



Universidad Nacional Autónoma de México

---

Facultad de Ciencias

Valuación de Swaps  
de Incumplimiento Créditicio  
con Tasas de Interés Estocásticas

TESIS

que para obtener el título de:

ACTUARIA

presenta:

VALERIA CAROLINA FUENTES ROVELO

director de tesis:

Act., M. Sc. JESÚS DAVID GÓMEZ TÉLLEZ



Ciudad de México

septiembre de 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno:

Fuentes

Rovelo

Valeria Carolina

55 31 42 09 77

Universidad Nacional Autónoma de  
México.

Actuaría.

308264034

2. Datos del Tutor:

M. en C.

Jesús David

Gómez

Téllez

3. Datos del Sinodal 1.

Dr.

Ambrosio

Ortiz

Ramírez

4. Datos del Sinodal 2.

M. en F.

Luis Felipe

Santos

Torres

5. Datos del Sinodal 3.

M. en F.

Abraham Mohamed

Izquierdo

García

6. Datos del Sinodal 4.

Raúl

Álvarez del Castillo

Penna.

# Agradecimiento

Me gustaría agradecer a mi país por haberme brindado la oportunidad de estudiar una licenciatura totalmente financiada por el Estado. A mi asesor de tesis por haberme brindado su constante apoyo y guía profesional. A mi mamá. A mi tía Tere, tía Gloria y tía Lupe, si no se hubieran hecho cargo de mi desde pequeña, nunca habría podido llegar hasta este punto. A mis profesores y amigos. A Rodrigo, sus consejos cambiaron mi vida. A Jacob, por apoyarme incondicionalmente.

# Resumen

El objetivo de la presente tesis es valorar dos derivados financieros: swap de incumplimiento crediticio para primer impago y swap de incumplimiento crediticio para segundo impago, mejor conocidos como *first-to-default credit default swap* y *second-to-default credit default swap*.

Existen diferentes formas para realizar las valuaciones, sin embargo, en todas estas metodologías siempre aparecen los siguientes conceptos:

- Probabilidad de incumplimiento
- Tasa de interés
- Prima
- Cobertura
- Pérdida dado que Ocurrió el Impago (*Loss Given Default*)

El concepto principal es la probabilidad de incumplimiento, dada su utilidad en la valuación de los instrumentos derivados, así como en la determinación del apetito de riesgo que tienen los involucrados. Es por ello que existen diferentes metodologías para calcular la probabilidad de incumplimiento; en este caso, el cálculo de las probabilidades se hará con matrices de migración, este método tiene la ventaja de calcular las probabilidades de manera explícita. Por otro lado, exponemos la teoría para generar escenarios aleatorios de incumplimiento de los instrumentos que tienen una calificación asignada, esto lo logramos a través de simulación Monte Carlo. Asociamos las probabilidades de incumplimiento a la curva de crédito para simular el momento en que se genera el incumplimiento para cada escenario.

Las tasas de interés serán utilizadas para convertir a valor presente los flujos de efectivo; las simularemos por medio del modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR). El modelo fue calibrado con información del mercado mexicano.

La pérdida dado que ya ocurrió el impago (LGD) suele ser  $(1 - \text{Tasa de Recuperación})$ , donde la tasa de recuperación regularmente se toma de la legislación vigente del país dónde se esté estructurando el derivado. En este caso, se asumió que la tasa de recuperación es de **0**, como hipótesis de trabajo en este ejercicio académico. La prima y la cobertura se ajustan a las necesidades del contrato.

El swap de incumplimiento crediticio de primer impago tiene como bien subyacente a dos empresas, Ara S.A.B de C.V. y Sare Holding S.A.B de C.V. En caso de que cualquiera de las dos empresas caiga en incumplimiento el comprador de la protección podrá ejercer el derivado.

El swap de incumplimiento crediticio para segundo impago también tiene como bien subyacente a las empresas, Ara S.A.B de C.V. y Sare Holding S.A.B de C.V. En este caso la protección se puede ejercer sólo en caso de que las dos empresas caigan en incumplimiento, no importando el orden en que esto ocurra.

La hipótesis de esta tesis consiste en que el derivado que tiene mayor probabilidad de que se ejerza debe de ser más costoso. En otras palabras, el swap de incumplimiento crediticio para primer impago es más costoso que el swap de incumplimiento crediticio para segundo impago.

Esta tesis está escrita asumiendo que el lector ya conoce, al menos, los conceptos intermedios de derivados, tasas estocásticas, cadenas de Markov. Aunque los derivados de crédito ya no están en auge, la metodología se puede utilizar para medir el riesgo de crédito o contraparte en otras posiciones.

# Índice general

<b>Introducción .....</b>	<b>8</b>
1.1. Motivación.....	9
1.2. Estructura de la tesis .....	9
<b>Definiciones básicas del Riesgo de Crédito .....</b>	<b>11</b>
2.1. Calificaciones y Probabilidades de Impago.....	11
2.1.1. Calificaciones.....	11
2.1.2. Probabilidad de impago .....	13
2.1.3. Método causal para calificar .....	13
2.2. Matrices de migración para determinar Probabilidades de Incumplimiento.....	14
2.3. Curvas de crédito. ....	16
2.3.1. Curvas de crédito mediante cadenas de Markov homogéneas. ....	17
2.4. Modelación de las probabilidades de primer y segundo impago .....	20
2.4.1. Estructura de la simulación .....	26
<b>Valuación del swap de incumplimiento crediticio.....</b>	<b>28</b>
3.1. Definiciones básicas de los swaps de incumplimiento.....	28
3.2. Construcción del swap de incumplimiento crediticio .....	29
3.3. Simulación .....	30
3.4. Tasas de interés estocásticas. ....	32
3.4.1. Modelo CIR.....	32
3.5. Valuación de los swaps de incumplimiento crediticio .....	36
3.5.1. Swaps de incumplimiento crediticio para primer impago.....	37
3.5.2. Swaps de incumplimiento crediticio para segundo impago .....	37
<b>Conclusiones .....</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>40</b>

# Lista de abreviaciones

ISC	Índice de Solvencia
DP	Probabilidad de impago
EL	Pérdida esperada
LGD	Pérdida dado que ya ocurrió el impago
EAD	Exposición al impago



# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo de la presente tesis es valorar dos derivados financieros: un swap de incumplimiento crediticio para primer impago y un swap de incumplimiento crediticio para segundo impago, conocidos en inglés como *first-to-default credit default swap* y *second-to-default credit default swap*.

Existen diferentes formas para realizar las valuaciones, sin embargo, en todas estas metodologías siempre aparecen los siguientes conceptos:

- Probabilidad de incumplimiento
- Tasa de interés
- Prima
- Cobertura
- Pérdida dado que Ocurrió el Impago (*Loss Given Default*)

El concepto principal es la probabilidad de incumplimiento, dada su utilidad en la valuación de los instrumentos derivados, así como en la determinación del apetito de riesgo que tienen los involucrados. Es por ello que existen diferentes metodologías para calcular la probabilidad de incumplimiento; en este caso, el cálculo de las probabilidades se hará con matrices de migración, este método tiene la ventaja de calcular las probabilidades de manera explícita. Por otro lado, exponemos la teoría para generar escenarios aleatorios de incumplimiento de los instrumentos que tienen una calificación asignada, esto lo logramos a través de una simulación Monte Carlo. Asociamos las probabilidades de incumplimiento a la curva de crédito para simular el momento en que se genera el incumplimiento para cada escenario.

Las tasas de interés serán utilizadas para convertir a valor presente los flujos de efectivo; las simularemos por medio del modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR). El modelo fue calibrado con información del mercado mexicano.

La hipótesis de esta tesis consiste en que el derivado que tiene mayor probabilidad de que se ejerza debe de ser más costoso. En otras palabras, el swap de incumplimiento crediticio para primer impago es más costoso que el swap de incumplimiento crediticio para segundo impago.

## **1.1. Motivación**

En el año 2008 se presentó una de las más grandes crisis financieras, en el campo de los créditos hipotecarios. Parte del problema estuvo en errores en la asignación de las calificaciones y la deficiente comprensión de los derivados de crédito. De esta forma se puede notar la importancia de hacer una correcta estimación del riesgo de todos aquellos derivados que tienen como bien subyacente un crédito.

En México las instituciones financieras tienen prohibido estructurar swaps de incumplimiento crediticio (*Credit Default Swaps*). Sin embargo, el mercado mexicano sí tiene la posibilidad de comprar este tipo de derivados para protegerse del incumplimiento de terceros. A su vez, aunque México no puede emitir este tipo de derivados, sí existen en el mercado internacional swaps de incumplimiento crediticio para protegerse contra el incumplimiento de bonos gubernamentales emitidos por México.

## **1.2. Estructura de la tesis**

**Capítulo 2** En este capítulo hacemos el planteamiento de qué es una calificación y cómo, con base en ella, construimos las probabilidades de incumplimiento. Posteriormente, en el mismo capítulo, establecemos la teoría de las matrices de migración, así como la metodología para generar las curvas de crédito. Las curvas de crédito están hechas con base en las transiciones crediticias, las cuales se modelan con cadenas de Markov; es a través de la matriz generadora como se logra hacer la cadena a tiempo continuo. El ejemplo base de ese capítulo lo desarrollamos con la matriz de migración del mercado global del reporte de S&P (2013). En el siguiente capítulo se estructuraron las curvas de probabilidad de incumplimiento con la matriz de S&P (2013) de mercados emergentes, para una valuación más precisa es necesario generar una matriz del sector inmobiliario en México. En adición, los derivados de crédito se han convertido en herramientas de información de mercado de carácter importante e incluso regulatorio i.e. Basilea para obtener las curvas de crédito.

Por otro lado, en el mismo capítulo, exponemos la teoría para generar escenarios aleatorios de incumplimiento de los instrumentos que tienen una calificación asignada, esto lo logramos a través de una simulación Monte Carlo. Asociamos las probabilidades de incumplimiento a la curva de crédito para simular el momento en que se genera el incumplimiento para cada escenario. Calcular el tiempo del incumplimiento en cada escenario es estratégico, ya que con ello determinaremos cuántos periodos traeremos a valor presente cada flujo de efectivo y de esta forma, poder hacer la valuación.

Para la simulación del primer incumplimiento y del segundo incumplimiento hemos querido introducir el concepto de cópula para conveniencia del lector. Sin embargo, debemos enfatizar que en esta tesis solo usaremos la cópula Gaussiana, aunque existen muchas otras cópulas que podríamos utilizar para una modelación más flexible de la dependencia entre las variables.

**Capítulo 3** En este capítulo construimos las condiciones que tendrá el derivado, generando para cada escenario las simulaciones de incumplimiento y las trayectorias estocásticas de las tasas de interés, con las que traemos a valor presente la prima y las protecciones de cada escenario. Con todo lo anterior, llevamos a cabo la valuación del derivado para cada escenario, y calculamos el promedio de todas las valuaciones. Si el promedio sale mayor a cero, interpretamos que nuestra prima es suficiente, pero si el promedio es menor a cero, quiere decir que la prima es insuficiente y representará pérdidas, por lo cual debemos de ajustar la prima de tal forma que obtengamos un número positivo. Podemos estimar el valor justo de la prima mediante procedimientos de optimización hasta encontrar un valor que resulte en promedio lo más cercano posible a cero.

Los métodos y modelos matemáticos que utilizamos en los capítulos 2 y 3 son:

- Simulación de la dinámica temporal que modela la calificación de los activos.
- Simulación Monte Carlo para los escenarios de incumplimiento.
- Simulación Monte Carlo del comportamiento que tendrán las tasas de interés, a través del modelo CIR para cada escenario de incumplimiento, y posteriormente calibramos con datos reales.

Con la combinación de las anteriores técnicas, hacemos la valuación del derivado.

**Capítulo 4** En este capítulo establecemos las conclusiones de la tesis.

## Capítulo 2

# Definiciones básicas del Riesgo de Crédito

En este capítulo establecemos las bases teóricas para la modelación de las curvas de probabilidades de incumplimiento. Se toma el método de curvas de incumplimiento y de cópulas de Bluhm, Overbeck (2007) y Bluhm, Overbeck, Wagner (2004). En esta tesis se hace una aplicación de esta teoría para valuar dos derivados. Al final de esta sección se hace la simulación de los tiempos de impago.

### 2.1. Calificaciones y Probabilidades de Impago

Para entender el riesgo de crédito son necesarios los siguientes conceptos: calificaciones (ratings), probabilidad de incumplimiento (default probability) y exposición crediticia (credit exposure). Es importante explicarlos a detalle, puesto que son la base conceptual del riesgo de crédito.

#### 2.1.1. Calificaciones.

Las calificaciones o ratings son asignadas por las agencias calificadoras a entidades financieras, gobiernos y empresas. La calificación sirve para medir la calidad crediticia de los valores que emitieron.

Hay más de 130 agencias calificadoras en todo el mundo, de las cuales destacan Standard & Poor's and Fitch y Moody's. En el presente trabajo tomé información del reporte "*Default, Transition and Recovery: 2013 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*" (2013) emitido por Standard & Poor's Rating Services.

El cuadro 2.1 muestra la escala de las calificaciones, así como una pequeña explicación de cada calificación.

Cuadro 2.1: Descripción de las calificaciones.

Ratings	Definiciones
AAA	La capacidad del deudor de satisfacer sus compromisos financieros es extremadamente fuerte.
AA	La capacidad del deudor de satisfacer sus compromisos financieros es muy fuerte.
A	La capacidad del deudor de satisfacer sus compromisos financieros es un poco más susceptible a cambios con efectos adversos, así como variaciones en las condiciones económicas.
BBB	Esta calificación exhibe parámetros de protección adecuados. Sin embargo, condiciones económicas adversas o cambios en las circunstancias es más probable que tengan una débil capacidad de satisfacer sus compromisos financieros.
BB	Es menos vulnerable a caer en impago que las siguientes categorías. Sin embargo, enfrenta una importante incertidumbre o exposición a condiciones adversas ya sea en negocios, financieras o económicas. Por lo cual, podría llegar a ocurrir una inadecuada capacidad de satisfacer sus compromisos.
B	El deudor tiene en este momento la capacidad de cumplir con sus compromisos financieros. No obstante situaciones adversas en el negocio, en las finanzas o en la economía, probablemente pondrán en peligro la capacidad del deudor para cumplir con sus compromisos.
CCC	En el momento que le asignaron la calificación es vulnerable a no poder pagar y depende de que las condiciones del negocio, financieras o económicas se tornen favorables para poder satisfacer sus compromisos.
CC	En el momento que le asignaron la calificación es altamente vulnerable a no pagar.
C	Puede ser usada para cubrir una situación donde ha sido clasificada como bancarota o una acción similar, pero continúan cumpliéndose los pagos de sus compromisos.
D	Aquí es donde ya ocurrió el impago.

Traducción de Rachev(2009). Escala Global.

### 2.1.2. Probabilidad de impago

La probabilidad de impago (*default probability*), como su nombre lo indica, es la probabilidad de que el deudor no pague lo que recibió a crédito. Los bancos y las agencias calificadoras se encargan de asignarle una probabilidad a cada calificación. Esta probabilidad debe de estar en el intervalo  $(0, 1)$ . Para calcular las probabilidades existen el método causal para calificar y el método que califica en base a los estados financieros.

La pérdida esperada dado que ocurrió el impago (Loss Given Default LGD) es el monto de dinero que pierde un banco o una institución financiera cuando el deudor cae en impago. Se suele calcular como  $LGD=1-recovery\ rate$ . En la valuación de la presente tesis asumiremos que la recovery rate es cero.

### 2.1.3. Método causal para calificar

En esta sección definimos el método causal para calificar con el propósito de establecer las bases teóricas que se requeriremos para desarrollar las probabilidades de primer impago y segundo impago. En este método, el subyacente, es decir la deuda, se modela explícitamente. A su vez se está modelando la unión entre el riesgo y el evento de impago, Bluhm (2007).

**Definición:** Sea una cartera de  $i$  deudores, donde  $i = 1, \dots, m$ ,  $i$  se distribuye Bernoulli e indica el impago en un intervalo de tiempo  $[0, t]$ . Se define la variable latente  $L_i^{(t)}$  como:

$$L_i^{(t)} = 1_{\{ISC_i^{(t)} < c_i^{(t)}\}} \sim B(1; \mathbb{P}[ISC < c_i^{(t)}]) \quad (2.1)$$

- $(ISC_i^{(t)})_{t \geq 0}$  es el índice de solvencia del deudor  $i$  indizado al tiempo  $t$
- $c_i^{(t)}$  es el umbral crítico en un intervalo de tiempo, mejor conocido como punto de impago.



Los puntos de impago son los momentos en el tiempo en que ocurre el impago y son determinados por las curvas de probabilidad de impago, dichas curvas las obtenemos a partir del método homogéneo (sección 2.3.1). En la figura anterior mostramos el comportamiento a tiempo continuo de un índice de solvencia crediticia.

$$(p_i^{(t)})_{t \geq 0} = (\mathbb{P}[ISC < c_i^{(t)}])_{t \geq 0} \quad (2.2)$$

de tal forma que

$$c_i^{(t)} = \mathbb{F}_{ISC_i^{(t)}}^{-1}(p_i^{(t)}) \quad (2.3)$$

Donde  $\mathbb{F}_Z$  denota la función de distribución de la variable aleatoria  $Z$  y  $\mathbb{F}_Z^{-1}$  es su respectivo cuantil.

## 2.2. Matrices de migración para determinar Probabilidades de Incumplimiento.

Las matrices de migración expresan la probabilidad de que un crédito con cierta calificación llegue a cambiar de calificación; lo anterior lo hacemos con todas las categorías de las calificaciones. Por ejemplo, se observa en el cuadro 2.2 que la probabilidad de que un crédito con calificación BB caiga en impago es 0.8. De manera análoga, un crédito con calificación A tiene una probabilidad de caer en incumplimiento de 0.7.

En el reporte de S&P se publican matrices para mercados globales, emergentes y de Estados Unidos de América, en periodos de uno, dos, cinco o más años. La siguiente matriz se tomó de S&P (2013) y corresponde al mercado global de un año.

Cuadro 2.2: Matriz de transición del reporte S&P. NR significa, sin calificación (*not rated*).

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR
AAA	87.1	8.88	0.53	0.05	0.08	0.03	0.05	0.00	3.27
AA	0.55	86.39	8.26	0.56	0.06	0.07	0.02	0.02	4.07
A	0.03	1.87	87.33	5.48	0.35	0.14	0.02	0.07	4.7
BBB	0.01	0.12	3.59	85.22	3.82	0.59	0.13	0.21	6.31
BB	0.02	0.04	0.15	5.2	76.28	7.09	0.69	0.8	9.74
B	0.00	0.03	0.11	0.22	5.48	73.89	4.46	4.11	11.7
CCC/C	0.00	0.00	0.15	0.23	0.69	13.49	43.81	26.87	14.7
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	0.00

S&P (2013)

Es importante mencionar que las calificaciones con probabilidad de impago cero deben ser modificadas, de manera que les asignamos una probabilidad de impago baja, pero diferente de cero. Tomando como referencia a Bluhm, Overbeck (2007), les asignaremos una probabilidad de 0.02.

Una forma práctica de ver la importancia de asignar esta pequeña probabilidad, es con la crisis del 2008, cuando ocurrió lo que imposible parecía, ya que valores emitidos con calificación AAA cayeron en impago. Tal es el caso de los valores que emitió la casi extinta AIG (2009).

Cuadro 2.3: Matriz de transición con las probabilidades de impago ajustadas.

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	90.36	8.88	0.53	0.05	0.08	0.03	0.05	0.02
AA	0.55	90.46	8.26	0.56	0.06	0.07	0.02	0.02
A	0.03	1.87	92.04	5.48	0.35	0.14	0.02	0.07
BBB	0.01	0.12	3.59	91.53	3.82	0.59	0.13	0.21
BB	0.02	0.04	0.15	5.2	86.01	7.09	0.69	0.80
B	0.00	0.03	0.11	0.22	5.48	85.59	4.46	4.11
CCC/C	0.00	0.00	0.15	0.23	0.69	13.49	58.57	26.87
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Elaboración propia.

El desarrollo de las matrices de migración se hace mediante cadenas de Markov. Definimos un espacio de estados que contenga el conjunto de todas las posibles calificaciones, es decir:

$$\Omega = \{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}$$

Con el conjunto de todas las posibles calificaciones asignamos una probabilidad de migración a cada pareja  $(i, j)$ :

$$m_{ij} = P[i \rightarrow j] \quad (i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, \dots, 8) \quad (2.4)$$

Donde  $P[i \rightarrow j]$  denota la probabilidad de migración de la calificación que se obtuvo a principios de año,  $i$ , hasta la calificación que se obtuvo al año  $j$ . En el presente contexto, la propiedad de Markov establece que la evolución de una matriz de migración es independiente de las matrices de años anteriores y la homogeneidad, nos dice que las probabilidades de transición no dependen del tiempo.

La notación de las matrices de migración, Bluhm (2007):

1.  $M$  es una matriz de migración con probabilidades de transición a un horizonte de un año.
2. Todas las entradas de  $M$  son positivas:  $m_{ij} \geq 0$  para  $i, j = 1, \dots, 8$ .
3. Todas las filas de  $M$  suman uno:  

$$\sum_{j=1}^8 m_{ij} = 1 \text{ para } i = 1, \dots, 8.$$
4. La última columna contiene las probabilidades de impago de un año:  $m_{i,8} = PD(1, i)$  para  $i = 1, \dots, 7$ .
5. El estado de impago es absorbente, es decir, una vez que se cayó en impago ya no hay regreso:  

$$m_{8,j} = 0 \text{ para } j = 1, \dots, 7 \text{ y } m_{8,8} = 1.$$



6. Las calificaciones con bajo riesgo deben mostrar una probabilidad de impago más baja que aquellas calificaciones con un mayor riesgo, es decir:  $M_{i8} \leq M_{i+18}$ ,  $i = 1, \dots, 7$ .
7. Debería ser más probable migrar a estados cercanos que a estados lejanos; monotonía en los renglones, desde la diagonal hacia afuera.

$$M_{ii+1} \geq M_{ii+2} \geq M_{ii+3} \dots$$

$$M_{ii-1} \geq M_{ii-2} \geq M_{ii-3} \dots$$

8. La probabilidad de migrar hacia una cierta clase, debería ser mayor para las categorías adyacentes o cercanas, que para las lejanas; monotonía en las columnas, desde la diagonal hacia afuera.

$$M_{i+1i} \geq M_{i+2i} \geq M_{i+3i} \dots$$

$$M_{i-1i} \geq M_{i-2i} \geq M_{i-3i} \dots$$

9. En la medida que haya menores calificaciones se presenta un mayor riesgo, Jarrow et al (1997), formularon:
10.  $\sum_{j \geq k} m_{ij}$  es una función no decreciente de  $i$  para cada  $k$  fijo.

### 2.3. Curvas de crédito.

Las curvas de crédito (*PD probability of default*) se utilizan para calibrar el comportamiento, a través del tiempo, de las probabilidades de impago de cada calificación. El tiempo estará medido en años.

La metodología para calcular las curvas de crédito homogéneas es:

1. Tomamos la matriz del reporte S&P, es decir la matriz  $M$ .
2. Hacemos la resta de la matriz  $M$  con la matriz identidad  $I$ ,  $M - I = A$ .
3. Hacemos la expansión logarítmica de Taylor con la matriz  $A$ , para obtener la matriz generadora  $\tilde{Q}$ .
4. Hacemos el desarrollo exponencial de Taylor para un periodo con la matriz  $\tilde{Q}$ .
5. Medimos el error generado por las estimaciones que existen entre  $M$  y  $expm(\tilde{Q})$ .
6. Tomamos la matriz  $\tilde{Q}$  y hacemos el desarrollo exponencial de Taylor el número de años que se requiera, en este caso 15 años.
7. Tomamos las columnas  $D$  de cada matriz para construir las curvas.

### 2.3.1. Curvas de crédito mediante cadenas de Markov homogéneas.

Las calificadoras publican cada año curvas matrices de transición, las cuales están construidas con frecuencias de impagos. Existen dos dificultades con esa información, en primer lugar, un análisis de las probabilidades de impago puede mostrar tendencias saturadas debido principalmente a la precisión de los datos. En segundo lugar, debido al cambio de metodologías para evaluar esta probabilidad, resulta imposible comparar los reportes de diferentes años. En particular en esta tesis haremos un enfoque basado en cadenas de Markov, ya que esta herramienta permitirá que generemos curvas de crédito a tiempo continuo.

La metodología comienza con el ajuste de una matriz de migración de un año  $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,8}$ .

**Teorema 2.1** Si una matriz de migración  $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  es estrictamente diagonal dominante es decir,  $m_{ii} > \frac{1}{2}$  para cada  $i$  entonces la expansión logarítmica:

$$\tilde{Q}_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(M-I)^k}{k} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

converge a la matriz  $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$  la cual satisface:

1.  $\sum_{j=1}^N \tilde{q}_{ij}$  para cada  $i = 1, \dots, N$ .
2.  $\exp(\tilde{Q}) = M$

La convergencia de  $\tilde{Q}_n \rightarrow \tilde{Q}$  es geométricamente rápida.

La demostración se puede consultar en Israel (2001).

Como el teorema lo indica, para poder trabajar con nuestra matriz también debe de ser diagonal dominante. La matriz global, cuadro 2.3, cumple con este teorema.

Observación 1: El generador de la cadena de Markov a tiempo continuo está dado por la matriz  $Q$ ,  $Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ , que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\sum_{j=1}^N q_{ij} = 0$  para cada  $i = 1, \dots, N$ ;
2.  $0 \leq -q_{ii} \leq \infty$  para cada  $i = 1, \dots, N$ ;
3.  $q_{ij} \geq 0$  para toda  $i, j = 1, \dots, N$  con  $i \neq j$ .

Para profundizar más en cadenas de Markov consultar Norris (1997).

El siguiente teorema relaciona las matrices de migración con las matrices generadoras.

**Teorema 2.2** Las siguientes condiciones son equivalentes.

- $Q$  satisface las condiciones 1,2 y 3 de la observación 1.
- $\exp(tQ)$  es una matriz estocástica para cada  $t \geq 0$ .

la demostración se puede consultar libro de Norris (1997).

La diferencia entre  $Q$  y  $\tilde{Q}$  es que la primera es la teórica, es decir, la exacta, y la segunda es una aproximación numérica.

En el caso cuando la expansión logarítmica de  $M$  es solo para un periodo  $k = 1$ , se obtiene  $M - I$  como aproximación de primer orden. Como  $M$  es una matriz estocástica (matriz de migración), cumple con las condiciones de la observación 1. Por lo tanto,  $M - I$  es el generador más simple que se puede obtener.

Cuadro 2.4: M-I

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-9.64	8.88	0.53	0.05	0.08	0.03	0.05	0.02
AA	0.55	-9.54	8.26	0.56	0.06	0.07	0.02	0.02
A	0.03	1.87	-7.96	5.48	0.35	0.14	0.02	0.07
BBB	0	0.01	0.12	3.59	-8.47	3.82	0.59	0.13
BB	0.02	0.04	0.15	5.20	-13.99	7.09	0.69	0.80
B	0.00	0.03	0.11	0.22	5.48	-14.41	4.46	4.11
CCC/C	0.00	0.00	0.15	0.23	0.69	13.49	-41.43	26.87
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Elaboración propia.

Con lo anterior podemos hacer la expansión logarítmica de Taylor para obtener la matriz generadora  $\tilde{Q}$ .

La siguiente tabla muestra el resultado de haber hecho la expansión logarítmica de la matriz de migración  $M$ .

Cuadro 2.5: Matriz de la expansión logarítmica de Taylor sin corregir.

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-10.17	9.82	0.14	0.02	0.09	0.02	0.07	0.01
AA	0.61	-10.15	9.05	0.34	0.04	0.07	0.02	0.01
A	0.03	2.05	-8.50	5.97	0.26	0.13	0.02	0.06
BBB	0.01	0.09	3.91	-9.09	4.29	0.48	0.14	0.17
BB	0.02	0.04	0.05	5.86	-15.46	8.21	0.69	0.59
B	0.00	0.03	0.11	0.05	6.39	-16.35	6.27	3.49
CCC/C	0.00	-0.01	0.19	0.28	0.32	19.01	-54.18	34.39
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Elaboración propia.

Como observamos en la matriz anterior, la cual está truncada a dos dígitos, hay un valor negativo que no está en la diagonal. En este caso se tiene que hacer cero esa entrada y ese valor sumarlo a la diagonal

$$\tilde{q}_{CCC,AA} = 0.01. \quad (2.6)$$

Cuadro 2.6: Desarrollo logarítmico de Taylor corregido.

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-10.17	9.82	0.14	0.02	0.09	0.02	0.07	0.01
AA	0.61	-10.15	9.05	0.34	0.04	0.07	0.02	0.01
A	0.03	2.05	-8.50	5.97	0.26	0.13	0.02	0.06
BBB	0.01	0.09	3.91	-9.09	4.29	0.48	0.14	0.17
BB	0.02	0.04	0.05	5.86	-15.46	8.21	0.69	0.59
B	0.00	0.03	0.11	0.05	6.39	-16.35	6.27	3.49
CCC/C	0.00	0.00	0.19	0.28	0.32	19.01	-54.18	34.39
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Elaboración propia.

A continuación se muestra el resultado de calcular la matriz exponencial  $\exp(\mathbf{M} - \mathbf{I})$  correspondiente a la situación cuando  $t = 1$  del Teorema 1.

Cuadro 2.7: Desarrollo exponencial de Taylor de un periodo para la matriz generadora,  $\tilde{Q}$ .

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	90.36	8.88	0.53	0.05	0.08	0.03	0.05	0.02
AA	0.55	90.46	8.26	0.56	0.06	0.07	0.02	0.02
A	0.03	1.87	92.04	5.48	0.35	0.14	0.02	0.07
BBB	0.01	0.12	3.59	91.53	3.82	0.59	0.13	0.21
BB	0.02	0.04	0.15	5.20	86.01	7.09	0.69	0.80
B	0.00	0.03	0.11	0.22	5.48	85.59	4.46	4.11
CCC/C	0.00	0.00	0.15	0.23	0.69	13.49	58.57	26.87
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Elaboración propia.

Es necesario que midamos el error que existe dado que hicimos varias modificaciones a las matrices  $\tilde{Q}$  y matriz  $\mathbf{M}$ . Dicho propósito descansa en la siguiente proposición.

Proposición 2.3 Sea  $\mathbf{M}$  una matriz y su matriz de aproximación es  $\tilde{Q}$ . El error entre ambas está dado por:

$$\|\mathbf{M} - \exp(\tilde{Q})\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^8 m_{i,j} - ((\exp(\tilde{Q}))_{i,j})^2}. \quad (2.7)$$

El error generado de este ejercicio fue 0.005466836. Por tal motivo se puede continuar con el desarrollo de las curvas de crédito.

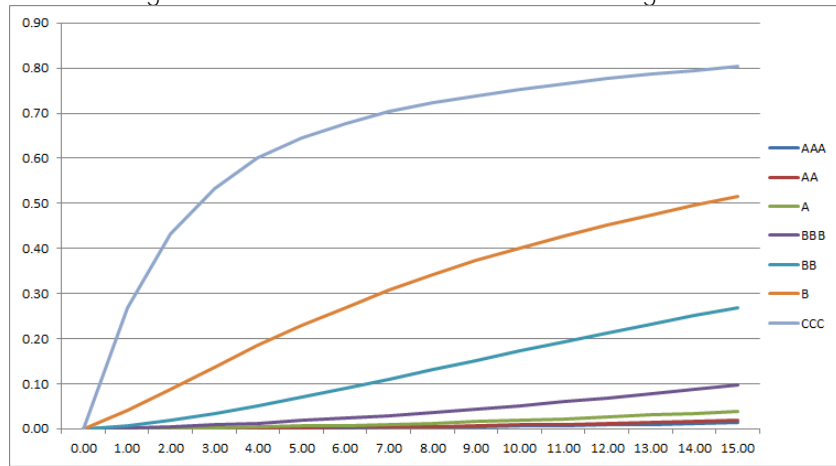
Una vez que tenemos la matriz generadora es posible hacer las curvas de crédito. Estas las obtenemos a partir de hacer el desarrollo exponencial a la matriz  $\tilde{Q}$   $n$  veces, donde cada iteración es un periodo de tiempo. A cada matriz resultante le extraemos la columna de impago. Al unir todas las columnas de acuerdo a su respectivo periodo obtenemos las curvas de crédito.

Las curvas de crédito también pueden ser vistas desde las matrices  $e^{(tQ)}_{t \geq 0}$ . En otras palabras, para algún instrumento  $i$  en el portafolio con calificación  $R = R(i)$  se obtiene:

$$p_i^{(t)} = (e^{(tQ)})_{R,B} \quad (2.8)$$

donde la  $R$  denota a las filas de la matriz de transición correspondientes a la calificación  $R$ .

Figura 2.2: Curvas de mercados no emergentes.



Elaboración propia.

Al aplicar la ecuación (2.8) obtenemos las curvas de crédito para un horizonte de 15 años, como muestra la figura (2.2). Como podemos suponer, muchas veces necesitamos la información de manera semestral, trimestral, bimestral, mensual, etc. De tal forma que es necesario hacer una interpolación a los datos obtenidos para ajustarlos a las fechas que se requieran, en el caso de esta valuación, hacemos una interpolación lineal trimestral.

## 2.4. Modelación de las probabilidades de primer y segundo impago

La parte esencial del riesgo de crédito consiste en calcular la probabilidad de que el deudor no pague. Por otro lado, este riesgo se puede modelar como un subyacente. Asumiremos incumplimiento e impago como sinónimos. Existe una gran variedad de derivados de crédito entre los cuales se encuentran los swaps de incumplimiento crediticio.

Dos conceptos recurrentes en la estructura de los derivados de crédito son: primer instrumento en caer en impago (o primer impago, para abreviar; en inglés: first-to-default), y segundo instrumento en caer en impago (o segundo impago, para abreviar; en inglés: second-to-default). En esta sección modelaremos la probabilidad de primer impago y la probabilidad de segundo impago, con ello podremos simular los escenarios de impago. La estructura de esta sección se basa principalmente en Bluhm, Overbeck y Wagner (2004) Bluhm y Overbeck (2007), ya que fue la principal referencia para construir la valuación.

Sean dos instrumentos de deuda,  $H$  y  $J$ . Se define la probabilidad de que el primer impago ocurra en el periodo 1:

$$p_{1er}^1 = \mathbb{P} \left[ \mathbf{1}_{\{ISC_H^{(1)} < c_H^{(1)}\}} + \mathbf{1}_{\{ISC_J^{(1)} < c_J^{(1)}\}} > 0 \right] \quad (2.9)$$

y la probabilidad de que el segundo impago ocurra en el periodo 1:

$$p_{2do}^1 = \mathbb{P} \left[ \mathbf{1}_{\{ISC_H^{(1)} < c_H^{(1)}\}} \times \mathbf{1}_{\{ISC_J^{(1)} < c_J^{(1)}\}} > 0 \right] \quad (2.10)$$

Las ecuaciones 2.9 y 2.10 se pueden escribir con notación de conjuntos solamente, sin usar funciones indicadoras, como a continuación:

$$p_{1er}^1 = \mathbb{P}[\{ISC_H < c_H\} \cup \{ISC_J < c_J\}] \quad (2.11)$$

es la probabilidad de que ocurra el primer impago en el periodo 1. Otra forma de interpretarlo es, la probabilidad de que alguna de las dos,  $H$  o  $J$ , incurra el impago.

$$p_{2do}^1 = \mathbb{P}[\{ISC_H < c_H\} \cap \{ISC_J < c_J\}] \quad (2.12)$$

es la probabilidad de que ocurra el segundo impago en el periodo 1. Otra forma de interpretarlo es, la probabilidad de que, en ambos instrumentos de deuda  $H$  y  $J$ , suceda el impago.

Retomando el modelo causal para calificar, definimos:

$$L_H^{(1)} = \mathbf{1}_{\{ISC_H^{(1)} < c_H^{(1)}\}}$$

$$L_J^{(1)} = \mathbf{1}_{\{ISC_J^{(1)} < c_J^{(1)}\}}$$

Los dos instrumentos de deuda,  $H$  y  $J$ , tienen una correlación  $\rho$ . Para unir a los dos instrumentos de deuda en un solo modelo definimos la variable aleatoria  $Y$  la cual se distribuye  $N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ . De manera análoga definimos otras dos variables aleatorias,  $H$  y  $J$ , las cuales también se distribuyen  $N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ .

Por lo tanto:

$$ISC_H = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho} \epsilon_H,$$

$$ISC_J = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho} \epsilon_J,$$

Proposición 2.4 La probabilidad del primer impago en un período es igual a:

$$p_{1er}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( g_{P_H, \rho}(y) + g_{P_J, \rho}(y) \left[ 1 - g_{P_H, \rho}(y) \right] \right) dN(y) \quad (2.13)$$

donde la probabilidad condicional de impago de un período, para el instrumento  $H$ , se define como:

$$g_{P_H, \rho}(y) = N \left[ \frac{c_H - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \right], \quad (2.14)$$

$N[\cdot]$  es la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria normal estándar,  $y$  (2.15)

$$c_H = N^{-1}[p_H],$$

es el umbral de impago del instrumento  $H$ .  $\rho$  es el coeficiente de correlación entre los dos activos.

Demostración: Renombramos a la PD (probabilidad de impago)  $g_{p_H, \rho}(y)$  como:

$$g_{p_H, \rho}(y) = \mathbb{P}[\mathbf{1}_{\{ISC_H < c_H\}} = 1 \mid Y = y]$$

$$\mathbb{P}[\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\epsilon_H < c_H \mid Y = y]$$

$$\mathbb{P}\left[\epsilon_H < \frac{c_H - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \mid Y = y\right]$$

$$N\left[\frac{c_H - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

$$Z = \frac{c_H - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ donde } \mu = \frac{c_H}{\sqrt{1-\rho}} \text{ y } \sigma^2 = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

En la ecuación 2.13, el primer sumando es la probabilidad de que  $H$  caiga en impago. El segundo sumando es la probabilidad de que  $J$  caiga en impago y  $H$  sobreviva. Lo anterior lo podemos verificar, manipulando los conjuntos:

$$\begin{aligned} \{SCI_H < c_H\} \cup \{SCI_J < c_J\} = \\ \{ISC_H < c_H\} \cup \{ISC_J < c_J\} \setminus \{ISC_H < c_H\}, \end{aligned}$$

Donde  $\{ISC_J < c_J\} \setminus \{ISC_H < c_H\}$  son todos los elementos de  $ISC_J < c_J$  que no están en  $ISC_H < c_H$ .

Para la probabilidad del segundo impago es necesaria la siguiente proposición.

Proposición 2.5 La probabilidad de que suceda el segundo impago en un período es igual a:

$$p_{2do}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_{p_H, \rho}(y) g_{p_J, \rho}(y) \cdot dN(y) \quad (2.16)$$

Observación 2.6 La probabilidad de que suceda el segundo impago coincide con la probabilidad de impago conjunto, PIC, de los dos instrumentos de deuda, es decir:

$$\begin{aligned} PIC_{H,J} = PIC_{H,J}^{(1)} = P\left[\mathbf{1}_{\{CWI_H \leq c_H\}} = 1, \mathbf{1}_{\{CWI_J \leq c_J\}} = 1\right] \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p_H)} \int_{-\infty}^{N^{-1}(p_J)} e^{-\frac{1}{2}(x_H^2 - 2\rho x_H x_J)/(1-\rho^2)} dx_H dx_J \end{aligned}$$

utilizando la función de distribución normal conjunta de los índices de solvencia  $ISC$ 's.

En las probabilidades de impago para  $t$  periodos hacemos el mismo análisis.

Ahora bien, es necesario definir el índice de solvencia  $ISC$  como un proceso estocástico y de esa forma poder hacer los puntos de impago. El proceso estocástico más comúnmente usado es el movimiento browniano geométrico:

$$ISC_H^{(t)} = ISC_H^{(0)} \exp \left[ \left( \mu_H - \frac{1}{2} \sigma_H^2 \right) t + \sigma_H B_H^{(t)} \right],$$

$$ISC_J^{(t)} = ISC_J^{(0)} \exp \left[ \left( \mu_J - \frac{1}{2} \sigma_J^2 \right) t + \sigma_J B_J^{(t)} \right],$$

Donde los procesos  $(B_H^{(t)})_{t \geq 0}$  y  $(B_J^{(t)})_{t \geq 0}$  son movimientos brownianos correlacionados con un coeficiente de correlación  $\rho = \rho_{H,J}$ . Los parámetros  $\mu_H$  y  $\sigma_H$  son la tasa de rendimiento promedio y la volatilidad del instrumento H, respectivamente; análogamente,  $\mu_J$  y  $\sigma_J$  lo son del instrumento J.

En este marco teórico, se tiene:

$$\mathbb{E}[ISC_H^{(t)}] = ISC_H^{(0)} \exp(\mu_H t), \quad (2.17)$$

$$Var[ISC_H^{(t)}] = [ISC_H^{(0)}]^2 \exp(2\mu_H t) (\exp(\sigma_H^2 t) - 1), \quad (2.18)$$

De manera análoga para el activo J:

$$\mathbb{E}[ISC_J^{(t)}] = ISC_J^{(0)} \exp(\mu_J t), \quad (2.19)$$

$$Var[ISC_J^{(t)}] = [ISC_J^{(0)}]^2 \exp(2\mu_J t) (\exp(\sigma_J^2 t) - 1), \quad (2.20)$$

Tomando un horizonte de tiempo fijo  $T > 0$ , definimos las siguientes variables:

$$L_H^{(T)} = \mathbf{1}_{\{ISC_H^{(T)} < \tilde{c}_H^{(T)}\}}, \quad (2.21)$$

$$L_J^{(T)} = \mathbf{1}_{\{ISC_J^{(T)} < \tilde{c}_J^{(T)}\}}, \quad (2.22)$$

donde  $\tilde{c}_H^{(T)}$  y  $\tilde{c}_J^{(T)}$  son los umbrales de impago hasta el tiempo  $T$ . Entonces, se reexpresa la probabilidad de impago como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_H^{(T)} = 1] &= P[ISC_H^{(T)} < \tilde{c}_H^{(T)}] \\ &= \mathbb{P} \left[ ISC_H^{(0)} \exp \left[ \left( \mu_H - \frac{1}{2} \sigma_H^2 \right) T + \sigma_H B_H^{(T)} \right] < \tilde{c}_H^{(T)} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ B_H^{(T)} < \frac{\ln(\tilde{c}_H^{(T)} / ISC_H^{(0)}) - \left( \mu_H - \frac{1}{2} \sigma_H^2 \right) T}{\sigma_H} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

La variable  $B_H^{(T)}$  se distribuye normal,  $B_H^{(T)} \sim N(0, T)$ , donde  $N(\mu, \sigma^2)$  denota a una función de distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Por lo tanto, el punto de impago  $\tilde{c}_H^{(T)}$  se puede reexpresar con respecto a una variable estandarizada:

$$c_H^{(T)} = \frac{\ln(\tilde{c}_H^{(T)} / ISC_H^{(0)}) - \left( \mu_H - \frac{1}{2} \sigma_H^2 \right) T}{\sigma_H \sqrt{T}} \quad (2.24)$$



La ecuación 2.23 se transforma en:

$$\mathbb{P}[L_H^{(T)} = 1] = P[ISC_H < c_H^{(T)}], \quad (2.25)$$

con una variable normal estándar  $ISC_H \sim B_H^{(1)} \sim N(0,1)$ .

Por lo tanto, ahora  $ISC_H$  y  $ISC_J$  pueden ser considerados como índices de solvencia crediticia.

Ahora se puede conectar la ecuación 2.25 con la curva de crédito  $(p_H^{(t)})_{t \geq 0}$  para el instrumento  $H$ , y de manera análoga para el instrumento  $J$ . Entonces tenemos que:

$$\mathbb{P}[ISC_H < c_H^{(t)}] = P[L_H^{(t)} = 1] =: p_H^{(t)} \quad (2.26)$$

por la definición de  $p_H^{(t)}$ . Por lo anterior, se puede concluir que:

$$c_H^{(t)} = N^{-1}[p_H^{(t)}] = N^{-1}[\mathbb{F}_H(t)] \quad (2.27)$$

donde  $\mathbb{F}[\cdot]$  denota la curva de crédito, es decir, la función de distribución del tiempo de impago:

$$\mathbb{F}_H: t \mapsto p_H^{(t)}$$

Ahora sustituyendo  $\mathbb{P}[L_H^{(T)} = 1] = \mathbb{P}[ISC_H^{(T)} < \tilde{c}_H^{(T)}]$  en la ecuación 2.25 obtenemos:

$$\mathbb{P}[L_H^{(t)} = 1] = \mathbb{P}[\mathbb{F}_H^{-1}(N[ISC_H]) < t], \quad (2.28)$$

$$\mathbb{P}[L_J^{(t)} = 1] = \mathbb{P}[\mathbb{F}_J^{-1}(N[ISC_J]) < t], \quad (2.29)$$

para todo  $t \geq 0$ . Ahora definimos:

$$\tau_H = \mathbb{F}_H^{-1}(N[ISC_H]) \text{ y } \tau_J = \mathbb{F}_J^{-1}(N[ISC_J]), \quad (2.30)$$

e interpretamos estas variables aleatorias como los tiempos de impago, es decir, en qué intervalo de tiempo ocurrió el incumplimiento de los pagos, para los activos  $H$  y  $J$ . Entonces podemos interpretar las funciones  $\mathbb{F}_H$  y  $\mathbb{F}_J$  como funciones de distribución de probabilidad de los tiempos de impago,  $\tau_H$  y  $\tau_J$  ya que por construcción tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_H < t] &= \mathbb{P}[\mathbb{F}_H^{-1}(N[ISC_H]) < t] \\ &= \mathbb{P}[CW I_H < N^{-1}[\mathbb{F}_H(t)]] \\ &= N[N^{-1}[\mathbb{F}_H(t)]] \\ &= \mathbb{F}_H(t), \end{aligned}$$

considerando que  $ISC_H \sim N(0,1)$ .

Sobre las variables aleatorias  $\tau_H$  y  $\tau_J$  de la ecuación 2.28, haremos la simulación.

Ahora bien, la probabilidad de impago conjunta a  $t$  años  $PIC_{H,J}^{(t)}$  es:

$$\begin{aligned} PIC_{H,J}^{(t)} &= \mathbb{P}\left[1_{\{ISC_H\} \leq \tilde{c}_H} = 1, 1_{\{ISC_J\} \leq \tilde{c}_J} = 1\right], \\ &= \mathbb{P}[ISC_H < \tilde{c}_H, ISC_J < \tilde{c}_J], \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\tilde{c}_H$  y  $\tilde{c}_J$  denotan los puntos estandarizados de impago de los activos H y J, respectivamente. Podemos asumir una correlación  $\rho$  entre los movimientos brownianos geométricos con los que modelamos los instrumentos H y J. Esto implica que la pareja  $(ISC_H, ISC_J)$  tiene una función de distribución conjunta normal bivariada, con correlación  $\rho$ . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} PIC_{H,J}^{(t)} &= \mathbb{P}[ISC_H < c_H^{(t)}, ISC_J < c_J^{(t)}], \\ &= N_2[c_H^{(t)}, c_J^{(t)}; \rho], \\ &= N_2[N^{-1}[p_H^{(t)}], N^{-1}[p_J^{(t)}]; \rho], \\ &= N_2[N^{-1}[\mathbb{F}_H(t)], N^{-1}[\mathbb{F}_J(t)]; \rho], \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $N_2[\cdot, \cdot; \rho]$  denota una función de distribución normal bivariada con correlación  $\rho$ . La ecuación 2.32 puede ser escrita como una cópula (ver Sklar (1959)), es decir:

$$PIC_{H,J}^{(t)} = C(\mathbb{F}_H(t), \mathbb{F}_J(t)), \quad (2.33)$$

donde usamos una función  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  definida de la siguiente manera:

$$C(u_H, u_J) = N_2[N^{-1}[u_H], N^{-1}[u_J]; \rho] \quad (2.34)$$

$C$  es una función de distribución bivariada cuyas marginales,  $C_H$  y  $C_J$ , tienen distribución uniforme. Para verificar esto, elijamos una pareja  $(X, Y)$  distribuida normal, con media cero y correlación  $\rho$ . Entonces:

$$\begin{aligned} C_H(u_H) &= C(u_H, 1) \\ &= \mathbb{P}[X \leq N^{-1}[u_H], Y \leq N^{-1}[1]] \\ &= \mathbb{P}[N[X] \leq u_H] \\ &= u_H, \end{aligned} \quad (2.35)$$

puesto que  $N[X] \sim U([0,1])$ , es decir, tiene una distribución uniforme en el cuadrado unitario. La función  $C$  es conocida como cópula.

Podemos representar a la función de distribución conjunta de los tiempos de impago  $\tau_H$  y  $\tau_J$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_H < t_H, \tau_J < t_J] &= \mathbb{P}[\mathbb{F}_H^{(-1)}(N[ISC_H]) < t_H, \mathbb{F}_J^{(-1)}(N[ISC_J]) < t_J] \\ &= \mathbb{P}[ISC_H < c_H^{(t_H)}, ISC_J < c_J^{(t_J)}] \\ &= N_2[N^{-1}[\mathbb{F}(t_H)], \mathbb{F}(t_J); \rho] \\ &= C(\mathbb{F}_H(t_H), \mathbb{F}_J(t_J)). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Es decir, mediante una cópula gaussiana, hemos podido representar la función de distribución conjunta de los tiempos de impago  $\tau_H$  y  $\tau_J$ .

Se ha introducido el concepto de cópula para conveniencia del lector. Sin embargo, se debe enfatizar que esta tesis solo se usará la cópula Gaussiana, aunque existen muchas otras cópulas que se podrían utilizar para una modelación más detallada de la dependencia entre las variables.

De igual forma es importante señalar que se definieron las probabilidades de primer impago y segundo impago para establecer las bases de los escenarios de primer impago y segundo impago, ya que son estos últimos los que se utilizarán para la valuación del swap de incumplimiento crediticio (*credit default swap, CDS*).

### 2.4.1. Estructura de la simulación

Para la valuación es necesario simular los tiempos de paro. Esto se hace a partir hacer el índice de solvencia ISC un movimiento browniano, Bluhm Overbeck (2007).

Para la simulación de los tiempos de impago  $\tau_H$  y  $\tau_J$ , definidos por las ecuaciones 2.30, necesitamos dos elementos:

1. Las funciones de distribución  $\mathbb{F}_H$  y  $\mathbb{F}_J$ .
2. Los índices de solvencia crediticia *ISC* de ambos instrumentos de deuda.

El procedimiento para generar los tiempos de impago por simulación Monte Carlo es el siguiente:

Paso 1: Generamos valores de tres variables aleatorias, digamos  $\hat{Y}$ ,  $\hat{\epsilon}_H$ ,  $\hat{\epsilon}_J$ , que se distribuyan normal estándar  $N[0, 1]$ .

Paso 2: Con los valores obtenidos del paso anterior generamos los índices *ISC*

$$\widehat{ISC}_H = \sqrt{\rho}\hat{Y} + \sqrt{1-\rho}\hat{\epsilon}_H,$$

$$\widehat{ISC}_J = \sqrt{\rho}\hat{Y} + \sqrt{1-\rho}\hat{\epsilon}_J.$$

Paso 3: Evaluamos la función de distribución normal estándar en los valores obtenidos del paso anterior, i.e,  $N[\widehat{ISC}_H]$  y  $N[\widehat{ISC}_J]$ .

Paso 4: Evaluamos la inversa de la función de distribución de los tiempos de impago, en los valores obtenidos del paso anterior:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_H &= \mathbb{F}_H^{-1}(N[\widehat{ISC}_H]) \\ \hat{\tau}_J &= \mathbb{F}_J^{-1}(N[\widehat{ISC}_J]).\end{aligned}\tag{2.37}$$

El resultado de lo anterior es el escenario simulado de los tiempo de impago para los dos instrumentos de nuestra canasta.

Paso 5: Repetimos lo anterior 500 veces. Para obtener el siguiente escenario:

$$(\hat{\tau}_H^i, \hat{\tau}_J^i)_{i=1, \dots, 500}. \quad (2.38)$$

La simulación se hizo asumiendo una correlación  $\rho = 0.5$ . Esto lo hicimos así por sencillez para nuestro ejercicio teórico.

Para estimar las probabilidades de primer impago y segundo impago, se aplican las siguientes ecuaciones, utilizando los escenarios de impago que se simularon anteriormente.

Sea  $T > 0$ . La probabilidad de primer impago se calcula así:

$$p_{1er}^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\min(\hat{\tau}_H^{(i)}, \hat{\tau}_J^{(i)}) < T\}}$$

y la probabilidad de segundo impago:

$$p_{2do}^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\max(\hat{\tau}_H^{(i)}, \hat{\tau}_J^{(i)}) < T\}}$$

La generación de variables aleatorias se puede realizar en cualquiera de muchos programas tales como R, Excel, LibreOffice, etc. Por lo cual, existe la posibilidad de ser implementado fácilmente.

## Capítulo 3

# Valuación del swap de incumplimiento crediticio.

### 3.1. Definiciones básicas de los swaps de incumplimiento.

El swap de incumplimiento crediticio (CDS) funciona de la siguiente manera: digamos que es contratado al tiempo 0 y su vencimiento será en el tiempo  $T$ . El inversionista o comprador de protección se compromete a pagar periódicamente una prima, digamos en las fechas  $t_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , hasta que se presente el evento crediticio para el que se contrató la protección. El período en el cual se presenta el evento crediticio, será el último en el que se pague la prima. Evidentemente, si no se presenta el evento crediticio hasta la fecha de vencimiento  $T$ , el inversionista deberá pagar las primas de todos los períodos.

Si se presenta el evento crediticio, el vendedor de la protección se obliga a pagar el monto de protección acordado. Dicho pago puede realizarse al momento en que se presente el evento crediticio o al vencimiento  $T$ , simplemente llevando dicho monto a valor futuro, ya sea con la tasa de interés vigente en el mercado o con alguna tasa acordada.

Una canasta sujeta a impago (*DB, Default Basket*), es un conjunto de instrumentos financieros que representan créditos o préstamos, y nos servirá como subyacente de un derivado de crédito. El concepto es muy parecido a los portafolios de inversión. Sin embargo, por la naturaleza de los derivados de crédito, se les tiene que dar un trato especial.

Una canasta puede tener dos o más instrumentos de deuda. En la presente tesis se hará una canasta con dos activos, construyendo dos contratos diferentes, primer impago y segundo impago.

El contrato de primer impago (*first-to-default*) consiste en que, de una canasta de dos instrumentos de deuda, el primero que caiga en impago, generará que se pague la protección. En otras palabras, cuando ocurra:

$$\tau = \min\{\tau_{impago_1}, \tau_{impago_2}\} \leq T. \quad (3.1)$$

El contrato de segundo impago (*second-to-default*) se refiere a que, de una canasta de dos instrumentos, cuando las dos caigan en impago se pagará la protección. Es decir:

$$\tau = \max\{\tau_{impago_1}, \tau_{impago_2}\} \leq T. \quad (3.2)$$

### 3.2. Construcción del swap de incumplimiento crediticio

La canasta estará constituida por las acciones de Ara y Sare Holding las cuales cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y se desempeñan en el mercado de los créditos hipotecarios de México. Por la naturaleza de las empresas es necesario que se usen curvas de crédito para mercados emergentes.

La siguiente tabla muestra la matriz para mercados emergentes del reporte S&P, sobre esa matriz se hará el método homogéneo para obtener las respectivas curvas de crédito de cada calificación.

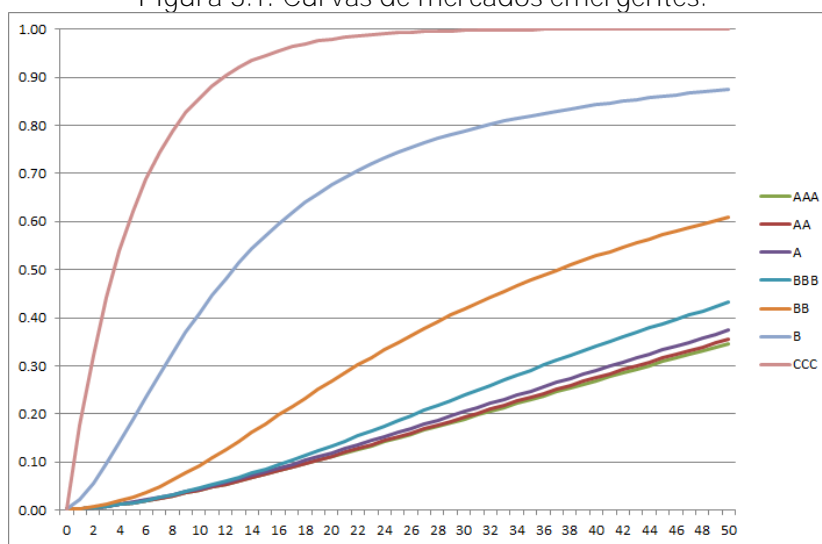
Cuadro 3.1: Matriz de calificación de Mercados Emergentes.

Desde/a	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR
AAA	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.00	96.15	3.85	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A	0.00	0.63	93.71	3.14	0.00	0.63	0.00	0.00	1.89
BBB	0.00	0.00	3.13	88.54	3.13	0.00	0.00	0.00	5.21
BB	0.00	0.00	0.00	4.18	82.73	5.01	0.00	0.28	7.80
B	0.00	0.00	0.00	0.00	4.02	75.54	8.36	2.17	9.91
CCC/C	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	44.12	17.65	38.24
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

S&P (2013)

El siguiente cuadro muestra las curvas de crédito de las distintas calificaciones de instrumentos para mercados emergentes. Estas curvas de crédito representan la probabilidad acumulada de que suceda el evento de impago de un instrumento que inicialmente tiene la calificación correspondiente.

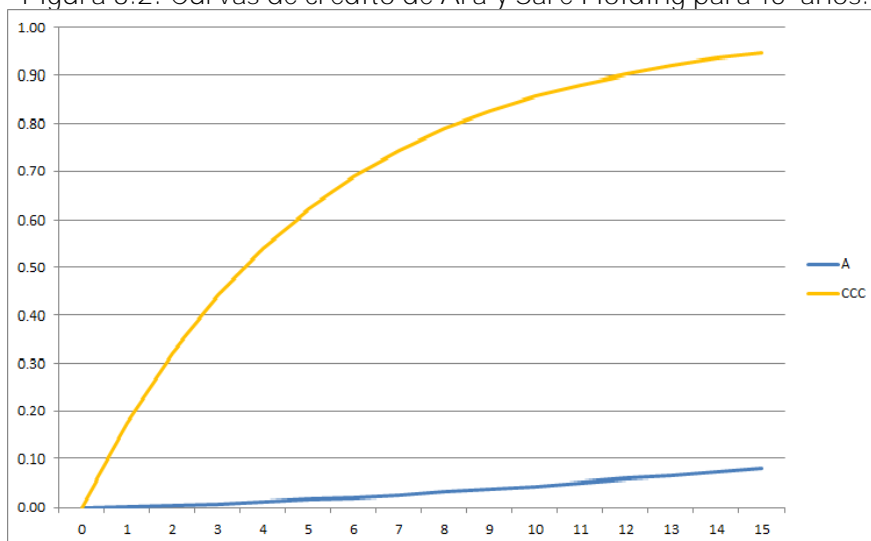
Figura 3.1: Curvas de mercados emergentes.



Elaboración propia.

En general es necesario tener un pronóstico o estimación que nos reste incertidumbre. Los pronósticos suelen ser considerados para la toma de decisiones, es decir, planeación financiera, valuaciones, reservas, etc. La calificación de Ara es A y la calificación de Sare Holding es CCC. Por lo tanto, solo es necesario tomar esas curvas. Además de que solo necesitaremos 15 años.

Figura 3.2: Curvas de crédito de Ara y Sare Holding para 15 años.



Elaboración propia.

El cuadro anterior se muestran solo las dos curvas que se ocuparán en la valuación, esto con la finalidad de observar la concavidad de la curva A, así como la convexidad de la curva CCC.

### 3.3. Simulación

El objetivo de esta sección es crear las variables aleatorias ISC y con ellas crear las probabilidades de primer impago y segundo impago. Tomando como referencia la metodología del capítulo anterior, la generación de estas variables nos darán la oportunidad de conocer el momento en el tiempo en que ocurrirá el impago ( $\tau_H$  y  $\tau_J$ ), y con ellos hacer la valuación de los respectivos contratos.

Para la simulación de los tiempos de paro, primero se generaron 30,000 valores aleatorios. Como son tres variables,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{t}_H$  y  $\hat{t}_J$  a cada una le corresponde un conjunto 10,000 valores generados aleatoriamente.

Entonces tenemos:

$$\widehat{ISC}_H = \sqrt{\rho}\hat{Y} + \sqrt{1-\rho}\hat{\epsilon}_H \quad (3.3)$$

$$\widehat{ISC}_J = \sqrt{\rho}\hat{Y} + \sqrt{1-\rho}\hat{\epsilon}_J \quad (3.4)$$

La siguiente tabla contiene una muestra de **10** valores aleatorios generados  $\tilde{Y}$ ,  $\hat{\epsilon}_H$  y  $\hat{\epsilon}_J$ , así como **10** índices de incumplimiento crediticio  $ISC_H$  y  $ISC_J$ .

Cuadro 3.2:  $\tilde{Y}$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $ISC_H$ ,  $ISC_J$ .

$\tilde{Y}$	$H$	$J$	$ISC_H$	$ISC_J$
-0.252	1.095	0.151	0.389	-0.128
-2.342	1.304	-0.128	-1.245	-2.030
-0.370	-0.698	0.468	-0.692	-0.054
-0.237	-1.561	0.068	-1.053	-0.161
-1.835	-0.432	0.974	-1.772	-1.002
-1.372	-1.515	0.156	-1.977	-1.062
-0.634	1.108	0.181	0.077	-0.431
-0.923	0.163	-2.114	-0.682	-1.930
0.202	0.284	0.258	0.325	0.311
-0.826	-0.873	0.589	-1.169	-0.368

Elaboración propia.

Con los índices de incumplimiento crediticio ahora es posible calcular las funciones de distribución normal estándar, las cuales nos darán la probabilidad de encontrar el cuantil de la respectiva curva. Los resultados en el cuadro 3.3. En el caso de riesgo de crédito ese cuantil es el tiempo de impago. En la estructura de los contratos de primer impago y segundo impago es indispensable utilizar los tiempos de impago de acuerdo a los requerimientos de cada contrato.

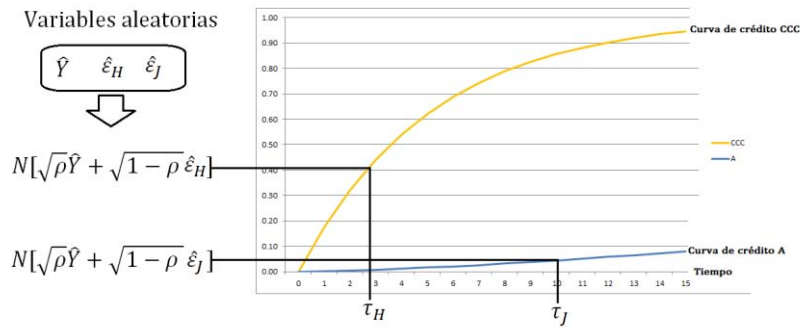
Cuadro 3.3:  $N[ISC]$  para  $H$  y para  $J$  y sus tiempos de impago.

$N [ISC_H]$	Tiempo $\tau_H$	$N [ISC_J]$	Tiempo $\tau_J$
0.65	10000	0.45	3.25
0.11	18.50	0.02	0.25
0.24	34.75	0.48	3.25
0.15	23.25	0.44	3.00
0.04	9.25	0.16	1.00
0.02	6.75	0.14	1.00
0.53	10000	0.33	2.25
0.25	35.00	0.03	0.25
0.63	10000	0.62	5.25
0.12	20. 5	0.36	2.25

Elaboración propia.



Figura 3.3: Simulación de los tiempos de impago usando las curvas de crédito.



Replica Bluhm (2007).

En el cuadro anterior se muestra la relación que existe entre los tiempos de paro y su respectiva probabilidad. Es importante la interpretación de esta gráfica para mayor entendimiento del proceso de valuación.

### 3.4. Tasas de interés estocásticas.

El objetivo de esta sección es generar las tasas de interés estocásticas con las que se llevará a valor presente la prima y la protección de cada uno de los escenarios de impago que se generó.

Por la sencillez del modelo Cox, Ingersoll Ross (CIR), (1985) modelo de tasa corta, lo utilizaré para generar las trayectorias de las tasas de interés. Para el desarrollo de esta sección se utilizaron los libros de Brigo (2006) y Filipovic (2009), ahí es posible encontrar otros modelos de tasas estocásticas, tanto más sofisticados como más sencillos, tales como Vasiceck, Hull-White, Ho-Lee, Heath-Jarrow-Morton HJM, entre otros.

#### 3.4.1. Modelo CIR

El modelo CIR es una ecuación diferencial estocástica. Dado un espacio de medida  $(\Omega, F, Q_0)$ :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*(t), \text{ donde } r(0) \geq 0, \quad (3.5)$$

Donde  $r(0)$ ,  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  son constantes positivas. De acuerdo con Brigo (2006), con la condición  $2ab \geq \sigma^2$ , se asegura que las tasas siempre sean positivas. Sin embargo, esto es cierto sólo para el proceso en tiempo continuo. Al implementar una discretización con el esquema de Euler, resulta que hay una probabilidad positiva de obtener tasas negativas. Algunos investigadores han propuesto técnicas de discretización para evitar este problema. En este trabajo usaremos el esquema tradicional de Euler, dejando para trabajos posteriores la implementación de técnicas más avanzadas. Sobre este tema, Veronesi (2016).

$$\Delta r = a(b - r)\Delta t + \sigma\sqrt{r}\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \text{ donde } \varepsilon \sim N(0,1), \quad (3.6)$$

Con el objeto de obtener los valores correctos de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  es necesario calibrarlas con valores reales. Para tal propósito se calculará la siguiente expresión.

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (3.7)$$

donde

$$A(t, T) = \left[ \frac{2h(\exp\{(a + h)(T - t)/2\})}{2h + (a + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (a + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{a^2 + \sigma^2} \quad (3.8)$$

Como aproximación a la tasa instantánea inicial para las simulaciones, se usó la tasa a un día de la curva inicial, que tuvo un valor de 0.01061.

Cuadro 3.4: Constantes no calibradas.

Constante	Valor
a	1.086672638
b	0.043931349
$\sigma$	0.574365188

Elaboración propia.

Los siguientes datos se obtuvieron de la curva de Valmer y me servirán para hacer la calibración con el modelo.

Cuadro 3.5: Precios de mercado de los Bonos P (t, T)

Plazo	Precio del Bono
3	0.8939295
6	0.79935964
9	0.71479542
12	0.63917806
15	0.57156094

Valmer

Con las constantes ficticias el resultado es el siguiente:

Cuadro 3.6: Valores no calibrados

Tiempo	$A(t,T)$	$B(t,T)$	$P(t,T)_{CIR}$	$P(t,T)_{Mercado}$	$(P(t,T)_{Bono} - P(t,T)_{CIR})^2$
3	0.94085856	0.93655691	0.9315547	0.8939295	0.001415656
6	0.86242168	0.97880403	0.85351075	0.79935964	0.002932343
9	0.78960259	0.98067545	0.78142855	0.71479542	0.004439973
12	0.78960259	0.98067545	0.78142855	0.71479542	0.0058114
15	0.66182098	0.98076194	0.65496914	0.57156094	0.006956927
Suma					0.021556298

Elaboración propia.

Como se puede observar, la suma de las diferencias al cuadrado (el error) es muy grande, 0.021556298. Lo ideal es que el resultado anterior fuese muy bajo. Por lo tanto, para minimizar el error se tienen que modificar las constantes  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$ .

Los siguientes valores fueron los adecuados para minimizar el error.

Cuadro 3.7: Constantes

Constantes	Valores ajustados
$a$	1.00852531
$b$	0.04483808
$\sigma$	0.53450621

Elaboración propia.

Con las constantes anteriores es resultado es 0.000343195.

Cuadro 3.8: Precios con las constantes calibradas.

Tiempo	$A(t,T)$	$B(t,T)$	$P(t,T)_{CIR}$	$P(t,T)_{Bono}$	$(P(t,T)_{Bono} - P(t,T)_{CIR})^2$
3	0.9166191	0.8592184	0.90830003	0.8939295	0.000206512
6	0.81394284	0.88097966	0.80636941	0.79935964	4.91369E-05
9	0.72221605	0.88147702	0.71549233	0.71479542	4.85682E-07
12	0.64081519	0.88148836	0.63484922	0.63917806	1.87388E-05
15	0.56858877	0.88148862	0.56329523	0.57156094	6.8322E-05
					0.000343195

Elaboración propia.

Entonces, con los valores del cuadro 3.7 son los que se tomarán para simular las 10,000 trayectorias de las tasas para cada uno de los escenarios de impago. La siguiente tabla contiene una muestra de 5 trayectorias para 10 periodos.

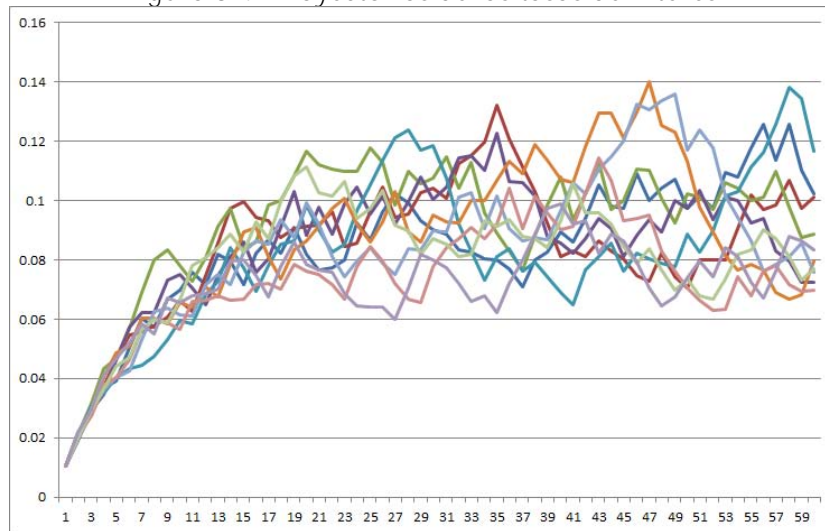
Cuadro 3.9: Tasas instantáneas simuladas.

Periodo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4	Escenario 5
1	0.0106	0.0106	0.0106	0.0106	0.0106
2	0.0213	0.0204	0.0208	0.0193	0.0210
3	0.0287	0.0277	0.0316	0.0293	0.0307
4	0.0366	0.0374	0.0431	0.0347	0.0351
5	0.0388	0.0465	0.0466	0.0464	0.0405
6	0.0500	0.0546	0.0570	0.0574	0.0435
7	0.0600	0.0558	0.0690	0.0622	0.0444
8	0.0572	0.0579	0.0799	0.0624	0.0475
9	0.0666	0.0609	0.0835	0.0733	0.0533
10	0.0694	0.0664	0.0780	0.0749	0.0594

Elaboración propia.

La siguiente gráfica muestra la trayectoria de 10 escenarios con 60 periodos.

Figura 3.4: Trayectorias de las tasas de interés.



Elaboración propia.

Con lo anterior, ya se generaron las tasas estocásticas. Es necesario valuar bonos cupón cero usando dichas tasas. De tal forma que cada bono es el factor para llevar a valor presente la prima y/o protección de su respectivo periodo.

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(t) dt} \quad (3.9)$$

La siguiente tabla muestra los valores de los bonos cupón cero de los 5 escenarios simulados anteriormente.

Cuadro 3.10: Bonos cupón cero con tasas estocásticas

Periodo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4	Escenario 5
1	0.9974	0.9974	0.9974	0.9974	0.9974
2	0.9922	0.9921	0.9925	0.9920	0.9924
3	0.9848	0.9852	0.9850	0.9838	0.9854
4	0.9752	0.9766	0.9752	0.9749	0.9772
5	0.9644	0.9653	0.9635	0.9635	0.9675
6	0.9518	0.9521	0.9511	0.9501	0.9570
7	0.9389	0.9372	0.9375	0.9362	0.9457
8	0.9235	0.9203	0.9234	0.9225	0.9332
9	0.9065	0.9042	0.9074	0.9079	0.9210
10	0.8902	0.8857	0.8902	0.8926	0.9082

Elaboración propia.

### 3.5. Valuación de los swaps de incumplimiento crediticio

Hay varias formas de estructurar un swap de incumplimiento crediticio, (CDS, Credit Default Swaps). En este trabajo, la estructura está diseñada para que el contrato sea de primer impago o de segundo impago. Se asumió que la tasa de recuperación (recovery rate) es cero, es decir LGD va a ser igual a 1.

La fórmula para cada escenario es:

$$P(t, T) = \sum_{t=1}^T e^{-\int_0^T(t)dt} Prima - e^{-\int_0^T(t)dt} Protección. \quad (3.10)$$

Con el resultado del precio de cada escenario simulado, se calcula el promedio sobre todos los escenarios:

$$P_j = \frac{\sum_{i=1}^n P_i(t, T)}{n}. \quad (3.11)$$

Si  $P_j > 0$  quiere decir que elegimos una prima que será suficiente en promedio para que no tengamos pérdidas, pero si,  $P_j < 0$  entonces, hubo pérdidas.

### 3.5.1. Swaps de incumplimiento crediticio para primer impago

El resultado de la simulación para este contrato fue:

Cuadro 3.11: Escenarios de Impago.

	Escenarios
Impago	9486
No impago	514

Elaboración propia.

Donde los impagos ocurrieron en diferentes periodos. Algunos en el primer trimestre y otros ocurrieron justo en el último trimestre, es decir, en el trimestre 60.

El resultado para la prima justa es:

Cuadro 3.12: Prima Justa.

Prima	482.169723
Cobertura	10,000
$P_j$	-6.01319E-09

Elaboración propia.

Pero si queremos obtener una ganancia por la protección, se debe incrementar un poco la prima justa. Los siguientes resultados muestran la ganancia esperada que se podría tener en promedio con 10,000 escenarios.

Cuadro 3.13: Prima con Ganancia.

Prima	498.4544126
Cobertura	9,662
$P_j$	500

Elaboración propia.

### 3.5.2. Swaps de incumplimiento crediticio para segundo impago

De forma análoga al ejercicio anterior, se simularon 10,000 escenarios de impago con una cópula Li (1999), en este caso al ser el segundo impago, se toma el periodo de tiempo máximo de cada escenario de impago.

Los resultados de los tiempos de impago son:

Cuadro 3.14: Escenarios de Impago  $\tau$ .

	Escenarios
Impago	78
No impago	9212

Elaboración propia.

El resultado de la prima justa es:

Cuadro 3.15: Prima Justa.

Prima	12.09694827
Cobertura	10,000
<b><math>P_j</math></b>	0.00

Elaboración propia.

y para obtener una ganancia, la prima podría ser:

Cuadro 3.15: Prima con Ganancia.

Prima	25.7369608
<b>Cobertura</b>	9,662
<b><math>P_j</math></b>	500.00

Elaboración propia.

Con la metodología se ha obtenido el precio justo (sin pérdida ni ganancia) de los swpas de incumplimiento crediticio, así como la prima necesaria para tener una ganancia de 500. Como se puede observar, tanto para el precio justo como para el precio con ganancia, el precio del derivado es proporcional a la probabilidad de que se ejerza la cobertura; es decir, la prima es más alta para primer impago que para segundo impago.

Con esto se concluye la valuación de los CDS. Existen derivados de crédito que tienen un mayor grado de complejidad, así como productos estructurados, por ejemplo, los *collateralized debt obligations*, mejor conocidos como CDOs.

El precio calculado en esta valuación se hizo con la probabilidad de incumplimiento del reporte de S&P (2013), el cual se obtiene de manera anual, lo que implica que la probabilidad de incumplimiento a lo largo del año puede modificarse por noticias que afecten a la institución o empresa subyacente. Por otro lado, el precio del CDS en el mercado también se ve afectado por la oferta y la demanda. Por estas razones, el precio del CDS lo podemos encontrar muy diferente al calculado.

## Capítulo 4

# Conclusiones

Como resultado de la investigación llegué a la conclusión que los métodos estocásticos para la generación de escenarios de impago son fundamentales para una correcta implementación de los derivados financieros, en este caso de un swap de incumplimiento crediticio (*credit default swap*). Estas herramientas matemáticas se pueden extrapolar a otras áreas de la actuaría, por ejemplo, las pensiones, los seguros, la administración de riesgos, etc. Sin embargo, dado que la realidad es tan compleja, los modelos necesariamente deben simplificarla, y por tanto es indispensable tener conocimiento de los mercados, sensibilidad e intuición para así poder adaptar los modelos de tal forma que se mantenga coherencia con la realidad ante situaciones complejas. Según Bielicki (2011) debe existir una continua comunicación entre los modeladores y aquellos que toman las decisiones. Los modeladores deben tener un alto nivel técnico e innovar constantemente; un enfoque que no se base en la investigación, simplemente estaría condenado al fracaso.

Para la calibración del modelo se usaron datos reales. De esta manera, me fue posible tener una sensibilidad más real de los problemas que podrían existir en el ejercicio profesional. Los datos son la materia prima de los modelos; si los datos son de buena calidad, la aproximación del modelo será mejor; si los datos son de baja calidad, muy probablemente la aproximación del resultado también sea pobre. Lardy (2011) comenta que no necesariamente una mayor cantidad de datos es más útil si esta información fue obtenida con diferentes estándares, además de que dificulta la posibilidad de procesar los datos debido a los formatos, costos de acceso, listas de campos enormes con datos faltantes o incorrectos. Esta observación se extrapola a casi cualquier área que requiera información y bases de datos, ya que a veces resulta imposible poder conciliar los datos. También menciona que el Pilar III de Basilea II establece estándares de calidad y cantidad de la información. En ese sentido, para la industria aseguradora, Solvencia II igualmente establece estándares de calidad de los datos.

Al realizar el presente trabajo, he aprendido mucho sobre la modelación estocástica para la valuación de instrumentos derivados. De esta manera, considero que tengo abierta la posibilidad de abordar temas más avanzados en el futuro, posiblemente en un posgrado en finanzas cuantitativas.



# Bibliografía

- [1] Bachelier, L. **(1900)** *The theory of speculation*. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Sér 3, 17 (1900).
- [2] Brigo D., Patras F. **(2011)** *Credit Risk Frontiers; Subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, Ratings and Liquidity*. First Edition. Bloomberg Press. John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Bielecki T., Brigo D., Patras F. **(2011)** *Credit Risk Frontiers; Subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, Ratings and Liquidity*. First Edition. Bloomberg Press. John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Bluhm C., Overbeck L., Wagner C. **(2004)** *An Introduction to Credit Risk Modeling*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- [5] Bluhm C., Overbeck L. **(2007)** *Calibration of PD term structures: to be or not to be*, RISK, Vol. 20, No. 11. pp. 98-103.
- [6] Bluhm C., Overbeck L. **(2007)** *Structured Credit Portfolio Analysis Baskets and CDOs*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- [7] Brigo D., Mercurio F. **(2006)** *Interest Rate Models Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*. Second Edition. Springer Finance.
- [8] Cox, Ingersoll, Ross. **(1985)** A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrics*, Vol 53. Issue 2.
- [9] Donnelly C., Embrechts P. **(2010)** *The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis*. *ASTIN Bulletin*, Vol. 40, Issue 01. pp. 1-33.
- [10] Filipovic Damir **(2009)** *Term-Structure Models A Graduate Course*. Springer Finance Textbook.
- [11] International Swaps and Derivates Association **(2009)** *AIG and Credit Default Swaps* Available at: [http://www.isda.org/c\\_and\\_a/pdf/ISDAAIGandCDS.pdf](http://www.isda.org/c_and_a/pdf/ISDAAIGandCDS.pdf)
- [12] Israel R., Rosenthal J. Rosenthal J. Wei J. **(2001)** *Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices with Application to Credit Ratings*. *Mathematical Finance*, Vol. 11, Issue 2, pp. 245–265.
- [13] Jarrow R., Lando D., Turnbull S. **(1997)** *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*. *The Review of Financial Studies* Summer 1997 Vol. 10, No. 2, pp. 481–523.

- [14] Lardy, Jean Pierre. **(2011)** *Credit risk frontiers; subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, Ratings and Liquidity* First Edition. Bloomberg Press. John Wiley & Sons, Inc.
- [15] Li, D. X.,: **(1999)** The Valuation of Basket Credit Derivates; CreditMetrics Monitor.
- [16] Norris J.R., **(1997)** *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.
- [17] **Standard and Poor's Ratings Services; Default, Transition, and Recovery. 2013** Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions. **(2013)** McGraw Hill Financial.
- [18] Sklar, A. Fonction de Repartition à n Dimension et Leur Marges **(1959)** *Publications de l'Institute Statistique de l'Université de Paris 8, 229-231*
- [19] Trueck S. Rachev S. **(2009)** *Rating Based Modeling of Credit Risk. Theory and Application of Migration Matrices.*, Academic Press, Elsevier.
- [20] Veronesi Pietro. **(2016)** Handbook of fixed-income securities., Wiley.
- [21] Wiggins R. Metrick A. **(2014)** *The Lehman Brothers Bankruptcy G: The Special Case of Derivatives*. Yale Program on Financial Stability Case Study 2014-3G-V1. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2593080>.

# Apéndice A

## Anexo 1

Este anexo sólo contiene los códigos más relevantes para la tesis. Los códigos que se ocuparon para el arreglo de la información no se incluyen.

Código para hacer la matriz generadora  $\tilde{Q}$ .

```
 $n = 10100$ 
```

```
 $\tilde{Q} = 0$ 
```

```
for i=1:n
```

```
 $\tilde{Q} = \tilde{Q} + ((-1)^{(i+1)} * (M - I)^i) / i$ 
```

```
end
```

Código para obtener las curvas de impago.

```
for i=1:15
```

```
 $exp = expm(\tilde{Q})^i$ 
```

```
end
```