\dfrac{ES_X(\alpha)}{(1-\alpha)} = \dfrac{ES_X(\alpha)}{S_X(VaR_X(\alpha))}$. Entonces, por la proposición anterior $TVaR_X(\alpha) = CTE_X(\alpha)$. $\square$

Proposición 3.3.4.

El $TVaR$ es invariante ante translaciones y es homogéneo, i.e. para $\lambda \in \mathbb{R}_+, \quad c \in \mathbb{R}$ $TVaR_{X+c}(\alpha) = TVaR_X(\alpha) + c$ y $TVaR_{\lambda X}(\alpha) = \lambda \cdot TVaR_X(\alpha)$.

Demostración:

Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} TVaR_{X+c}(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_{X+c}(t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left[VaR_X(t) + c\right] dt \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt + c(1-\alpha)\right] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt + c \\ &= TVaR_X(\alpha) + c. \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} TVaR_{\lambda X}(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_{\lambda X}(t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \lambda VaR_X(t)dt \\ &= \lambda\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_X(t)dt\right] \\ &= \lambda \cdot TVaR_X(\alpha). \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.3.5.

Sea X un riesgo y $x \in \mathbb{R}$ tal que $S_X(x) > 0$. Sea A un evento tal que $\mathbb{P}(A) = S_X(x)$. Entonces

$$\mathbb{E}(X|A) \leq \mathbb{E}(X|X > x).$$

Demostración:

$$\mathbb{P}(A|X > x) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (X > x))}{S_X(x)} = \frac{\mathbb{P}(X > x|A)\mathbb{P}(A)}{S_X(x)} = \mathbb{P}(X > x|A)$$

Pero también,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|X > x) &= \mathbb{E}(X - x|X > x) + x \\
&= x + \mathbb{E}[X - x|(X > x) \cap A] \cdot \mathbb{P}(A|X > x) \\
&\quad + \mathbb{E}[X - x|(X > x) \cap A^c)] \cdot \mathbb{P}(A^c|X > x) \\
&\geq x + \mathbb{E}[X - x|(X > x) \cap A] \cdot \mathbb{P}(A|X > x) \\
&= x + \mathbb{E}[X - x|(X > x) \cap A] \cdot \mathbb{P}(X > x|A) \\
&\geq x + \mathbb{E}[X - x|(X > x) \cap A] \cdot \mathbb{P}(X > x|A) \\
&\quad + \mathbb{E}[X - x|(X \leq x) \cap A] \cdot \mathbb{P}(X \leq x|A) \\
&= \mathbb{E}(X|A)
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}(X|X > x) \geq \mathbb{E}(X|A)$$

□

$\mathbb{E}(X|A)$ representa la cantidad promedio de la pérdida cuando se sabe que el evento A se lleva a cabo. La proposición (3.3.2) establece una cota para el valor esperado de la pérdida una vez que ocurrió el "peor" de los escenarios.

Teorema 3.3.2.

El $TVaR$ es sub-aditivo, i.e.

$$TVaR_{X+Y}(\alpha) \leq TVaR_X(\alpha) + TVaR_Y(\alpha).$$

Demostración:

$$\begin{aligned} TVaR_{X+Y}(\alpha) &= \mathbb{E}(X|X+Y > VaR_{X+Y}(\alpha)) + \mathbb{E}[Y|X+Y > VaR_{X+Y}(\alpha)] \\ &\leq \mathbb{E}(X|X > VaR_X(\alpha)) + \mathbb{E}(Y|Y > VaR_Y(\alpha)) \\ &= TVaR_X(\alpha) + TVaR_Y(\alpha) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.3.

El $TVaR$ es monótono, i.e. Si $X \leq Y$ c.s., entonces $TVaR_X(\alpha) \leq TVaR_Y(\alpha)$.

Demostración:

$$\begin{aligned} TVaR_Y(\alpha) &= \mathbb{E}[Y|Y > VaR_Y(\alpha)] \\ &\geq \mathbb{E}(Y|X > VaR_X(\alpha)) \\ &\geq \mathbb{E}(X|X > VaR_X(\alpha)) \\ &= TVaR_X(\alpha) \end{aligned}$$

$$\therefore TVaR_Y(\alpha) \geq TVaR_X(\alpha)$$

□

Corolario 3.3.3.

El $TVaR$ es una medida de riesgo coherente para riesgos continuos.

Proposición 3.3.6.

El $TVaR$ y el VaR son medidas de riesgo aditivas para riesgos comonótonos.

Para un nivel de confianza $\alpha > 0$ (fijo) se puede demostrar que el TVaR es la medida de riesgo coherente más pequeña que es superior al VaR. Más adelante se demostrará este resultado para una clase de medidas que se conoce como medidas de distorsión.

Definición 3.3.7. *(Rango natural del grado de confianza)*

El parámetro $\alpha \in (0,1)$ de las definiciones de VaR, CVaR, TVaR y CTE satisface que $0 < \alpha < S_X^-(0)$.

3.3.3. La transformada de Esscher

La medida de riesgo de Esscher consiste en la prima pura de la transformada de Esscher del riesgo inicial.

Definición 3.3.8. *(Medida de Riesgo de Esscher)*

La medida de riesgo de Esscher del riesgo X con parámetro $h > 0$, $Es_X(h)$, se define como

$$Es_X(h) := \frac{\mathbb{E}(Xe^{hX})}{\mathbb{E}(e^{hX})} = \frac{d}{dh}\log(M_X(h)),$$

donde $M_X(\cdot)$ es la función generadora de momentos de X.

Observación 3.3.3.

$Es_X(h)$ es simplemente el valor esperado de la transformada de Esscher, X_h, de X cuya función de distribución está dada por

$$dF_{X,h}(t) = \frac{exp(ht)}{M_X(h)} dF_X(t),$$

donde F_X es la función de distribución de X, y

$$F_{X,h}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\exp(uh)}{M_X(h)} dF_X(u).$$

Es decir,

$$Es_X(h) = \mathbb{E}(X_h) = \int_0^{\infty} u dF_{X,h}(u).$$

$\triangledown$

Proposición 3.3.7. *(La medida de riesgo de Esscher es invariante ante translaciones)*

La medida de riesgo de Esscher es invariante ante translaciones, i.e. para $c \in \mathbb{R}$

$$Es_{X+c}(h) = Es_X(h) + c.$$

Demostración:

Nótese que

$$M_{X+c}(h) = \mathbb{E}\left[e^{h(X+c)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{hX}e^{hc}\right] = e^{hc}M_X(h)$$

Entonces,

$$\log[M_{X+c}(h)] = \log[e^{hc}M_X(h)] = hc + \log[M_X(h)]$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} Es_{X+c}(h) &= \frac{d}{dh}\log(M_{X+c}(h)) = \frac{d}{dh}\left(hc + \log[M_X(h)]\right) \\ &= c + \frac{d}{dh}\log[M_X(h)] = c + Es_X(h). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.8.

La aplicación $h \mapsto Es_X(h)$ es no-decreciente.

Demostración:

Nótese que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}\mathbb{E}(X_h) &= \int_0^\infty u^2 dF_{X,h}(u) - \left(\int_0^\infty u dF_{X,h}(u)\right)^2 \\ &= Var(X_h) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Observación 3.3.4.

La medida de riesgo de Esscher de X es mayor que el valor esperado de X, i.e.

$$Es_X(h) \geq Es_X(0) = \frac{\mathbb{E}(Xe^{0\cdot X})}{\mathbb{E}(e^{0\cdot X})} = \mathbb{E}(X)$$

∇

Ya se demostró que la medida de riesgo de Esscher es invariante ante translaciones, sin embargo, dicha medida no es monótona.

Ejemplo 3.3.2. *(La medida de riesgo de Esscher no es monótona)*

Considérese riesgos X, Y tales que

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=3) = \mathbb{P}(X=6, Y=6) = \frac{1}{3}.$$

Nótese que

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}[\{(X=0, Y=0) \cup (X=3, Y=3) \cup (X=6, Y=6)\}] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore X \leq Y \text{ c.s.}$$

Además

- $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(X=6, Y=6) = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X=0, Y=3) = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(X=6, Y=6) = \frac{1}{3}$

Es decir,

$$\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x=6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } y=0,3,6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Es_X(1/2) &= \frac{\mathbb{E}(Xe^{\frac{1}{2}X})}{\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}X})} = \frac{0e^{(1/2)0}\mathbb{P}(X=0) + 6e^{(1/2)6}\mathbb{P}(X=6)}{e^{(1/2)0}\mathbb{P}(X=0) + e^{(1/2)6}\mathbb{P}(X=6)} \\ &= \frac{6e^3(\frac{1}{3})}{\frac{2}{3} + e^3(\frac{1}{3})} = \frac{6e^3}{2+e^3} = \frac{120.5132215}{22.08553692} = 5.45665799 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} Es_Y(1/2) &= \frac{\mathbb{E}(Ye^{\frac{1}{2}Y})}{\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}Y})} = \frac{0e^{(1/2)0}\mathbb{P}(Y=0)+3e^{(1/2)3}\mathbb{P}(Y=3)+6e^{(1/2)6}\mathbb{P}(Y=6)}{e^{(1/2)0}\mathbb{P}(Y=0)+e^{(1/2)3}\mathbb{P}(Y=3)+e^{(1/2)6}\mathbb{P}(Y=6)} \\ &= \frac{3e^{3/2}+6e^3}{1+e^{\frac{3}{2}}+e^3} = \frac{13.44506721+120.5132215}{25.56722599} = 5.23945338 \end{aligned}$$

Entonces $X \leq Y$ c.s. pero $Es_X(\frac{1}{2}) \not\leq Es_Y(\frac{1}{2})$. $\triangledown$

3.3.4. Medidas de Riesgo de Wang

A continuación, se estudiarán ciertas medidas de distorsión para variables aleatorias $X \geq 0$ c.s. (entonces $F_X(x) = 0$ para $x < 0$.)

Definición 3.3.9. *(Función de distorsión)*

Se dice que una función $g : [0,1] \to [0,1]$, no-decreciente tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$ es una función de distorsión.

Definición 3.3.10. *(Medida de Riesgo de Wang)*

Se define la medida de riesgo de Wang con respecto a la función de distorsión g, ρ_g, como

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x))dx = \int_0^\infty g(S_X(x))dx.$$

Observación 3.3.5.

Nótese que con la aplicación $g(x) = x$

$$\rho_g(x) = \int_0^\infty g(S_X(x))dx = \int_0^\infty S_X(x)dx = \mathbb{E}(X)$$

Y si $g(t) \geq t$ para todo $t \in [0,1]$ entonces, $\rho_g(X) \geq \mathbb{E}(X)$. $\triangledown$

Proposición 3.3.9.

(i) Si g_1, g_2 son medidas de distorsión tales que $g_1 \leq g_2$, entonces $\rho_{g_1}(X) \leq \rho_{g_2}(X)$.

(ii) Sea X un riesgo, $X \geq 0$ c.s. La medida de riesgo de Wang con respecto a la función de distorsión g se puede reescribir como

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_X(1-\alpha)dg(\alpha).$$

Demostración:

(i) Como g_1, g_2 son positivas, por la monotonía de la integral

$$\rho_{g_1}(X) = \int_0^\infty g_1(S_X(x))dx \leq \int_0^\infty g_2(S_X(x))dx = \rho_{g_2}(X)$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\rho_g(X) &= \int_0^\infty g(S_X(x))dx = \int_0^\infty \int_0^{S_X(x)} dg(\alpha)dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{S_X^{-1}(x)} dxdg(\alpha) = \int_0^1 VaR_X(1-\alpha)dg(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3.3. *(El VaR como medida de Wang)*

Considerése la función de distorsión $g_\alpha(x) = I_{[\alpha,\infty)}(x)$.

Nótese que

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \text{ entonces } g_\alpha(S_X(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_X(x) < \alpha \\ 1 & \text{si } S_X(x) \geq \alpha \end{cases}$$

Es decir,

$$g_\alpha(S_X(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } F_X(x) > 1-\alpha \\ 1 & \text{si } F_X(x) \le 1-\alpha \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > VaR_X(\alpha) \\ 1 & \text{si } x \le VaR_X(\alpha) \end{cases}$$

Entonces,

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \int_0^\infty g_\alpha(S_X(x))dx = \int_0^{VaR_X(\alpha)} 1dx = VaR_X(\alpha)$$

$$\therefore \rho_{g_\alpha}(X) = VaR_X(\alpha)$$

Es decir, el $VaR_X(\alpha)$ es una medida de riesgo de Wang asociada con la función de distorsión $g_\alpha(x) = I_{[\alpha,\infty)}(x)$. $\triangledown$

Ejemplo 3.3.4. *(El TVaR como medida de Wang)*

Considerése la función de distorsión $g_\alpha(x) = \text{mín}\left\{\frac{x}{\alpha}, 1\right\}$, con $\alpha \in (0,1)$ fijo. Nótese que $\frac{x}{\alpha} < 1$ si y sólo si $x < \alpha$

Entonces,

$$g_\alpha(x) = \text{mín}\left\{\frac{x}{\alpha}, 1\right\} = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \ge \alpha. \end{cases}$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} g_\alpha(S_X(x)) &= \begin{cases} \dfrac{S_X(x)}{\alpha} & \text{si } S_X(x) < \alpha \\ 1 & \text{si } S_X(x) \ge \alpha \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{S_X(x)}{\alpha} & \text{si } x > VaR_X(\alpha) \\ 1 & \text{si } x \le VaR_X(\alpha). \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \rho_{g_\alpha}(X) &= \int_0^\infty g_\alpha(S_X(x))dx \\ &= \int_0^{VaR_X(\alpha)} 1dx + \int_{VaR_X(\alpha)}^\infty \frac{S_X(x)}{\alpha}dx \\ &= VaR_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)}^\infty S_X(x)dx \\ &= TVaR_X(\alpha). \end{aligned}$$

Nótese que g_α es la función de distribución de una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, \alpha]$.

Es decir, el $TVaR_X(\alpha)$ es una medida de riesgo de Wang asociada con la función de distorsión $g_\alpha(x) = \text{mín}\left\{\frac{x}{\alpha}, 1\right\}$. ∇

Sin embargo, generalmente no existe esta representación como medida de Wang para el *expected-shortfall*.

Ejemplo 3.3.5. *(El ES no es una medida de Wang)*

Considérese $X \sim Unif[0,1]$. Entonces

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

De aquí que en este caso $VaR_X(\alpha) = \alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned} ES_X(\alpha) &= \mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+] = \int_\alpha^1 VaR_X(t)dt - (1-\alpha)VaR_X(\alpha) \\ &= \int_\alpha^1 tdt - (1-\alpha)\alpha = \frac{1-\alpha^2}{2} - (1-\alpha)\alpha \\ &= \frac{1}{2}(1 - \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha^2) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2. \end{aligned}$$

Si existiera una función de distorsión g_α tal que $ES_X(\alpha) = \rho_{g_\alpha}(X)$, entonces se cumpliría

$$ES_X(\alpha) = \rho_{g_\alpha}(X) = \int_0^1 g_\alpha(1-x)dx = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2.$$

Si ahora se considera $Y \sim Bnlli(q)$, para $q \in (0, 1-\alpha]$

$$ES_Y(\alpha) = q = \rho_{g_\alpha}(Y) = g_\alpha(q).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 &= \int_0^\alpha g_\alpha(1-x)dx + \int_\alpha^1 (1-x)dx \\ &\geq \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)\alpha. \end{aligned}$$

Es decir,

$$0 \geq (1-\alpha)\alpha.$$

Por tanto, $\alpha < 0$ (que es una contradicción). Entonces se puede concluir que el *expected-shortfall* en este caso no es una medida de Wang. $\triangledown$

De manera análoga, se puede probar que el CTE no es una medida de Wang.

Ejemplo 3.3.6. *(El CTE no es una medida de Wang)*

Considérese $X \sim Unif[0,1]$. En este caso $CTE_X(\alpha) = \alpha + \frac{1-\alpha}{2}$. En caso de que el CTE fuese una medida de Wang se tendría que cumplir

$$CTE_X(\alpha) = \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \int_0^1 g_\alpha(1-x)dx.$$

Equivalentemente,

$$\int_0^1 g_\alpha(x)dx = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Si ahora se considera $Y \sim Bnlli(q)$, para $q \in (0, 1-\alpha]$, entonces $CTE_Y(\alpha) = 1$. De aquí que se tendría que cumplir

$$g_\alpha(q) = \rho_{g_\alpha}(Y) = CTE_Y(\alpha) = 1$$

Para finalmente,

$$\int_0^1 g_\alpha(x)dx = \int_0^1 dx = 1 = \frac{1+\alpha}{2}$$

Hecho que sería una contradicción pues α varía entre todo el intervalo (0,1). $\triangledown$

Ejemplo 3.3.7.

Considérese la función de distorsión

$$g(x) = 1 - (1-x)^\theta, \theta \geq 1$$

Entonces la correspondiente medida de Wang asociada a g es

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1-F_X(x))dx = \int_0^\infty [1-(1-(1-F_X(x)))^\theta]dx = \int_0^\infty [1-(F_X(x))^\theta]dx.$$

Sin embargo, recuérdese que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de distribución F_X, entonces

$$F_{\text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\}}(x) = \mathbb{P}(\text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\} \leq x) = (F_X(x))^n.$$

Es decir,

$$S_{\text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\}}(x) = 1 - (F_X(x))^n.$$

Entonces,

$$\rho_g(X) = \mathbb{E}(\text{máx}\{X_1, \ldots, X_\theta\}).$$

$\triangledown$

Ejemplo 3.3.8. *(La medida de riesgo de "Riesgos Proporcionales")*

Considérese la función de distorsión

$$g(x) = x^{\frac{1}{\theta}}, \ \theta \geq 1.$$

En este caso,

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))dx = \int_0^\infty (S_X(x))^{\frac{1}{\theta}} dx = \int_0^\infty (1 - F_X(x))^{\frac{1}{\theta}} dx,$$

y a esta medida se le conoce como la medida PH o de Riesgos Proporcionales y se denota como

$$PH_\theta(x) = \rho_g(X) = \int_0^\infty (S_X(x))^{\frac{1}{\theta}} dx.$$

Obsérvese que si $\theta = 1$, entonces $PH_1(x) = \displaystyle\int_0^\infty S_X(x)dx = \mathbb{E}(X)$ $\triangledown$

Proposición 3.3.10.

Las medidas de riesgo de Wang son invariantes ante translaciones, homogéneas y monótonas.

Demostración:

Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\rho_g(X + c) &= \int_0^1 VaR_{X+c}(1-\alpha)dg(\alpha) \\
&= \int_0^1 \left[VaR_X(1-\alpha) + c\right] dg(\alpha) \\
&= \int_0^1 VaR_X(1-\alpha)dg(\alpha) + c\int_0^1 dg(\alpha) \\
&= \rho_g(X) + c(g(1) - g(0)) = \rho_g(X) + c(1-0) = \rho_g(X) + c.
\end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\rho_g(\lambda X) &= \int_0^1 VaR_{\lambda X}(1-\alpha)dg(\alpha) \\
&= \int_0^1 \lambda VaR_X(1-\alpha)dg(\alpha) \\
&= \lambda \int_0^1 VaR_X(1-\alpha)dg(\alpha) \\
&= \lambda \cdot \rho_g(X).
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3.6.

Si la función g es cóncava, entonces la aplicación $x \mapsto g(S_X(x))$ es continua por la derecha y por tanto la función de supervivencia de cierta variable aleatoria; de aquí que

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))dx$$

es efectivamente un valor esperado, asociado con una variable aleatoria con función de supervivencia $g(S_X(x))$.

Teorema 3.3.4.

Sea ρ_g una medida de Wang. Si la función de distorsión g es cóncava, entonces ρ_g es sub-aditiva.

Corolario 3.3.4.

Sea ρ_g una medida de Wang. Si la función de distorsión g es cóncava entonces ρ_g es una medida coherente.

El siguiente resultado muestra que el TVaR es la medida de Wang, más pequeña asociada con una función de distorsión cóncava que es mayor que el VaR (con el mismo nivel de confianza/probabilidad), i.e. el TVaR es la medida de riesgo coherente más pequeña que excede al VaR.

Teorema 3.3.5.

Sea X un riesgo y $\alpha \in (0,1)$. Entonces,

$$TVaR_X(\alpha) = \text{mín}\left\{\rho_g(X) : g \text{ es cóncava y } \rho_g(X) \geq VaR_X(\alpha)\right\}.$$

Demostración:

El TVaR es la medida de riesgo de Wang asociada con la función de distorsión cóncava $\text{mín}\left\{\frac{x}{\alpha}, 1\right\}$. Además ya se probó que $TVaR_X(\alpha) \geq VaR_X(\alpha)$. Entonces

$$TVaR_X(\alpha) \geq \text{ínf}\left\{\rho_g(X) : g \text{ es cóncava y } \rho_g(X) \geq VaR_X(\alpha)\right\}$$

Para demostrar la otra desigualdad, considérese una función de distorsión g, cóncava tal que $\rho_g(Y) \geq VaR_Y(\alpha)$ para cualquier riesgo Y. Sea $q \in (1-\alpha, 1)$ y $Y_g \sim Bnlli(q)$.

Como

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1-q & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1, \end{cases}$$

entonces $VaR_Y(\alpha) = 1$. Además $\rho_g(Y_q) = g(q)$. Como $g(x) \leq 1$ y se tiene que cumplir que $\rho_g(Y_q) \geq VaR_{Y_q}(\alpha)$ entonces $g_(q) = 1$. Esta condición debe cumplirse para todo $q \in (1-\alpha, 1)$.

Esto significa que g vale 1 en el intervalo $(\alpha, 1)$. Como g es cóncava, entonces

$$g(x) \geq \text{mín}\left\{\frac{x}{\alpha}, 1\right\}, \quad x \in (0,1).$$

Por tanto, $\rho_g(X) \geq TVaR_X(\alpha)$. Esta desigualdad se cumple sin importar cuál es la función de distorsión cóncava g tal que $\rho_g(X) \geq VaR_X(\alpha)$.

Entonces,

$$TVaR_X(\alpha) \leq \text{ínf}\left\{\rho_g(X) : g \text{ es cóncava y } \rho_g(X) \geq VaR_X(\alpha)\right\}.$$

□

3.3.5. Medidas de riesgo por distorsión

Las medidas de Wang son un caso particular de las medidas de riesgo por distorsión, definidas para variables aleatorias que no necesariamente son positivas.

Definición 3.3.11. *(Medida de riesgo por distorsión)*

Se dice que ρ es una medida de riesgo por distorsión si

$$\rho(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(1-u)dg(u),$$

donde g es una función de distribución en $[0,1]$ que se conoce como función de distorsión.

De manera análoga a las medidas de Wang, se puede reescribir a las medidas de riesgo por distorsión.

Teorema 3.3.6.

Si $\rho(\cdot)$ es una medida de distorsión con función de distorsión g, entonces

$$\rho(X) = \int_0^\infty g(1-F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 [1-g(1-F_X(x))]dx.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \int_0^1 F_X^{-1}(1-u)dg(u) \\
&= \int_0^{F_X(0)} F_X^{-1}(1-u)dg(u) + \int_{F_X(0)}^1 F_X^{-1}(1-u)dg(u)
\end{aligned}$$

Integrando por partes y haciendo el cambio de variable $u = F_X(x)$, se puede reescribir la medida de riesgo como

$$\rho(X) = \int_0^\infty g(1-F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 [1-g(1-F_X(x))]dx.$$

□

Observación 3.3.7.

Si g es la función de distribución de una variable aleatoria $Unif[0,1]$, i.e. g es la función identidad en $(0,1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\rho(X) &= \int_0^\infty (1-F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 (1-(1-F_X(x)))dx \\ &= \int_0^\infty S_X(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \\ &= \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

$\triangledown$

Ejemplo 3.3.9.

Considerése una función de distribución $g(x) = x^k$. A la medida

$$\rho_X(k) = \int_0^1 F_X^{-1}(1-u)ku^{k-1}du$$

también se le conoce como medida de riesgos proporcionales cuando $k < 1$, pues así g sería cóncava.

Definición 3.3.12. *(Función espectral)*

Una función espectral es una función $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ no-creciente tal que

$$\int_0^1 \phi(t)dt = 1$$

Definición 3.3.13. *(Medida de riesgo espectral)*

Se define la medida de riesgo espectral asociada con la función espectral ϕ, ρ_ϕ, como

$$\rho_\phi(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(t)\phi(t)dt$$

Proposición 3.3.11.

(i) Si $\rho_\phi(X)$ es una medida de riesgo espectral, entonces es coherente.

(ii) Las medidas de distorsión con función de distorsión cóncava son medidas espectrales con $\phi = g^{'}$.

3.4. Comparación de riesgos y medidas de riesgo

Como se mencionó anteriormente, existe una relación fundamental entre la comparación de riesgos y las medidas de riesgo.

3.4.1. Orden inducido por el VaR

Definición 3.4.1.

Sean X, Y riesgos. Se dirá que X es menos peligroso que Y, con respecto al VaR, si para todo $\alpha \in (0,1)$

$$VaR_X(\alpha) \leq VaR_Y(\alpha).$$

Se denotará como $X \preceq_{VaR} Y$.

La relación $\preceq_{VaR}$ que se acaba de definir, constituye un orden parcial en el espacio de las leyes de probabilidad (se puede verificar que es reflexiva, transitiva y anti-simétrica). Como en el Capítulo 1, esta relación se denotará entre variables aleatorias en vez que entre distribuciones de probabilidad. Con esta notación, la antisimetría no implicará igualdad de variables aleatorias si no igualdad de las correspondientes funciones de distribución, i.e. $X \preceq_{VaR} Y$ y$Y \preceq_{VaR} X$ implicará que $X \stackrel{D}{=} Y$.

Notación 3.4.1.

La relación $\preceq_{VaR}$ también se denota como $\preceq_{st}$, $\preceq_1$, $\preceq_{FSD}$ (en Teoría de Dominancia Estocástica). $\triangledown$

A continuación, se estudiarán algunas condiciones equivalentes para que se cumpla la relación $X \preceq_{VaR} Y$.

Proposición 3.4.1.

Sean X, Y variables aleatorias. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) $X \preceq_{VaR} Y$.

(ii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \geq F_Y(t)$.

(iii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $S_X(t) \leq S_Y(t)$.

A continuación se estudiarán algunas propiedades y caracterizaciones de la desigualdad estocástica $X \preceq_{VaR} Y$.

La propiedad anterior establece que $X \preceq_{VaR} Y$ cuando la función de supervivencia de X, Y son mutuamente dominantes.

Teorema 3.4.1.

Sean X, Y variables aleatorias. si y sólo si existen variables aleatorias

(i) $X \preceq_{VaR} Y$ si y sólo si para toda función creciente g, $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(g(Y))$ (siempre que $\mathbb{E}(g(X)), \mathbb{E}(g(Y))$ existan).

(ii) $X \preceq_{VaR} Y$ si y sólo si para toda función g tal que, $g' \geq 0$ se cumple que $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(g(Y))$ (siempre que $\mathbb{E}(g(X)), \mathbb{E}(g(Y))$ existan).

Demostración:

(i) Si $U \sim Unif[0,1]$, entonces por el Teorema de Transformada Integral se cumple que $X \stackrel{D}{=} VaR_X(U)$ (por ser un cuantil). Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \mathbb{E}(g(VaR_X(U))) = \int_0^1 g(VaR_X(t))dt \\
&\leq \int_0^1 g(VaR_Y(t))dt \\
&= \mathbb{E}(g(Y)).
\end{aligned}$$

(ii) Considerése la aplicación $x \mapsto -\Phi\left(\frac{t-x}{\sigma}\right)$, donde Φ es la función de distribución de la normal estándar. Nótese que dicha aplicacion es creciente. Entonces,

$$-\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{t-Y}{\sigma}\right)\right] \leq -\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{t-X}{\sigma}\right)\right]$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > x_{t,\sigma}) &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X-t}{\sigma}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{Y-t}{\sigma}\right)\right] \\ &= \mathbb{P}(Y > x_{t,\sigma})\end{aligned}$$

Haciendo $\sigma \to 0$, se tiene que $\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t)$.

□

El siguiente resultado establece una condición suficiente para que haya una relación de dominancia entre las funciones de densidad.

Proposición 3.4.2.

Sean X, Y variales aleatorias. Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f_X(t) \geq f_Y(t)$ para todo $t < c$ y $f_X(t) \leq f_Y(t)$ para todo $t > c$, entonces $X \preceq_{VaR} Y$.

Demostración:

Para $x < c$, se cumple que

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt \geq \int_0^x f_Y(t)dt = F_Y(x)$$

y para $x > c$, se cumple

$$S_X(x) = \int_x^\infty f_X(t)dt \geq \int_x^\infty f_Y(t)dt = S_Y(x).$$

$$\therefore X \preceq_{VaR} Y.$$

□

La siguiente pregunta de interés es la comparación de dos riesgos sabiendo que superan un cierto nivel de t. Es decir,

$$(X|X > t) \preceq_{VaR} (Y|Y > t)$$

independientemente del nivel de t. La pregunta es interesante ya que puede ocurrir que $X \preceq_{VaR} Y$ pero no $(X|X > t) \preceq_{VaR} (Y|Y > t)$. El siguiente ejemplo exhibe dicha situación.

Ejemplo 3.4.1.

Considérese $X \sim Unif(0, 3)$ y Y variable aleatoria con densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}I_{[0,1]}(y) + \frac{1}{2}I_{[1,2]}(y) + \frac{1}{3}I_{[2,3]}(y)$$

y función de distribución

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{6} & \text{si } y \in [0, 1] \\ \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{3} & \text{si } y \in (1, 2] \\ \dfrac{y}{3} & \text{si } y \in (2, 3) \\ 1 & \text{si } y > 3. \end{cases}$$

$$\therefore X \preceq_{VaR} Y$$

Nótese además que

$$F_{X|X>1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{F_X(x)-F_X(1)}{1-F_X(1)} & \text{si } x \in (1, 3) \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{3-1} & \text{si } x \in (1, 3) \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Es decir, $(X|X \geq 1) \sim Unif(1, 3)$. Además,

$$f_{Y|Y\geq 1}(y) = \frac{3}{5}I_{[1,2]}(y) + \frac{2}{5}I_{[2,3]}(y)$$

$$\therefore (Y|Y \geq 1) \preceq_{VaR} (X|X \geq 1)$$

▽

Proposición 3.4.3.

Sean X, Y riesgos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $(X|X > t) \preceq_{VaR} (Y|Y > t)$.

(ii) La aplicación $t \mapsto \frac{S_Y(t)}{S_X(t)}$ es no-decreciente.

(iii) Para cualesquiera $u \leq v$, $S_X(u)S_Y(v) \geq S_X(v)S_Y(u)$.

Se puede hacer esta comparación estocástica condicionada a partir del índice de riesgo

$$r_X(t) = -\frac{S'_X(t)}{S_X(t)}.$$

Proposición 3.4.4.

Sean X, Y riesgos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $(X|X > t) \preceq_{VaR} (Y|Y > t)$.

(ii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $r_X(t) \geq r_Y(t)$.

Demostración:

El cociente $\dfrac{S_Y}{S_X}$ es no-decreciente si y sólo si $\log\left(\dfrac{S_Y}{S_X}\right)$ es no-decreciente, i.e. $\log(S_Y) - \log(S_X)$ es no-decreciente. Esto es equivalente a que se satisfaga $r_X(t) - r_Y(t) \geq 0$ pues $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\log(S_Y(t)) - \log(S_X(t))\right) = r_X(t) - r_Y(t) \geq 0$. Entonces, por la proposición anterior $(X|X > t) \preceq_{VaR} (Y|Y > t)$. □

Notación 3.4.2.

En virtud de la proposición anterior se utiliza la notación

$$(X|X > t) \preceq_{VaR} (Y|Y > t) \text{ si y sólo si } X \preceq_{hr} Y.$$

▽

Supóngase que la tasa de riesgo se disminuye en un factor ξ, i.e.

$$r_{X^*}(t) = \frac{r_X(t)}{\xi} \leq r_X(t), \text{ para } \xi \geq 1$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
S_{X^*}(t) &= \exp\left\{-\int_0^t r_{X^*}(s)ds\right\} = exp\left\{-\frac{1}{\xi}\int_0^t r_X(s)ds\right\} \\
&= \left(exp\left\{-\int_0^t r_X(s)ds\right\}\right)^{1/\xi} \\
&= (S_X(t))^{1/\xi}.
\end{aligned}$$

Entonces $PH_\xi(X) = \mathbb{E}(X^*)$, pues

$$\mathbb{E}(X^*) \;=\; \int_0^\infty S_{X^*}(t)dt = \int_0^\infty (S_X(t))^{1/\xi}dt = PH_\xi(X)$$

Es decir, la medida de riesgo PH reemplaza el riesgo inicial X por un riesgo transformado X^*, cuya tasa de riesgo es menor y simplemente se calcula su esperanza, y por la proposición anterior, para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$

$$(X|X > t) \preceq_{VaR} (X^*|X^* > t).$$

3.4.2. El Cociente de verosimilitudes y el principio de Esscher

Ahora, se intentarán hacer comparaciones

$$(X|a \leq X \leq a+h) \preceq_{VaR} (Y|a \leq Y \leq a+h),$$

para cualquier nivel $a \in \mathbb{R}$, e incremento $h > 0$. Esto corresponde a la situación en la que una reaseguradora cubre la capa $(a, a+h)$ de un riesgo X, i.e.

$$X_{(a,a+h]} = \begin{cases} 0 & \text{si } X < a \\ X - a & \text{si } a \leq X < a+h \\ h & \text{si } X \geq a+h, \end{cases}$$

i.e. a es la retención y h es el límite.

Proposición 3.4.5.

Sean X, Y variables aleatorias con función de densidad f_X, f_Y, respectivamente. Si $\dfrac{f_X(t)}{f_Y(t)}$ es decreciente en la unión de los soportes de X e Y, ó equivalentemente

$$f_X(u)f_Y(v) \geq f_X(v)f_Y(u) \text{ para todo } u \leq v$$

Entonces para todo $a \in \mathbb{R}, h > 0$

$$(X|a \leq X \leq a+h) \preceq_{VaR} (Y|a \leq Y \leq a+h).$$

Demostración:

La demostración es directa con la Proposición 3.4.3 dado que para $a < u \leq b \leq v$

$$\frac{\mathbb{P}(u \leq X \leq b)}{\mathbb{P}(a \leq X \leq b)} \leq \frac{\mathbb{P}(u \leq Y \leq b)}{\mathbb{P}(a \leq Y \leq b)}$$

si y sólo si

$$\frac{\mathbb{P}(a \leq X < u)}{\mathbb{P}(a \leq Y < u)} \geq \frac{\mathbb{P}(u \leq X \leq b)}{\mathbb{P}(u \leq Y \leq b)}.$$

Y entonces,

$$\frac{\mathbb{P}(u \leq X < b)}{\mathbb{P}(u \leq Y < b)} \geq \frac{\mathbb{P}(b \leq X \leq v)}{\mathbb{P}(b \leq Y \leq v)}$$

si y sólo si

$$\frac{\mathbb{P}(a \leq X < u)}{\mathbb{P}(a \leq Y < u)} \geq \frac{\mathbb{P}(b \leq X \leq v)}{\mathbb{P}(b \leq Y \leq v)}.$$

□

Notación 3.4.3.

En virtud de la proposición anterior se usa la notación

$$(X|a \leq X \leq a+h) \preceq_{VaR} (Y|a \leq Y \leq a+h) \text{ si y sólo si } X \leq_{lr} Y.$$

▽

Si X_h es la transformada de Esscher de X, entonces el cociente de verosimilitudes de X y X_h es proporcional a e^{-hx}, que es una función de x decreciente, entonces por la proposición (3.4.5)

$$(X|a \leq X \leq b) \preceq_{VaR} (X_h|a \leq X_h \leq b)$$

para $a < b$.

Proposición 3.4.6.

Si $(X|a \leq X \leq b) \preceq_{VaR} (Y|a \leq Y \leq b)$ para cualesquiera $a < b$, entonces para todo $h > 0$, $Es_X(h) \leq Es_Y(h)$.

Demostración:

Por la proposición (3.4.5) para cualesquiera $u \leq v$

$$f_X(u)f_Y(v) \geq f_X(v)f_Y(u).$$

Entonces

$$\frac{e^{hu}}{M_X(h)}\frac{e^{hv}}{M_Y(h)}f_X(u)f_Y(v) \geq \frac{e^{hu}}{M_X(h)}\frac{e^{hv}}{M_Y(h)}f_X(v)f_Y(u).$$

De aquí que para cualesquiera $u \leq v$, $f_{X_h}(u)f_{Y_h}(v) \geq f_{X_h}(v)f_{Y_h}(u)$, $\therefore$ $(X|a \leq X \leq b) \preceq_{VaR} (Y|a \leq Y \leq b)$. □

3.4.3. Comparación uniforme del TVaR

Ahora, se establecerán criterios para hacer comparaciones en término del TVaR.

Definición 3.4.2.

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Se dirá que Y es más peligroso que X, con respecto al TVaR si para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$TVaR_X(\alpha) \leq TVaR_Y(\alpha)$$

Se denotará $X \preceq_{VaR} Y$.

Observación 3.4.1.

El hecho de que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$ garantiza la existencia del TVaR y la definición tenga sentido. En muchos de los resultados que se enunciarán más adelante, se pedirá dicha finitud en la media. Esta hipótesis adicional, hace diferentes las comparaciones $\preceq_{VaR}$ y $\preceq_{TVaR}$. $\triangledown$

La relación $\preceq_{VaR}$ también se denota como $\preceq_{sl}$ (como en el Capítulo 1, y de nuevo viene el paralelismo), $\preceq_2$ $\preceq_{icx}$ (orden convexo-creciente para los probabilistas) y $\preceq_{SSD}$.

A continuación se restringirá la atención en la relación $X \preceq_{TVaR} Y$ a varibles que satisfagan además que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ y esta relación se denotará como $X \preceq_{CX} Y$.

Definición 3.4.3. *(Orden convexo)*

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$

$$X \preceq_{CX} Y \text{ si y sólo si } = \begin{cases} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \\ X \preceq_{TVaR} Y, \end{cases}$$

equivalentemente

$$X \preceq_{CX} Y \text{ si y sólo si } = \begin{cases} TVaR_X(0) = TVaR_Y(0) \\ TVaR_X(\alpha) \leq TVaR_Y(\alpha), \text{ para todo } \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

Proposición 3.4.7.

Sean X, Y variables aleatorias. Si $X \preceq_{VaR} Y$ y $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ entonces $S_Y(x) = S_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Demostración:

Como $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^\infty (S_Y(x) - S_X(x))dx = 0$, entonces $S_Y(x) - S_X(x) = 0$, i.e. $S_X(x) = S_Y(x)$. $\square$

3.4.4. TVaR y primas *stop-loss*

Las relaciones de orden $\preceq_{TVaR}$ y $\preceq_{CX}$ tienen una interpretación en términos de primas *stop-loss*.

Proposición 3.4.8.

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(|X|)$, $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+)]$.

(ii) Para todo $p \in [0,1]$,

$$\int_0^p F_X^{-1}(u)du \geq \int_0^p F_Y^{-1}(u)du. \tag{3.2}$$

(iii) Para todo $p \in [0,1]$,

$$\int_p^1 F_X^{-1}(u)du \leq \int_p^1 F_Y^{-1}(u)du. \tag{3.3}$$

Demostración:

Como $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(u)du$ y $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 F_Y^{-1}(u)du$ para todo $p \in [0,1]$, las desigualdades (3.2) (3.3) son equivalentes.

Entonces, se demostrara que $\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+]$ es equivalente a $\int_0^p F_X^{-1}(u)du \geq \int_0^p F_Y^{-1}(u)du$. Se demostrará el resultado para funciones de distribución continuas que si intersectan en un número finito de puntos; el razonamiento general es similar pero con detalles técnicos más elaborados.

Como $\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+)]$, entonces F_X es menos que F_Y hasta el primer cruzamiento y F_X domina a F_Y después del último cruzamiento y como $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, F_X y F_X se deben intersectar al menos una vez.

Ahora, sean (y_0, p_0), (y_1, p_1), (y_2, p_2) tres puntos de intersección de F_X y F_Y tales que $y_0 \leq y_1 \leq y_2$.

La hipótesis de continuidad garantiza que para $i \in \{0, 1, 2\}$

$$p_i = F_X(y_i) = F_Y(y_i),$$

Como para todo $t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+]$ entonces

$$\int_{y_2}^{\infty} S_X(x)dx \leq \int_{y_2}^{\infty} S_Y(x)dx.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{p_2}^{1} F_X^{-1}(u)du &= y_2(1-p_2) + \int_{y_2}^{\infty} S_X(x)dx \\ &\leq y_2(1-p_2) + \int_{y_2}^{\infty} S_Y(x)dx \\ &= \int_{p_2}^{1} F_Y^{-1}(u)du. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces para $u \in [p_1, p_2]$, $F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \leq 0$. Por tanto, la aplicación $p \mapsto \int_p^1 [F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)]du$. es no-decreciente para $p \in [p_1, p_2]$. Entonces, por la expresión (3.4), para todo $p \in [p_1, p_2]$

$$\int_p^1 F_X^{-1}(u)du \leq \int_p^1 F_Y^{-1}(u)du. \tag{3.5}$$

De nuevo, como $\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+]$ entonces

$$\int_{-\infty}^{y_0} F_X(x)dx \leq \int_{-\infty}^{y_0} F_Y(x)dx \tag{3.6}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \int_0^{p_0} F_X^{-1}(u)du &= y_0p_0 - \int_{-\infty}^{y_0} F_X(x)dx \\ &\geq y_0p_0 - \int_{-\infty}^{y_0} F_Y(x)dx \\ &= \int_0^{p_0} F_Y^{-1}(u)du. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Entonces para $u \in [p_0, p_1]$, $F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \geq 0$. Por tanto, la aplicación $p \mapsto \int_0^p [F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)]du$. es no-decreciente para $p \in [p_0, p_1]$. Por tanto, para $p \in [p_0, p_1]$

$$\int_0^p F_X^{-1}(u)du \geq \int_0^p F_Y^{-1}(u)du \tag{3.8}$$

Entonces, con las ecuaciones (3.6) y (3.8), se obtiene la expresión (3.2).

Para la otra implicación, como

$$\int_{p_2}^{1} F_X^{-1}(u)du \leq \int_{p_2}^{1} F_Y^{-1}(u)du,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int_{y_2}^{\infty} S_X(x)dx &= \int_{p_2}^{1} F_X^{-1}(u)du - y_2(1-p_2) \\ &\leq \int_{p_2}^{1} F_Y^{-1}(u)du - y_2(1-p_2) \\ &= \int_{y_2}^{\infty} S_Y(x)dx.\end{aligned}$$

De aquí que para $x \in [y_1, y_2]$ se tenga que $S_X(x) - S_Y(x) \leq 0$ y entonces para $y \in [y_1, y_2]$ la aplicación $y \mapsto \displaystyle\int_{y}^{\infty} [S_X(x) - S_Y(x)]dx$ sea no-decreciente. De aquí que para $y \in [y_1, y_2]$.

$$\int_{y}^{\infty} S_X(x)dx \leq \int_{y}^{\infty} S_Y(x)dx$$

Pero por (3.2) se tiene que

$$\int_{0}^{p_0} F_X^{-1}(u)du \geq \int_{0}^{p_0} F_Y^{-1}(u)du.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{y_0} F_X(x)dx &= y_0p_0 - \int_{0}^{p_0} F_X^{-1}(u)du \\ &\leq y_0p_0 - \int_{0}^{p_0} F_Y^{-1}(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{y_0} F_Y(x)dx \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Es decir, para $x \in [y_0, y_1]$ se tiene que $F_X(x) - F_Y(x) \leq 0$ y entonces para $y \in [y_0, y_1]$ la aplicación $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{y} [F_X(x) - F_Y(x)]dx$ es no-creciente. Entonces por la expresión (3.9)

$$\int_{-\infty}^{y} F_X(x)dx \leq \int_{-\infty}^{y} F_Y(x)dx, \quad y \in [y_0, y_1].$$

□

Corolario 3.4.1.

Sean X, Y riesgos tales que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$ y $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$

(i) $X \preceq_{CX} Y$ si y sólo si para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+]$.

(ii) $X \preceq_{TVaR} Y$ si y sólo si para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+]$.

Entonces, los ordenamientos $\preceq_{CX}$ y $\preceq_{TVaR}$ se pueden interpretar como primas de reaseguro asociados a una cobertura *stop-loss* i.e. comparación del tipo $\preceq_{TVaR}$ y $\preceq_{CX}$ permitirá comparar contratos *stop-loss* con diferentes retenciones.

3.4.4.1. TVaR y funciones convexas

De la misma forma que la relación $\preceq_{VaR}$ está relacionada con funciones crecientes, las relaciones $\preceq_{CX}$ y $\preceq_{TVaR}$ están relacionadas con funciones convexas, y convexas crecientes como lo establece el siguiente resultado.

Proposición 3.4.9.

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$

(i) $X \preceq_{CX} Y$ si y sólo si para toda función convexa $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ (siempre que $\mathbb{E}[g(X)]$, $\mathbb{E}[g(Y)]$ existan).

(ii) $X \preceq_{CX} Y$ si y sólo si para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g'' \geq 0$ $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ (siempre que $\mathbb{E}[g(X)]$, $\mathbb{E}[g(Y)]$ existan).

Demostración:

($\Leftarrow$) Esta implicación es directa pues la aplicación $x \mapsto (x-t)_+$ es convexa.

Entonces $\mathbb{E}((X-t)_+) \leq \mathbb{E}((Y-t)_+)$. De aquí que por el inciso (i) del Corolario (3.4.4), $X \preceq_{CX} Y$.

($\Rightarrow$) Como toda función convexa g es el límite uniforme de la sucesión de funciones convexas, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas como

$$g_n(x) = \alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} x + \sum_{j=0}^{n} \beta_j^{(n)} (x - t_j^{(n)})_+$$

donde $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)} \in \mathbb{R}$, $\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_n^{(n)} \geq 0$ y $0 < t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)}$

Aplicando el operador esperanza de ambos lados

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)] &= \alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} \mathbb{E}(X) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j^{(n)} \mathbb{E}[(X - t_j^{(n)})_+] \\
&\leq \alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} \mathbb{E}(X) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j^{(n)} \mathbb{E}[(Y - t_j^{(n)})_+] \text{ pues } X \preceq_{CX} Y \\
&= \mathbb{E}[g(Y)].
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema convergencia monótona

$$\mathbb{E}[g(X)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g_n(X)) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X)(g_n(Y)) = \mathbb{E}(Y).$$

La demostración del inciso (ii) es análoga a la demostración del Teorema 3.4.1

□

Proposición 3.4.10.

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(|X|), \mathbb{E}(|Y|) < \infty$

(i) $X \preceq_{TVaR} Y$ si y sólo si $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ para toda función convexa y creciente $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ (siempre que $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ existan).

(ii) $X \preceq_{TVaR} Y$ si y sólo si $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $g^{'}, g^{''} \geq 0$ (siempre que $\mathbb{E}[g(X)], \mathbb{E}[g(Y)]$ existan).

Observación 3.4.2.

Heurísticamente, las funciones convexas son aquellas que toman sus valores más altos en intervalos de la forma $[-\infty, a] \cup [b, \infty], a < b$. Por esta razón, si $X \preceq_{CX} Y$ ó $X \preceq_{TVaR} Y$, Y "toma valores extremos" con "más" frecuencia que X, i.e. Y es más "variable" que X.

Una justificación adicional es que si $X \preceq_{CX} Y$ entonces

$$VaR_X(\alpha) \leq VaR_Y(\alpha)$$

esto viene del hecho de que la aplicación $x \mapsto g(x) = x^2$ es convexa. $\triangledown$

El siguiente resultado es una caracterización del $TVaR$ con respecto a la esperanza condicional.

Teorema 3.4.2.

Sean X, Y variables aleatorias. $X \preceq_{CX} Y$ si y sólo si existen variables aleatorias $\tilde{X}, \tilde{Y}$ (definidas en el mismo espacio de probabilidad) tales que $X \stackrel{L}{=} \tilde{X}$, $Y \stackrel{L}{=} \tilde{Y}$ y $\mathbb{E}\left[\tilde{Y}\middle|\tilde{X}\right] = \tilde{X}$

Demostración:

Supóngase que existen variables aleatorias $\tilde{X}, \tilde{Y}$ tales que $X \stackrel{D}{=} \tilde{X}$, $Y \stackrel{D}{=} \tilde{Y}$ y $\mathbb{E}\left[\tilde{Y}\middle|\tilde{X}\right] = \tilde{X}$ Sea g una función convexa; entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &= \mathbb{E}[g(\tilde{X})] = \mathbb{E}\left[g\left(\mathbb{E}(\tilde{Y}|\tilde{X})\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[g(\tilde{Y})|\tilde{X}]\right)\right] \text{ en virtud la desigualdad de Jensen} \\ &= \mathbb{E}[g(\tilde{Y})] = \mathbb{E}[g(Y)]. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(g(Y))$. De aquí que por la proposición 3.4.4.1, $X \preceq_{CX} Y$. $\square$

Corolario 3.4.2.

Sean X, ϵ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(\epsilon) = 0$. Entonces

$$X \preceq_{CX} X + \epsilon$$

Finalmente, se darán criterios para decidir si $X \preceq_{CX} Y$ ó $X \preceq_{TVaR} Y$ en términos de la función de distribución.

Proposición 3.4.11.

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$. Si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x < c$, $F_Y(x) \geq F_X(x)$ y para todo $x > c$, $F_Y(x) \leq F_X(x)$; entonces $X \preceq_{CX} Y$.

Demostración:

Para $t > c$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-t)_+] &= \int_t^{\infty} \mathbb{P}(X > x)dx \\
&\leq \int_t^{\infty} \mathbb{P}(Y > x)dx \\
&= \mathbb{E}[(Y-t)_+].
\end{aligned}$$

Para $t \leq c$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-t)_+] &= \mathbb{E}(X) - \int_0^t \mathbb{P}(X > x)dx \\
&= \mathbb{E}(Y) - \int_0^t \mathbb{P}(Y > x)dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.4.12.

Sean X, Y variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. Si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x < c$, $F_Y(x) \geq F_X(x)$ y para todo $x > c$, $F_Y(x) \leq F_X(x)$; entonces $X \preceq_{TVaR} Y$.

Capítulo 4

Reaseguro óptimo bajo las medidas de riesgo VaR, CTE y CVaR

4.1. Introducción

En la literatura de Teoría del Riesgo, cuando se estudian modelos de reaseguro óptimo, generalmente se supone que la prima de reaseguro se determina bajo el principio del valor esperado.

En el capítulo anterior, ya se estudiaron algunos de estos modelos de reaseguro óptimo bajo los criterios de valor esperado y la varianza. Pero principalmente en el principio del valor esperado. Esto motiva que se quiera estudiar cómo se modifican los modelos de reaseguro óptimo cuando no necesariamente se supone el principio del valor esperado.

La idea de esta sección es estudiar algunos modelos de reaseguro óptimo suponiendo algunos otros principios de primaje y, aún más importante, con criterios de optimización basados en las medidas de riesgo: VaR, CTE y CVaR.

En un principio se considerarán sólo formas de reaseguro cuota-parte y *stop-loss*. Entonces, el problema consistirá en determinar el coeficiente cuota-parte óptimo, $c^* \in [0,1]$, y la retención óptima, $d^* \in [0,\infty)$ para los acuerdos de *stop-loss*. La optimalidad de éstos será con respecto a la optimización del VaR y CTE para funcionales (determinado por los principios de primaje) de la pérdida (re)asegurada.

Posteriormente, sólo bajo el principio de primaje del valor esperado, se buscará dentro de una clase de funciones de riesgo cedido la forma de reaseguro óptimo, i.e. no se pre-supondrá que se está trabajando con una forma de reaseguro particular. Es decir, la solución al problema de reaseguro óptimo en esta parte es más ambiciosa ya que también dará una forma explícita a la forma de reaseguro óptima (*stop-loss*, cuota-parte, *share-loss*, *surplus*, etc).

Finalmente, se dará un pequeño giro al suponer el principio del valor esperado y se supondrá un principio relacionado con la varianza y se utlizarán al VaR y al CVaR para determinar también la forma de reaseguro óptimo. Tampoco se pre-supondrá una forma de reaseguro si no también se determinará éste; concluyendo que el reaseguro por capas es óptimo (i.e. una combinación de *stop-loss* y cuota-parte).

4.2. Descripción del problema

Como antes, X denotará la pérdida (agregada) inicial que toma una aseguradora en cierto periodo de tiempo (a la que se le aplicará reaseguro). Se supondrá que X es una variable aleatoria no-negativa en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con F_X continua en $(0, \infty)$ con un posible salto en $x = 0$. También se supondrá que $\mathbb{E}(X^k) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}_+$. En una estructura de reaseguro, la aseguradora cede parte de esta pérdida, $g(X)$, a la reaseguradora y la aseguradora retendrá $I_g(X) = X - g(X)$. Al igual que en los capítulos anteriores, se llamará a la función g, *función de pérdida cedida* y a I_g como *función de retención ó de pérdida retenida*. Una restricción natural es que la función de riesgo cedido satisfaga que $0 \leq g(x) \leq x$.

Debido a esta transferencia de riesgo, la aseguradora paga a la reaseguradora una *prima de reaseguro*. Por tanto, la suma de la pérdida retenida más la prima de reaseguro se puede interpretar como el costo total de administrar el riesgo cuando se considera una estrategia de reaseguro.

Notación 4.2.1.

$\pi_g(X)$ denotará la prima de reaseguro que la aseguradora paga a la reaseguradora por la transferencia del riesgo $g(X)$ y $T_g(X)$ representará el costo total ó exposición total al riesgo de la aseguradora bajo una estructura de reaseguro. Entonces,

$$T_g(X) = I_g(X) + \pi_g(X)$$

$\triangledown$

En particular, si se supone el principio de primaje del valor esperado se verá que el *safety loading* de la prima de reaseguro juega un papel fundamental para la obtención de esta estructura de reaseguro óptimo.

Entonces, cuando se considera una estructura de reaseguro, se tiene interés en la exposición total al riesgo $T_g(X)$ en vez de directamente X. Esto claramente sugiere que si se selecciona una función de pérdida cedida adecuada se podrá reducir la exposición al riesgo de una aseguradora.

Ya se dijo que en los mercados asegurador y reasegurador hay una gran variedad de estructuras de reaseguro. Entre éstas, se pueden considerar principalmente

- Cuota-parte: $g(x) = cx$, $I_g(x) = (1-c)x$ con $c \in (0,1)$.

- *Stop-loss*: $g(x) = (x-d)_+$, $I_g(x) = x \wedge d$ con $d \in [0, \infty)$.

- *Change-loss*: $g(x) = c(x-d)_+$, $I_g(x) = (1-c)x + c(x \wedge d)$.

Dos casos particulares en este capitulo son el reaseguro *stop-loss* y el reaseguro cuota-parte. En caso del reaseguro sea *stop-loss* se escribirá $X = I_{sl}(X) + X_R^{sl}$, y en el caso de que el reaseguro cuota-parte se escribirá $X = I_{qs}(X) + X_R^{qs}$.

El objetivo de este capítulo es utilizar las medidas de riesgo VaR, CTE y CVaR para encontrar una estructura de reaseguro óptimo. La optimalidad radicará en la minimización de estas medidas de riesgo para la exposición total al riesgo $T_g(X)$. Entonces, lo primero que hay que hacer es dar las definiciones de estas medidas de riesgo.

A continuación se darán las definiciones, suposiciones y se establecerá el modelo matemático. En particular, se recordarán las definiciones de Valor en Riesgo (VaR), Esperanza Condicional de la cola (CTE) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR) y se estudiarán algunas propiedades de éstos en términos del problema de (rea)seguramieno que se está estudiando.

Definición 4.2.1.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X y $\alpha \in (0,1)$

(i) Se define el Valor en Riesgo al nivel $1-\alpha$ como el cuantil al nivel $1-\alpha$ y se denota por $VaR_X(\alpha)$, es decir

$$VaR_X(\alpha) = \text{ínf}\{z \in \mathbb{R} : F_X(z) \geq 1-\alpha\} = \text{ínf}\{z \in \mathbb{R} : S_X(z) \leq \alpha\}.$$

(ii) Si $\mathbb{E}(X) < \infty$, se define la Esperanza Condicional de la Cola al nivel $1-\alpha$, que se denota como $CTE_X(\alpha)$, como

$$CTE_X(\alpha) = VaR_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx = \mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+].$$

(iii) Si $\mathbb{E}(X) < \infty$, se define el Valor-en-Riesgo Condicional, $CVaR$, de X al nivel de confianza $1-\alpha$ como

$$CVaR_X(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR_X(s)ds.$$

Como $T_g(X) = I_g(X) + \pi_g(X)$ refleja todo el costo de asegurar una pérdida para una función de pérdida cedida g, la idea de administración de riesgos de la aseguradora consistirá -en términos prácticos- en que las medidas de riesgo asociadas con $T_g(X)$ sean lo más pequeñas posibles.

Primero, se empezará con dos estructuras particulares de reaseguro: cuota-parte y *stop-loss*. Dado que ya se decidió utilizar reaseguro cuota-parte ó *stop-loss* se resolverá

(a)
$$VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c^*) = \min_{c\in[0,1]}\{VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\}. \tag{4.1}$$

(b)
$$CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c^*) = \min_{c\in[0,1]}\{CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\}. \tag{4.2}$$

(c)
$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d\geq 0}\{VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\}. \tag{4.3}$$

(d)
$$CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d\geq 0}\{CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\}. \tag{4.4}$$

para diferentes principios de primaje y se darán expresiones explícitas de los parámetros c^* y d^* óptimos.

Posteriormente, sólo bajo el principio del valor esperado se resolverá

(a)
$$\mathrm{VaR}_{T_{g*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha) \right\}. \tag{4.5}$$

(b)
$$\mathrm{CTE}_{T_{g*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) \right\}. \tag{4.6}$$

Donde $\mathcal{G}$ es la clase de funciones de pérdida cedida que consiste de funciones convexas crecientes, g, definidas en $[0, \infty)$ tales que para todo $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq x$, pero excluyendo a la función constante cero. Es decir, esta segunda óptica es ligeramente más compleja ya no que se sabe previamente la estructura de reaseguro que se usará; de hecho, la solución también especificará la forma del contrato de reaseguro (cuota-parte, *stop-loss*, *surplus*, combinaciones de éstos, etc.

Finalmente, para principios de primaje de (re)aseguro relacionados con la varianza de forma
$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \xi(Var(X)), \tag{4.7}$$
(donde $\xi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ es una función no-decreciente tal que $\xi(0) = 0$) se resolverá

(a)
$$VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}^+} \{VaR_{T_g(X)}(\alpha)\}, \tag{4.8}$$

(b)
$$CVaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}^+} \{CVaR_{T_g(X)}(\alpha)\}, \tag{4.9}$$

donde $\mathcal{G}^+$ es la clase de funciones de pérdida cedida admisibles, $\mathcal{G}^+ := \{0 \leq g(x) \leq x : I_g(\cdot)$ y g son no-decrecientes$\}$.

En particular para $\xi(x) = \gamma \cdot x$ se analizará el principio de la varianza y con $\xi(x) = \theta\sqrt{x}$ el principio de la desviación estándar.

Es decir, en la última parte se establecerá que el reaseguro por capas es óptimo con respecto a las medidas de riesgo VaR y $CVaR$ y todos los principios relacionados con la varianza, adicionalmente se determinarán los parámetros óptimos del reaseguro por capas.

4.3. Optimización bajo el criterio del VaR

4.3.1. Optimización de reaseguro *cuota-parte*

Ya se estableció que cuando hay un acuerdo de reaseguro, se divide la pérdida entre la aseguradora y reaseguradora. En particular, para el caso del reaseguro cuota-parte

$$X = I_{qs}(X) + X_R^{qs} = (1-c)X + cX.$$

Además, la variable del costo total de la aseguradora cuando hay una acuerdo de reaseguro cuota-parte está dada por

$$T_{qs}(X) = I_{qs}(X) + \pi(X_R^{qs}) = (1-c)X + \pi(cX).$$

Entonces por el corolario 3.3.1 del Capítulo 3, el VaR de la variable del costo total de la aseguradora está dado por

$$VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha) = VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha) + \pi(X_R^{qs}) = VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha) + \pi(cX).$$

Es decir, $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha)$ depende del valor de $VaR_{I_{qs}(X)}$. Por tanto, el siguiente objetivo es obtener una expresión para dicha cantidad.

Primero, se obtendrá la función de supervivencia de la variable $I_{qs}(X) = (1-c)X$.

Proposición 4.3.1.

La función de supervivencia de la retención de la aseguradora bajo reaseguro cuota-parte es

$$S_{I_{qs}(X)}(x) = \begin{cases} S_X\left(\dfrac{x}{1-c}\right), & \text{si } c \in [0,1) \\ 0, & \text{si } c = 1. \end{cases}$$

Demostración:

Caso 1: Si $c = 1$

$$S_{I_{qs}(X)}(x) = \mathbb{P}\left((1-c)X > x\right) = \lim_{\xi\to\infty} S_X(\xi) = 0.$$

Caso 2: Si $c \in [0,1)$

$$S_{I_{qs}(X)}(x) = \mathbb{P}\left((1-c)X > x\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{x}{1-c}\right) = S_X\left(\frac{x}{1-c}\right).$$

$\square$

Notación 4.3.1.

Para $\alpha \in (0,1), c \in [0,1)$, $VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha; c)$ será el VaR de $I_{qs}(X)$ con cesión del cuota-parte c. $\triangledown$

Corolario 4.3.1.

Si $\alpha \in (0, S_X(0))$, $c \in [0,1]$. Entonces el Valor en Riesgo de la retención y costo total están dados por

(i) $VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha; c) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) = (1-c)VaR_X(\alpha)$.

(ii) $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \pi(cX)$.

Demostración:

(i) Se puede demostrar directamente con el corolario (3.3.1) del Capítulo 3. Alternativamente,

$$\begin{aligned} VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha; c) &= \text{ínf}\{z \in \mathbb{R} : S_{I_{qs}(X)}(z) \leq \alpha\} \\ &= \text{ínf}\left\{z \in \mathbb{R} : S_X\left(\frac{z}{1-c}\right) \leq \alpha\right\} \\ &= (1-c) \cdot \text{ínf}\left\{z \in \mathbb{R} : S_X(z) \leq \alpha\right\} \\ &= (1-c)VaR_X(\alpha). \end{aligned}$$

(ii) Inmediato.

$\square$

A continuación se enunciará el primer resultado en el que se establecen las condiciones necesarias para la existencia del parámetro de cesión óptimo bajo el criterio del VaR.

Teorema 4.3.1.

Considerése el problema de optimización

$$VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c^*) = \min_{c\in[0,1]}\{VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\}.$$

(i) Supóngase que el principio de primaje satisface que $\pi(0) = 0$. Además que $\pi(cX) = c\pi(X)$ para $c > 0$ constante. Entonces el problema de optimización tiene solución y el coeficiente óptimo de cuota-parte está dado por:

$$c^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(X) > S_X^{-1}(\alpha) \\ 1 & \text{si } \pi(X) < S_X^{-1}(\alpha), \end{cases}$$

y cualquier $c^* \in [0, 1]$ será óptima si $\pi(X) = S_X^{-1}(\alpha)$.

(ii) Si la aplicación $c \mapsto \pi(cX)$ es estrictamente convexa para $c \in [0, 1]$, entonces existe solución si y sólo si existe una constante $c^* \in (0, 1)$ tal que $\frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)|_{c=c^*} - S_X^{-1}(\alpha) = 0$ y dicho c^* es el coeficiente cuota-parte óptimo.

Demostración:

(i) Nótese que

$$\begin{aligned} VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) &= (1 - c)S_X^{-1}(\alpha) + c\pi(X) \\ &= S_X^{-1}(\alpha) + c(\pi(X) - S_X^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

Es decir, la aplicación $c \mapsto VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)$ es una recta con pendiente $(\pi(X) - S_X^{-1}(\alpha))$ y ordenada al origen $S_X^{-1}(\alpha)$.

- Si $\pi(X)-S_X^{-1}(\alpha) > 0$ entonces el mínimo de $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)$ se alcanza en $c = 0$.
- Si $\pi(X)-S_X^{-1}(\alpha) < 0$ entonces el mínimo de $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)$ se alcanza en $c = 1$.
- Si $\pi(X) - S_X^{-1}(\alpha) = 0$ entonces $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) = S_X^{-1}(\alpha)$ es constante con respecto a $c \in [0, 1]$, por lo tanto todo $c \in [0, 1]$ es óptimo.

(ii) Como $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \pi(cX)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial c} VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) = -S_X^{-1}(\alpha) + \frac{\partial}{\partial c}\pi(cX),$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial c^2} VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) = \frac{\partial^2}{\partial c^2}\pi(cX).$$

Como $c \mapsto \pi(cX)$ es convexa, entonces $c \mapsto VaR_{T_{qs}(X)(\alpha;c)}$ es convexa. Entonces $VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)$ alcanza su mínimo en c^* tal que $\frac{\partial}{\partial c} VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)|_{c=c^*} = 0$ i.e. $-S_X^{-1}(\alpha) + \frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)|_{c=c^*} = 0$. $\square$

Proposición 4.3.2.

Considérese el problema de optimización

$$VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c^*) = \min_{c\in[0,1]} \left\{VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\right\}.$$

Para los siguientes principios de primaje, la cesión óptima es $c^* = 0$ si $\pi(X) > S_X^{-1}(\alpha)$ y $c^* = 1$ si $\pi(X) < S_X^{-1}(\alpha)$.

(1) $\pi(X) = (1+\beta)\mathbb{E}(X), \quad \beta > 0.$

(2) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)}, \quad \beta > 0.$

(3) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\dfrac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad \beta > 0.$

(4) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)} + \gamma\dfrac{VaR(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad \beta, \gamma > 0.$

(5) $\pi(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}.$

(6) $\pi(X) = \mathbb{E}(X^p)^{1/p}, \quad p > 1.$

(7) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]}, \quad \beta \in (0, 1).$

(8) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+], \quad \beta \in (0, 1].$

(9) $\pi(X) = \int_0^\infty (\mathbb{P}(X \geq t))^{1/p} \; dt.$

(10) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(|X - X'|)$ donde X' es una copia independiente de X.

(11) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta[F_X^{-1}(1-p) - \mathbb{E}(X)]$, $\beta > 0$ $p \in (0, 1)$.

(12) $\pi(X) = \frac{1}{p}\int_{1-p}^1 F_X^{-1}(x)dx$, $p \in (0, 1)$.

Demostación:

Por la proposición 1.2.2 del Capítulo 1, estos principios de primaje son homogéneos en primer grado, i.e. $\pi(cX) = c\pi(X)$ y el Teorema 4.3.1 demuestra este resultado. $\square$

Proposición 4.3.3.

Considerése el problema de optimización

$$VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha : c^*) = \min_{c\in[0,1]} \left\{VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\right\}.$$

(i) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta \cdot Var(X), \beta > 0$; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0, 1)$ si y sólo si $\mathbb{E}(X) < S_X^{-1}(\alpha) < \mathbb{E}(X) + 2\beta \cdot Var(X)$ y el coeficiente cuota-parte óptimo es

$$c^* = \frac{S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X)}{2\beta \cdot Var(X)}.$$

(ii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]$, $\beta > 0$; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0, 1)$ si y sólo si $\mathbb{E}(X) < S_X^{-1}(\alpha) < \mathbb{E}(X) + 2\beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]$,
y el coeficiente cuota-parte óptimo si

$$c^* = \frac{S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X)}{2\beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]}.$$

(iii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - Var(X)}, \gamma > 0$, $\gamma^2 > Var(X)$; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0, 1)$ si y sólo si $S_X^{-1}(\alpha) > \mathbb{E}(X)$ y

$$\frac{[S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X)]\gamma}{\sqrt{Var(X)[Var(X) + (S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X))^2]}} < 1,$$

y el coeficiente cuota-parte óptimo si

$$c^* = \frac{[S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X)]\gamma}{\sqrt{Var(X)[Var(X) + (S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X))^2]}}.$$

(iv) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + 2\beta Var(X) - \beta Cov(X,Y)$, $\beta > 0$ y Y variable aleatoria; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si $\mathbb{E}(X) > \beta Cov(X,Y)$ y $\mathbb{E}(X) - \beta Cov(X,Y) < S_X^{-1} < 4\beta Var(X) + \mathbb{E}(X) - \beta Cov(X,Y)$ y coeficiente cuota-parte óptimo es

$$c^* = \frac{S_X^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}(X) + \beta Cov(X,Y)}{4\beta Var(X)}.$$

(v) Para el principio de primaje $\pi(X) = \frac{1}{\beta}\mathbb{E}(e^{\beta X})$, $\beta > 0$; el problema de reaseguro *cuota-parte* tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si existe una constante $c^* \in (0,1)$ si y sólo si existe una constante $c^* \in (0,1)$ tal que

$$\mathbb{E}(Xe^{c^*\beta X}) = S_X^{-1}(\alpha)\mathbb{E}(e^{c^*\beta X}),$$

y dicha c^* es el coeficiente cuota-parte óptimo.

4.3.2. Optimización de reaseguro *stop-loss*

Como antes, cuando hay un acuerdo de reaseguro, se divide la pérdida entre la aseguradora y reaseguradora. Para el caso del reaseguro *stop-loss*

$$X = I_{sl}(X) + X_R^{sl} = (X \wedge d) + (X - d)_+.$$

Además, la variable del costo total de la aseguradora cuando hay una acuerdo de reaseguro *stop-loss* está dada por

$$T_{sl}(X) = I_{sl}(X) + \pi(X_R^{sl}) = (X \wedge d) + \pi((X - d)_+).$$

Entonces por el Corolario 3.3.1 del Capítulo 3, el VaR de la variable del costo total de la aseguradora está dado por

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha) = VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha) + \pi(X_R^{sl}) = VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha) + \pi((X - d)_+).$$

Es decir, $VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha)$ depende del valor de $VaR_{I_{sl}(X)}$. Por tanto, el siguiente objetivo es obtener una expresión para dicha cantidad.

Primero, se obtendrá la función de supervivencia de la variable $I_{sl}(X) = X \wedge d$.

Proposición 4.3.4.

La función de supervivencia de la retención de la aseguradora bajo reaseguro *stop-loss* es

$$S_{I_{sl}(X)}(x) = \begin{cases} S_X(x) & \text{si } x \in [0, d) \\ 0 & \text{si } x \geq d. \end{cases}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
S_{I_{sl}(X)}(x) &= \mathbb{P}(I_{sl}(X) > x) = \mathbb{P}(X \wedge d > x) \\
&= \mathbb{P}(X \wedge d > x, X \leq d) + \mathbb{P}(X \wedge d > x, X > d) \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(X > x, X \leq d) + \mathbb{P}(X > d) & \text{si } x < d \\ 0 & \text{si } x \geq d \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(x < X \leq d) + \mathbb{P}(X > d) & \text{si } x < d \\ 0 & \text{si } x \geq d \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_X(x) - S_X(d) + S_X(d) & \text{si } x < d \\ 0 & \text{si } x \geq d \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_X(x) & \text{si } x \in [0, d] \\ 0 & \text{si } x \geq d. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Notación 4.3.2.

Para $\alpha \in (0, 1), d \in [0, \infty]$, $VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha; d)$ será el VaR de $I_{sl}(X)$ con retención *stop-loss* d. ▽

A continuación se probará un lema técnico.

Lema 4.3.1.

$$\int_{VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha;d)}^{\infty} S_{I_{sl}(X)}(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ \displaystyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\int_{VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha;d)}^{\infty} S_{I_{sl}(X)}(x)dx &= \int_{VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha;d)}^{d} S_X(x)dx \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{d}^{d} S_X(x)dx & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ \displaystyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ \displaystyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.3.5.

El valor en riesgo de la retención y costo total de la aseguradora está dada por

(i)

$$VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha; d) = \begin{cases} d & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ S_X^{-1}(\alpha) & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

(ii)

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) = \begin{cases} d + \pi((X-d)_+) & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ S_X^{-1}(\alpha) + \pi((X-d)_+) & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

A continuación se enunciará un resultado en el que se establecen las condiciones necesarias para la existencia del parámetro de retención óptima bajo el criterio del VaR.

Teorema 4.3.2.

Considérese el problema de optimización

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d\geq 0}\{VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\}.$$

Supóngase que el principio de primaje de reaseguro $\pi((X-d)_+)$ es decreciente con respecto a d.

(i) El problema de minimización *stop-loss* tiene solución óptima si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(a) La aplicación $d \mapsto d + \pi((X-d)_+)$ es creciente en $[0, S_X^{-1}(\alpha)]$.

(b) Existe una constante $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$ tal que la aplicación $d \mapsto d+\pi((X-d)_+)$ es creciente en $[0, d_0]$ y decreciente $(d_0, S_X^{-1}(\alpha)]$.

Además si se cumple (a) ó (b), la retención óptima d^* está dada por

$$d^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(X) < S_X^{-1}(\alpha) \\ \infty & \text{si } \pi(X) > S_X^{-1}(\alpha), \end{cases}$$

y $d^* = 0$ ó $d^* = \infty$ si $\pi(X) = S_X^{-1}(\alpha)$.

(ii) Si el principio de primaje satisface $\lim_{d\to\infty} \pi((X-d)_+) = 0$ y existe una constante $d_0 \in [0,\infty)$ tal que la aplicación $d \mapsto d+\pi((X-d)_+)$ es decreciente en $[0, d_0]$ y creciente en (d_0, ∞) entonces el problema de minimización de reaseguro óptimo tiene solución si y sólo si

$$S_X^{-1}(\alpha) > d_0 + \pi((X-d_0)_+).$$

Además, si el problema de minimización tiene solución, d_0 es el nivel de retención óptima de $VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)$ y

$$\min_{d\geq 0}\{VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\} = d_0 + \pi((X-d_0)_+).$$

Demostración:

Recuérdese que

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) = \begin{cases} d + \pi((X-d)_+) & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ S_X^{-1}(\alpha) + \pi((X-d)_+) & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Como $d \mapsto \pi((X-d)_+)$ es decreciente, entonces $d \mapsto S_X^{-1}(\alpha) + \pi((X-d)_+)$ decreciente, pero no se puede afirmar algo con respecto al crecimiento ó decrecimiento de $d \mapsto S_X^{-1}(\alpha) + \pi((X-d)_+)$. Entonces, $d \mapsto VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)$ es decreciente si $d > S_X^{-1}(\alpha)$.

Además, si $\lim\limits_{d\to\infty} \pi((X-d)_+) = 0$ entonces $\lim\limits_{d\to\infty} VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) = S_X^{-1}(\alpha)$ (la hipótesis de que $\lim\limits_{d\to\infty} \pi((X-d)_+) = 0$ es natural, pues si la retención de la aseguradora es "alta" entonces la prima de reaseguro será "baja".

Entonces, para mostrar la existencia de una solución óptima, sólo se tiene que buscar en el intervalo $[0, S_X^{-1}(\alpha)]$. En dicho intervalo,

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) = d + \pi((X-d)_+).$$

Entonces,

- Si se cumple la hipótesis (i-a), entonces $VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)$ alcanza su mínimo en $d = 0$.
- Si se cumple la hipótesis (i-b), entonces $VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)$ alcanza su mínimo en $d = \infty$.

Pero $VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; 0) = 0 + \pi((X-0)_+) = \pi(X)$ y $\lim\limits_{d\to\infty} VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) = S_X^{-1}(\alpha)$.

Es decir,

$$d^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(X) < S_X^{-1}(\alpha) \\ \infty & \text{si } \pi(X) > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Supóngase que $S_X^{-1}(\alpha) > d_0 + \pi((X-d_0)_+)$. Nótese que $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$, pues si $d_0 \geq S_X^{-1}(\alpha)$ entonces $\pi((X-d_0)_+) + d_0 \geq S_X^{-1}(\alpha)$, que sería una contradicción a la hipótesis.

Como $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$, $S_X^{-1}(\alpha) > d_0 + \pi((X-d_0)_+) = VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d_0)$ y $d \mapsto d + \pi((X-d)_+)$ es decreciente enn $[0, d_0]$ y creciente en $[d_0, \infty)$ entonces $\text{mín}_{d\geq 0}\{VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\}$ existe.

Como existe el punto crítico de $d \mapsto d + \pi((X-d)_+)$ y $\text{mín}_{d\geq 0}\{VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\} = VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d_0)$ entonces $S_X^{-1}(\alpha) > d_0 + \pi((X-d_0)_+)$. $\square$

Lema 4.3.2.

Para $d \leq 0$ se satisface

1. $\frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}[(X-d)_+] = -S_X(d)$.
2. Para $m \in \mathbb{N}_+$, $\frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}[(X-d)_+^m] = -m\mathbb{E}[(X-d)_+^{m-1}]$.
3. $\frac{\partial}{\partial d}Var[(X-d)_+] = -2(1-S_X(d))\mathbb{E}[(X-d)_+]$.

Demostración:

1.

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}[(X-d)_+] = \frac{\partial}{\partial d}\int_d^\infty S_X(x)dx = -S_X(d)$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}[(X-d)_+^m] &= \frac{\partial}{\partial d}\left(m\int_d^\infty (x-d)^{m-1}S_X(x)dx\right). \\
&= m\frac{\partial}{\partial d}\int_d^\infty (x-d)^{m-1}S_X(x)dx + \int_d^\infty (x-d)^{m-1}S_X(x)dx. \\
&= -m(m-1)\int_d^\infty (x-d)^{m-2}S_X(x)dx = -m\mathbb{E}[(X-d)_+^{m-1}].
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
Var[(X-d)_+] &= \frac{\partial}{\partial d}\left[\mathbb{E}[(X-d)_+^2 - \mathbb{E}^2[(X-d)_+]\right] \\
&= -2\mathbb{E}[(X-d)_+^{2-1}] - \frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}^2[(X-d)_+] \\
&= -2\mathbb{E}[(X-d)_+] - 2\mathbb{E}[(X-d)_+]\frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}[(X-d)_+] \\
&= -2\mathbb{E}[(X-d)_+] + 2\mathbb{E}[(X-d)_+](-S_X(d)) \\
&= -2(1-S_X(d))\mathbb{E}[(X-d)_+].
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 4.3.1.

Si la prima $\pi(\cdot)$ satisface la hipótesis (ii) del Teorema 4.3.2 y d_0 es la única constante en $[0, S_X^{-1}(\alpha)]$ tal que $d \mapsto d + \pi((X-d)_+)$ es decreciente en $[0, d_0]$ y creciente en $[d_0, S_X^{-1}(\alpha)]$, entonces es la única solución al problema de optimización 4.3. $\triangledown$

Proposición 4.3.6.

Considérese el problema de optimización

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d\in[0,\infty]} \left\{ VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) \right\}.$$

Para los siguientes principios de primaje, la retención óptima es $d_0 = 0$ si $\pi(X) < S_X^{-1}(\alpha)$ y $d^* = \infty$ si $\pi(X) > S_X^{-1}(\alpha)$:

(i) $\pi(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

(ii) $\pi(X) = \mathbb{E}(X^p)^{1/p}, \quad p > 1$.

(iii) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]}, \quad \beta \in (0,1)$.

(iv) $\pi(X) = \int_0^\infty (\mathbb{P}(X \geq t))^{1/p} \; dt$.

(v) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta[F_X^{-1}(1-p) - \mathbb{E}(X)]$, $\beta > 0$ $p \in (0,1)$.

(vi) $\pi(X) = \frac{1}{p}\int_{1-p}^1 F_X^{-1}(x)dx$, $p \in (0,1)$.

(vii) $\pi(X) = \frac{1}{\beta}\mathbb{E}(e^{\beta X})$, $\beta > 0$.

Proposición 4.3.7.

Considerése el problema de optimización

$$VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d\in[0,1]} \left\{VaR_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\right\}.$$

(i) Para el principio de primaje $\pi(X) = (1+\beta)\mathbb{E}(X), \beta > 0$; el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* \in (0,\infty)$ si y sólo si

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + (1+\beta)\int_{d_0}^{\infty} S_X(x)dx,$$

donde $d_0 = S_X^{-1}\left(\dfrac{1}{1+\beta}\right)$. Además es la única retención óptima.

(ii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))_+]$, $\beta \in (0,1]$; si existe $d_0 > 0$ tal que $\beta \cdot S_X(d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+]) = 1$ entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* \in (0,\infty)$ si y sólo si

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+] + \beta\mathbb{E}[((X-d_0)_+ - \mathbb{E}[(X-d_0)_+])_+].$$

Además, $d^* = d_0$ es la única retención óptima.

(iii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta Var(X)$, $\beta > 0$; si existe $d_0 > 0$ tal que $2\beta\mathbb{E}[(X-d_0)_+] = 1$, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* \in (0,\infty)$ si y sólo si.

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 \geq \mathbb{E}[(X-d_0)_+] + \beta Var[(X-d_0)_+],$$

Además, $d^* = d_0$ es la única retención óptima.

(iv) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+^2]$, $\beta > 0$; si existe $d_0 > 0$ tal que $2\beta\mathbb{E}[(X - d_0 - \mathbb{E}[(X - d_0)_+)_+] = 1$, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* \in (0, \infty)$ si y sólo si

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X - d_0)_+] + \beta\mathbb{E}[((X - d_0)_+ + \mathbb{E}[(X - d_0)_+])_+^2].$$

Además, $d^* = d_0$ es la única retención óptima.

(v) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - Var(X)}$, $\gamma > 0$, $\gamma^2 > Var(X)$; si existe $d_0 > 0$ tal que $\dfrac{\mathbb{E}[(X - d_0)_+]}{\gamma^2 - Var[(X - d_0)_+]} = 1$, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima si y sólo si

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X - d_0)_+] + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - Var[(X - d_0)_+]}.$$

Además, $d^* = d_0$ es la única retención óptima.

4.3.3. Elección óptima del tipo de forma de reaseguro

La idea de Cai & Tan (2007), suponiendo el principio de primaje de esperanza para la prima de reaseguro $\pi_g(X) = (1+\rho)\mathbb{E}(g(X))$ (donde $\rho > 0$ es el *safety loading*, es determinar las funciones de pérdida cedida que minimicen las medidas de riesgo (VaR y CTE) del costo total $T_g(X)$ en algunas clases de funciones pérdida particulares.

Definición 4.3.1.

Sea $\mathcal{G}$ la clase de funciones de pérdida cedida que consiste de funciones convexas crecientes, g, definidas en $[0, \infty)$ tales que para todo $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq x$, pero excluyendo a la función constante cero.

Observación 4.3.2.

Todas las funciones en $\mathcal{G}$ son continuas en $[0, \infty)$ ya que son monótonas y convexas. ▽

El modelo de reaseguro óptimo se puede formular de la siguiente manera

(i) Optimización del VaR

$$\mathrm{VaR}_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha) \right\}. \tag{4.10}$$

(ii) Optimización del CTE

$$\mathrm{CTE}_{T_{g*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) \right\}. \tag{4.11}$$

Un primer planteamiento intentará encontrar la posible solución mediante "aproximaciones". Para esto, se necesitarán algunas definiciones auxiliares.

Definición 4.3.2.

Sea $\mathcal{H}$ la clase de las funciones de pérdida cedida que consiste de todas las funciones no-negativas, h, definidas en $[0, \infty)$ de la siguiente forma

$$\text{Para } n \in \mathbb{N}_+, \ h(x) := \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+, \tag{4.12}$$

donde para todo $n \in \mathbb{N}_+$, $c_{n,j} > 0$, $d_{n,j} \geq 0$ son constantes tales que

$$0 < \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} \leq 1,$$

y $\{d_{n,m}\}_{m=1}^{n}$ es una sucesión finita, no-decreciente.

Es importante estudiar reaseguro óptimo en $\mathcal{H}$ ya que $\mathcal{H}$ es una subclase de $\mathcal{G}$. Además con una metodología análoga a la de Müller & Stoyan (2002) Teorema 1.5.7 p.18 con respecto a un orden creciente convexo, cualquier función en $\mathcal{G}$ es el límite de una sucesión de funciones $\mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{H}$ es una subclase densa en $\mathcal{G}$. Por tanto, utilizando algunos teoremas de convergencia del VaR y CTE, se demostrará que las funciones óptimas en $\mathcal{H}$, que minimizan el VaR y el CTE del costo total, $T_h(X)$, (para $h \in \mathcal{H}$) también minimizan óptimamente al VaR y CTE del costo total, $T_g(X)$, para $g \in \mathcal{G}$.

La importancia de los primeros resultados que se analizarán es que establecen que el reaseguro óptimo puede tener forma *stop-loss*, cuota-parte ó *change-loss*, dependiendo de los niveles de confianza de las medidas de riesgo y del *safety loading* que se esté cobrando.

Se supondrá que X tiene función de distribución F_X continua en $(0, \infty)$ con un posible salto en $x = 0$. Esto permite que X se pueda representar como una suma aleatoria $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Bajo la suposición de que la prima de reaseguro se determina utilizando el principio de prima esperada, para cualquier función $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$ la prima de reaseguro sobre la pérdida cedida $h(X)$ se puede escribir como

$$\pi_h(X) = (1+\rho)\mathbb{E}[h(X)] = (1+\rho)\left[\sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\int_{d_{n,j}}^{\infty} S_X(x)dx\right]. \tag{4.13}$$

Notación 4.3.3.

Para $i \in \{1,\ldots,n\}$ defínase

$$A_{n,i} := 1 - \sum_{j=1}^{i} c_{n,j} \text{ y } B_{n,i} := \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}d_{n,j}.$$

$\triangledown$

Proposición 4.3.8.

La pérdida retenida para las funciones en $\mathcal{H}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_h(x) = x - h(x) &= x - \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x-d_{n,j})_+ \\ &= \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq d_{n,1} \\ A_{n,i}\cdot x + B_{n,i} & \text{si} \quad d_{n,i} \leq x \leq d_{n,i+1} \\ & \qquad i \in \{1,\ldots,n-1\} \\ A_{n,n}\cdot x + B_{n,n} & \text{si} \quad x \geq d_{n,n}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Si se escribe $I_h(X)$ de la forma que se hace en la proposición anterior se puede observar que $I_h(X)$ es una función de X cóncava no-decreciente, además los coeficientes de $I_h(X)$ satisfacen

$$A_{n,i}d_{n,i+1} + B_{n,i} = A_{n,i+1}d_{n,i+1} + B_{n,i+1} \text{ para } i \in \{1,\ldots,n-1\}.$$

A partir de la expresión (4.14) se puede demostrar el siguiente resultado

Proposición 4.3.9.

La función de supervivencia de la retención aproximada de la reaseguradora está dada por

$$S_{I_h(X)}(x) = \begin{cases} S_X(x) & \text{si} \quad x \leq d_{n,1} \\ S_X\left(\frac{x-B_{n,n}}{A_{n,i}}\right) & \text{si} \quad \begin{array}{r} i \in \{1,\dots,n-1\} \\ A_{n,i}d_{n,i} + B_{n,i} \leq x \leq A_{n,i}d_{n,i+1} + B_{n,i} \end{array} \\ S_X\left(\frac{x-B_{n,n}}{A_{n,i}}\right) & \text{si} \quad x \geq A_{n,n}d_{n,n} + B_{n,n}, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde si $A_{n,i} \equiv 0$ para algún $i \in \{1,\dots,n\}$, entonces $S_X\left(\frac{x-B_{n,n}}{A_{n,i}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} S_X(x)$

A partir de (4.15) se puede determinar que el VaR de $I_h(X)$ al nivel de confianza $1-\alpha$ está dado por

$$\mathrm{VaR}_{I_h(X)}(\alpha) = \begin{cases} S_X^-(\alpha) & \text{si} \quad S_X^-(\alpha) \leq d_{n,1} \\ A_{n,i}S_X^-(\alpha) + B_{n,i} & \text{si} \quad \begin{array}{r} i \in \{1,\dots,n-1\} \\ d_{n,i} \leq S_X^-(\alpha) \leq d_{n,i+1} \end{array} \\ A_{n,n}S_X^-(\alpha) + B_{n,n} & \text{si} \quad d_{n,n} \leq S_X^-(\alpha). \end{cases} \tag{4.16}$$

Y por tanto también se puede obtener una expresión para el VaR de $T_h(X)$

$$\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha) = \begin{cases} S_X^-(\alpha) + \pi_h(X) & \text{si} \quad S_X^-(\alpha) \leq d_{n,1} \\ A_{n,i}S_x^-(\alpha) + B_{n,i} + \pi_h(X) & \text{si} \quad \begin{array}{r} i \in \{1,\dots,n-1\} \\ d_{n,i} \leq S_X^-(\alpha) \leq d_{n,i+1} \end{array} \\ A_{n,n}S_X^-(\alpha) + B_{n,n} + \pi_h(X) & \text{si} \quad d_{n,n} \leq S_X^-(\alpha). \end{cases}$$

Notación 4.3.4.

$$\rho^* := \frac{1}{1+\rho}, \quad d^* := S_X^-(\rho^*), \tag{4.17}$$

$$\psi(x) := x + \frac{1}{\rho^*}\int_x^\infty S_X(t)dt, \ x \geq 0, \tag{4.18}$$

$$u(x) = S_X^-(x) + \frac{1}{\rho^*}\int_{S_X^-(x)}^\infty S_X^-(t)dt \geq 0. \tag{4.19}$$

$\triangledown$

Y nótese que

$$\begin{aligned}\psi(d^*) &= d^* + \tfrac{1}{\rho^*}\int_{d^*}^\infty S_X(t)dt \\ &= S_X^-(\rho^*) + \tfrac{1}{\rho^*}\int_{S_X^-(\rho^*)}^\infty S_X(t)dt = u(\rho^*),\end{aligned}$$

y

$$\psi(0) = 0 + \frac{1}{\rho^*}\int_0^\infty S_X(t)dt = \frac{1}{\rho^*}\mathbb{E}(X) = (1+\rho)\mathbb{E}(X).$$

El objetivo de esta sección es obtener la función de pérdida cedida óptima en la clase $\mathcal{G}$, g^*, bajo el criterio del VaR, es decir, se resolverá el problema de optimización (4.10). Como ya se dijo antes, primero se encontrarán los óptimos en la clase $\mathcal{H}$ y se probará que también son óptimos en $\mathcal{G}$. Es decir, será suficiente encontrar solución al problema de optimización

$$\mathrm{VaR}_{T_{h*}(X)}(\alpha) = \min_{h\in\mathcal{H}}\left\{\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha)\right\}. \tag{4.20}$$

Los siguientes dos resultados serán útiles para garantizar que las aproximaciones también hacen sentido en el problema de optimización.

Lema 4.3.3.

Para cualquier $g \in \mathcal{G}$, existe una sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ tal que para todo $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = g(x),$$

y para

$$n \in \mathbb{N}_+ \ h_n(x) \leq g(x) \leq x.$$

Proposición 4.3.10.

Las funciones de perdida cedida óptimas que minimizan el VaR del riesgo total de la aseguradora en la clase $\mathcal{H}$ también son óptimas en la clase $\mathcal{G}$.

Demostración:

Sea $h^* \in \mathcal{H}$ una función de pérdida cedida óptima (en la clase $\mathcal{H}$) bajo el criterio VaR.

Se desea demostrar que para cualquier $g \in \mathcal{G}$

$$\mathrm{VaR}_{T_{h^*}(X)}(\alpha) \leq \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha).$$

Por el Lema 4.3.3 existe, una sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = g(x) \text{ para todo } x \in [0,\infty), \tag{4.21}$$

y $h_n(x) \leq g(x) \leq x$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}_+$ y $x \in [0,\infty)$.

A partir de (4.21) y por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[h_n(X)\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} h_n(X)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right].$$

Y por la optimalidad de h^* en $\mathcal{H}$ se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}_+$

$$\mathrm{VaR}_{T_{h^*}(X)}(\alpha) \leq \mathrm{VaR}_{T_{h_n}(X)}(\alpha).$$

Ahora, sean $x_1, x_2 \in [0,\infty), x_1 \leq x_2$.

Afirmación: $I_{h_n}(x_1) \leq I_{h_n}(x_2)$ y $I_g(x_1) < I_g(x_2)$

Prueba:

Por la convexidad en $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$,

$$x_1 - x_2 \leq h_n(x_1) - h_n(x_2) \text{ y } x_1 - x_2 \leq g(x_1) - g(x_2)$$

De aquí que

$$x_1 - h_n(x_1) \leq x_2 - h_n(x_2) \text{ y } x_1 - g(x_1) \leq x_2 - g(x_2)$$

i.e.

$$I_{h_n}(x_1) \leq I_{h_n}(x_2),$$

y

$$I_g(x_1) \leq I_g(x_2).$$

Entonces, las funciones I_{h_n} y I_g son crecientes y continuas. De aquí que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_{h_n}(X) &= \lim_{n\to\infty} \left(I_{h_n}(X) + \pi_{h_n}(X)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(I_{h_n}(X) + (1+\rho)\mathbb{E}(h_n(X))\right)\\ &= I_g(X) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) = T_g(X).\end{aligned}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_{T_{h_n}(X)}(\alpha) = \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)$ y por tanto

$$\mathrm{VaR}_{T_{h^*}(X)}(\alpha) \leq \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)$$

□

Ahora, se intentará encontrar soluciones al modelo de reaseguro óptimo

$$\mathrm{VaR}_{T_{h^*}(X)}(\alpha) = \min_{h\in\mathcal{H}} \left\{\mathrm{VaR}_{T_{h_n}(X)}(\alpha)\right\}$$

Para $\alpha \in (0,1)$ fija y $n \in \mathbb{N}_+$, defínase

$$D_n = \{(d_{n,1} \ldots, d_{n,n}) : 0 \leq d_{n,1} \leq \cdots \leq d_{n,n}\},$$

$$D_n^0 = \left\{(d_{n,1} \ldots, d_{n,n}) : S_X^-(\alpha) \leq d_{n,1} \leq \cdots \leq d_{n,n}\right\},$$

$$D_n^i = \left\{(d_{n,1} \ldots, d_{n,n}) : 0 \leq d_{n,1} \leq \cdots \leq d_{n,i} \leq S_X^-(\alpha) \leq d_{n,i+1} \leq \cdots \leq d_{n,n}\right\},\ i \in \{i \in 1, \ldots, n-1\},$$

$$D_n^n = \left\{(d_{n,1} \ldots, d_{n,n}) : 0 \leq d_{n,1} \leq \cdots \leq d_{n,n} \leq S_X^-(\alpha)\right\}.$$

Nótese que $\{D_n^j\}_{j=0}^n$ forma una partición de D_n, i.e $D_n = \cup_{i=0}^n D_n^i$ y si $i \neq j$ $D_n^i \cap D_n^j = \varnothing$.

Notación 4.3.5.

Para $h(x) = \sum_{j=1}^n c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$, se denotará como $\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n})$ al VaR del costo total de la aseguradora correspondiente a la función de pérdida cedida h como función de $d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}$. ▽

Proposición 4.3.11.

Para cualquier $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$ y un nivel de confianza $1 - \alpha$ tal que $0 < \alpha < S_X^-(\alpha)$.

(i) Si $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \in D_n^0$, entonces

$$\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = S_X^-(\alpha) + \frac{1}{\rho^*}\left[\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_X(x)dx\right].$$

(ii) Para cualquier $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \in D_n^i$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = \left(1 - \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}\right) S_X^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}\psi(d_{n,j}) \\ + \frac{1}{\rho^*}\sum_{j=i+1}^{n} c_{n,j}\int_{d_{n,j}}^{\infty} S_X(x)dx.\end{aligned}$$

(iii) Si $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \in D_n^n$, entonces

$$\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\right) S_X^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\psi(d_{n,j}).$$

La idea es que con estas expresiones para $\mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n})$ se estudie su mínimo sobre el conjunto D_n (para $n \in \mathbb{N}_+$) a partir de su ínfimo sobre D_n^i (para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$).

Proposición 4.3.12.

Considérese un nivel de confianza $1-\alpha$ tal que $0<\alpha<S_X^-(\alpha)$. Para cualquier $h(x)=\sum_{j=1}^n c_{n,j}(x-d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$ con coeficientes $c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,n}$ dados.

(i) Si $\rho^* < S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) \geq u(\rho^*)$, entonces

$$\min_{D_n} VaR_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = S_X^-(\alpha) + \sum_{j=1}^n c_{n,j}(u(\rho *) - S_X^-(\alpha)),$$

y el valor mínimo del VaR se alcanza en $d_{n,1} = \cdots = d_{n,n} = d^*$ ó en

$$h^*(x) = \sum_{j=1}^n c_{n,j}(x-d^*)_+ = \sum_{j=1}^n c_{n,j}(x - S_X^-(\rho^*))_+.$$

(ii) Si $\rho^* \geq S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) \geq \psi(0)$, entonces

$$\min_{D_n} VaR_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = S_X^-(\alpha) + \sum_{j=1}^n c_{n,j}(\psi(0) - S_X^-(\alpha)),$$

y el valor mínimo del VaR se alcanza en $d_{n,1} = \cdots = d_{n,n} = 0$ ó en

$$h^*(x) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} x.$$

(iii) Para los demás casos, $\min_{D_n} VaR_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n})$ no existe.

Con todos estos elementos, ya se está en condiciones de establecer el resultado principal de esta sección. Dicho resultado compara el mínimo $VaR_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n})$ en D_n para cada $n \in \mathbb{N}_+$.

Teorema 4.3.3.

Considérese un nivel de confianza $1-\alpha$ tal que $0<\alpha<S_X^-(\alpha)$.

(i) Si $\rho^* < S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) > u(\rho^*)$, entonces

$$\min_{g\in\mathcal{G}} VaR_{T_g(X)}(\alpha) = u(\rho*),$$

y el valor mínimo del VaR se alcanza en

$$f^*(x) = (x-d^*)_+.$$

(ii) Si $\rho^* < S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) = u(\rho^*)$, entonces

$$\min_{g\in\mathcal{G}} VaR_{T_g(X)}(\alpha) = S_X^-(\alpha).$$

y el valor mínimo del VaR se alcanza en

$$f^*(x) = c(x-d^*)_+,$$

para cualquier constante $c \in (0,1]$.

(iii) Si $\rho^* \geq S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) \geq \psi(0)$, entonces

$$\min_{g\in\mathcal{G}} VaR_{T_g(X)}(\alpha) = \psi(0) = (1+\rho)\mathbb{E}(X),$$

y el valor mínimo del VaR se alcanza en

$$f^*(x) = x.$$

(iv) Si $\rho^* \geq S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) = \psi(0)$, entonces

$$\min_{g\in\mathcal{G}} VaR_{T_g(X)}(\alpha) = S_X^-(\alpha),$$

y el valor mínimo del VaR se alcanza en

$$f^*(x) = cx,$$

para cualquier constante $c \in (0,1]$.

Demostración:

Obsérvese que todas las funciones de pérdida cedida en este Teorema pertenecen a la clase $\mathcal{H}$; y con lo demostrado anteriormente, es suficiente demostrar la optimalidad de estas funciones en la clase $\mathcal{H}$, i.e. que para cualquier $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$,

$$VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) \leq VaR_{T_h(X)}(\alpha).$$

(i) Por el inciso (i) de la Proposición anterior y la hipótesis de que $S_X^-(\alpha) > u(\rho^*)$ se tiene que

$$\begin{aligned} VaR_{T_h(X)}(\alpha) &\geq \min_{D_n} VaR_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = S_X^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(u(\rho^*) - S_X^-(\alpha)) \\ &\geq S_X^-(\alpha) + u(\rho^*) - S_X^-(\alpha) = u(\rho^*). \end{aligned}$$

Y también por el inciso (i) de la Proposición anterior, $VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = u(\rho^*)$ si $\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} = 1$, i.e. si $g^*(x) = (x - d^*)_+$.

$$\therefore VaR_{T_h(X)}(\alpha) \geq u(\rho^*) = VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha).$$

(ii) Por el inciso (i) de la Proposición anterior y la hipótesis de que $S_X^-(\alpha) = u(\rho^*)$ se tiene que

$$\begin{aligned} VaR_{T_h(X)}(\alpha) &\geq \min_{D_n} VaR_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \\ &= S_X^-(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(u(\rho^*) - S_X^-(\alpha)) \geq S_X^-(\alpha). \end{aligned}$$

Y también por el inciso (i) de la Proposición anterior, $VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = S_X^-(\alpha)$ si $\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} = c$, i.e. si $g^*(x) = c(x - d^*)_+$ para cualquier $c \in (0, 1]$

$$\therefore VaR_{T_h(X)}(\alpha) \geq S_X^-(\alpha) = VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha)$$

La demostración de los incisos (iii) y (iv) es análoga. $\square$

Observación 4.3.3.

El Teorema anterior establece que para el problema de optimización basado en el VaR, las estructuras óptimas están dadas por

- Reaseguro *stop-loss* para el inciso (i).
- Reaseguro *change-loss* para el inciso (ii).

- Reaseguro cuota-parte para los incisos (iii) y (iv).

$\triangledown$

Ejemplo 4.3.1.

Considérese la función de pérdida cedida $g(X) = X$, i.e. la aseguradora cede toda su pérdida a la reaseguradora.

En este caso $I_g(X) = 0$ y la exposición total de la aseguradora está dado por $T_g(X) = \pi_g(X) = (1+\rho)\mathbb{E}(X)$.

Sin embargo, el VaR de una constante es la constante misma; entonces $VaR_{T_g(X)}(\alpha) = (1+\rho)\mathbb{E}(X) = \psi(0)$. Además, como $S_X(\cdot)$ es no-decreciente y $S_X(d^*) = S_X(S_X^-(\rho^*)) = \rho^*$ entonces

$$
\begin{aligned}
(1+\rho)\mathbb{E}(X) &= (1+\rho)\left(\int_0^{d^*} S_X(x)dx + \int_{d^*}^{\infty} S_X(x)dx\right) \\
&> S_X^-(\rho^*) + \frac{1}{\rho^*}\int_{S_X^-(\rho^*)}^{\infty} S_X(x)dx = u(\rho^*), \\
&\therefore u(\rho^*) < \psi(0) = (1+\rho)\mathbb{E}(X).
\end{aligned}
$$

Por tanto, $VaR_{T_g(X)}(\alpha)$ es mas grande que los mínimos VaR en los incisos (i) y (ii) del Teorema anterior. Pero, $g(X) = X$ es óptimo en los incisos (iii) y (iv). $\triangledown$

Ejemplo 4.3.2.

Considérese la función de pérdida cedida $g(X) = cX$ con $c \in (0,1]$, i.e. la aseguradora considera una estructura de reaseguro cuota-parte.

En este caso $I_g(X) = (1-c)X$ y la exposición total de la aseguradora está dado por $T_g(X) = (1-c)X + c(1+\rho)\mathbb{E}(X)$. De aqui que

$$
VaR_{T_g(X)}(\alpha) = (1-c)VaR_X(\alpha) + c(1+\rho)\mathbb{E}(X) = (1-c)S_X^-(\alpha) + c(1+\rho)\mathbb{E}(X),
$$

y como $u(\rho^*) < \psi(0) = (1+\rho)\mathbb{E}(X)$, entonces para los incisos (i) y (ii) del Teorema anterior $VaR_{T_g(X)}(\alpha) > (1-c)u(\rho^*) + cu(\rho^*) = u(\rho^*)$. En el inciso (iii), $VaR_{T_g(X)}(\alpha) > (1-c)\psi(0) + c\psi(0) = \psi(0) = c(1+\rho)\mathbb{E}(X)$. Y sorprendentemente $g(X) = cX$ es óptimo en el inciso (iv). $\triangledown$

Ejemplo 4.3.3.

Considérese la función de pérdida cedida $g(X) = (X - d)_+$ con $d \in [0, \infty)$, i.e. la aseguradora considera una estructura de reaseguro *stop-loss*.

En este caso $I_g(X) = X \wedge d$ y la exposición total de la aseguradora está dado por $T_g(X) = X \wedge d + (1+\rho)\mathbb{E}[(X-d)_+]$. Se puede probar que bajo las hipótesis del inciso (i) del Teorema anterior, $\text{mín}_{d \geq 0}\{VaR_{T_g(X)}(\alpha)\}) = u(\rho^*)$ y que el mínimo VaR se alcanza en $S_X^-(\rho^*)$. $\triangledown$

4.3.3.1. Perspectiva constructivista

Ahora, se volverán a revisar algunos de los argumentos dados en la sección anterior ligeramente más intuitivos. Con la "ventaja" de que la aproximación por funciones cóncavas no es necesaria.

Sea $A(g) := \text{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)$. Por las propiedades de continuidad del VaR

$$\begin{aligned} A(g) = \text{VaR}_{T_g(X)}(\alpha) &= \text{VaR}_{I_g(X)}(\alpha) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\ &= I_g(\text{VaR}_X(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\ &= S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)). \end{aligned}$$

$$\therefore A(g) = S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)). \tag{4.22}$$

De aquí que el problema de optimización (4.10) se puede reescribir como

$$\min_{g \in \mathcal{G}} \{A(g)\} = \min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \right\}. \tag{4.23}$$

El siguiente Lema excluye el caso en que g es no nula pero es idénticamente cero en el intervalo $[0, S_X^-(\alpha)]$.

Lema 4.3.4.

Una función de pérdida cedida, $g \in \mathcal{G}$, que es no nula pero idénticamente 0 en $[0, S_X^-(\alpha)]$ no es óptima para el problema (4.23)

Demostración:

Sea $g \in \mathcal{G}$ no nula pero idénticamente 0 en $[0, S_X^-(\alpha)]$. Considérese $g_1 = \frac{1}{2}g \in \mathcal{G}$. Nótese que

$$\begin{aligned}
A(g_1) &= S_X^-(\alpha) - g_1(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g_1(X)) \\
&= S_X^-(\alpha) - \frac{1}{2}g(S_X^-(\alpha)) + \frac{(1+\rho)}{2}\mathbb{E}(g(X)) \\
&= S_X^-(\alpha) + \frac{(1+\rho)}{2}\mathbb{E}(g(X)) \\
&< S_X^-(\alpha) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\
&= S_X^-(\alpha) - 0 + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\
&= S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) = A(g)
\end{aligned}$$

$$\therefore A(g_1) < A(g).$$

$$\therefore g \text{ no es óptima .}$$

□

Gracias a este resultado se supondrá que $\mathcal{G}$ no contiene funciones de pérdida cedida no nulas pero idénticamente cero en $[0, S_X^-(\alpha)]$.

El siguiente lema demuestra que las funciones de pérdida que minimizan $A(\cdot)$ deben ser de la forma $g_{c,d}(x) := c\,(x-d)_+$ para algún $(c,d) \in [0,1] \times [0, S_X^-(\alpha))$. El conjunto de dichas funciones se denotará por $\hat{\mathcal{G}}$. Nótese que $\hat{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$ y $\hat{\mathcal{G}}$ contiene a la función lineal $g_{c,0}(x) = c\,(x-0)_+ = cx, x \geq 0, c \in [0,1]$ y también la función nula $g_{0,d}(x) = 0$.

Lema 4.3.5.

Sea $g \in \mathcal{G}$ una función de pérdida cedida no nula. Entonces existe $g_1 \in \hat{\mathcal{G}}$ tal que $A(g_1) \leq A(g)$

Demostración:

Sean $g'_+(S_X^-(\alpha))$ y $g'_-(S_X^-(\alpha))$ las derivadas derecha e izquierda de g en $S_X^-(\alpha)$, respectivamente.

Sea $\varepsilon \in [g'_-(S_X^-(\alpha)), g'_+(S_X^-(\alpha))]$. Entonces la recta que pasa por el punto $(S_X^-(\alpha), g(S_X^-(\alpha)))$ con pendiente ε es una tangente a la función convexa g (y por tanto siempre está por debajo de la función convexa).

Como para todo $x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq x$ y g no es idénticamente cero en $[0, S_X^-(\alpha)]$, entonces $\varepsilon \in (0, 1]$.

La ecuación de dicha recta es

$$g(x) - g(S_X^-(\alpha)) = \varepsilon(x - S_X^-(\alpha)).$$

Sea d la intersección de dicha recta con el eje de las abscisas, i.e

$$0 - g(S_X^-(\alpha)) = \varepsilon(d - S_X^-(\alpha)),$$

ó equivalentemente

$$-g(S_X^-(\alpha)) = \varepsilon d - \varepsilon S_X^-(\alpha),$$

y

$$d = S_X^-(\alpha) - \frac{1}{\varepsilon} g(S_X^-(\alpha)) \in [0, S_X^-(\alpha)).$$

Defínase $g_1(x) := \varepsilon\,(x - d)_+\,, x \geq 0$. Nótese que $g_1 \in \hat{\mathcal{G}}$ y además

$$\begin{aligned} g_1(S_X^-(\alpha)) \quad &= \varepsilon\left(S_X^-(\alpha) - d\right)_+ \\ &= \varepsilon\left(S_X^-(\alpha) - S_X^-(\alpha) + \tfrac{1}{\varepsilon} g(S_X^-(\alpha))\right)_+ \\ &= \varepsilon\left(\tfrac{1}{\varepsilon} g(S_X^-(\alpha))\right)_+ \\ &= g(S_X^-(\alpha)). \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } g_1(S_X^-(\alpha)) = g(S_X^-(\alpha)).$$

De aquí que

$$\begin{aligned} A(g_1) \quad &= S_X^-(\alpha) - g_1(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g_1(X)) \\ &\leq S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) = A(g) \end{aligned}$$

$$\therefore A(g_1) \leq A(g)$$

Es decir, g_1 es una función tal que $A(g_1) \leq A(g)$. □

Cuando se minimiza $A(g) = S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X))$ hay dos "fuerzas" opuestas: el término $-g(S_X^-(\alpha))$ requiere que g sea lo más grande posible en $S_X^-(\alpha)$ y el término $(1+\rho)\mathbb{E}(g(X))$ requiera que g sea lo más posible pequeña posible. Si el valor de $g(S_X^-(\alpha))$ es fijo, entonces se forza a g a ser una recta que pasa por el punto $(S_X^-(\alpha), g(S_X^-(\alpha)))$. Por tanto, es suficiente considerar la clase $\hat{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$ para resolver el problema (4.23).

Como cada función de pérdida cedida $g_{c,d} \in \hat{\mathcal{G}}$ está completamente especificada por los parámetros c y d, entonces se podrá resolver el problema de optimización mediante técnicas de cálculo tradicionales.

El siguiente Teorema ya se demostró (al menos parcialmente) y de nuevo considera el problema de optimización basado en el VaR. Es ligeramente diferente al que se dió en la sección anterior ya que también se considera a funciones nulas en regiones adecuadas.

Teorema 4.3.4.

Para $\alpha \in (0, S_X(0))$ fija, se cumple que

(i) Si $\rho^* < S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) > u(\rho^*)$, entonces el valor mínimo de A sobre $\mathcal{G}$ es $\psi(d^*)$ y la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = (x - d^*)_+$.

(ii) Si $\rho^* < S_X(0)$ y $S_X(\alpha) = u(\rho^*)$, entonces el valor mínimo de A sobre $\mathcal{G}$ es $\psi(d^*)$ y la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = c\,(x - d^*)_+$ para cualquier $c \in [0, 1]$.

(iii) Si $\rho^* \geq S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) > \psi(0) = (1 + \rho)\mathbb{E}(X)$, entonces el valor mínimo de A sobre $\mathcal{G}$ es $\psi(0) = (1 + \rho)\mathbb{E}(X)$ y la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = x$.

(iv) Si $\rho^* \geq S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) = \psi(0) = (1 + \rho)\mathbb{E}(X)$, entonces el valor mínimo de A sobre $\mathcal{G}$ es $\psi(0) = (1 + \rho)\mathbb{E}(X)$ y la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = cx$ para cualquier $c \in [0, 1]$.

(v) Para todos los demás casos, el valor mínimo de A sobre $\mathcal{G}$ es $S_X^-(\alpha)$ y la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = 0$.

Demostración:

Sea $g_{c,d}(x) = c\,(x - d)_+$ con $(c, d) \in [0, 1] \times [0, S_X^-(\alpha))$ una función de pérdida cedida en $\hat{\mathcal{G}}$. Entonces.

$$
\begin{aligned}
A(g_{c,d}) &= S_X^-(\alpha) - g_{c,d}(S_X^-(\alpha)) + (1 + \rho)\mathbb{E}(g_{c,d}(X)) \\
&= S_X^-(\alpha) - c\left(S_X^-(\alpha) - d\right)_+ + (1 + \rho)c\mathbb{E}[(X - d)_+] \\
&= S_X^-(\alpha) - c\left(S_X^-(\alpha) - d\right)_+ + c(1 + \rho)\int_d^\infty S_X(x)dx.
\end{aligned}
$$

Para minimizar $A(g_{c,d})$ en la región $[0, 1] \times [0, S_X^-(\alpha))$ primero se considerará $c > 0$.

Tomando la derivada parcial de $A(d_{c,d})$ con respecto a $d \in (0, S_X^-(\alpha))$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial d}A(g_{c,d}) &= \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^-(\alpha) - c(S_X^-(\alpha) - d) + c(1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)\\ &= c - c(1+\rho)S_X(d) = c\left[1-(1+\rho)S_X(d)\right].\end{aligned}$$

Nótese que la aplicación $d \mapsto c[1-(1+\rho)S_X(d)]$ es no-decreciente i.e $\frac{\partial}{\partial d}A(g_{c,d}) = 0$ si y sólo si $S_X(d) = \frac{1}{1+\rho} = \rho^*$ ó equivalentemente si $d = d^*$.

Bajo las suposiciones de que $\rho^* < S_X(0)$ y $S_X^-(\alpha) > u(\rho^*)$ se tiene que $d^* = S_X^-(\rho^*) < S_X^-(\alpha)$. Por tanto $A(g_{c,d})$ alcanza su valor mínimo en $d = d^*$ sin importar el valor de c. Entonces se redujo el problema bidimensional a dos problemas unidimensionales sucesivos.

Ahora se considerará la derivada de $A(g_{c,d^*})$ con respecto a c.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c}A(g_{c,d^*}) &= \frac{\partial}{\partial c}\left(S_X^-(\alpha) - c(S_X^-(\alpha) - d^*) + c(1+\rho)\int_{d^*}^\infty S_X(x)dx\right)\\ &= -(S_X^-(\alpha) - d^*) - (1+\rho)\int_{d^*}^\infty S_X(x)dx\\ &= d^* + (1+\rho)\int_{d^*}^\infty S_X(x)dx - S_X^-(\alpha)\\ &= \psi(d^*) - S_X^-(\alpha) = u(\rho^*) - S_X^-(\alpha) < 0,\end{aligned}$$

i.e. la aplicación $c \mapsto A(g_{c,d_*})$ es no-creciente; por tanto su valor mínimo es $c = 1$, y la función de pérdida cedida óptima es $g_{1,d^*}(x) = (x-d)_+$ y también

$$\begin{aligned}A(g_{c,d^*}) &= S_X^-(x) - (S_X^-(\alpha) - d^*) + (1+\rho)\int_{d^*}^\infty S_X(x)dx\\ &= d^* + (1+\rho^*)\int_{d^*}^\infty S_X(x)dx = \psi(d^*).\end{aligned}$$

Una observación importante es que si $c = 0$, entonces

$$A(g_{0,d}) = S_X^-(\alpha) > u(\rho^*) = \psi(d^*) = A(g_{1,d^*}),$$

para cualquier $d \in [0, S_X^-(\alpha))$ $\square$

Ejemplo 4.3.4.

Supóngase que $X \sim \exp\left(\frac{1}{1000}\right)$, i.e

$$f_X(x) = \frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}^{(x)}$$

En este caso

$$S_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ e^{-0.0001x} & \text{si} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

y $S_X^{-}(\alpha) = -1000\text{Ln}(\alpha)$ y $S_X(0) = 1$. Se considerarán casos:

Caso 1: $\rho = 0$

En este caso $\rho^* = \frac{1}{1+\rho} = 1$ y $\psi(0) = \mathbb{E}(X) = 1000$. Por el Teorema anterior, el esquema de reaseguro óptimo dependerá del nivel de tolerancia al riesgo α.

1. Si $S_X^{-}(\alpha) > \psi(0) = \mathbb{E}(X)$ (i.e $-1000\text{Ln}(\alpha) > 1000$), es decir $\alpha < 0.3679$, entonces $g^*(x) = x$ (inciso (iii) del Teorema anterior).

2. Si $S_X^{-}(\alpha) = \psi(0) = \mathbb{E}(X)$ (i.e $\text{Ln}(\alpha) = -1$), es decir $\alpha = 0.3679$, entonces $g^*(x) = cx$ para cualquier $c \in [0, 1]$ (inciso (iv) del Teorema anterior).

3. Si $S_X^{-}(\alpha) < \psi(0) = \mathbb{E}(X)$, es decir $\alpha > 0.03679$, entonces $g^*(x) = 0$ (inciso (v) del Teorema anterior).

El nivel de riesgo es $\alpha = 0.3679$. Si el nivel de tolerancia al riesgo es muy alto (superior a α), entonces no se tendrá que comprar reaseguro; en otro caso, lo óptimo es comprar reaseguro para toda la pérdida X.

Caso 2: $\rho = 0.2$

En este caso $\rho^* = \frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{6/5} = \frac{5}{6} = 0.8\overline{3}$ y $d^* = S_X^{-}(\rho^*) = 182.32$ y $u(\rho^*) = \psi(d^*) = 1182.32$

1. Si $S_X^{-}(\alpha) > u(\rho^*)$, i.e $\alpha < 0.3066$, entonces $g^*(x) = (x - 182.32)_+$ (inciso (i) del Teorema anterior).

2. Si $S_X^{-}(\alpha) = u(\rho^*)$, i.e $\alpha = 0.3066$, entonces $g^*(x) = c\,(x - 182.32)_+$ para cualquier $c \in [0, 1]$ (inciso (ii) del Teorema anterior).

3. Si $S_X^{-}(\alpha) < u(\rho^*)$, i.e $\alpha > 0.3066$, entonces $g^*(x) = 0$ (inciso (v) del Teorema anterior)

Obsérvese que cuando la prima es alta (ρ subió de 0 a 20 %), el nivel de tolerancia α decrece de 0.3679 a 0.3066. Cuando el nivel de tolerancia es alto, (mayor que 30.66 %) lo óptimo es no comprar reaseguro. Por el contrario es pequeño (menor que 30.66 %) lo ideal es comprar un reaseguro stop-loss con un deducible de 182.32. ∇

4.4. Optimización bajo el criterio del CTE

4.4.1. Optimización del reaseguro *cuota-parte* CTE

Como antes, la variable de pérdida se divide como $X = I_{qs}(X) + X_R^{qs} = (1-c)X + cX$ y la variable del costo total de la aseguradora cuando hay una acuerdo de reaseguro cuota-parte es $T_{qs}(X) = I_{qs}(X) + \pi(X_R^{qs}) = (1-c)X + \pi(cX)$.

Entonces por el Corolario 3.3.1 del Capítulo 3, el CTE de la variable del costo total de la aseguradora está dado por

$$CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha) = CTE_{I_{qs}(X)}(\alpha) + \pi(X_R^{qs}) = CTE_{I_{qs}(X)}(\alpha) + \pi(cX).$$

Es decir, $CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha)$ depende del valor de $CTE_{I_{qs}(X)}$. Por tanto, el siguiente objetivo es obtener una expresión para dicha cantidad.

Notación 4.4.1.

Para $\alpha \in (0,1), c \in [0,1)$, $CTE_{I_{qs}(X)}(\alpha; c)$ será el CTE de $I_{qs}(X)$ con cesión del cuota-parte c. ▽

Proposición 4.4.1.

Si $\alpha \in (0, S_X(0))$, $c \in [0,1]$, entonces

$$CTE_{I_{qs}(X)}(\alpha; c) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1-c}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} CTE_{I_{qs}(X)}(\alpha; c) &= VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha; c) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_{I_{qs}(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_{qs}(X)}(x)dx \\ &= (1-c)VaR_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{(1-c)VaR_X(\alpha)}^{\infty} S_X\left(\frac{x}{1-c}\right)dx \\ &= (1-c)VaR_X(\alpha) + \frac{1-c}{\alpha}\int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx. \end{aligned}$$

□

Corolario 4.4.1.

Si $\alpha \in (0, S_X(0))$, $c \in [0,1]$, entonces

$$CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1-c}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx + \pi(cX).$$

En seguida, se enunciará un resultado en el que se establecen las condiciones necesarias para la existencia del parámetro de cesión óptima bajo el criterio del CTE.

Teorema 4.4.1. *(Considerése el problema de optimización)*

$$CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c^*) = \min_{c\in[0,1]}\{CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\}.$$

(i) Supóngase que el principio de primaje de reaseguro satisface que $\pi(0) = 0$. Además que $\pi(cX) = c\pi(X)$ para $c > 0$ constante. Entonces el problema de minimización tiene solución y el coeficiente óptimo de cuota-parte está dado por

$$c^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(X) > v(\alpha) \\ 1 & \text{si } \pi(X) < v(\alpha), \end{cases}$$

y cualquier $c^* \in [0,1]$ será óptima si $\pi(X) = u(\alpha)$, donde

$$v(\alpha) := S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx.$$

(ii) Si la aplicación $c \mapsto \pi(cX)$ es estrictamente convexa para $c \in [0,1]$, entonces existe solución si y sólo si existe una constante $c^* \in (0,1)$ tal que $\frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)|_{c=c^*} - v(\alpha) = 0$ y dicho c^* es el coeficiente cuota-parte óptimo.

Proposición 4.4.2.

Considérese el problema de optimización

$$CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c^*) = \min_{c\in[0,1]} \left\{CTE_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\right\}.$$

Para los siguientes principios de primaje, la cesión óptima es $c^* = 0$ si $\pi(X) > S_X^{-1}(\alpha)$ y $c^* = 1$ si $\pi(X) < S_X^{-1}(\alpha)$.

(1) $\pi(X) = (1+\beta)\mathbb{E}(X), \quad \beta > 0.$

(2) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)}, \quad \beta > 0.$

(3) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\dfrac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad \beta > 0.$

(4) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{Var(X)} + \gamma\dfrac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)}, \quad \beta, \gamma > 0.$

(5) $\pi(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}.$

(6) $\pi(X) = \mathbb{E}(X^p)^{1/p}, \quad p > 1.$

(7) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sqrt{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))_+^2]}, \quad \beta \in (0,1).$

(8) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))_+], \quad \beta \in (0,1].$

(9) $\pi(X) = \int_0^\infty (\mathbb{P}(X \geq t))^{1/p} \; dt.$

(10) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(|X - X'|)$ donde X' es una copia independiente de X.

(11) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta[F_X^{-1}(1-p) - \mathbb{E}(X)]$, $\beta > 0$ $p \in (0,1)$.

(12) $\pi(X) = \frac{1}{p}\int_{1-p}^1 F_X^{-1}(x)dx$, $p \in (0,1)$.

Demostración:

Por la Proposición 1.2.2 del Capítulo 1, estos principios de primaje son homogéneos en primer grado, i.e. $\pi(cX) = c\pi(X)$ y el Teorema 4.3.1 demuestra este resultado. □

Proposición 4.4.3.

Considerése el problema de optimización

$$VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha : c^*) = \min_{c\in[0,1]} \left\{VaR_{T_{qs}(X)}(\alpha; c)\right\}.$$

(i) Para el principio de primaje $\pi(x) = \mathbb{E}(X) + \beta Var(X), \beta > 0$; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si $\mathbb{E}(X) < v(\alpha) < \mathbb{E}(X) + 2\beta Var(X)$ y el coeficiente cuota-parte óptimo es

$$c^* = \frac{v(\alpha) - \mathbb{E}(X)}{2\beta Var(X)}.$$

(ii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2_+]$, $\beta > 0$; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si $\mathbb{E}(X) < v(\alpha) < \mathbb{E}(X) + 2\beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2_+]$,
y el coeficiente *cuota-parte* óptimo si

$$c^* = \frac{v(\alpha) - \mathbb{E}(X)}{2\beta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2_+]}.$$

(iii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - Var_(X)}, \gamma > 0$, $\gamma^2 > Var(X)$; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si $v(\alpha) > \mathbb{E}(X)$ y

$$\frac{[v(\alpha) - \mathbb{E}(X)]\gamma}{Var(X)[Var(X) + (v(\alpha) - \mathbb{E}(X))^2]} < 1,$$

y el coeficiente cuota-parte óptimo si

$$c^* = \frac{[v(\alpha) - \mathbb{E}(X)]\gamma}{Var(X)[Var(X) + (v(\alpha) - \mathbb{E}(X))^2]}.$$

(iv) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + 2\beta Var(X) - \beta Cov(X,Y)$, $\beta > 0$ y Y variable aleatoria; el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si $\mathbb{E}(X) > \beta Cov(X,Y)$ y $\mathbb{E}(X) - \beta Cov(X,Y) < v(\alpha) < 4\beta Var(X) + \mathbb{E}(X) - \beta Cov(X,Y)$ y coeficiente cuota-parte óptimo es

$$c^* = \frac{v(\alpha) - \mathbb{E}(X) + \beta Cov(X,Y)}{4\beta Var(X)}.$$

(v) Para el principio de primaje $\pi(X) = \frac{1}{\beta}\mathbb{E}(X)(e^{\beta X})$, $\beta > 0$ el problema de reaseguro cuota-parte tiene solución óptima $c^* \in (0,1)$ si y sólo si existe una constante $c^* \in (0,1)$ si y sólo si existe una constante $c^* \in (0,1)$ tal que

$$\mathbb{E}(Xe^{c^*\beta X}) = v(\alpha)\mathbb{E}(e^{c^*\beta X}),$$

y dicha c^* es el coeficiente cuota-parte óptimo.

4.4.2. Optimización del reaseguro *stop-loss*

Como antes, la variable de pérdida se divide como $X = I_{sl}(X) + X_R^{sl} =$ y la variable del costo total de la aseguradora cuando hay una acuerdo de reaseguro cuota-parte es $T_{sl}(X) = I_{sl}(X) + \pi(X_R^{sl}) = (X \wedge d) + \pi((X-d)_+)$.

Entonces por el Corolario 3.3.1 del Capítulo 3, el CTE de la variable del costo total de la aseguradora está dado por

$$CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha) = CTE_{I_{sl}(X)}(\alpha) + \pi(X_R^{sl}) = CTE_{I_{sl}(X)}(\alpha) + \pi((X-d)_+).$$

Es decir, $CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha)$ depende del valor de $CTE_{I_{sl}(X)}$. Por tanto, el siguiente objetivo es obtener una expresión para dicha cantidad.

Notación 4.4.2.

Para $\alpha \in (0,1), d \in [0, 1\infty]$, $CTE_{I_{sl}(X)}(\alpha; d)$ será el CTE de $I_{sl}(X)$ con retencion *stop-loss d.* $\triangledown$

Proposición 4.4.4.

Para $d \geq 0, \alpha \in (0, S_X(0)$, EL CTE de la retención de la aseguradora está dada por

$$CTE_{I_{sl}(X)}(\alpha; d) = \begin{cases} d & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)], \\ S_X^{-1}(\alpha) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} CTE_{I_{sl}(X)}(\alpha; d) &= VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha; d) + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_{sl}(X)}(x)dx \\ &= \begin{cases} d & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)], \\ S_X^{-1}(\alpha) & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} + \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_{I_{sl}(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_{sl}(X)}(x)dx \\ &= \begin{cases} d & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)], \\ S_X^{-1}(\alpha) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases} \end{aligned}$$

□

Corolario 4.4.2.

Para $d \geq 0, \alpha \in (0, S_X(0)$, el CTE del costo total de la aseguradora está dada por

$$CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) = \begin{cases} d + \pi((X-d)_+) & \text{si } d \in [0, S_X^{-1}(\alpha)] \\ G(d) & \text{si } d > S_X^{-1}(\alpha), \end{cases}$$

donde

$$G(d) = S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx + \pi((X-d)_+).$$

En seguida, se enunciará un resultado en el que se establecen las condiciones necesarias para la existencia del parámetro de retención óptima bajo el criterio del CTE.

Teorema 4.4.2.

Considérese el problema de optimización

$$CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d \geq 0}\{CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\}.$$

(i) Si la aplicación es creciente en $[0, S_X^{-1}(\alpha)]$. El problema de minimización *stop-loss* tiene solución si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(a) $G(d) = S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx + \pi((X-d)_+)$ es cóncava para $d > S_X^{-1}(\alpha)$.

(b) Existe una constante $d_0 > S_X^{-1}(\alpha)$ tal que $G(d)$ es creciente en $[S_X^{-1}(\alpha), d_0]$ y decreciente para $d \geq d_0$.

Además si se cumple (a) ó (b), la retención óptima d^* está dada por

$$d^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi(X) < v(\alpha) \\ \infty & \text{si } \pi(X) > v(\alpha), \end{cases}$$

y $d^* = 0$ ó $d^* = \infty$ si $\pi(X) = u(\alpha)$.

(ii) Existe una constante $d_0 \in [0, S_X^{-1}(\alpha))$ tal que la aplicación $d \mapsto d + \pi((X-d)_+)$ es decreciente en $[0, d_0]$, creciente en $(d_0, S_X^{-1}(\alpha))$ y $S_X^{-1}(\alpha)) \geq d_0 + \pi((X - d_0)_+)$.

Además, si el problema de minimización tiene solución, d_0 es el nivel de retención óptima de $CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)$ y

$$\min_{d \geq 0}\{CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\} = d_0 + \pi((X - d_0)_+).$$

Proposición 4.4.5.

Considerése el problema de optimización

$$CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d \in [0,1]} \left\{ CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d) \right\}.$$

Para los siguientes principios de primaje, la retención óptima es $d^* = 0$ si $\pi(X) < v(\alpha)$ y $d^* = \infty$ si $\pi(X) > v(\alpha)$:

(i) $\pi(x) = \int_0^\infty (\mathbb{P}(X > t))^p$, $p \in (0, 1)$.

(ii) $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta[F_X^{-1}(1 - p) - \mathbb{E}(X)]$, $\beta \geq 0$, $p \in [0, 1]$.

(iii) $\pi(X) = \frac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_X^{-1}(x)dx$, $p \in (0, 1)$.

Proposición 4.4.6.

Considerése el problema de optimización

$$CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d^*) = \min_{d\in[0,1]} \left\{CTE_{T_{sl}(X)}(\alpha; d)\right\}.$$

(i) Para el primaje $\pi(X) = (1+\beta)\mathbb{E}(X)$, $\beta > 0$; si $d_0 = S_X^{-1}\left(\dfrac{1}{1+\beta}\right) \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$ y $S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + (1+\beta)\int_{d_0}^{\infty} S_X(x)dx$ se cumplen, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* = d_0$.

(ii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(X)[(X - \mathbb{E}(X))_+]$, $\beta > 0$; si existe $d_0 > 0$ tal que $\beta S_X(d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+] = 1$, $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$ y

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+] + \beta\mathbb{E}[(X-d_0)_+ - \mathbb{E}((X-d_0)_+)_+],$$

se cumplen, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* = d_0$.

(iii) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta Var(X), \beta > 0$; si existe $d^* = d_0$ tal que $2\beta\mathbb{E}[(X-d_0)_+] = 1$, $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$ y

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+] + \beta Var[(X-d_0)_+],$$

se cumplen, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* = d_0$.

(iv) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))_+^2]$, $\beta > 0$; si existe $d_0 > 0$ tal que $2\beta\mathbb{E}[(X-d_0) - \mathbb{E}[(X-d_0)_+]] = 1$, $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$ y

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+] + \beta\mathbb{E}[(X-d_0)_+^2],$$

se cumplen, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* = d_0$.

(v) Para el principio de primaje $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - Var(X)}$, $\gamma > 0$; si existe $d_0 > 0$ tal que $\dfrac{\mathbb{E}[(X-d_0)_+]}{\gamma^2 - Var[(X-d_0)_+]} = 1$, $d_0 \in (0, S_X^{-1}(\alpha))$ y

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq d_0 + \mathbb{E}[(X-d_0)_+] + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - Var[(X-d_0)_+]},$$

se cumplen, entonces el problema de reaseguro *stop-loss* tiene solución óptima $d^* = d_0$.

4.4.3. Elección óptima del tipo de forma de reaseguro CTE

Para el estudio del reaseguro óptimo bajo el CTE, la metodología es análoga a la que se utilizó para el VaR.

También se considerará el hecho de que las funciones de pérdida cedida óptimas en la clase $\mathcal{H}$ (las que minimizan el CTE del costo total de la aseguradora) también son óptimas en la clase $\mathcal{G}$. De nuevo, suponiendo el principio de primaje de esperanza.

Ahora, se considerará el siguiente problema de optimización, en la clase de funciones de pérdida cedida $\mathcal{H}$

$$\mathrm{CTE}_{T_{h^*}(X)}(\alpha) = \min_{h\in\mathcal{H}} \left\{\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha)\right\}. \tag{4.24}$$

El problema de optimización bajo el criterio del CTE es más complicado que el que se analizó para el VaR. El siguiente lema permitirá facilitar el estudio y llevarlo de la manera más parecida posible al problema de reaseguro óptimo considerando el VaR.

Lema 4.4.1.

Para cualquier $g \in \mathcal{G}$, existe una sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = g(x) \text{ para todo } x \in [0,\infty),$$

y para $\alpha < S_X^-(0)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[I_{h_n}(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha)\right] = \mathbb{P}\left[I_g(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right]. \tag{4.25}$$

Proposición 4.4.7.

Las funciones de pérdida cedida óptimas que minimizan el CTE del riesgo total de la aseguradora en la clase $\mathcal{H}$ también son óptimas en la clase $\mathcal{G}$.

Demostración:

Sea h^* una función de pérdida cedida óptima en $\mathcal{H}$, Se desea demostrar que para cualquier $g \in \mathcal{G}$

$$\mathrm{CTE}_{T_{h^*}(X)}(\alpha) \leq \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha), \tag{4.26}$$

como $\mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha) = \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha) + \pi_g(X)$ y utilizando la relación entre el VaR y el CTE se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{CTE}_{T_{h_n}(X)}(\alpha) &= \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha) + \frac{\int_{\mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_{h_n}(X)}(x)dx}{\mathbb{P}\left[I_{h_n}(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha)\right]} \\ &\quad + (1+\rho)\mathbb{E}\left[h_n(X)\right], \end{aligned} \tag{4.27}$$

y también

$$\begin{aligned} \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) &= \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha) + \frac{\int_{\mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_{g(X)}}(x)dx}{\mathbb{P}\left[I_g(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_{g(X)}}(\alpha)\right]} \\ &\quad + (1+\rho)\mathbb{E}\left[g(X)\right]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por el Lema 4.4.1 existe una sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ tal que para cualquier $x \in [0,\infty)$,

$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = g(x)$ con $0 \leq h_n(x) \leq g(x) \leq x$ y

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[I_{h_n}(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha)\right] = \mathbb{P}\left[I_g(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right]$$

Como $\mathbb{E}(X) < \infty$, por el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[h_n(x)\right] = \mathbb{E}\left[g(x)\right].$$

Recuérdese que $I_g(x) = x - g(x)$ es una función no-decreciente y continua, de aquí que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha) = \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha).$$

Sean $Y_{h_n} := I_{h_n}(X) - Var_{I_{h_n}(X)}(\alpha)$ y $\kappa(y) = y\mathbb{I}_{[0.\infty)}^{(y)}$. Nótese que $\kappa(Y_{h_n}) \overset{n\to\infty}{\underset{c.s}{\longrightarrow}} \kappa(Y_g)$ y

$$0 \leq v(Y_{h_n}) = \left[X - \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha)\right]\mathbb{I}_{\left\{X - \mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha) \leq 0\right\}} \leq X \text{ c.s.}$$

Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathrm{VaR}_{I_{h_n}(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_{h_n}(X)}(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\kappa(Y_{h_n})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\kappa(Y_g)\right] \\
&= \textstyle\int_{\mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_g(X)}(x)dx.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Es decir que $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{CTE}_{T_{h_n}(X)}(\alpha) = \mathrm{CTE}_{I_g(X)}(\alpha)$ y por la optimalidad de h^* en $\mathcal{H}$ se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}_+$

$$\mathrm{CTE}_{T_{h^*(X)}}(\alpha) \leq \mathrm{CTE}_{T_{h_n(X)}}(\alpha),$$

para finalmente concluir que

$$\mathrm{CTE}_{T_{h^*(X)}}(\alpha) \leq \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha).$$

□

Para encontrar una solución del modelo de reaseguro óptimo (4.24) se partirá de una expresión explícita para el CTE del costo total. De nuevo, como

$$\mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha) = \mathrm{Var}_{I_g(X)}(\alpha) + \pi_g(X)$$

y

$$\mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) = \mathrm{CTE}_{I_g(X)}(\alpha) + \pi_g(X),$$

utilizando la relación entre el VaR y el CTE se tiene que

$$\mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) = \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha) + \frac{\int_{\mathrm{Var}_{I_g(X)}(\alpha)}^{\infty} S_{I_g(X)}(x)dx}{\mathbb{P}\left[I_g(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right]} + \pi_g(X). \tag{4.30}$$

Análogamente al problema de optimización del VaR para cualquier $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$ se expresará al CTE de la pérdida cedida $h(x)$ como función de $d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}$.

Notación 4.4.3.

Para $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$, se denotará como $\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}\ldots, d_{n,n})$ al CTE del costo total de la aseguradora correspondiente a la función de pérdida cedida $h(x)$ como función de $d_{n,1}\ldots, d_{n,n}$.

Para $x \geq 0$, defínase la función

$$\nu(x) := S_X^-(x) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^-(x)}^{\infty} S_X(t)dt \tag{4.31}$$

$\triangledown$

De manera análoga a la que se hizo cuando se resolvió el problema de optimización del VaR, se encontrarán expresiones para $\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}\ldots, d_{n,n})$ dependiendo de en qué conjunto D_n se encuentra $(d_{n,1}\ldots, d_{n,n})$.

Proposición 4.4.8.

Para cualquier $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\,(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$ y un nivel de confianza $1-\alpha$ tal que $0 < \alpha < S_X(0)$.

(i) Si $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \in D_n^0$, entonces

$$\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = \nu(\alpha) + \left(\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_X(x)dx.$$

(ii) Para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \in D_n^i$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = &\left(1 - \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}\right) \nu(\alpha) + \sum_{j=1}^{i} c_{n,j}\psi(d_{n,j}) \\ &+ \left(\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{j=i+1}^{n} c_{n,j} \int_{d_{n,j}}^{\infty} S_X(x)dx.\end{aligned}$$

(iii) Si $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \in D_n^n$, entonces

$$\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\right) \nu(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\psi(d_{n,j}).$$

Proposición 4.4.9.

Sea $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$ con los coeficientes $c_{n,1}, \dots, c_{n,n}$ dados y un nivel de confianza $1 - \alpha$ tal que $0 < \alpha < S_X(0)$.

(i) Si $\alpha < \rho^* < S_X(0)$, entonces

$$\min_{D_n} \{\mathrm{CTE}_{T_h}(X)(\alpha; d_{n,1}, \dots, d_{n,n})\} = \nu(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(u(\rho^*) - \nu(\alpha)), \quad (4.32)$$

y el mínimo CTE se alcanza en $d_{n,1} = \cdots = d_{n,n} = d^*$ i.e.

$$h^*(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d^*)_+.$$

(ii) Si $\alpha = \rho^* < S_X(0)$, entonces

$$\min_{D_n} \{\mathrm{CTE}_{T_h}(X)(\alpha; d_{n,1}, \dots, d_{n,n})\} = \nu(\alpha),$$

y el mínimo CTE se alcanza en cualquier $(d_{n,1}, \dots, d_{n,n})$ i.e

$$h^*(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d^*)_+,$$

siempre que $(d_{n,1}, \dots, d_{n,n})$ satisfaga que $d^* \leq d_{n,1} \leq \cdots \leq d_{n,n}$.
En particular, el mínimo CTE se alcanza en $(d^*, \dots, d^*)$ i.e.

$$h^*(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d^*)_+.$$

(iii) Si $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$, entonces

$$\min_{D_n} \left\{ \text{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \right\} = \nu(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(\psi(0) - \nu(\alpha)),$$

y el mínimo CTE se alcanza en $d_{n,1}, \ldots, d_{n,n} = 0$ i.e.

$$h^*(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} x.$$

(iv) Para todos los demás casos $\min_{D_n} \left\{ \text{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \right\}$ no existe.

Es decir, al comparar el mínimo de $\text{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1} \ldots, d_{n,n})$ para cada $n \in \mathbb{N}_+$ se encontrarán soluciones al problema de optimización (4.24). A partir de la Proposición (4.4.7) se estableció que estas soluciones también son funciones de pérdida cedida óptimas en la clase $\mathcal{G}$ y por tanto soluciones del modelo de reaseguro óptimo

$$\text{CTE}_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \text{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) \right\}.$$

Teorema 4.4.3.

Sea $1 - \alpha$ un nivel de confianza tal que $0 < \alpha < S_X(0)$.

(i) Si $\alpha < \rho^* < S_X(0)$, entonces $\min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \text{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) \right\} = u(\rho^*)$ y el mínimo CTE se alcanza en $g^*(x) = (x - d^*)_+$.

(ii) Si $\alpha = \rho^* < S_X(0)$, entonces $\min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \text{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) \right\} = u(\rho^*)$ y el mínimo CTE se alcanza en cualquier

$$g^*(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H},$$

tal que $d^* \leq d_{n,1} \leq \cdots \leq d_{n,n},\ n \in \mathbb{N}_+$,

(iii) Si $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$, entonces $\min_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \text{CTE}_{T_g(X)}(\alpha) \right\} = u(\rho^*)$ y el mínimo CTE se alcanza en

$$g^*(x) = x.$$

Demostración:

Nótese que todas las funciones de pérdida cedidas en este Teorema están en la clase $\mathcal{H}$ y por tanto, sólo es necesario demostrar la optimalidad de cada una de estas funciones en $\mathcal{H}$, i.e. para cualquier $h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}(x - d_{n,j})_+ \in \mathcal{H}$

$$\mathrm{VaR}_{T_{g^*}(X)}(\alpha) \leq \mathrm{VaR}_{T_h(X)}(\alpha).$$

(i)

Obsérvese que si $\alpha < \rho^* < S_X(0)$, entonces $S_X^- > S_X^-(\rho^*) =: d^*$ y por las propiedades de ψ se cumple $\psi(S_X^-(\alpha)) \geq \psi(d^*)$; y a partir de las definiciones de las funciones $u(\cdot), \nu(\cdot), \psi(\cdot)$ se tiene que $\nu(\alpha) > u(\alpha) = \psi(S_X^-(\alpha))$ y $\psi(d^*) = u(\rho^*)$. Por tanto, $u(\rho^*) < \nu(\alpha)$.

De aquí que por el Lema anterior

$$\begin{aligned}
\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha) &\geq \min_{D_n} \left\{ \mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \right\} \\
&= \nu(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}[u(\rho^*) - \nu(\alpha)] \geq u(\rho^*).
\end{aligned}$$

Y por el inciso (i) del lema anterior; si $\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} = 1$, si $\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha) = u(\rho^*)$, i.e. $g^*(x) = (x - d^*)_+$.

(ii)

Por el inciso (ii) del Lema anterior, para cualquier $h \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha) \geq \min_{D_n} \left\{ \mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1}, \ldots, d_{n,n}) \right\} = \nu(\alpha).$$

De nuevo, por el inciso (ii) del Lema anterior; si g^* es de la forma tal que $d^* \leq d_{n,1} \leq \ldots \leq d_{n,n}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ entonces $\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha) = \nu(\alpha)$.

(iii)

Por las definiciones de $\nu(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$ se tiene que $\psi(S_X^-(\alpha)) < \nu(\alpha)$ y por las propiedades de ψ, $\psi(0) \leq \psi(S_X^-(\alpha))$. Por tanto, $\psi(0) \leq \psi(S_X^-(\alpha)) < \nu(\alpha)$ y por el inciso (iii) del Lema anterior, para cualquier $h \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha) &\geq \min_{D_n}\left\{\mathrm{CTE}_{T_h(X)}(\alpha; d_{n,1},\dots,d_{n,n})\right\}\\ &= \nu(\alpha)+\sum_{j=1}^{n} c_{n,j}[\psi(0)-\nu(\alpha)] \geq \nu(\alpha).\end{aligned}$$

También, por el inciso (iii) del lema anterior; si $\sum_{j=1}^{n} c_{n,j}=1$, entonces $\mathrm{CTE}_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \nu(\alpha)$. Que en este caso corresponde a $g^*(x)=x$. □

4.4.3.1. Perspectiva constructivista

Sea $B(g) := \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha)$. Por las propiedades del CTE

$$\begin{aligned}B(g) &:= \mathrm{CTE}_{T_g(X)}(\alpha)\\ &= \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)+\frac{\mathbb{E}\left[\left(T_g(X)-\mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)\right)_+\right]}{\mathbb{P}\left[T_g(X)\geq \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)\right]}\\ &= \mathrm{VaR}_{T_g(X)}(\alpha)+\frac{\mathbb{E}\left[\left(I_g(X)-\mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right)_+\right]}{\mathbb{P}\left[I_g(X)\geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right]}\\ &= S_X^-(\alpha)-g(S_X^-(\alpha))+(1+\rho)\mathbb{E}(g(X))+\frac{\mathbb{E}\left[\left(I_g(X)-\mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right)_+\right]}{\mathbb{P}\left[I_g(X)\geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right]}\end{aligned} \tag{4.33}$$

Primero se estudiarán algunas propiedades cualitativas que las funciones de pérdida cedida deben tener. Esto ayudará a que se reduzca la clase de las funciones de pérdida cedida para resolver el problema de minimización.

Se puede demostrar que la función de distribución de $I_g(X)$ tiene a lo más un punto de discontinuidad en $[0,\infty)$. Si tal discontinuidad existe, entonces I_g debe ser de la forma.

$$I_g(x)=\begin{cases} b(x) & \text{si} \quad x\in[0,e_0]\\ b(e_0) & \text{si} \quad x\in(e_0,\infty).\end{cases}$$

Para alguna función $b(\cdot)$ estrictamente creciente y continua y $e_0\in[0,\infty)$ constante. En este caso, $b(e_0)$ es el único punto de discontinuidad de la función de distribución de $I_g(X)$ y la correspondiente función de pérdida cedida g es una línea recta con pendiente 1 de e_0 hacia adelante.

Si $\alpha \geq \mathbb{P}(X\geq e_0)$ (ó equivalentemente $S_X^-(\alpha)\leq e_0$), entonces $\mathbb{P}(I_g(X)\geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha))=\alpha$ y de aquí que (4.33) se convierte en

$$B(g)=S_X^-(\alpha)-g(S_X^-(\alpha))+(1+\rho)\mathbb{E}(g(X))+\frac{\mathbb{E}[\left(I_g(X)-\mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\right)_+]}{\alpha}. \tag{4.34}$$

Observación 4.4.1.

La ecuación (4.34) también cumple la función de distribución de I_g es continua. $\triangledown$

Por otro lado; si $\alpha < \mathbb{P}(X \geq e_0)$ (ó equivalentemente $S_X^-(\alpha) > e_0$), entonces

$$\mathbb{P}(I_g(X) \geq \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)) = \mathbb{P}(X \geq e_0) = S_X(e_0^-) > \alpha$$

y de aquí que

$$B(g) = S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) + \frac{\mathbb{E}[\big(I_g(X) - \mathrm{VaR}_{I_g(X)}(\alpha)\big)_+]}{S_X(e_0^-)}. \qquad (4.35)$$

Observación 4.4.2.

Si $e_0 = 0$ (i.e. si $g(x) = x$), entonces el término $S_X(e_0^-)$ en el denominador de la última expresión será 1, y si $e_0 \in (0, VaR_X(\alpha))$, entonces si alcanzará al punto $S_X(e_0)$. $\triangledown$

Nótese que el vector $(g(X), I_g(X))$ es comonótono ya que g y I_g son no-decrecientes. También, la aplicación $Y \mapsto \mathbb{E}[\big(Y - S_Y^-(\alpha)\big)_+]$ es comonótona aditiva (Dhaene *et al.* (2006)).

Por tanto,

$$\mathbb{E}\left[(I_g(X) - \mathrm{VaR}_{I_{g(X)}}(\alpha))_+\right] + \mathbb{E}\left[(g(X) - \mathrm{VaR}_{g(X)}(\alpha))_+\right] = \mathbb{E}[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+]$$

y también por Dhaene *et al.* (2006)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\big(g(X) - \mathrm{VaR}_{g(X)}(\alpha)\big)_+] &= \int_0^\alpha \mathrm{VaR}_{g(X)}(x)dx - \alpha \mathrm{VaR}_{g(X)}(\alpha) \\
&= \int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx - \alpha g(S_X^-(\alpha))
\end{aligned}$$

Notación 4.4.4.

El conjunto de todas las funciones de pérdida cedida que son rectas con pendiente 1 a partir de e_0 (con $e_0 \in [0, S_X^-(\alpha))$) se denotará por $\tilde{\mathcal{G}}$. $\triangledown$

Lema 4.4.2.

(i) Si $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, entonces

$$\begin{aligned} B(g) = S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\ + \frac{\mathbb{E}[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+] - \int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx + \alpha g(S_X^-(\alpha))}{S_X(e_0^-)}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

(ii) Si $g \in \mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$, entonces

$$\begin{aligned} B(g) = S_X^-(\alpha) - g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\ + \frac{\mathbb{E}[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+] - \int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx + \alpha g(S_X^-(\alpha))}{\alpha}. \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} B(g) = S_X^-(\alpha) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\ + \frac{1}{\alpha}\left\{\mathbb{E}[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+] - \int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx\right\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Observación 4.4.3.

1. Como las ecuaciones (4.36) y (4.37) son diferentes, entonces las funciones en $\tilde{\mathcal{G}}$ requieren un análisis diferente.
2. El término $-\int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx$ en (4.37) es no-creciente en g y depende sólo de la cola de g, i.e del valor de $g(X)$ para $x \geq S_X^-(\alpha)$. Pero el término $(1+\rho)\mathbb{E}(g(X))$ es no-decreciente en g; entonces por el argumento que se utilizó en el Lema 4.3.5, implica que si la función de pérdida cedida óptima pertenece a $\mathcal{G}\setminus\tilde{\mathcal{G}}$, ésta debe ser de la forma $g(x) = c\,(x-d)_+\, I^{(x)}_{[0,S_X^-(\alpha)]}$ para algún $(c,d) \in [0,1) \times [0, S_X^-(\alpha)]$.
3. Las funciones de pérdida cedida no-nulas que son idénticamente cero en $[0, S_X^-(\alpha)]$ (que corresponden al caso en el que $c > 0$ y $\alpha = S_X^-(\alpha)$) no se pueden excluir ya que el Lema 4.3.4 ya no es válido.
4. Si $c = 1$ pero $d < S_X^-(\alpha)$ no es permitido, pues en este caso $g \in \tilde{\mathcal{G}}$.

$\triangledown$

Lema 4.4.3.

Si g_1, g_2 son dos funciones de pérdida cedida en $\mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$ tales que $g_1 = g_2$ sobre $[0, S_X^-(\alpha)]$, entonces

$$B(g_1) - B(g_2) = \left(1 + \rho - \frac{1}{\alpha}\right) \int_{S_X^-(\alpha)}^{\infty} (g_1(x) - g_2(x)) dF_X(x).$$

Demostración:

A partir de la ecuación (4.37)

$$\begin{aligned} B(g_1) - B(g_2) &= (1+\rho)\mathbb{E}[g_1(X) - g_2(X)] - \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} [g_1(S_X^-(x)) - g_2(S_X^-(x))]dx \\ &= (1+\rho)\int_{S_X^-(\alpha)}^{\infty} [g_1(x) - g_2(x)]dF_X(x) - \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^-(\alpha)}^{\infty} [g_1(x) - g_2(x)]dF_X(x) \\ &= \left(1 + \rho - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{S_X^-(\alpha)}^{\infty} [g_1(x) - g_2(x)]dF_X(x). \end{aligned}$$

Nótese que $1 + \rho - \frac{1}{\alpha} > 0$ si y sólo si $1 + \rho > \frac{1}{\alpha}$ si y sólo si $\frac{1}{1+\rho} < \alpha$, i.e $1 + \rho - \frac{1}{\alpha} > 0$ si y sólo si $\rho^* < \alpha$. De aquí que si $\rho^* < \alpha$, entonces la cola de la función de pérdida cedida debe ser lo más pequeña posible. Si $\alpha = \rho^*$, entonces $B(g_1) = B(g_2)$ y por tanto la cola de la función de pérdida cedida no tiene efecto en $B(\cdot)$. □

Como el Lema anterior considera a la clase $\mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$, ahora se centrará la atención en $\tilde{\mathcal{G}}$. En el siguiente resultado se observa que si la función de pérdida cedida óptima pertenece a $\tilde{\mathcal{G}}$, ésta debe ser una función *stop-loss.*

Lema 4.4.4.

Para todo $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ existe una función stop-loss $g_1(x) = (x - d)_+ \in \tilde{\mathcal{G}}$ para algún $d \in [0, S_X^-(\alpha))$ tal que $B(g_1) \leq B(g)$.

Demostración:

Si $g(x) = x$, entonces $g_1(x) := x$ satisface el resultado. Supóngase que g tiene pendiente en 1 apartir de e para algún $e \in [0, S_X^-(\alpha))$.

Considérese la función $g_1(x) = (x - (e - g(e)))_+ \in \tilde{\mathcal{G}}$. La función g_1 es la función stop-loss que coincide con g a partir de e.

Nótese que $g(S_X^-(X)) = g_1(S_X^-(\alpha))$ y por construcción $\int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx = \int_0^\alpha g_1(S_X^-(x))dx$.

Además, por la convexidad de g se tiene que $g_1 \leq g$ sobre $[0, e]$ y por tanto $\mathbb{E}(g_1(X)) \leq \mathbb{E}(g(X))$.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
B(g_1) &= S_X^-(\alpha) + g_1(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g_1(X)) \\
&\quad + \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+\right] - \int_0^\alpha g_1(S_X^-(x))dx + \alpha g_1(S_X^-(\alpha))}{S_X(e - g(e))} \\
&= S_X^-(\alpha) + g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g_1(X)) \\
&\quad + \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+\right] - \int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx + \alpha g(S_X^-(\alpha))}{S_X(e - g(e))} \\
&\leq S_X^-(\alpha) + g(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g(X)) \\
&\quad + \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+\right] - \int_0^\alpha g(S_X^-(x))dx + \alpha g(S_X^-(\alpha))}{S_X(e)} = B(g).
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se debe al hecho de que $S_X(e) \leq S_X(e - g(e))$ y el numerador es positivo.

$$\therefore g_1 \in \tilde{\mathcal{G}} \text{ satisface que } B(g_1) \leq B(g).$$

□

Primero se considerará el problema de minimización de $B(\cdot)$ sobre la clase $\overline{\mathcal{G}}$ de todas las funciones *stop-loss*, $g_d(x) = (x - d)_+$ con $d \in [0, S_X^-(\alpha)]$. Nótese que si $d \in [0, S_X^-(\alpha))$ entonces $g_d \in \tilde{\mathcal{G}}$ pero $g_{S_X^-(\alpha)} \notin \tilde{\mathcal{G}}$.

Lema 4.4.5.

Sea $\alpha \in (0, S_X(0))$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

(i) Si $\rho^* \geq S_X(0)$, entonces el mínimo valor de B sobre $\overline{\mathcal{G}}$ es $\psi(0)$ es la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = x$.

(ii) Si $\rho^* < S_X(0)$, entonces el mismo valor de B sobre $\overline{\mathcal{G}}$ es $\psi(d^* \wedge S_X^-(\alpha))$ y la función de pérdida cedida óptima es $g^*(x) = \big(x - (d^* \wedge S_X^-(\alpha))\big)_+$.

Demostración:

A partir de las ecuaciones (4.36) y (4.37), para $g_d(x) = (x-d)_+$ con $d \in [0, S_X^-(\alpha)]$

$$B(g_d) = d + (1+\rho)\mathbb{E}[(X-d)_+] = \psi(d).$$

Tomando la derivada parcial de $B(g_d)$ con respecto a d se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial d}B(g_d) = \frac{\partial}{\partial d}\left(d + (1+\rho)\mathbb{E}[(X-d)_+]\right) = 1-(1+\rho)S_X(d),$$

y nótese que la aplicación $d \mapsto 1-(1+\rho)S_X(d)$ es no-decreciente, por tanto $B(g_d)$ es convexa en d.

También $\frac{\partial}{\partial d}B(g_d) = 0$ si y sólo si $1 = (1+\rho)S_X(d)$, es decir, $\frac{\partial}{\partial d}B(g_d) = 0$ si y sólo si $d = S_X^-(\rho^*) = d^*$.

De aquí que, si $\rho^* \geq S_X(0)$, entonces $\frac{\partial}{\partial d}B(g_d)\big|_{d=0^+} \geq 0$ y por tanto alcanza su valor mínimo $\psi(0)$ en $d=0$. Si $\rho^* < S_X(0)$, entonces $B(g_d)$ alcanza su valor mínimo sobre $\overline{\mathcal{G}}$ ya sea en $d = S_X^-(\alpha)$ ó en $d = d^*$, el que sea más pequeño. Entonces, el valor óptimo de d es $\min\left\{d^*, S_X^-(\alpha)\right\}$ y el correspondiente valor mínimo de B es $\psi(d^* \wedge S_X^-(\alpha))$.

A continuación se obtendrán funciones de pérdida cedida óptimas y los correspondientes valores mínimos de $B(\cdot)$ dependiendo en qué orden ascendente están α, ρ^* y $S_X(0)$.

Caso 1: $\alpha < \rho^*$

Primero obsérvese que $\alpha < \rho^*$ implica que $0 < d^* < S_X^-(\alpha)$.

Sea $g \in \mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$. Ya se dijo que se puede suponer que $g(x) = c\,(x-d)_+ \cdot I_{[0,S_X^-(\alpha)]}^{(x)}$ para algún $(c,d) \in [0,1) \times [0, S_X^-(\alpha)]$.

Considérese la función de pérdida cedida

$$g_1(x) = c\,(x-d)_+ + (1-c)\left(x - S_X^-(\alpha)\right)_+ \text{ para } x \geq 0.$$

Como $g, g_1 \in \mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$ y $\alpha < \rho^*$, entonces por el lema (4.4.3) se cumple que $B(g_1) \leq B(g)$, i.e. g_1 representa un mejor contrato de reaseguro que g. Considérese otra función de pérdida cedida $g_2(x) = (x-e)_+ := (x - (S_X^-(\alpha) - g_1(S_X^-(\alpha))))_+$, que es una función *stop-loss* que coincide con g_1 en $[S_X^-(\alpha), \infty]$. Obsérvese que si $e < S_X^-(\alpha)$ (o equivalentemente $d < S_X^-(\alpha)$), entonces $g_2 \in \tilde{\mathcal{G}}$.

Como $g_1 = g_2$ en $[S_X^-(\alpha), \infty]$, entonces $g_1(S_X^-(\alpha)) = g_2(S_X^-(\alpha))$ y $\int_0^\alpha g_2(S_X^-(x))dx = \int_0^\alpha g_1(S_X^-(x))dx$; de aquí que se satisface que

$$\begin{aligned} B(g_2) &= S_X^-(\alpha) - g_2(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g_2(X)) \\ &\quad + \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+\right] - \int_0^\alpha g_2(S_X^-(x))dx + \alpha g_2(S_X^-(\alpha))}{S_X(e)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B(g_1) &= S_X^-(\alpha) - g_1(S_X^-(\alpha)) + (1+\rho)\mathbb{E}(g_1(X)) \\ &\quad + \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha))_+\right] - \int_0^\alpha g_1(S_X^-(x))dx + \alpha g_1(S_X^-(\alpha))}{\alpha}. \end{aligned}$$

Pero, $\mathbb{E}(g_2(X)) \leq \mathbb{E}(g_1(X))$, por tanto; si $e < S_X^-(\alpha)$ entonces g_2 es mejor que g_1 en el sentido de que $B(g_2) \leq B(g_1)$.

Como $B(g_2) \leq B(g_1)$, por el Lema 4.4.4 cualquier $g \in \mathcal{G}$ (ya sea que esté en $\tilde{\mathcal{G}}$ ó no) está por debajo de alguna función *stop-loss* $(x-d)_+$ con $d \in [0, S_X^-(\alpha)]$. Entonces, utilizando el Lema 4.4.5 se tiene la siguiente conclusión

1. Si $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$, entonces la función de pérdida cedida óptima está dada por $g^*(x) = x$, y el valor mínimo de $B(\cdot)$ sobre $\mathcal{G}$ es $\psi(0)$.
2. Si $\alpha < \rho^* < S_X(0)$, entonces la función de pérdida cedida óptima está dada por $g^*(x) = (x-d^*)_+$, y el valor mínimo de $B(\cdot)$ sobre $\mathcal{G}$ es $\psi(d^*)$.

Caso 2: $\alpha = \rho^*$

Primero se considerará el caso en el que $g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{G}^c$. Como en el caso $\alpha < \rho^*$, se supondrá que

$$g(x) = c(x-d)_+ \cdot I_{[0, S_X^-(\alpha)]}(x),$$

para algún $(c, d) \in [0,1] \times [0, S_X^-(\alpha)]$.

Por el Lema 4.4.3, el valor para $x > S_X^-(\alpha)$ no tiene efecto en el valor de $B(g)$ (pues como $\alpha = \rho^*$, entonces $1 + \rho + \frac{1}{\alpha} = 0$). De aquí que se puede suponer naturalmente que g tiene la forma

$$g_{c,d}(x) = c(x-d)_+ \cdot I_{[0,\infty)}(x).$$

para algún $(c,d) \in [0,1] \times [0, S_X^-(\alpha)]$.

Por el Lema 4.4.2,

$$B(g_{c,d}) = c(1+\rho)\mathbb{E}[(X-d)_+] + \frac{1-c}{\alpha}\int_0^\alpha S_X^-(x)dx + cd,$$

Derivando con respecto a d sobre $[0, S_X^-(\alpha)]$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial d}B(g_{c,d}) = c(1+\rho)\frac{\partial}{\partial d}\mathbb{E}[(X-d)_+] + c = c[1-(1+\rho)S_X(d)]. \tag{4.38}$$

Sin embargo,

$$c[1-(1+\rho)S_X(d)] \leq c[1-(1+\rho)S_X(S_X^-(\alpha))] = c[1-(1+\rho)\alpha] = c[1-\frac{\alpha}{\rho^*}] = 0.$$

Es decir, $\frac{\partial}{\partial d}B(g_{c,d}) \leq 0$,, i.e. la aplicación $d \mapsto B(g_{c,d})$ es no-creciente, por tanto el valor óptimo de d es $S_X^-(\alpha)$ y las funciones de pérdida cedida óptimas en $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^c$ tienen que ser idénticamente 0 en $[0, S_X^-(\alpha)]$.

Para funciones de pérdida cedida en $\mathcal{G}$, por el Lema (4.4.4) sólo se necesita considerar funciones *stop-loss* $g(x) = (x-d)_+$ con deducible $d \in [0, S_X^-(\alpha)]$. Por el Lema (4.4.5), todas estas funciones *stop-loss* no son tan buenas como $g(x) = (x - S_X^-(\alpha))_+$, que es idénticamente 0 en $[0, S_X^-(\alpha)]$.

Con los mismos argumentos que para $g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{G}^c$, aplicado en $g \in \mathcal{G}$ se tiene que para cualquier $g \in \mathcal{G}$ que sea idénticamente 0 en $[0, S_X^-(\alpha)]$ será óptima si $\alpha = \rho^*$.

Nótese que $B(0) = S_X^-(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+]$, de aquí que el valor mínimo de B es $\psi(S_X^-(\alpha)) = \psi(d^*)$.

Caso 3: $\alpha > \rho^*$

Para $g \in \mathcal{G}$, el análisis es análogo al caso 2, las funciones de pérdida cedida en $\mathcal{G}$ no son tan buenas como $g(x) = (x - S_X^-(\alpha))_+$.

Para $g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{G}^c$; por el Lema (4.4.3), la cola de g debe ser lo más pequeña posible. Entonces se supondrá que $g(x) = c(x-d)_+ \cdot I_{[0,\infty)}(x)$ para algún $(c,d) \in [0,1] \times [0, S_X^-(\alpha)]$ (como en el Caso 2).

Por la ecuación (4.38) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial d}B(g) = c[1-(1+\rho)S_X(d)] &\leq c[1-(1+\rho)S_X(S_X^-(\alpha))] \\ &= c[1-(1+\rho)\alpha] = c[1-\frac{\alpha}{\rho^*}] \leq 0\end{aligned}$$

de aquí que el valor óptimo de d es $S_X^-(\alpha)$.

Como la cola de las funciones de pérdida cedida debe ser lo más pequeña posible, se puede concluir que la función de pérdida cedida óptima es la función nula $g \equiv 0$ y el correspondiente valor mínimo de B es $\psi(S_X^-(\alpha))$. ∇

Ejemplo 4.4.1.

De nuevo, para $X \sim exp(1/1000)$. Si $\rho = 0$, entonces $\rho^* = 1$ y $g^*(x) = x$. Es decir, no importa cuál es el nivel de tolerancia al riesgo, siempre es óptimo reasegurar toda la pérdida.

Si el reaseguro es más costoso, por ejemplo $\rho = 20\,\%$, por tanto $\rho^* = 0.8333$. Entonces, la estructura de reaseguro dependerá del valor de α. Si el nivel de tolerancia al riesgo, α, es mayor que ρ^* entonces lo óptimo será no tener estructura de reaseguro. Si α es menor que ρ^*, entonces es óptimo comprar un reaseguro *stop-loss* con deducible $d^* = 182.32$ $\square$.

4.5. Optimización bajo los criterios del VaR y CVaR para principios de primaje relacionados con la varianza

En esta última sección se resolverán el problema de minimización

$$VaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \min_{g\in\mathcal{G}^+}\{VaR_{T_g(X)}(\alpha)\},$$

$$CVaR_{T_{g^*}(X)}(\alpha) = \min_{g\in\mathcal{G}^+}\{VaR_{T_g(X)}(\alpha)\},$$

para principios de primaje relacionados con la varianza

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \xi(Var(X)).$$

Notación 4.5.1.

(i) $\underline{x} := essinf(X) := \sup\{x \in \mathbb{R} : S_X(x) = 1\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\}$.

(ii) $\bar{x} := esssup(X) := \sup\{x \in \mathbb{R} : S_X(x) > 0\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < 1\}$.

$\triangledown$

Observación 4.5.1.

Como $0 < 1 - \alpha \leq 1 - S_X(VaR_X(\alpha))$ se tiene que $0 \leq ess - inf(X) \leq VaR_X(\alpha) \leq ess - sup(X)$. $\triangledown$

Una de las propiedades que tiene el CVaR, a diferencia del VaR, es que el CVaR es una medida de riesgo coherente (el VaR no satisface la propiedad de sub-aditividad).

4.5.1. Reaseguro óptimo bajo los criterios del VaR y CVaR

El objetivo de esta sección es analizar y resolver los problemas de optimización (4.8) y (4.9) cuando se suponen principios de primaje relacionados con la varianza y el conjunto de soluciones admisibles está dado por $\mathcal{G}^+$.

Notación 4.5.2.

- Para $0 \leq a \leq b \leq \infty$, $L_{(a,b]}(x) := \text{mín}\{(x-a)_+, b-a\} = (x-a)_+ - (x-b)_+$

Para $d \in [0, VaR_X(\alpha)]$, defínase

$$w_1(d) := \mathbb{E}[L_{(d,VaR_X(\alpha)]}(X)] w_2(d) := \mathbb{E}[L^2_{(d,VaR_X(\alpha)]}(X)]$$

Obsérvese que para $d \in [0, VaR_X(\alpha)]$

Proposición 4.5.1.

$$\begin{aligned} w_1(d) &= \mathbb{E}[L_{(d,VaR_X(\alpha)]}(X)] \\ &= \mathbb{E}[(X-d)_+] - \mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+] = \int_d^{VaR_X(\alpha)} S_X(x)dx, \end{aligned}$$

Y también,

$$w_2(d) := \mathbb{E}[L^2_{(d,VaR_X(\alpha)]}(X)] = 2\int_d^{VaR_X(\alpha)} (x-d)S_X(x)dx.$$

Teorema 4.5.1.

Si la prima de reaseguro se calcula a través del principio relacionado con la varianza (4.7), entonces el reaseguro por capas es óptimo bajo el modelo (4.8) (i.e. basado en el VaR) en el sentido de que para cualquier función de pérdida cedida $g \in \mathcal{G}^+$, se puede construir una cobertura de reaseguro por capas $\widetilde{g}(x) = L_{(d,VaR_X(\alpha)]}(x)$ para algún $d \in [0, VaR_X(\alpha)]$ tal que

$$VaR_{T_{\widetilde{g}}(X)}(\alpha) \leq VaR_{T_g(X)}(\alpha),$$

y además

$$\min_{g \in \mathcal{G}^+} VaR_{T_g(X)}(\alpha) = \min_{0 \leq d \leq VaR_X(\alpha)} Q(d),$$

donde $Q(d) := d + w_1(d) + \xi(w_2(d) - w_1^2(d)), \quad d \in [0, VaR_X(\alpha)]$.

En virtud del Teorema anterior, el reaseguro por capas es óptimo bajo el criterio del VaR suponiendo un principio de primaje relacionado con la varianza. Es importante notar que en este Teorema, el deducible óptimo de la capa de reaseguro depende de la regla de correspondencia de la función de recargo, ξ. En el siguiente corolario, se supondrán algunas condiciones para esta función de recargo y se encontrará la capa de reaseguro de manera analítica.

Corolario 4.5.1.

Si la prima de reaseguro se calcula mediante un principio relacionado con la varianza tal que $\xi''(x) \geq 0$ para cualquier $x \geq 0$, entonces la función de pérdida cedida, $\widetilde{g}^*$, que resuelve el problema de reaseguro óptimo (4.8) está dada por

$$\widetilde{g}^*(x) = L_{(\widetilde{d}^*, VaR_X(\alpha)]}(x),$$

donde

$$\widetilde{d}^* := \min\left\{ d \in [essinf(X), VaR_X(\alpha)] : \xi'(w_2(d) - w_1^2(d))w_1(d) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Demostración:

Derivando $Q(d)$ con respecto a d se tiene que

$$Q'(d) = 2[1 - S_X(d)]\left[\frac{1}{2} - w_1(d)\xi'(w_2(d) - w_1^2(d))\right].$$

Pero,

$$\begin{aligned}(w_2(d) - w_1^2(d))' &= w_2'(d) - 2w_1(d)w_1'(d)\\ &= -2w_1(d)[1 - S_X(d)].\end{aligned}$$

Entonces,

$$Q'(d) = 2[1 - S_X(d)]\left[\frac{1}{2} + 2w_1^2(d)[1 - S_X(d)]\right].$$

De aquí que si $d \in [0, ess - inf(X))$, entonces $1 - S_X(d) = 0$ y por tanto $Q'(d) = 0$. Y $Q(d) = Q(ess - inf(X))$. Entonces sólo es necesario encontrar el ínfimo de $Q(d)$ sobre $(essinf(X), VaR_X(\alpha))$. En este caso, se tiene que $1 - S_X(d) > 0$ y por tanto $w_2(d) - w_1^2(d)$ es estrictamente decreciente (pues tiene derivada negativa). Además, como ξ es no-decreciente entonces $\xi''(x) \geq 0$ y $w_1(d)$ es no-creciente, de aquí que $w_1(d)\xi'(w_2(d) - w_1^2(d))$ sea decreciente y también $w_1(d)\xi'(w_2(d) - w_1^2(d)) = 0$ si $d = VaR_X(\alpha)$. Entonces, se pueden concluir los siguientes casos

- Si $d \geq \widetilde{d}^*$, entonces $Q'(d) \geq 0$ y si Si $d \leq \widetilde{d}^*$, entonces $Q'(d) \leq 0$.

Entonces, el valor mínimo de $Q(d)$ en $[essinf(X), VaR_X(\alpha)]$ se alcanza en $d = \widetilde{d}^*$. $\square$

Análogamente, se darán condiciones para garantizar la existencia de una solución óptima bajo la medida de riesgo CVaR.

Teorema 4.5.2.

Si la prima de reaseguro se calcula a través del principio relacionado con la varianza (4.7), entonces el reaseguro por capas es óptimo bajo el modelo (4.9) (i.e. basado en el CVaR) en el sentido de que para cualquier función de pérdida cedida $g \in \mathcal{G}^+$, se puede construir una cobertura de reaseguro por capas $\hat{g}(x) = L_{(d,c]}(x)$ para algunos c, d que cumplen $0 \leq d \leq VaR_X(\alpha) \leq c$ tales que

$$CVaR_{T_{\hat{g}}(X)}(\alpha) \leq CVaR_{T_g(X)}(\alpha).$$

y además

$$\min_{g \in \mathcal{G}^+} CVaR_{T_g(X)}(\alpha) = \min_{0 \leq d \leq VaR_X(\alpha) \leq c} W(d,c).$$

donde

$$\begin{aligned} W(d,c) := \mathbb{E}(X \vee d) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \mathbb{E}[(X-c)_+] \\ + \xi \left(2 \int_d^c (x-d) S_X(x) dx - \left(\int_d^c S_X(x) dx\right)^2\right). \end{aligned}$$

En particular, si $VaR_X(\alpha) = esssup(X)$, entonces la capa de reaseguro que resuelve el problema de optimización basado en el VaR también es una solución del problema (4.9)

4.5.2. Reaseguro óptimo bajo los principio de la varianza y de la desviación estándar

Por los Teoremas de la sección anterior, se sabe que el reaseguro por capas es óptimo bajo los criterios del VaR y del CVaR cuando se supone cualquier principio relacionado con la varianza, y de hecho, dichos problemas de optimización se redujeron a problemas de optimización de uno y dos parámetros, respectivamente; permitiendo que con técnicas de cálculo tradicionales se puedan resolver dichos problemas. A continuación, se profundizará en los principios de primaje de la varianza y de la desviación estándar. Dicho análisis será útil dada la popularidad de dichos principios de primaje y permitirá hacer énfasis en la dependencia de los parámetros.

4.5.2.1. Reaseguro óptimo y principio de la varianza

Ya se dijo que el principio de primaje de la varianza está dado por

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma Var(X), \quad \text{para algún } \gamma > 0$$

Nótese que en este caso $\xi(x) = \gamma x$ y por tanto $\xi''(x) = 0$. De aquí que se puede utilizar el Corolario 4.5.1. Dicha conclusión se resume en la siguiente proposición.

Proposición 4.5.2.

Si se utiliza el principio de primaje de la varianza, entonces la función de pérdida cedida, g_v^*, que resuelve el problema de reaseguro óptimo (4.8) está dada por

$$g_v^*(x) = L_{(d_v^*, VaR_X(\alpha)]}(x),$$

donde

$$d_v^* := \min\left\{d \in [\underline{x}, VaR_X(\alpha)] : \mathbb{E}[(X-d)_+] \leq \frac{1}{2\gamma} + \mathbb{E}[(X - VaR_X(\alpha))_+]\right\}.$$

Además, si $VaR_X(\alpha) = \bar{x}$ entonces g_v^* también es solución del problema de optimización (4.9).

Por supuesto, se analizará más adelante el problema de reaseguro óptimo basado en el CVaR cuando $VaR_X(\alpha) < \bar{x}$.

A partir de este momento se supondrá que la función de supervivencia, S_X, es continua en $(0, \infty)$ y es estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$ y entonces si $0 < \alpha < S_X(0)$, se cumplirá que $VaR_X(\alpha) < \bar{x}$.

Notación 4.5.3.

$$\mathcal{D} := \left\{(d, c) \in int([\underline{x}, VaR_X(\alpha)] \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}]) : \int_d^c S_X(x)dx = \frac{1}{2\gamma}, c - d = \frac{1}{2\gamma\alpha}\right\}$$

$\triangledown$

Ahora, se demostrará un lema que permitirá analizar qué tan "grande" es el conjunto $\mathcal{D}$.

Lema 4.5.1.

Si S_X es continua en $(0, \infty)$ y es estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$, entonces $|\mathcal{D}| \leq 1$.

Demostración:

Por el Teorema de la Función Implícita, para cualquier $c \in (VaR_X(\alpha)\overline{x})$ la ecuación

$$\int_a^c S_X(t)dt = \frac{1}{2\gamma}, \ \underline{x} < a < x_\alpha.$$

tiene a lo más una solución $a(c)$.

Además, si $(a(c), c) \in \mathcal{D}$, entonces $a(c)$ es diferenciable,

$$a^{'}(c) = \frac{S_X(c)}{S_X(a(c))} < 1,$$

y $c - a(c)$ es estrictamente creciente. Por tanto, si $|\mathcal{D}| \neq 0$, $\mathcal{D}$ debe tener a lo más un elemento. □

Notación 4.5.4.

$$c_v := \sup\left\{c \in [VaR_X(\alpha), \overline{x}] : \int_{\underline{x}}^c F_X(x)dx \leq \frac{(1/\alpha - 1)}{2\gamma} \text{ ó } c = VaR_X(\alpha)\right\}$$

$$d_v := \sup\left\{d \in (\underline{x}, VaR_X(\alpha)) : \mathbb{E}\left[(X-d)_+\right] = \frac{1}{2\gamma} \text{ y } \overline{x} - d \leq \frac{1}{2\gamma\alpha}\right\}$$

donde $\sup \varnothing := -\infty$. □

Nótese que si $\bar{x} = \infty$, entonces $d_v = -\infty$. ▽

Proposición 4.5.3.

Si S_X es continua en $(0, \infty)$ y estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$, entonces la función de pérdida cedida que resuelve el problema de reaseguro óptimo (4.9) con el principio de la varianza está dado por

$$g_v^{*C}(x) = \begin{cases} L_{(d,c]}(x), \ (d,c) \in \mathcal{D} & \text{si } |\mathcal{D}| > 0 \\ (x - d_v)_+ & \text{si } |\mathcal{D}| = 0 \ \text{ y } d_v \neq -\infty \\ x \wedge c_v & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración:

Por el Teorema 4.5.2, el problema de optimización bajo el principio de la varianza se puede simplificar mediante el problema de optimización de dos parámetros

$$\min_{0\leq d\leq x_\alpha \leq c} W(d,c),$$

donde $W(d,c)$ ahora está dada por

$$W(d,c)=d+\mathbb{E}\left[(X-d)_+\right]+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\mathbb{E}\left[(X-c)_+\right]\gamma\left[\int_d^c 2(t-d)S_X(t)dt-\left(\int_d^c S_X(t)dt-\right)^2\right]$$

Si la función de supervivencia $S_X(t)$ es continua en $(0,\infty)$ y es estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_x(\alpha)$, entonces $W(\cdot,\cdot)$ es diferenciable y tiene derivadas parciales.

$$\frac{\partial}{\partial d}W(d,t)=2\gamma\left(1-S_X(d)\right)\left(\frac{1}{2\gamma}-\int_d^c S_X(t)dt\right), \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}W(d,t)=2\gamma S_X(c)\left[\int_d^c F_X(t)dt-\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2\gamma}\right], \tag{4.40}$$

para $0\leq d\leq VaR_X(\alpha)\leq c$.

Si $\overline{x}=\infty$, entonces la ecuación anterior implica que $\dfrac{\partial}{\partial c}W(d,c)>0$ para c suficiente grande.
Si $\overline{x}<\infty$, entonces para cualquier $c\geq\overline{x}$ $\dfrac{\partial}{\partial c}W(d,c)>0$ y para cualquier $d<\underline{x}$ entonces $\dfrac{\partial}{\partial d}W(d,c)>0$.

Entonces, el mínimo de $W(d,c)$ en $0\leq d\leq VaR_X(\alpha)\leq c$. se alcanza en un subconjunto compacto de $[\underline{x},VaR_X(\alpha)]\times[VaR_X(d),\overline{x}]$.

Además por el Teorema de Fermat, el mínimo de $W(d,c)$ en $[\underline{x},VaR_X(\alpha)]\times[VaR_X(d),\overline{x}]$ se alcanza el algún punto estacionario ó permanece en la frontera.
Si $(d,c)\in int([\underline{x},VaR_X(\alpha)]\times[VaR_X(\alpha),\bar{x}])$ es un punto estacionario de $W(\cdot,\cdot)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial d}W(d,c) = \frac{\partial}{\partial c}W(d,c) = 0$$

Como $S_X(d) < 1$ y $S_X(c) > 0$, entonces $\int_d^c S_X(x)dx = \frac{1}{2\gamma}$ y $c-d = \frac{1}{2\gamma\alpha}$. Es decir, todos los puntos estacionarios de $W(\cdot,\cdot)$ en $int([\underline{x}, VaR_X(\alpha)] \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}])$ son el conjunto D.

Ahora, se encontrarán los puntos mínimos de $W(\cdot,\cdot)$ que se encuentran en la frontera de $[\underline{x}, VaR_X(\alpha)] \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}]$. Para esto, se dividirá dicha frontera en tres subconjuntos disjuntos, i.e. $\partial([\underline{x}, VaR_X(\alpha)] \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}]) := D_1 \cup D_2 \cup D_3$, donde

$$D_1 := \{\underline{x}\} \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}],$$

$$D_2 := (\underline{x}, VaR_X(\alpha)) \times \{\bar{x}\},$$

$$D_3 := (\underline{x}, VaR_X(\alpha)) \times \{VaR_X(\alpha)\} \cup \{VaR_X(\alpha)\} \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}].$$

Y se dividirá el análisis en tres casos:

- Si $(\underline{x}, c) \in D_1$ es un punto mínimo de $W(\cdot,\cdot)$, entonces por la expresión de $\frac{\partial}{\partial d}W(d,c)$ en (4.39) se tiene que

$$\frac{1}{2\gamma} - \int_{\underline{x}}^{c} S_X(x)dx \geq 0$$

  De aquí que $c \in \mathcal{C}$, donde

$$\mathcal{C} := \left\{ c \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}] : \int_{\underline{x}}^{c} S_X(x)dx \leq \frac{1}{2\gamma} \right\}.$$

  Además, c debe ser un solución al problema de minimización $\min\limits_{y \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}]} W(\underline{x}, y)$. Entonces, según la expresión (4.40) se tiene que $c = c_v$.

- Si $(d, \bar{x}) \in D_2$ es un punto mínimo, entonces por el Teorema de Fermat y la expresión (4.39) se tiene que para $d \in (\underline{x}, VaR_X(\alpha))$

$$\frac{1}{2\gamma} = \int_d^{\bar{x}} S_X(x)dx = \mathbb{E}[(X-d)_+] \;\; \text{y} \;\; \int_d^{\bar{x}} F_X(x)dx \leq \frac{1/\alpha - 1}{2\gamma},$$

  Y entonces, $\bar{x} - d \leq \frac{1}{2\gamma\alpha}$ y $d = dv$

  En D_3 se demostrará que $W(\cdot,\cdot)$ no tiene mínimos. Como $\frac{\partial}{\partial d}W(d,c) \mid_{d=VaR_X(\alpha)=c} > 0$ entonces $W(d,c)$ no es mínimo en el punto $(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))$. Además, si

$(VaR_X(\alpha), c)eD_3 \setminus \{(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))\}$ es un punto mínimo por (4.39) se cumple que $\int_{VaR_X(\alpha)}^{c} S_X(t) \geq \frac{1}{2\gamma}$ y

$$(c - VaR_X(\alpha) > \int_{VaR_X(\alpha)}^{c} \frac{S_X(t)}{S_X(VaR_X(\alpha))})dt \leq \frac{1}{2\gamma\alpha}.$$

Por tanto, $\int_{VaR_X(\alpha)}^{c} F_X(t)dt > F_X(VaR_X(\alpha))(c - VaR_X\alpha) > \frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2\gamma}$.
Entonces por la expresión de $\frac{\partial}{\partial c}W(VaR_X(\alpha), c)$ en (4.39)
se tiene que $W(VaR_X(\alpha), c) > \text{mín}_{y\in[VaR_X(\alpha),\overline{x}]} W(VaR_X(\alpha), y)$, lo cual contradice la suposición de que $(VaR_X(\alpha), c)$ es un punto mínimo.

Análogamente, si $(d, VaR_X(\alpha)) \in D_3 \setminus \{(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))\}$ es un punto mínimo de $W(\cdot, \cdot)$, entonces por el Teorema de Fermat y (4.39)

$\int_{d}^{VaR_X(\alpha)} S_X(t)dt \geq \frac{1}{2\gamma}$ y $\int_{d}^{VaR_X(\alpha)} F_X(t)dt \geq \frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2\gamma}$, $\underline{x} < d < VaR_X(\alpha)$, por tanto, $VaR_X(\alpha) - d \geq \frac{1}{2\gamma\alpha}$, hecho que contradice lo siguiente

$$\frac{1}{2\gamma} = \int_{d}^{VaR_X(\alpha)} S_X(t)dt \geq S_X(VaR_X(\alpha))\left[VaR_X(\alpha) - d\right] = \alpha(VaR_\alpha - d).$$

Después de todos los argumentos que se analizaron, se puede concluir que el valor mínimo de $W(\cdot, \cdot)$ debe estar en el conjunto

$$\mathcal{C}_v = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : I(z = (\underline{x}, c_v), c_v \in \mathcal{C}) + I(z \in D) + I(z = (d_v, \bar{x})) > 0\}$$

donde $I(\cdot)$ es la función indicadora.

Además por el Lema 4.5.1; si $D \neq \varnothing$, entonces $|D| = 1$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $D = \{(d_D, c_D)\}$. En este caso, se demostrará que $d_v = -\infty$ y $c_v \notin \mathcal{C}$ y que el valor mínimo de $W(\cdot, \cdot)$ se alcanza en (d_D, c_D). De forma más específica, si $d_v \neq -\infty$, entonces por la definición de d_v

$$\int_{d_v}^{\bar{x}} S_X(x)dx = \frac{1}{2\gamma} = \int_{d_D}^{c_D} S_X(x)dx \;\text{ y } \bar{x} - d_v \leq \frac{1}{2\alpha\gamma}$$

Pero en la demostración del Lema 4.5.1 se probó que $c - a(c)$ es estrictamente creciente; por tanto $\bar{x} - d_v > c_d - d_D = \frac{1}{2\alpha\gamma}$ lo cual contradice la ecuación anterior.

Si $\mathcal{C} \neq \varnothing$, entonces existe $\hat{c} \in [VaR_X(\alpha), c_D)$ tal que $\int_{\underline{x}}^{\hat{c}} S_X(x)dx = \frac{1}{2\gamma}$ y $\mathcal{C}[VaR_X(\alpha), \hat{c}]$. Y como $c - a(c)$ es estrictamente creciente entonces para cualquier $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\int_{\underline{x}}^{c} F_X(x)dx &\leq \int_{\underline{x}}^{\hat{c}} F_X(x)dx \\ &= \hat{c} - \underline{x} - \frac{1}{2\gamma} < c_d - d_D - \frac{1}{2\gamma} = \frac{1/\alpha - 1}{2\gamma}\end{aligned}$$

Entonces, por la definición de c_v se cumple que $c_v > \hat{c}$ y $c_v \notin \mathcal{C}$.

Si $|D| = 0$ y $d_v \neq -\infty$, se pueden utilizar argumentos análogos para demostrar que $c_v \notin \mathcal{C}$.

Recuérdese que si $\mathcal{C} \neq \varnothing$, entonces

$$\frac{1}{2\gamma} = \mathbb{E}[(X - d_v)_+] = \int_{d_v}^{\hat{c}} S_X(x)dx.$$

Entonces existe $\tilde{c} \in [VaR_X(\alpha), \bar{x})$ tal que $\int_{\underline{x}}^{\tilde{c}} S_X(x)dx = \frac{1}{2\gamma}$ y $\mathcal{C} = [VaR_X(\alpha), \tilde{c}]$. De aquí que para todo $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\int_{\underline{x}}^{c} F_X(x)dx &\leq \int_{\underline{x}}^{\tilde{c}} F_X(x)dx \\ &= \tilde{c} - \underline{x} - \frac{1}{2\gamma} < \bar{x} - d_v - \frac{1}{2\gamma} \\ &\leq \frac{1/\alpha - 1}{2\gamma}\end{aligned}$$

y $c_V \notin \mathcal{C}$. En este caso, $W(\cdot, \cdot)$ alcanza su máximo en $(d_v, \bar{x})$ y $L_{(d_v, \bar{x})}(X) = (X - d_v)_+$ (un reaseguro *stop-loss* con deducible d_v es óptimo.

Finalmente, si $D = \varnothing$ y $d_v = -\infty$, entonces $W(\cdot, \cdot)$ alcanza su mínimo en $(\underline{x}, c_v)$. Y como $W(\underline{x}, c_v) = W(0, c_v)$ entonces la estrategia de reaseguro óptimo considerará a la función de pérdida cedida como $g_v^{*C} = L_{(0, c_v]}(x) = x \wedge c_V$ □

4.5.2.2. Principio de la desviación estándar

Ahora se analizará el problema de reaseguro óptimo bajo el principio de la desviación estándar

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta\sqrt{Var(X)},$$

En este caso $\xi(t) = \Theta\sqrt{t}$ y también $\xi'(t) = \frac{\theta}{2\sqrt{t}} = \frac{\theta}{2}t^{-1/2}$ y $\xi''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2} < 0$.

Como $\xi''(t) < 0$, entonces no se puede aplicar el Corolario 4.5.1 para el principio de la desviación estándar.

Lema 4.5.2.

Sea $\chi(d) := \frac{w_2(d)}{w_1^2(d)}$, $d \in [0, VaR_X(\alpha))$. χ es una función no-decreciente con supremo $\frac{1}{S_X(VaR_X(\alpha)-)}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} w_1^2(d) &= \int_d^{VaR_X(\alpha)} \int_d^{VaR_X(\alpha)} S_X(x)S_X(y)dxdy \\ &= 2\int_d^{VaR_X(\alpha)} \int_d^{VaR_X(\alpha)} I(x \leq y)S_X(x)S_X(y)dxdy \\ &= 2\int_d^{VaR_X(\alpha)} \left[\int_d^y S_X(x)dx\right] S_X(y)dy \\ &\leq 2S_X(d)\int_d^{VaR_X(\alpha)} (y-d)S_X(y)dy = S_X(d)w_2(d). \end{aligned}$$

De aquí que derivando χ con respecto a d se tiene que

$$\chi'(d) = \frac{2}{w_1^3(d)}(w_2(d)S_X(d) - w_1^2(d)) \geq 0,$$

Por tanto, χ es no-decreciente en $[0, VaR_X(\alpha))$.

Con argumentos análogos, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} w_1^2(d) &\geq 2S_X(VaR_X(\alpha)-)\int_d^{VaR_X(\alpha)} \left[\int_d^y 1dx\right] S_X(y)dy \\ &= S_X(VaR_X(\alpha)-)w_2(d) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{S_X(d)} \leq \frac{w_2(d)}{w_1^2(d)} \leq \frac{1}{S_X(VaR_X(\alpha)-)},$$

y se puede observar que $\lim\limits_{d\uparrow VaR_X(\alpha)} \chi(d) = \frac{1}{S_X(VaR_X(\alpha)-)}$.

Proposición 4.5.4.

Si la prima de reaseguro se calcula mediante el principio de la desviación estándar, entonces la función de pérdida cedida, g_s^*, que resuelve el problema de optimización

$$\min_{g\in\mathcal{G}}\{VaR_{T_g(X)}(\alpha)\},$$

está dada por

$$g_s^*(x) = L_{(d_s^*, VaR_X(\alpha)]}(x),$$

donde d_s^* está dada por

$$d_s^* := \min\{d \in [\underline{x}, VaR_X(\alpha)] : \chi(d) \geq \theta^2 + 1 \text{ ó } d = VaR_X(\alpha)\},$$

Además, si $VaR_X(\alpha) = \underline{x}$ entonces g_s^* también es solución al problema de reaseguro óptimo

$$\min_{g\in\mathcal{G}}\{CVaR_{T_g(X)}(\alpha)\}.$$

Demostración:

Si $\underline{x} = VaR_X(\alpha)$, entonces $L_{(d,VaR_X(\alpha)]}(x) = VaR_X(\alpha) - d$ y por tanto para cualquier $d \in [0, VaR_X(\alpha)]$ se tiene que $Q(d) = VaR_X(\alpha)$. Si $\underline{x} < VaR_X(\alpha)$, entonces la expresión (4.39) implica que $\chi(d) > 1$. Como la función de recargo es $\xi(x) = \theta\sqrt{x}$ para el principio de la desviación estándar se tiene que

$$\begin{aligned} Q'(d) &= \theta(1 - S_X(d))\left[\frac{1}{\theta} - \sqrt{\frac{w_1^2(d)}{w_2(d) - w_1^2(d)}}\right] \\ &= \theta(1 - S_X(d))\left[\frac{1}{\theta} - \sqrt{\frac{1}{\chi(d) - 1}}\right] \end{aligned}$$

Y como para cualquier $d \in [0, \underline{x}]$ $Q'(d) = 0$, entonces $Q(d) = Q(\underline{x})$. A partir de la ecuación anterior se puede observar que $Q'(d) \geq 0$ si y sólo si $\chi(d) \geq \theta^2 + 1$ (con $d \in (\underline{x}, VaR_X(\alpha)))$.

Como $\chi(\cdot)$ es una función creciente, entonces $Q(d)$ alcanza su mínimo valor en $d = d_s^*$. Por el Teorema 4.5.1, g_s^* es una solución del problema de reaseguro óptimo bajo el criterio del VaR suponiendo el principio de la desviación estándar. Además, por el Teorema 4.5.2 si $VaR_X(\alpha) = \bar{x}$, entonces g_s^* también es una solución del problema de reaseguro óptimo bajo el criterio del CVaR. □

Observación 4.5.2.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_X(VaR_X(\alpha)-1/n) > \frac{1}{1+\theta^2}$, entonces $d_s^* = VaR_X(\alpha)$ y en este caso, el reaseguro óptimo está dado por $g_s^*(x) = 0$, i.e. bajo el principio de la desviación estándar y el criterio del VaR, si el coeficiente θ es muy grande (que es equivalente a que el reaseguro sea costoso), entonces la aseguradora no cederá el riesgo.
$\triangledown$

La siguiente tarea que surge naturalmente es encontrar solución al problema de optimización bajo el criterio del CVaR (en el entendido de que se está suponiendo el principio de la desviación estándar) cuando $VaR_X(\alpha) < \bar{x}$. Como antes, también se supondrá que la función de supervivencia, S_X, es continua en $(0,\infty)$ y estrictamemte decreciente en un vecindad de $VaR_X(\alpha)$.

Notación 4.5.5.

Sean d, c tales que $\underline{x} \leq d \leq VaR_X(\alpha) \leq c \leq \bar{x}$

$$\phi(d,c) := \frac{\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx}{\left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2},$$

$$\varphi(d,c) := \frac{\int_d^c F_X(x)dx}{\sqrt{\phi(d,c)-1}\int_d^c S_X(x)dx}.$$

Obsérvese que $\phi(d, VaR_X(\alpha)) = \chi(d)$.

$\triangledown$

Lema 4.5.3.

Si la función de supervivencia, S_X, es continua en $(0,\infty)$ y estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$, entonces $\phi(\cdot,\cdot)$ y $\varphi(\cdot,\cdot)$ son continuas y estrictamente crecientes en cada argumento.

Demostración:

La derivada de $\phi(d,c)$ con respecto a d está dada por

$$\frac{\partial}{\partial d}\phi(d,c) = \frac{2}{(\int_d^c S_X(x)dx)^3} \times \left(S_X(d)\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - \left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2 \right),$$

y la derivada de $\phi(d,c)$ con respecto a c está dada por

$$\frac{\partial}{\partial c}\phi(d,c) = \frac{2S_X(c)\int_d^c (c+d-2x)S_X(x)dx}{(\int_d^c S_X(x)dx)^3}.$$

con un argumento de Fubini análogo al que se utilizó cuando se domostró que χ es creciente, se tiene que

$$S_X(d)\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - \left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2 = 2\int_d^c \int_d^y (S_X(d)-S_X(x))dxS_X(y)dy > 0,$$

entonces, $\frac{\partial}{\partial d}\phi(d,c) > 0$. Además

$$\int_d^c (c+d-2x)S_X(x)dx = \int_d^c (c+d-2x)(S_X(x)-S_X((c+d)/2))dx > 0,$$

por tanto $\frac{\partial}{\partial c}\phi(d,c) > 0$ y $\frac{\partial}{\partial c}\phi(d,c) = 0$ si $\int_d^c (c+d-2x)S_X(x)dx = 0$.

De nuevo, con argumentos de Fubini se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \left(\int_d^c F_X(x)dx\right)^2 &= \int_d^c \int_d^c F_X(x)F_X(y)dxdy \\ &= 2\int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right) F_X(x)dx, \end{aligned}$$

y

$$\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - \left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2 = 2\int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right) S_X(x)dx.$$

Derivando con respecto a c la función $\varphi^2(d,c)$ en las ecuaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c}\varphi^2(d,c) &= \frac{\int_d^c F_X(x)dx}{\left(\int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right) S_X(x)dx\right)^2} \\ &\quad \times \left(\int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right)(F_X(c)S_X(x) - F_X(x)S_X(c))dx\right) \\ &= \frac{\int_d^c F_X(x)dx}{\left(\int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right) S_X(x)dx\right)^2} \\ &\quad \times \int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right)(F_X(c) - F_X(x))dx > 0.\end{aligned}$$

Entonces, como $\frac{\partial}{\partial c}\varphi^2(d,c) > 0$ y $\varphi(d,c) > 0$ se concluye que $\frac{\partial}{\partial c}\varphi(d,c) > 0$.

También, derivando con respecto a d la función $\varphi^2(d,c)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial d}\varphi^2(d,c) &= \frac{F_X(d)}{\left(\int_d^c \left(\int_d^x F_X(y)dy\right) S_X(x)dx\right)^2} \\ &\quad \times \int_d^c F_X(x)\left((c-x)\int_d^c S_X(y)dy - (c-d)\int_x^c S_X(y)dy\right)dx > 0.\end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene del hecho de que $\frac{\int_x^c S_X(y)dy}{c-x}$ es decreciente con respecto a x.

Entonces, como $\frac{\partial}{\partial d}\varphi^2(d,c) > 0$ y $\varphi(d,c) > 0$ se concluye que $\frac{\partial}{\partial d}\varphi(d,c) > 0$.

Notación 4.5.6.

$$\mathcal{F} := \left\{(d,c) \in int([\underline{x}, VaR_X(\alpha)] \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}]) : \frac{c-d}{\int_d^c S_X(x)dx} = \frac{1}{\alpha}, \phi(d,c) = \theta^2 + 1\right\}$$

$\triangledown$

A continuación se demostrará un resultado con respecto a la cardinalidad de $\mathcal{F}$ que facilite la "localización" de soluciones óptimas.

Lema 4.5.4.

Si la función de supervivencia, S_X, es continua en $(0,\infty)$ y es estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$, entonces $|\mathcal{F}| \leq 1$

Demostración:

Ya se demostró que $\phi(\cdot,\cdot)$ es diferenciable y $\frac{\partial}{\partial d}\phi(d,c) > 0$. Entonces, por el Teorema de la Función Implícita, para cualquier $c \in (VaR_X(\alpha))$ la ecuación $\phi(d,c) = \theta^2 + 1$ (con $d \in (\underline{x}, VaR_X(\alpha)))$ tiene a lo más una solución.

Además; si $(d(c),c) \in \mathcal{F}$, entonces $d(c)$ es derivable con respecto a c y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} d'(c) &= \left(\frac{\partial}{\partial c}\phi(d(c),c)\right)\left(\frac{\partial}{\partial c}\phi(d(c),d)\right)^{-1} \\ &= -\frac{S_X(c)\int_{d(c)}^{c}(c+d(c)-2x)S_X(x)dx}{S_X(d(c))\int_{d(c)}^{c} 2(x-d(c))S_X(x)dx - \left(\int_{d(c)}^{c} S_X(x)dx\right)^2}. \end{aligned}$$

De aquí que por la Regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \left(\frac{c-d(c)}{\int_{d(c)}^{c} S_X(x)dx}\right)' &= \frac{1}{\left(\int_{d(c)}^{c} S_X(x)dx\right)^2} \times \left(\int_{d(c)}^{c}(S_X(x)-S_X(c))dx\right. \\ &\quad \left. + d'(c)\int_{d(c)}^{c}(S_X(d(c))-S_X(x))dx\right) \\ &= \frac{V(d,c)}{\left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2(S_X(d)\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - (\int_d^c S_X(x)dx)^2)} \\ &= \frac{\int_d^c(\int_y^c(S_X(x)-S_X(c))dx)(S_X(d)-S_X(y))dy}{\int_d^c S_X(x)dx \times \int_d^c\int_d^y(S_X(d)-S_X(y))dxS_X(y)dy} > 0, \end{aligned}$$

donde $d(c)$ se escribió simplemente como d para no complicar la notación y $V(d,c)$ está dado por

$$
\begin{aligned}
V(d,c) := {} & \int_d^c (S_X(x)-S_X(c))dx \left(S_X(d)\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - \left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2 \right) \\
& - S_X(c)\int_d^c (S_X(d)-S_X(x))dx \times \int_d^c (c+d-2x)S_X(x)dx \\
= {} & \int_d^c S_X(x)dx \left(S_X(d)\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - \left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2 \right) \\
& + S_X(c)\int_d^c S_X(x)dx \times \left(2\int_d^c (c-x)S_X(x)dx - S_X(d)(c-d)^2\right) \\
= {} & 2\int_d^c S_X(x)dx \times \left[\int_d^c \int_d^x (S_X(d)-S_X(y))dy S_X(x)dx \right. \\
& \left. - S_X(c)\int_d^c (c-y)(S_X(d)-S_X(y))dy \right] \\
= {} & 2\int_d^c S_X(x)dx \times \left[\int_d^c \left(\int_y^c S_X(x)dx\right)(S_X(d)-S_X(y))dy \right. \\
& \left. - S_X(c)\int_d^c (c-y)(S_X(d)-S_X(y))dy \right] \\
= {} & 2\int_d^c S_X(x)dx \times \int_d^c \left(\int_y^c (S_X(x)-S_X(c))dx\right)(S_X(d)-S_X(y))dy.
\end{aligned}
$$

Por tanto; si $\mathcal{F}$ es no vacío, entonces $\mathcal{F}$ debe tener un sólo elemento.

Notación 4.5.7.

Defínase

$$c_s := \text{mín}\left\{ c \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}] : \varphi(\underline{x}, c) \geq \frac{1/\alpha - 1}{\theta} \quad \text{ó } c = \bar{x} \right\}$$

$$d_s := \sup\left\{ d \in (\underline{x}, VaR_X(\alpha)) : \bar{x} - d \leq \frac{\mathbb{E}[(X-d)_+]}{\alpha} \quad \text{y } \theta = \frac{\sqrt{Var[(X-d)_+]}}{\mathbb{E}[(X-d)_+]} \right\}$$

Y nótese que si $\bar{x} = \infty$, entonces $d_s = -\infty$. ∇

En la siguiente proposición se dará una expresión explícita para la solución del problema de optimización bajo el criterio del CVaR.

Proposición 4.5.5.

Si la función de supervivencia, S_X, es continua en $(0, \infty)$ y es estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$, entonces la función de pérdida cedida que resuelve el problema de reaseguro óptimo (4.9), suponiendo el principio de primaje de la desviación estándar, está dada por

$$g_s^{*C} = \begin{cases} L_{(d,c]}(x), \ (d,c) \in \mathcal{F} & \text{si } |\mathcal{F}| > 0 \\ (x - d_s)_+ & \text{si } |\mathcal{F}| = 0 \ \text{ y } d_s \neq -\infty \\ 0 & \text{si } |\mathcal{F}| = 0, \ d_s \neq -\infty \ \text{ y } 1 + \theta^2 > 1/\alpha \\ x \wedge c_s & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración:

La demostración es parecida a la de la proposición (4.5.3). Por el Teorema (4.5.2), el problema de reaseguro óptimo basado en el CVaR con el principio de la desviación estándar se reduce a minimizar $W(d, c)$ sobre $0 \leq d \leq VaR_X(\alpha) \leq c$, donde

$$W(d,c) := d + \mathbb{E}[(X-d)_+] + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\mathbb{E}[(X-c)_+] \\ + \theta\sqrt{\int_d^c 2(x-d)S_X(x)dx - \left(\int_d^c S_X(x)dx\right)^2}.$$

Suponiendo que S_X es continua en $(0, \infty)$ y estrictamente decreciente en una vecindad de $VaR_X(\alpha)$, $W(\cdot, \cdot)$ es diferenciables y sus derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial}{\partial d}W(d,c) = \theta(1 - S_X(d))\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\sqrt{\phi(d,c) - 1}}\right). \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}W(d,c) = \theta S_X(c)\left(\varphi(d,c) - \frac{1/\alpha - 1}{\theta}\right). \tag{4.42}$$

Si $(d, c) \in int([\underline{x}, VaR_X(\alpha)] \times [VaR_X(\alpha), \bar{x}])$ es un punto estacionario de $W(\cdot, \cdot)$, entonces $\frac{\partial}{\partial d}W(d,c) = 0 = \frac{\partial}{\partial c}W(d,c)$. Y por las ecuaciones (4.41) y (4.42) esto es equivalente a

$$\phi(d,c) = 1 + \theta^2 \ \text{ y } \ \frac{c-d}{\int_c^d S_X(x)dx} = \frac{1}{\alpha}$$

Si $W(\cdot,\cdot)$ es mínimo en $(\underline{x}, c_1) \in D_1$, entonces a partir de la expresión de $\frac{\partial}{\partial d}W(\underline{x}, c_1)$ en (4.41) se puede concluir que $\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\sqrt{\phi(\underline{x},c_1)-1}}$ para $c_1 \in \mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{B} := \{c \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}] : \phi(\underline{x}, c) \geq \theta^2 + 1\}$$

$$W(\underline{x}, c_1) = \min_{c \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}]} W(\underline{x}, c)$$

Si $(d, \bar{x}) \in D_2$ es un punto mínimo de $W(\cdot,\cdot)$, entonces por la igualdad en (4.41) y el Teorema de Fermat se tiene que $\frac{\partial}{\partial d}W(d, \bar{x}) = 0$ y $\varphi(d, \bar{x}) - \frac{1/\alpha - 1}{\theta} \leq 0$. Por tanto, $d = d_s$.

Ya se demostró que $W(\cdot,\cdot)$ no tiene puntos mínimos en $D_3 \cap \{(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))\}^c$. Si $W(\cdot,\cdot)$ se minimiza en $(d, VaR_X(\alpha)) \in D_3 \cap \{(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))\}^c$, de nuevo por la ecuación (??) y el Teorema de Fermat, $\frac{\partial}{\partial d}W(d, VaR_X(\alpha)) = 0$ y $\frac{\partial}{\partial c}W(d, VaR_X(\alpha)) \geq 0$, que es equivalente a

$$\phi(d, VaR_X(\alpha)) = 1 + \theta^2 \quad \text{y} \quad \frac{VaR_X(\alpha) - d}{\int_c^{VaR_X(\alpha)} S_X(x)dx} \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Esto lleva a la contradicción

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{VaR_X(\alpha) - d}{\int_d^{VaR_X(\alpha)} S_X(x)dx} < \frac{1}{S_X(VaR_X(\alpha))} = \frac{1}{\alpha}.$$

Por otro lado, si $(VaR_X(\alpha), c) \in D_3 \cap \{(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))\}^c$ es un punto mínimo de $W(\cdot,\cdot)$, con un argumento análogo se puede demostrar que $\frac{\partial}{\partial d}W(VaR_X(\alpha), c) \leq 0$ y $\frac{1}{\sqrt{\phi(VaR_X(\alpha),c)-1}} \geq \frac{1}{\theta}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\varphi(VaR_X(\alpha), c) \quad &\geq \quad \frac{1}{\theta}\left(\frac{c - VaR_X(\alpha)}{\int_{VaR_X(\alpha)}^{c} S_X(x)dx} - 1\right) \\
&\geq \quad \frac{1}{\theta}\left(\frac{c - VaR_X(\alpha)}{(c - VaR_X(\alpha)S_X(VaR_X(\alpha)))} - 1\right) = \frac{1/\alpha - 1}{\theta}.
\end{aligned}$$

De aquí que $W(VaR_X(\alpha), c) > \min_{y \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}]} W(VaR_X(\alpha), y)$, lo cual es una contradicción al hecho de que $(VaR_X(\alpha), c)$ es un punto mínimo.

Finalmente, por el Lema (??), si $1 + \theta^2 < \frac{1}{\alpha}$, entonces

$$\phi(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha)))\chi(VaR_X(\alpha)) = \frac{1}{\alpha} > 1 + \theta^2.$$

y entonces $\frac{\partial}{\partial d}W(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha)) > 0$. Por tanto $(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))$ no es un punto mínimo de $W(\cdot,\cdot)$. En el caso de que $1+\theta^2 \geq \frac{1}{\alpha}$, con los mismos argumentos se puede demostrar que $\frac{\partial}{\partial d}W(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha)) \leq 0$ y $\frac{\partial}{\partial c}W(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha)) \geq 0$. Y como

ϕ y φ son crecientes, entonces $W(\cdot,\cdot)$ puede alcanzar su mínimo en $(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))$.

Después de todos los argumentos que se analizaron se tiene que

$$\min_{g\in} CVaR_{T_g(X)}(\alpha) = \min_{(d,c)\in\mathcal{K}_s} W(d,c)$$

y,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} - (1+\theta^2) &= \frac{c_H - d_H}{\int_{d_H}^{c_H} S_X(x)dx} - \phi(d_H, c_H) \\ &= \frac{\int_{d_H}^{c_H}(c_H + d_H - 2x)S_X(x)dx}{(\int_{d_H}^{c_H} S_X(x)dx)^2} > 0.\end{aligned}$$

Si $d_s \neq \infty$, entonces $\phi(d_s, \bar{x}) = 1 + \theta^2$; y como $\frac{c-d(c)}{\int_{d(c)}^{c} S_X(x)dx}$ es estrictamente creciente, entonces

$$\frac{\bar{x} - d_s}{\int_{d_s}^{\bar{x}} S_X(x)dx} > \frac{c_H - d_H}{\int_{d_H}^{c_H} S_X(x)dx} = \frac{1}{\alpha}$$

lo cual contradice la definición de d_s. Además; si $\mathcal{B} \neq \varnothing$, entonces existe $c_0 \in (c_H, \bar{x}]$ tal que $\phi(\underline{x}, c_0) = 1 + \theta^2$ y $\mathcal{B} = [c_0, \bar{x}]$. Por tanto, para todo $c \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{x}, c) \geq \varphi(\underline{x}, c_0) &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{c_0 - \underline{x}}{\int_{\underline{x}}^{c_0} S_X(x)dx} - 1\right) \\ &> \frac{1}{\theta}\left(\frac{c_H - d_H}{\int_{d_H}^{c_H} S_X(x)dx} - 1\right) = \frac{1/\alpha - 1}{\theta}\end{aligned}$$

entonces, por la definición de c_s se tiene que $c_s < c_0$ y $c_s \notin \mathcal{B}$.

Si además $\mathcal{F} = \varnothing$ y $d_s \neq -\infty$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} - (1+\theta^2) &\geq \frac{\bar{x} - d_s}{\int_{d_s}^{\bar{x}} S_X(x)dx} - \phi(d_s, \bar{x}) \\ &= \frac{\int_{d_s}^{\bar{x}}(\bar{x} + d_s - 2x)S_X(x)dx}{(\int_{d_s}^{\bar{x}} S_X(x)dx)^2} > 0.\end{aligned}$$

Y como $\phi(d_s, \bar{x}) = 1+\theta^2$ y $\phi(\cdot,\cdot)$ es creciente, entonces para cualquier $c \in [VaR_X(\alpha), \bar{x}]$ tal que $\mathcal{B} = \varnothing$ se cumple que $\phi(\underline{x}, c) < 1 + \theta^2$. De aquí que $\mathcal{K}_s = \{(d_s, \bar{x})\}$, $W(\cdot,\cdot)$

alcance su mínimo en $(d_s, \bar{x})$ y la estructura de reaseguro stop-loss (con deducible d_s), $L_{(d_s,\bar{x}]}(X) = (X - d_s)_+$, sea óptima.

Si $\mathcal{F} = \varnothing$, $d_s = -\infty$ y $1 + \theta^2 \geq \frac{1}{\alpha}$, se puede demostrar que $c_s \notin \mathcal{B}$. Si $\mathcal{B} \neq \varnothing$, entonces para todo $c \in \mathcal{B}$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\underline{x}, c) &= \frac{1}{\sqrt{\phi(\underline{x}, c) - 1}} \left(\frac{c_0 - \underline{x}}{\int_{\underline{x}}^{c_0} S_X(x)dx} - 1 \right) \\
&> \sqrt{\phi(\underline{x}, c) - 1} \geq \theta \geq \frac{1/\alpha - 1}{\theta}.
\end{aligned}
$$

Además, $VaR_X(\alpha) \notin \mathcal{B}$ pues $\phi(\bar{x}, VaR_X(\alpha)) < \phi(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha)) = \chi(VaR_X(\alpha)) = \frac{1}{\alpha} = 1 + \theta^2$. De aquí que también $c_s \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{K}_s = \{(VaR_X(\alpha), VaR_X(\alpha))\}$ y el reaseguro óptimo sea $g_s^{*C}(x) = 0$.

En otro caso, se tiene que $\mathcal{K}_s = \{(\underline{x}, c_s)\}$, i.e. el mínimo de $W(\cdot, \cdot)$ se alcanza en $(\underline{x}, c_s)$ y $W(\underline{x}, c_s) = W(0, c_s)$ de aquí que se puede escoger la estructura de reaseguro óptimo $L_{(0,c_s]}(x) = x \wedge c_s$.

Ejemplo 4.5.1.

De nuevo, suponiendo que las pérdidas tienen una distribución Pareto y $\alpha = 5\,\%$, se tiene que $S_X(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $d_s = -\infty$, $\underline{x} = 0$ y $VaR_X(\alpha) = 3.472 < \bar{x} = \infty$.

Además, estableciendo un coeficiente de recargo $\theta = 3$ y resolviendo las ecuaciones

$$
1 + \theta^2 = \phi(d, c) = \frac{2(d+1)^2(c+1)^2}{(c-d)^2} \left(Ln\left(\frac{c+1}{d+1}\right) - \frac{c-d}{c+1} \right)
$$

$$
\frac{1}{\alpha} = \frac{c-d}{\int_d^c S_X(x)dx} = (c+1)(d+1), 0 < d < VaR_X(\alpha) < c < \infty
$$

se tiene que $d = 0.977$ y $c = 9.115$, i.e. $\mathcal{F} = \{(0.977, 9.115)\}$. De aquí que la función de pérdida cedida óptima bajo el criterio del CVaR suponiendo el principio de la desviación estándar está dada por

$$
g_s^{*C} = \min\{(x - 0.977)_+, 8.138\}
$$

$\triangledown$

Conclusiones

La búsqueda para un reaseguro óptimo ha permanecido como un problema fascinante constantemente estudiado por académicos actuarios del ramo. Varios modelos de reaseguro han sido propuestos en la literatura, que van desde el acercamiento académico puro hasta los que están orientados a la práctica.

En este trabajo se propone propiedades deseables en una prima. Se describieron tres esquemas que la ciencia actuarial utiliza para establecer principios y se concluye que el esquema *ad hoc* es más razonable para poner en práctica.

Existen diversos caminos de investigación para encontrar un reaseguro óptimo, uno de los caminos que se consideró en el Capítulo dos fue: encontrar una solución óptima para un un portafolio dado utilizando un criterio de media-varianza, es muy común que en la operación del reaseguro no solo se use un tipo de reaseguro (cuota-parte, *surplus*, exceso de pérdida, ó *stop loss*), es bastante común que que se utilice una combinación de varios tipos de protección de reaseguro. Se presentaron las posibles estructuras de reaseguro y se obtuvieron las ecuaciones que se deben de resolver para encontrar una solución óptima de las siguientes estructuras de reaseguro: exceso de pérdida después de un *surplus*, cuota-parte como caso especial de un *surplus*, exceso de pérdida y cuota-parte, exceso de pérdida después de un cuota-parte, cuota-parte después de un exceso de pérdida, *stop-loss* como un caso particular del exceso de pérdida, cuota-parte después de un *stop-loss*, *surplus* y cuota-parte y *surplus* después de un cuota-parte utilizando un criterio de media-varianza, que consistió en maximizar la ganancia esperada con una desviación estándar fija para optimizar esta ganancia se utilizó multiplicadores de Lagrange, para encontrar una solución factible, se utilizó un proceso iterativo sin embargo en ocasiones el acercamiento es académicamente puro.

Esto motivó que se estudiara cómo se modifican los modelos de reaseguro óptimo cuando no necesariamente se supone el principio del valor esperado.

En el Capítulo cuatro se estudiaron algunos modelos de reaseguro óptimo suponiendo algunos otros principios de primaje y, aún más importante, con criterios de optimización basados en las medidas de riesgo: VaR, CTE y CVaR.

Se encontró el resultado del problema de optimización de reaseguro cuota-parte para el parámetro de cesión óptimo bajo el criterio del VaR y se presentó varios resultados con diferentes principios de primaje. De igual forma se mostró el resultado de optimización de reaseguro *stop-loss* para la existencia del parámetro de retención óptima bajo el criterio del VaR y se presentaron varios resultados con diferentes principios de primaje.

Se encontró el resultado del problema de optimización de reaseguro cuota-parte para el parámetro de cesión óptimo bajo el criterio del CTE y se presentó varios resultados con diferentes principios de primaje. De igual forma se mostró el resultado de optimización de reaseguro *stop-loss* para la existencia del parámetro de retención óptima bajo el criterio del CTE y se presentaron varios resultados con diferentes principios de primaje.

Posteriormente, sólo bajo el principio de primaje del valor esperado, se encontró dentro de una clase de funciones de riesgo cedido la forma de reaseguro óptimo, i.e. no se supone que se trabajó con una forma de reaseguro particular. Es decir, la solución al problema de reaseguro óptimo fue más ambiciosa ya que también se muestra explícita la forma de reaseguro óptima (*stop-loss*, cuota-parte, *share-loss*, *surplus*, etc).

Finalmente, se supone el principio del valor esperado y también un principio relacionado con la varianza, se utilizó al VaR y al CVaR para determinar también la forma de reaseguro óptimo. Tampoco se supone una forma de reaseguro, también se determinó éste; concluyendo que el reaseguro por capas es óptimo (i.e. una combinación de *stop-loss* y cuota-parte).

Referencias

- Acerbi, C. & Tasche, D. (2002) *On the coherence of expected shortfall.* Journal of Banking and Finance: 2(7), 1487-1503.
- Artzner, P. & Delbaen, F. & Eber, J. & Heath, D. (1999) *Coherent measures of risk.* Mathematical Finance: 9(3), 203-228.
- Balbas, A., Balbas, B. & Heras, A. (2009) *Optimal Reinsurance with general risk measures.* Insurance: Mathematics and Economics 44(3), 374-484.
- Borch, H. (1990) *Economics of Insurance.* Amsterdan: North-Holland.
- Bülmann, H. (1980) *An economic premium principle.* ASTIN Bulletin, 11(1), 116-126.
- Bülmann, H. (1984) *The general economic premium principle.* ASTIN Bulletin, 14(1), 13-22.
- Cai, J. & Tan, K. (2007) *Optimal Retention for a stop-loss Reinsurance Under the VaR and CTE Risk Measures.* Astin Bulletin 37(1), 93-112.
- Daykin, C. (1994) *Practical Risk Theory for Actuaries.* Chapman & Hall.
- Delbaen, F. (2000) *Coherent Risk Measures.* Cattedra Galileiana. Scuola Normale Superiore di Pisa.
- Deprez, O. & Gerber H. (1985) *On conex principles of premium calculation.* Insurance: Mathematics and Economics 4, 179-189.
- Dhaene, J. & Vanduffel, S. & Goovaerts M.J (2006) *Risk Measures and commonotonicity: a review. Stochastic Models.* 22, 573-606. Scuola Normale Superiore di Pisa.
- Gajek, L. & Zagrodny. (2004) *Optimal Reinsurance under general risk measures.* Insurance: Mathematics and Economics 34, 227-240.
- Goovaerts, M. & De Vylder, F. & Haezendonck, J. (1984)*Insurance Premiums.* North-Holland.

- Hardy, G. & Littlewood, J. (1930) *A maximal theorem with function-theoretic applications*. Acta Math 54(1), 81-116.
- Jorion, P. (2007) *Value-at-Risk*. McGraw-Hill, Oxford.
- Kaluszka, M. (2005) *Optimal Reinsurance under convex principles of premium calculation*. Insurance: Mathematics and Economics 36, 375-398.
- Kusuoka, S. (2001) *On law invariant coherent risk measures*. In Advances in mathematical economics, Volume 3 of Adv. Math. Econ, 83-95.
- Müller, A. & Stoyan, D. (2002) *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley series in Probability and Statistics.
- Rockafellar, R. (1970) *Convex Analysis*.Princeton University Press, Princeton New Jersey.
- Taylor, G. (1992) *Risk exchanhe I: a unification of some existing results*. Scandinavian Acturial Journal, 15-39.
- Taylor, G. (1992) *Risk exchanhe II: optimal reinsurance contracts*. Scandinavian Acturial Journal, 40-59.
- Wang, S. (2001a) *A universal Framework For Pricing Financial and Insurance Risks*. Toronto Vol.2, 679-703.
- Wang, S. (2001b) *A Risk Measures That Goes Beyond Coherence* . Statics and Actuarial Science. 1-18.