



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Restricción de la dinámica de energía oscura
mediante pruebas de supernovas tipo Ia**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:**

Físico

P R E S E N T A:

Mario Antonio Montero Sánchez

Ciudad Universitaria, CDMX. 2016.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Axel Ricardo De la Macorra Pettersson
Moriel
2016

1. Datos del alumno

Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera
Número de cuenta

1. Datos del alumno

Montero
Sánchez
Mario Antonio
26 15 94 78, (044) 55 27 62 99 46
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
409002395

2. Datos del tutor

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

2. Datos del tutor

Dr.
Axel Ricardo
De la Macorra
Pettersson Moriel

3. Datos del sinodal 1

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Jaime
Besprosvany
Fridzon

4. Datos del sinodal 2

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez
Quezada

5. Datos del sinodal 3

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Darío
Núñez
Zúñiga

6. Datos del sinodal 4

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Octavio
Valenzuela
Tijerino

7. Datos del trabajo escrito.

Título

Número de páginas

Año

7. Datos del trabajo escrito

Restricción de la dinámica de energía oscura
mediante pruebas de supernovas tipo Ia.

77 p

2016

Restricción de la dinámica de energía oscura mediante pruebas de supernovas tipo Ia

MARIO ANTONIO MONTERO SÁNCHEZ
Universidad Nacional Autónoma de México

23 de septiembre de 2016

Resumen

La cosmología es una de las ciencias más antiguas estudiada por la humanidad. Desde la aparición de las primeras civilizaciones, el hombre se ha cuestionado su posición en el universo y los misterios que esconde. Como el universo es eléctricamente neutro, y las fuerzas nucleares son de corto alcance, la interacción gravitacional determina de manera significativa la evolución del cosmos. Dado que hoy en día, la relatividad general (RG) es la mejor teoría gravitacional con la que se cuenta, se estudia la dinámica del universo a partir de la misma, dando lugar al modelo cosmológico estándar. El modelo cosmológico estándar surge de suponer que el universo como un sistema físico y a ciertas escalas, es espacialmente homogéneo e isotrópico, lo cual se describe matemáticamente mediante la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW). Por otro lado, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del sistema con la física del mismo, al ser proporcionales al tensor de energía-momento. El tensor de energía-momento asociado al modelo cosmológico estándar es el mismo que el de un fluido perfecto, que se encuentra compuesto de partículas relativistas (radiación) y materia. Sin embargo, en la década de 1990, dos grupos de investigación ([21]) y ([17]), descubrieron que el universo se expande de manera acelerada. Dicha aceleración no puede existir si el universo está compuesto solamente de radiación y materia. Para solucionar el problema anterior, sin cambiar la suposición de homogeneidad e isotropía, ni abandonar el marco de la RG, se requiere la presencia de un fluido con presión negativa. A este fluido se le conoce como constante cosmológica, cuando su ecuación de estado es exactamente igual a menos uno o como energía oscura para los demás casos. El trabajo realizado en esta tesis, consiste en proponer una parametrización para la ecuación de estado de la energía oscura, y restringir los valores de los parámetros cosmológicos que determinan la dinámica del universo mediante la prueba de supernovas tipo Ia (SNe Ia).

En el Capítulo 1, se hace un breve repaso del modelo cosmológico estándar. Se comienza introduciendo la teoría gravitacional de Einstein, explicando sus postulados y escribiendo las ecuaciones de campo. Una vez hecho lo anterior, se muestra cómo el suponer homogeneidad e isotropía del universo es equivalente a considerar una geometría descrita por la métrica FRW. Tomando el tensor de energía momento de un fluido perfecto, se derivan las ecuaciones de Friedmann, las cuales describen la dinámica de nuestro universo. Después, se introducen los conceptos de corrimiento al rojo, distancia lumínica y magnitud aparente, mismos que son necesarios conocer para implementar la prueba de supernovas. Finalmente, se define el parámetro de desaceleración.

En el Capítulo 2, se mencionan los descubrimientos realizados por Perlmutter *et al* ([17]) y el grupo de Riess *et al* ([21]). La conclusión de su investigación fue el descubrimiento de la expansión acelerada del universo. La razón de expansión del universo depende de las componentes de materia y energía que lo constituyen. Un universo compuesto solamente por materia y radiación no es capaz de producir la aceleración observada. Al considerar que existe otra componente, que se comporta como un fluido con presión negativa, se soluciona el problema. Dicha componente corresponde a la energía oscura. Se muestra cómo al introducir una constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein, se puede obtener un fluido con presión negativa y cómo las ecuaciones que se obtienen son equivalentes a las de Friedmann. También se discute brevemente el problema de la coincidencia y de ajuste fino que presenta la constante cosmológica, dando paso a considerar a la energía oscura. Se estudian también campos escalares que interactúan solamente de manera gravitacional

II

con la materia, donde se cree que éstos son los responsables de la expansión acelerada del universo. Por último, se mencionan las pruebas cosmológicas que sustentan la evidencia de la existencia de la energía oscura, haciendo especial énfasis en la de supernovas tipo Ia.

Dado que no existe un modelo definitivo, que explique la causa de la expansión acelerada del universo, se ha popularizado la idea de parametrizar la ecuación de estado de la energía oscura y realizar un análisis fenomenológico. Al parametrizar la ecuación de estado y comparar los resultados obtenidos con las observaciones cosmológicas, es posible verificar si el modelo propuesto ajusta de manera correcta con las mediciones. En el Capítulo 3, se presenta la parametrización propuesta en este trabajo. Dicha ecuación cuenta con cuatro parámetros que son el valor de la ecuación de estado actual, ω_0 ; el valor inicial de la misma, ω_{ini} ; un corrimiento al rojo de transición entre el estado inicial y el actual, z_t ; una potencia, p , a la cual se encuentra elevada la dependencia en el corrimiento al rojo, y determina qué tan abrupta es la transición entre los dos límites mencionados previamente. La parametrización propuesta, es una generalización de la constante cosmológica, de la ecuación de estado constante y de la famosa parametrización propuesta por Chevalier, Polarski y Linder (CPL), véase ([7]) y ([9]). Con el fin de ilustrar el estudio de la parametrización, se escogieron los siguientes valores de la potencia, $p = 1, 2$ y 4 . Se resolvió la ecuación de continuidad para la componente de energía oscura para los valores de la potencia mencionados anteriormente, y se determinó la forma de la distancia lumínica.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados que se obtuvieron sobre la restricción de los parámetros cosmológicos, véase tabla (4.8). Se consideraron ocho casos particulares de la parametrización propuesta: Constante cosmológica; ecuación de estado constante; tres modelos donde el corrimiento al rojo de transición tenía un valor de $z_t = 1$, donde para $p = 1$, es el caso de la parametrización CPL; tres modelos donde z_t era un parámetro libre. Haciendo uso de los datos reportados en ([11]), se determinó el mejor valor de los parámetros libres, mediante un ajuste de mínimos cuadrados sobre la función de magnitud aparente. Se obtuvieron las curvas de contorno de la densidad de materia y de la constante de Hubble para determinar su incertidumbre a 2σ . Para los modelos donde la ecuación de estado no era constante, se obtuvieron las curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) , siendo ω_{ini} el valor inicial de la ecuación de estado. Se graficaron los parámetros de densidades, la función de desaceleración y las ecuaciones de estado, para cada modelo. Se compararon los comportamientos de las gráficas anteriores para determinar la influencia que tiene el corrimiento al rojo de transición y la potencia de la ecuación de estado sobre la evolución del universo.

Se concluye que la parametrización propuesta en este trabajo mejora el valor de la χ^2 para todos los modelos analizados en comparación con la constante cosmológica. Al considerar el número de grados de libertad para cada modelo y calcular el valor de la χ_{red}^2 , se obtiene que el valor mínimo corresponde al caso $\omega_\Lambda = -1$. Sin embargo la diferencia máxima con el resto de los modelos es de: $\Delta\chi_{red}^2 = 0.02$, por lo que de manera estadística todos los modelos ajustan de manera adecuada los parámetros cosmológicos. Aunque la constante cosmológica empata mejor con las observaciones de acuerdo a lo reportado en ([19]) y ([23]), no resuelve el problema de la coincidencia ni de ajuste fino. Por otra parte, el hecho de que el valor de la ecuación de estado al día de hoy no sea exactamente igual a menos uno, da pie a pensar que la expansión acelerada del universo tiene su origen en la evolución de un campo escalar, permitiendo interpretar la energía oscura desde un punto de vista de física de partículas elementales. La densidad de materia (o de energía oscura) no depende fuertemente de la parametrización escogida para la prueba de SNe Ia, al igual que el valor de la constante de Hubble. La prueba de supernovas restringe de manera adecuada los parámetros evaluados al día de hoy, pero presenta problemas para determinar el rango de incertidumbres de parámetros importantes en el universo temprano como lo es ω_{ini} . Lo anterior se debe fundamentalmente a que la muestra de supernovas con la que se trabajó tienen corrimientos muy pequeños, por lo que se recomienda restringir las incertidumbres haciendo uso conjunto con otras pruebas cosmológicas como lo son las pruebas de oscilaciones acústicas de bariones (BAO por sus siglas en inglés) y las perturbaciones en la radiación cósmica de fondo (CMB por sus siglas en inglés). Desde un punto de vista estadístico, todos los modelos ajustan razonablemente bien los parámetros cosmológicos analizados en la tesis. Al comparar los modelos que cuentan con un corrimiento al rojo de transición con los resultados de la sonda *Planck* y el *Supernova Legacy Survey*, se tiene que

considerar potencias superiores a la unidad, influye de manera significativa en la dinámica del universo y su comportamiento futuro. Al estudiar las gráficas de desaceleración y los parámetros de densidades para los modelos propuestos en la tesis, se observó que cuando el corrimiento al rojo de transición, z_t , tiene un valor diferente a 1, la potencia de la parametrización juega un papel importante y cambia el comportamiento del parámetro de desaceleración para los distintos modelos. Resulta entonces importante e interesante estudiar de manera más cuidadosa la parametrización propuesta con $z_t \neq 1$, donde cambios abruptos o suaves de una transición de la ecuación de estado entre un valor inicial y uno actual predicen comportamientos diferentes en la evolución del universo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Cosmología	1
1.2. Relatividad General	3
1.3. Métrica de un universo homogéneo e isotrópico	4
1.4. Ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker	5
1.5. Parámetro de densidad	9
1.6. Corrimiento al Rojo	11
1.7. Distancia lumínica	12
1.8. Magnitud aparente y su relación con la cosmología	15
1.9. Parámetro de desaceleración	15
2. Energía oscura	17
2.1. Introducción	17
2.2. Quintaesencia y fantasmas	18
2.3. Supernovas tipo Ia	21
2.4. Evidencias observacionales	22
2.4.1. Pruebas de Supernovas Tipo Ia	22
2.4.2. Radiación cósmica de fondo y formación de estructura a gran escala	24
2.4.3. Cúmulos de galaxias	24
2.4.4. Edad del universo	26
3. Parametrizaciones de energía oscura	28
3.1. Parametrización	28
3.2. Modelo $\omega_\Lambda = \omega_0$	29
3.3. Modelo $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$	31
3.4. Caso $p=1$	32
3.5. Caso $p=2$	34
3.6. Caso $p=4$	35
4. Resultados	38
4.1. Modelo 1; Constante cosmológica	38
4.2. Modelo 2; Ecuación de estado constante	39
4.3. Modelo 3; $z_t = 1$ y $p = 1$	40
4.4. Modelo 4; $z_t = 1$ y $p = 2$	42
4.5. Modelo 5; $z_t = 1$ y $p = 4$	44
4.6. Modelo 6; $p = 1$	45
4.7. Modelo 7; $p = 2$	47
4.8. Modelo 8; $p = 4$	48

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	V
5. Conclusiones	59
A. Apéndice: Símbolos de Christoffel y componentes diagonales del tensor de Ricci para la métrica de FRW	62
B. Apéndice: Método de mínimos cuadrados	66

Capítulo 1

Introducción

1.1. Cosmología

La cosmología es el estudio del universo como un sistema físico. Desde tiempos muy antiguos la humanidad ha tratado de explicar los misterios del cosmos, tomando para ello distintas posturas, sean estas teológicas o científicas. Como se ha dicho, el estudio del universo se remonta a los inicios de la humanidad, sin embargo, un cambio de paradigma fundamental ocurre a partir de la revolución copernicana. Al prescindir del paradigma teológico que representaba el geocentrismo, se logró mejorar las predicciones de las órbitas de los cuerpos celestes. Este rompimiento de paradigma convenció a personajes como Galileo a establecer una lucha intelectual por la defensa del heliocentrismo y sembró el camino para que Kepler pudiera proponer órbitas elípticas a diferencia de las circulares. Finalmente, este periodo de renovación de ideas culminó en 1687, cuando Isaac Newton publicó su ley de gravitación universal dentro de su *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. La mecánica newtoniana mejoró las predicciones de los movimientos de los cuerpos celestes; sin embargo, no estuvo exenta de enfrentarse a problemas imposibles de resolver para la teoría, como son el perihelio de Mercurio y la paradoja de Olber.

A principios del siglo XX, Albert Einstein motivado por los recientes descubrimientos de Maxwell en el área del electromagnetismo, publicó su famoso artículo “Sobre la electro-dinámica de los cuerpos en movimiento”. La constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema de referencia inercial implicó que la simultaneidad entre dos eventos era relativa [14]. Al tratar de generalizar su teoría especial de la relatividad a sistemas no inerciales, Einstein se dio cuenta que la noción geométrica de un espacio-tiempo está intrínsecamente ligada a la materia y energía, culminando en sus ecuaciones de campo.

En 1917, Einstein propuso el primer modelo cosmológico basado en la relatividad general. Dicha cosmología consta de tres suposiciones: un universo espacialmente homogéneo e isotrópico, una geometría espacial cerrada y un universo estático. Sin embargo, las ecuaciones de campo de la relatividad general no tienen soluciones compatibles con todas las suposiciones anteriormente mencionadas. Para solucionar este problema y mantener un esquema estático, Einstein introdujo un término constante en sus ecuaciones, el cual fue posteriormente retirado cuando Hubble demostró que el universo se encuentra en expansión. En el mismo año, Willem de Sitter planteó otra solución con constante cosmológica que satisfacía el principio cosmológico y modelaba un universo en expansión, donde este universo estaba vacío.

Por su parte, las observaciones astronómicas en los años posteriores concluyeron que la nebulosa espiral comprende en realidad varias galaxias similares a la Vía Láctea. La prueba definitiva del carácter extra galáctico de la nebulosa espiral fue encontrada por Edwin Hubble entre 1923 y 1924 (véase [14]). Como algunas de las estrellas en la nebulosa eran cefeidas variables, las pudo utilizar como candelas estándar

para medir su distancia, encontrando que se hallaban aproximadamente a 300 kilo parsecs de la Tierra; una distancia que es mayor a la de las fronteras de nuestra galaxia. Posteriormente, en 1926 Hubble demostró de manera cualitativa que las galaxias se encuentran distribuidas de manera homogénea a lo largo del espacio, dando la validez observacional a la suposición del principio cosmológico. Finalmente en 1929, a partir de una muestra de 50 galaxias, Hubble descubrió la expansión del universo utilizando las distancias a las galaxias y sus corrimientos espectrales, descartando por completo la idea de un universo estático.

En 1922 y 1927, Aleksandr Friedmann y Georges Lemaître encontraron una solución a las ecuaciones de Einstein para un universo con materia, al desprestigiar la suposición de independencia temporal y tomando en cuenta curvaturas positivas, negativas y cero (universos abiertos, cerrados y planos, respectivamente). Los modelos de Friedmann-Lemaître predijeron que un par de objetos se mueven con una velocidad relativa proporcional a su distancia, lo cual concuerda con el descubrimiento de Hubble. En la década de los años 30, Robertson y Walker demostraron que el elemento de línea propuesto por Friedmann era el más general para el caso de un universo homogéneo e isotrópico [14].

En los modelos de Friedmann, existe un tiempo en el pasado en que las dimensiones del universo se extrapolan a cero y las densidades de materia y energía divergen en un punto del espacio. Lo anterior motivo a Lemaître a proponer que el universo se había expandido a partir de un estado inicial caliente y sumamente denso al cual denominó el primer átomo [14]. En los años 1940, George Gamow teorizó que los elementos químicos presentes hoy en el universo, se debieron sintetizar en la fase del universo caliente y denso, dando lugar a reacciones termonucleares, idea contraria a que los elementos químicos se producen en las estrellas (ambas correctas). La idea de Gamow fue presentada junto con su estudiante Ralph Alpher en el artículo α, β, γ , y más tarde se conoció como el Big Bang Caliente. En 1948 Gamow, Alpher y Robert Herman notaron que su teoría implicaba que en el instante de la síntesis de los elementos, el universo se encontraba lleno por una radiación de cuerpo negro con una energía térmica del orden de 1 MeV. Al calcular la temperatura que debiera tener esa radiación el día de hoy, estimaron que debía ser del orden de unos cuantos Kelvins y por tanto, el máximo de su espectro encontrarse en el rango de microondas, prediciendo así la radiación cósmica de fondo. Por otro lado, en los 60 Penzias y Woodrow descubrieron la radiación cósmica de fondo en los laboratorios *Bell*. Al estar trabajando con un radiómetro con fines de observaciones radio astronómicas, detectaron un ruido isotrópico inexplicable correspondiente a una radiación de fondo de temperatura de 3.5 Kelvin, dando una prueba observacional contundente de la existencia de la radiación de fondo y validando el modelo del Big Bang Caliente.

Los avances conseguidos tanto en la teoría cosmológica como en las observaciones astronómicas durante el siglo XX, constituyen el modelo estándar de la cosmología. Sin embargo, a pesar de lo anterior, la cosmología cuenta actualmente con problemas abiertos, dentro de los cuales tres son de gran interés para la comunidad científica: La materia oscura, la expansión acelerada del universo y el paradigma inflacionario. La idea de materia oscura fue introducida por el astrónomo Fritz Zwicky para explicar el movimiento de las galaxias dentro del cúmulo de Coma [14]. Zwicky encontró que para explicar la dinámica de los cuerpos de dicho cúmulo, la masa debería ser aproximadamente 400 veces mayor que la observada por los telescopios de la época. Para resolver el problema de masa faltante, propuso que debiera existir un tipo de materia que no interaccionara con ninguna fuerza de la naturaleza más que con la gravitacional, denotándola como materia oscura. Durante la década de 1970 Kent Ford, utilizando una técnica espectroscópica, midió la velocidad orbital de las estrellas dentro de una galaxia como función de su distancia al centro de la misma con una precisión sin precedentes. Los resultados de Ford demostraron que para explicar las curvas de rotación de las galaxias, se requería que la masa observada fuera diez veces mayor a la medida, dando lugar a considerar de manera seria la hipótesis de un ente oscuro de materia. A partir de entonces, diversas observaciones sustentan la idea de materia oscura, dentro de las cuales se encuentran las anisotropías del espectro de radiación de fondo cósmica y el espectro de potencias de las galaxias. No obstante, no se ha detectado de manera directa la existencia de este tipo de materia. Además, el modelo estándar de partículas elementales, no predice la existencia de una partícula con las propiedades requeridas para fungir como un candidato viable de materia oscura.

La expansión acelerada del universo fue detectada en 1998 por dos grupos distintos de investigación (véase ([21]) y ([17])). Tanto el *Supernova Cosmology Project* como el *High-z Supernova Search* determinaron la aceleración del universo mientras medían los diagramas de Hubble de un conjunto de supernovas tipo Ia. Las supernovas tipo Ia son remanentes de estrellas que por su formación tan característica tienen una luminosidad intrínseca bien conocida, sirviendo como candelas estándar para las mediciones astronómicas. La investigación llevada a cabo por ambos grupos concluyó que la luminosidad aparente de dichas supernovas, es menor que la predicha para un universo en desaceleración. Considerando que el universo se encuentra únicamente compuesto de materia y radiación, resulta imposible tener aceleración. Se propuso entonces que debería existir otra componente dentro del universo que contara con presiones negativas para poder explicar las observaciones realizadas. El primer candidato natural fue la constante cosmológica introducida por Einstein. Actualmente, la expansión acelerada del universo ha sido verificada por distintas pruebas observacionales (supernovas tipo Ia, edad del universo, oscilaciones acústicas de bariones), pero el término de constante cosmológica tiene una vaga interpretación teórica y entra en conflicto con la energía del vacío cuántico predicha por la teoría cuántica de campos. En la actualidad, el acercamiento más popular para tratar el problema, es postular que la aceleración se debe a la acción de un campo escalar con presiones negativas denominado energía oscura; sin embargo, como se discutirá a lo largo de este trabajo aún queda mucho por entender y sigue siendo un problema abierto para la cosmología.

1.2. Relatividad General

Como se mencionó anteriormente, la cosmología es el estudio del universo como un sistema físico. Actualmente se describe la naturaleza mediante cuatro fuerzas fundamentales, las cuales son la gravitacional, la electromagnética, la nuclear fuerte y la débil. Puesto que el universo es eléctricamente neutro y las fuerzas nucleares son de corto alcance ($\approx 1\text{fm}$), resulta que la única fuerza indispensable para el estudio de la evolución del universo a escalas astronómicas es la gravitacional. Siendo la relatividad general de Einstein la mejor teoría gravitacional que se tiene en el presente, el modelo cosmológico estándar se deriva de las predicciones hechas por la misma.

La Relatividad General (RG) esta basada en dos postulados fundamentales: El principio de covariancia de Einstein y el principio de equivalencia [22]. El principio de covariancia menciona que las leyes físicas no deben depender del sistema de referencia del observador. Matemáticamente esto se traduce en escribir las ecuaciones en forma tensorial, ya que los tensores cuentan con reglas de transformaciones bien definidas entre dos cartas coordenadas de la variedad. Dicho de otra manera, la relatividad general debe ser invariante bajo difeomorfismos. El principio de equivalencia establece que un marco de referencia que se encuentra en caída libre, es equivalente a un marco inercial en el espacio de Minkowski [24].

Otro aspecto fundamental de la RG es la inclusión de la gravedad como una teoría geométrica del espacio-tiempo. Dentro del contexto de RG, nuestro universo es una variedad pseudo-riemanniana de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales. Es entonces necesario para dar una descripción física congruente de la dinámica del universo conocer su geometría. Dentro del estudio de la geometría diferencial el objeto matemático más importante es el tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, el cual es un tensor simétrico. Con él, se puede escribir el elemento diferencial de línea de una curva sobre la variedad, expresada en coordenadas locales, $\{x^\mu\}$, como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

donde por convención y a lo largo de todo este trabajo, los índices griegos corren de 0 a 3, siendo 0 la coordenada temporal y los índices latinos de 1 a 3. Resulta esencial poder plantear, bajo ciertas restricciones físicas, una métrica que describa adecuadamente la estructura geométrica del universo en el que vivimos.

Dentro del contexto de la RG, la gravedad no es una fuerza externa como las otras tres (véase [5]), sino una consecuencia de la deformación del espacio-tiempo debido a la acción de masa y energía. En RG los efectos

gravitacionales se determinan mediante el cálculo de la curvatura de la variedad. En geometría diferencial el objeto geométrico correspondiente a la curvatura, es el tensor de Riemann, que a su vez está definido en términos de los símbolos de Christoffel asociados a la métrica en cuestión. En las siguientes ecuaciones se escribe de manera explícita como obtener las componentes de los símbolos de Christoffel, del tensor de curvatura, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, para una base coordenada.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} [\partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}] \quad (1.2)$$

$$R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}\Gamma_{\lambda\beta}^{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\nu} \quad (1.3)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\beta\nu}^{\beta} \quad (1.4)$$

$$R = R_{\mu}^{\mu} \quad (1.5)$$

La RG, relaciona entonces la geometría de la variedad con las componentes de materia y energía presentes en el universo. De manera matemática la dinámica de un sistema bajo la acción de fuerzas gravitacionales está descrita por las ecuaciones de campo de Einstein; de aquí en adelante se utilizan unidades con $c = 1$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío, G la constante gravitacional de Newton, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento y $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein. A continuación se presenta la definición de $G_{\mu\nu}$ y de las ecuaciones de campo respectivamente:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Es necesario entonces, para dar una descripción dinámica de la evolución del universo, determinar tanto la geometría como las fuentes de campo gravitacional, es decir el tensor de energía-momento.

Las observaciones astronómicas más recientes apoyan la idea de que el universo es homogéneo e isotrópico a escalas de Mega parsecs, donde 1 parsec = 3.086×10^{13} kilómetros. Suponer homogeneidad implica que, a grandes escalas, el universo observado debe verse igual desde cualquier otro punto del mismo. Lo anterior resulta equivalente a decir que deben existir simetrías de traslaciones desde cualquier punto del espacio a otro. La isotropía por su parte, sostiene que no es posible mediante una serie de observaciones locales, distinguir una dirección de otra; en otras palabras, existe una simetría rotacional en cada punto [22]. Suponer estas dos propiedades para nuestro espacio-tiempo es también conocido como el principio cosmológico. En la siguiente sección, se muestra que para un espacio esféricamente simétrico, el tensor métrico solo tiene dos funciones.

1.3. Métrica de un universo homogéneo e isotrópico

El principio cosmológico sustenta que en cada época toda superficie de tipo espacio es homogénea e isotrópica. La afirmación anterior es cierta en gran medida a escalas de cientos de Megaparsecs. Lo anterior, motiva a modelar al universo como un fluido cósmico. Las partículas fundamentales de dicho fluido son galaxias y cada elemento del fluido, compuesto por una vasta cantidad de galaxias, sigue siendo pequeño comparado con el sistema. Entonces, el movimiento de un elemento de volumen es esencialmente el movimiento del cúmulo de galaxias que lo componen, que a su vez queda determinado por la auto-interacción gravitacional del sistema. Dicho de otra manera, todos los elementos del fluido se encuentran en caída libre.

Lo anterior nos permite escoger un sistema privilegiado de coordenadas denominadas coordenadas comóviles. En este sistema la coordenada temporal, t , representa el tiempo propio de cada galaxia y las etiquetas $\{x^i\}$ son las coordenadas espaciales atadas a cada elemento de volumen del fluido. Nótese que un observador comóvil, se encuentra en reposo dentro del marco de referencia comóvil ya que fluye con cada elemento

del fluido siguiendo líneas geodésicas. Visto desde este sistema de referencia la métrica que describe las condiciones de homogeneidad e isotropía es la de Friedmann-Robertson-Walker.

Como la coordenada temporal está asociada al tiempo propio de los cúmulos de galaxias, el coeficiente del tensor métrico $g_{00} = -1$. La siguiente condición que se impone es exigir que las componentes g_{0i} sean iguales a cero. Como existen superficies espaciales bien definidas para cortes de nivel a tiempo constante, se puede escribir el elemento de línea de la siguiente manera; en el que γ_{ij} es un tensor métrico que solo depende de las coordenadas $\{x^i\}$ y $a(t)$ un factor de escala

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + \gamma_{ij}(t, \vec{x}) dx^i dx^j \\ &= -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j = -dt^2 + a^2(t) d\tilde{l}^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

La condición de isotropía impone una simetría de rotación en las coordenadas espaciales. Se puede demostrar que para un espacio esféricamente simétrico, la parte espacial del elemento de línea toma la siguiente forma [22]

$$d\tilde{l}^2 = \exp(2\Lambda(r)) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (1.9)$$

Siendo $\Lambda(r)$, una función a determinar que depende solamente de la coordenada radial. Por otra parte la condición de homogeneidad implica que el escalar de Ricci debe ser una constante, por el teorema de Cartan, que dice que si una variedad es localmente simétrica, entonces la derivada covariante del escalar de curvatura debe ser cero, $R_{;i} = 0$. Para (1.9) los coeficientes de Christoffel distintos de cero son los siguientes

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{d\Lambda}{dr} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \exp(-2\Lambda) & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta) \cos(\theta) & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2(\theta) \exp(-2\Lambda) \end{aligned} \quad (1.10)$$

A partir de los símbolos de Christoffel, se calcula el escalar de curvatura; el cual es igual a una constante, κ , dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} R &= \gamma^{ij} R_{ij} = \gamma^{rr} R_{rr} + \gamma^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + \gamma^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\ &= \frac{2}{r} \frac{d\Lambda}{dr} \exp(-2\Lambda) + \frac{1}{r^2} - \frac{\exp(-2\Lambda)}{r^2} + \frac{\exp(-2\Lambda)}{r} \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{\exp(-2\Lambda)}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \\ &\quad \frac{\exp(-2\Lambda)}{r} \frac{d\Lambda}{dr} \\ &= \frac{2}{r^2} (1 - \exp(-2\Lambda)) + \frac{4}{r} \frac{d\Lambda}{dr} \exp(-2\Lambda) \\ &= \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - \exp(-2\Lambda))] = \kappa \end{aligned} \quad (1.11)$$

Integrando la ecuación anterior y pidiendo regularidad en el punto $r = 0$, se obtiene que

$$\exp(2\Lambda) = \frac{1}{1 - \kappa/6r^2} \quad (1.12)$$

Redefiniendo $\kappa/6 = k$ e insertando en la ec. (1.9), se obtiene

$$d\tilde{l}^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (1.13)$$

1.4. Ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker

Hemos visto que para un universo homogéneo e isotrópico el elemento de línea es de la forma (1.14), donde $\{r, \theta, \phi\}$ son coordenadas comóviles, t el tiempo propio de cada galaxia, $a(t)$ el factor de expansión del universo

y k la curvatura gaussiana de una superficie a tiempo constante, donde el caso $k = 1, 0, -1$ corresponde a un universo cerrado, plano o abierto, respectivamente.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right] \quad (1.14)$$

A partir del elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) se puede conocer de manera explícita la forma del tensor métrico debido a la relación (1.1). Entonces, la métrica toma la siguiente forma, donde el orden de los renglones corresponde a las siguientes coordenadas (t, r, θ, ϕ)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Con (1.15), se pueden determinar las ecuaciones de campo de Einstein para esta geometría, las cuales están dadas por (1.7). Notemos que por la forma del tensor métrico de FRW, los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2(\theta) & \Gamma_{0k}^j &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \delta_k^j & \Gamma_{jk}^0 &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} g_{jk} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2) & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1 - kr^2} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta) \cos(\theta) & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot(\theta) \end{aligned} \quad (1.16)$$

La demostración de las expresiones anteriores se encuentra dentro del Apéndice A. Antes de continuar y calcular las componentes del tensor de curvatura, podemos fijarnos que la parte que contiene la física dentro de las ecuaciones de campo de Einstein es la relacionada al tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, del sistema en cuestión. En cosmología es usual modelar al universo como un fluido perfecto, donde su tensor de energía-momento se escribe como (1.17); u_μ es la cuatro velocidad de un elemento infinitesimal del fluido, ρ la densidad y p la presión.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

Como estamos trabajando con coordenadas comóviles, el tiempo en la métrica FRW representa el tiempo propio de cada galaxia; a escalas del universo se puede modelar como un punto de nuestro fluido. Luego entonces, la 4-velocidad es de la forma $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ y por la forma diagonal de (1.15) se obtiene que se puede escribir el $T_{\mu\nu}$ del fluido como:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2(t)r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Dado que (1.17) es diagonal, el tensor de Einstein también debe serlo. Esto se reduce a decir que sólo nos interesa conocer el valor de $\{R_{00}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, R_{\phi\phi}\}$. El valor de estas componentes es el siguiente, la

demostración se encuentra en el Apéndice A.

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.19)$$

$$R_{rr} = \frac{2\dot{a}^2(t)}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} + \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{1-kr^2} \quad (1.20)$$

$$R_{\theta\theta} = 2r^2\dot{a}^2(t) + 2kr^2 + r^2a(t)\ddot{a}(t) \quad (1.21)$$

$$R_{\phi\phi} = 2r^2\dot{a}^2(t) \sin^2(\theta) + 2kr^2 \sin^2(\theta) + r^2a(t)\ddot{a}(t) \sin^2(\theta) \quad (1.22)$$

A partir de las componentes anteriores del tensor de Ricci, se obtiene el escalar de curvatura, utilizando la ec. (1.5), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R &= R^\mu{}_\mu \\ &= g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} \\ &= R_0^0 + R_r^r + R_\theta^\theta + R_\phi^\phi \\ &= \frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{6k}{a^2(t)} + \frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)} \\ &= \frac{6\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{6\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{6k}{a^2(t)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Haciendo uso de las expresiones anteriores, se calculan las ecuaciones de campo para la métrica FRW. Utilizando (1.7) se obtienen cuatro ecuaciones, de las cuales solo dos son independientes. La primera está dada por

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{R}{2} g_{00} \\ &= \frac{-3\ddot{a}(t)}{a(t)} + 3 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} \right] \\ &= 3 \left[\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} \right] \\ &= 8\pi G T_{00} = 8\pi G \rho \end{aligned} \quad (1.24)$$

Reacomodando la ec. (1.24) se obtiene

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2(t)} \quad (1.25)$$

Para obtener la segunda ecuación, se hace uso de la componente $\{\theta\theta\}$, la cual da

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta} - \frac{R}{2} g_{\theta\theta} \\ &= 2r^2\dot{a}^2(t) + 2kr^2 + r^2a(t)\ddot{a}(t) - 3r^2\dot{a}^2(t) - 3kr^2 - 3r^2a(t)\ddot{a}(t) \\ &= -2r^2a(t)\ddot{a}(t) - r^2\dot{a}^2(t) - kr^2 \\ &= 8\pi G T_{\theta\theta} = 8\pi G p r^2 a^2(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Agrupando términos semejantes y despejando para la segunda derivada del factor de escala en la ecuación

(1.26), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -4\pi Gp - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)}\right) = -4\pi Gp - \frac{4}{3}\pi G\rho \\ &= \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p)\end{aligned}\quad (1.27)$$

Al cociente de la derivada del factor de escala con el mismo, se le conoce como parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{da(t)}{dt} \frac{1}{a(t)} \quad (1.28)$$

Nótese que

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\ &= \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - H^2\end{aligned}\quad (1.29)$$

Tomando esto en cuenta se puede reescribir la ec. (1.26) en la forma:

$$\begin{aligned}-\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{3\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{3\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{k}{a^2(t)} &= 8\pi Gp \\ -2\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) &= 8\pi Gp + \frac{3\dot{a}^2(t)}{a(t)} + \frac{k}{a^2(t)} \\ \dot{H} &= -4\pi Gp - \frac{3}{2}H^2 - \frac{k}{2a^2(t)} \\ \dot{H} &= -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2(t)}\end{aligned}\quad (1.30)$$

A las ecuaciones (1.25) y (1.27) se les conoce como las ecuaciones de Friedmann y son las ecuaciones fundamentales de la cosmología. Podemos obtener una tercera ecuación, la cual no es independiente de las otras dos, para describir el comportamiento del universo. Esta ecuación se obtiene como consecuencia de la conservación de energía-momento relativista, i.e. la divergencia de (1.17) es igual a cero.

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu};_{\nu} &= 0 \\ \partial_{\nu}T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu}T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu}T^{\mu\alpha} &= 0\end{aligned}\quad (1.31)$$

Se puede demostrar que las componentes j de la divergencia de $T^{\mu\nu}$ son todas cero. La única ecuación no trivial es:

$$\begin{aligned}\partial_{\nu}T^{0\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^0T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu}T^{0\alpha} &= \partial_{\nu}T^{0\nu} + \Gamma_{rr}^0T^{rr} + \Gamma_{\theta\theta}^0T^{\theta\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^0T^{\phi\phi} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu}T^{0\alpha} \\ &= \dot{\rho} + \frac{a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2} \frac{1-kr^2}{a^2(t)} p + \frac{a(t)\dot{a}(t)r^2}{r^2a^2(t)} p + \\ &\quad \frac{a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)a^2(t)} p + \frac{3\dot{a}(t)}{a(t)} \rho \\ &= \dot{\rho} + 3p \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + 3\rho \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\end{aligned}\quad (1.32)$$

Entonces se obtiene la ec. (1.33) que se conoce como ecuación de continuidad.

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho + p) = 0 \quad (1.33)$$

Las ecuaciones (1.25), (1.27) y (1.33) constituyen las ecuaciones básicas para entender la evolución del universo. Como se verá en el Capítulo 2, este conjunto de ecuaciones es equivalente al que se obtiene si en las ecuaciones de campo de Einstein se incluye un término de energía oscura.

1.5. Parámetro de densidad

Como se vio en la sección anterior, las ecuaciones que describen la evolución dinámica del universo a partir de la métrica FRW, son (1.25), (1.27) y (1.33). Cabe destacar que la densidad de energía y la presión que aparecen en las ecuaciones anteriores, son la densidad y presión total del fluido i.e. $\rho = \sum_i \rho_i$ y $p = \sum_i p_i$, donde el índice i corresponde a cada componente del sistema (materia, radiación, etc). Como se mencionó anteriormente estas tres ecuaciones no son linealmente independientes y por tanto se puede obtener una en función de las otras dos. A la relación existente entre la densidad y la presión de la componente i se le conoce como ecuación de estado

$$\omega_i = \frac{p_i}{\rho_i} \quad (1.34)$$

En el caso de la materia y la radiación, ω_i es una constante cuyo valor es 0 y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Haciendo uso de la ecuación de continuidad, se determina la evolución de la densidad de energía del universo como función del factor de escala $a(t)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0 \\ \sum_i [\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\rho_i(1 + \omega_i)] &= 0 \\ &\implies \\ \dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\rho_i(1 + \omega_i) &= 0 \\ \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} &= -3(1 + \omega_i)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\ \int_{\rho_i^0}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\rho_i} &= \int_{a^0}^a -3(1 + \omega_i)\frac{da}{a} \\ \ln\left(\frac{\rho_i}{\rho_i^0}\right) &= \ln\left(\left(\frac{a}{a^0}\right)^{-3(1+\omega_i)}\right) \\ \rho_i &= \rho_i^0 \left(\frac{a}{a^0}\right)^{-3(1+\omega_i)} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Para el caso de materia y radiación la ec. (1.35) toma la forma:

$$\rho_M = \rho_M^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \quad (1.36)$$

$$\rho_R = \rho_R^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \quad (1.37)$$

Dado que en (1.14) la constante k representa la curvatura gaussiana de los cortes de nivel a $t = cte$, es importante notar que el valor de esta constante impone una restricción sobre las densidades de energía del universo. Si se define el parámetro de densidad como

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.38)$$

donde ρ_c es la densidad crítica, la cual es por definición

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.39)$$

Se puede reescribir la ec. (1.25) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2(t)} \\ &= \frac{H^2}{H^2} \left(\frac{8\pi G}{3} \right) \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2(t)} \\ &= \frac{H^2}{\rho_c} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2(t)} \\ &= H^2 \sum_i \Omega_i - \frac{k}{a^2(t)} \\ \sum_i \Omega_i - 1 &= \frac{k}{a^2 H^2} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Como $a^2(t) > 0$ y $H^2 > 0$, el valor de la curvatura impone una restricción sobre la suma de los parámetros de densidad de las componentes del fluido. Se deduce que para los valores de $k = \{1, 0, -1\}$ que corresponden a universos cerrados, planos y abiertos respectivamente, se obtienen las siguientes condiciones.

Si $k = 1 \Rightarrow$

$$\sum_i \Omega_i > 1 \quad (1.41)$$

Si $k = 0 \Rightarrow$

$$\sum_i \Omega_i = 1 \quad (1.42)$$

Si $k = -1 \Rightarrow$

$$\sum_i \Omega_i < 1 \quad (1.43)$$

Las observaciones astronómicas realizadas por la sonda *Planck* (véase [18]), indican que el valor de la curvatura es aproximadamente cero, por lo que en el modelo cosmológico estándar se tiene la restricción (1.40). A partir de este momento se va a considerar un universo plano y a menos que se indique explícitamente lo contrario se trabajara con un valor de $k = 0$.

Para el caso de un universo plano podemos determinar de manera explícita la dependencia del factor de escala como función del tiempo en la época en la que dominaba el fluido i . Para eso expresamos a ρ_i como lo indica (1.35). Entonces (1.25) toma la forma

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_i \\ &= \frac{8\pi G}{3} \rho_i^0 \left(\frac{a(t)}{a^0} \right)^{-3(1+\omega_i)} \\ &\Rightarrow \\ \frac{a^{\frac{3}{2}(1+\omega_i)}}{a} da &= \left(\frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_i^0}{(a^0)^{-3(1+\omega_i)}} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ a^{\frac{3}{2}(1+\omega_i)} &\propto t \end{aligned} \quad (1.44)$$

Para un universo dominado por materia

$$a \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (1.45)$$

Y para un universo dominado por radiación

$$a \propto t^{\frac{1}{2}} \quad (1.46)$$

Sin embargo, el tiempo no es un buen parámetro en cosmología ya que solo se pueden medir intervalos de tiempo.

1.6. Corrimiento al Rojo

Tomando en cuenta un universo homogéneo e isotrópico, descrito por la métrica (1.14), la evolución temporal del sistema es descrita mediante el factor de escala. Sin embargo, no se puede medir de manera directa $a(t)$. Es común utilizar el corrimiento al rojo, z , de los objetos estelares para describir la evolución del universo. Esto sucede porque la longitud de onda de un fotón, medida por un observador, difiere de la que originalmente tenía al momento de ser emitido por el objeto estelar, lo cual es una consecuencia de la expansión del universo. Como la longitud de onda crece de manera proporcional al factor de escala, se logra relacionar z con $a(t)$ mediante

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda(t)} = \frac{a_0}{a(t)} \quad (1.47)$$

donde λ_0 y a_0 son la longitud de onda y el factor de escala evaluados al día de hoy.

Para demostrar la relación existente entre el factor de escala y z , partimos del elemento de línea (1.14). Sabemos que la luz viaja por geodésicas nulas, es decir, $ds^2 = 0$. Ahora consideremos un objeto que emite un fotón y que se encuentra a una distancia r de un observador situado en el origen del sistema de referencia comóvil, $r = 0$. Supongamos que la cresta de la onda viajera ocurre a un tiempo t_1 y a una distancia r del observador, y la siguiente cresta a un tiempo $t_1 + \Delta t_1$. El observador que se encuentra en el origen detecta la primera cresta en un tiempo t_0 y la segunda en un tiempo $t_0 + \Delta t_0$. ¿Qué longitud de onda del fotón en cuestión mide el observador?

Para responder la pregunta anterior, se hace uso del hecho de que un fotón viaja por una geodésica nula. Utilizando (1.14) y escogiendo un sistema donde el elemento de ángulo sólido sea exactamente cero, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \\ &\Rightarrow \\ \frac{dt}{a(t)} &= \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Donde, el signo $+$ corresponde a luz emitida por la fuente y el signo $-$ a luz recibida. Teniendo en cuenta que r , es una coordenada comóvil, y resolviendo la ecuación diferencial asociada a los dos intervalos de tiempo correspondientes, se tienen las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \pm \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ &\text{y} \\ \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \pm \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Nótese que podemos expresar la segunda integral de la siguiente manera

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.50)$$

Considerando que el factor de escala no cambia de manera significativa durante los intervalos $[t_0, t_0 + \Delta t_0]$ y $[t_1, t_1 + \Delta t_1]$, se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{a(t)} \\ \Rightarrow \\ \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} dt &= \frac{1}{a(t_1)} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt \\ \Rightarrow \\ \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} &= \frac{\Delta t_1}{a(t_1)} \\ \Rightarrow \\ \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} &= \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \end{aligned} \quad (1.51)$$

El intervalo de tiempo entre dos crestas consecutivas, es el inverso de la frecuencia de la onda, ν , la cual está relacionado con la longitud de onda mediante la ec. $c = \lambda\nu$, donde c es la velocidad de dicha onda, entonces

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (1.52)$$

Definiendo el parámetro de corrimiento al rojo como la razón de la longitud de onda observada con respecto a la longitud de onda emitida menos 1, se recupera la ec. (1.47).

1.7. Distancia lumínica

Se define la distancia lumínica como la distancia que obedece la siguiente relación, donde dL^2 es la distancia lumínica al cuadrado, L la luminosidad absoluta del emisor y F_{obs} el flujo observado.

$$dL^2 = \frac{L}{4\pi F_{obs}} \quad (1.53)$$

Para poder derivar una ecuación apropiada para los parámetros cosmológicos que se van a utilizar, es importante que quede de manera explícita la definición de flujo observado y luminosidad. El flujo se define como la energía que pasa por unidad de área. La luminosidad, como la potencia emitida por la fuente para toda longitud de onda. Donde por potencia se entiende la energía que pasa a través de una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área. Dado que se está trabajando bajo un contexto cosmológico, se tiene que considerar que la potencia total recibida, integrada sobre un elemento de ángulo sólido, no es la misma que la potencia total emitida, debido a la evolución del factor de escala. A continuación se deriva una expresión de la distancia lumínica en términos de los parámetros cosmológicos Ω_M^0 (1.38) y ω (1.34). Si denotamos a la luminosidad absoluta en un intervalo de tiempo Δt_1 como L_1 y a la detectada por el

observador en un intervalo Δt_0 como L_0 se tiene que

$$L_1 = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \quad (1.54)$$

$$L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \quad (1.55)$$

Dado que la energía de un fotón es directamente proporcional a su frecuencia, $E = h\nu$, podemos hacer uso de (1.52) de tal modo que el cociente de las luminosidades toma la forma

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta \nu_1}{\Delta \nu_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = (1+z)^2 \quad (1.56)$$

Por otro lado, es necesario calcular el flujo de energía que pasa a través de la superficie de una esfera dada por (1.14). Resulta conveniente escribir la métrica de FRW de la siguiente manera

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)] \quad (1.57)$$

donde la función $f_k(\chi)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} f_k(\chi) &= \sin(\chi) & k &= 1 \\ f_k(\chi) &= \chi & k &= 0 \\ f_k(\chi) &= \sinh(\chi) & k &= -1 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Hay que recordar que el fotón viaja por una trayectoria nula y tomando un sistema donde no existe cambio en las coordenadas angulares, lo que permite determinar el valor de χ como función de z . Para ello se coloca a la fuente luminosa en el origen y al observador en cuestión a una distancia χ_0 , de modo que

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \int_0^{\chi_0} d\chi \\ &= \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_a^{a_0} \frac{da}{a(t)^2 H(a)} \\ &= - \int_z^0 \frac{dz}{H(z)} \end{aligned} \quad (1.59)$$

En los últimos dos pasos se utilizó la definición de (1.28) y se tomó la diferencial de (1.47). Luego entonces se tiene que

$$\chi = \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (1.60)$$

Como el flujo es la energía que pasa por unidad de área, es necesario calcular el área correspondiente a una esfera de radio χ_0 al tiempo $t = t_0$. Para lo cual se hace uso del elemento de línea (1.14), de forma que el área esté dada por

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a_0^2 f_k^2(\chi) \sin(\theta) d\theta d\phi = (a_0^2 f_k^2(\chi)) 4\pi \quad (1.61)$$

Sustituyendo en (1.53) las ecuaciones (1.56) y (1.61) se obtiene que

$$dL = a_0 f_k(\chi) (1+z) \quad (1.62)$$

Como se va a trabajar en un universo plano, la función f_k es igual a la distancia χ_0 y haciendo uso de la ecuación (1.60) se tiene

$$dL = (1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (1.63)$$

Finalmente, se puede expresar al parámetro de Hubble como función del corrimiento al rojo y de los parámetros de densidad de los respectivos fluidos al día de hoy. Para ello se recurre a la definición de la densidad crítica, ec. (1.39) evaluada al día de hoy, $t = 0$. Utilizando la ec. (1.25) para un universo plano y recordando que la densidad en dicha ecuación es la densidad total, se escribe a H^2 como

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} \\ &= \frac{8\pi G}{3} * (\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) \\ &= \frac{H_0^2}{H_0^2} \frac{8\pi G}{3} * (\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) \\ &= H_0^2 * \left(\frac{\rho_M}{\rho_c^0} + \frac{\rho_R}{\rho_c^0} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c^0} \right) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Notando que la ecuación de continuidad para cada fluido en términos de z toma la forma

$$d\rho_i - 3(1 + \omega_i(z))\rho_i \frac{dz}{(1+z)} = 0 \quad (1.65)$$

donde, ω_i es la ecuación de estado que relaciona la presión del fluido i con la densidad del mismo. Para el caso de materia $\omega_M = 0$, mientras que para el caso de la radiación $\omega_R = \frac{1}{3}$. Resolviendo la ecuación diferencial asociada a cada fluido se tiene que

$$\rho_M = \rho_M^0 (1+z)^3 \quad (1.66)$$

$$\rho_R = \rho_R^0 (1+z)^4 \quad (1.67)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3(1 + \omega_\Lambda(z))}{1+z} dz\right) \quad (1.68)$$

Sustituyendo (1.66), (1.67) y (1.68) en la ec. (1.64) se tiene

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 * \left(\frac{\rho_M}{\rho_c^0} + \frac{\rho_R}{\rho_c^0} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c^0} \right) \\ &= H_0^2 * \left(\frac{\rho_M^0}{\rho_c^0} (1+z)^3 + \frac{\rho_R^0}{\rho_c^0} (1+z)^4 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_c^0} \exp\left(\int_0^z \frac{3(1 + \omega_\Lambda(z))}{1+z} dz\right) \right) \\ &= H_0^2 * \left(\Omega_M^0 (1+z)^3 + \Omega_R^0 (1+z)^4 + \right. \\ &\quad \left. \Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3(1 + \omega_\Lambda(z))}{1+z} dz\right) \right) \end{aligned} \quad (1.69)$$

Insertando la expresión que se obtuvo para el parámetro de Hubble en la ecuación de la distancia lumínica se llega a

$$dL = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0 (1+z)^3 + \Omega_R^0 (1+z)^4 + \Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3(1 + \omega_\Lambda(z))}{1+z} dz\right)}} \quad (1.70)$$

1.8. Magnitud aparente y su relación con la cosmología

La magnitud aparente de un objeto estelar, se refiere al brillo del mismo medido por un observador que se encuentra en la Tierra. Dado que el brillo que se mida depende de la distancia recorrida por los fotones que emite, existe una relación entre la magnitud aparente y la distancia lumínica, la cual está dada por

$$m = 5 \log_{10}\left(\frac{dL}{Mpc}\right) + 25 + M \quad (1.71)$$

donde m representa la magnitud aparente y M la magnitud absoluta o intrínseca del objeto celeste. Como se mostró previamente, la distancia lumínica depende de las componentes de materia y energía del universo. Si se sustituye el valor de dL que se obtuvo en la ec. (1.70), se puede escribir la magnitud aparente de la siguiente forma

$$m = 5 \log_{10}\left(10^5 \frac{1+z}{H_0} \frac{1}{Mpc} * \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_R^0(1+z)^4 + \Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3(1+\omega_\Lambda(z))}{1+z} dz\right)}}\right) + M \quad (1.72)$$

La ecuación (1.72) indica que si se conoce el valor de los parámetros de densidad, se puede calcular la distancia lumínica y por tanto determinar el valor de la magnitud aparente. Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, se puede utilizar la magnitud aparente para distintos valores de los parámetros de densidad y comparar con las observaciones astronómicas realizadas para determinar el valor óptimo de dichos parámetros.

1.9. Parámetro de desaceleración

Desde el descubrimiento de la expansión del universo realizado por Hubble, se ha tratado de medir la desaceleración del universo causada por la interacción gravitacional entre la materia. La seguridad que se tenía respecto a este asunto se ve ejemplificada en el nombre del parámetro, ya que se esperaba que después del Big Bang y la época de inflación, el universo se fuera frenando debido a la naturaleza atractiva de la gravedad. Sin embargo después del descubrimiento de Perlmutter *et al.*, en 1998, cambió el paradigma de la época, estableciendo que el universo no solo se expande sino que lo hace de manera acelerada. Dado que la dinámica del universo de FRW se rige mediante primeras y segundas derivadas del factor de escala, resulta interesante realizar una expansión en serie de Taylor hasta segundo orden del mismo.

$$\begin{aligned} a(t) &\approx a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \ddot{a}(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + \mathcal{O}(t^3) \\ &\approx a(t_0)\left(1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}\frac{(t - t_0)^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)\right) \\ &\approx a(t_0)\left(1 + H_0(t - t_0) + \left(\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{a^2(t_0)}\right)\frac{\dot{a}^2(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}\frac{(t - t_0)^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)\right) \\ &\approx a(t_0)\left(1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2\frac{(t - t_0)^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)\right) \end{aligned} \quad (1.73)$$

De la expansión anterior se observa que el valor de la segunda derivada del factor de escala, valuada para un tiempo particular, está dada por dos parámetros. El primero de ellos resulta ser el parámetro de Hubble al

cuadrado, mientras que al segundo, q_0 , se le conoce como parámetro de desaceleración evaluado al día de hoy. Motivados por la expansión anterior, se define el parámetro de desaceleración del universo de la siguiente manera:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (1.74)$$

Notamos de la ec. (1.74), que para valores de negativos de $q(t)$ se tiene una aceleración del universo positiva; para valores positivos una aceleración negativa (desaceleración) y para valores iguales a cero una aceleración nula. Dado que mediante las observaciones cosmológicas no es posible medir de manera directa el factor de escala, es conveniente expresar la ec. (1.74) en términos de parámetros que resulten fáciles de medir. Para eso obsérvese lo siguiente; si se toma la derivada con respecto al tiempo comóvil de la ec. (1.28), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - H^2 \\ &= \left(\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)}\right) \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - H^2 \\ &= -H^2(1 + q(t)) \end{aligned} \quad (1.75)$$

Se concluye que para un universo plano, $k=0$, se sigue la igualdad:

$$\begin{aligned} -(1 + q(t)) &= \frac{\dot{H}}{H^2} \\ &= -\frac{4\pi G(\rho + p)}{\frac{8\pi G}{3}\rho} \\ &= -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (1.76)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.66) a (1.68), y multiplicando y dividiendo por la densidad crítica, se puede escribir el parámetro de desaceleración

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Omega_R^0(1+z)^4}{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_R^0(1+z)^4 + \Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3*(1+\omega(z))}{1+z} dz\right)} + \\ &\quad \frac{3}{2} \frac{\omega(z)\Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3*(1+\omega(z))}{1+z} dz\right)}{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_R^0(1+z)^4 + \Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3*(1+\omega(z))}{1+z} dz\right)} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Que en el caso en el que se desprecie la densidad de radiación se reduce a la ecuación:

$$q(z) = \frac{3}{2} \frac{\omega(z)\Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3*(1+\omega(z))}{1+z} dz\right)}{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0 \exp\left(\int_0^z \frac{3*(1+\omega(z))}{1+z} dz\right)} + \frac{1}{2} \quad (1.78)$$

Capítulo 2

Energía oscura

2.1. Introducción

Durante la década de 1990 dos grupos de investigación, que se encontraban analizando el diagrama de Hubble de un conjunto de supernovas tipo Ia, llegaron a la conclusión que el universo se expande de manera acelerada ([17]) ([21]). Tanto el *Supernovae Legacy Project* como el *High-z SN Search* encontraron que la magnitud aparente de las supernovas tipo Ia con las que trabajaban, eran aproximadamente un 25 % menos intensas de lo que esperaban si suponían un universo en desaceleración. Repitiendo su análisis considerando un universo con materia y constante cosmológica, obtuvieron evidencia de un valor de $\Omega_\Lambda \geq 0$, dentro de un intervalo de confianza del 99 %, rompiendo el paradigma de un universo con aceleración negativa. Una forma de explicar esta expansión acelerada es considerar que el universo está compuesto de materia, radiación y un fluido con presión negativa que explicaría la desaceleración, conocido hoy en día como energía oscura.

La idea de incluir un término como la constante cosmológica en las ecuaciones del campo gravitacional fue explorada por Einstein [9]. Su objetivo era obtener un universo estático y finito. Suponiendo una curvatura del espacio positiva, encontraba que la densidad energética de la constante cosmológica tenía que ser: $\rho_\Lambda = \frac{\rho_M}{2}$. Sin embargo, en la década de 1920, Friedmann y Lemaître demostraron que las soluciones para un universo con materia y constante cosmológica, correspondían a universos en expansión o implosión. Más aún Eddington probó que la solución de Einstein era una solución inestable. Con el descubrimiento de Hubble en 1929 de la expansión del universo gracias al corrimiento al rojo de las galaxias, Einstein declaró que la introducción de la constante cosmológica había sido su mayor error.

Considerando un universo espacialmente plano y asumiendo que no existe energía oscura, se observa directamente de la ec (1.27), que la derivada temporal del parámetro de Hubble resulta ser negativa, ya que la densidad de energía de radiación y de materia son positivas, lo cual contradice los resultados obtenidos mediante las observaciones realizadas por las pruebas de supernovas. Si en cambio en la ec (1.7) se agrega el término $\Lambda g_{\mu\nu}$, con Λ una constante, la ec (1.27) para un universo plano toma la siguiente forma, donde para un valor de $\Lambda > 4\pi G(\rho + 3p)$ se obtiene una expansión acelerada.

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.1)$$

Una primera interpretación de incluir un término constante en las ecuaciones de campo de Einstein es considerarlo como un fluido perfecto con presión negativa. La motivación es la siguiente. Dado que la derivada

covariante de la métrica es igual a cero, podemos escribir las ecuaciones de campo de Einstein como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \\ &= 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Recordando que en el sistema localmente inercial, el tensor métrico es el de Minkowski, el segundo factor a la derecha de la ecuación anterior toma la forma de un fluido con densidad de energía y presión dadas por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.3)$$

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.4)$$

Resulta entonces, matemáticamente equivalente a tomar una constante cosmológica con un valor de la ecuación de estado dado por $\omega_\Lambda = -1$. Considerando un universo constituido por materia y energía oscura, donde la energía oscura puede ser modelada como un fluido con ecuación de estado $\omega_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda}$, se puede utilizar la segunda ecuación de Friedmann, para determinar la condición que debe cumplir la ecuación de estado para generar una expansión acelerada. De modo que por la ec (1.27) se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{a}(t) &> 0 \\ &\Rightarrow \\ 0 &> \rho + 3p = \rho_M + \rho_\Lambda + 3p_M + 3p_\Lambda \\ &= \rho_M + \rho_\Lambda + 3\omega_\Lambda \rho_\Lambda \\ &\Rightarrow \\ 0 &> \Omega_M + \Omega_\Lambda + 3\omega_\Lambda \Omega_\Lambda = 1 + 3\omega_\Lambda \Omega_\Lambda \\ &\Rightarrow \\ \omega_\Lambda &< \frac{-1}{3\Omega_\Lambda} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Según los datos reportados en 2015 por la sonda Planck, ([19]), la cantidad de energía oscura al día de hoy tiene un valor de $\Omega_\Lambda^0 = 0.685$, por lo que para obtener un universo acelerado la ecuación de estado de energía oscura tendría que cumplir: $\omega_\Lambda < -0.486$. Nótese que para el caso de una constante cosmológica se cumple la condición anterior.

Se suele interpretar a la constante cosmológica como la densidad de energía del vacío cuántico; sin embargo, el valor esperado teóricamente, difiere por $\approx 10^{121}$ órdenes de magnitud del determinado por las observaciones. Resulta natural preguntarse, si la expansión acelerada del universo, tenga su origen en algo distinto a la constante cosmológica. Una alternativa, es considerar una ecuación de estado dinámica, es decir, que no permanezca constante a lo largo del tiempo, como es el caso de una teoría inflacionaria ([7]). Para ello se propone modelar la energía oscura como un campo escalar, siendo los más populares son los modelos de quintaesencia, kesencia y campos fantasmas.

2.2. Quintaesencia y fantasmas

El modelo de quintaesencia propone que la expansión acelerada del universo es generada por un campo escalar. A continuación se escribe la acción lagrangiana de este sistema.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.6)$$

En la ec (2.6), el campo ϕ se encuentra mínimamente acoplado con la materia [7], es decir, sólo interactúa de manera gravitacional, y $\sqrt{-g}$ es la raíz del determinante del tensor métrico. Además, se pide que el campo sea espacialmente homogéneo, $\phi(\vec{x}, t) = \phi(t)$. A partir de la acción es posible determinar las ecuaciones de movimiento y la forma del tensor de energía-momento ([7]). El $T_{\mu\nu}$ se obtiene realizando una variación del lagrangiano respecto al tensor métrico.

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\alpha\beta}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi}{2} - V(\phi) \right) + \frac{\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi}{2} \sqrt{-g} \right) \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right) - \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tomando en cuenta la expresión para $T_{\alpha\beta}$ para el caso particular de la métrica FRW, se pueden calcular la densidad de energía y la presión generada por este campo escalar. Por lo anterior cabe recordar que $\rho_\phi = -T_0^0$ y $p = T_i^i$. Se tiene entonces:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (2.8)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (2.9)$$

Para determinar la ecuación que predice la dinámica del campo escalar es necesario tomar la variación de la acción respecto al campo [7]. Sin embargo, lo precedente es equivalente a igualar la ecuación geodésica resultante a la derivada del potencial con respecto al campo. De manera explícita esto es

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta\phi} &= 0 \\ \Rightarrow \\ \nabla_\mu(\partial^\mu\phi) - \frac{dV}{d\phi} &= 0 \\ \Rightarrow \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde H es el parámetro de Hubble que en este caso sirve como un término de amortiguamiento en la ec (2.10). Utilizando las ecuaciones (2.8) y (2.9), se puede escribir la segunda ecuación de Friedmann, (1.27), en términos de la derivada temporal del campo escalar y el potencial de la siguiente manera:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-8\pi G}{3} (\dot{\phi}^2 - V(\phi)) \quad (2.11)$$

A partir de la ecuación anterior resulta evidente que se tiene un universo acelerado cuando el término cinético es menor al potencial, $\dot{\phi}^2/2 < V(\phi)$. Lo anterior sugiere que se imponga una condición de rodamiento lento sobre el campo para tiempos muy cercanos al día de hoy, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, de modo que en el límite la ec (1.34) se reduzca al caso de una constante cosmológica. No obstante, a pesar de que el modelo de quintaesencia parezca un candidato atractivo para dar una descripción dinámica adecuada de la energía oscura, cuenta con ciertos problemas, como se menciona en [9]. Dado que el modelo de quintaesencia está acoplado con la materia ordinaria tiene como consecuencia que existan nuevas fuerzas de largo alcance y una dependencia

temporal en las constantes universales. Más aún, si se sustituye (2.8) y (2.9) en la ec (1.34) se obtiene la siguiente expresión, donde se observa que la ecuación de estado tiene dos límites bien definidos, siendo $x = \frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)}$.

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + V(\phi)} = \frac{x - 1}{x + 1} \quad (2.12)$$

El límite inferior ocurre cuando se cumple la condición de rodamiento lento y corresponde a un valor de $\omega_\phi = -1$. El límite superior ocurre cuando el valor del potencial resulta ser despreciable en comparación con la energía cinética, dando un valor de $\omega_\phi = 1$. Por lo tanto, esta solución no puede explicar valores de la ecuación de estado al día de hoy menores a -1 , que de acuerdo con las observaciones se encuentra dentro del intervalo de confianza posible [1]. De (2.12) se obtiene que para tener valores menores a -1 , es necesario que el valor de la variable x sea negativo, puesto que el potencial es definido positivo. De modo que $\omega_\Lambda < -1$ requiere valores negativos de la energía cinética.

Cuando la ecuación de estado se encuentra en una región donde su valor pueda ser menor a -1 , se dice que el campo responsable de la aceleración es un campo fantasma. Existen diversas explicaciones para ese tipo de energía oscura, pero la más sencilla es que es la consecuencia de un campo escalar donde el término cinético es negativo. Aunque para ciertos tipos de potenciales, los campos fantasmas resuelvan problemas tales como el Big Rip [7], tienen también muchos problemas. El principal problema que presentan, es que la energía cinética no tiene una cota inferior, dando como resultado un vacío inestable ante la producción de campos fantasmas y normales. Puesto que los fantasmas viven en una región donde $-1 < x < 0$, se tiene que satisfacer la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 \\ \Rightarrow \\ -1 < \frac{\dot{\phi}^2}{2V(\phi)} < 0 \\ \Rightarrow \\ V(\phi) > -\frac{\dot{\phi}^2}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Debido a que no existen fundamentos teóricos suficientemente fuertes que indiquen que la expansión acelerada del universo se deba a una constante cosmológica o al efecto de un campo escalar, se ha popularizado la alternativa de parametrizar la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo o el factor de escala para dar una descripción fenomenológica que empate con las observaciones. En el siguiente capítulo se discutirá cómo parametrizando la ecuación de estado se puede restringir el valor de los parámetros cosmológicos haciendo uso de los datos observacionales [18] [11].

Como se mencionó anteriormente, dado que la derivada covariante de la métrica es igual a cero, se puede incluir un término constante multiplicado por la métrica en las ecuaciones de Einstein sin que se viole la conservación de energía-momento, $T^{\mu\nu};_{\mu} = 0$. Al tomar esto en cuenta las ecuaciones FRW toman la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.15)$$

Tomando el cambio de variable $\tilde{\rho} = \rho + \rho_\Lambda$ y $\tilde{p} = p + p_\Lambda$, con ρ_Λ y p_Λ dadas por (2.3) y (2.4), el conjunto de ecuaciones anteriores se reducen a (1.25) y (1.27). Como consecuencia se preserva la estructura de la ecuación

de continuidad. Esta solución es explícita para el caso de una constante cosmológica, pero motiva a proponer que el universo se encuentra compuesto de otra componente distinta a la radiación y a la materia, y cuya ecuación de estado tiene que cumplir la restricción $\omega < -\frac{1}{3\Omega_\Lambda}$ para modelar un universo acelerado.

2.3. Supernovas tipo Ia

Las supernovas (SNe) son estrellas que explotan y que se caracterizan por un rápido incremento en su brillo hasta alcanzar un máximo de intensidad en un período de pocas semanas, seguido de una lenta disminución de la misma en un rango de varios meses. Durante la década de 1940, Minkowski notó que existen al menos dos tipos distintos de SNe: las que carecen de hidrógeno en su espectro de emisión y aquellas que sí cuentan con él, siendo las primeras el tipo I y las segundas el tipo II dentro de su clasificación. Con el paso del tiempo, la calidad de los instrumentos de medición requeridos para las observaciones fue mejorando y permitió subdividir a las SNe I en tres tipos: Ia, que presentan una gran absorción de Si_{II} , Ib que carecen de Si_{II} , pero presentan gran abundancia de He_{I} y las Ic que no cuentan ni con Si_{II} ni con He_{I} . Mediante el análisis espectral de las explosiones, se puede identificar el mecanismo de origen de las SNe. Las tipo Ia ocurren debido a explosiones termonucleares de estrellas de poca masa, mientras que el resto de las supernovas se forman debido al colapso gravitacional de estrellas masivas. Las SNe Ia cuentan con una gran abundancia de elementos pesados, en particular de ^{56}Ni , que potencia la curva de luz de la supernova por un periodo de varios meses debido a su decaimiento radioactivo, donde una curva de luz es una gráfica de la intensidad de la luz de un objeto celeste como función del tiempo. Si no estuviera presente el decaimiento radioactivo durante la explosión, la expansión adiabática enfriaría el proceso en poco tiempo [6].

La formación de la supernova depende de dos factores: el mecanismo de la explosión y de la estructura de la estrella que va a explotar. La energía que se libera en la explosión de la estrella es aproximadamente de 10^{46} J, que es comparable con la energía liberada por un objeto con una masa solar y un radio solar que colapsa a un radio de una estrella de neutrones. Otro fenómeno astronómico capaz de producir una energía similar, es la quema de aproximadamente una masa solar en elementos pesados como el hierro, ya que el amarre nuclear es del orden de 10^{42} J. Se tienen entonces dos mecanismos que producen intensidades lumínicas parecidas.

Aunque el consenso general de la formación de las SNe Ia es el de las explosiones termonucleares, no existe una teoría definitiva que explique qué es lo que lleva a la estrella a esa explosión particular, ni cómo describir el mecanismo de explosión. Un posible escenario de formación es el de un sistema binario atado, compuesto por una enana blanca de carbón-oxígeno y otro acompañante estelar [6]. Cuando la enana blanca empieza a robar masa de su acompañante, es posible que se alcance la masa de Chandrasekhar, dando como resultado que la presión de degeneración electrónica no sea capaz de contrarrestar los efectos gravitacionales y entonces la estrella colapse. Si la razón de crecimiento de masa es demasiado grande, se comienza a producir la combustión del hidrógeno, dando lugar a la explosión pero contradiciendo el hecho de que las SNe Ia carecen de rastros de hidrógeno en su espectro.

Un argumento que favorece el escenario de una enana blanca es que históricamente no se han registrado SNe Ia debido a estrellas de neutrones. La suposición de pocas decenas de masas solares de ^{56}Ni ajusta de manera adecuada la curva de luz y el espectro observado. Por otra parte, los posibles distintos escenarios de formación no son fácilmente distinguibles ya que producen pequeñas diferencias en las cantidades observadas. Se ha propuesto realizar observaciones en un rango de longitudes de onda mucho más amplio y para épocas tempranas. Se cree entonces que examinando la curva de luz temprana se podrá obtener más información del objeto progenitor y de la física de la explosión [6].

Otro posible escenario de ignición es que se forme una capa de helio por encima de la enana blanca, esta podría entonces quemarse y producir un frente de ignición hacia la enana blanca. La compresión y el calentamiento generado durante el colapso lleva a la incineración de la estrella, destruyendo así el sistema progenitor.

Existen otros modelos en los cuales el objeto acompañante es otro objeto compacto, dígame enana blanca o estrella de neutrones. Después de unirse se forma otro objeto que rebasa la masa de Chandrasekhar y por ende colapsa. Sin embargo, estos modelos presentan problemas para reproducir la homogeneidad observada de la luminosidad en el máximo, ya que las masas de los progenitores puede variar de manera significativa y por consiguiente las condiciones de combustión.

Las SNe Ia muestran una increíble homogeneidad en sus curvas de luz, convirtiéndolas entonces en excelentes reglas para medir distancias astronómicas, al ser utilizadas como candelas estándar [10]. Se ha encontrado que la magnitud absoluta de las SNe Ia, está relacionada con el ancho de la curva de luz. Esto se logró demostrar a principios de los años 90 con la relación de Phillips, la cual es una relación lineal entre el parámetro de declive, Δm_{15} y la magnitud absoluta; donde Δm_{15} es la diferencia entre el máximo de luminosidad y el valor 15 días después de haberlo alcanzado. Haciendo uso de la correlación observada entre la forma de la curva de luz y la luminosidad, se ha podido incrementar la precisión en la estimación de distancias derivadas de las SNe Ia, dando lugar a que se utilicen como candelas estándar para la estimación de los parámetros cosmológicos.

La curva de luz de una supernova tipo Ia está determinada por tres factores: el aumento de energía debido a los decaimientos radioactivos, la conversión adiabática de la energía interna en energía cinética de expansión y el escape de energía interna en la explosión. La mayor fuente de energía proviene de los rayos γ generados durante el proceso de captura de electrones de elementos medianamente pesados como son el ^{56}Ni y ^{56}Co y de los positrones producidos en el 19% de los procesos de decaimiento del ^{56}Co . El pico de la luminosidad y la razón de calentamiento del gas se encuentran determinados por la abundancia de ^{56}Ni . A medida que más ^{56}Ni es sintetizado, se incrementa la temperatura y se hace menos eficiente el enfriamiento, dando como resultado una curva de luz más ancha y luminosa.

2.4. Evidencias observacionales

2.4.1. Pruebas de Supernovas Tipo Ia

Desde que Hubble descubrió que el universo se encuentra en expansión, diversos grupos de astrónomos y físicos se dedicaron a idear formas para medir el factor de desaceleración. Su prejuicio de un universo en desaceleración viene del hecho de que la gravedad es una fuerza puramente atractiva. Para eso es necesario determinar el valor de los parámetros cosmológicos como lo son la cantidad de materia y la constante de Hubble al día de hoy. En 1998 Perlmutter *etal* y el grupo dirigido por Riess, [21] [17], llegaron a la conclusión que vivimos en un universo acelerado mientras estudiaban los diagramas de Hubble de las supernovas tipo Ia.

La prueba de supernovas propuesta por los grupos de investigación antes mencionados consiste en utilizar la relación de magnitud-corrimiento al rojo de un objeto celeste para encontrar el mejor ajuste de los parámetros cosmológicos. Esto se debe a que la magnitud aparente de un objeto es proporcional al logaritmo de la distancia lumínica del mismo y dado que la distancia depende de las proporciones de las componentes de los fluidos que forman el universo, afectan la predicción del valor de la magnitud observada. Sin embargo, era necesario contar con objetos que tuvieran las propiedades de una candela estándar para realizar un análisis estadístico. Es por eso que se trabaja con SNe Ia.

La conclusión que obtuvieron los equipos de trabajo fue que para un universo vacío con curvatura positiva, el valor de la magnitud aparente de la muestra de supernovas dentro del rango $z \approx 0.5$ era del orden de 10% a 20% menos brillante que el valor esperado, mientras que para un universo con $\Omega_M^0 = 0.25$ se tenía una discrepancia de alrededor del 30% a 40%. Al considerar una componente de energía oscura los valores esperados de las magnitudes de las estrellas mejoraron de manera significativa y se determinó que el valor de una constante cosmológica mayor a cero tenía un 95% de probabilidad.

La estimación de los valores centrales de los parámetros se realiza tomando una población madre de n SNe Ia tomando en cuenta el valor de su magnitud aparente, su incertidumbre asociada y su corrimiento al rojo. Comparando estos datos con los valores predichos por la ec (1.72) se determina el mejor ajuste haciendo variar el valor de $\{\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0, H_0\}$. Suponiendo entonces que los valores de las incertidumbres en las mediciones de la magnitud aparente de las SNe Ia son puramente aleatorios y siguen una distribución gaussiana, se obtiene el mejor ajuste al maximizar la probabilidad como función de los parámetros en cuestión. Lo anterior es equivalente a minimizar el valor de (B.3).

El programa *Supernova Legacy Survey*, [11] trabajó en colaboración con el telescopio Hubble y el *Canadian-Hawaiian-French Telescope* para restringir el valor de los parámetros cosmológicos con una muestra de cerca de 400 supernovas, las cuales se encuentran hasta en un rango de $z > 1.5$. Se tomaron en cuenta diversos factores astronómicos que pudieran afectar el valor de la magnitud aparente y que no están relacionados con la evolución del universo; tal es el caso de la extinción debida al polvo interestelar. Considerar estos factores que no están directamente vinculados con las componentes del fluido con el que se modela el universo induce una modificación de la ec (1.72) aumentando el espacio de parámetros. En 2013 después de tres años de recolectar datos, se reportaron valores de $\Omega_M^0 = 0.211 \pm 0.034$ y $\omega_\Lambda = -0.91 \pm 0.16$ con un rango de confianza del 99%. En la fig 2.1 se muestra el diagrama de Hubble para las SNe Ia con distintos valores de la cantidad de materia y de energía oscura al día de hoy.

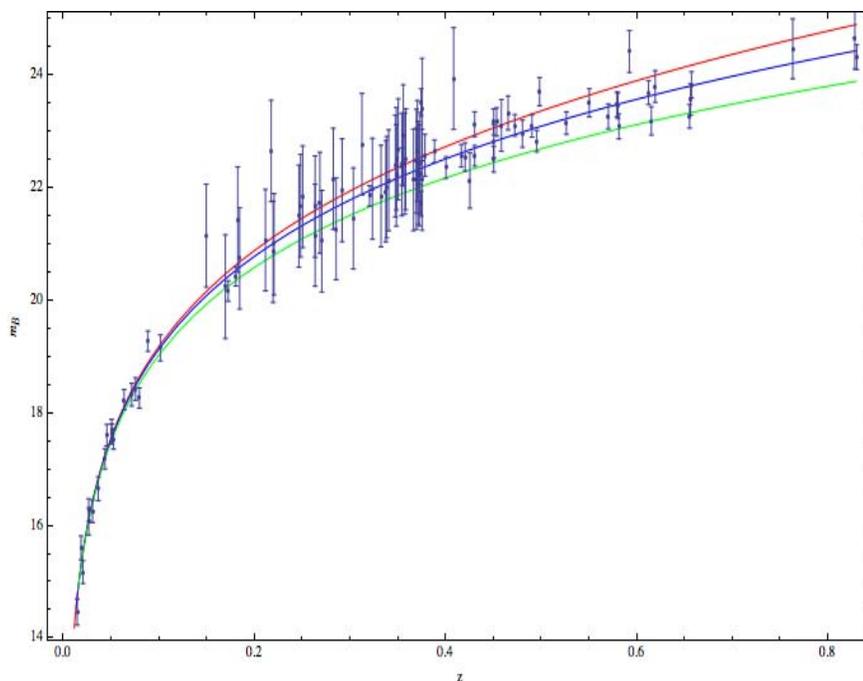


Figura 2.1: Diagrama de Hubble de las supernovas Ia reportadas en [11]. Se tomó un valor de $\omega = -1$ y $b = \frac{M}{H_0} = 0.63 Mpc$ donde M es la magnitud intrínseca de la supernova y H_0 el parámetro de Hubble. La línea roja es un modelo $\Omega_M^0 = 0$, $\Omega_\Lambda^0 = 1$, la línea azul corresponde a $\Omega_M^0 = 0.3$, $\Omega_\Lambda^0 = 0.7$ y la curva verde a $\Omega_M^0 = 1$, $\Omega_\Lambda^0 = 0$.

2.4.2. Radiación cósmica de fondo y formación de estructura a gran escala

En 1965 Penzias y Wilson descubrieron de manera accidental lo que se conoce actualmente como la radiación cósmica de fondo. La radiación cósmica de fondo o CMB (por sus siglas en inglés) es radiación presente en el universo y que se encuentra a una temperatura uniforme de aproximadamente $2.7K$ [22]. La CMB es interpretada como el remanente de la radiación presente en la fase de altas energías del principio del universo y resulta una prueba fuerte a favor de la teoría de un Big Bang Caliente.

Después de su descubrimiento, se empezó a trabajar en buscar y explicar las anisotropías del mapa de radiación de fondo cósmica. Es importante el estudio de estas desviaciones de una temperatura constante, ya que las perturbaciones en la temperatura son proporcionales a perturbaciones de la densidad de energía [12]. Estas fluctuaciones son responsables de la formación de estructuras del orden de galaxias a cúmulos de galaxias, siendo esta una fuerte evidencia de un universo en evolución. En 1977 Smooth *et al.* encontraron evidencias de una anisotropía dipolar la cual es causada por el movimiento del observador respecto al marco de referencia del CMB. Posteriormente en 1992 el *Cosmic Microwave Background Explorer* (COBE), encontró anisotropías superiores al segundo orden, que fueron reportadas en [18].

Los resultados obtenidos por COBE apuntan hacia un espectro de fluctuaciones primordiales casi invariante a escalas angulares mayores a 7° , lo cual resulta congruente por la predicción de la teoría inflacionaria de Linde ([7]). Las anisotropías del CMB son consideradas actualmente como una de las pruebas más confiables para la estimación de parámetros cosmológicos durante el universo temprano. Como se trata de una medición de parámetros utilizando datos de una etapa del universo en el que la radiación dominaba, resulta complicada la medición de manera directa de un valor asociado la cantidad de energía oscura.

Sin embargo, la precisión con la que misiones como Planck, pueden determinar el valor de los parámetros Ω_M^0 , Ω_k^0 y H_0 , imponen fuertes restricciones sobre el modelo estándar cosmológico. Se pueden expandir las fluctuaciones de la temperatura en una serie de armónicos esféricos, donde δT es la perturbación y T la temperatura promedio y $C_l = \langle a_{lm} \rangle$ el espectro de potencias del CMB.

$$\frac{\delta T}{T} = \sum a_{lm} Y_{lm} \quad (2.16)$$

La dinámica de la energía oscura afecta de dos maneras las anisotropías del CMB. Primero en la posición de los picos acústicos de las variaciones en la temperatura, ya que dependen de la distancia angular, la cual a su vez depende de la evolución del universo como función de sus componentes. La segunda forma es mediante el efecto *Integrated Sachs-Wolfe effect*, ISW por sus siglas en inglés. El ISW consiste en un corrimiento al rojo gravitacional en los fotones provenientes de la radiación de fondo cósmica, debido a un potencial gravitacional que varía en el tiempo, provocando anisotropías en el CMB. Este proceso se da entre la última superficie de dispersión y la tierra y ocurre cuando el universo se encuentra dominado por una componente distinta de materia. Los resultados reportados en [18] apuntan a un valor de $\Omega_M^0 = 0.315 \pm 0.017$ y de $\omega_\Lambda = -1.13 \pm 0.13$, lo que resulta congruente con un modelo de constante cosmológica. (Véase la fig 2.2).

2.4.3. Cúmulos de galaxias

Los cúmulos de galaxias constituyen una herramienta importante para restringir los valores de los parámetros cosmológicos dentro del paradigma Λ CDM. Estos, son los objetos más grandes y virializados que se pueden observar en el universo, donde por virializado se entiende un sistema de partículas que interactúan gravitacionalmente y se encuentran en equilibrio. Dentro del contexto del paradigma CDM, la densidad de halos de materia oscura del tamaño de cúmulos de galaxias como función del corrimiento al rojo y la masa de los halos, se pueden estimar con gran precisión mediante simulaciones de N-cuerpos (véase [9] y [15]).

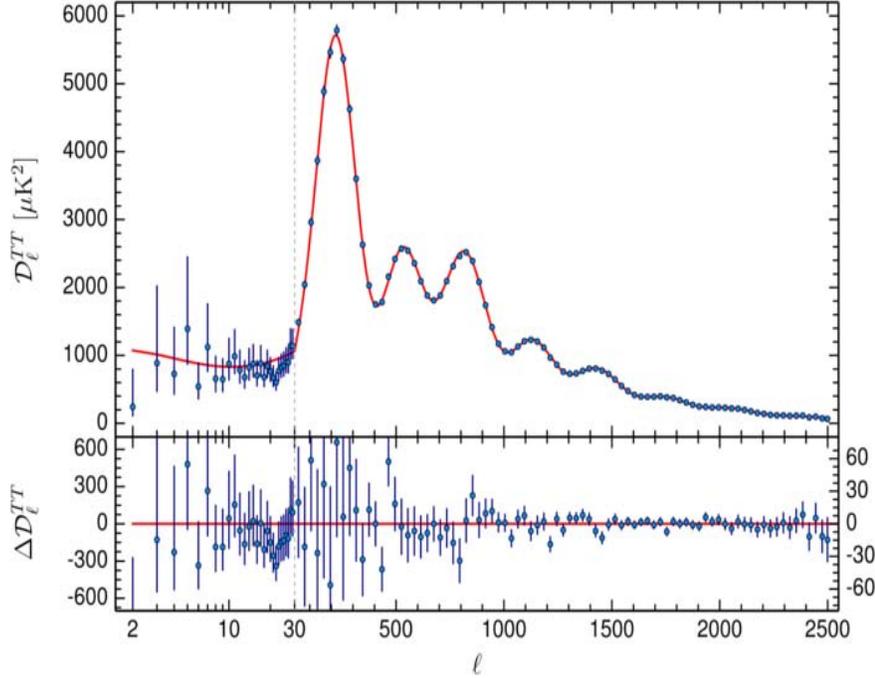


Figura 2.2: Espectro de potencias para la temperatura obtenido por Planck en 2015, [18]. Las barras de incertidumbre corresponden a 1σ de confianza.

Al comparar estas predicciones con las muestras de cúmulos de galaxias para corrimientos al rojo grandes ($z > 1$, es posible imponer restricciones sobre los parámetros cosmológicos.

La distribución, dependiente del corrimiento al rojo, de los cúmulos de galaxias en una búsqueda que selecciona los cúmulos de acuerdo a un cierto observable, \mathcal{O} , está dada por la siguiente expresión

$$\frac{d^2 N(z)}{dz d\Omega} = \frac{r^2(z)}{H(z)} \int_0^\infty f(\mathcal{O}, z) d\mathcal{O} \int_0^\infty p(\mathcal{O}, M, z) \frac{dn(z)}{dM} dM \quad (2.17)$$

En la ec (2.17), $\frac{dn}{dM}$ es la densidad espacial de halos oscuros, $p(\mathcal{O}, M, z)$ es la probabilidad de que un halo con masa M localizado a un corrimiento al rojo z , sea observado como un cúmulo con observable \mathcal{O} . Algunos ejemplos de propiedades que se utilizan en los cúmulos de galaxias son: La luminosidad de la emisión de rayos X, la desviación gravitacional de la luz que produce un cúmulo situado frente a otro o la similitud existente entre la forma y tamaño de los cúmulos, es decir cúmulos más masivos resultan ser versiones escaladas de cúmulos más pequeños.

Obsérvese que la ec (2.17) depende tanto de un factor geométrico como de la evolución del crecimiento de estructura. La geometría viene codificada en $\frac{r^2(z)}{H(z)}$, que resulta ser el elemento de volumen comóvil, el cual depende de los parámetros de densidades y de la parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura (véase [9]). Por otro lado, el crecimiento de estructura, dado por la densidad espacial de los halos, depende a su vez de la evolución de las perturbaciones a la homogeneidad ([14]). Se puede demostrar que las fluctuaciones en la densidad en un universo en expansión, evolucionan de acuerdo con la siguiente ecuación, donde δ_k es la transformada de Fourier de la fluctuación, k uno de los modos de oscilación, v_s la velocidad

del sonido, c una constante y $\bar{\rho}$ la densidad promedio.

$$\ddot{\delta}_k + 2H(z)\dot{\delta}_k + (v_s^2 k^2 - \frac{c\bar{\rho}}{2}) = 0 \quad (2.18)$$

Nótese en la ec (2.18) que el termino de amortiguamiento esta dado por el factor de Hubble, por lo que solo la correcta distribución de materia y energía predecirán la correcta evolución de las perturbaciones.

2.4.4. Edad del universo

Otra evidencia observacional que apoya la idea de que el universo no está compuesto solo de materia y radiación es su edad. A partir del parámetro de Hubble se puede determinar de manera aproximada la edad del universo, digamos t_0 . La prueba consiste en comparar la edad del objeto astronómico más viejo conocido con el valor de t_0 . En [13] se reporta la edad del cúmulo de estrellas más longevo conocido, restringiendo el valor de la edad del universo a, $t_0 \geq 12$ giga años. Sin embargo, tomando en cuenta un modelo Λ CDM, con curvatura espacial igual a cero, resulta inconsistente con las observaciones.

De manera explícita si se despreja la cantidad de radiación al día de hoy, dado que es cuatro ordenes de magnitud menor que la de materia, y se toma un valor de $k = 0$, se tiene la siguiente restricción para un universo sin energía oscura.

$$\Omega_M^0 = 1 \quad (2.19)$$

De modo que se tiene

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{1}{a * H(a)} da \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{H(z) * (1+z)} dz \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{H_0 * (1+z)} \frac{1}{\sqrt{\Omega_M^0 * (1+z)^3}} dz \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{H_0} \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} dz \\ &= \frac{2}{3H_0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Luego, tomando en cuenta las restricciones sobre los parámetros cosmológicos impuestas por el *Hubble Space Telescope*, el valor de $H_0^{-1} = 9.776h^{-1}$ giga años, donde $0.64 = h$. Evaluando en la integral anterior se obtiene que la edad del universo debe ser, $t_0 \leq 10$ giga años, lo cual contradice las observaciones.

El siguiente caso que no involucre la necesidad de energía oscura sería considerar un universo con $k \neq 0$. En este caso la restricción impuesta sobre las cantidades de las componentes de los fluidos es

$$\Omega_M^0 + \Omega_k = 1 \quad (2.21)$$

dando como resultado lo siguiente, [7]

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1 - \Omega_M^0} - \frac{\Omega_M^0}{2(1 - \Omega_M^0)^{\frac{3}{2}}} * \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \Omega_M^0}}{1 + \sqrt{1 - \Omega_M^0}}\right) \quad (2.22)$$

Tomando el límite cuando $\Omega_M^0 \mapsto 0$ el valor de $t_0 \mapsto \frac{1}{H_0}$ y en el caso que $\Omega_M^0 \mapsto 1$, se reduce al caso anterior, en el cual, ya se observó que es incongruente con las observaciones realizadas. Si se utilizan los valores de los

parámetros cosmológicos impuestos por la sonda Planck, [18], se tiene que el primer límite no tiene sentido físico ya que se determinó que el valor del parámetro de densidad de curvatura es, $|\Omega_k| \ll 1$.

El problema de la edad del universo se puede solucionar de manera trivial si se considera el caso de una constante cosmológica, $\omega_\Lambda = -1$. En este escenario, la expresión que se obtiene para el tiempo de expansión del universo es la siguiente.

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda^0}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda^0}}{\sqrt{\Omega_M^0}}\right) \quad (2.23)$$

Tomando en cuenta los valores de los parámetros de densidad de energía oscura y materia reportados en ([18]), y utilizando el valor para la constante de Hubble al día de hoy mencionada anteriormente, se obtiene que el la edad aproximada del universo es $t_0 \approx 14$ giga años. De modo que para que la edad de expansión del universo sea congruente con las mediciones de los objetos estelares más longevos conocidos, es necesario considerar la densidad de energía oscura en el cálculo.

Capítulo 3

Parametrizaciones de energía oscura

A partir del descubrimiento de la expansión acelerada del universo realizado por Perlmutter *etal.*, y Riess *etal.*, se ha tratado de entender el origen de la misma dentro del modelo cosmológico estándar. La presencia de una componente de energía con presión negativa es necesaria para poder generar dicha aceleración. Dado que no existe un sustento teórico suficientemente fuerte para decir que la expansión acelerada del universo se deba a una constante cosmológica, se proponen otras alternativas para explicar dicho fenómeno dentro de las cuales se encuentra el parametrizar la ecuación de estado de la energía oscura, lo que permite realizar un análisis fenomenológico. Parametrizar la ec (1.34) consiste en proponer que ω_Λ sea una función del corrimiento al rojo (o del factor de escala) y de ciertos parámetros que se deben ajustar con las observaciones. Al tener una forma explícita de la ecuación de estado, es posible determinar la densidad de energía oscura, ya sea de forma analítica o por medio de métodos numéricos. Debido a que las pruebas observacionales que sustentan la expansión acelerada del universo dependen de la densidad de energía oscura presente, es posible comparar de manera directa la validez de las parametrizaciones propuestas.

El objetivo de este capítulo, consiste en describir la parametrización propuesta en este trabajo. Se estudió el significado de los parámetros con los que cuenta la ecuación de estado que se propone y se muestra que resulta una generalización de parametrizaciones como lo son: la constante cosmológica; la ecuación de estado constante; la parametrización propuesta por Chevallier-Polarski y Linder. De aquí en adelante se supone un universo plano y se desprecia la contribución de partículas relativistas.

3.1. Parametrización

La parametrización propuesta a estudiar en este trabajo es la siguiente

$$\omega_\Lambda(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{\left(\frac{z}{z_t}\right)^p}{1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^p} \quad (3.1)$$

Esta parametrización se encuentra motivada por la evolución de campos escalares, que pudieran ser los responsables de la energía oscura, permitiendo interpretar la energía oscura desde una perspectiva de partículas elementales. Nótese que la ec (3.1) está definida para todos los reales positivos y el cero. El valor para $z = 0$ es exactamente el parámetro ω_0 , que corresponde al valor de la ecuación de estado al día de hoy. Por otro

lado, en el límite en el que $z \rightarrow \infty$ se tiene que la ecuación de estado toma la forma

$$\omega_{ini} = \omega_0 + \omega_1 \quad (3.2)$$

donde ω_{ini} corresponde al valor inicial para un tiempo temprano del universo. Resulta claro de la ecuación anterior, que es posible expresar al parámetro ω_1 en términos de los valores iniciales y actuales de la ecuación de estado, por lo que de aquí en adelante se usarán estos. Por tanto, la ec (3.1) representa una ecuación de estado que tiene una transición entre los dos valores límites mencionados previamente.

El siguiente punto a investigar es la inclusión del parámetro z_t , y el efecto que tiene la potencia a la cual se eleve la dependencia de z . Si se evalúa la parametrización propuesta en el punto z_t , se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \omega_\Lambda(z_t) &= \omega_0 + \frac{\omega_1}{2} = \omega_0 + \frac{\omega_{ini} - \omega_0}{2} \\ &= \frac{\omega_0 + \omega_{ini}}{2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Es decir el punto $z = z_t$, es el punto intermedio en la transición que existe entre el valor inicial y el valor actual de la ecuación de estado, sin importar el valor de la potencia p . Derivando la ec (3.1) respecto al corrimiento al rojo, z , se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_\Lambda(z)}{dz} &= \frac{\omega_1}{(1 + (\frac{z}{z_t})^p)^2} \left(\frac{p}{z_t} \left(\frac{z}{z_t}\right)^{p-1} \left(1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^p\right) - \frac{p}{z_t} \left(\frac{z}{z_t}\right)^{p-1} \left(\frac{z}{z_t}\right)^p \right) \\ &= \frac{\omega_1}{(1 + (\frac{z}{z_t})^p)^2} \frac{p}{z_t} \left(\frac{z}{z_t}\right)^{p-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

De la ec (3.4), se observa que para corrimientos al rojo mucho mayores al parámetro z_t , $z \gg z_t$, el valor de la derivada tiende a cero. Por otro lado, si se evalúa la ec (3.4) hoy en día, $z = 0$, su valor depende de la potencia p y se divide en 2 casos: si $p=1$, se tiene que $\frac{d\omega_\Lambda}{dz} = \frac{\omega_1}{z_t}$; si $p \neq 1$, la derivada toma un valor igual a cero. Lo anterior indica que para los modelos con $p \neq 1$, se alcanza un valor mínimo en $z = 0$, mientras que para el caso de $p = 1$, se permiten valores menores a ω_0 . El parámetro p , representa que tan abrupta es la transición entre ω_0 y ω_{ini} . Los comportamientos descritos anteriormente se ejemplifican en las figuras (3.1) y (3.2). En la figura (3.1) se muestra el comportamiento de la ecuación de estado como función de z para distintos valores de la potencia p . Obsérvese que a medida que crece el valor de p , la pendiente de la función evaluada en el corrimiento al rojo de transición aumenta también, de modo que se corrobora que para valores de la potencia muy grandes, el cambio entre un estado inicial y al día de hoy es más abrupto.

Nótese que cuando $\omega_0 = -1$ y $\omega_1 = 0$ la ecuación (3.1) se reduce al caso de una constante cosmológica, mientras que para un valor de $z_t = 1$ y $p = 1$ se tiene

$$\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{1}{1+z} = \omega_0 + \omega_1(1-a) \quad (3.5)$$

que es precisamente la parametrización propuesta por Chevallier-Polarski y Linder (CPL), representando una transición suave entre un estado inicial y uno actual. En este trabajo se generaliza la parametrización de CPL, para permitir diferentes puntos de transición y más abruptas. Este tipo de transiciones abruptas están motivadas por la dinámica de campos escalares como energía oscura. Por simplicidad y como ejemplo de esta parametrización, en este trabajo vamos a tomar los valores de $p = 1, 2$ y 4 . Mediante un ajuste de mínimos cuadrados se restringió el valor de los parámetros involucrados imponiendo las siguientes condiciones: $\omega_0 < \frac{-1}{3\Omega_\Lambda}$, $\omega_{ini} < 0$ y $z_t > 0$.

3.2. Modelo $\omega_\Lambda = \omega_0$

Supongámos un universo plano, es decir, $k = 0$, y que consta de solo dos componentes: materia y energía oscura. La razón por la cual se escoge el modelo anterior, se encuentra fundamentada en los resultados de la

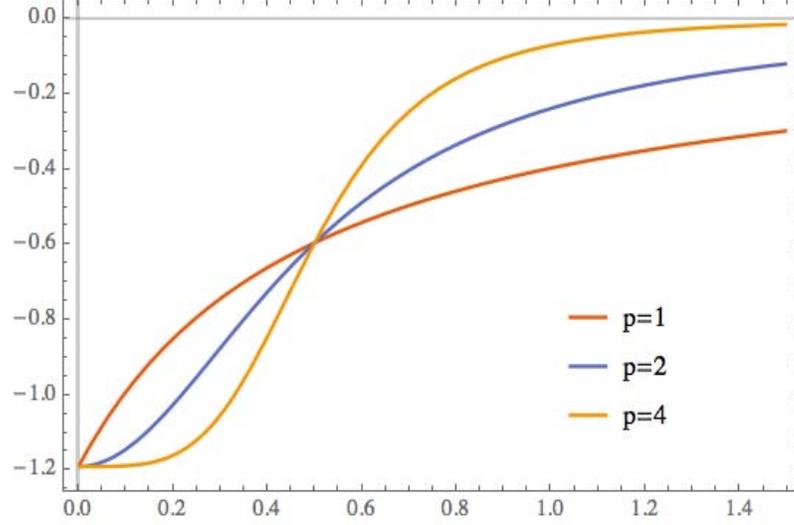


Figura 3.1: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo. Se utilizó un valor de $\omega_0 = -1,19$, $\omega_1 = 1,19$ y de $z_t = 0,5$. Las líneas roja, azul y amarilla, corresponden a $p=1,2$ y 4 respectivamente.

sonda Planck ([19]), donde por medio del mapa de radiación de fondo cósmica se determinaron los valores de $\{\Omega_i^0, \omega_\Lambda, H_0\}$ entre otros. Los resultados reportados en el artículo previamente mencionado, indican un valor de $\Omega_k = -0.002$, $\Omega_M^0 = 0.271$ y $\Omega_\Lambda = 0.731$.

El primer modelo propuesto consiste en considerar una ecuación de estado con $\omega_\Lambda = \omega_0 = cte$, donde la constante debe tener un valor menor a $\omega_0 < \frac{-1}{3\Omega_\Lambda} \approx 0.46$, para generar una aceleración positiva del universo. Resolviendo la ecuación de continuidad para la componente de energía oscura, (1.33), se tiene

$$\begin{aligned}
 d\rho_\Lambda - 3(1 + \omega_0)\rho_\Lambda \frac{dz}{1+z} &= 0 \\
 \int_{\rho_\Lambda^0}^{\rho_\Lambda} \frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} &= \int_0^z 3(1 + \omega_0) \frac{dz}{(1+z)} \\
 \ln\left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda^0}\right) &= 3(1 + \omega_0) \ln(1+z) \\
 \rho_\Lambda &= \rho_\Lambda^0 (1+z)^{3(1+\omega_0)}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sustituyendo en la ec (1.70) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 dL &= \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0(1+z)^{3(1+\omega_0)}}} \\
 &= \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + (1 - \Omega_M^0)(1+z)^{3(1+\omega_0)}}}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La integral resultante en la expresión de la distancia lumínica para este o cualesquiera de los siguientes modelos propuestos, no se puede resolver de manera analítica. Para solucionar este inconveniente y poder determinar los parámetros cosmológicos se optó por realizar una integración numérica haciendo uso del software *Mathematica*.

En la fig 3.3 se muestra la evolución de la densidad de materia y de energía oscura como función del corrimiento al rojo. Se puede apreciar que para distintos valores de ω_Λ , la época en la que la materia domina

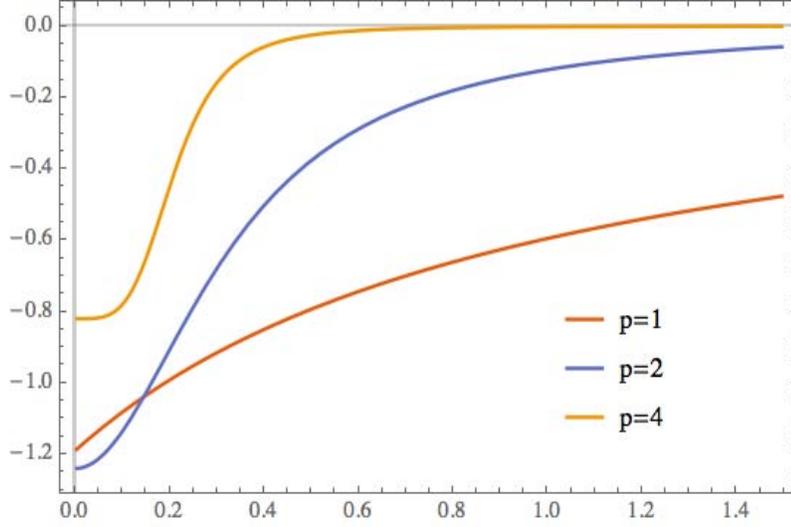


Figura 3.2: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para distintos valores de z_t . La línea roja, azul y amarilla, corresponden a $p=1, 2$, y 4 respectivamente.

sobre la energía oscura aumenta a medida que la ecuación de estado toma números más negativos. Se tiene entonces que, la aceleración del universo crece de manera proporcional al negativo de la ecuación de estado para el modelo $\omega_\Lambda = cte$. A partir de la figura, se infiere que para el caso de $\omega_\Lambda = -1/3$ la época de transición a partir de la cual se comienza a acelerar el universo corresponde a un valor del corrimiento al rojo de $z \approx 1.1$, mientras que para los casos $\omega_\Lambda = -1, -1.5$ se tiene $z \approx 0.3$ y 0.18 respectivamente.

3.3. Modelo $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1(1 - a)$

Para el segundo modelo se toma una parametrización de la ecuación de estado de la energía oscura de la siguiente forma, donde ω_0 y ω_1 son constantes

$$\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1(1 - a) \quad (3.8)$$

Resolviendo la ecuación de continuidad asociada a la componente de energía oscura se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} &= -3(1 + \omega_0 + \omega_1)\frac{da}{a} + 3\omega_1\frac{da}{a} \\ \ln\left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda^0}\right) &= \int_1^a -3(1 + \omega_0 + \omega_1)\frac{da}{a} + \int_1^a 3\omega_1 da \\ &= -3(1 + \omega_0 + \omega_1)\ln(a) + 3\omega_1(a - 1) \\ &= \ln(a^{-3(1+\omega_0+\omega_1)}) + 3\omega_1(a - 1) \\ &= \ln((1 + z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)}) - 3\omega_1\frac{z}{1+z} \\ \rho_\Lambda &= \rho_\Lambda^0[(1 + z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp(-3\omega_1\frac{z}{1+z})] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si se toma el límite $z \rightarrow \infty$, la ecuación de estado toma la forma $\omega_{ini} = \omega_0 + \omega_1$. La ecuación de estado CPL tiende a un valor inicial para valores muy grandes del corrimiento al rojo. Dado que en el universo

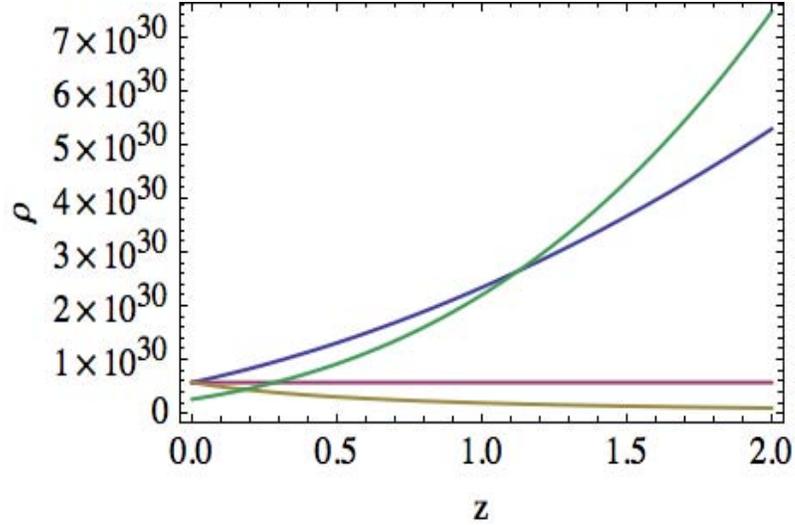


Figura 3.3: Densidad de energía como función del corrimiento al rojo. La línea verde representa la densidad de energía de materia, mientras que las líneas azul, rosa y amarilla corresponden a la densidad de energía oscura para un valor de la ecuación de estado de $\omega_\Lambda = -1/3, -1, -1.5$ respectivamente. Se tomo un valor de la constante de Hubble de $2,24 \times 10^{-4} \frac{1}{Mpc}$.

temprano las componentes de materia y radiación son las que dominaban, tiene sentido suponer que el valor inicial de la parametrización CPL corresponda al valor de la ecuación de estado para materia, $\omega_M = 0$, o de radiación, $\omega_R = 1/3$. Tomando en cuenta lo anterior, resulta conveniente expresar el valor del parámetro ω_1 en términos del valor inicial y al día de hoy de la ecuación de estado, ya que el significado físico de estos resulta ser más claro. Escribiendo $\omega_1 = \omega_{ini} - \omega_0$ y sustituyendo (3.9) en la ec (1.70), se obtiene la siguiente expresión para la distancia lumínica.

$$dL = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + (1-\Omega_M^0)(1+z)^{3(1+\omega_0+(\omega_{ini}-\omega_0)\frac{z}{1+z})} \exp^{-3(\omega_{ini}-\omega_0)\frac{z}{1+z}}}} \quad (3.10)$$

En la fig 3.4 se muestra el comportamiento de la ecuación de estado para diversos ω_1 , donde utilizo la forma de (3.8) como función de z , $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$. En la imagen se puede apreciar como al hacer tender el corrimiento al rojo a infinito, la ecuación de estado se pega asintóticamente al valor $\omega_0 + \omega_1$.

3.4. Caso $p=1$

Insertando la ec (3.1) con un valor de $p = 1$ en la ecuación de continuidad se obtiene la siguiente ecuación diferencial a resolver

$$\frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} = 3(1+\omega_0) \frac{dz}{1+z} + 3\omega_1 \frac{\frac{z}{z_t}}{(1+z)(1+\frac{z}{z_t})} dz \quad (3.11)$$

El primer término a la derecha de (3.11) resulta trivial dando como resultado al integrar en un intervalo $[0, z]$

$$\int_0^z 3(1+\omega_0) \frac{dz}{1+z} = 3(1+\omega_0) \ln(1+z) \quad (3.12)$$

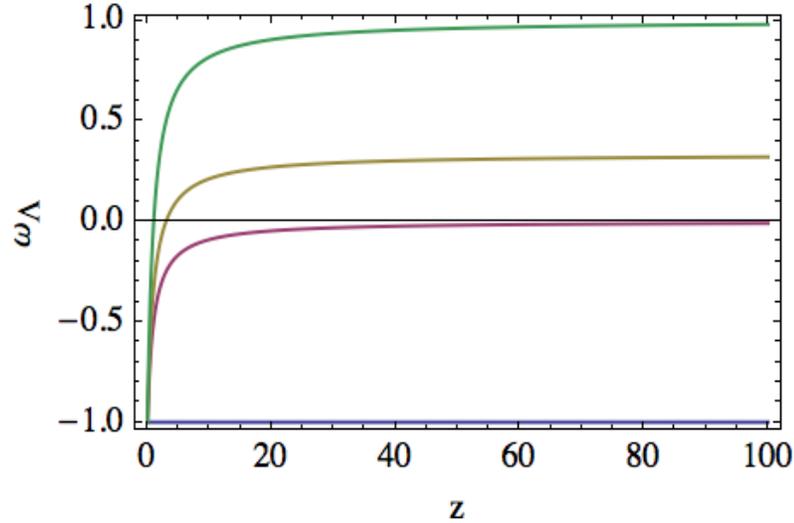


Figura 3.4: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo. Se utilizó un valor de $\omega_0 = -1$ y se escogieron valores de $\omega_1 = 0, 1, 4/3, 2$ que corresponden a las líneas azul, rosa, amarilla y verde, respectivamente.

Para resolver el segundo término a la derecha de (3.11) se utilizó el siguiente cambio de variable: $x = \frac{z}{z_t}$. Integrando por el método de fracciones parciales se tiene

$$\int 3\omega_1 \frac{\frac{z}{z_t}}{(1+z)(1+\frac{z}{z_t})} dz = \int 3\omega_1 z_t \frac{x}{(1+z_t x)(1+x)} dx \quad (3.13)$$

Nótese que se puede expresar el integrando de la siguiente manera, donde a y b son constantes por encontrar.

$$\begin{aligned} 3\omega_1 z_t \frac{x}{(1+z_t x)(1+x)} &= \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1+z_t x} \\ &= \frac{(a+b) + (az_t + b)x}{(1+x)(1+z_t x)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$a + b = 0 \quad (3.15)$$

$$az_t + b = 3\omega_1 z_t \quad (3.16)$$

Resolviendo para a y b se obtiene

$$a = \frac{3\omega_1 z_t}{z_t - 1} \quad (3.17)$$

$$b = -\frac{3\omega_1 z_t}{z_t - 1} \quad (3.18)$$

Finalmente, sustituyendo los valores de a y b en la descomposición de la división de los polinomios, se llega a

$$3\omega_1 z_t \frac{x}{(1+z_t x)(1+x)} = \frac{3\omega_1 z_t}{z_t - 1} \frac{1}{(1+x)} + \frac{-3\omega_1 z_t}{z_t - 1} \frac{1}{(1+z_t x)} \quad (3.19)$$

Con la descomposición anterior, se puede encontrar una primitiva del segundo termino a la derecha de la ec (3.11)

$$\begin{aligned}
\int 3\omega_1 \frac{\frac{z}{z_t}}{(1+z)(1+\frac{z}{z_t})} dz &= \int 3\omega_1 z_t \frac{x}{(1+z_t x)(1+x)} dx \\
&= \int \frac{3\omega_1 z_t}{(z_t-1)} \frac{1}{(1+x)} dz + \int \frac{-3\omega_1 z_t}{(z_t-1)} \frac{1}{(1+z_t x)} dz \\
&= \frac{3\omega_1 z_t}{(z_t-1)} \ln(1+x) - \frac{3\omega_1}{(z_t-1)} \ln(1+z_t x) \\
&= \ln((1+x)^{\frac{3\omega_1 z_t}{(z_t-1)}}) - \ln((1+z_t x)^{\frac{3\omega_1}{(z_t-1)}}) \\
&= \ln((1+\frac{z}{z_t})^{\frac{3\omega_1 z_t}{(z_t-1)}}) - \ln((1+z)^{\frac{3\omega_1}{(z_t-1)}}) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

La solución a la ec (3.11) es

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 * [(1+z)^{3(1+\omega_0-\frac{\omega_1}{z_t-1})} * (1+\frac{z}{z_t})^{\frac{3\omega_1 z_t}{z_t-1}}] \tag{3.21}$$

Insertando (3.21) en la ecuación (1.70) podemos escribir la distancia lumínica como

$$dL = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0 (1+z)^3 + (1-\Omega_M^0) [(1+z)^{3(1+\omega_0-\frac{\omega_1}{z_t-1})} * (1+\frac{z}{z_t})^{\frac{3\omega_1 z_t}{z_t-1}}]}} \tag{3.22}$$

3.5. Caso p=2

Resolver la ec (1.33) para el caso $p = 2$ nos lleva a la siguiente ecuación. Se sigue el mismo procedimiento que para el caso anterior, es decir, realizar un cambio de variable y luego descomponer la división de polinomios mediante el método de fracciones parciales

$$\frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} = 3(1+\omega_0) \frac{dz}{1+z} + 3\omega_1 \frac{(\frac{z}{z_t})^2}{(1+z)(1+(\frac{z}{z_t})^2)} dz \tag{3.23}$$

Nuevamente se toma el cambio de variable $x = \frac{z}{z_t}$, de forma que el segundo término del lado derecho de (3.23) se pueda escribir como

$$3\omega_1 \frac{(\frac{z}{z_t})^2}{(1+z)(1+(\frac{z}{z_t})^2)} dz = 3\omega_1 z_t \frac{x^2}{(1+z_t x)(1+x^2)} dx \tag{3.24}$$

Para integrar la ecuación anterior, se descompone la división de polinomios en x de la siguiente manera, donde $\{a, b, c\}$ son constantes por determinar.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(1+z_t x)(1+x^2)} &= \frac{a}{(1+z_t x)} + \frac{bx+c}{(1+x^2)} \\
&= \frac{(a+c) + (b+cz_t)x + (a+bz_t)x^2}{(1+z_t x)(1+x^2)} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

La expresión anterior nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$a + c = 0 \tag{3.26}$$

$$b + cz_t = 0 \tag{3.27}$$

$$a + bz_t = 1 \tag{3.28}$$

Resolviendo para $\{a, b, c\}$ se obtiene que

$$a = \frac{1}{(1 + z_t^2)} \quad (3.29)$$

$$b = \frac{z_t}{(1 + z_t^2)} \quad (3.30)$$

$$c = \frac{-1}{(1 + z_t^2)} \quad (3.31)$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1 + z_t x)(1 + x^2)} &= \int \frac{dx}{(1 + z_t^2)(1 + z_t x)} + \int \frac{z_t x}{(1 + z_t^2)(1 + z_t x)} dx - \int \frac{1}{(1 + z_t^2)(1 + z_t x)} \\ &= \int \frac{z_t}{z_t (1 + z_t^2)(1 + z_t x)} dx + \int \frac{2}{2 (1 + z_t^2)(1 + z_t x)} z_t x dx - \frac{\arctan(x)}{(1 + z_t^2)} \\ &= \frac{1}{(1 + z_t^2)} \frac{1}{z_t} \ln(1 + z_t x) + \frac{z_t}{(1 + z_t^2)} \frac{1}{2} \int dy 1 + y - \frac{\arctan(x)}{(1 + z_t^2)} \\ &= \frac{1}{(1 + z_t^2)} \frac{1}{z_t} \ln(1 + z_t x) + \frac{z_t}{(1 + z_t^2)} \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{\arctan(x)}{(1 + z_t^2)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Regresando a la variable original e integrando en el intervalo $[0, z]$, se tiene que el lado derecho de (3.23) es

$$\begin{aligned} \int_0^z 3\omega_1 \frac{\left(\frac{z}{z_t}\right)^2}{(1 + z)(1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2)} dz &= \frac{3\omega_1}{(1 + z_t^2)} \ln(1 + z) + \frac{3\omega_1 z_t^2}{2(1 + z_t^2)} \ln\left(1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2\right) \\ &\quad - \frac{3\omega_1 z_t}{(1 + z_t^2)} \arctan\left(\frac{z}{z_t}\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Entonces la solución a (3.23) toma la forma

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 [(1 + z)^{3(1 + \omega_0 + \frac{\omega_1}{1 + z_t^2})} * (1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2)^{\frac{3\omega_1 z_t^2}{2(1 + z_t^2)}} * \exp\left(\frac{-3\omega_1 z_t}{1 + z_t^2} \arctan\left(\frac{z}{z_t}\right)\right)] \quad (3.34)$$

Tomando en cuenta (3.34) la relación de la distancia lumínica queda como

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1 + z}{H_0} \\ &\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0 (1 + z)^3 + (1 - \Omega_M^0) [(1 + z)^{3(1 + \omega_0 + \frac{\omega_1}{1 + z_t^2})} * (1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2)^{\frac{3\omega_1 z_t^2}{2(1 + z_t^2)}} * \exp\left(\frac{-3\omega_1 z_t}{1 + z_t^2} \arctan\left(\frac{z}{z_t}\right)\right)]}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.6. Caso p=4

Para el caso en que la potencia en la ec (3.1) sea igual a 4, se tiene que resolver la ecuación de continuidad para determinar la expresión analítica de la densidad como función del corrimiento al rojo. En este escenario, no se puede aplicar el método de fracciones parciales, ya que el polinomio de la forma $1 + x^4 = 0$, no tiene raíces reales. Para resolver la ecuación de continuidad se utilizó el software *Mathematica*. A continuación se muestra el resultado obtenido

El problema consiste en resolver la siguiente integral

$$\begin{aligned}
\int_0^z 3\omega_1 \frac{\left(\frac{z}{z_t}\right)^4}{(1+z)(1+\left(\frac{z}{z_t}\right)^4)} dz &= \int_0^z 3\omega_1 \frac{\left(\frac{z}{z_t}\right)^4 + 1 - 1}{(1+z)(1+\left(\frac{z}{z_t}\right)^4)} dz \\
&= \int_0^z \frac{3\omega_1}{1+z} dz - \int_0^z \frac{3\omega_1}{(1+z)(1+\left(\frac{z}{z_t}\right)^4)} dz \\
&= 3\omega_1 \ln(1+z) - \int_0^z \frac{3\omega_1}{(1+z)(1+\left(\frac{z}{z_t}\right)^4)} dz
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ahora tomando el cambio de variable, $\frac{z}{z_t} = x$ e insertando la expresión anterior en *Mathematica*, se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{3\omega_1}{(1+z)(1+\left(\frac{z}{z_t}\right)^4)} dz &= a \arctan\left(1 - \sqrt{2} \frac{z}{z_t}\right) + b \arctan\left(1 + \sqrt{2} \frac{z}{z_t}\right) + \\
&c \ln\left(1 - \sqrt{2} \frac{z}{z_t} + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2\right) + d \ln\left(1 - \sqrt{2} \frac{z}{z_t} + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2\right) + e \ln\left(1 + \sqrt{2} \frac{z}{z_t} + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2\right) \\
&+ f \ln\left(1 + \sqrt{2} \frac{z}{z_t} + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2\right) + g \ln\left(1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^4\right) + h \ln(1+z) - (a+b) \frac{\pi}{4}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

El valor de los coeficientes mencionados previamente está dado por las siguientes expresiones:

$$a = \frac{3\omega_1 z_t}{4(1+(z_t)^4)} (\sqrt{2} - 2z_t + \sqrt{2}z_t^2) \tag{3.38}$$

$$b = \frac{-3\omega_1 z_t}{4(1+(z_t)^4)} (\sqrt{2} + 2z_t + \sqrt{2}z_t^2) \tag{3.39}$$

$$c = \frac{3\sqrt{2}\omega_1 z_t}{8(1+(z_t)^4)} \tag{3.40}$$

$$d = \frac{-3\sqrt{2}\omega_1 z_t^3}{8(1+(z_t)^4)} \tag{3.41}$$

$$e = \frac{-3\sqrt{2}\omega_1 z_t}{8(1+(z_t)^4)} \tag{3.42}$$

$$f = \frac{3\sqrt{2}\omega_1 z_t^3}{8(1+(z_t)^4)} \tag{3.43}$$

$$g = \frac{3\omega_1 z_t^4}{4(1+(z_t)^4)} \tag{3.44}$$

$$h = \frac{-3\omega_1 z_t^4}{1+(z_t)^4} \tag{3.45}$$

Si se resuelve la ecuación de continuidad para el modelo (3.1) para el caso $p = 4$, y se toma en cuenta la ec (3.36), se tiene que la densidad de energía oscura y la distancia lumínica para el modelo anterior, son respectivamente

$$\begin{aligned}
\rho_\Lambda &= \rho_\Lambda^0 (1+z)^{3(1+\omega_0 + \frac{\omega_1}{1+z_t^4})} + \left(\frac{1 + \sqrt{2} \frac{z}{z_t} + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2}{1 - \sqrt{2} \frac{z}{z_t} + \left(\frac{z}{z_t}\right)^2}\right)^{\frac{3\sqrt{2}\omega_1 z_t (z_t^2 - 1)}{8(1+z_t^4)}} \left(1 + \left(\frac{z}{z_t}\right)^4\right)^{\frac{3\omega_1 z_t^4}{4(1+z_t^4)}} \\
&\exp\left(a \arctan\left(1 - \sqrt{2} \frac{z}{z_t}\right) + b \arctan\left(1 + \sqrt{2} \frac{z}{z_t}\right) - (a+b) \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$dL = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c^0}}} \quad (3.47)$$

Capítulo 4

Resultados

En esta sección se presentan los valores de los parámetros ajustados para los distintos modelos propuestos para la ecuación de estado de la energía oscura. Se supuso un universo plano compuesto por materia y energía oscura. Haciendo uso de los corrimientos al rojo, las magnitudes aparentes y sus respectivas incertidumbres asociadas, de un conjunto de 103 SNe Ia reportadas en [11]. Se realizó un ajuste por medio de mínimos cuadrados para cada una de las parametrizaciones, tal y como se reporta en el Apéndice B. Se introduce un parámetro b , resultado de la marginalización de la magnitud intrínseca de la supernova y del valor de la constante de Hubble al día de hoy, definido por las ecs (4.1) y (4.2). Haciendo uso de los resultados reportados en [18], se restringieron los intervalos de variación de los parámetros Ω_M^0 y b , a los intervalos $[0, 0.4]$ y $[0.4, 0.8]$ respectivamente.

$$b = \frac{\tilde{M}}{H_0} \quad (4.1)$$

$$\tilde{M} = 10^{M/5} \quad (4.2)$$

4.1. Modelo 1: Constante cosmológica

La primera parametrización por analizar corresponde al caso de una constante cosmológica, es decir, cuando la ecuación de estado es constante e igual a -1 . Lo anterior es equivalente a que en la ec (3.1), se escoja un valor de $\omega_1 = 0$. Este modelo cuenta con dos parámetros libres, los cuales son la densidad de materia al día de hoy y b . Los valores correspondientes al mejor ajuste para Ω_M^0 y b se reportan en la tabla 4.8, con una incertidumbre asociada de 2σ . Para determinar las incertidumbres se obtuvo la curva de contorno (figura 4.1) de la ec (B.3) en el plano (Ω_M^0, b) . Las curvas que se obtienen son elipses no concéntricas entre sí y que presentan una ligera inclinación respecto al eje del parámetro de densidad de materia al día de hoy. Se puede apreciar, que se logra determinar con mayor precisión la incertidumbre del parámetro b , el cual está relacionado directamente con el parámetro de Hubble. Expresado de otra manera, la función (B.3) es más sensible a cambios en Ω_M^0 que en b .

Utilizando el ajuste obtenido para el parámetro b , y asumiendo un valor dado para la magnitud intrínseca de las supernovas, se puede calcular el valor de la constante de Hubble al día de hoy. Esto se hace despejando la variable H_0 de la ec (4.1) y recordando la definición (4.2). El valor de la magnitud aparente que se escogió es el reportado en [18]. La incertidumbre asociada a la constante de Hubble, se obtiene mediante el método de propagación de incertidumbres [4]. El resultado es reportado en la tabla de resultados 4.8

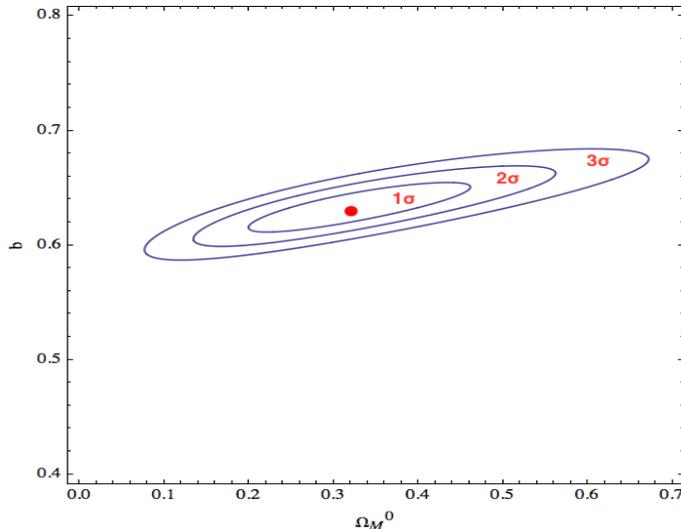


Figura 4.1: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 3σ de incertidumbre para el modelo $\omega_\Lambda = -1$. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Se obtuvo un valor de chi-cuadrada reducida de 1.16, lo cual indica que el modelo propuesto se ajustó de manera aceptable a los datos observacionales; según lo sugerido por [4]. La integral de probabilidad arrojó un valor de 0.131, lo que indica, que en el 13.1% de las mediciones realizadas se obtendrá un valor mayor al de $\chi^2 = 117.088$. Todos los resultados anteriores se encuentran reportados en la tabla 4.8.

En la fig (4.15) se muestra la evolución de los parámetros de densidad de materia y de constante cosmológica como función del corrimiento al rojo. Viendo el comportamiento de las funciones, se aprecia que para un valor de $z = 0.29$, empieza a dominar la densidad de constante cosmológica sobre la densidad de materia. Utilizando la ec(1.78), se graficó la función de desaceleración para determinar de manera cualitativa a partir de qué corrimiento al rojo se empieza a acelerar el universo. En la fig (4.16), se observa que dicho valor corresponde a $z = 0.62$.

4.2. Modelo 2: Ecuación de estado constante; $\omega_\Lambda = \omega_0 = cte$

El segundo modelo que se estudió, consiste en considerar que la ecuación de estado para la energía oscura es una constante, cuyo valor no es necesariamente -1 . Nótese que dicho modelo es equivalente a tomar en la ec (3.1) el valor del parámetro $\omega_1 = 0$. Este nuevo modelo de energía oscura cuenta con tres parámetros libres, los cuales son $(\Omega_M^0, b \text{ y } \omega_0)$. Se restringió el valor de la ecuación de estado a tener un valor menor a $\omega_0 < -0.5$, para poder obtener un universo acelerado. Los resultados obtenidos para el mejor ajuste, después de realizar la minimización de la función chi-cuadrada, se reportan en la tabla de resultados 4.8. Las incertidumbres asociadas al parámetro de densidad de materia al día de hoy y b se obtuvieron como se menciona en la sección anterior haciendo cortes de nivel sobre la función (B.3) en el espacio (Ω_M^0, b) y suponiendo que ω_0 no se encuentra fuertemente acoplado con el resto de los parámetros libres. Para determinar la incertidumbre asociada a un sigma de la ecuación de estado, se utilizó la ec (B.6) y luego se multiplicó por 2, para obtener el intervalo de confianza de 2σ . La curva de contorno se reporta en la fig 4.2. De la misma manera como se mencionó en la sección anterior, se obtuvo el valor de la constante de Hubble para el modelo 2.

Se consiguió un valor de chi-cuadrada reducida de 1.17, indicando un ajuste razonablemente bueno con respecto a los datos observacionales. La integral de probabilidad tiene un valor de 0.121, lo que muestra

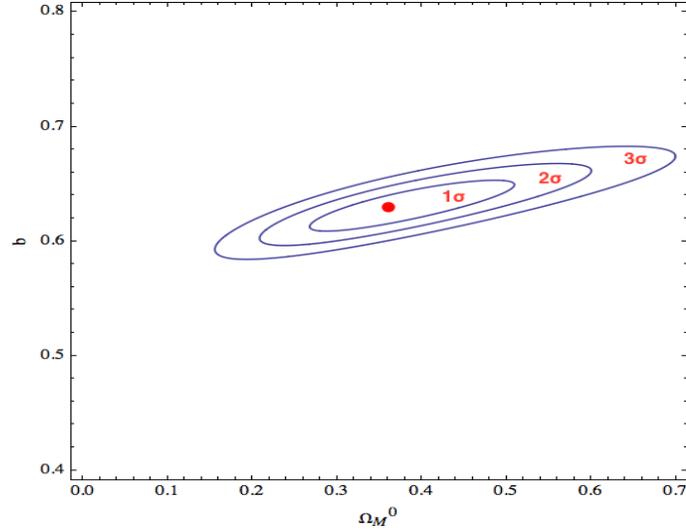


Figura 4.2: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 3 σ de incertidumbre para el modelo $\omega_\Lambda = \omega_0$. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

que en el 12.1% de las mediciones realizadas, se obtendrá un valor mayor al de $\chi^2 = 116.765$. Todos los resultados anteriores se encuentran reportados en la tabla 4.8.

En la fig (4.15) se graficó la evolución de los parámetros de densidad de energía oscura y de materia como función del corrimiento al rojo, según los valores ajustados. Se aprecia que para un valor de $z = 0.17$, comienza a dominar la cantidad de energía oscura sobre la cantidad de materia en el universo. Nuevamente utilizando la ec (1.78) se graficó el comportamiento de la función de desaceleración; fig (4.16). En este modelo se tiene que para un valor de $z = 0.53$ comienza a haber una aceleración efectiva en el universo.

4.3. Modelo 3: Ecuación de estado CPL; $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$

El modelo 3 corresponde a la parametrización de la ecuación de estado propuesta por Chevallier, Polarski y Linder. Dicho modelo es un caso particular de la parametrización (3.1), en el cual se escoge un valor de $z_t = 1$ y $p = 1$. En este caso se trata de una ecuación de estado dinámica, como función de z , y cuenta con dos parámetros libres dados por ω_0 y ω_1 . Si se evalúa la función ω_Λ en el corrimiento al rojo $z = 0$, se encuentra que el valor del parámetro ω_0 corresponde al valor de la ecuación de estado al día de hoy, de modo que los valores donde se restringe la variación del parámetro anteriormente mencionado serán los mismos que en el modelo anterior. En general, esto siempre ocurre para cualquier ecuación de estado que sea del tipo (3.1). El parámetro ω_1 , no cuenta con una interpretación física tan clara; sin embargo, en el límite para corrimientos al rojo muy grandes, $z \rightarrow \infty$, ω_1 se puede expresar en términos del valor inicial y actual de la ecuación de estado. Dado que en el universo temprano la materia dominaba sobre la energía oscura, resulta natural pensar que el valor inicial de la ecuación de estado tiene como cota superior un valor de cero, correspondiente a la ecuación de estado de materia. Cabe destacar, que el parámetro ω_{ini} , siempre se puede expresar como en la ec (3.2) para todo modelo de la forma (3.1). De modo que se escogen como parámetros libres para esta ecuación de estado el valor inicial y el valor al día de hoy. Este modelo cuenta entonces con un número total de cuatro parámetros libres.

Los resultados que se obtuvieron para el mejor ajuste se encuentran reportados en la tabla de resultados 4.8. Las incertidumbres asociadas a Ω_M^0 y b se calcularon mediante la curva de contorno para la función

chi-cuadrada correspondiente a este modelo, y manteniendo constantes el resto de los parámetros en sus valores óptimos; fig (4.3). Es evidente que el valor inicial y el valor al día de hoy de la ecuación de estado se encuentran fuertemente relacionados. Para determinar sus incertidumbres se tomó en cuenta la curva de contorno de (B.3) en el espacio (ω_0, ω_{ini}) , la cual se muestra en la fig (4.4). Se observa, que la incertidumbre asociada al valor de la ecuación de estado al día de hoy, es mucho menor que la correspondiente al valor inicial para los intervalos de confianza del 95 %, 2σ . El valor de la chi-cuadrada reducida es de 1.17, indicando un ajuste razonablemente bueno con respecto a los datos observacionales. La integral de probabilidad tiene un valor de 0.113, lo que señala que en el 11.3% de las mediciones realizadas, se obtendrá un valor mayor al de $\chi^2 = 116.284$. Todos los resultados anteriores se encuentran reportados en la tabla 4.8, junto con las correspondientes incertidumbres para los parámetros a 2σ de confianza.

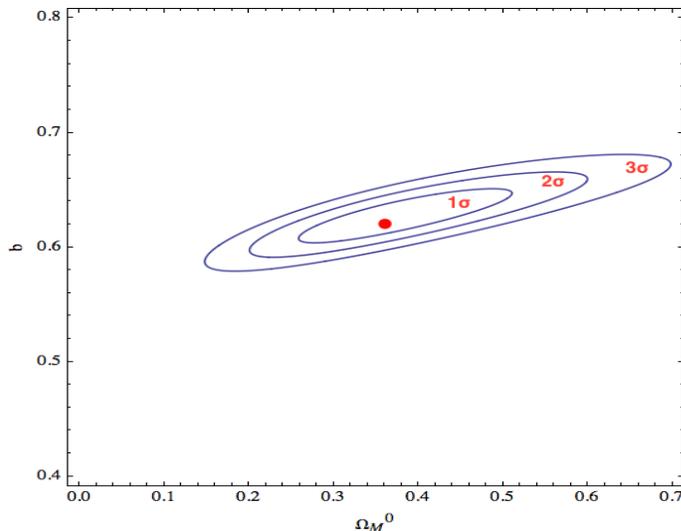


Figura 4.3: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 3σ de incertidumbre para el modelo 3. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Se graficó la evolución de los parámetros de densidades para el modelo CPL, y la desaceleración predicha por el mismo. De la fig (4.23) se observa que para $z = 0.16$ comienza a dominar la energía oscura sobre la materia. De la fig (4.25), se nota que la transición a un sistema en aceleración ocurre alrededor de un valor para el corrimiento al rojo de $z = 0.42$. El modelo CPL, es el primero de los que se investigó que presenta un comportamiento dinámico, es decir, la ecuación de estado varía con el tiempo, lo cual es equivalente a decir que es función de un corrimiento al rojo. Como se comentó en la sección anterior, los modelos de quintaesencia implican una ecuación de estado dinámica, en los cuales si el término cinético es positivo se tiene un campo escalar y el valor de ω_Λ yace dentro de los límites $-1 < \omega_\Lambda < 1$, y en caso de ser negativo se trata de un campo fantasma, el cual permite valores de la ecuación de estado menores a $\omega_\Lambda < -1$. Motivados por este tipo de modelos, se propuso investigar la forma del potencial y de la energía cinética del campo como función del corrimiento al rojo. Utilizando las ecs (2.8) y (2.9), se puede escribir el potencial y la energía cinética como función de la densidad de energía oscura y de la ecuación de estado de la siguiente manera.

$$V(z) = \frac{\rho}{2}(1 - \omega(z)) \quad (4.3)$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{\rho}{2}(1 + \omega(z)) \quad (4.4)$$

Como el mejor ajuste para la parametrización propuesta arrojó un valor de la ecuación de estado al día

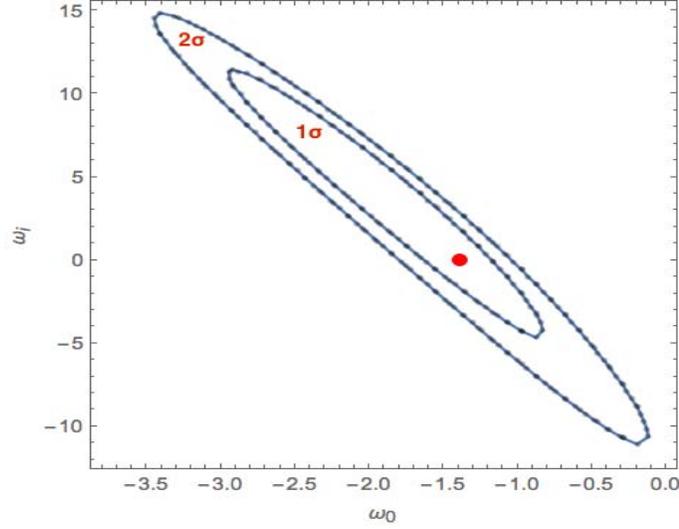


Figura 4.4: Curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) de 1 a 2 σ de incertidumbre para el modelo 3. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

de hoy menor a -1 , el campo responsable de la dinámica en el modelo es un campo fantasma, y se debe cumplir la condición (2.13), donde en este caso el término cinético puede ser negativo. En la fig (4.17) se muestra la evolución de la ecuación de estado para el modelo CPL como función del corrimiento al rojo. Se traza una línea vertical en el valor $z_t = 1$, el cual corresponde al promedio del valor inicial y el valor al día de hoy, $\frac{\omega_0 + \omega_{ini}}{2}$. La fig (4.27) indica el comportamiento del potencial y menos la energía cinética para esta parametrización. Se observa que a partir del valor de $z = 0.42$, que es cuando empieza la aceleración, la energía cinética comienza a tomar valores negativos. También se aprecia que se cumple la condición (2.13). Finalmente, se calculó el valor de la constante de Hubble al día de hoy, haciendo uso del parámetro b y tomando el valor de la magnitud intrínseca anteriormente mencionado. El resultado se reporta en la tabla (4.8).

4.4. Modelo 4: $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z^2}{1+z^2}$

El modelo 4 es de la forma (3.1), en el cual se asume un valor de $z_t = 1$ y $p = 2$. En este caso, el interés principal del análisis se centró en ver el efecto que tienen las potencias de z , para la evolución dinámica de la ecuación de estado y la desaceleración del universo. El motivo por el cual se escogió un valor de $p = 2$, es porque para dicha potencia se tiene una solución analítica de (1.33). En este caso se tienen cuatro parámetros libres que son $\{\Omega_M^0, b, \omega_0, \omega_{ini}\}$. Los intervalos donde se restringió la variación de los parámetros, para el análisis de mínimos cuadrados, son los mismos que en el caso del modelo CPL. En la tabla 4.8 se reportan los valores óptimos obtenidos mediante el ajuste de mínimos cuadrados, con sus respectivas incertidumbres calculadas. Se obtuvo un valor de chi-cuadrada reducida de 1,18, el cual sigue siendo un ajuste considerablemente bueno. La integral de probabilidad para χ^2 arrojó un valor igual a 0.111, por tanto, en el 11.1% de las mediciones se obtendrá un valor mayor al de la chi-cuadrada encontrada. Para determinar las incertidumbres asociadas en los parámetros, se dibujaron las curvas de contorno en el espacio (Ω_M^0, b) y (ω_0, ω_{ini}) , (Ver figs (4.5) - (4.6)).

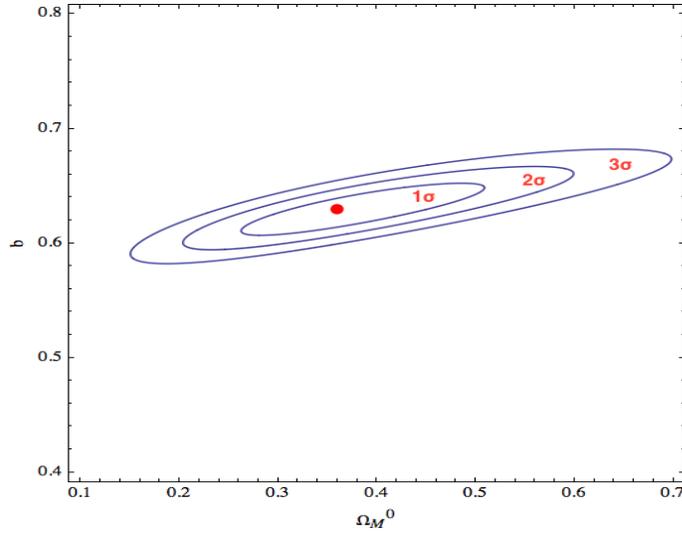


Figura 4.5: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 3 σ de incertidumbre para el modelo 4. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

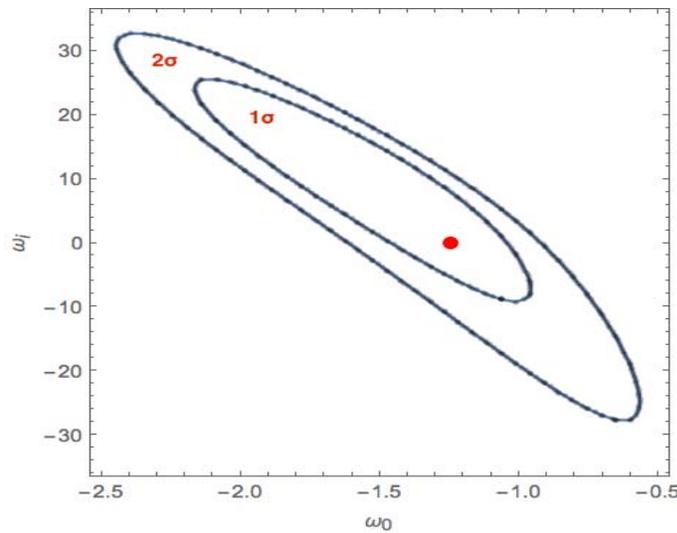


Figura 4.6: Curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) de 1 a 2 σ de incertidumbre para el modelo 4. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Se obtuvieron las gráficas de los parámetros de densidades y la desaceleración; figs (4.23) y (4.25) respectivamente. En la fig (4.23) se observa que la densidad de energía oscura comienza a dominar sobre la densidad de materia para un corrimiento al rojo de, $z = 0.17$. Por otro lado, en la gráfica de desaceleración, (4.25), se tiene que para un corrimiento al rojo de, $z = 0.45$, comienza una expansión acelerada del universo, ya que para zetas menores, el parámetro de desaceleración tiene valores negativos. Para este modelo, el mejor ajuste para la ecuación de estado de la energía oscura hoy, tiene un valor de $\omega_0 = -1.24$, por lo que si la dinámica del sistema fuera consecuencia de un modelo de quintaesencia, se trataría de un campo fantasma. En la gráfica (4.18) se muestra la evolución de la ecuación de estado para el modelo. Se observa que, a medida

que el corrimiento al rojo va tomando valores mas grandes, la ecuación de estado se pega asintóticamente a un valor inicial correspondiente a $\omega = 0$, es decir, se comporta como materia. Por otro lado, en la fig (4.27) se verifica la condición (2.13), esto es, el valor del potencial es siempre mayor que el negativo de la energía cinética. También se puede observar que cuando comienza la aceleración del universo, el término cinético comienza a tomar valores negativos. Por último se determinó el valor de la constante de Hubble y se reporta en la tabla (4.8).

4.5. Modelo 5: $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z^4}{1+z^4}$

El quinto modelo que se presenta, pertenece a los casos particulares de la ec (3.1), donde se escoge un valor distinto de cero para el parámetro ω_1 , teniendo entonces una ecuación de estado dinámica. Se toma un valor de $p = 4$ y de $z_t = 1$. Nuevamente el valor de la potencia que se escogió, es para ilustrar el comportamiento de (3.1), para potencias mayores a 1. En la tabla 4.8, se muestran los resultados que se obtuvieron para el mejor ajuste de los parámetros junto con sus incertidumbres asociadas. El valor de χ_{red}^2 fue de 1.17, con una probabilidad de que en el 12.5% de las mediciones, se obtenga un valor mayor al reportado. En la fig (4.7) se muestra la curva de contorno en el espacio (Ω_M^0, b) , de donde se obtuvieron las incertidumbres asociadas a estos dos parámetros. Las curvas de contorno que se presentan en (4.8), corresponden al plano (ω_0, ω_{ini}) , donde la primera elipse encierra un intervalo de confianza de 1σ y la segunda corresponde a un intervalo de 2σ .

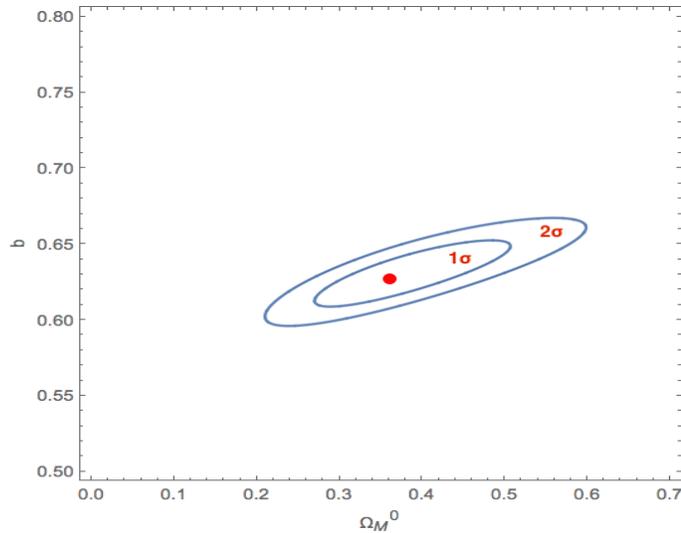


Figura 4.7: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 3 σ de incertidumbre para el modelo 5. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Se graficó la densidad de materia y la densidad de energía oscura para determinar el corrimiento al rojo, a partir del cual comienza a dominar la componente oscura del fluido sobre la materia y verificar que se cumpla la restricción $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. De la fig (4.23) se tiene que a partir del valor $z = 0.17$, comienza a dominar la energía oscura y que en todo momento se cumple la condición de suma mencionada anteriormente. Para este modelo también se obtuvo la gráfica del parámetro de desaceleración, la cual se muestra en la fig (4.25), de donde se observa que para corrimientos al rojo menores a 0,5, se tiene una expansión acelerada del universo. En la fig (4.19), se muestra el comportamiento de la ecuación de estado para los valores óptimos del parámetro ω_0 y ω_{ini} . Al igual que para los otros modelos donde el parámetro ω_1 es distinto de cero, se asumió que la dinámica en la ecuación de estado, es consecuencia de que la expansión acelerada es generada por un

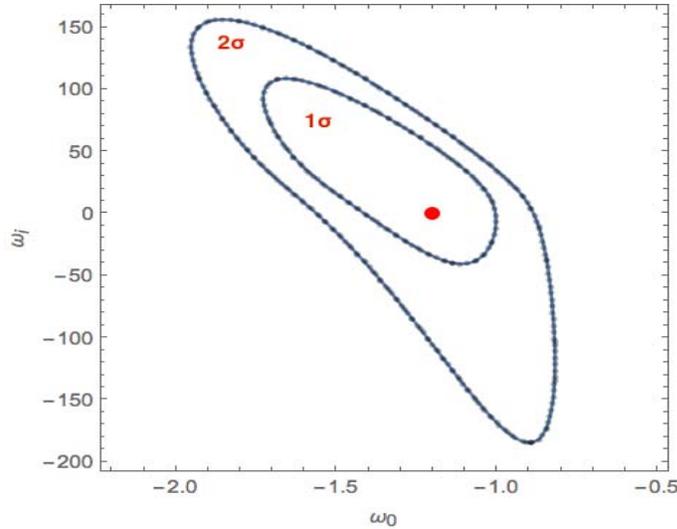


Figura 4.8: Curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) de 1 a 2σ de incertidumbre para el modelo 5. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

campo escalar. Se encontraron expresiones para el valor del potencial y el término cinético como función del corrimiento al rojo, haciendo uso de las ecs (2.8), (2.9) y la densidad de energía correspondiente al modelo. Debido a que el mejor ajuste, para el valor de la ecuación de estado hoy, arrojó un valor menor a -1 , se tiene que cumplir la condición de un campo fantasma, dada por (2.13). En la imagen (4.27) se corrobora que se cumple dicha condición, es decir, que el negativo de la energía cinética sea menor al potencial.

4.6. Modelo 6: $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$

A continuación, se presentan los resultados que se obtuvieron para una ecuación de estado de la forma (3.1), con un valor de la potencia $p = 1$. Se deja correr libremente el parámetro z_t , de modo que se cuenta con cinco parámetros libres, donde el valor de $z_t > 0$. Se interpreta la z_t , como el corrimiento al rojo para el cual, el valor de la ecuación de estado es exactamente el promedio de su valor inicial y su valor actual. Los intervalos de variación para realizar el ajuste por mínimos cuadrados de los otros cuatro parámetros permanecen iguales que en los modelos anteriores. Se obtuvo un valor de $\chi^2 = 115.345$ y de $\chi_{red}^2 = 1.18$, donde el número de grados de libertad es $\nu = 98$. El valor de la integral de probabilidad resultó ser de 0.111, lo que significa, que en el 11.1% de las mediciones se obtendrá un valor mayor de chi cuadrada del que se obtuvo ([4]). Todos los valores de los ajustes se reportan en la tabla 4.8.

Las incertidumbres a 2σ de confianza, para la densidad de materia hoy y del parámetro de marginalización, b , se calcularon utilizando las curvas de contorno en el plano $\{\Omega_M^0, b\}$, y se muestran en la fig (4.9). Por la forma que tiene la ec (3.1), es claro que ω_0, ω_{ini} y z_t se encuentran fuertemente correlacionados. Se tendría entonces que construir las curvas de contorno en un espacio tridimensional dado por coordenadas $\{\omega_0, \omega_{ini}, z_t\}$, para determinar las incertidumbres respectivas. Sin embargo, para valores positivos del corrimiento al rojo de transición, las superficies que se encuentran no tienen una frontera bien definida y por tanto, no permite restringir los valores a 2σ dentro del intervalo de variación. Teniendo lo anterior en cuenta, se optó por calcular las incertidumbres tomando la curva de nivel en el plano (ω_0, ω_{ini}) , y considerando que en una primera aproximación, z_t es independiente del comportamiento de los otros parámetros, de modo que su incertidumbre se calcula mediante la ec (B.6), reportada en el Apéndice B.

En la gráfica (4.24), se muestra la evolución de los parámetros de densidad, materia y energía oscura, para el modelo 6. En este caso, se tiene que para un valor de corrimiento al rojo, $z = 0.07$ y menores, domina la densidad de energía oscura sobre la de materia. En la fig (4.26) se graficó la función de desaceleración. Se obtuvo que, para corrimientos al rojo menores a $z = 0.21$, el universo se expande de manera acelerada.

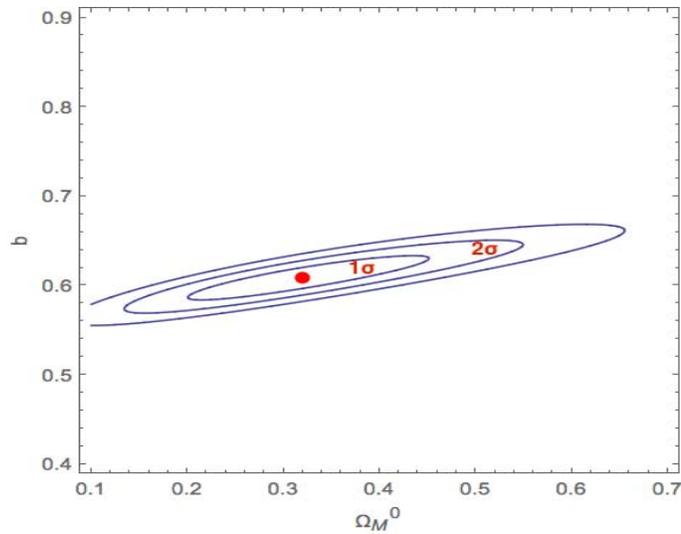


Figura 4.9: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 2σ de incertidumbre para el modelo 6. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

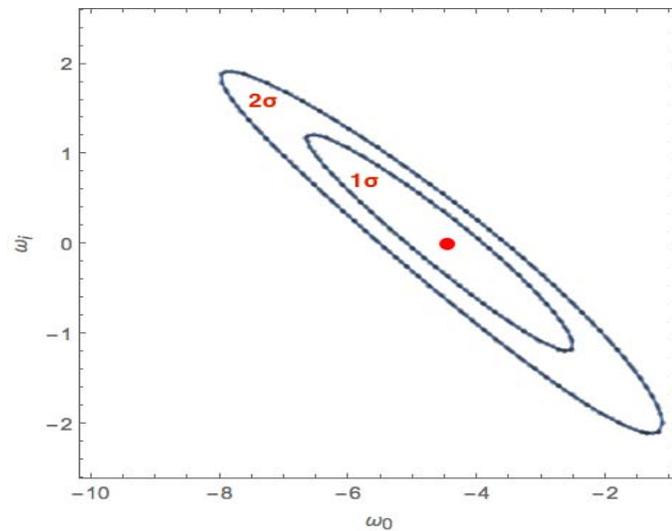


Figura 4.10: Curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) de 1 a 2σ de incertidumbre para el modelo 6. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Para discutir la dinámica de la ecuación de estado, se graficó la misma como función de z , y se presenta el resultado en la fig (4.20). En esta ocasión el valor de la ecuación de estado al día de hoy, resultó ser de $\omega_0 = -4.47$, y con un valor inicial correspondiente a materia. En la figura se aprecia que para zetas menores

al corrimiento al rojo de transición, z_t , la ecuación de estado tiende rápidamente al valor de ω_0 ; mientras que para zetas mayores, la velocidad a la que tiende asintóticamente al valor inicial, es menor. Como se tiene que, $\omega_0 < -1$, se debe cumplir la condición (2.13), lo cual se verifica en la fig (4.28). De la figura anterior, se observa que en el momento en que el universo comienza a acelerarse, el campo comienza a presentar energías negativas, es decir, un campo fantasma es el responsable de la aceleración para este modelo. Por último se utilizaron las ecs (4.1) - (4.2) para determinar el valor de la constante de Hubble, la cual se encuentra reportada en la tabla de resultados, (4.8).

4.7. Modelo 7: $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z_t^2}{1+z_t^2}$

El modelo 7 corresponde a escoger un valor de la potencia, p , igual a 4 en (3.1). Al igual que en el modelo anterior, el espacio de parámetros crece una dimensión debido a la inclusión del corrimiento al rojo de transición, z_t . Se encontró que el valor de la chi-cuadrada en este caso es de 116.463, mientras que el valor de la chi-cuadrada reducida es igual a 1,19, lo que indica que el ajuste a los datos es razonablemente bueno. La integral de probabilidad de la distribución χ^2 , arrojó un valor de 0.098, lo que significa, que en el 9.8% de las ocasiones se obtendrá un valor mayor de χ^2 al reportado.

Las incertidumbres de los parámetros ajustados se calcularon de la misma manera que en el modelo anterior. En la fig (4.11), se muestran las curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) a 2σ de incertidumbre. En (4.12) se presentan las curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) , dentro de un rango de confianza correspondiente a un 95%. La incertidumbre del parámetro z_t se calculó de acuerdo con (B.6).

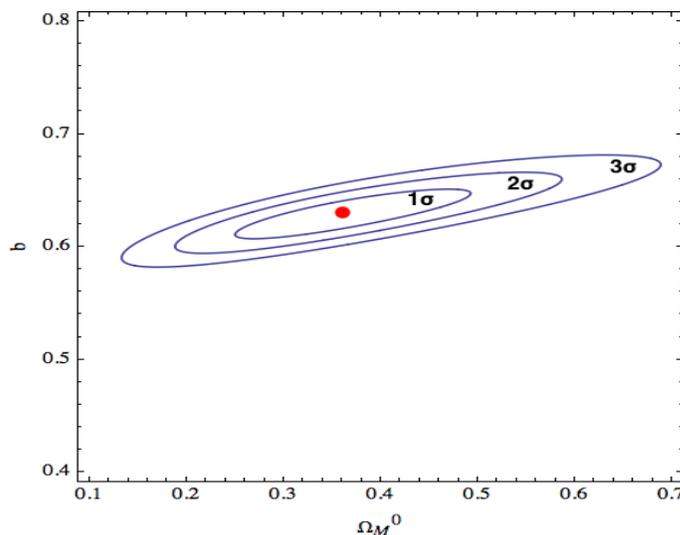


Figura 4.11: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 2 σ de incertidumbre para el modelo 7. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

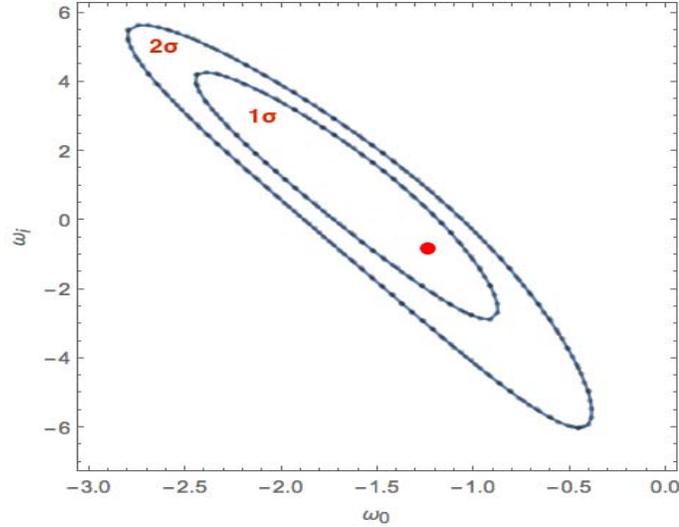


Figura 4.12: Curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) de 1 a 2 σ de incertidumbre para el modelo 7. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Se presentan las gráficas que describen la evolución de los parámetros de materia como función del corrimiento al rojo y del parámetro de desaceleración. De la fig (4.24), se obtiene que para zetas menores a 0.17, la energía oscura domina por encima de la materia. Por otro lado, la aceleración del universo se presenta a partir de valores menores a $z = 0.44$. Se graficó la ecuación de estado, véase fig (4.21), para analizar su comportamiento. Se observa que para valores menores al correspondiente corrimiento al rojo de transición, la ecuación de estado tiende rápidamente a su valor inicial, mientras que para valores mayores se acerca asintóticamente a su valor inicial. Nuevamente se tiene el caso de un valor actual de la ecuación de estado de energía oscura, menor a -1 . En (4.28) se verifica que se cumpla la condición (2.13); también es claro en la imagen, que el punto donde el campo empieza a tener energías negativas, se encuentra entre la región dada por el corrimiento al rojo de transición y el corrimiento al rojo a partir del cual se presenta aceleración. Finalmente, se obtuvo el valor de la constante de Hubble. Todos los resultados se presentan en la tabla (4.8).

4.8. Modelo 8: $\omega_\Lambda = \omega_0 + \omega_1 \frac{z^4}{1+z^4}$

En este caso, la potencia de la ec (3.1) tiene un valor igual a 4. Se cuenta nuevamente con cinco parámetros libres. Se obtuvo un valor de $\chi^2 = 115.804$, y un valor de $\chi_{red}^2 = 1.18$. La integral de probabilidad para este valor de chi-cuadrada reducida, dio un valor de 0.106, lo que corresponde a que en el 10,6% de los casos, se obtendrá un valor mayor de χ^2 al reportado. En la fig (4.13), se muestran las curvas de contorno en el plano de densidad de materia y el parámetro de marginalización b , las cuales se utilizaron para encontrar la incertidumbre de dichos parámetros dentro del rango de 2σ . La fig (4.14) corresponde a las curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) . La incertidumbre del parámetro z_t se cálculo utilizando (B.6).

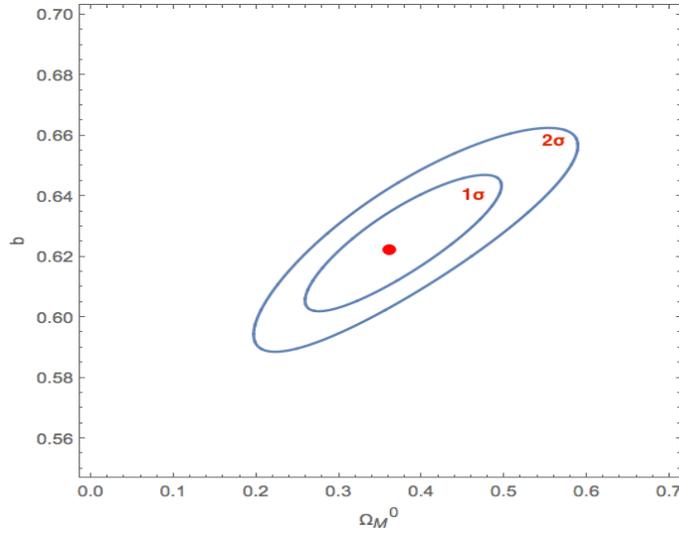


Figura 4.13: Curvas de contorno en el plano (Ω_M^0, b) de 1 a 2 σ de incertidumbre para el modelo 8. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

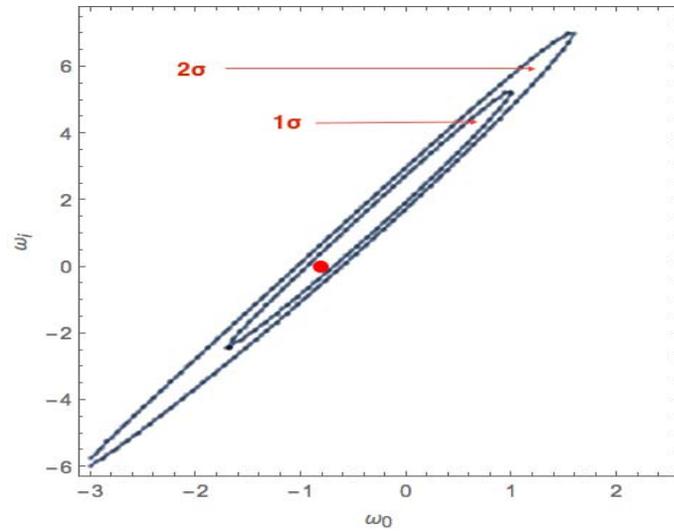


Figura 4.14: Curvas de contorno en el plano (ω_0, ω_{ini}) de 1 a 2 σ de incertidumbre para el modelo 8. El punto rojo corresponde al mejor ajuste.

Se graficaron los parámetros de densidades, (4.24), y se observó que, para z desde cero hasta 0.143, domina la densidad de energía oscura. Por otro lado, en la gráfica (4.26), se muestra la evolución del parámetro de desaceleración. Se obtuvo que la aceleración del universo comienza cuando, $z = 0.15$. La gráfica (4.22), corresponde a la ecuación de estado para el modelo en cuestión. Se observa que para pasos de 0.2 en z , a partir del z_t , la razón con la que cambia la ecuación de estado tanto a la izquierda como a la derecha del punto de transición, es prácticamente la misma. En esta ocasión el valor que se obtuvo para la ecuación de estado al día de hoy, resulta ser mayor a -1 , de modo que si la dinámica proviniera de un modelo de quintaesencia, se trataría de un campo escalar canónico. En la fig (4.28), se verifica que la energía potencial sea mayor que

la energía cinética. Se observa también, que a medida que z crece, la energía cinética y potencial tienden a igualarse. Finalmente se obtuvo el valor de la constante de Hubble, el cual se reportan junto con todos los resultados en la tabla (4.8).

Utilizando las gráficas de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo, podemos analizar su dinámica y dependencia con los parámetros de la ec (3.1). Dado que el modelo 2 consiste de una ω_Λ constante, resulta innecesario examinar la nula evolución de su ecuación de estado. Cuando el corrimiento al rojo de transición, es igual a 1 (véase figs (4.17) a (4.19)), se observa que a medida que va aumentando la potencia en (3.1), la transición entre su valor inicial y su valor observado actualmente se vuelve más abrupta. También se ve, que cuando el valor de la potencia es $p = 1$, el comportamiento que se presenta es distinto ya que no cuenta con un punto de inflexión dentro del intervalo de $z \in [0, \infty)$, por lo que la parametrización CPL tiende más lentamente a su valor inicial que las propuestas en los modelos 4 y 5. Cuando se toma en cuenta el corrimiento al rojo de transición (véase figs (4.20) a (4.22)); se observa que el comportamiento de los modelos es prácticamente el mismo que los anteriores, salvo que para distintas potencias, se tienen diferentes épocas de transición.

De las figs (4.15), (4.23) y (4.24), notamos que el escenario de una constante cosmológica es el que predice una época de equivalencia más tardía, con un valor de $z_{eq} = 0.29$. Por otro lado las demás parametrizaciones tienen corrimientos al rojo de equivalencia oscilando entre valores de 0.14 a 0.18, salvo el caso del modelo 6, donde la época de equivalencia tiene un valor de 0.07, difiriendo por un orden de magnitud respecto a los demás modelos. Para el grupo de ecuaciones de estado dinámicas, con $z_t=1$, se tiene que el valor de la potencia p en la ec (3.1), no influye de manera significativa en la evolución del parámetro de densidad. Más aún, a medida que el valor de la ecuación de estado es más negativo, se presenta una época de equivalencia más temprana. Los modelos donde el corrimiento de transición es un parámetro libre, presentan comportamientos diferentes para distintos valores de p . Por ejemplo, el modelo 8 predice una época de equivalencia más temprana que el modelo 7, aun cuando este último tiene un valor ω_0 más negativo.

Mediante las gráficas del parámetro de desaceleración (ver 4.16), (4.25) y (4.26)), se tiene que la constante cosmológica es el modelo que predice una aceleración más tardía. Como era de esperarse, el comportamiento del parámetro de desaceleración para la ecuación de estado constante es prácticamente el mismo que el de Λ CDM; salvo una diferencia en el corrimiento al rojo de aceleración, las funciones evolucionan de la misma manera. Cuando se tiene una z de transición con valor 1, en (3.1), se observa que los comportamientos del parámetro de desaceleración no son independientes del modelo; sin embargo, este conjunto de modelos empiezan a acelerarse alrededor de la misma época. En el caso en que se cuenta con cinco parámetros libres, la función de desaceleración depende fuertemente de la parametrización de la ecuación de estado utilizada. Para el modelo 7 y 8, se tiene que el aumento en la potencia de la ecuación de estado produce una transición más abrupta entre un universo acelerado y uno en desaceleración, en comparación con el modelo 6.

Modelo	Ω_M^0	Ω_Λ^0	ω_0	ω_{ini}	b	H_0	z_t	p	χ^2	χ_{red}^2	ν	$P(\chi^2; \nu)$
1	$0.32^{+0.24}_{-0.18}$	$0.68^{+0.24}_{-0.18}$	-1	-1	$0.63^{+0.04}_{-0.03}$	$68.47^{+4.35}_{-3.26}$	-	-	117.088	1.16	101	0.131
2	$0.36^{+0.24}_{-0.15}$	$0.64^{+0.24}_{-0.15}$	-1.19 ± 0.27	-1.19 ± 0.27	$0.63^{+0.04}_{-0.03}$	$68.47^{+4.35}_{-3.26}$	-	-	116.765	1.17	100	0.121
3	$0.36^{+0.24}_{-0.16}$	$0.64^{+0.24}_{-0.16}$	$-1.39^{+1.27}_{-2.13}$	0	$0.62^{+0.05}_{-0.03}$	$69.57^{+5.61}_{-3.37}$	1	1	116.284	1.17	99	0.113
4	$0.36^{+0.24}_{-0.16}$	$0.64^{+0.24}_{-0.16}$	$-1.24^{+0.59}_{-1.21}$	0	$0.63^{+0.04}_{-0.04}$	$68.47^{+4.35}_{-4.35}$	1	2	116.477	1.18	99	0.111
5	$0.36^{+0.24}_{-0.15}$	$0.64^{+0.24}_{-0.15}$	$-1.20^{+0.40}_{-0.75}$	0	$0.63^{+0.04}_{-0.04}$	$68.47^{+4.35}_{-4.35}$	1	4	116.690	1.18	99	0.108
6	$0.36^{+0.21}_{-0.16}$	$0.64^{+0.21}_{-0.16}$	$-4.47^{+3.47}_{-3.53}$	0	$0.60^{+0.05}_{-0.04}$	$71.89^{+5.99}_{-4.79}$	0.05 ± 0.02	1	115.345	1.18	98	0.111
7	$0.36^{+0.23}_{-0.17}$	$0.64^{+0.23}_{-0.17}$	$-1.24^{+0.64}_{-1.56}$	$-0.81^{+6.30}_{-5.19}$	$0.63^{+0.04}_{-0.04}$	$68.47^{+4.35}_{-4.35}$	0.33 ± 1.05	2	116.463	1.19	98	0.098
8	$0.36^{+0.23}_{-0.16}$	$0.64^{+0.23}_{-0.16}$	$-0.82^{+2.42}_{-2.18}$	0	$0.62^{+0.05}_{-0.03}$	$69.57^{+5.61}_{-3.37}$	0.21 ± 0.29	4	115.804	1.18	98	0.106

Cuadro 4.1: Tabla de resultados. Ω_M^0 representa el valor del parámetro de densidad de materia al día de hoy; Ω_Λ el valor del parámetro de densidad de energía oscura al día de hoy; ω_0 el valor de la ecuación de estado al día de hoy; ω_{ini} el valor inicial de la ecuación de estado; H_0 el valor de la constante de Hubble al día de hoy; z_t el corrimiento al rojo de transición; χ_{red}^2 el valor de la chi-cuadrada reducida; ν el número de grados de libertad y $P(\chi^2; \nu)$ la densidad de probabilidad de la estadística χ^2 para el modelo correspondiente.

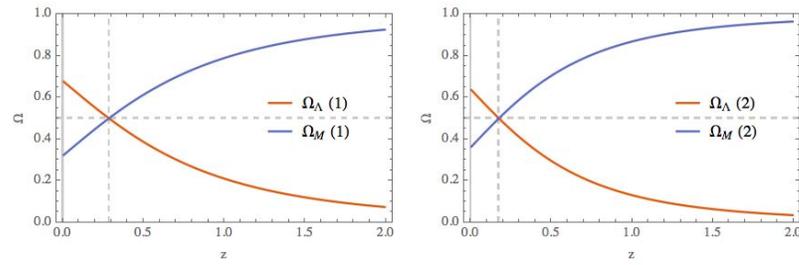


Figura 4.15: Evolución como función del corrimiento al rojo de los parámetros de densidades para los modelos 1 y 2.

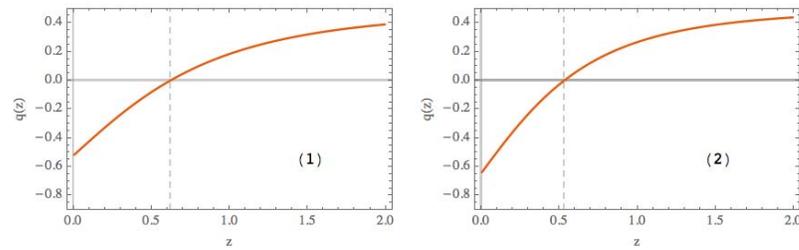


Figura 4.16: Parámetro de desaceleración, $q(z)$, como función del corrimiento al rojo para los modelos 1 y 2. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de desaceleración, z_{des} .

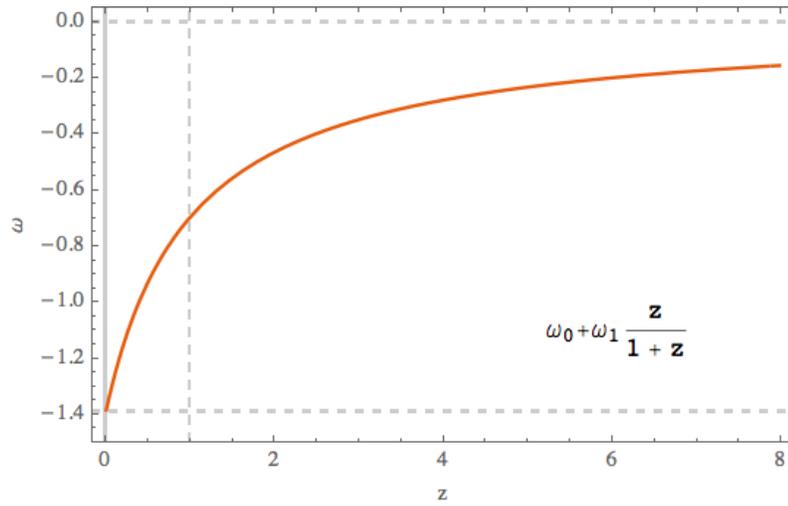


Figura 4.17: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para el modelo 3. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de transición, $z_t = 1$.

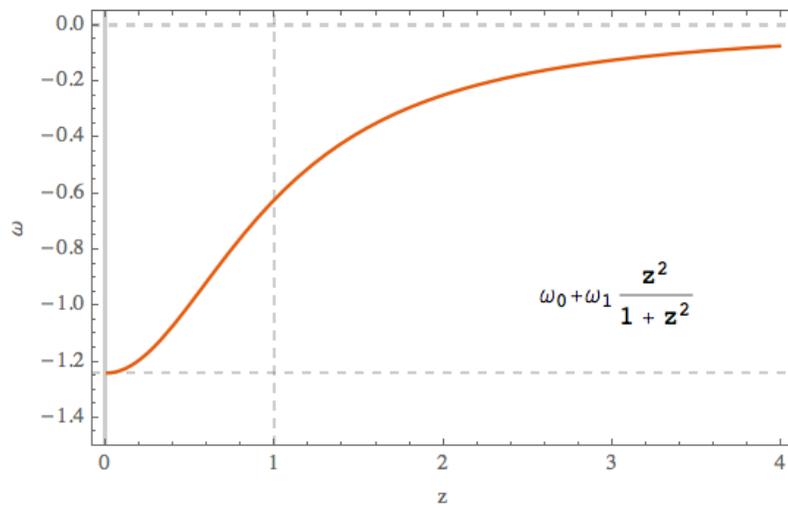


Figura 4.18: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para el modelo 4. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de transición, $z_t = 1$.

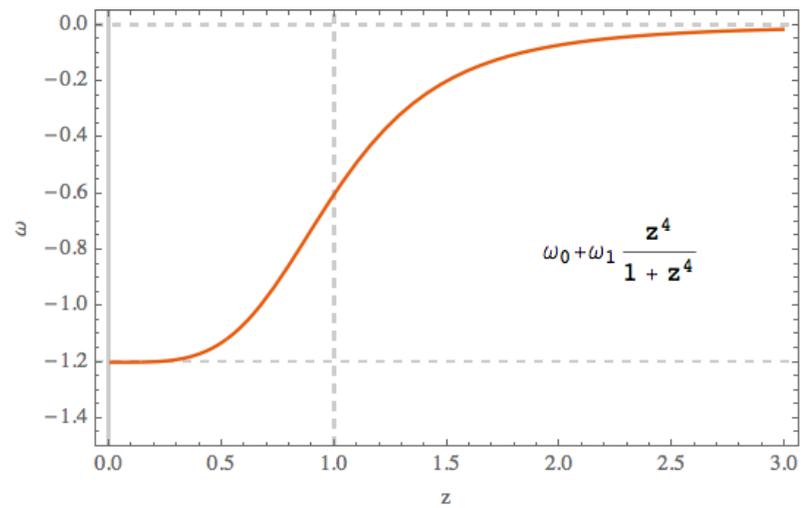


Figura 4.19: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para el modelo 5. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de transición, $z_t = 1$.

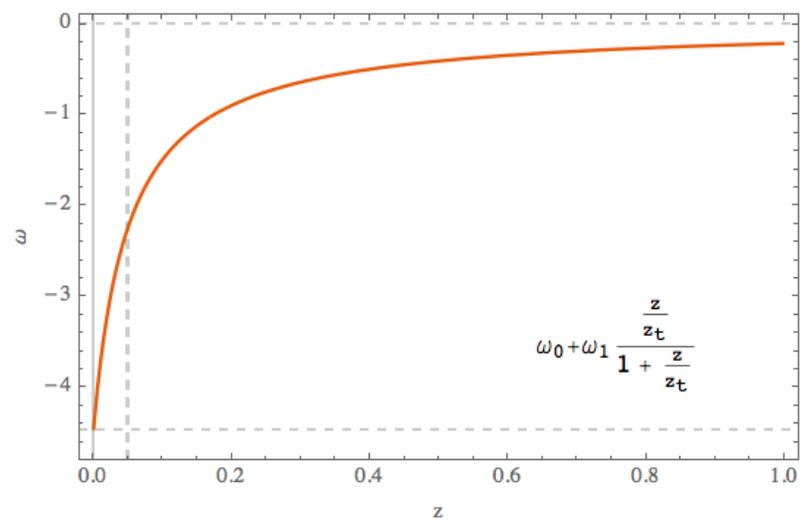


Figura 4.20: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para el modelo 6. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de transición, $z_t = 0.05$.

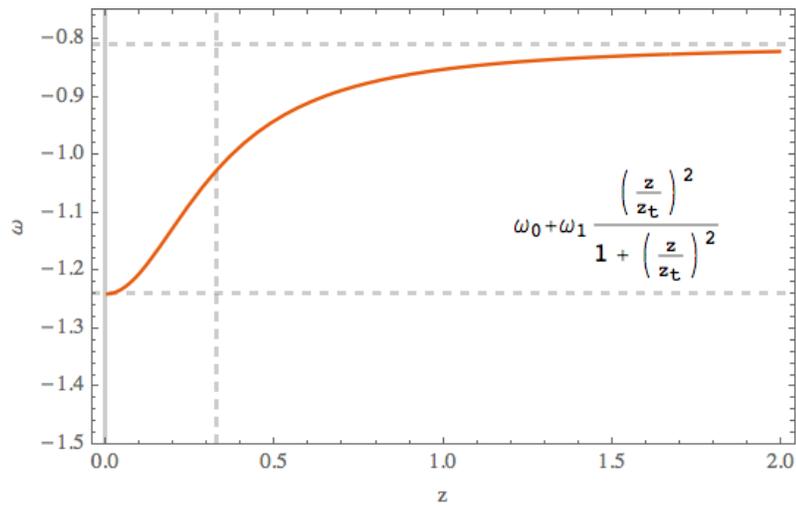


Figura 4.21: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para el modelo 7. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de transición, $z_t = 0.33$.

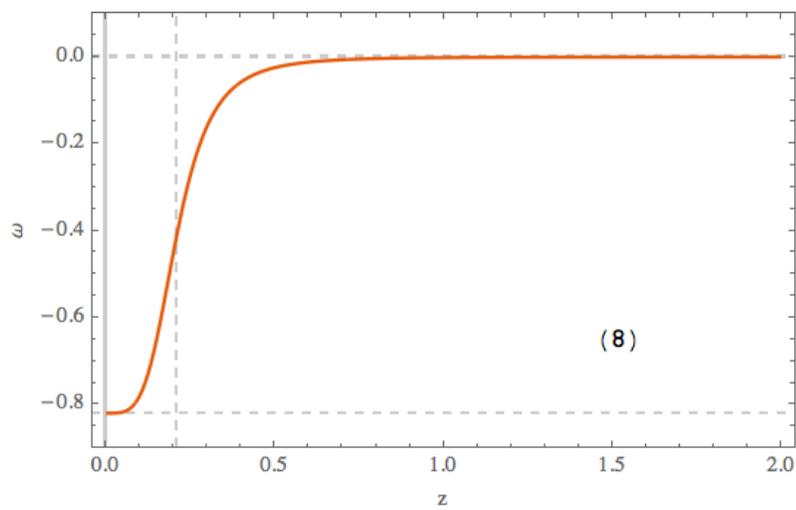


Figura 4.22: Evolución de la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para el modelo 8. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de transición, $z_t = 0.21$.

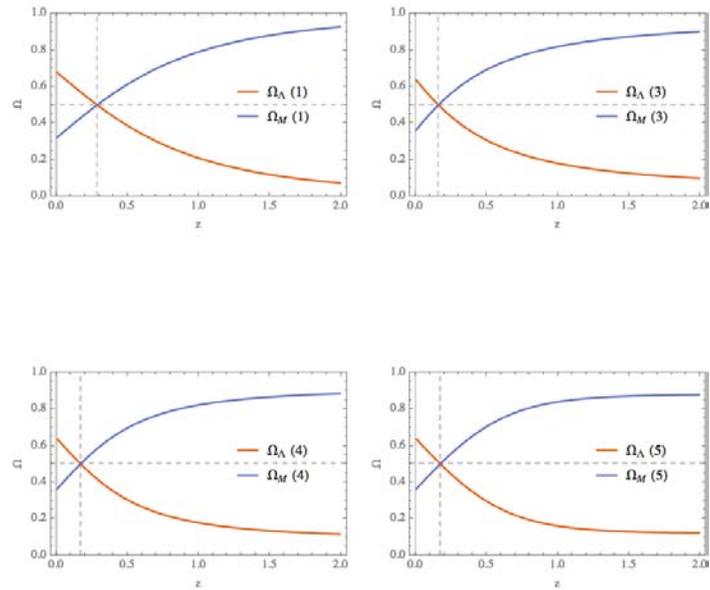


Figura 4.23: Evolución como función del corrimiento al rojo de los parámetros de densidades para los modelos 1, 3, 4 y 5. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica.

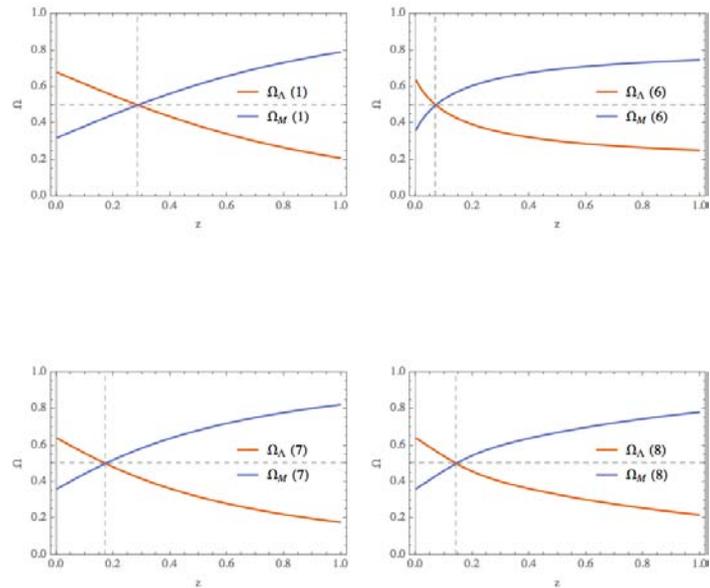


Figura 4.24: Evolución como función del corrimiento al rojo de los parámetros de densidades para los modelos 1, 6, 7 y 8. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica.

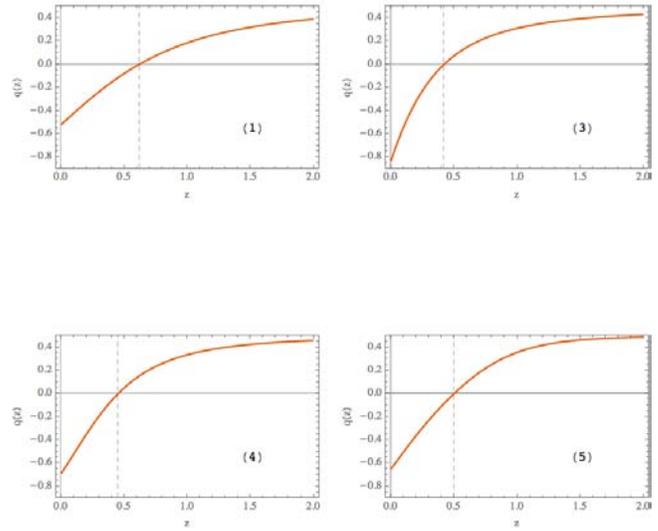


Figura 4.25: Parámetro de desaceleración, $q(z)$, como función del corrimiento al rojo para los modelos 1, 3, 4 y 5. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de desaceleración, z_{des} .

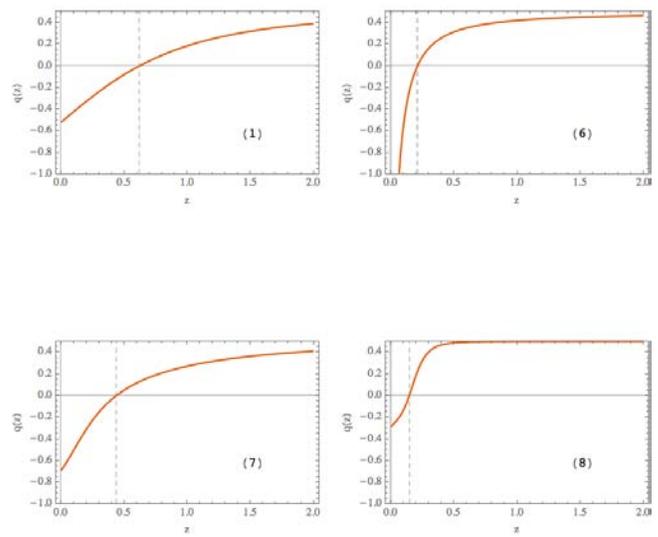


Figura 4.26: Parámetro de desaceleración, $q(z)$, como función del corrimiento al rojo para los modelos 1, 6, 7 y 8. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica. La línea vertical punteada marca el valor del corrimiento al rojo de desaceleración, z_{des} .

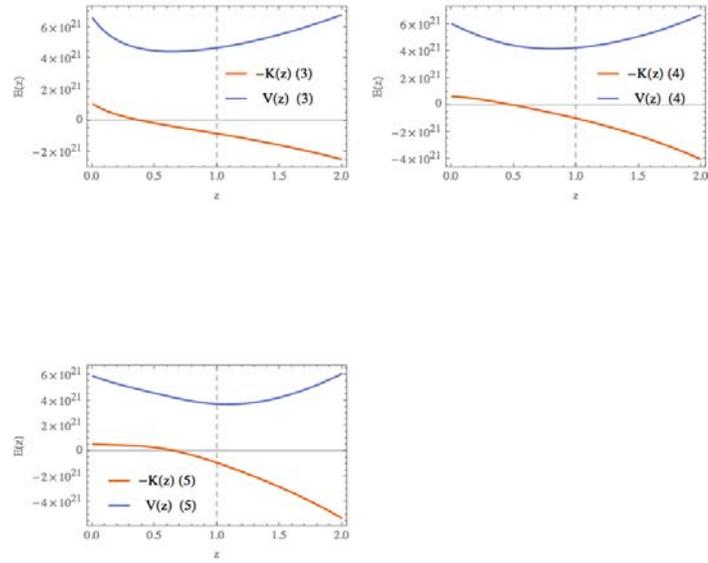


Figura 4.27: Energía cinética y potencial para un campo escalar como función del corrimiento al rojo para los modelos 1, 3, 4 y 5. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica.

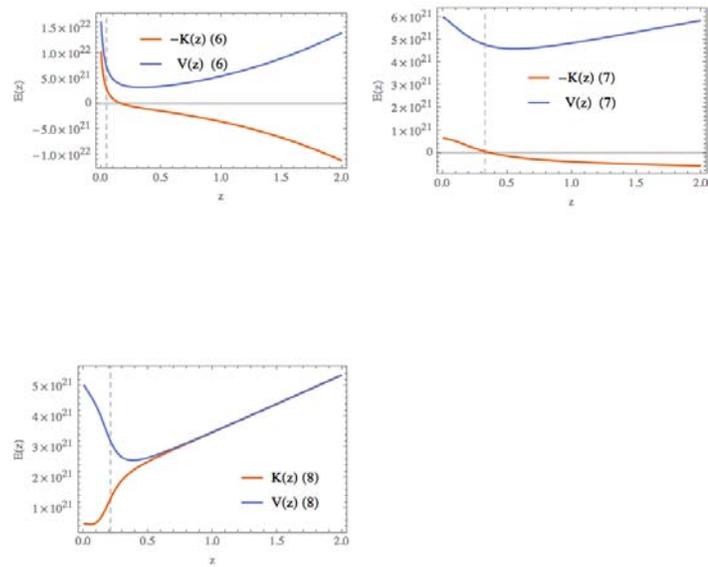


Figura 4.28: Energía cinética y potencial para un campo escalar como función del corrimiento al rojo para los modelos 1, 6, 7 y 8. El número entre paréntesis indica a qué modelo corresponde la gráfica.

Capítulo 5

Conclusiones

La energía oscura y los retos que presenta, son un problema abierto en el modelo cosmológico estándar. La solución más sencilla a este problema es la introducción de una constante cosmológica. También los modelos de campos escalares resultan ser muy atractivos por su sencillez y el hecho de que, sería agradable poder explicar esta componente de energía del universo desde un punto de vista de física de partículas. Por otro lado existen diversas observaciones que ratifican la existencia de la energía oscura y su influencia en la evolución del universo. Actualmente las mediciones más precisas de los parámetros cosmológicos las han realizado dos grupos de investigación; la sonda *Planck* y el *Supernova Legacy Survey*. El primero, estudia el mapa de radiación de fondo cósmica mientras que el segundo hace un análisis espectral con SNe Ia. Dado que no existe un modelo teórico que explique de manera satisfactoria la naturaleza de la energía oscura, se ha popularizado la idea de parametrizar la ecuación de estado de la misma. Utilizando las parametrizaciones y las mediciones astronómicas realizadas, es posible analizar desde un punto fenomenológico la evolución de la energía oscura y el universo.

En este trabajo de tesis se propusieron ocho parametrizaciones distintas para la ecuación de estado de la energía oscura, donde cada modelo es un caso particular de la ecuación (3.1). El primer modelo consiste en tomar una constante cosmológica, es decir $\omega_\Lambda = -1$. En el segundo modelo, la ecuación de estado de la energía oscura es una constante que debe tener un valor $\omega_\Lambda = \omega_0 < \frac{-1}{3\Omega_\Lambda}$. La tercera parametrización es la propuesta por Chevallier, Pollarski y Linder (CPL); que en el caso de nuestra parametrización consiste en tomar $p = 1$ y $z_t = 1$ en la ecuación (3.1). El cuarto y quinto modelo son casos en los cuales el corrimiento al rojo de transición es exactamente $z_t = 1$, y los valores de la potencia son $p = 2$ y $p = 4$ respectivamente. Finalmente en los modelos 6, 7 y 8 se dejan variar los parámetros $\{\omega_0, \omega_{ini}, z_t\}$ bajo ciertas restricciones y se escogen valores de la potencia $p = 1, 2, 4$ respectivamente. Los primeros tres modelos han sido estudiados por ([19] y ([23]), por lo que fue posible comparar de manera directa el valor de ciertos parámetros cosmológicos que se restringieron, como lo son el valor de la ecuación de estado hoy en día y el valor de la constante de Hubble. El objetivo con los modelos restantes, era determinar si el considerar transiciones más abruptas en la ecuación de estado influía en la restricción de los parámetros y en el comportamiento de la evolución cósmica. Se introdujeron parametrizaciones con dependencia cuadrática y cuártica, así como un nuevo parámetro libre, z_t , que se denominó corrimiento al rojo de transición y representa el corrimiento al rojo para el cual la ecuación de estado tiene el valor promedio entre el inicio del universo y actualmente.

Se restringieron los parámetros haciendo un ajuste de mínimos cuadrados sobre la función de magnitud aparente obtenida por cada parametrización. No se considero un valor a priori de la magnitud intrínseca de las SNe Ia, en cambio se optó por marginalizar el valor de la constante de Hubble como se muestra en la ecuación (4.1). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla (4.8). Para determinar el valor de H_0 se asumió una magnitud intrínseca de $M = -19,21$. Las incertidumbres asociadas a los parámetros

cosmológicos, se calcularon obteniendo las curvas de contornos de los mismos en el espacio de parámetros para $\{\Omega_M^0, b, \omega_0, \omega_{ini}\}$. Para el corrimiento al rojo de transición se utilizó la ecuación (B.6) para obtener la incertidumbre a un sigma de confianza. Por último se reportan los valores de la χ^2 y χ_{red}^2 para determinar estadísticamente que modelo es mejor de acuerdo a las observaciones.

El parámetro de densidad de materia se mantuvo constante para todas las parametrizaciones con un valor de $\Omega_M^0 = 0.36$, salvo en el caso de una constante cosmológica, cuyo valor fue $\Omega_M^0 = 0.32$. El resultado anterior difiere del valor reportado en ([23]), donde para el modelo Λ CDM, ecuación de estado constante y parametrización CPL, se tiene un parámetro de densidad de materia de aproximadamente 0.27. Por otro lado los resultados reportados por la sonda *Planck* ([19]) predicen un valor de $\Omega_M^0 = 0.3089$. La diferencia entre los resultados se debe a que tanto el *Supernova Legacy Survey* como en *Planck*, restringen el valor de sus parámetros cosmológicos combinando pruebas de supernovas, WMAP y SDSS DR7, a diferencia de la tesis en cuestión en la que se utilizaron solo pruebas de supernovas. Los valores de la constante de Hubble que se obtuvieron son mas parecidos a ([19]) que a los reportados por ([23]). La diferencia entre los resultados, en este caso, se puede deber al valor que se asumió por nuestra parte para la magnitud intrínseca de las SNe Ia. Se concluyo que el valor de la constante de Hubble no depende fuertemente de la parametrización de la ecuación de estado.

Respecto al valor hoy en día de la ecuación de estado de la energía oscura, se obtuvieron valores muy cercanos a una constante cosmológica, salvo para el caso del modelo 5. Los valores obtenidos son congruentes con ([23]) y ([19]). En particular en el artículo de la sonda *Planck*, se menciona que para valores mayores de $H_0 = 68.2 \frac{Km}{sMpc}$, se favorece el régimen fantasma, lo cual coincide con lo que se observó. Para las ecuaciones de estado dinámicas, se obtuvo que el valor inicial de la ecuación de estado preferido por las parametrizaciones correspondía a $\omega_{ini} = 0$, salvo el modelo 7, estableciendo entonces que en un inició la energía oscura se comportaba como materia y explicando porque inicialmente dominaba la densidad de materia sobre la de energía oscura. Cabe destacar que las incertidumbres que se obtuvieron mediante las curvas de contorno para el valor inicial de la ecuación de estado, resultan ser exageradamente grandes. Lo anterior se puede explicar debido a que el conjunto de supernovas utilizadas tiene corrimientos al rojo en un rango de $[0.02, 0.83]$, es decir para épocas muy cercanas a la actual, por lo que no se espera que la prueba de supernovas sea suficiente por si misma para restringir parámetros del universo temprano. Para poder determinar de manera adecuada las incertidumbres asociadas a ω_{ini} , se requiere de restringir las curvas de contorno con otras pruebas cosmológicas, lo cuál esta fuera del alcance de este trabajo de tesis. Para los modelos que contaban con el parámetro de corrimiento al rojo de transición, se encontró que el valor del mismo depende fuertemente de la potencia en la ec (3.1).

De los valores que se obtuvieron de la prueba de χ^2 , el ajuste que presenta un valor mínimo de la misma es el que se realizo al modelo 4, mientras que el valor máximo corresponde al caso de una constante cosmológica. De modo que mediante la prueba de χ^2 , la generalización a la ecuación de estado de la energía oscura que se propone en este trabajo, mejora el ajuste de los parámetros cosmológicos. La reducción en el valor de χ^2 se debe a que los modelos 2-8 constan de más parámetros libres, el modelo 2 cuenta con 3 parámetros libres, el caso de CPL y los modelos con $z_t = 1$ con potencias 2 y 4 con cuatro parámetros libres, los modelos 6-8 cuentan con cinco parámetros libres. Al calcular la χ_{red}^2 para los modelos, se encontró que la constante cosmológica es la que presenta el valor mínimo con $\chi_{red}^2 = 1.16$. Sin embargo la diferencia entre el "peor."ajuste y el "mejor."es de tan solo $\Delta\chi_{red}^2 = 0.02$, por lo que las otras parametrizaciones son un buen ajuste. Se obtuvo la integral de probabilidad para cada prueba χ^2 y de acuerdo a lo reportado en ([4]) todos los modelos se encuentran en el rango de un buen ajuste para los parámetros. Al restringir el análisis a un punto de vista estadístico, Λ CDM resulta ser el preferido, corroborando lo reportado en ([19]) y ([23]). Cuando se comparan las gráficas de los parámetros de desaceleración y los parámetros de densidades para las ecuaciones de estado presentadas, (4.15) (4.23) (4.24) (4.16) (4.25) (4.26), se observa que la inclusión del corrimiento al rojo de transición, influye de manera significativa en la evolución del universo y en la restricción de los parámetros cosmológicos. En ([19]) se discute la importancia de introducir términos superiores a 1 en la ecuación de estado de CPL, ya que la parametrización CPL se puede interpretar como una expansión en serie de Taylor

a primer orden de la ecuación de estado con $a_0 = 1$. Se concluye que introducir dependencias mayores en z en la ecuación de estado, no afecta de manera significativa la restricción sobre los parámetros cosmológicos. Sin embargo, las propuestas realizadas en el artículo anteriormente mencionado, no incluyen la inclusión del parámetro z_t . De las figuras (4.23) y (4.25) se llegó a la misma conclusión, pero cuando se analizó el comportamiento dinámico presente en (4.24) y (4.26) se encontró que incluir el parámetro de corrimiento al rojo de transición, cambia drásticamente el comportamiento de la energía oscura para cada potencia distinta de z . Más aún, los resultados muestran que para el modelo 6, que es equivalente a la parametrización CPL pero con una z de transición distinta de 1, el valor de la ecuación de estado al día de hoy difiere radicalmente del valor obtenido para CPL y los reportados en la literatura. De igual manera el modelo 8, que consiste en considerar un término cuártico en la ecuación de estado de la energía oscura, es el único que predice un valor de ω_0 que no yace en el régimen fantasma.

La parametrización propuesta en este trabajo mejora en todos los casos el ajuste al modelo de acuerdo con la prueba χ^2 . Al considerar el número de grados de libertad para cada caso y determinar el valor de χ_{red}^2 , se tiene que la constante cosmológica presenta el valor mínimo. Sin embargo, la diferencia con el resto de los modelos no es lo suficientemente grande para favorecer a uno del otro. El hecho de que los ajustes para el valor de la ecuación de estado al día de hoy no sea exactamente igual a menos uno, abre la posibilidad de investigar la expansión acelerada del universo desde un punto de vista de partículas elementales. El utilizar la prueba de supernovas para restringir los parámetros que dictan la dinámica de la energía oscura, permite comparar de manera cualitativa la evolución de la energía oscura y determinar que modelos se ajustan con las observaciones y cuales no. Se concluye entonces que es importante e interesante estudiar la posibilidad de incluir transiciones más abruptas y un corrimiento al rojo diferente a $z_t = 1$ en las parametrizaciones de la ecuación de estado. El comportamiento de la evolución cosmológica depende de que tan abrupto es el cambio del valor de la ecuación de estado y puede, para ciertos valores de la potencia, ajustar mejor con las observaciones cosmológicas realizadas.

Apéndice A

Símbolos de Christoffel y componentes diagonales del tensor de Ricci para la métrica de FRW

A continuación se determinan los símbolos de Christoffel para la métrica (1.14). Dichos símbolos se pueden obtener calculando la métrica inversa y haciendo uso de la ec (1.2). Sin embargo, el procedimiento anterior resulta engorroso y poco ilustrativo por lo que se optó por obtener los Christoffels a partir de las ecuaciones geodésicas. En relatividad general, las curvas geodésicas son aquellas que transportan paralelamente su vector tangente a lo largo de sí mismas, $\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0$. En particular, escogiendo un sistema de coordenadas, se tiene que las curvas geodésicas son aquellas que cumplen la siguiente ecuación:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (\text{A.1})$$

Es fácil demostrar que las ecuaciones geodésicas se pueden derivar de un método variacional. Para ello recordemos que el elemento de línea es, intuitivamente, la distancia infinitesimal entre dos puntos del espacio-tiempo; de modo que resulta natural proponer que la distancia entre dos puntos a y b esté dada por la siguiente funcional

$$S[x] = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda \quad (\text{A.2})$$

Donde, en la ecuación anterior, λ es un parámetro afín y $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Ahora se va a extremizar la funcional anterior, es decir, se va a variar $S[x]$ con respecto a las coordenadas e igualar a cero el resultado. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\left(\int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda\right) \\ &= \int_a^b \delta(\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}) d\lambda = \int_a^b \frac{\delta(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} d\lambda \end{aligned}$$

Queda claro que el denominador dentro de la integral es distinto de cero, por lo que basta igualar la variación del numerador a cero para determinar las ecuaciones geodésicas. Se deben recordar dos cosas: 1) El operador

de derivada total con respecto al parámetro afín y el de variación respecto a las coordenadas conmutan; 2) los términos de derivada total se desvanecen en las fronteras. Teniendo esto en cuenta se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \delta(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) d\lambda \\
&= \int_a^b (\delta(g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \delta(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)) d\lambda \\
&= \int_a^b (g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \delta x^\alpha + 2g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} \dot{x}^\nu) d\lambda \\
&= \int_a^b (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu, \alpha} \delta x^\alpha + \frac{d(2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \delta x^\mu)}{d\lambda} - 2g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu \delta x^\mu - 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu \delta x^\mu) d\lambda \\
&= \int_a^b (-2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu - 2g_{\mu\nu, \alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu, \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) \delta x^\mu d\lambda
\end{aligned}$$

Como la igualdad a cero se debe sostener para toda variación, δ , se tiene que el argumento que se encuentra dentro del signo integral es exactamente cero. Entonces acomodando índices mudos y multiplicando por la métrica inversa, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= -2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + (g_{\alpha\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \alpha} - g_{\mu\alpha, \nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu \\
&\Rightarrow \\
0 &= \ddot{x}^\beta + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} ((g_{\mu\alpha, \nu} + g_{\mu\nu, \alpha} - g_{\alpha\nu, \mu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu) \\
&\Rightarrow \\
0 &= \ddot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu
\end{aligned}$$

Por tanto, se puede obtener la ecuación geodésica por medio de un método variacional. En el caso particular de la métrica (1.14), el término cinético dentro de la funcional tiene la forma

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\dot{t}^2 + \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \dot{r}^2 + a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 + a^2(t) r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2$$

Variando la funcional definida anteriormente para el caso particular de (1.14) y denominando a la derivada del factor de escala con respecto al tiempo comóvil de la partícula como, $\frac{da(t)}{dt} = a'(t)$, se tiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b (-2\dot{t}\delta\dot{t} + \frac{2a(t)a'(t)}{1 - kr^2} \dot{r}^2 \delta t + \frac{2a^2 kr}{(1 - kr^2)^2} \dot{r}^2 \delta r + \frac{2a^2(t)}{1 - kr^2} \dot{r} \delta \dot{r} + \\
&2a(t)a'(t)r^2 \dot{\theta}^2 \delta t + 2a^2(t)r \dot{\theta}^2 \delta r + 2a^2(t)r^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + 2a(t)a'(t)r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \delta t \\
&2a^2(t)r \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \delta r + 2a^2(t)r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 \delta \theta + 2a^2(t)r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \delta \dot{\phi}) d\lambda
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
-2\dot{t}\delta\dot{t} &= -\frac{d(2\dot{t}\delta t)}{d\lambda} + 2\ddot{t}\delta t \\
\frac{2a^2(t)}{1-kr^2}\dot{r}\delta\dot{r} &= \frac{d(\frac{2a^2(t)}{1-kr^2}\delta r)}{d\lambda} - \frac{4a(t)a'(t)}{1-kr^2}\dot{t}r\delta r - \frac{4a^2(t)kr}{(1-kr^2)^2}\dot{r}^2\delta r - \frac{2a^2}{1-kr^2}\ddot{r}\delta r \\
2a^2(t)r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} &= \frac{d(2a^2(t)r^2\dot{\theta}\delta\theta)}{d\lambda} - 4a(t)a'(t)r^2\dot{\theta}t\delta\theta - 4a^2(t)r\dot{r}\dot{\theta}\delta\theta - 2a^2(t)r^2\ddot{\theta}\delta\theta \\
2a^2(t)r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}\delta\dot{\phi} &= \frac{d(2a^2(t)r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}\delta\phi)}{d\lambda} - 4a(t)a'(t)r^2\sin^2(\theta)t\dot{\phi}\delta\phi - \\
&4a^2(t)r\sin^2(\theta)\dot{r}\dot{\phi}\delta\phi - 4a^2(t)r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi}\delta\phi - \\
&2a^2(t)r^2\sin^2(\theta)\ddot{\phi}\delta\phi
\end{aligned}$$

Luego entonces, sustituyendo las observaciones anteriores en la variación del término cinético, eliminando los términos de derivada total en la frontera y agrupando respecto a la variación de las coordenadas se obtienen las ecuaciones geodésicas para la métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$\begin{aligned}
\ddot{t} + \frac{a(t)a'(t)}{1-kr^2}\dot{r}^2 + a(t)a'(t)r^2\dot{\theta}^2 + a(t)a'(t)r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 &= 0 \\
\ddot{r} + \frac{kr}{1-kr^2}\dot{r}^2 - r(1-kr^2)\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)(1-kr^2)\dot{\phi}^2 + 2\frac{a'(t)}{a(t)}\dot{t}\dot{r} &= 0 \\
\ddot{\theta} - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + 2\frac{a'(t)}{a(t)}\dot{t}\dot{\theta} &= 0 \\
\ddot{\phi} + 2\frac{a'(t)}{a(t)}\dot{t}\dot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\cot(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} &= 0
\end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones geodésicas con la ec (A.1) se obtienen los símbolos de Christoffel distintos de cero para la métrica (1.14)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^0 &= \frac{a(t)a'(t)}{1-kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^0 &= a(t)a'(t)r^2, & \Gamma_{\phi\phi}^0 &= a(t)a'(t)r^2\sin^2(\theta) \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2(\theta)(1-kr^2), & \Gamma_{0r}^r &= \frac{a'(t)}{a(t)} \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta), & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{0\theta}^\theta &= \frac{a'(t)}{a(t)}, & \Gamma_{0\phi}^\theta &= \frac{a'(t)}{a(t)}, & \Gamma_{\theta\phi}^\theta &= \cot(\theta)
\end{aligned}$$

Una vez que se tienen los símbolos de Christoffel, es posible calcular las componentes del tensor de curvatura y del tensor de Ricci. Recuérdese que dada una base coordenada, las componentes de los dos tensores previamente mencionados se obtienen de los coeficientes de la conexión así

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu\Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu\Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha\Gamma_{\beta\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha\Gamma_{\beta\mu}^\lambda \quad (\text{A.3})$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \quad (\text{A.4})$$

Las ecuaciones de campo de Einstein se escriben en función del tensor de Ricci y el escalar de curvatura, por lo que en el caso más general se deberían de calcular las diez componentes independientes del tensor de Ricci (para una variedad cuatro dimensional). En el caso particular del universo FRW, el tensor de energía momento es el de un fluido perfecto y diagonal. Como el tensor de Einstein es proporcional al $T_{\mu\nu}$, basta

entonces con computar los elementos diagonales del $R_{\mu\nu}$. De manera explícita, estas componentes son

$$\begin{aligned}
R_{00} = R_{0\alpha 0}^{\alpha} &= \partial_{\alpha}\Gamma_{00}^{\alpha} - \partial_0\Gamma_{0\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\lambda} \\
&= -\partial_0\left(\frac{3a'(t)}{a(t)}\right) - \left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2\delta_k^j\delta_j^k \\
&= -3\frac{a''(t)}{a(t)} + 3\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 - 3\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 \\
&= -3\frac{a''(t)}{a(t)}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} = R_{r\alpha r}^{\alpha} &= \partial_{\alpha}\Gamma_{rr}^{\alpha} - \partial_r\Gamma_{r\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha}\Gamma_{rr}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda}^{\alpha}\Gamma_{r\alpha}^{\lambda} \\
&= \partial_0\Gamma_{rr}^0 - \partial_r\Gamma_{r\theta}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{r\phi}^{\phi} + \Gamma_{\alpha 0}^{\alpha}\Gamma_{rr}^0 + \Gamma_{\alpha r}^{\alpha}\Gamma_{rr}^r \\
&\quad - \Gamma_{rr}^{\alpha}\Gamma_{r\alpha}^r - \Gamma_{r\theta}^{\alpha}\Gamma_{r\alpha}^{\theta} - \Gamma_{r\phi}^{\alpha}\Gamma_{r\alpha}^{\phi} \\
&= \partial_0\Gamma_{rr}^0 - \partial_r\Gamma_{r\theta}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{r\phi}^{\phi} + \Gamma_{\theta 0}^{\theta}\Gamma_{rr}^0 + \Gamma_{\phi 0}^{\phi}\Gamma_{rr}^0 \\
&\quad + \Gamma_{\theta r}^{\theta}\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^{\phi}\Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\theta}^{\theta}\Gamma_{r\theta}^{\theta} - \Gamma_{r\phi}^{\phi}\Gamma_{r\phi}^{\phi} \\
&= \frac{a''(t)a(t)}{1 - kr^2} + 2\frac{a'^2(t)}{1 - kr^2} + 2\frac{k}{1 - kr^2}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} = R_{\theta\alpha\theta}^{\alpha} &= \partial_{\alpha}\Gamma_{\theta\theta}^{\alpha} - \partial_{\theta}\Gamma_{\theta\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\theta\theta}^{\lambda} - \Gamma_{\theta\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\theta\alpha}^{\lambda} \\
&= \partial_0\Gamma_{\theta\theta}^0 + \partial_r\Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_{\theta}\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} + \Gamma_{r0}^r\Gamma_{\theta\theta}^0 + \Gamma_{\phi 0}^{\phi}\Gamma_{\theta\theta}^0 \\
&\quad + \Gamma_{rr}^r\Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\phi r}^{\phi}\Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta r}^{\theta}\Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^0\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} - \Gamma_{\theta\phi}^{\phi}\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \\
&= a''(t)a(t)r^2 + 2a'^2(t)r^2 + 2kr^2
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} = R_{\phi\alpha\phi}^{\alpha} &= \partial_{\alpha}\Gamma_{\phi\phi}^{\alpha} - \partial_{\phi}\Gamma_{\phi\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\phi\phi}^{\lambda} - \Gamma_{\phi\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\phi\alpha}^{\lambda} \\
&= \partial_0\Gamma_{\phi\phi}^0 + \partial_r\Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_{\theta}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} + \Gamma_{r0}^r\Gamma_{\phi\phi}^0 + \Gamma_{\theta 0}^{\theta}\Gamma_{\phi\phi}^0 \\
&\quad + \Gamma_{rr}^r\Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\theta r}^{\theta}\Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^0\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} - \Gamma_{\phi\phi}^{\theta}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} - \Gamma_{\phi\phi}^r\Gamma_{\phi\phi}^r \\
&= a''(t)r^2\sin^2(\theta) + 2a'^2(t)r^2\sin^2(\theta) + 2kr^2\sin^2(\theta)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Apéndice B

Método de mínimos cuadrados

Usualmente resulta de interés determinar las características de un sistema físico, que a su vez dependen de otras propiedades inherentes al mismo. En la mayoría de los experimentos, en lugar de realizar un número de observaciones de una sola cantidad, se realizan un serie de N mediciones de una pareja de puntos (x_i, y_i) , en donde la variable y depende del valor de la variable independiente x . Una vez realizadas las mediciones necesarias para el experimento, se requiere contar con un modelo matemático que prediga el comportamiento del fenómeno a estudiar. La relación entre las variables, depende del comportamiento esperado del fenómeno a estudiar. Por lo general se proponen funciones que simulen la forma de evolucionar de la variable independiente como función de la dependiente y de ciertos parámetros. Sin embargo, el valor de dichos parámetros es desconocido a priori, de manera que se requiere de contar con una manera de determinar los mismos. El método de mínimos cuadrados, permite encontrar el valor del conjunto de parámetros, determinar su incertidumbre y cuantificar que tan adecuado resulta el ajuste propuesto de acuerdo a los datos experimentales u observacionales. A continuación se describe dicho método.

El ajuste por medio de mínimos cuadrados hace uso del método de máxima probabilidad y de la distribución χ^2 . Supóngase entonces que se realiza un experimento donde se han hecho N mediciones de una cantidad física y_i , la cual es función de otra cantidad independiente que se denotara por x_i , donde el índice i corre desde $i = 1, \dots, N$. Se asume que cada valor de y_i proviene de una población padre, la cual sigue una distribución normal con media $y_0(x_i)$ y desviación estándar σ_i . Luego entonces, dada la suposición Gaussiana de la distribución de las observaciones, se puede expresar la probabilidad de realizar una medición y_i con desviación estándar σ_i y media $y_0(x_i)$ de la siguiente manera.

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y_0(x_i)}{\sigma_i}\right)^2\right) \quad (\text{B.1})$$

Ahora, supóngase que se cuenta con un modelo, digamos $y(x_i)$, que se espera reproduzca el comportamiento del fenómeno a estudiar y cuenta con un conjunto de parámetros $\{ a_k \}$, con $k < N$. De manera análoga, se tiene que la probabilidad de obtener el mismo conjunto de mediciones con el nuevo modelo viene dado por la siguiente ecuación, la cuál es función de los parámetros a determinar.

$$P'(a_1, a_2, \dots) = \prod_{i=1}^N P'_i = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right)^2\right) \quad (\text{B.2})$$

El método de máxima probabilidad establece que la ec (B.1) es la máxima probabilidad que existe para obtener el conjunto de las N mediciones. De modo que los valores de los parámetros a determinar en la

ec (B.2), son aquellos que maximicen el valor de P' . Ahora, dado que el factor que se encuentra frente a la exponencial en (B.2) no depende de los parámetros, maximizar P' equivale a minimizar el valor del argumento de la exponencial. A dicho argumento se le denotara por χ^2 , ya que básicamente es la definición de la distribución chi-cuadrada (véase [4]) pero aplicada en un contexto diferente.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

De modo que el método de mínimos cuadrados establece que para encontrar el valor de los parámetros de la función a ajustar, $y(x_i)$, es necesario minimizar (B.3). Para minimizar la distribución χ^2 , se toman derivadas parciales de la distribución respecto a los parámetros y se igualan a cero, lo que da como resultado un sistema de ecuaciones, cuya solución son los valores óptimos de los $\{a_j\}$. Cabe destacar que si el sistema de ecuaciones resultante no es lineal, se trata a χ^2 como una función continua, la cual describe una hipersuperficie en el espacio de parámetros de dimension k .

Para una muestra suficientemente grande de eventos, la probabilidad de medir un solo evento toma la forma de una distribución normal centrada en los valores que minimizan a χ^2 , a'_j , y donde \mathcal{A} es función de los otros $k - 1$ parámetros y σ_{a_j} la incertidumbre asociada al parámetro a_j (véase [4]).

$$P'(a_i) = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a_j - a'_j}{\sigma_{a_j}} \right)^2\right) \quad (\text{B.4})$$

Se puede entonces demostrar ([4]) que utilizando la ec (B.4), e insertándola en la ec (B.2), se obtiene la siguiente expresión para la distribución χ^2 , siendo \mathcal{C} una función de los otros $k - 1$ parámetros.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= -2 \ln(P'(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots)) + 2 \ln\left(\prod_j \frac{1}{\sigma_{a_j} \sqrt{2\pi}}\right) \\ &= \frac{a_j - a'_j}{\sigma_{a_j}} + \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Nótese que tomando la segunda derivada de (B.5) respecto al parámetro a_j y despejando para σ_{a_j} , se obtiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{a_j} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_j^2} \right)^{-1}} \quad (\text{B.6})$$

De modo que se cuenta entonces con una expresión analítica para la incertidumbre del parámetro. Sin embargo la expresión anterior es solo válida cuando se cumple la suposición de una distribución normal, ec (B.4). En particular, esta condición no se satisface cuando los parámetros se encuentran fuertemente acoplados, y resulta necesario emplear otros métodos para determinar la incertidumbre asociada de los mismos. Dada la similitud que existe entre la ec (B.3) y la distribución estadística χ^2 , se emplearan los métodos estadísticos de la misma para determinar la dispersión asociada a cada parámetro.

Una manera para determinar la incertidumbre en los parámetros fuertemente acoplados de la ec (B.5) es realizando curvas de contorno sobre la función χ^2 en el espacio de parámetros. Supóngase que existen dos parámetros, $\{a_j, a_k\}$, cuya covariancia es distinta de cero; el método de curvas de contorno consiste en graficar en el plano (j, k) , la curva correspondiente a un cambio de $\delta\chi^2$, respecto al valor mínimo, evaluando el resto de los parámetros en su valor óptimo, y variando a_j y a_k . Las curvas que se obtienen son cerradas

y su inclinación con respecto a los ejes del plano indica el grado de correlación entre los parámetros. En el caso que no exista correlación, se espera que el resultado sean elipses concéntricas en el valor mínimo de χ^2 . Para determinar un rango de incertidumbre de una desviación estándar, se tiene que escoger un valor de $\delta\chi^2 = 2,30$, que corresponde a una probabilidad de 68,3 %, de que el valor real del parámetro se encuentre dentro del rango de incertidumbre determinado, asumiendo una distribución con dos parámetros libres. De igual forma para obtener un rango de 2σ y 3σ , se toma $\delta\chi^2 = 6,14$ y $11,83$ respectivamente.

La distribución χ^2 es una estadística que caracteriza la dispersión existente entre la frecuencias observadas de las frecuencias esperadas. El numerador de la ec (B.3) es una medida de la diferencia que existe entre el modelo esperado y las mediciones experimentales, mientras que el denominador es la dispersión estadística esperada de las mediciones. Para que una medición sea confiable, se espera que en promedio, el valor del numerador coincida con el del denominador, de modo que cada frecuencia contribuya en una unidad a la distribución. Sin embargo, lo anterior resulta no ser del todo cierto ([4]), ya que se puede demostrar que el valor esperado de la distribución χ^2 está dado por la siguiente expresión, en donde ν es el número de grados de libertad del modelo, N la cantidad de puntos experimentales con los que se cuenta y N_c el número de parámetros libres por ajustar.

$$\langle\chi^2\rangle = \nu = N - N_c \quad (\text{B.7})$$

Resulta entonces conveniente definir una nueva cantidad denominada chi-cuadrada reducida, χ_{red}^2 , cuyo valor de expectación sea exactamente 1.

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (\text{B.8})$$

Se espera que si el modelo propuesto es congruente con las observaciones, entonces el valor de la ec (B.8) sea muy cercano a 1. Valores mucho mayores a la unidad en el valor esperado de χ_{red}^2 se pueden deber a diversos factores como lo son: una mala suposición en el modelo propuesto para el ajuste de los datos, mediciones incorrectas, mala determinación en las incertidumbres de los datos, elección incorrecta en la función de probabilidad. De igual manera valores mucho menores a uno en χ_{red}^2 pueden indicar una mala asignación de incertidumbres o un desconocimiento sobre el experimento en cuestión (véase [4]). Las observaciones anteriores se resumen en decir que se tendrá un ajuste adecuado a los datos experimentales siempre y cuando el valor de la ec (B.8) sea cercano a 1.

La distribución χ^2 cuenta con una prueba integral para determinar la probabilidad de observar un valor de χ_{red}^2 igual o mayor al calculado. La distribución de probabilidad para la función (B.5) con ν grados de libertad y su integral de probabilidad se muestran a continuación (véase [8]).

$$p_\chi(x^2; \nu) = \frac{(x^2)^{\frac{\nu-2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\nu/2} \times \Gamma(\nu/2)} \quad (\text{B.9})$$

$$P_\chi(\chi^2; \nu) = \int_{\chi^2}^{\infty} p_\chi(x^2; \nu) dx^2 \quad (\text{B.10})$$

Si el valor de la ec (B.10) se encuentra razonablemente cercano a 1, entonces la distribución propuesta describe de manera adecuada la dispersión de los datos. Por el contrario si la probabilidad resulta mucho menor a la unidad, se tiene que o la distribución asumida genera un mal ajuste o la muestra de datos no es representativa de la población padre de la cual se extrajo. En el caso que se cuente con un valor de $\chi_{red}^2 = 1$, se espera obtener una probabilidad asociada del 50 %, ya que estadísticamente los valores observados de (B.5) excederán la norma la mitad de la ocasiones. La integral de probabilidad permite cuantificar que tan bueno es un ajuste respecto a las observaciones, usualmente la probabilidad en la ec (B.10) se encontrará cercana al 50 % siempre y cuando el valor de (B.5) sea menor a 1.5 (véase [4]).

Bibliografía

- [1] Alam, Ujjaini, et al. “Is there supernova evidence for dark energy metamorphosis?” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 354 (2004): 275+. Print.
- [2] Allen, S, et al. “Improved constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters.” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383 (2008): 879-896. Print.
- [3] Arndt, R.A. & M.H. Mac Gregor. “Nucleon-nucleon phase shift analysis by chi-squared minimization.” *Methods in Computational Physics* 6 (1996): 253-296. Print.
- [4] Bevington, Philip R. *Data reduction and error analysis for the physical sciences*. 1969. Reprint. New York: McGraw-Hill, 2003. Print.
- [5] Cheng, Ta. *Relativity, gravitation, and cosmology: a basic introduction*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2010. Print.
- [6] Contardo, Gertrud. “Analysis of light curves of type Ia supernovae.” Max-Planck-Institut für Astrophysik, May. 2001. Web.
- [7] Copeland, Edmund, et al. “Dynamics of dark energy.” *International Journal of Modern Physics D*, 115 (2006): 1753-1936. Print.
- [8] Emerson, Pugh, & Winslow George. *The analysis of physical measurements*. Addison-Wesley, 1966. Print.
- [9] Frieman, Joshua, et al. “Dark energy and the accelerating universe.” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 46 (2008): 385-432. Print.
- [10] Goobar, Ariel, & Leibundgut Bruno. “Supernova cosmology: legacy and future.” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 61 (2011): 251-279. Print.
- [11] Guy, J, et al. “The Supernova Legacy survey 3-year sample: Type Ia Supernovae photometric distances and cosmological constraints.” *Astronomy & Astrophysics*, 523 (2010): n.pag. Print.
- [12] Kolb, Edward, & Turner Michael. *The early universe*. New York: Westview Press, 1994. Print.
- [13] Krauss, Lawrence, & Chaboyer Brian. “Age estimates of globular clusters in the Milky Way: constraints in cosmology.” *Science*, 299 (2003): 65-70. Print.
- [14] Montani, Giovanni. *Primordial Cosmology*. Singapore: World Scientific, 2011. Print.
- [15] Morandi, Andrea & Sun Ming. “Probing dark energy via galaxy cluster outskirts.” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457 (2016): 3266 - 3284. Print.
- [16] Peebles, J, & Ratra Bharat. “The cosmological constant and dark energy.” *Reviews of Modern Physics*, 75 (2003): 559-606. Print.

- [17] Perlmutter, S, et al. “Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae.” *The Astrophysical Journal* 517 (1999): 565-586. Print.
- [18] Planck Collaboration (Ade, P.A.R. et al.). “Planck 2015 results. XII. Cosmological parameters.” *Astronomy & Astrophysics* (2016): n.pag. Print.
- [19] Planck Collaboration (Ade, P.A.R. et al.). “Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity”. *Astronomy & Astrophysics* A16 (2015): n.pag. Print.
- [20] Porter, Molly, Watzke Megan. “Russian Doll” galaxy clusters reveal information about dark energy.” *nasa.gov*. NASA, Apr. 2016. Web. http://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/russian-doll-galaxy-clusters-reveal-information-about-dark-energy.html
- [21] Riess, Adam, et al. “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.” *The Astronomical Journal*, 116 (1998): 1009-1038. Print.
- [22] Schutz, Bernard F. *A first course in general relativity*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Print.
- [23] Sullivan, M, et al. “SNLS3: Constraints on dark energy combining the Supernova Legacy Survey three year data with other probes.” *The Astrophysical Journal* 737 (2011): n.pag. Print.
- [24] Weinberg, Steven. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, 1972. Print.