



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

Estudio del mezclado en medios estratificados por medio  
del movimiento de burbujas

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

**P R E S E N T A:**  
LAMBERTO DÍAZ DAMACILLO

**TUTOR PRINCIPAL:**  
DR. JOSÉ ROBERTO ZENIT CAMACHO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

**COMITÉ TUTOR:**  
DR. JUAN A. HERNÁNDEZ CORDERO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

DR. MARCO AURELIO RAMÍREZ ARGÁEZ  
FACULTAD DE QUÍMICA

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, septiembre de 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico esta obra a mis dos grandes amores:  
A mi esposa y a mi hijo, Wendy y Héctor Odón...

*Bastó un instante para que fuesen parte de mi vida, y no bastará toda mi vida para agradecer cada instante con ustedes.*

# Agradecimiento especial

Agradezco de manera especial a tres pilares de mi ser.

A mi madre Reina Damacillo Ahuejote...

*Por darme la vida, por recordarme que lo más importante de la vida es encontrar la felicidad. Pese que es un estado emocional relativo, lograrlo es el anhelo de toda madre hacia su hijo. Recuerdo con gratitud tu firmeza, pieza importante en mi educación conductal, ahora que soy padre creo entenderlo; también tus actitudes para con nosotros que con orgullo y sin titubeo puedo darte las gracias por darme la felicidad de ser mi madre.*

A mi padre Lamberto Díaz Mauricio...

*Gracias por ser mi padre, aún tus pláticas, consejos y sugerencias son de suma importancia para mí, es un orgullo tenerte como papá.*

A mi “mamarina” Judith Nejapa Lara...

*No tengo palabras para describir tanto aprecio, respeto y amor fraternal hacia una persona. Sentimientos equivalentes serían lo que hacia una madre uno puede experimentar. Gracias por tanto y tanto cariño que me has demostrado, gracias Mamá, mi “mamarina”.*

Dónde hemos de ir a parar, si somos hombres ordinarios. Si hemos de perecer y hemos de morir; muramos y perezamos pues; que hasta los dioses lo hicieron.

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser mi alma máter.

Al Centro Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme el apoyo económico a través de la beca doctoral 2013-2015, lo que permitió dedicarme completamente a mis estudios.

Las capacidades personales y profesionales son fortalecidas en el entorno socio-laboral. Agradezco de manera extensa a varios seres humanos que me permitieron enriquecerme académicamente y personalmente, entre ellos:

Al Dr. Roberto Zenit, por su dirección, por sus propuestas, por la libertad profesional que enriquece a su grupo de investigación, por su confianza depositada en mí persona, y reconozco sin duda su profesionalismo, su exigencia y su carisma por la ciencia.

A mis compañeros por sus comentarios que fueron sumamente valiosos para mi aprendizaje y desarrollo profesional: Ernesto Mancilla, Carlos Palacios, Dante Hernández, Christophe Barbosa, Óscar Chavez, Alberto Beltrán. Muchas Gracias.

A mis amigos Wiener F. Cruz y Benjamín Beltrán por las pláticas de la vida cotidiana y profesional que enriquecieron a ampliar panoramas de mi relativamente estrecha visión de la vida.

Al Dr. Fermín Viniegra que me indujo aceptar la matemática como herramienta fundamental de la física. Gracias por sus enseñanzas de mecánica, las mejores desde mi humilde opinión.

Al Dr. Francisco Mandujano, por su apoyo y motivación para introducirme al mundo de la simulación numérica de la dinámica de fluidos.

Al Dr. Ángel Ruiz, por su colaboración paralela en el desarrollo del trabajo de investigación. Gracias por tus comentarios, sugerencias y correcciones.

## IV

To Dr. Eric for his professional support during my doctoral internship at the University of Michigan, thanks for your understanding. You are a great human being.

To Mauro Rodríguez, for your support in developing the numerical part of my doctoral thesis. Thanks for sharing your code.

A mi amigo Guillem Monros, por las pláticas sobre burbujas, procesamiento y presentación de datos; por sus recetas y críticas gastronómicas; y por la valoración propia de nuestra diversidad mexicana.

# Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	XIII
Resumen	1
Abstract	3
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Objetivos	12
<b>2. Arreglo experimental y técnicas de medición</b>	<b>13</b>
2.1. Tamaño, forma y velocidad de las burbujas	16
2.2. Medición del volumen del <i>drift</i>	17
2.3. Parámetros adimensionales	17
<b>3. Resultados</b>	<b>20</b>
3.1. Caso estable	24
3.1.1. Modelado de la evolución del volumen <i>drift</i>	26
3.2. Caso inestable	33
3.2.1. Condición para el comienzo de la inestabilidad del volumen arrastrado	35
<b>4. Mezclado</b>	<b>38</b>
4.1. Operación de mezclado	38
4.2. Mezclado de sistemas estratificados	40
4.2.1. Mezclado inducido por burbujas individuales	41
4.2.2. Mezclado inducido por una cadena de burbujas	42
4.2.3. Modelo matemático de mezclado	48
<b>5. Simulación numérica</b>	<b>55</b>
5.1. Ecuaciones Gobernantes	56
5.1.1. Sistema de ecuaciones a resolver	57
5.2. Ecuaciones de Estado	58

5.3. Burbuja de aire ascendiendo en agua . . . . .	59
5.4. Burbuja ascendente cruzando una interfase líquido-líquido . .	65
5.5. La burbuja como marco de referencia . . . . .	69
<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Índice de figuras

1.1.	(a) Estratificación con variación abrupta de la densidad. (b) Sistema estratificado con variación continua de la densidad. Para ambas figuras, el eje de las abscisas denotado por $\rho$ representa la densidad, y el eje de las ordenadas representada por $h$ representa la dirección vertical (altura). . . . .	6
2.1.	Arreglo experimental usado. . . . .	14
2.2.	(a) Imagen binaria de un experimento típico y (b) Perfil de la medición del volumen arrastrado, estimado a través de la aplicación del segundo teorema del centroide de Pappus. $R$ es la superficie generada (la cual es rotada) y $c_x$ es el centroide de $R$ . . . . .	16
3.1.	Evolución del <i>drift</i> con respecto al tiempo. Se muestran dos casos: (a) estable ( $Re = 12.55$ , $We = 1.97$ and $Fr = 0.81$ ); e (b) inestable ( $Re = 33.33$ , $We = 7.94$ and $Fr = 0.92$ ). El tiempo mostrado es adimensional: $t^* = tU_B d_e^{-1}$ , donde $t$ es el tiempo ordinario. Los colores representan a los dos fluidos: en rojo el líquido del fondo, y en azul el fluido superior. Ambos casos corresponden a la mezcla 85 % glicerina-agua, con un $\Gamma=0.047$ . . . . .	21
3.2.	La relación de aspecto (a) y la velocidad de la burbuja (b) como función de la dirección vertical adimensional $z^*$ . Los resultados experimentales mostrados corresponden a la mezcla 85 % glicerina-agua, con $\Gamma = 0.047$ . . . . .	23
3.3.	El volumen adimensional, $V^*$ , como función del tiempo adimensional $t^*$ para el caso estable. Los casos mostrados en (a) corresponden a experimentos realizados con $\Gamma = 0.047$ y diámetros diferentes; en (b) el diámetro fue constante ( $D_b = 4.06 \text{ mm}$ ) y $\Gamma$ es variado. En todos los casos mostrados corresponden a la mezcla 85 % glicerina-agua. Los parámetros de todos los experimentos (números en la leyenda del gráfico) están listados en la Tabla 3.1 . . . . .	25

- 3.4. El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable: comparación entre la predicción del modelo y experimentos. La gráfica muestra un caso particular:  $Re=12.55$ ,  $We=1.97$ , y  $Fr=0.81$ . . . . . 30
- 3.5. El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable: comparación entre la predicción del modelo y experimentos. Los casos mostrados en (a) corresponden a experimentos realizados para un valor fijo del contraste de densidad ( $\Gamma = 0.047$ ) y diferentes diámetros; por otro lado, en (b) se fijó el diámetro ( $D_b = 4.06$  mm) y se varió el contraste de densidad. En todos los casos el líquido usado es una mezcla de 85 % glicerina-agua. Los parámetros de los experimentos (números en las leyendas) se encuentran en la Tabla 3.1. Las líneas corresponden a las predicciones del modelo, considerando  $\lambda = 0.004Re$ . . . . . 31
- 3.6. Valores máximos del volumen adimensional  $V^*$  como función del número de Reynolds de la burbuja  $Re$ . Los valores de los números adimensionales para cada experimento están listados en la Tabla 3.1. Las líneas corresponden a las predicciones de la ecuación 3.3. . . . . 32
- 3.7. Área del *drift* como función del tiempo  $t^*$  para los datos mostrados en la Figura 3.8(b). Los parámetros experimentales son mostrados en la Tabla 3.1. . . . . 35
- 3.8. (a) Mapa de número de Reynolds ( $Re$ ) con la relación de aspecto ( $\chi$ ) para todos los sistemas estratificados: mezcla 85 % glicerina agua ( $\circ \bullet \blacklozenge$ ); mezcla 75 % glicerina-agua ( $\square \blacksquare \blacktriangleright$ ); mezcla 65 % glicerina-agua( $\diamond \blacklozenge \blacktriangleright$ ); mezcla 50 % glicerina-agua( $\triangle \blacktriangle \blacktriangleright$ ). La línea magenta muestra la transición de trayectoria rectilínea a oscilante de la burbuja propuesta por Zenit y Magnaudet [31]. (b) Una serie de imágenes que muestra los tipos de estelas, estables e inestables, correspondiente al sistema 85 % glicerina-agua. Todas las imágenes fueron capturadas a la misma distancia entre la burbuja y la interfase en estado inicial. La numeración de los símbolos en (b) corresponden a los mostrados en (a). . . . . 37
- 4.1. Etapas del proceso de mezclado. (a) Sistema estratificado en reposo con la interfaz completamente definida y quieta, (b) escena de perturbación de la interfaz producida por el ascenso de una burbuja, y (c) evolución y homogenización de las regiones perturbadas. . . . . 40

4.2. Concentración como función del tiempo,  $t^*$ , para los dos tipos de movimiento de burbuja. Los casos mostrados corresponden a los experimentos mostrados en la Figura 3.1. Las líneas punteadas muestran el ajuste extrapolado correspondiente a los últimos  $5t^*$  de los datos: caso estable (línea punteada roja),  $\bar{C} = c_1 - c_2 t^*$ , ( $c_1 = 5.7 \times 10^{-2}$ ,  $c_2 = 8.3 \times 10^{-4}$ ); caso inestable (línea punteada azul),  $\bar{C} = c_3 \exp(-c_4 t^*)$   $c_3 = 1.9 \times 10^{-1}$ ,  $c_4 = 7.0 \times 10^{-2}$ . . . . . 42

4.3. Mezclado a distintas frecuencias de burbujeo. Los parámetros físicos usados en dichos experimentos se resumen en la Tabla 4.1. . . . . 43

4.4. (a) Imagen experimental de la estela formada por el paso consecutivo de burbujas. (b) Imagen esquemática del mecanismo de formación de la estela. En el centro de ambas imágenes se observa el volumen desplazado por el paso continuo de burbujas, a los lados se notan las regiones de fluido pesado que caen verticalmente por los lados de la columna, se estiran y plegan. . . . . 45

4.5. Evolución en el tiempo de la concentración para los casos referentes a la tabla 4.1. La barra de colores representa la escala de concentración, el color azul implica un valor de concentración cero, mientras el rojo implica la concentración máxima, 100. . . . . 46

4.6. Variación de la concentración respecto a la vertical para los 4 casos citados en la tabla 4.1. Los símbolos representan resultados experimentales y las líneas sólidas predicciones teóricas: azul,  $t = 0$  s; roja,  $t = 450$  s; negra,  $t = 750$  s; magenta,  $t = 1040$  s. Note que el tiempo reportado no corresponde al tiempo adimensional  $t^*$ , debido a que se desea observar el grado de mezcla a un mismo tiempo en distintas condiciones de proceso. 48

4.7. Estela primaria detrás de la burbuja con volumen equivalente a  $V_w = \epsilon V_B$ . Por simplicidad, se considera que  $\epsilon = 1$ . . . . . 52

4.8.	(a) Mapa de número de Reynolds ( $Re$ ) con la relación de aspecto ( $\chi$ ) para todos los sistemas estratificados: mezcla 85 % glicerina agua ( $\circ \bullet \blacklozenge$ ); mezcla 75 % glicerina-agua ( $\square \blacksquare \blacklozenge$ ); mezcla 65 % glicerina-agua( $\diamond \blacklozenge \blacklozenge$ ); mezcla 50 % glicerina-agua( $\triangle \blacktriangle \blacktriangle$ ). La línea magenta muestra la transición de trayectoria rectilínea a oscilante de la burbuja propuesta por Zenit y Magnaudet [31]. La flecha verde indica la dirección en la cual se obtiene un mejor mezclado. (b) Una serie de imágenes que muestra los tipos de estelas, estables e inestables, correspondiente al sistema 85 % glicerina-agua. Todas las imágenes fueron capturadas a la misma distancia entre la burbuja y la interfase en estado inicial. La numeración de los símbolos en (b) corresponden a los mostrados en (a). . . . .	54
5.1.	Posición inicial de la burbuja. . . . .	61
5.2.	Campo de presión adimensional inicial $\left( p^* = \frac{p}{\rho \cdot c_{ref}^2} \right)$ . . . . .	61
5.3.	Burbuja ascendente. Configuración de la burbuja de aire ascendiendo en agua para diferentes pasos de tiempo adimensional, $t^* = t \cdot c_{ref}/l_c$ . . . . .	62
5.4.	Burbuja ascendente. Patrones de flujo al paso de la burbuja. Los campos de velocidad, vorticidad y líneas de corriente corresponden a la burbuja en $t^* = 6.0$ . $t^* = t \cdot c_{ref}/l_c$ . . . . .	64
5.5.	Posición inicial de la burbuja en el sistema trifásico. . . . .	66
5.6.	Burbuja ascendente a través de la interfase líquido-líquido. Configuración de la burbuja de aire en un sistema trifásico para diferentes tiempos adimensionales, $t^* = t \cdot c_{ref}/l_c$ . . . . .	67
5.7.	Burbuja ascendente a través de la interfase líquido-líquido. Configuración de la burbuja de aire en un sistema trifásico para diferentes tiempos adimensionales, $t^* = t \cdot c_{ref}/l_c$ . . . . .	68
5.8.	Campo de velocidad alrededor de un cuerpo esférico con distinta condición de frontera: (a) condición de no deslizamiento y (b) condición de no penetración. Ambos con $Re=16$ . . . . .	70
5.9.	Patrones de flujo alrededor de la burbuja para dos formas distintas: (a) esférica, $\chi = 1$ y (b) elíptica, $\chi = 1.5$ . $Re=16$ . Condición de no deslizamiento. . . . .	72
5.10.	El volumen adimensional, $V^*$ , como función del tiempo adimensional $t^*$ para el caso estable. Los casos mostrados corresponden a resultados según la leyenda en el gráfico. Ambas con parámetros correspondientes a [1] de la Tabla 3.1. . . . .	74
5.11.	El volumen adimensional, $V^*$ , como función del tiempo adimensional $t^*$ para el caso estable: simulación. . . . .	74

5.12. Volumen desplazado para dos casos con distinto $Re$ . (a) $Re=20$ y (b) $Re=50$ . . . . .	75
5.13. Volumen desplazado para dos casos con distinta condición de frontera, ambos con $Re=50$ . (a) Condición de no deslizamien- to y (b) Condición de no penetración. . . . .	76

# Índice de tablas

2.1. Propiedades físicas de las mezclas de glicerina-agua usadas en este estudio. Los subíndices 1 y 2 se refieren a los fluidos del fondo y superior, respectivamente. $\mu$ , es la viscosidad del fluido (expresada en mPa·s); $\rho$ es la densidad ( $\text{kg m}^{-3}$ ), $\sigma$ , es la tensión superficial( $\text{mN m}^{-1}$ ). . . . .	14
2.2. Valores experimentales de los parámetros adimensionales de los sistemas usados: $\Gamma$ , Re, We y Fr. . . . .	19
3.1. Parámetros adimensionales mostrado en las Figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7. El número de experimento corresponde a la etiqueta puesta en las figuras. . . . .	26
4.1. Parámetros físicos de cuatro casos experimentales usados para inducir el mezclado. $f^* = fd_e/U_B$ , donde $f$ es la frecuencia de burbujeo. . . . .	43
4.2. Parámetros de proceso de cuatro casos experimentales para la validación del modelo. $\bar{u}$ y $D_L$ , fueron determinados usando las ecuaciones 4.11 y 4.12, respectivamente. . . . .	52
5.1. Propiedades físicas y parámetros usados en la simulación del sistema trifásico. . . . .	65

# Resumen

En este trabajo se presenta el estudio de una burbuja individual que asciende a través de un sistema estratificado por densidad. El sistema consta de dos capas, fluido pesado en el fondo, y ligero en la parte superior, ambos newtonianos y en reposo. Los líquidos son mezclas de glicerina-agua, donde el fluido del fondo tiene sal común diluida (comercial) para que su densidad sea mayor con respecto al fluido de arriba. El tamaño de las burbujas fue variado para obtener un amplio rango de formas y velocidades terminales de la misma. En todos los casos se observa un arrastre de fluido pesado hacia el ligero, cuando la burbuja cruza la interfaz líquido-líquido.

Para burbujas pequeñas, las cuales ascienden en trayectorias rectilíneas, el volumen arrastrado, *drift*, regresa y se reincorpora al fondo después de un tiempo sin mezclarse. Para este caso, el volumen del *drift* es estable y su tamaño es inversamente proporcional al número de Reynolds de la burbuja, también depende proporcionalmente del número de Froude densimétrico. Para modelar el sistema, se propone un modelo heurístico que es capaz de predecir los resultados experimentales.

Para burbujas grandes, debido a que la trayectoria cambia a zig-zag o espiral, el volumen arrastrado se vuelve inestable y se separa de la burbuja, dejando regiones de fluido pesado en el ligero. Esta configuración inestable local puede ser un mecanismo esencial para un mayor y más efectivo mezcla-

do. Se usó la técnica del Plano de Fluorescencia Inducida por Láser (*Planar Laser Induced-Fluorescence, PLIF*) para la adquisición de imágenes que resultan de la interacción del ascenso de burbujas con el sistema estratificado. Para demostrar que las burbujas con estelas inestables causan un mayor grado de mezcla, se usaron las imágenes obtenidas de la técnica PLIF para calcular la evolución en el tiempo de la concentración promedio. Posteriormente, se muestra que el mezclado inducido por el movimiento de burbujas son bastante diferentes para los casos con estelas inestables respecto a las estables, para ello se realizaron experimentos donde se observó el paso consecutivo de burbujas, una detrás de otra, a través de la interfaz líquido-líquido. También se propuso un modelo matemático de mezclado obteniendo una buena concordancia entre el modelo y los experimentos.

Adicionalmente, se realizaron simulaciones numéricas de una burbuja que asciende y cruza una interfaz formada por dos fluidos diferentes. El principal objetivo fue intentar replicar las condiciones experimentales para el ascenso de burbujas individuales. Sin embargo, debido a que no fue posible añadir el efecto de la tensión superficial, las comparaciones fueron de manera cualitativa. El método numérico está basado en un esquema WENO (*Weighted Essential Non-Oscillatory*), cuya principal propiedad es evitar oscilaciones espúreas cercanas a frentes abruptos.

# Abstract

The dynamics of a single air bubble rising through a stably-stratified sharp interface, separating two Newtonian miscible liquids, are studied experimentally. Both liquids were water-glycerin mixtures; salt was added to the lower fluid to make its density higher than the upper one. The size of the bubbles was varied to span a range of terminal velocities and shapes. The rising bubbles, crossing the interface, drag along denser fluid into the upper lighter fluid as a drift volume. The Planar Laser-Induced Fluorescence (PLIF) technique was used to quantify this drift volume. For small bubbles, rising in a straight trajectory, the lower, denser fluid returns to the lower layer. For this case, the drift volume is stable and its maximum was found to be inversely proportional to the bubble Reynolds number, but proportional to the Froude number. A heuristic model is proposed to predict the size and evolution of the drift volume in the stable case. The model predictions showed good agreement with the experimental results. For larger bubbles, rising with a zig-zag or spiral trajectory, the drift volume becomes unstable and detaches from the bubble, leaving a trail of heavier fluid blobs in the lighter phase. This locally unstable configuration could potentially overturn, leading to fluid mixing.

To show that bubbles with unstable wakes cause a greater degree of mixing, experiments with several consecutive bubbles, one after another, were

performed. The images obtained from the PLIF technique were used to calculate the time evolution of the average concentration. Subsequently it was shown that mixing induced by the movement of bubbles are vastly different for cases with unstable wakes respect to stable. A mathematical model for the mixing process was proposed, with good agreement with experiments. From the model it is possible to extract the mixing coefficient for each case. Finally, some numerical simulations of rising gas bubbles through interfaces between different fluids were conducted. The main objective was to try to replicate the experimental conditions for the rise of individual bubbles. However, since it was not possible to add the effect of surface tension, comparisons were of qualitative nature. The numerical method is based on a scheme WENO (Weighted Essential Non-Oscillatory), whose main property is to avoid spurious oscillations near discontinuities.

# Capítulo 1

## Introducción

Un fluido estratificado es aquel con variaciones de densidad en la dirección opuesta a la de la gravedad [22]. La variación de la densidad puede presentarse de dos maneras: abrupta o continua. Ambos casos se muestran en la Fig. 1.1 El primer caso se caracteriza por tener una interfaz que divide a los fluidos, donde la densidad cambia de manera súbita con la altura: al fondo se encuentra el fluido más pesado y arriba el más ligero. Un sistema con variación continua de densidad se encuentra comúnmente en la naturaleza, tal como en el océano o en la atmósfera. En este caso la variación de la densidad se da gradualmente (no se presentan interfaces definidas): teniendo en la parte más profunda al fluido con mayor densidad, y en la parte más alta al fluido más ligero. En este estudio en particular se abordará un sistema estratificado de dos capas de fluidos newtonianos y miscibles entre sí, por lo que estarán separadas, inicialmente, por una interfaz, tal como se esquematiza en la Fig. 1.1(a). Los detalles del sistema experimental se presentan en el Capítulo 2.

Por otro lado, otro ingrediente importante en este estudio es aquel glóbulo de fluido confinado en otro: la burbuja. Usualmente se usa el término bur-

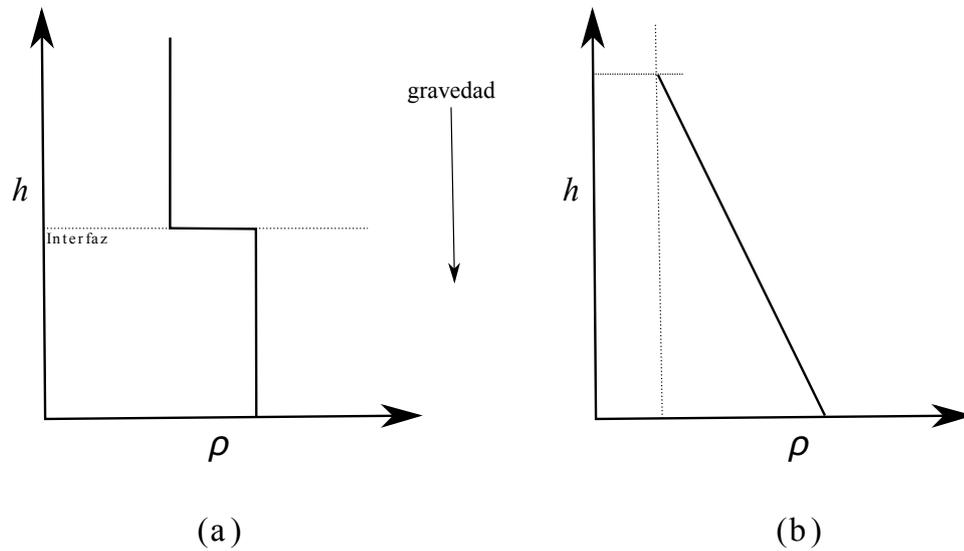


Figura 1.1: (a) Estratificación con variación abrupta de la densidad. (b) Sistema estratificado con variación continua de la densidad. Para ambas figuras, el eje de las abscisas denotado por  $\rho$  representa la densidad, y el eje de las ordenadas representada por  $h$  representa la dirección vertical (altura).

buja para referirse a un sistema bifásico donde una porción de gas, limitada por una interfaz, se mueve en un medio líquido (fase continua). En la Tierra, la gravedad está siempre presente y cuando la densidad de una fase dispersa difiere de la fase continua entonces pueden presentarse dos escenarios: (1) la fase dispersa se hunde si su densidad es mayor que la fase continua; (2) si la densidad de la fase dispersa es menor entonces asciende, como sucede con una burbuja.

Los flujos bifásicos son tan comunes que es difícil no darse cuenta de su existencia. Los encontramos en un gran número de sistemas de la vida cotidiana y en la práctica de la ingeniería. Los sistemas naturales y de ingeniería donde las burbujas juegan un papel de suma importancia son diversos, que van desde los reactores nucleares a los motores de combustión interna, de equipos de refinación de petróleo a los procesos de transporte de contaminantes y/o nutrientes en ambientes acuáticos, etc. El diseño y la optimización de

estos sistemas e incluso la mera comprensión de su funcionamiento hace que sea necesario el conocimiento de los procesos fundamentales que involucran la física de las burbujas, que junto con el estudio del flujo de fluidos, el transporte de masa y energía se logra cumplir dicho cometido.

El movimiento de partículas y burbujas en medios estratificados es de suma importancia por sus aplicaciones en el medio ambiente y en la industria. En la naturaleza, el movimiento vertical de burbujas a través de los reservorios acuáticos, tales como lagos y océanos, favorecen a mantener un ecosistema saludable [7]. Similarmente, las capas estratificadas en el océano tienden a mezclarse debido al movimiento vertical de una amplia variedad de especies acuáticas, induciendo el transporte de nutrientes por todo el medio acuático [19]. En el caso de aplicaciones industriales, tal como el proceso de refinación secundaria del acero, la inyección de burbujas contribuyen a la homogenización de la concentración de una especie y/o la temperatura del baño líquido [30].

La presencia de burbujas en la mayoría de los sistemas es de forma deliberada por el hombre. En otras palabras, la formación e interacción de burbujas en los sistemas son controlados por el ser humano para lograr un fin específico. No obstante, existen algunos sistemas donde la formación de burbujas son de manera natural y espontánea. En estos casos con frecuencia presentan problemas en vez de beneficio. Un caso en el cual las burbujas no son del todo deseables es por ejemplo en los procesos donde ocurre cavitación. Las burbujas formadas viajan a zonas de mayor presión e implosionan. Si las burbujas de vapor se encuentran cerca o en contacto con una pared sólida cuando implosionan, las fuerzas ejercidas por el líquido al aplastar la cavidad dejada por el vapor dan lugar a presiones localizadas muy altas, ocasionando picaduras sobre la superficie sólida, que progresivamente redu-

ce su desempeño mecánico por el cual fue fabricado. Otro ejemplo, en un panorama distinto, es la formación de burbujas de hidrógeno ( $H_2$ ) durante el vaciado de aluminio líquido a moldes. Durante el proceso de solidificación, un átomo de hidrógeno disuelto se une a otro átomo de hidrógeno para formar la molécula gaseosa  $H_2$ , dando lugar a un material poroso con propiedades mecánicas indeseables. Irónicamente la solución de dicho proceso espontáneo de formación de poros en el metal de aluminio es la interacción del baño metálico con burbujas. Se lleva a cabo la insuflación de gas argón desde el fondo del baño, las burbujas ascienden y purgan el metal de hidrógeno disuelto. Proceso similar ocurre en el vaciado de cobre, pero en este caso el problema es el oxígeno disuelto lo que produce un material con inclusiones de óxidos de cobre,  $Cu_2O$ . En la ingeniería metalúrgica es común encontrar estos contrastes de afectación-beneficio por parte de las burbujas. Un caso adicional a los anteriores es el proceso de refinación del acero. A diferencia de los otros, la remoción de impurezas no solo se logra insuflando gas en el fondo, sino que es necesario una segunda interacción: la de una tercera fase. Así que este proceso consta de un sistema trifásico, dos líquidos y un gas (burbuja). Entre los líquidos se forma un sistema estratificado: el metal fundido en el fondo y la escoria en la parte superior. El papel que juegan las burbujas es homogenizar el baño metálico para que la interacción entre líquidos a través de la interfaz que los separa sea óptimo. Esto es que el fenómeno de transferencia de masa de la impureza desde el metal líquido hacia la escoria sea idónea, es decir que su decremento sea significativo. No obstante, las burbujas que cruzan la interfaz metal-escoria arrastran una cierta cantidad de metal líquido hacia la escoria, causando una pérdida de material valioso [16].

El estudio de burbujas o partículas individuales cruzando una interfaz líquido-

líquido es una simplificación útil para la comprensión de los principios dinámicos que rigen los sistemas naturales e industriales. Se han llevado a cabo un gran número de estudios experimentales y numéricos sobre la caracterización de la naturaleza del arrastre, el cual es directamente relacionado con el concepto de *drift* [11]. La velocidad y la forma de la burbuja, así como el comportamiento de la interfaz antes y después del paso de la burbuja, han sido usados para la descripción del arrastre. En ambos casos, natural e industrial, el fluido arrastrado está asociado al volumen del *drift* de Darwin. Cuando una burbuja se mueve a través de un fluido se produce el *drift*, esto es la modificación permanente de la distribución espacial de las partículas materiales del fluido. La cantidad del volumen que es arrastrado es proporcional al volumen del cuerpo. Darwin [11] introduce el concepto de *drift*, donde posteriormente en 1994, Eames *et al.* [13], implementan el concepto de *partial drift*. El *drift volume* propuesto por Darwin se conforma por el *partial drift* (volumen positivo), y por un reflujo (volumen negativo). El volumen positivo es aquel volumen arrastrado por encima de la posición de la interfaz inicial, y el volumen negativo se compone por la porción del *drift* debajo de la posición inicial de la interfaz. Bataille *et. al.* [1], realizaron un experimento donde dos fluidos con una ligera diferencia de densidades fueron puestos en contacto tal que se formó un gradiente de densidad marcado en la interfaz entre los fluidos. El líquido del fondo fue coloreado para ser distinguido del líquido menos denso. Se liberaron burbujas debajo de la interfaz, la cual fue distorsionada debido al paso de las burbujas. Ellos encontraron que el volumen del *drift* fue el mismo que el cálculo de Darwin, es decir la mitad del volumen de la burbuja [11, 13, 14]. Por su lado, estudios numéricos [26, 8, 9, 13] también han encontrado el valor calculado por Darwin. Recientemente, se ha argumentado que a pequeños números de

Reynolds, la magnitud del *drift* inducido se incrementa cuando decrece el  $Re$ , y que la forma del cuerpo juega un papel muy importante en dicho valor [19]. En contraste, Bush y Eames [7] sugieren que a valores de  $Re$  grandes, el volumen *drift* es independiente de la forma de la burbuja; y solo se modifica la longitud de la estela primaria más que el volumen del *drift*.

Usando un arreglo similar al usado en este estudio, Bonhomme et. al. [5] estudiaron la transición de burbujas individuales ascendiendo y cruzando la interfaz entre dos líquidos newtonianos inmiscibles, con diferencia en viscosidad y densidad. Ellos encontraron varios comportamientos tales como: pequeñas burbujas atrapadas en la interfaz, burbujas esféricas que modifican su estado de movimiento antes y después de cruzar la interfaz con dependencia directa al contraste de viscosidades, y burbujas de casquete esférico que cambian su velocidad ligeramente durante el cruce de la interfaz. Las transiciones fueron caracterizadas por los números adimensionales Arquímedes y Bond,  $Ar = d_e^3 g / \nu_1^2$  y  $Bo = \rho_1 g d_e^2 / \sigma_{12}$ , respectivamente, donde  $d_e$  es el diámetro equivalente de la burbuja,  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $\nu_1$  y  $\rho_1$  son la viscosidad cinemática y densidad del fluido del fondo, respectivamente, y  $\sigma_{12}$  es la tensión interfacial entre los líquidos inmiscibles. Observaron que cuando la burbuja cruza la interfaz, ésta arrastra una cantidad significativa del fluido del fondo, presentando un complejo dinamismo al introducirse dentro del fluido superior. Observaron que, en todos los casos, el volumen del *drift* del fluido más denso retorna a su configuración original después de un tiempo. Recientemente, Bayareh et. al. [2] estudiaron numéricamente la dinámica del ascenso de una gota deformable en un fluido linealmente estratificado. Los investigadores encontraron que la combinación de los efectos de inercia y de empuje son los responsables de caracterizar la dinámica de la gota ascendente. También, reportaron la formación de un vórtice secundario

que se forma detrás de la gota.

Simulaciones de sistemas trifásicos, donde las tres fases son inmiscibles entre sí, han sido estudiadas considerablemente. Pero sistemas donde dos fluidos (líquidos) son miscibles y otro inmiscible (burbuja) en los otros dos, aún no se ha estudiado extensamente. Es decir, que hasta la escritura de este trabajo, no existen publicaciones sobre experimentos y/o simulaciones numéricas de burbujas cruzando una interfaz formada por líquidos miscibles.

En este trabajo, se estudia la dinámica de una burbuja individual ascendente, cruzando una interfaz horizontal que separa dos fluidos newtonianos miscibles, ambos en reposo, para un amplio rango de número de Reynolds. Se encontró que la naturaleza de la trayectoria de la burbuja juega un papel muy importante en la inducción del mezclado. Para el caso de trayectorias rectilíneas, que desarrollan burbujas pequeñas de forma esférica, se les asocia una estela estable que emerge desde el fluido pesado hacia el ligero, reincorporándose a su estado inicial después de un período de tiempo relativamente corto, induciendo un grado despreciable de mezcla. Por otro lado, burbujas más grandes con forma elipsoidal producen trayectorias zig-zageantes con estelas inestables dando lugar a un mezclado más efectivo. Se cuantificó el volumen del *drift* para ambos casos, estable e inestable, y se demostró su dependencia con los números de Reynolds y Froude densimétrico asociadas a la burbuja. En este estudio, el volumen desplazado denominado *drift* corresponde al *partial drift* de Eames et. al. Adicionalmente, se propuso un modelo capaz de predecir la evolución del volumen del *drift* para burbujas pequeñas. También, se realizaron simulaciones numéricas referentes al trabajo experimental, obteniéndose resultados satisfactorios.

## 1.1. Objetivos

La comprensión básica de los fenómenos físicos, permite establecer los parámetros medulares que gobiernan su dinámica. Por lo que el propósito principal de este trabajo de investigación es de carácter básico respecto al ascenso de una burbuja individual a través de una interfaz formada por dos líquidos miscibles: sistema estratificado de dos capas. Para ello se pretende lograr los siguientes cometidos:

1. Lograr establecer de manera definida la interfaz entre dos líquidos miscibles: mezcla de glicerina-agua (fluido superior) con mezcla glicerina-agua-sal (fluido inferior). Ambas con la misma relación glicerina-agua.
2. Cuantificar el volumen desplazado del fluido pesado dentro del fluido ligero, producido por el cruce de la burbuja a través de la interfaz.
3. Caracterizar la dependencia del volumen arrastrado respecto a los parámetros de proceso.
4. Establecer un modelo matemático capaz de predecir la evolución en el tiempo del volumen arrastrado.
5. Establecer las condiciones hidrodinámicas que permiten inducir a una mezcla significativa entre las capas del sistema estratificado.
6. Modelar a través de una ecuación matemática el fenómeno de mezcla entre los líquidos estratificados.
7. Simular numericamente, asistido por computadora, el ascenso de una burbuja individual que cruza una interfaz entre dos fluidos newtonianos con estratificación estable.

## Capítulo 2

# Arreglo experimental y técnicas de medición

Se realizaron experimentos usando un tanque de acrílico rectangular con una sección transversal de 5 cm  $\times$  10 cm, tal como se esquematiza en la Figura 2.1. El tanque fue llenado con dos diferentes fluidos, ambas mezclas de glicerina con agua. La diferencia de densidad se logró añadiendo sal común (comercial) al líquido del fondo (considerando 8.3 g de NaCl por cada 100 g de glicerina, y 35.9 g de NaCl por cada 100 g de agua). La Tabla 2.1 muestra las propiedades físicas de los diferentes líquidos usados en los experimentos, valores determinadas a temperatura ambiente (298 K). La densidad fue medida con un picnómetro de 25 mL. Los valores de viscosidad y tensión superficial fueron obtenidas usando un reómetro (Modelo LV-DV-III+ *Brookfield Engineering Laboratories*) y un tensiometro (*Sigma 70 KSV Instrumental LTD*), respectivamente. La examinación de los datos de la tabla 2.1 indican que la tensión superficial cambia al agregar la sal. Usualmente, se sabe que la sal se disuelve en un líquido para producir iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$ . Consecuentemente, las fuertes interacciones entre estos iones con

14CAPÍTULO 2. ARREGLO EXPERIMENTAL Y TÉCNICAS DE MEDICIÓN

otros iones que se encuentran en el agua ( $H^+$ ,  $OH^-$ ) provocan un incremento en las fuerzas intermoleculares y en consecuencia la tensión superficial aumenta. Sin embargo, cuando la concentración de glicerina es mucho mayor, la tensión superficial decrece cuando se agrega la sal, lo cual sugiere que el soluto tiende a comportarse como un surfactante.

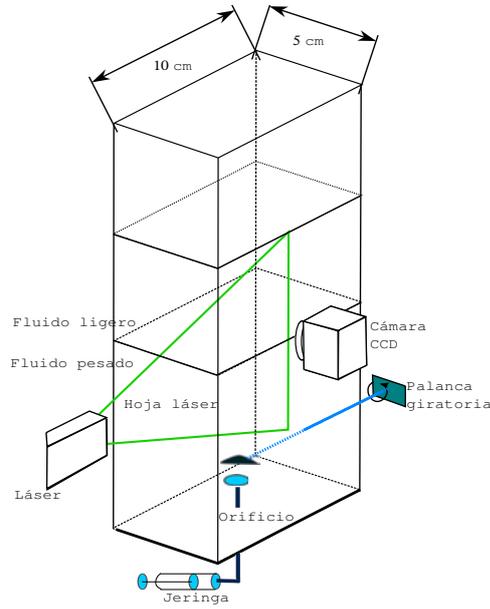


Figura 2.1: Arreglo experimental usado.

Tabla 2.1: Propiedades físicas de las mezclas de glicerina-agua usadas en este estudio. Los subíndices 1 y 2 se refieren a los fluidos del fondo y superior, respectivamente.  $\mu$ , es la viscosidad del fluido (expresada en mPa·s);  $\rho$  es la densidad ( $kg\ m^{-3}$ ),  $\sigma$ , es la tensión superficial( $mN\ m^{-1}$ ).

Líquido	$\rho_1$	$\rho_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
85 % G+W	1274	1212	102.1	64.5	56.8	60.9
75 % G+W	1256	1182	30.6	19.5	53.6	50.1
65 % G+W	1242	1154	18.3	12.9	54.1	50.8
50 % G+W	1220	1114	8.2	5.2	52.7	51.2

Las burbujas de aire fueron generadas usando la técnica de la 'cuchara' invertida usada por varios autores [12, 5, 20], la cual es útil para formar burbujas grandes. Para lograrlo se necesita inyectar varias burbujas las cuales son atrapadas dentro de la cuchara, posteriormente coalescen en una sola burbuja con cierto volumen. Una vez alcanzado el tamaño deseado, se libera la burbuja girando la cuchara manualmente. Todos los experimentos fueron realizados a temperatura ambiente (298 K).

El volumen del *drift* asociada al ascenso de la burbuja a través de la interfaz, fue determinado usando la técnica del Plano de Fluorescencia Inducida por Láser (*Planar Laser Induced-Fluorescence, PLIF*). Se usó un sistema láser Nd:YLF, con 150 W de potencia de 527 nm; a través de un lente cilíndrico se convirtió en una hoja láser, el cual fue orientado al centro del arreglo experimental correspondiendo a la trayectoria de la burbuja. De manera perpendicular al plano fluorescente, se colocó una cámara (*Phantom v9.1*) para grabar las imágenes iluminadas por la hoja láser. La resolución de la cámara fue de  $1632 \times 1200$  píxeles, con un área de medición de  $135 \times 98$  mm<sup>2</sup>. Se usó Rodamina 6G (*Aldrich*  $\approx 95\%$  de pureza) como trazador. Este compuesto químico absorbe la energía de la luz láser (460-560 nm de longitud de onda) y re-emite la luz a una longitud de onda mayor (540-640 nm), donde a través de un filtro óptico, montado sobre la lente de la cámara, únicamente la luz fluorescente re-emitada es grabada.

El volumen arrastrado tiene una diferencia significativa de luminosidad respecto al fluido ligero que lo rodea. Por lo tanto, las imágenes fueron transformadas a imágenes binarias a través del software Matlab®, usando la función *graythresh*: método de Otsu para calcular el umbral global. Una imagen típica se muestra en la Figura 2.2. Cabe mencionar que la técnica PLIF solo detecta al fluido que contiene alguna concentración de Rodamina 6G, mayor

concentración mayor intensidad de luz reflejada. Así que la burbuja de aire no es visible, ya que el fluido dentro de la burbuja no contiene ninguna concentración medible de Rodamina 6G. Sin embargo, debido a que la burbuja asciende desde el líquido con mayor concentración de Rodamina 6G hacia el líquido con concentración nula de Rodamina 6G, es inevitable que contenga sobre su superficie una delgada capa de fluido pesado, que es el contorno visible en la imágenes adquiridas. También, en la parte baja de la burbuja se refleja la luz láser, provocando que visulamente aparezca una región visible de la burbuja; sin embargo, debido a su pequeño tamaño se ha ignorado su efecto sobre el valor del volumen del *drift*. No obstante, puede considerarse en el valor del error experimental.

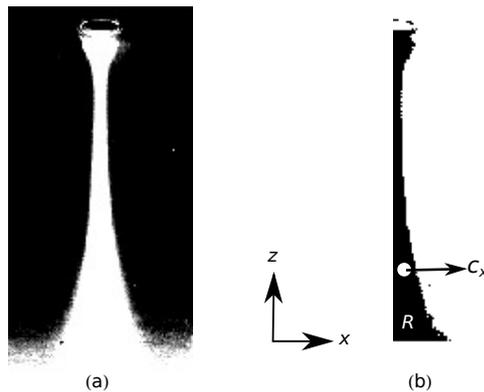


Figura 2.2: (a) Imagen binaria de un experimento típico y (b) Perfil de la medición del volumen arrastrado, estimado a través de la aplicación del segundo teorema del centroide de Pappus.  $R$  es la superficie generada (la cual es rotada) y  $c_x$  es el centroide de  $R$ .

## 2.1. Tamaño, forma y velocidad de las burbujas

Por cada experimento, se usó una cámara rápida (*MotionScope PCI 8000s*) para medir el tamaño, la forma y la velocidad terminal de las burbujas,  $U_B$ , con una rapidez de grabado de 500 cuadros por segundo. Las

secuencias de imágenes fueron analizadas usando un software de procesador de imágenes convencional (Matlab®). El diámetro equivalente,  $d_e$ , y la relación de aspecto,  $\chi$ , fueron calculadas usando las medidas del eje menor,  $d_S$ , y eje mayor,  $d_L$ , de la proyección de la burbuja suponiendo una forma elíptica:  $d_e = (d_L^2 d_S)^{1/3}$  y  $\chi = d_L/d_S$ , respectivamente. El volumen de la burbuja,  $V_B$ , fue calculada como  $V_B = \pi d_e^3/6$ .

## 2.2. Medición del volumen del *drift*

Las secuencias de imágenes obtenidas de la técnica de Fluorescencia, fueron usadas para determinar el volumen del líquido pesado que fue arrastrado por la burbuja. Suponiendo simetría axial, el volumen fue calculado como:  $V = 2\pi \times R \times c_x$ , donde  $R$  es la mitad del área de la estela del *drift* debido al movimiento ascendente de la burbuja (en el plano  $x-z$  con  $x > 0$ ), tal como se esquematiza en la Figura 2.2 (b), y  $c_x$  es el centroide de  $R$ . Este cálculo es conocido como el segundo teorema del centroide de Pappus.

## 2.3. Parámetros adimensionales

Los siguientes grupos adimensionales son relevantes para caracterizar el comportamiento del sistema de estudiado. Primero, el número de Reynolds está definido en términos de las propiedades del líquido del fondo y características de la burbuja:

$$Re = \frac{\rho_1 d_e U_B}{\mu_1} \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad, respectivamente. El subíndice 1 se refiere a las propiedades del fluido del fondo. El número de Reynolds está basado en relación a las propiedades del fluido pesado porque es el fluido de interés. El estudio se concentra en la dinámica del fluido pesado, más que el

del ligero. El número de Weber, el cual mide la importancia relativa de la inercia respecto a la tensión superficial, está definido como:

$$We = \frac{\rho_1 U_B^2 d_e}{\sigma_1} \quad (2.2)$$

donde  $\sigma_1$  es la tensión superficial. Para un fluido dado, la relación de aspecto,  $\chi$ , es una función del número de Weber [20]. Ambos,  $Re$  y  $We$ , determinan la transición entre una trayectoria rectilínea y una zig-zageante, discutido por Zenit y Magnaudet [31].

El número de Froude es definido como:

$$Fr = \sqrt{\frac{U_B^2}{gd_e}} \quad (2.3)$$

donde  $g$  es la aceleración debido a la gravedad. Finalmente, el contraste de densidad es cuantificado por

$$\Gamma = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}. \quad (2.4)$$

Note que el número de Froude modificado es frecuentemente considerado en estudios que involucran ambientes estratificados [23, 32]. El Froude densimétrico es definido como:

$$Fr^* = \frac{Fr}{\sqrt{\Gamma}}. \quad (2.5)$$

Este último número, al igual que el  $Re$ , es usado en la sección 3.1.1 para modelar la evolución del *drift*. Existen otros grupos adimensionales que también pueden ser calculados por combinaciones de las expresiones de arriba. Por ejemplo, el número de Eötvös, el cual frecuentemente es usado en estudios de dinámica de burbujas, puede ser obtenido de  $Eo = We/Fr^2$ . Los valores de los números adimensionales de los sistemas usados en este trabajo

se muestran en la tabla 2.2.

Tabla 2.2: Valores experimentales de los parámetros adimensionales de los sistemas usados:  $\Gamma$ ,  $Re$ ,  $We$  y  $Fr$ .

Líquido	$\Gamma$	$Re$	$We$	$Fr$
85 % G+W	0.047	7-32	1.72-14.0	0.59 - 0.93
75 % G+W	0.058	35-278	1.34-21.14	0.65 - 0.84
65 % G+W	0.070	52-415	1.9-19.46	0.57 - 1.19
50 % G+W	0.086	140-449	2.0-7.3	0.69 - 1.24

## Capítulo 3

# Resultados

En la Figura 3.1 se muestran dos secuencias de imágenes de burbujas cruzando la interfase entre dos líquidos. En ambos casos, un gran volumen de fluido de la región del fondo es arrastrado cuando la burbuja cruza la interfase. Conforme el tiempo avanza, el volumen se incrementa, alcanzando un tamaño máximo a cierta distancia de la interfase. Posteriormente, el volumen ya sea que permanece coherente en forma de 'cono' y regresa a la región más densa, o se fragmenta en regiones con dinámica compleja y se mezcla en el líquido superior. De acuerdo a las observaciones, se distinguen dos tipos diferentes de evolución del volumen del *drift*: estable e inestable. En el caso estable, el cual se muestra en la Figura 3.1(a), cuando la burbuja cruza la interfase, el volumen arrastrado emerge desde el líquido pesado en forma de 'cono'. Dicho volumen alcanza un punto máximo donde se desprende de la burbuja; éste regresa al líquido del fondo después de un tiempo. Esto es observado cuando el tamaño de la burbuja es pequeño, tal que su trayectoria es rectilínea. La Figura 3.1(b) muestra un caso inestable, comportamiento que resulta debido a burbujas grandes que ascienden con trayectorias zig-zageantes. Cuando las burbujas exceden un cierto tamaño y forma, se

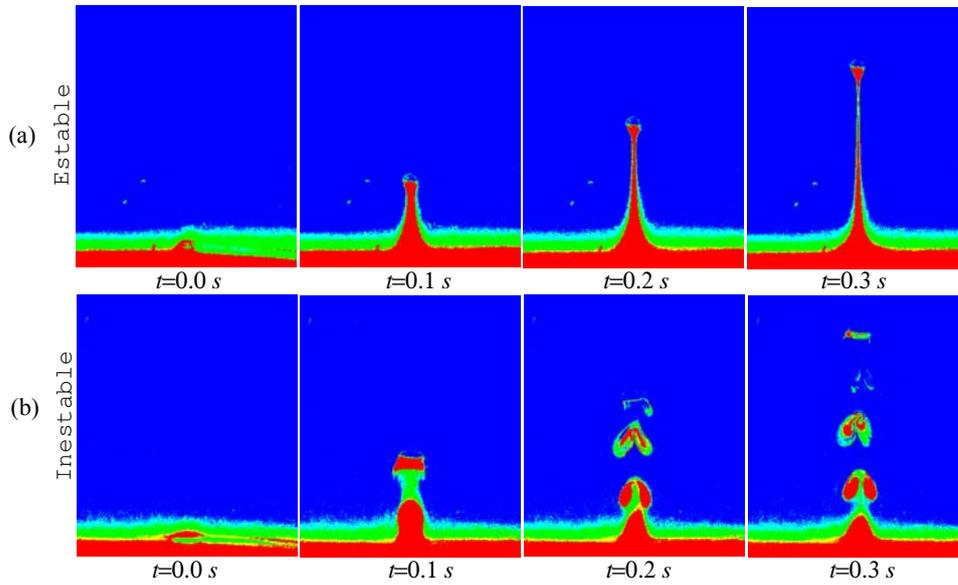


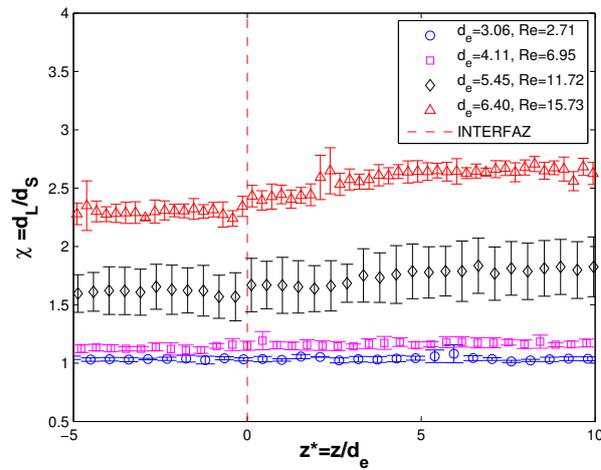
Figura 3.1: Evolución del *drift* con respecto al tiempo. Se muestran dos casos: (a) estable ( $Re = 12.55$ ,  $We = 1.97$  and  $Fr = 0.81$ ); e (b) inestable ( $Re = 33.33$ ,  $We = 7.94$  and  $Fr = 0.92$ ). El tiempo mostrado es adimensional:  $t^* = tUBd_e^{-1}$ , donde  $t$  es el tiempo ordinario. Los colores representan a los dos fluidos: en rojo el líquido del fondo, y en azul el fluido superior. Ambos casos corresponden a la mezcla 85% glicerina-agua, con un  $\Gamma=0.047$ .

presenta la transición en su trayectoria, de rectilínea a zigzageante [31]. En este caso el volumen arrastrado se desprende y se rompe en varias regiones. Claramente, ambos comportamientos son completamente diferentes: por un lado, el *drift* producido por pequeñas burbujas permanece coherente durante todo el proceso; en el otro caso, el volume se fragmenta formando estructuras parecidas a vórtices. En este caso, el rompimiento del *drift* provoca que el líquido pesado se comience a mezclar dentro del fluido menos denso: la interfase, formada inicialmente por los dos líquidos, se vuelve difusa. Por lo tanto, los resultados son mostrados en dos grupos separados. Para el caso donde las estelas son estables, es posible medir y modelar el proceso a detalle. Para el caso con estelas inestables, se realizaron pocas mediciones, y el estudio se enfocó en el umbral de inestabilidad.

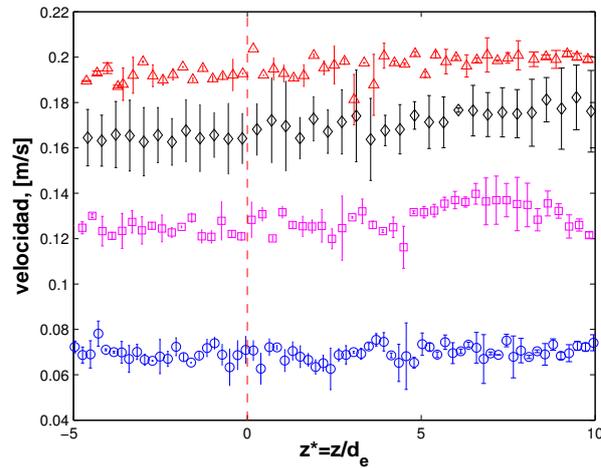
El cambio en las propiedades físicas del fluido a través de la interfase puede, de hecho, afectar a la velocidad y a la forma de las burbujas y, como resultado, la naturaleza del proceso. En la tabla 2.1 se muestran los valores de las propiedades de los fluidos, incluyendo los cambios debido a la adición de sal. Se observa que el cambio máximo en la tensión superficial es del 7.2%. Según el trabajo de Blanchette y Shapiro [4], con una variación por encima al 0.3% de la tensión superficial se presentan efectos del tipo Marangoni. Los autores simulan dos sistemas, el primero describe la caída de una gota desde un fluido de mayor a menor tensión superficial; en el segundo sistema, la gota desciende desde un líquido con menor a mayor tensión superficial. Este último sistema es dominado por los efectos Marangoni, tal como nuestro sistema de 85 % glicerina-agua. Sin embargo, en nuestra secuencia de imágenes no logramos observar dichos efectos. Para el caso de la viscosidad, el cambio puede variar hasta en un 40% a través de la interfaz. Para evaluar el efecto de estos cambios en las propiedades, se realizaron mediciones de la relación de aspecto y velocidad de la burbuja, antes y después de cruzar la interfase, tal como se muestra en la Figura 3.2 (a y b). En todos los casos, la relación de aspecto y velocidad de la burbuja cambian menos del 10% y 12%, respectivamente. Por lo tanto, es factible despreciar los efectos de variación de propiedades del fluido a través de la interfase.

Se ha mostrado que la variación en la velocidad y la relación de aspecto de la burbuja es relativamente pequeña, sin embargo se debe evaluar la variación del número de Reynolds también. Para este caso, debido a que las propiedades de densidad y viscosidad de los fluidos varían significativamente, es de esperarse que dichas variaciones se reflejen directamente en cambios en los valores de Reynolds. No obstante, los cálculos reportan una variación aproximadamente no mayor a un orden de magnitud. Para el sistema 85%

glicerina-agua es de 50%. Cabe mencionar que el valor de  $Re$  mayor se presenta en el fluido superior, debido a que la variación en la viscosidad es más significativo que el de la densidad.



(a)



(b)

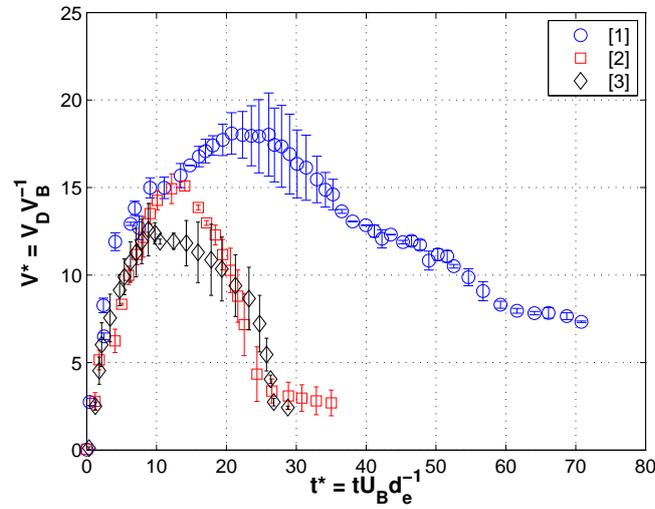
Figura 3.2: La relación de aspecto (a) y la velocidad de la burbuja (b) como función de la dirección vertical adimensional  $z^*$ . Los resultados experimentales mostrados corresponden a la mezcla 85% glicerina-agua, con  $\Gamma = 0.047$ .

### 3.1. Caso estable

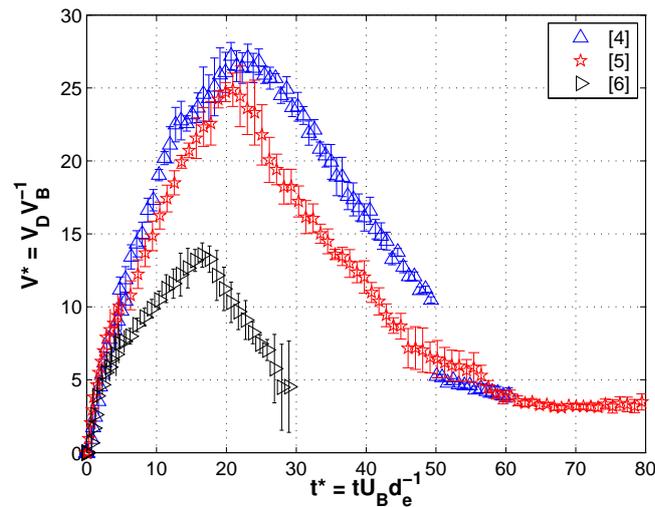
Para este caso, el cual se ilustra en la Figura 3.1(a), la evolución en el tiempo del volumen del *drift* fue determinado usando la técnica PLIF. La Figura 3.3 se grafica el volumen adimensional  $V^*$  como función del tiempo adimensional,  $t^* = tU_B/d_e$ , para varios experimentos. El volumen adimensional está definido como  $V^* = V_D/V_B$ , donde  $V_D$  es la medición del volumen arrastrado (*drift*), y  $V_B$  es el volumen de la burbuja. La Figura 3.3(a) muestra la evolución del volumen del *drift* en el tiempo para diferentes tamaños de burbujas, mientras se mantiene constante el contraste de densidad a  $\Gamma = 0.047$ ; en la Figura 3.3(b) lo que se mantiene constante es el tamaño de la burbuja y es el contraste de densidad la que varía.

Para todos los casos, se observa que el volumen arrastrado se incrementa en el tiempo hasta alcanzar un valor máximo; después, el volumen del *drift* se desprende de la burbuja y retorna a la capa de abajo. A medida que el número de Reynolds de la burbuja disminuye, el volumen crece para un valor fijo del contraste de densidad. El tiempo en el cual se alcanza el volumen máximo, también crece a medida que el Re disminuye. Para un valor fijo del Re, el volumen del *drift* crece a medida que  $\Gamma$  disminuye. Esto es importante notar ya que el volumen del *drift* es significativamente mayor que el valor teórico,  $V^* = 0.5$ , obtenido con flujo potencial [11].

La Figura 3.6 muestra el valor máximo de  $V^*$  como función del número de Reynolds. Claramente se observa que la capacidad de arrastre de las burbujas es inversamente proporcional al Re, de acuerdo a lo que Katija y Dabiri [19] argumentaron para justificar el gran volumen de transporte que inducen los organismos que migran verticalmente.



(a)



(b)

Figura 3.3: El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable. Los casos mostrados en (a) corresponden a experimentos realizados con  $\Gamma = 0.047$  y diámetros diferentes; en (b) el diámetro fue constante ( $D_b = 4.06 \text{ mm}$ ) y  $\Gamma$  es variado. En todos los casos mostrados corresponden a la mezcla 85 % glicerina-agua. Los parámetros de todos los experimentos (números en la leyenda del gráfico) están listados en la Tabla 3.1

Tabla 3.1: Parámetros adimensionales mostrados en las Figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7. El número de experimento corresponde a la etiqueta puesta en las figuras.

Experimento	Re	$\chi$	Fr	$\Gamma$	Fr*	We
[1]	8.20	1.02	0.60	0.047	2.76	0.64
[2]	12.55	1.45	0.81	0.047	3.73	1.97
[3]	20.11	1.86	0.93	0.047	4.29	3.85
[4]	45.72	1.36	0.89	0.0052	12.34	2.80
[5]	42.10	1.61	1.11	0.0085	12.04	4.51
[6]	42.05	1.86	1.09	0.017	8.36	5.02
[7]	9.91	1.24	0.89	0.058	3.70	0.93
[8]	22.97	1.12	0.99	0.058	4.11	2.47
[9]	16.20	1.08	0.74	0.07	2.80	0.64
[10]	49.29	1.66	1.28	0.07	4.84	4.01
[a]	33.25	4.03	0.92	0.047	4.24	7.94
[b]	42.42	3.01	0.75	0.047	3.45	11.36
[c]	48.22	3.46	0.69	0.047	3.18	11.95
[d]	76.05	2.73	0.59	0.047	2.72	17.86

### 3.1.1. Modelado de la evolución del volumen *drift*

Para el caso estable, se propone un modelo para la evolución en el tiempo del volumen arrastrado. El modelo considera un balance de fuerza entre las fuerzas de arrastre y de empuje:

$$\rho_1 \frac{d}{dt} (V_D U_D) = \kappa d_e \mu_1 U_D + (\rho_2 - \rho_1) g V_D, \quad (3.1)$$

donde  $\kappa$  es una constante. El primer y segundo término del lado derecho de la ecuación 3.1 representa las fuerzas de arrastre y de flotación, respectivamente. La fuerza de arrastre corresponde a que el fluido arrastrado se mueve dentro de un medio viscoso (en otro fluido); la fuerza de flotación resulta por el hecho de que el volumen del *drift* está inmerso en un fluido con diferente densidad. Por simplicidad, se ha considerado que  $\kappa = 3\pi$ ; esta consideración implica que el arrastre sobre el volumen *drift* es la misma que la de la burbuja moviéndose en un líquido viscoso.

El balance es sobre el líquido pesado que se desplaza, el cual inicialmente está en reposo. Sin embargo, al pasar la burbuja, el líquido pesado es perturbado; así que la fuerza con que se perturba su estado de reposo, en el primer instante, es la fuerza boyante de la burbuja. Pero considerando que no existe aceleración de la burbuja, entonces la fuerza de flotación es igual a la fuerza de arrastre, así que inicialmente el fluido más denso experimenta una fuerza equivalente a la fuerza de arrastre. Por esta razón se considera la magnitud de la fuerza de arrastre como la responsable de perturbar el estado de reposo del fluido pesado: que estratégicamente, más adelante, da origen a definir el número de Reynolds en el modelo. Note que también se considera  $U_D$  y no  $U_B$  en el término de la fuerza de arrastre, porque se ha considerado que la velocidad inicial del *drift* es igual a la velocidad de la burbuja en el instante que es perturbado y comienza a desplazarse. En otras palabras, el primer término de la derecha representa la magnitud de la fuerza que hace posible el desplazamiento; y el segundo término representa la fuerza opositora, debido a que  $\rho_1 > \rho_2$  el sentido de la fuerza es opuesta al que mueve el fluido; note que este segundo término a la derecha, comienza en 0 (condición inicial), es decir que no existe fuerza alguna en el inicio debido a que no se ha desplazado ningún volumen que pudiese ejercer una fuerza opositora. Sin embargo, conforme el volumen aumenta, también lo hace la fuerza boyante del *drift* (en sentido opuesto al que perturba). Así que se tiene un balance de fuerzas, por un lado el que inicia la perturbación, el cual decrece debido a que la velocidad del *drift* disminuye, y por el otro la fuerza boyante del *drift* que aumenta conforme el volumen aumenta. Así se llega a un punto máximo, donde la fuerza perturbadora es igualada por el peso del *drift*, posteriormente la fuerza opositora es mayor que la fuerza que inicialmente perturbó el estado de reposo del *drift* y comienza el retorno del

fluido pesado debido a su propio peso.

Por otra parte, el término de la masa añadida no se contempló debido a que solo se consideraron las fuerzas principales que actúan sobre el *drift*. En caso de considerarse, primero se contemplaría como adición a la fuerza perturbadora ya que ambas, la de arrastre y la de masa añadida experimentadas por la burbuja, tienen el mismo sentido; pero también un término de fuerza añadida debería contemplarse al término opositor debido a que el fluido pesado se mueve a través del líquido ligero que está en reposo, sin embargo para fines prácticos nos atrevimos a ignorar a ambos términos de masa añadida ya que consideramos que el balance entre ambas resultaría en una pequeña alteración en el cálculo del volumen del *drift*, el cual pudiese despreciarse.

El modelo no proporciona el límite de Darwin cuando el Reynolds tiende a infinito debido que estrictamente el modelo simplemente es un balance entre la fuerza que perturba el estado de reposo respecto a la fuerza que se opone al desplazamiento, para el caso homogéneo (el caso de Darwin), no habría fuerza opositora ya que  $\rho_1 = \rho_2$ , y para  $Re$  que tienden a infinito tampoco habría término de arrastre. Por lo que el modelo solo se limita a modelar la evolución del *drift* en el tiempo de un fluido Stokes.

La ecuación 3.1 puede ser expresada en términos adimensionales; considerando  $V^* = V_D/V_B$ ,  $U^* = U_D/U_B$  y  $t^* = tU_B/d_e$  se obtiene:

$$\frac{d}{dt^*} (V^*U^*) = \frac{\kappa'}{Re}U^* + \frac{\Gamma}{Fr^{*2}}V^*, \quad (3.2)$$

donde  $\kappa' = 18$ .  $Re$  and  $Fr^*$  son números adimensionales definidos en la sección 2.3. Ahora, para obtener una expresión para la evolución de  $V^*$  con respecto a  $t^*$ , puede suponerse una dependencia funcional para  $U^*$ . Experimentalmente, se observa que primeramente el volumen arrastrado se mueve

ve con la burbuja ( $U^* = 1$ ), para tiempos largos el volumen del *drift* cesa su movimiento ( $U^* = 0$ ). Una función simple que satisface estos límites es  $U^* = \exp(-\lambda t^*)$ . Sustituyendo esta función en la ecuación 3.2 se obtiene:

$$\frac{dV^*}{dt^*} - \left( \lambda + \frac{\Gamma}{U^* Fr^{*2}} \right) V^* = \frac{\kappa'}{Re}, \quad (3.3)$$

la cual puede ser fácilmente resuelta considerando las condiciones iniciales:  $V^* = 0$  en  $t^* = 0$ . Así que el único parámetro libre es  $\lambda$ , el cual se puede ajustar para adaptarse a los datos. Note que la dependencia temporal de manera exponencial de  $U^*$  es una propuesta del tipo heurístico. Fue elegido sin mucha justificación, más allá del simple cumplimiento de la condiciones experimentales. Se ha probado otras funciones de decremento respecto al tiempo, dando lugar a resultados similares.

El parámetro  $\lambda$ , en términos físicos, representa una especie de tiempo de relajación. Cuando su valor decrece, se observa que el volumen *drift* retorna al fluido del fondo más lentamente.

La Figura 3.4 muestra la solución de la ecuación 3.3, considerando valores de  $Re$ ,  $Fr^*$  similares a los experimentales. La solución de la ecuación diferencial fue obtenida numéricamente, utilizando el método Runge-Kutta de orden 4. Se muestra únicamente la predicción para un experimento particular (experimento [2] de la tabla 3.1, el cual también se muestra en la Figura 3.1(a)). Considerando un valor de  $\lambda = 0.004Re$  el modelo puede ajustarse estrechamente a los datos experimentales.

El volumen máximo del *drift* se incrementa a medida que el  $Re$  decrece. También, a medida que el  $Re$  disminuye, la rapidez de retorno del volumen arrastrado es más prolongado. La influencia de  $\Gamma$  es también considerado por el modelo: el volumen arrastrado disminuye conforme el contraste de

densidad se incrementa. Es de destacar que un modelo tan simple puede capturar varias características del fenómeno del caso de estudio.

Para obtener una mayor concordancia cuantitativa entre las mediciones experimentales y las predicciones del modelo, el valor de  $\lambda$  puede ser ajustado. Se encuentra que al suponer una dependencia lineal de  $\lambda$  respecto al  $Re$  ( $\lambda = 0.004Re$ ), el modelo puede predecir detalladamente las mediciones experimentales sin la necesidad de otro parámetro de ajuste. Las predicciones del modelo se muestran en la Figura 3.5, correspondiendo a los parámetros experimentales de la Figura 3.3. El hecho de que  $\lambda$  cambie respecto al  $Re$ , reside de que los tiempos de retorno del volumen arrastrado tienen relación directa al  $Re$ , esto es que fluido arrastrado retorna más lento cuando el  $Re$  disminuye.

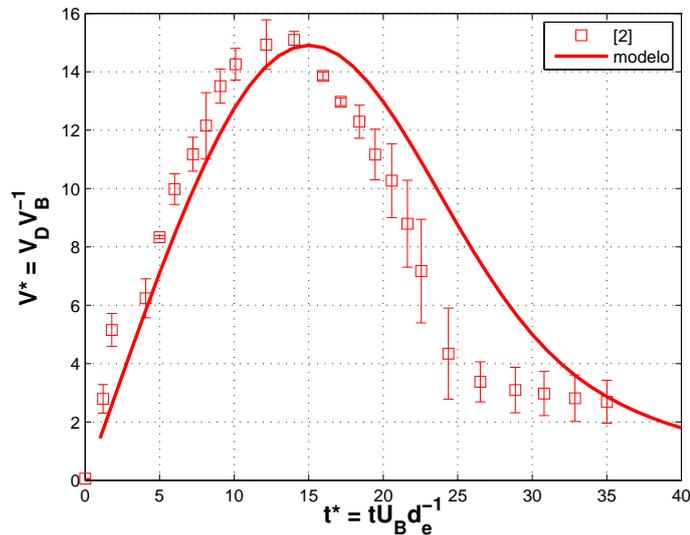
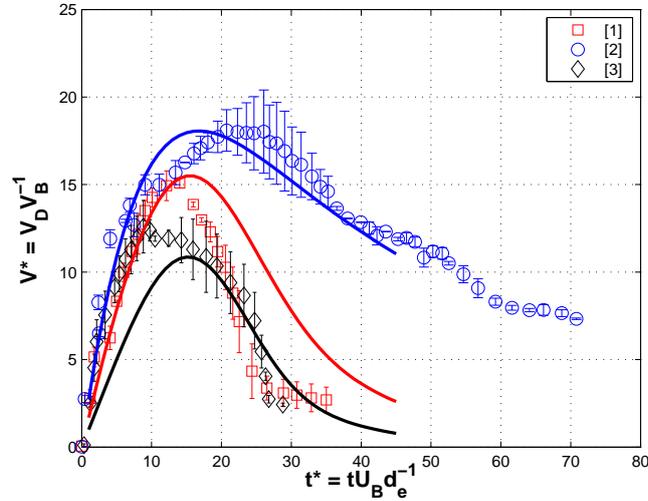
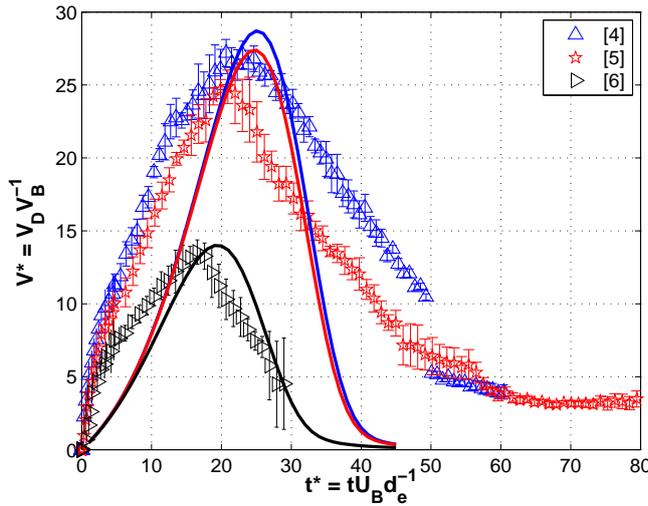


Figura 3.4: El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable: comparación entre la predicción del modelo y experimentos. La gráfica muestra un caso particular:  $Re=12.55$ ,  $We=1.97$ , y  $Fr=0.81$ .



(a)



(b)

Figura 3.5: El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable: comparación entre la predicción del modelo y experimentos. Los casos mostrados en (a) corresponden a experimentos realizados para un valor fijo del contraste de densidad ( $\Gamma = 0.047$ ) y diferentes diámetros; por otro lado, en (b) se fijó el diámetro ( $D_b = 4.06$  mm) y se varió el contraste de densidad. En todos los casos el líquido usado es una mezcla de 85 % glicerina-agua. Los parámetros de los experimentos (números en las leyendas) se encuentran en la Tabla 3.1. Las líneas corresponden a las predicciones del modelo, considerando  $\lambda = 0.004Re$ .

También a través del modelo, se pueden obtener los valores máximos de volumen arrastrado para todas las condiciones experimentales. El volumen máximo del modelo como función del número de Reynolds se muestra en la Figura 3.6, considerando los parámetros experimentales más característicos. En la gráfica solo se muestran cuatro valores de  $Fr^*$ , sin embargo limitan de manera adecuada el rango experimental de la Tabla 3.1. El modelo, pese a su sencillez, captura en gran medida la dinámica del fenómeno de arrastre-retorno. Es claro que su fidelidad con respecto a la predicción de resultados experimentales pueda diferir significativamente. Principalmente no se ajusta con gran exactitud a la variable  $t^*$ , punto débil de la propuesta. La poca fidelidad estriba en la suposición preestablecida por la función  $U^*$ , sin embargo es de reconocer su utilidad; y considerarse como una propuesta pionera para modelar este tipo de fenómeno de arrastre.

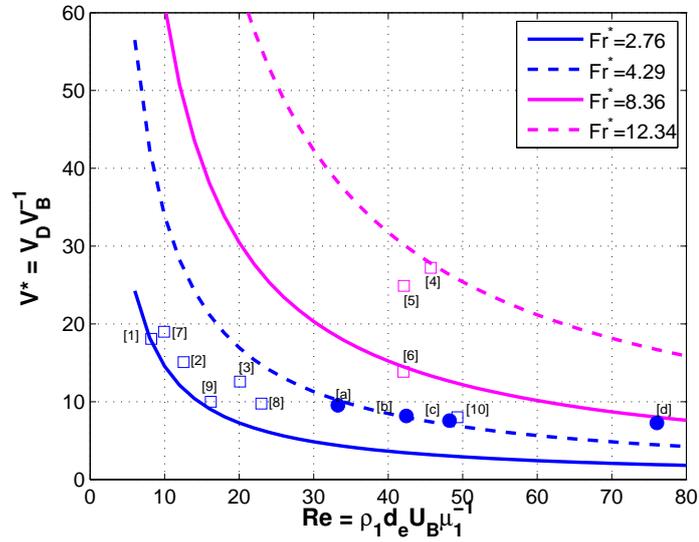


Figura 3.6: Valores máximos del volumen adimensional  $V^*$  como función del número de Reynolds de la burbuja  $Re$ . Los valores de los números adimensionales para cada experimento están listados en la Tabla 3.1. Las líneas corresponden a las predicciones de la ecuación 3.3.

### 3.2. Caso inestable

Para burbujas grandes, el volumen *drift* se vuelve inestable tal como se muestra en la Figura 3.1(b). La inestabilidad es resultado del hecho de que la burbuja deja de ascender de manera rectilínea; y lo hace en forma de zig-zag o trayectoria en espiral. Las condiciones para la transición en el patrón rectilíneo se han investigado por muchos autores. Se sabe que la estela detrás de la burbuja desarrolla una corriente en modo de vorticidad cuando supera un valor dado, el cual resulta de la combinación de los números adimensionales de  $Re$  y  $We$  de la burbuja [24].

Para este caso, el volumen arrastrado no puede ser determinado con la relativa exactitud de medición como el caso estable, esquema mostrado en la sección 2.2. Tal como se muestra en la Figura 3.1, el volumen dejado detrás de la burbuja, se fragmenta, es irregular y ya no es axi-simétrica.

En lugar de inferir el volumen de las mediciones, se determinó el área *drift* como una medida proporcional al volumen del fluido arrastrado, resultado del movimiento de la burbuja. Se han llevado a cabo estas mediciones para tener una idea de la influencia del número de Reynolds en la cantidad de líquido arrastrado a través de la interfaz: el área se calculó teniendo en cuenta el mismo procedimiento de umbral utilizado para los volúmenes estables. La Figura 3.7 muestra la superficie total del *drift* de los datos mostrados en la Figura 3.6. En la gráfica, se muestran los casos tanto estables como inestables. A pesar de la inestabilidad, la tendencia para todos los casos es similar: el área aumenta rápidamente hasta alcanzar un valor máximo para luego disminuir lentamente en el tiempo. Para los casos inestables, se observa una cierta irregularidad como resultado de la naturaleza fragmentada del fluido arrastrado. Las áreas del *drift* se pueden convertir en volumen, aunque en principio es incorrecto, aplicando el teorema de Pappus, como

en el caso de la estela estable. En la Figura 3.6, se muestra la medición del volumen adimensional máximo como función del  $Re$  para algunos de los casos inestables (representado por los círculos sólidos). Claramente, a pesar de las limitaciones en la técnica de medición, la tendencia es consistente con el caso estable: el volumen del *drift* continúa disminuyendo conforme el número de Reynolds aumenta. El objetivo principal de la gráfica de la Figura 3.7 es mostrar de manera cualitativa la similitud entre los comportamientos estables e inestables. Para el caso estable, el cálculo del volumen desplazado a través del uso del teorema del centroide de Pappus es aceptablemente válido, para el caso inestable no lo es. Ya que para este último caso, debido a la trayectoria zigzageante de la burbuja, el volumen desplazado no mantiene un eje de simetría constante, además de que existen regiones que salen del plano de visualización (el volumen no permanece coherente durante todo el proceso de arrastre-retorno), esto de manera aleatoria para cada experimento realizado. Sin embargo, aunque de antemano se menciona que el cálculo no es fidedigno, se calculan los volúmenes para los casos inestables correspondientes al sistema 85 % glicerina-agua, que se muestran en la Figura 3.8(b). Lo cual permite sugerir que la dependencia con el  $Re$  puede conservarse. No es de ocultar que dicho comentario es especulativo, sin embargo debe considerarse como un caso de estudio a futuro, lo cual queda abierto a la comunidad científica para buscar métodos que permitan calcular experimentalmente y/o teóricamente el volumen desplazado por una burbuja zigzageante.

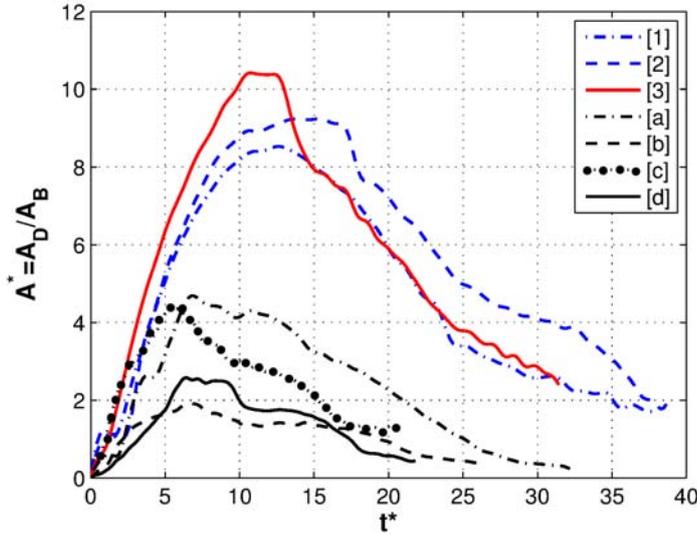


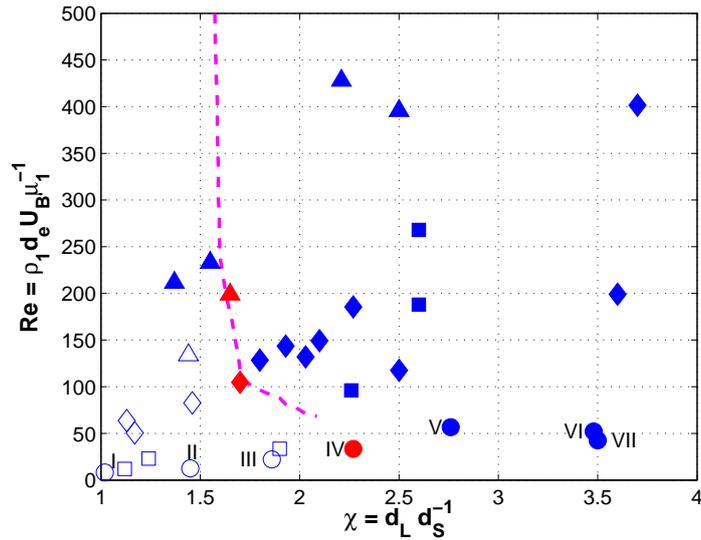
Figura 3.7: Área del *drift* como función del tiempo  $t^*$  para los datos mostrados en la Figura 3.8(b). Los parámetros experimentales son mostrados en la Tabla 3.1.

### 3.2.1. Condición para el comienzo de la inestabilidad del volumen arrastrado

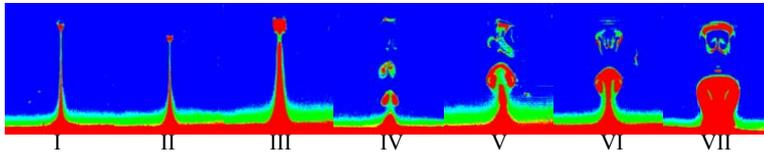
En base a las observaciones visuales, el volumen del *drift* se vuelve inestable cuando la burbuja deja de ascender de manera rectilínea. Se ha reportado que la transición del tipo de trayectoria, de rectilínea a zigzageante o espiral resulta de la inestabilidad de la estela [24]. Además, como las burbujas zigzagean, quedan detrás senderos de vorticidad como consecuencia se separan y se reconstruyen periódicamente [6]. Es evidente que, para nuestro caso, tal desprendimiento de la estela hace que el volumen del *drift* también se desprenda. Para demostrar que la inestabilidad de la estela es de hecho el resultado de la transición a una trayectoria no rectilínea, representamos gráficamente nuestros datos en un mapa de Reynolds y  $\chi$ , según lo sugerido por Zenit y Magnaudet [31]. La deformación de la burbuja se puede expresar en términos del número de Weber como lo discute Legendre et. al. [20],

quienes encontraron que, para un líquido dado, la relación de aspecto de la burbuja se correlaciona directamente con el número de Weber del flujo. Este mapa se muestra en la Figura 3.8(a), donde los datos para el comportamiento estable e inestable están codificados por color. Junto con las mediciones se ha añadido la línea que determina la transición de trayectoria rectilínea a la oscilatoria de Zenit y Magnaudet [31]. Claramente hay una buena concordancia a pesar del hecho de que los fluidos utilizados en este estudio no se pueden considerar que tienen interfases limpias. La visualización experimental para un sistema en particular, variando solamente el tamaño de la burbuja, se muestra en la Figura 3.8(b). La serie de imágenes muestra la evolución de un comportamiento estable a uno inestable, a medida que el tamaño de la burbuja se incrementa.

En resumen, se encuentra que a medida que el tamaño de la burbuja crece para un fluido dado, su forma se vuelve más oblicua. A su vez, cuando la forma supera una cierta relación de aspecto, la estela se vuelve inestable y la trayectoria ya no es rectilínea. Hemos observado que los *eddies* que se desprende de la estela, dejan senderos de fluido pesado atrás. A diferencia de lo que ocurre en el caso estable, el volumen del *drift* fragmentada es capaz de producir un cuantificable grado de mezcla. Este aspecto será discutido en el siguiente capítulo.



(a)



(b)

Figura 3.8: (a) Mapa de número de Reynolds ( $Re$ ) con la relación de aspecto ( $\chi$ ) para todos los sistemas estratificados: mezcla 85% glicerina agua (○ ●); mezcla 75% glicerina-agua (□ ■); mezcla 65% glicerina-agua(◇ ◆); mezcla 50% glicerina-agua(△ ▲). La línea magenta muestra la transición de trayectoria rectilínea a oscilante de la burbuja propuesta por Zenit y Magnaudet [31]. (b) Una serie de imágenes que muestra los tipos de estelas, estables e inestables, correspondiente al sistema 85% glicerina-agua. Todas las imágenes fueron capturadas a la misma distancia entre la burbuja y la interfase en estado inicial. La numeración de los símbolos en (b) corresponden a los mostrados en (a).

# Capítulo 4

## Mezclado

### 4.1. Operación de mezclado

El concepto de mezclado hace referencia al proceso por el cual dos o más componentes interactúan físicamente para la obtención de un producto con propiedades homogéneas. Pese a la sencillez del proceso, el mezclado involucra una gran cantidad de fenómenos complejos.

Eckart [15] propone que el proceso de mezcla se caracteriza por tres etapas:

1. *Etapla inicial*, en la cual los componentes a ser mezclados son identificables a simple vista, existen gradientes marcados en las interfaces entre ambos componentes, y en las otras regiones el gradiente es prácticamente cero. Si se obtiene un promedio de concentración sobre todo el volumen, el gradiente es pequeño. Adicionalmente, si el movimiento de los componentes es relativamente nulo, entonces el estado permanece por un lapso de tiempo considerable.
2. *Etapla intermedia*, después del movimiento de los componentes, inducido por agitación, las masas de los componentes son distorsionadas (perturbadas), con un rápido incremento en la extensión de las regio-

nes interfaciales resultando en un alto gradiente de concentración. De la misma manera se incrementa el valor del gradiente promedio.

3. *Etapa final*, de manera aparente y de forma espontánea los gradientes desaparecen, así se obtiene un producto con propiedades homogéneas. Por simplicidad, esta última etapa puede llamarse “mezclado”, para distinguirlo de la agitación (etapa anterior).

Por otro lado, Ottino [25] sostiene que un mezclado eficaz es el resultado de “estirar” y “plegar”, de manera efectiva, las hebras de fluido. También destaca que una exacta descripción del mezclado se lograría a través de la localización de las interfaces como función del espacio y del tiempo. Sin embargo, este nivel de descripción es poco común porque los campos de velocidad usualmente encontrados en los procesos de mezclado son complejos. Ambos autores coinciden que es necesario que ocurra el movimiento de las interfaces que se forman entre los fluidos involucrados. Por un lado se habla de distorsionarlos rápidamente a través de procesos de agitación, mientras Ottino lo propone como el proceso de estirar y plegar dichas regiones; nótese que es la etapa crucial del proceso por el cual se logra la mezcla.

En este capítulo se vinculan las ideas escritas previamente con nuestro caso de estudio y se busca cuantificar el mezclado inducido por las burbujas. Un panorama general sería aquel escenario compuesto por tres momentos, el primero sería el sistema estratificado en reposo, con la interfaz completamente definida y quieta (figura 4.1a). Un segundo momento sería descrito como el proceso de perturbación, y correspondería al paso de la burbuja a través de la interfaz, desde el fondo del sistema hasta la parte superior (figura 4.1b). Una última etapa sería la evolución de las regiones perturbadas y el grado de homogenización logrado en el sistema (figura 4.1c).

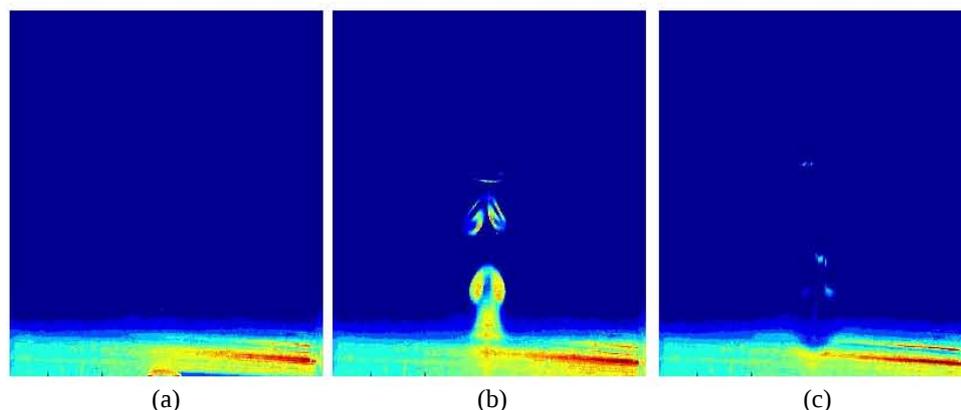


Figura 4.1: Etapas del proceso de mezclado. (a) Sistema estratificado en reposo con la interfaz completamente definida y quieta, (b) escena de perturbación de la interfaz producida por el ascenso de una burbuja, y (c) evolución y homogenización de las regiones perturbadas.

## 4.2. Mezclado de sistemas estratificados

Cuando la burbuja asciende con una trayectoria oscilatoria, ésta deja detrás paquetes de vorticidad que continuamente se forman y se desprenden [6]. Si la burbuja ha cruzado la interfaz, entonces se forma una estela con fluido más denso que posteriormente se desprende de ella dejando regiones de fluido pesado sobre su trayectoria. Este proceso se observa claramente en la Figura 3.1. Opuesto a lo que sucede en el caso estable, estas regiones de líquido pesado no descienden de manera coherente; dichas regiones se distorsionan por el movimiento giratorio remanente de la estela individual. Estas regiones de vorticidad, a su vez, hacen que las regiones densas se mezclen con el fluido superior ya que se sabe que los vórtices inducen a la mezcla [10, 28].

Para demostrar que las burbujas con estelas inestables causan un mayor grado de mezcla, se usaron las imágenes obtenidas de la técnica PLIF para calcular la evolución en el tiempo de la concentración promedio en una región de observación. Se consideró una área de visualización por encima

de la interfaz de  $(2 \times 4)d_e^2$ , en la cual se calculó la concentración promedio,  $\bar{C}$ . Cada pixel en la imagen contiene un valor de concentración, tal que el promedio de la concentración se obtiene considerando los valores de concentración respectivos de cada pixel que conforma el área de interés. En la calibración se asignaron los valores de 0 y 100 para los fluidos superior e inferior, respectivamente (vistos en color azul y rojo, respectivamente en la Figura 3.1). Por lo tanto, antes del paso de la burbuja la medición sobre el área es 0,  $\bar{C}(t = 0) = 0$ .

#### 4.2.1. Mezclado inducido por burbujas individuales

En la Figura 4.2 se muestran el valor de  $\bar{C}$  como función del tiempo para los dos casos que se muestran en la Figura 3.1. En ambos casos, se observa un incremento rápido en el momento en que la burbuja entra al área de medición. Se pueden identificar importantes diferencias para los dos casos. Para el caso de la estela estable, la concentración alcanza un máximo y cuando el volumen desplazado se desprende de la burbuja,  $t^* \approx 20$ , la concentración promedio decrece linealmente. A pesar de que, solo se cuenta con valores hasta  $t^* \approx 40$ , se confirmó visualmente que  $\bar{C}$  es prácticamente cero para largos periodos de tiempo ( $t^* \approx 100$ ).

Por otro lado, para el caso inestable, la concentración promedio rápidamente alcanza un valor alto pero se observan oscilaciones. Estas fluctuaciones son el resultado de que el fluido se estira de manera periódica y se desprende de la parte trasera de la burbuja, tal como se observa en la Figura 3.1. Después de alcanzar el valor máximo, alrededor de  $t^* \approx 10$ , la concentración decae pero a una razón mucho mayor que el caso estable. De hecho, la rapidez de decremento puede ajustarse a una curva tipo exponencial, tal como se muestra en la Figura 4.2 por líneas punteadas. Claramente, los procesos de

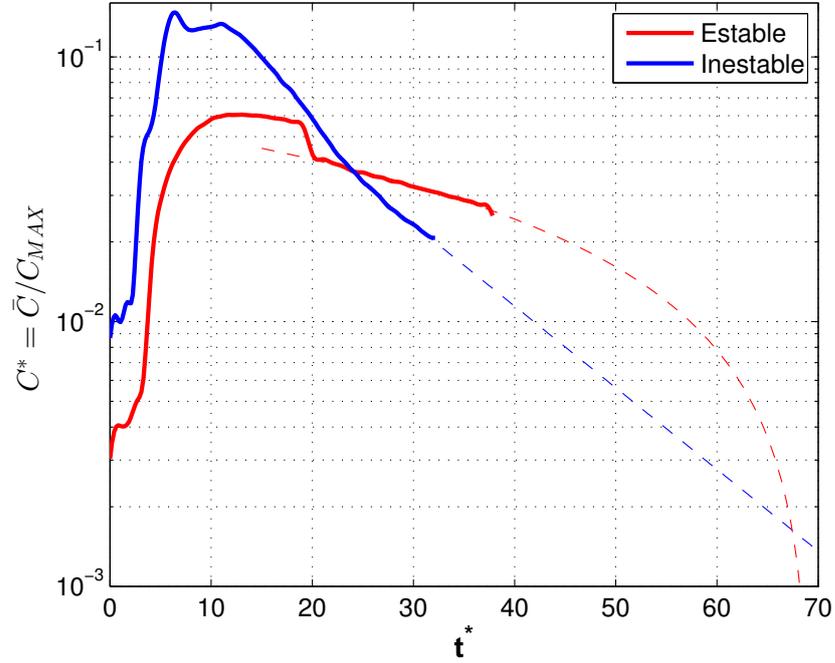


Figura 4.2: Concentración como función del tiempo,  $t^*$ , para los dos tipos de movimiento de burbuja. Los casos mostrados corresponden a los experimentos mostrados en la Figura 3.1. Las líneas punteadas muestran el ajuste extrapolado correspondiente a los últimos  $5t^*$  de los datos: caso estable (línea punteada roja),  $\bar{C} = c_1 - c_2 t^*$ , ( $c_1 = 5.7 \times 10^{-2}$ ,  $c_2 = 8.3 \times 10^{-4}$ ); caso inestable (línea punteada azul),  $\bar{C} = c_3 \exp(-c_4 t^*)$   $c_3 = 1.9 \times 10^{-1}$ ,  $c_4 = 7.0 \times 10^{-2}$ .

de agitación entre los dos casos (estable e inestable) son diferentes. En este caso, las mediciones de  $\bar{C}$  solo se obtuvieron hasta  $t^* \approx 30$ , pero visualmente se inspeccionó que a tiempos largos el valor de  $\bar{C}$  no regresa a cero. Por lo tanto, se puede argumentar que en este caso se alcanza, en pequeñas regiones, en un grado de mezcla.

#### 4.2.2. Mezclado inducido por una cadena de burbujas

Con la idea de demostrar que el mezclado inducido por el movimiento de burbujas es diferente para los casos con estelas inestables respecto a las

estables, se realizaron experimentos donde involucraban no solo el paso individual de una burbuja, sino que el paso consecutivo de varias burbujas, una detrás de otra, a través de la interfaz líquido-líquido.

En la Figura 4.3 se muestran los resultados de 4 casos particulares de in-

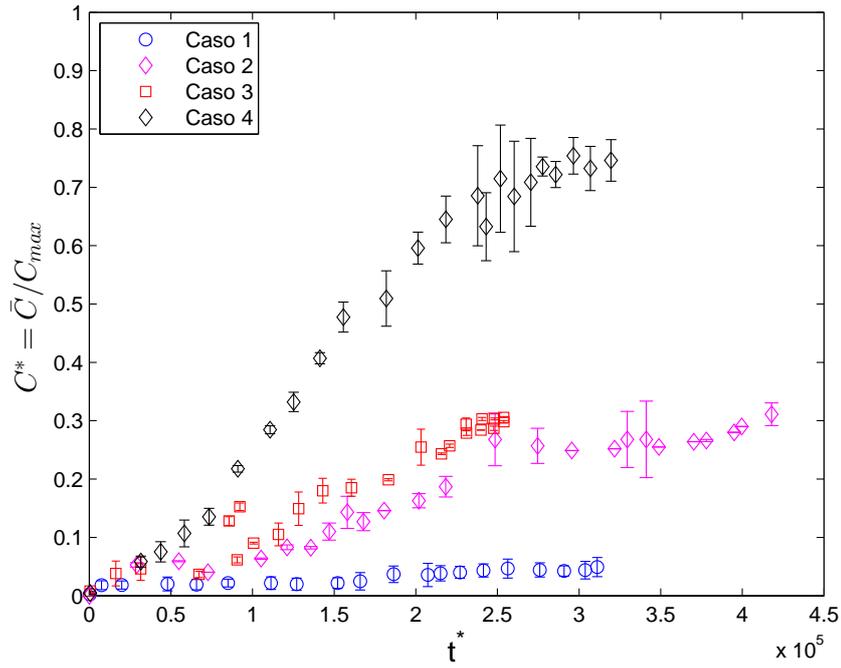


Figura 4.3: Mezclado a distintas frecuencias de burbujeo. Los parámetros físicos usados en dichos experimentos se resumen en la Tabla 4.1.

ducción al mezclado. Los parámetros físicos usados en dichos experimentos se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Parámetros físicos de cuatro casos experimentales usados para inducir el mezclado.  $f^* = fd_e/U_B$ , donde  $f$  es la frecuencia de burbujeo.

No. de caso	$f^*$	$\chi$	Re	Regimen
1	0.0078	1.01	78.0	estable
2	0.0531	1.08	104.9	estable
3	0.0104	1.62	257.3	inestable
4	0.0215	2.16	261.3	inestable

Cabe mencionar que la cuantificación de la concentración se realizó en ausencia de burbujas dentro de la región de interés. Los casos 1 y 2 presentan una estela estable, es claro que la diferencia principal es resultado del incremento en la frecuencia. Para el primer caso, la frecuencia es tal que permite que el volumen desplazado retorne completamente al líquido inferior, y posteriormente asciende la siguiente burbuja. Tal como se observa en la Figura 4.3, la variación de la concentración sobre el área de interés se incrementa con el tiempo, sin embargo su variación positiva no es tan grande comparado con los otros casos. Para fines prácticos, este proceso de inducción a la mezcla sería ineficaz. El caso 2, las burbujas en ascenso también se caracterizan por manifestar estelas estables, pero la frecuencia de burbujeo es mayor que el caso 1. La rapidez de burbujeo para este segundo caso es tal que no permite que el volumen desplazado retorne completamente al fluido del fondo. Este caso se caracteriza por una estela que se forma y crece continuamente en el tiempo, dicho volumen desplazado al lograr alcanzar la parte superior de la columna se dispersa por los lados y desciende por efecto de gravedad por los cuatro lados de la columna. Durante su descenso, masas de fluido pesado se estiran gradualmente de manera vertical (ver Figura 4.4); así mismo el movimiento del fluido ligero producido por el ascenso continuo de burbujas permiten que estas masas de fluido pesado se pleguen induciendo a que regiones de fluido pesado se mezclen con el ligero, resultando en una variación positiva en la concentración promedio en el área de medición.

Por otro lado, los casos 3 y 4 corresponden a burbujas que desarrollan una estela inestable. Para estos dos casos, ambos producen una variación positiva y significativa en el valor de la concentración promedio, es claro que la mezcla del caso 4 es mayor que el caso 3. La principal diferencia entre estos dos casos, es nuevamente la frecuencia de burbujeo; mientras que en

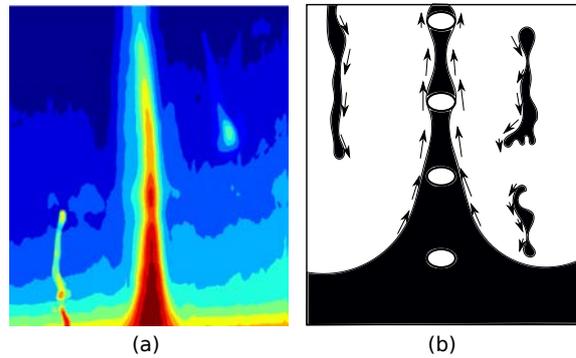


Figura 4.4: (a) Imagen experimental de la estela formada por el paso consecutivo de burbujas. (b) Imagen esquemática del mecanismo de formación de la estela. En el centro de ambas imágenes se observa el volumen desplazado por el paso continuo de burbujas, a los lados se notan las regiones de fluido pesado que caen verticalmente por los lados de la columna, se estiran y plegan.

el caso 3 la frecuencia permite que gran parte del fluido desplazado retorne al fondo, el otro caso la frecuencia es tal que la estela inestable no tiene oportunidad de reincorporarse al fondo. No obstante, el caso 3, pese a que gran parte del fluido pesado regresa al fluido del fondo, se presentan regiones que se dispersan en el seno del fluido ligero, permitiendo así la obtención de un nivel de mezcla significativo. Cuando la frecuencia de burbujeo se incrementa, aproximadamente al doble, la variación positiva de la concentración también lo hace. Nótese que para el caso 4, a un tiempo aproximado de 35 minutos, la razón de crecimiento comienza a disminuir mostrando un comportamiento asintótico con el valor de 0.8 de mezcla, lo que suena factible; ya que al mezclar dos líquidos con distinta concentración de soluto, siempre se obtiene un producto con una concentración entre los valores límites. Para este caso un valor entre 0 y 1.

En la Figura 4.5 se presentan algunas imágenes para todos los casos de la Tabla 4.1. Se observa, para cada caso, la evolución en el tiempo de la concentración. La barra de colores representa la escala de concentración, tal como

se mencionó anteriormente, el color azul indica un valor de concentración cero, mientras el rojo corresponde a la concentración máxima, 100.

Adicionalmente, en la Figura 4.6 se muestran los resultados de la varia-

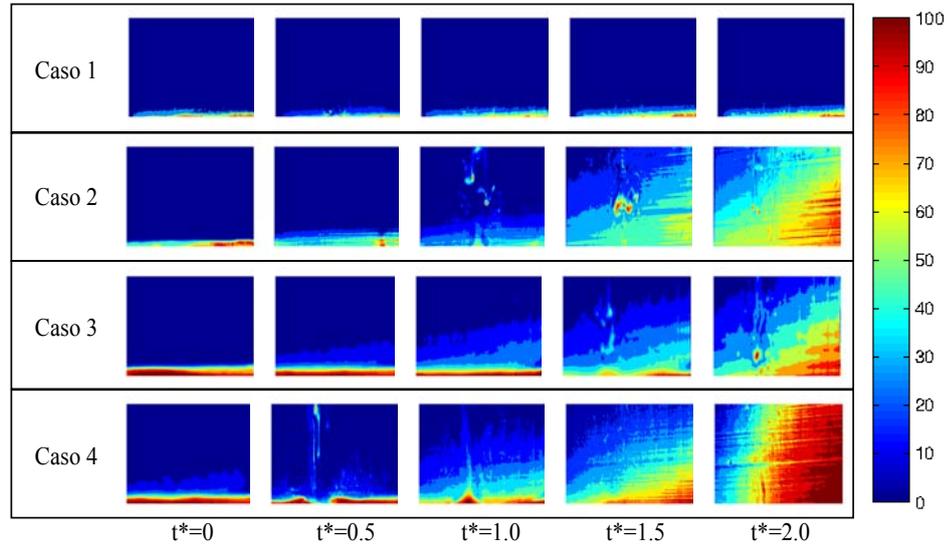


Figura 4.5: Evolución en el tiempo de la concentración para los casos referentes a la tabla 4.1. La barra de colores representa la escala de concentración, el color azul implica un valor de concentración cero, mientras el rojo implica la concentración máxima, 100.

ción de la concentración adimensional,  $C^*$ , respecto a la vertical,  $z^* = z/d_e$ . Esta forma de presentar los resultados busca contrastar la evolución de la concentración a lo largo del eje vertical del sistema estratificado; tal como se abordó en la sección 1, en la Figura 1.1. En el primer momento de los cuatro casos, la variación de  $C^*$  respecto a  $z^*$  tiene la forma mostrada en la Figura 1.1(a), la cual se caracteriza por tener una interfase definida que divide a los fluidos. La variación abrupta de la concentración se localiza en la interfaz. En los siguientes momentos de tiempo, la forma de la variación vertical comienza a ser menos abrupta; excepto en el caso 1, donde la forma prácticamente se conserva. Para los otros casos, la tendencia general es de ensanchar la interfase. El paso de las burbujas perturban la interfase y pro-

vocan que el estado de movimiento del sistema estratificado se modifique, pasando del reposo a un estado de movimiento más caótico. Las masas de ambos líquidos miscibles se distorsionan de tal manera que regiones con interfaz se extienden de diversas maneras, de tal forma que los gradientes de concentración entre líquidos comienzan a desaparecer resultando una mezcla. Adicionalmente se observan curvas trazadas con líneas sólidas para cada caso, las cuales corresponden a predicciones teóricas en base a un modelo matemático que se desarrolla en la siguiente sección.

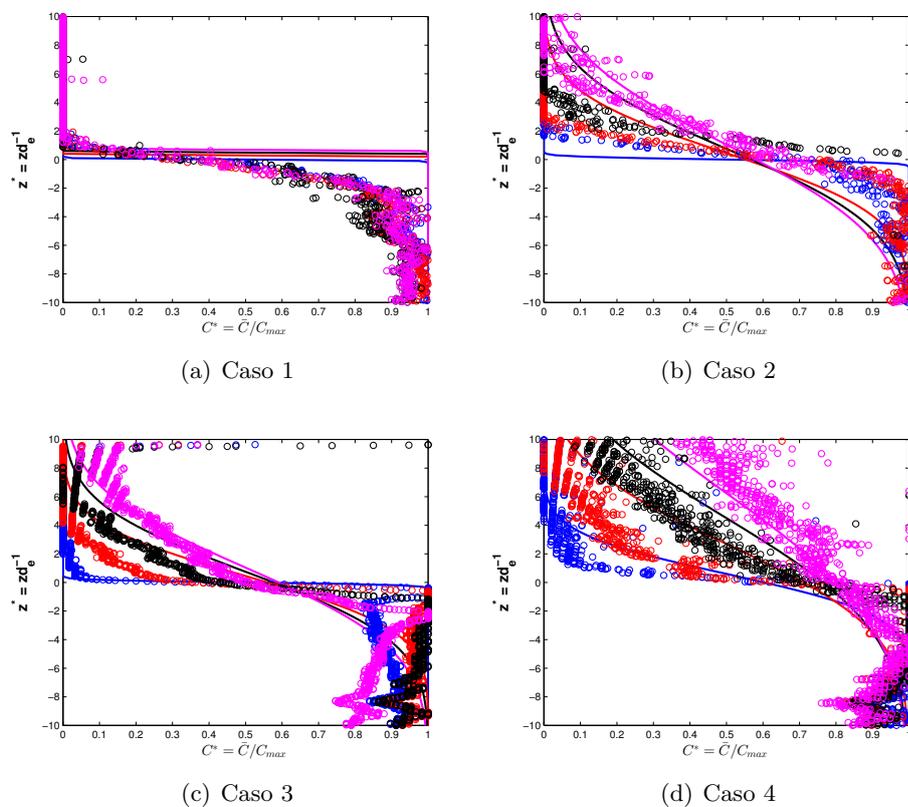


Figura 4.6: Variación de la concentración respecto a la vertical para los 4 casos citados en la tabla 4.1. Los símbolos representan resultados experimentales y las líneas sólidas predicciones teóricas: azul,  $t = 0$  s; roja,  $t = 450$  s; negra,  $t = 750$  s; magenta,  $t = 1040$  s. Note que el tiempo reportado no corresponde al tiempo adimensional  $t^*$ , debido a que se desea observar el grado de mezcla a un mismo tiempo en distintas condiciones de proceso.

### 4.2.3. Modelo matemático de mezclado

Aunque los fenómenos de mezclado han sido estudiados ampliamente, aún falta establecer a detalle toda la física involucrada en los mecanismos de inducción al mezclado. Un estudio básico en este tópico contribuiría en gran medida a la comprensión del fenómeno.

Un modelo matemático puede ayudar a explicar un sistema dado y los efectos de diferentes parámetros, y así hacer predicciones acerca del comportamien-

to real del sistema. Con el afán de lograr dicho cometido, en esta sección se propone modelar el fenómeno de mezcla de un sistema estratificado a través del movimiento ascendente de burbujas. El modelo matemático propuesto en este apartado describe la evolución de la interfaz que se distorsiona debido al ascenso de burbujas. Se considera un tanque de fluido que inicialmente consiste de dos capas: la capa superior con una concentración nula ( $C^* = 0$ ); y la capa inferior con la concentración máxima,  $C^* = 1$ . Las burbujas se liberan de forma continua desde el fondo, cruzando y perturbando la interfaz. A medida que las burbujas cruzan la interfaz, el transporte de fluidos se caracteriza por un arrastre localizado en el centro del tanque y un amplio reflujo a través del ancho del sistema.

En un estudio previo sobre el mezclado en sistemas de dos capas, no necesariamente con contraste de densidades entre los fluidos, Bush y Eames [7] proponen que en la cercanía de la interfaz, la concentración promedio horizontal del fluido inferior  $C(z, t)$  satisface una ecuación de advección-difusión de la forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial z} + D_L \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (4.1)$$

donde  $\bar{u}$  caracteriza la velocidad promedio con que la interfaz se desplaza verticalmente hacia arriba en respuesta a la intrusión de fluido pesado en el líquido ligero: la interfaz se perturba e incrementa su espesor. Podemos suponer que la difusividad no juega un papel significativo, por lo que la erosión de la interfaz es producto del movimiento ascendente de las burbujas lo que puede caracterizarse a través de un coeficiente de dispersión mecánica  $D_L$  [7] análogo al coeficiente de difusión molecular. Así el término difusivo se substituye por uno relacionado con la perturbación provocada por las burbujas.

Considerando  $\phi = \bar{u}t/d_e$ ;  $z^* = z/d_e$ ;  $C^* = C/C_{max}$ ;  $Pe = \bar{u}d_e/D_L$ , donde  $Pe$

se le denomina número de Peclet. La ecuación 4.1 toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial C^*}{\partial \phi} = -\frac{\partial C^*}{\partial z^*} + Pe^{-1} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}}. \quad (4.2)$$

Con el objetivo de resolver la ecuación 4.2, se propone el siguiente cambio de variable:  $\xi = z^* - t^*$  y  $\tau = \phi$ . Utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial C^*}{\partial \phi} = \frac{\partial C^*}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} + \frac{\partial C^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \phi}; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial z^*} = \frac{\partial C^*}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z^*} + \frac{\partial C^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z^*} \quad (4.4)$$

y considerando que  $\frac{\partial \xi}{\partial \phi} = -1$ ;  $\frac{\partial \xi}{\partial z^*} = 1$ ;  $\frac{\partial \tau}{\partial \phi} = 1$ ;  $\frac{\partial \tau}{\partial z^*} = 0$ , la ecuación 4.2 se transforma en

$$\frac{\partial C^*}{\partial \tau} = Pe^{-1} \frac{\partial^2 C^*}{\partial \xi^2}. \quad (4.5)$$

Considerando las condiciones de borde:

$$C^*(\xi, \tau_0) = \begin{cases} C_0^* & \text{si } \xi \leq 0 \\ 0 & \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

la Ecuación 4.5 tiene una solución analítica conocida:

$$C^*(\xi, \tau) = \frac{C_0^*}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{4Pe^{-1}\tau}} \right) \right]. \quad (4.6)$$

Retornando a las variables adimensionales originales, tenemos:

$$C^*(z^*, \phi) = \frac{C_0^*}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z^* - \phi}{\sqrt{4Pe^{-1}\phi}} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Con el propósito de visualizar qué parámetros de proceso son necesarios determinar para validar este modelo, la ecuación 4.7 puede ser reescrita como:

$$C^*(z, t) = \frac{C_0^*}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\frac{z}{d_e} - \frac{\bar{u}}{d_e} t}{\sqrt{4 \frac{D_L}{d_e^2} t}} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Note que los únicos parámetros desconocidos son  $\bar{u}$  y  $D_L$ . Basándonos en el trabajo de Bush and Eames [7], dichos parámetros pueden expresarse como:

$$\bar{u} = \alpha \epsilon U_B \quad (4.9)$$

y

$$D_L = C'_m (1 + \epsilon) \alpha U_h L_c, \quad (4.10)$$

donde  $\alpha$  es la fracción volumen de burbujas (cabe mencionar que debido a que  $\alpha$  es suficientemente pequeña, se desprecia cualquier efecto de interacción burbuja-burbuja);  $\epsilon$  denota la razón del volumen de la estela principal ( $V_w = \epsilon V_B$ , ver Figura 4.7) respecto al volumen de la burbuja ( $V_B$ ), en este trabajo se consideró que  $\epsilon = 1$ , en todos los casos. Por otro lado,  $C'_m$  es el coeficiente de masa añadida definida, en este trabajo, igual que la razón de aspecto,  $\chi$ ;  $U_h = U_B (1 - \alpha(1 + \epsilon) C'_m)$ ; y  $L_c$  es la longitud característica, en este caso  $d_e$ .

Ahora, considerando que  $\alpha = f \frac{L_z}{U_B} \frac{V_B}{V_c}$ , donde  $L_z$  y  $V_c$  es la longitud vertical y volumen de la columna de fluido estratificado, respectivamente. Sin embargo,  $V_c = L_z \cdot A_t$ , donde  $A_t$  es el área transversal de la columna, en nuestro caso es una constante, esto es  $0.1 \times 0.05 \text{ m}^2$ , por lo que finalmente tenemos:

$$\bar{u} = \frac{\pi f d_e^3}{6 A_t} \quad (4.11)$$

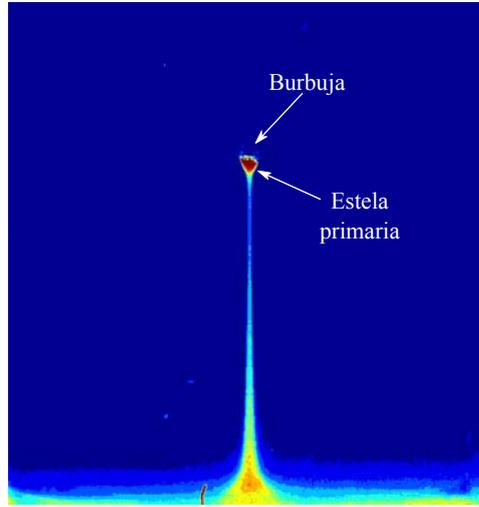


Figura 4.7: Estela primaria detrás de la burbuja con volumen equivalente a  $V_w = \epsilon V_B$ . Por simplicidad, se considera que  $\epsilon = 1$ .

$$D_L = \frac{2\pi}{6} \chi \frac{f d_e^4}{A_t} \left( 1 - \frac{2\pi}{6} \chi \frac{f d_e^3}{U_B A_t} \right). \quad (4.12)$$

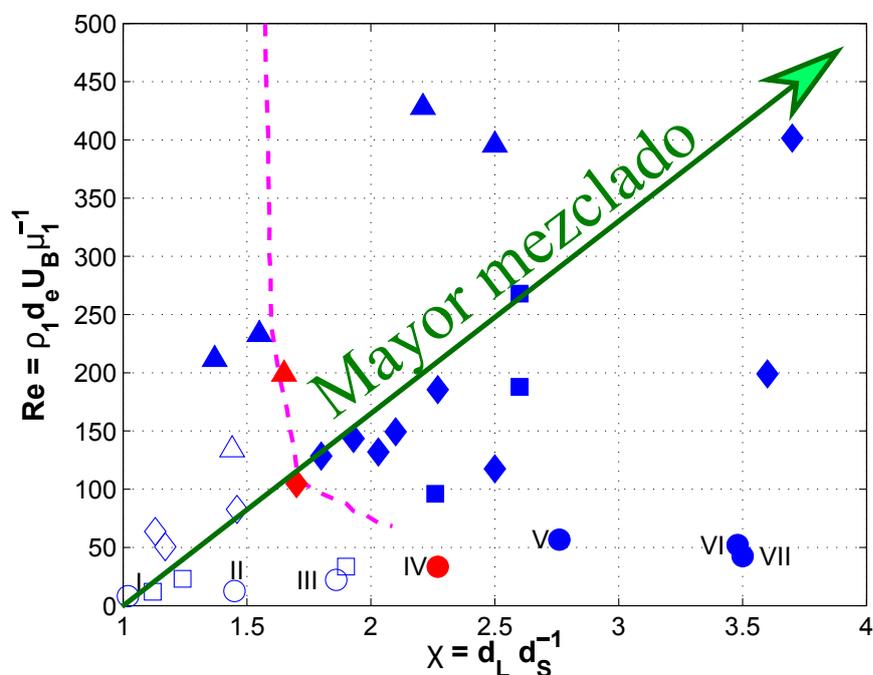
Las predicciones del modelo se muestran en la Figura 4.6 considerando los parámetros de proceso mostrados en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Parámetros de proceso de cuatro casos experimentales para la validación del modelo.  $\bar{u}$  y  $D_L$ , fueron determinados usando las ecuaciones 4.11 y 4.12, respectivamente.

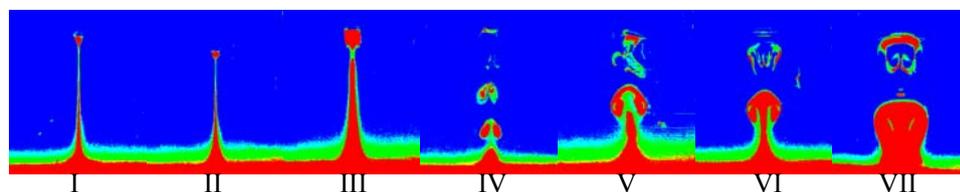
No. de caso	$d_e$ (m)	$\chi$	$f$ ( $s^{-1}$ )	$U_B$ (m/s)	$\bar{u}$ (m/s)	$D_L$ ( $m^2/s$ )
1	0.0026	1.01	0.92	0.30	$1.76 \times 10^{-6}$	$9.44 \times 10^{-9}$
2	0.00261	1.08	8.69	0.42	$1.57 \times 10^{-5}$	$8.74 \times 10^{-8}$
3	0.0053	1.67	0.98	0.50	$1.56 \times 10^{-5}$	$2.81 \times 10^{-7}$
4	0.0048	2.16	2.59	0.57	$2.91 \times 10^{-5}$	$5.99 \times 10^{-7}$

Considerando los resultados de validación del modelo, mostrados en la Figura 4.6, se puede afirmar que la ecuación 4.7 predice satisfactoriamente el comportamiento del sistema bajo estudio: mezclado de un sistema estratificado de dos capas miscibles a través del movimiento ascendente de burbujas. Es importante recordar que los componentes cruciales del modelo son las ex-

presiones 4.11 y 4.12, los cuales afectan positivamente a la inducción al mezclado. Por otro lado, éstas a su vez dependen directamente de los parámetros  $f$ ,  $U_B$ ,  $d_e$ ,  $\chi$ , y  $A_t$ . Los cuatro primeros de manera directamente proporcional y el último de manera inversamente proporcional, es decir que es más fácil mezclar un sistema pequeño que uno grande. Note que tanto  $U_B$  como  $d_e$  son parámetros que forman parte de la definición del  $Re$ , por lo que no es de sorprenderse que un mejor mezclado será logrado por aquél sistema cuyas condiciones hidrodinámicas presenten un  $Re$  y  $\chi$  mayores. Esta última aseveración nos permite proponer que el mezclado puede propiciarse de mejor manera si se incrementan el  $Re$  y/o la relación de aspecto de las burbujas,  $\chi$ . De esta manera, la Figura 3.8 puede interpretarse como lo muestra la Figura 4.8, donde se ha trazado sobre ella una flecha (color verde) que indica hacia que zona del mapa  $Re$ - $\chi$  puede presentarse un mayor mezclado. Esta última figura exhibe qué parámetros físicos permiten lograr un mezclado eficiente a través del movimiento de burbujas



(a)



(b)

Figura 4.8: (a) Mapa de número de Reynolds ( $Re$ ) con la relación de aspecto ( $\chi$ ) para todos los sistemas estratificados: mezcla 85% glicerina agua ( $\circ$   $\bullet$ ); mezcla 75% glicerina-agua ( $\square$   $\blacksquare$ ); mezcla 65% glicerina-agua ( $\diamond$   $\blacklozenge$ ); mezcla 50% glicerina-agua ( $\triangle$   $\blacktriangle$   $\blacktriangledown$ ). La línea magenta muestra la transición de trayectoria rectilínea a oscilante de la burbuja propuesta por Zenit y Magnaudet [31]. La flecha verde indica la dirección en la cual se obtiene un mejor mezclado. (b) Una serie de imágenes que muestra los tipos de estelas, estables e inestables, correspondiente al sistema 85% glicerina-agua. Todas las imágenes fueron capturadas a la misma distancia entre la burbuja y la interfase en estado inicial. La numeración de los símbolos en (b) corresponden a los mostrados en (a).

## Capítulo 5

# Simulación numérica

En este capítulo se presentan las actividades que fueron realizadas durante la estancia en la Universidad de Michigan en Ann Arbor, Estados Unidos, donde en colaboración con el Dr. Eric Jonhsen se realizaron simulaciones numéricas de una burbuja que asciende y cruza una interfaz formada por dos fluidos diferentes.

El principal objetivo fue lograr la simulación asistido por computadora de una burbuja individual que cruza una interfase entre dos fluidos newtonianos con estratificación estable, es decir que el fluido más denso se ubica en el fondo, mientras el más ligero en la parte superior. Sin embargo, debido a que el código numérico no tiene implementada la tensión superficial de los componentes no fue posible simular distintas formas de burbuja, sino que solo se analizó una forma de burbuja. El código numérico utilizado fue desarrollado por el grupo de investigación del Dr. Johnsen en base a su trabajo publicado en el 2006 [18]. Hasta la fecha, el código ha sido usado exitosamente en distintos sistemas multifásicos [3, 27].

La principal característica del sistema de estudio es la presencia de interfaces, para ello se extendió el modelo multifásico a cinco ecuaciones (ver

sección 5.1). Para incorporar las relaciones constitutivas necesarias se considera que todos los materiales (gases y líquidos) obedecen la misma ecuación de estado con propiedades variables en el espacio, por lo tanto las interfaces están representadas por discontinuidades en las propiedades del material. El esquema espacial se basa en una formulación de solución-adaptativa, en el que un sensor de discontinuidad discrimina entre las regiones suaves y discontinuas. Para calcular los *fluxes* convectivos en las regiones suaves, se usaron las diferencias centrales explícitas de orden superior, mientras que en las discontinuidades (interfaces) se aplicaron diferencias finitas de orden superior bajo el esquema WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) [21, 17, 29].

## 5.1. Ecuaciones Gobernantes

Las ecuaciones gobernantes están basadas en las propiedades físicas conservativas en dos dimensiones en coordenadas cartesianas, desde una perspectiva Euleriana. Estas propiedades físicas son las variables conservativas  $\rho$ ,  $\rho u_i$ , y  $E$ , denotando la densidad, el momento lineal, y la energía, respectivamente. Note que  $u_i$  es la velocidad en la dirección  $i$ , ( $i = 1$  o  $2$ ). La forma general de las ecuaciones gobernantes es el siguiente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ E \\ \rho^{(k)} \alpha^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j \\ E u_j \\ \rho^{(k)} \alpha^{(k)} u_j \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \\ u_i \sigma_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos de Cauchy;  $k = 1, \dots, K - 1$ , el material  $k$  tiene una fracción volumen  $\alpha^{(k)}$  y densidad  $\rho^{(k)}$ , tal que

$$\sum_k \rho^{(k)} \alpha^{(k)} = \rho,$$

y

$$\sum_k \alpha^{(k)} = 1.$$

### 5.1.1. Sistema de ecuaciones a resolver

El sistema de ecuaciones a resolver se compone de 4 ecuaciones bien conocidas: 1) continuidad, 2) Navier-Stokes, 3) energía y 4) multifásico (conservación de masa). Se expresan en 2-D de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  están definidas como:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho^{(k)} \alpha^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \\ \rho^{(k)} \alpha^{(k)} u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \\ \rho^{(k)} \alpha^{(k)} v \end{bmatrix}.$$

donde  $E$  está definido como,

$$E = \frac{p + \gamma B}{\gamma - 1} + \frac{\rho u_i u_i}{2} + \rho q,$$

donde  $\gamma$ ,  $B$  y  $q$  son constantes que dependen del fluido, los cuales serán definidos más adelante. Cabe mencionar que para un gas ideal,  $B = 0$  y  $q = 0$  entonces:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u_i u_i}{2}$$

## 5.2. Ecuaciones de Estado

1. **Gases** Para gases, la ecuación de estado implementado es,

$$\frac{p}{\gamma - 1} = \rho e, \quad (5.3)$$

donde  $e$  es la energía interna del gas. La rapidez del sonido para un gas ideal puede obtenerse de:

$$c_i^2 = \gamma \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{\gamma K}{\rho}, \quad (5.4)$$

donde el subíndice denota la rapidez del sonido debido a la compresión,  $\gamma$  es el cociente entre los calores específicos definido como  $\gamma = c_p/c_v$ . Para gases ideales  $p = \rho RT$  y  $K$  se define como:

$$K = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (5.5)$$

2. **Líquidos** En este trabajo, un líquido es modelado usando las Ecuaciones de Estado de Stiffened, también referidos como las Ecuaciones

de Estado de Tammann, para relacionar la presión y la energía como:

$$\rho(e - q) = \frac{p + \gamma B}{\gamma - 1}, \quad (5.6)$$

donde  $\gamma$ ,  $B$  y  $q$  son constantes que dependen del fluido. Para un gas ideal  $B = 0$  y  $q = 0$  la ecuación (5.6) se convierte en la ecuación (5.3). Para el agua a temperatura ambiente existen varios valores, siendo los más comunes los siguientes:  $\gamma \approx 4.4$ ,  $B \approx 600$  MPa. Para determinar la velocidad del sonido de las ecuaciones de estado, se deriva la siguiente expresión:

$$c_l^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma(p + B)}{\rho} = \frac{\gamma K}{\rho}. \quad (5.7)$$

Así que se puede calcular  $B$  como:

$$B = \frac{\rho c_l^2}{\gamma} - p \quad (5.8)$$

Adicionalmente para  $q$ , se puede usar una simple expresión para la entalpía específica:

$$h = e + \frac{p}{\rho} = c_p T + q. \quad (5.9)$$

Manipulando la ecuación (5.9), se obtiene:

$$q = h - \gamma c_v T. \quad (5.10)$$

### 5.3. Burbuja de aire ascendiendo en agua

Debido a la fuerza de empuje que experimenta una burbuja de aire inmerso en agua, esta comienza a ascender. Este problema es un ejemplo característico de los fenómenos multifásicos en el cual una interfase separa

la burbuja del agua que lo rodea. Debido al ascenso la forma de la burbuja comienza a cambiar a una forma elipsoidal. Con el afán de estudiar el comportamiento de burbujas en este tipo de flujo, la interfase debe ser capturada con precisión. Para simular este problema, las ecuaciones Eq. (5.2) deben resolverse considerando el efecto de la gravedad. Para ello, el número adimensional relevante es el número modificado de Richardson,  $Ri = gl_c/c_{\text{ref}}^2$  donde  $g$  es la constante de aceleración debida a la gravedad de la Tierra,  $l_c$  la longitud característica y  $c_{\text{ref}}$  es la velocidad del sonido en el fluido de referencia. Dicho término debe ser considerado en el lado derecho de las ecuaciones de momentum y energía en sus componentes verticales ( $y$ ). En la simulación de este fenómeno, la burbuja comienza desde el reposo en un campo hidrostático. La Figura 5.1 muestra la posición inicial de la burbuja de aire (circulo azul) inmerso en agua (fondo rojo), y la Figura 5.2 muestra el campo de presión (hidrostático). En la Figura 5.3 se presenta una serie de imágenes del ascenso de la burbuja a través del medio líquido. En esta figura puede apreciarse el cambio de forma que sufre la burbuja debida a la presión hidrostática. Cabe señalar que la aceleración debida a la gravedad se incrementó considerablemente para acelerar la rapidez de cálculo numérico.

Adicionalmente, en la Figura 5.4, se muestran los campos de velocidad, vorticidad, presión y líneas de corriente producidos por el ascenso de la burbuja de aire a un tiempo adimensional determinado,  $t^* = t \cdot c_{\text{ref}}/l_c = 6.0$ . En base a una simple examinación de la figura anterior puede notarse que el caso de estudio es axisimétrico, característica que se considerará más adelante. Nótese que el efecto de la tensión superficial no se tomó en cuenta.

Los parámetros considerados se indican a continuación. La temperatura de referencia es  $T = T_0 = 300\text{K}$ , la presión base es  $p = 101325\text{Pa}$ ,  $u$  y  $v$  son las componentes de las velocidades iniciales en coordenadas cartesianas de la

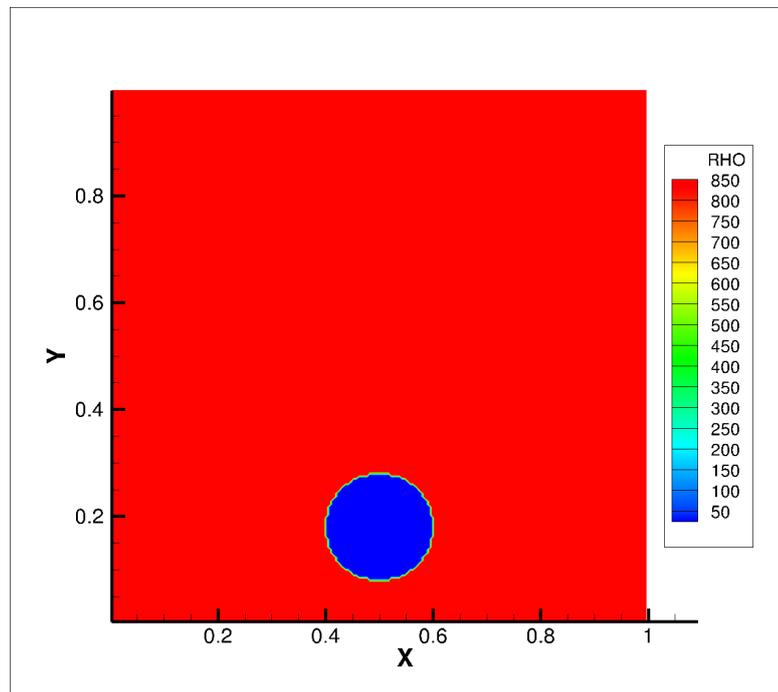
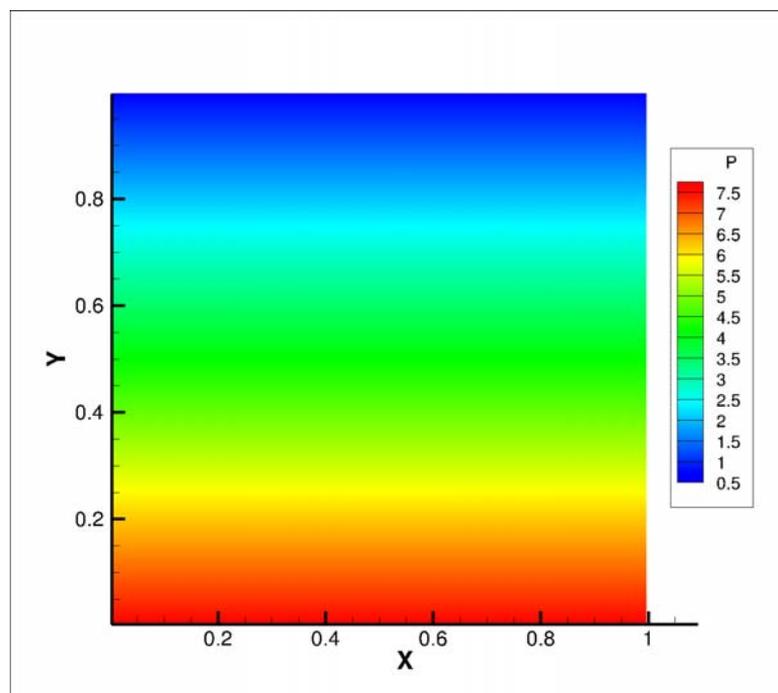


Figura 5.1: Posición inicial de la burbuja.

Figura 5.2: Campo de presión adimensional inicial  $\left( p^* = \frac{p}{\rho \cdot c_{ref}^2} \right)$ .

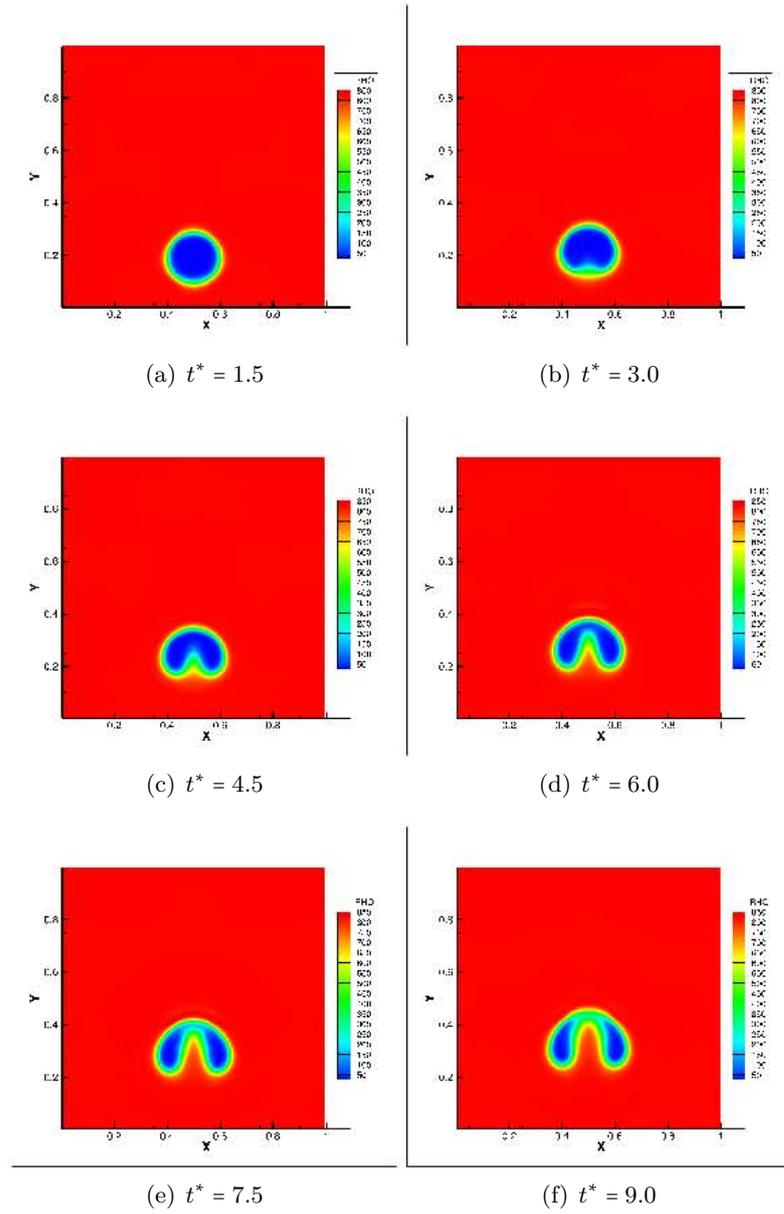


Figura 5.3: Burbuja ascendente. Configuración de la burbuja de aire ascendiendo en agua para diferentes pasos de tiempo adimensional,  $t^* = t \cdot c_{\text{ref}}/l_c$ .

burbuja de aire y el agua circundante.  $B$  y  $q$  son las constantes de la ecuación de estado, relevantes de los fluidos de interés.  $\mu_{\text{aire}} = 1.82 \times 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $k_{\text{aire}} = 0.0257 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ,  $\mu_{\text{agua}} = 1.002 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ , y  $k_{\text{agua}} = 0.58 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$  son la viscosidad y la conductividad térmica del aire y del agua, respectivamente.  $\rho_{\text{aire}} = 1.204 \text{kg/m}^3$  es la densidad y  $c_{\text{aire}} = 343.24 \text{m/s}$  la velocidad del sonido del aire a temperatura y presión establecidas anteriormente.  $D = 0.2 \cdot l_c$  es el diámetro de la burbuja de aire, donde  $l_c = 0.01 \text{m}$ . Los resultados son reportados para un sistema de  $200 \times 200$  con tamaño de malla uniforme. Las condiciones de frontera utilizados fueron de dos tipos: 1) en las caras superiores se usó la condición de presión fija hidrostática; 2) en las caras laterales se usó la condición de gradiente cero de velocidades.

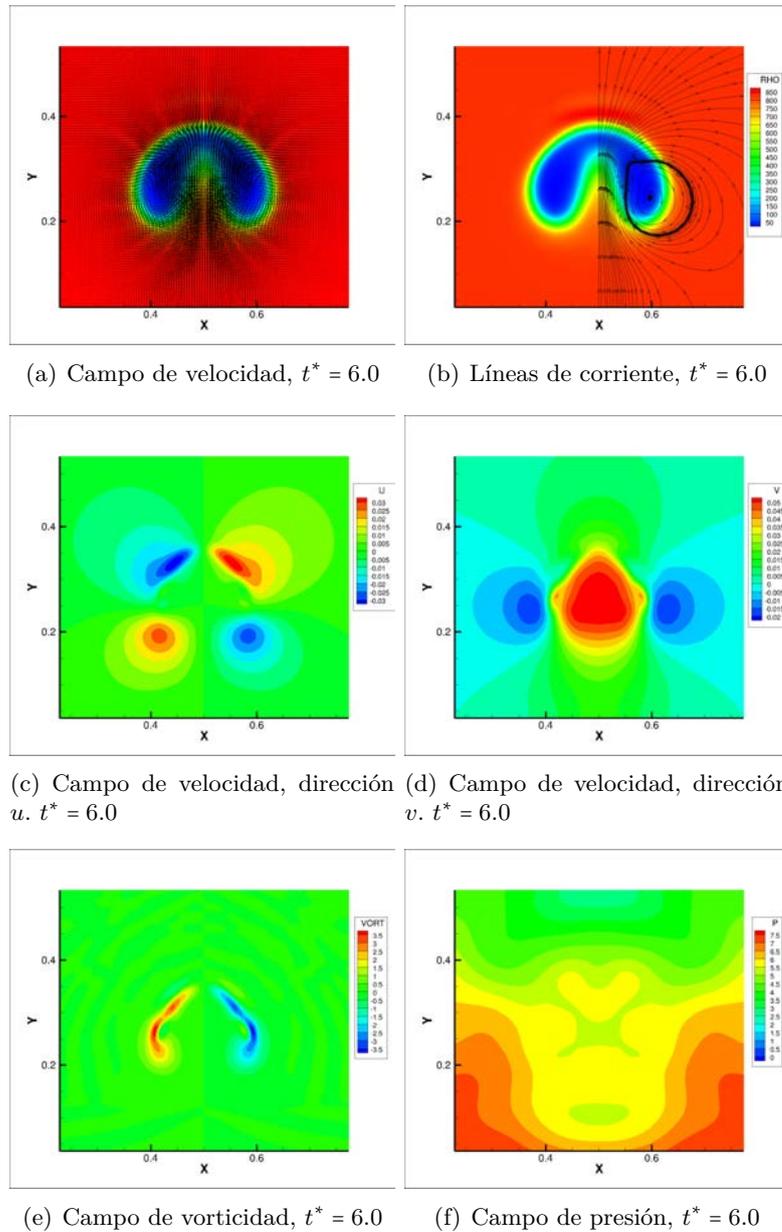


Figura 5.4: Burbuja ascendente. Patrones de flujo al paso de la burbuja. Los campos de velocidad, vorticidad y líneas de corriente corresponden a la burbuja en  $t^* = 6.0$ .  $t^* = t \cdot c_{\text{ref}}/l_c$ .

## 5.4. Burbuja ascendente cruzando una interfase líquido-líquido

Considerando las cualidades numéricas del esquema WENO, es factible pensar que es posible la simulación computacional del ascenso de una burbuja a través de una interfase líquido-líquido, con un gradiente abrupto de densidad entre fluidos. Para esto, en la tabla 5.1 se muestran los valores utilizados de parámetros y propiedades físicas.

La simulación fue realizada similarmente a lo descrito en la sección 5.3.

Tabla 5.1: Propiedades físicas y parámetros usados en la simulación del sistema trifásico.

Fluido	$\rho_1$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\mu_1$ (Pa s)	$c$ (ms <sup>-1</sup> )	$\gamma$	$h$ (Jkg <sup>-1</sup> )	$k$ (Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
Fluido pesado	1200	$1.002 \times 10^{-3}$	1800	4.4	$83.8 \times 10^3$	0.58
Fluido ligero	998.2	$1.002 \times 10^{-3}$	1626.41	4.4	$83.8 \times 10^3$	0.58
Burbuja de aire	1.204	$1.82 \times 10^{-5}$	343.24	1.4	0	0.0257

Cabe mencionar, que para este caso se usó la mitad del dominio para la simulación, considerando la condición de simetría del sistema en  $x = L_x/2$ . La mitad del dominio es dividido en un tamaño de  $100 \times 200$  con malla uniforme. La posición inicial de la burbuja en este sistema trifásico es mostrado en la Figura 5.5. La evolución en el tiempo de una burbuja individual cruzando una interfaz líquido-líquido se muestra en la Figura 5.6. Los resultados son cualitativamente buenos. Sin embargo, es importante mencionar que esta simulación presentó un problema numérico debido al tamaño de malla. Si la simulación se ejecuta con un tamaño de  $100 \times 200$ , no presenta ningún problema; pero si se corre, por ejemplo, con una malla de  $150 \times 300$ , el código falla, aunque se reduzca el paso de tiempo  $\Delta t$  de 0.00025 a 0.0001. El problema es que el código presenta una deficiencia en la resolución de las ecuaciones cuando las tres fases se juntan demasiado entre sí.

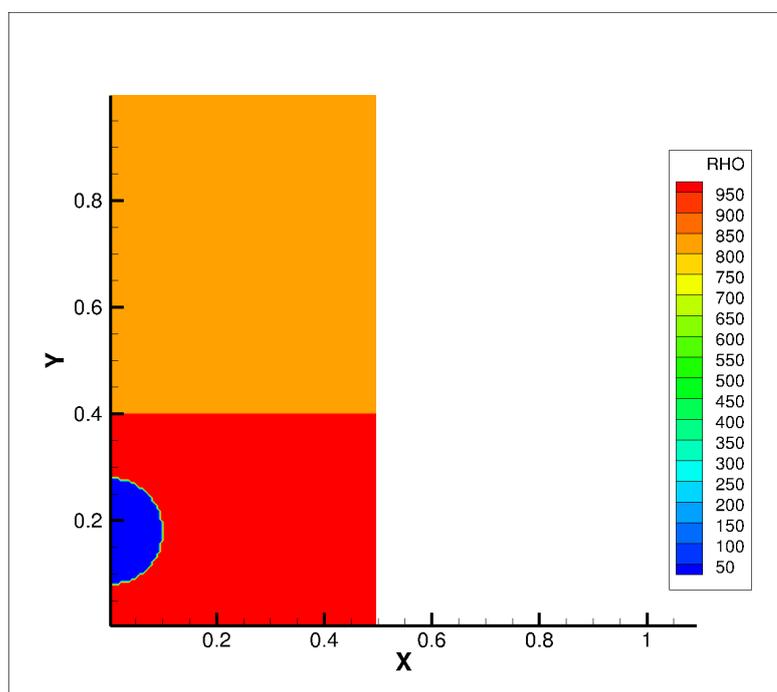


Figura 5.5: Posición inicial de la burbuja en el sistema trifásico.

La Figura 5.6 no muestra resultados para tiempos prolongados porque la burbuja golpea con la pared del lado derecho, el cual no es de nuestro interés. Para esto, el tamaño del sistema fue incrementado a  $200 \times 300$  para observar la evolución de la burbuja a periodos largos de tiempo.

En la Figura 5.7 se observa que el código es capaz de simular un sistema trifásico de manera satisfactoria ya que la interacción entre los tres componentes evoluciona en el tiempo sin presentar algún error numérico; sin embargo, es necesario resolver el problema de la falla del código, mencionado anteriormente, para así poder incrementar la resolución del mallado y obtener mejores resultados.

Hasta este punto sobre el trabajo de simulación se presentan dos problemas cruciales:

- El problema de deficiencia numérica para incrementar la resolución

#### 5.4. BURBUJA ASCENDENTE CRUZANDO UNA INTERFASE LÍQUIDO-LÍQUIDO<sup>67</sup>

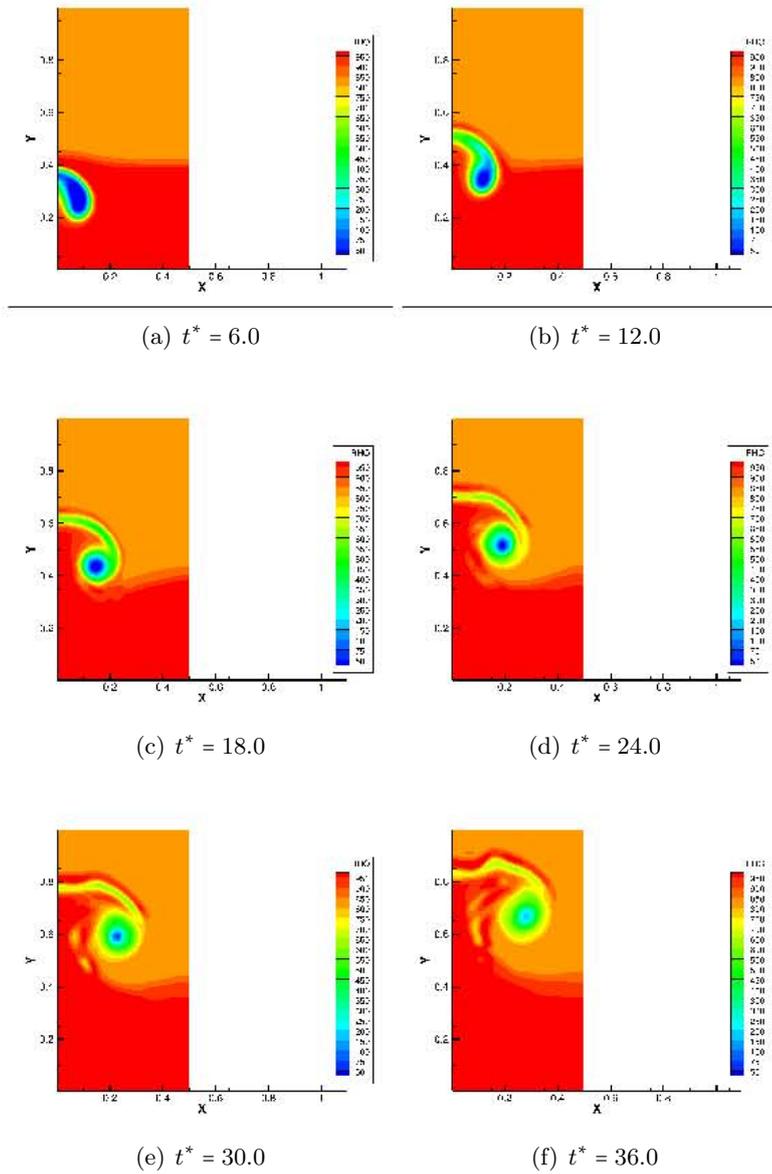


Figura 5.6: Burbuja ascendente a través de la interfase líquido-líquido. Configuración de la burbuja de aire en un sistema trifásico para diferentes tiempos adimensionales,  $t^* = t \cdot c_{\text{ref}}/l_c$ .

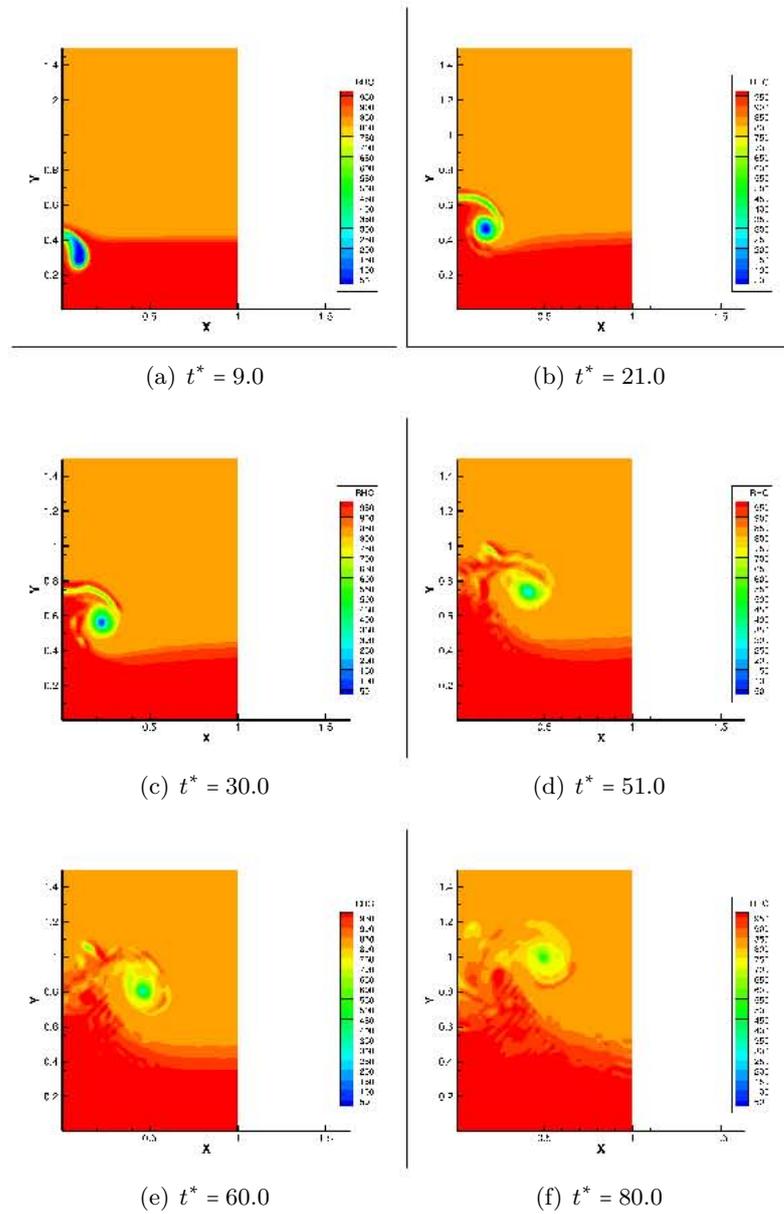


Figura 5.7: Burbuja ascendente a través de la interfase líquido-líquido. Configuración de la burbuja de aire en un sistema trifásico para diferentes tiempos adimensionales,  $t^* = t \cdot c_{\text{ref}}/l_c$ .

que permitirá obtener resultados más precisos.

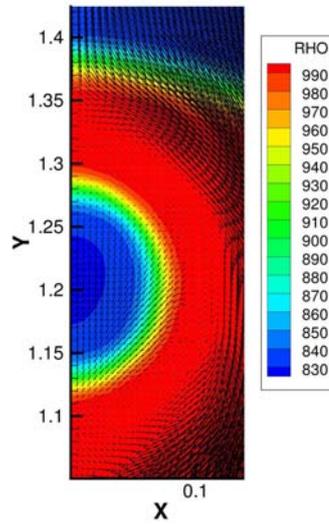
- El problema de que el código no tiene implementado el término de tensión superficial para los componentes, lo que impide simular condiciones tales que permitan que la burbuja presente formas distintas durante su ascenso, al variar simplemente su tamaño inicial. De hecho la forma de la burbuja mostrada en la Figura 5.3 es la única configuración lograda hasta este punto, lo que limita considerablemente el alcance de la simulación con respecto a los resultados experimentales.

## 5.5. La burbuja como marco de referencia

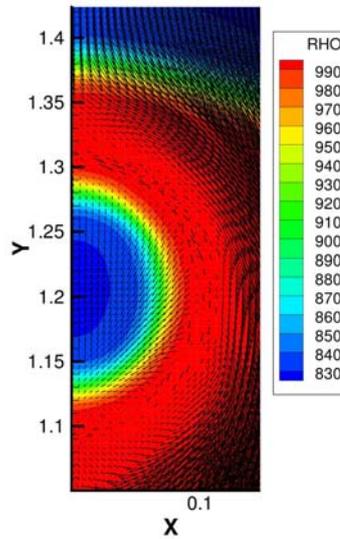
Con el afán de ampliar las posibles comparaciones de los resultados numéricos con los experimentales, se propuso simular un sistema tomando como referencia la burbuja. Esto es que la burbuja permanecerá fija en el espacio y que el fluido circundante se mueva aguas abajo. Este sistema de referencia, permite introducir una frontera que engloba (encapsula) la zona de la burbuja, lo que permite fijar la forma que se desee simular: esférica o elíptica, etc. Se probaron dos tipos de condiciones de frontera sobre la burbuja:

1. Tipo pared (no deslizamiento). Los componentes de la velocidad,  $u = v = 0$  en la superficie.
2. No penetración,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , en la superficie. Donde  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad y  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal a la superficie.

En la Figura 5.8 se muestra la comparación entre la dos condiciones de frontera impuestas sobre la zona encapsulada. En la Figura 5.8(a) se muestra el campo de velocidades para la simulación utilizando una condición de frontera de no deslizamiento sobre la superficie, por lo que los componentes del



(a) Condición de frontera de no deslizamiento.



(b) Condición de frontera de no penetración.

Figura 5.8: Campo de velocidad alrededor de un cuerpo esférico con distinta condición de frontera: (a) condición de no deslizamiento y (b) condición de no penetración. Ambos con  $Re=16$ .

vector velocidad son todos cero en esa frontera. En la Figura 5.8(b) se tiene el caso con una condición de frontera de no penetración, así que todos los vectores normales a la superficie esférica se anulan y se conservan los que no lo son.

Otra comodidad de este marco de referencia es que de manera fácil se puede manipular la forma de la burbuja, pasando por la esférica a la elíptica, imponiendo la relación de aspecto deseado.

En la Figura 5.9 se presentan dos casos para distintas formas de burbuja. Ambos casos tienen implementado la condición de frontera de no deslizamiento, esto correspondería al caso de un cuerpo sólido. Así mismo, ambos resultados contemplan las mismas propiedades físicas de los fluidos y los mismos parámetros de simulación, incluso el mismo diámetro equivalente; lo único que varía es la forma de la partícula que rodea el flujo aguas abajo. En esta misma figura se puede observar la diferencia de patrones de flujo que existe entre los dos casos, Figura 5.9(a) y (b). Para el primer caso, no se forma un dipolo de recirculación detrás del cuerpo, tal como lo hace el segundo caso; donde si se presenta recirculación. Este resultado es congruente con lo que experimentalmente se observa, que la forma de la burbuja juega un papel importante en la estructura de la estela y del volumen arrastrado. En la experimentación, para el caso estable, el volumen desplazado crece en el tiempo hasta llegar a un máximo, posteriormente decrece hasta reincorporarse al fluido del fondo. En las simulaciones llevadas a cabo, utilizando la burbuja como marco de referencia, el valor de  $V^*$  como función de  $t^*$  se muestra en la Figura 5.10. La curva de los resultados de simulación numérica corresponde a la secuencia de imágenes mostrada en la Figura 5.11. La física detrás de este comportamiento estriba en un balance de fuerzas, tal como se analizó en la sección 3.1, situación que se preserva desde el marco de refe-

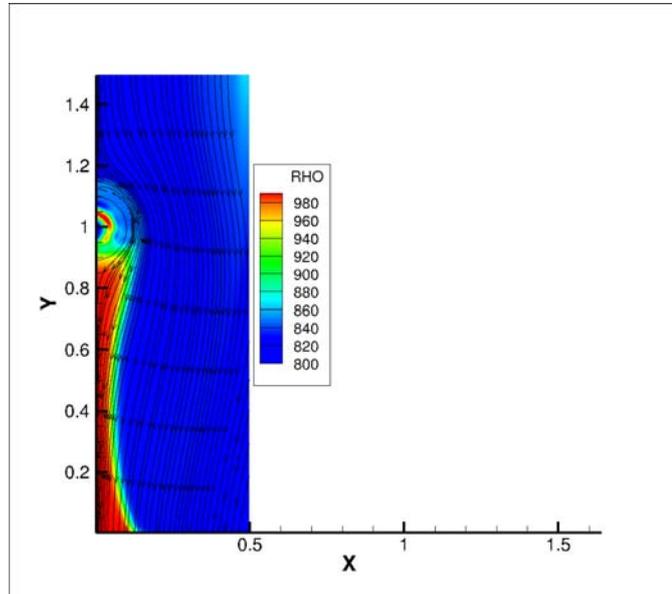
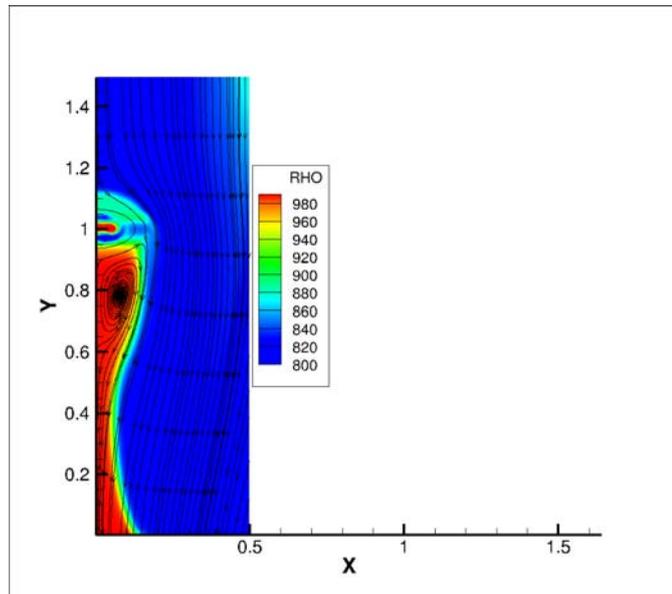
(a)  $\chi = 1$ (b)  $\chi = 1.5$ 

Figura 5.9: Patrones de flujo alrededor de la burbuja para dos formas distintas: (a) esférica,  $\chi = 1$  y (b) elíptica,  $\chi = 1.5$ .  $Re=16$ . Condición de no deslizamiento.

rencia usado. También, la relación entre el volumen desplazado respecto al  $Re$  puede ser validado con las simulaciones. En la Figura 5.12, se muestran dos resultados a diferentes  $Re$ , la Figura 5.12(a) con un  $Re=20$ ; la Figura 5.12(b) con un  $Re=50$ . Utilizando el mismo método de Pappus para calcular los volúmenes correspondientes se tiene que para el caso (a) el  $V^* = 2.78$  unidades<sup>3</sup> y para el (b)  $V^* = 2.36$  unidades<sup>3</sup>. Lo que muestra que el  $V^*$  es inversamente proporcional al  $Re$ , lo cual es congruente con los resultados experimentales. Adicionalmente, en la Figura 5.13 se muestra la comparación del volumen desplazado para dos simulaciones, cuya única diferencia es el tipo de condición de frontera sobre el cuerpo inmerso: (a) condición de no deslizamiento y (b) no penetración, ambas consideran la misma distancia entre la interfaz líquido-líquido y el centro del cuerpo inmerso. El volumen que se desplaza es similar en ambos casos; pero la diferencia cuantitativa de los volúmenes desplazados es de  $0.06 u^3$ , donde el mayor de ellos es el caso con condición de frontera del tipo no penetración. Este último resultado, sugiere que un cuerpo sólido provoca un volumen desplazado menor que el de una burbuja.

Los resultados numéricos son promisorios, principalmente en el efecto de la relación de aspecto y el número de Reynolds. Se planea usar esta herramienta en el futuro para continuar estudiando este flujo de manera más detallada.

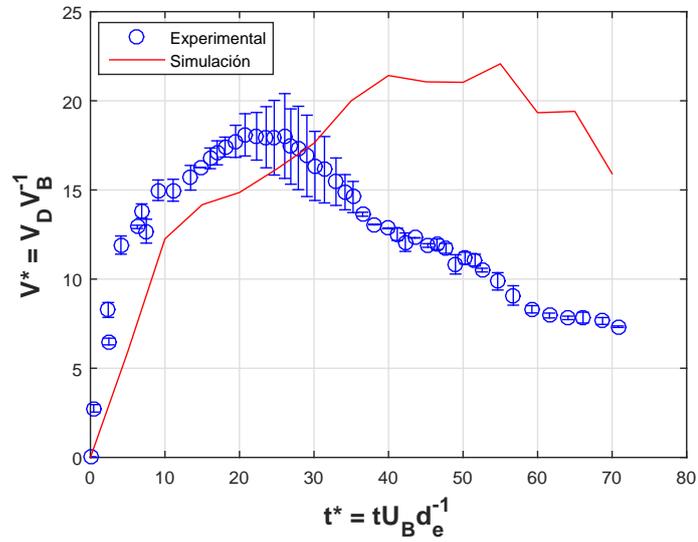


Figura 5.10: El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable. Los casos mostrados corresponden a resultados según la leyenda en el gráfico. Ambas con parámetros correspondientes a [1] de la Tabla 3.1.

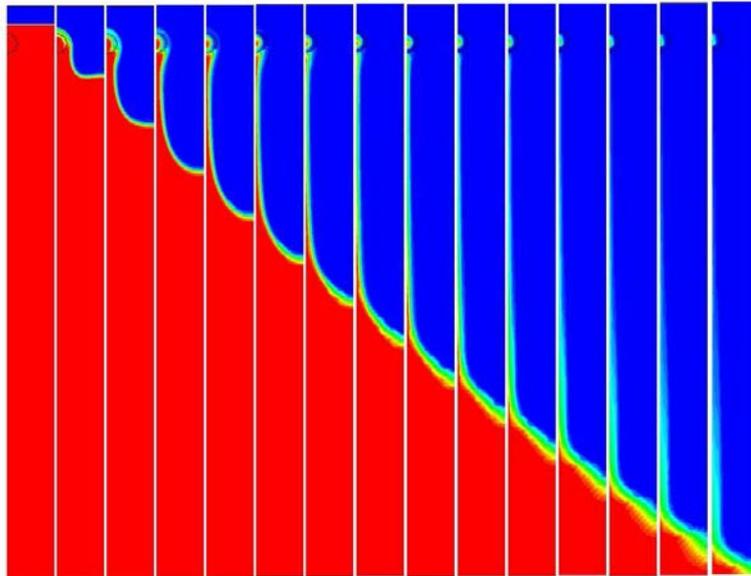


Figura 5.11: El volumen adimensional,  $V^*$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$  para el caso estable: simulación.

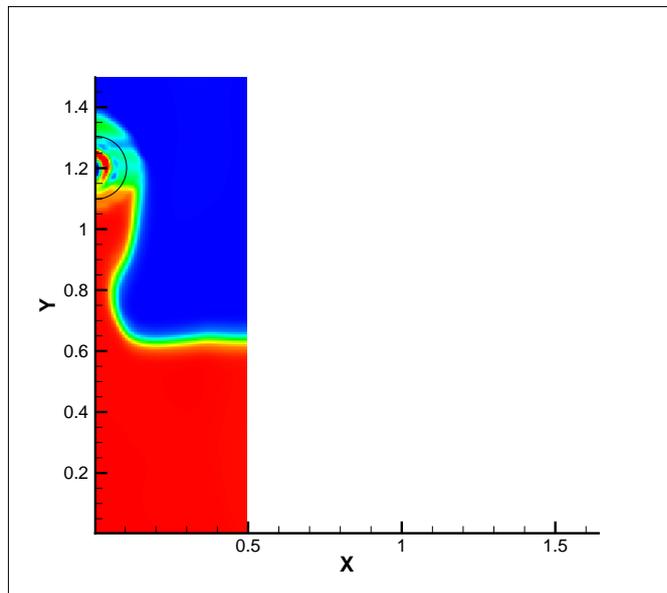
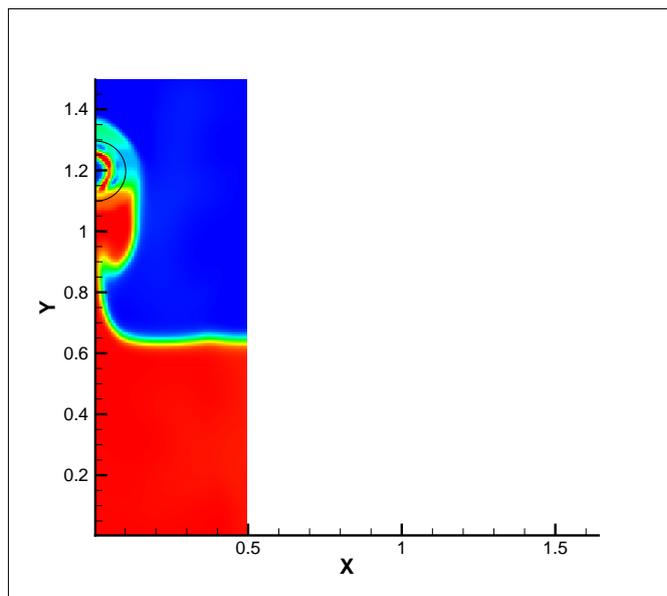
(a)  $Re=20$ (b)  $Re=50$ 

Figura 5.12: Volumen desplazado para dos casos con distinto  $Re$ . (a)  $Re=20$  y (b)  $Re=50$ .

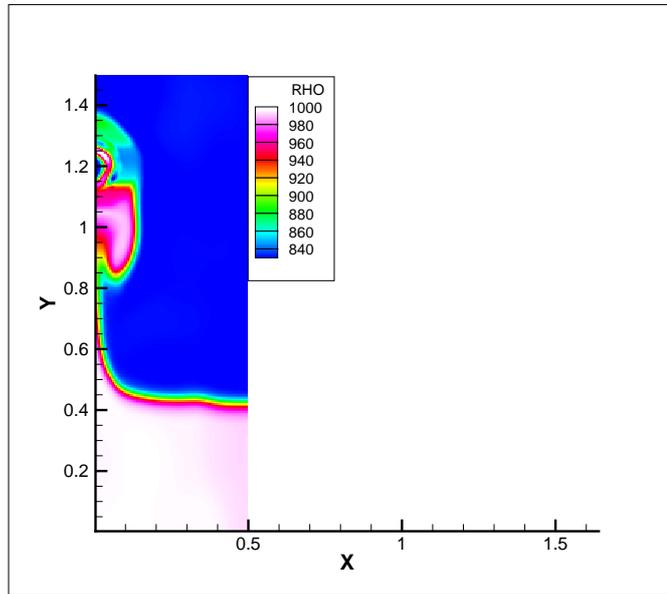
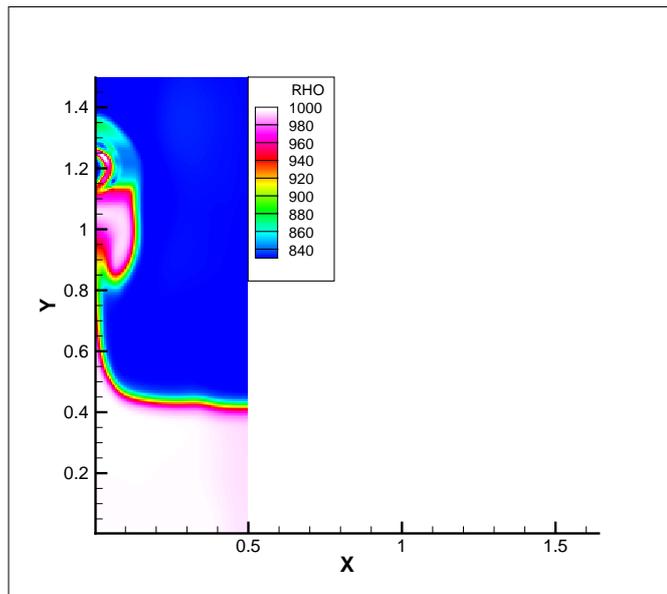
(a) Condición de no deslizamiento,  $Re=50$ (b) Condición de no penetración,  $Re=50$ 

Figura 5.13: Volumen desplazado para dos casos con distinta condición de frontera, ambos con  $Re=50$ . (a) Condición de no deslizamiento y (b) Condición de no penetración.

# Conclusiones

Se estudió experimentalmente el movimiento ascendente de una burbuja individual que cruza una interfaz de un sistema estratificado por densidad. El sistema consta de dos capas compuesta por fluidos en reposo, miscibles y newtonianos. Cuando la burbuja cruza la interfaz, esta arrastra cierta cantidad de fluido pesado y lo introduce al líquido ligero. Se distinguieron dos casos: (i) para burbujas pequeñas el volumen arrastrado, *drift*, regresa y se reincorpora al fluido del fondo, con una insignificante grado de mezcla, y (ii) para burbujas grandes, el *drift* se vuelve inestable y se desprende de la burbuja, por lo que es posible inducir al mezclado.

Para el caso estable, el volumen arrastrado es directamente proporcional al tamaño de la burbuja, y la capacidad de arrastre es inversamente proporcional al Reynolds de la burbuja. Adicionalmente, la evolución del *drift* en el tiempo fue modelada analíticamente usando el balance entre las fuerzas boyantes y de arrastre, resultando en una buena concordancia con los datos experimentales.

Por otro lado, se mostró que la inestabilidad es resultado del hecho de que las burbujas grandes no siguen trayectorias rectilíneas, sino que experimentan oscilaciones. La inestabilidad induce a la aparición de un proceso de estiramiento del fluido pesado cuando se encuentra inmerso en el líquido ligero, como consecuencia de la presencia de regiones de vorticidad; de tal hecho se

induce a un grado de mezcla entre los fluidos pesado y ligero.

Adicionalmente se estudió el paso consecutivo de burbujas perturbando la interfaz. El estado de movimiento del sistema estratificado evoluciona del reposo a un estado de movimiento agitado. Las masas de ambos líquidos miscibles se distorsionan de tal manera que regiones con interfaz se extienden de diversas maneras, tal que los gradientes de concentración entre líquidos comienzan a desaparecer resultando una mezcla. Para ello se propuso y validó un modelo que deduce satisfactoriamente el comportamiento del sistema bajo estudio: mezclado de un sistema estratificado de dos capas miscibles a través del movimiento ascendente de burbujas.

Finalmente, se llevaron a cabo simulaciones asistidas por computadora del proceso de arrastre de burbujas individuales. En concordancia con los resultados experimentales, se encontró el mismo efecto de la relación de aspecto ( $\chi$ ) y el número de Reynolds ( $Re$ ) sobre el volumen desplazado, *drift*. La validación de las curvas de  $V^*$  como función del  $t^*$ , fue cualitativamente aceptable. Los resultados mostrados en este trabajo son los primeros de su tipo, en simular fenómenos de arrastre entre dos fluidos miscibles.

Para trabajos futuros, se debe considerar realizar un mayor número de experimentos para el caso del estudio del mezclado a través del movimiento ascendente de burbujas consecutivas, variando  $\chi$  y  $f$ ; tomando en cuenta que el índice de refracción de ambas capas de fluido que forman al sistema estratificado deben igualarse para que los valores de concentración que se obtengan con la técnica PLIF sean más fidedignos. Ésto permitirá validar de manera rigurosa el modelo propuesto en este trabajo.

Por otro lado, se debe buscar la implementación de la tensión superficial al código numérico. Esto permitirá simular el cruce de burbujas de diferentes tamaños y formas a través de interfases entre líquidos miscibles, trabajo que

hasta la fecha no se ha reportado en la comunidad científica. Así, el código basado en un esquema WENO demostraría su versatilidad para simular sistemas multifásicos a regímenes de Reynolds moderados.

# Bibliografía

- [1] Bataille, J., M. Lance y J. L. Marie: *Phase-Interface Phenomena in Multiphase Flow*. Taylor and Francis, 1991.
- [2] Bayareh, M., A. Doostmohammadi, S. Dabiri y A. M. Ardekani: *On the rising motion of a drop in stratified fluids*. *Phys. Fluids*, 25:103302, 2013.
- [3] Beig, S. Alahyari y E. Johnsen: *Maintaining interface equilibrium conditions in compressible multiphase flows using interface capturing*. *J. Comp. Phys.*, 302:548–566, 2015.
- [4] Blanchette, F. y A. M. Shapiro: *Drops settling in sharp stratification with and without Marangoni effects*. *Phys. Fluids*, 24:042104, 2012.
- [5] Bonhomme, R., J. Magnaudet, F. Duval y B. Piar: *Inertial dynamics of air bubbles crossing a horizontal fluid-fluid interface*. *J. Fluid Mech.*, 707:405–443, 2012.
- [6] Brucker, C.: *Structure and dynamics of the wake of bubbles and its relevance to bubble interaction*. *Phys. Fluids*, 11:1787–1796, 1999.
- [7] Bush, J. W. M. y I. Eames: *Fluid displacement by high Reynolds number bubble motion in a thin gap*. *Chem. Eng. Sci.*, 24(3):411–430, 1998.

- [8] Dabiri, J. O.: *On the estimation of swimming and flying forces from wake measurements*. J. Exp. Biol., 208:3519–3532, 2005.
- [9] Dabiri, J. O.: *Note on the induced Lagrangian drift and added-mass of a vortex*. J. Fluid Mech., 547:105–113, 2006.
- [10] Dabiri, J. O. y M. Gharib: *Fluid entrainment by isolated vortex rings*. J. Fluid Mech., 511:311–331, 2004.
- [11] Darwin, C.: *A note on hydrodynamics*. Proc. Cam. Phil. Soc., 49:342–354, 1953.
- [12] Davies, R. M. y G. Taylor: *The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes*. Proc. R. Soc. Lond., A(200):375–390, 1950.
- [13] Eames, I., S. E. Belcher y J. C. R. Hunt: *Drift, partial drift and Darwin's proposition*. J. Fluid Mech., 275:201–223, 1994.
- [14] Eames, I. y G. Duursma: *Displacement of horizontal layers by bubbles injected into fluidised beds*. Chem. Eng. Sci., 52(16):2697–2705, 1997.
- [15] Eckart, C.: *An analysis of the stirring and mixing process in incompressible fluids*. J. Mar. Res., 7:265–275, 1948.
- [16] Han, Z. y L. Holapa: *Bubble Bursting Phenomenon in Gas/Metal/Slag Systems*. Metall. Mater. Trans. B, 34B:525–532, 2003.
- [17] Jiang, G. S. y C. W. Shu: *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*. J. Comp. Phys., 126:202–218, 1996.
- [18] Johnsen, E. y T. Colonius: *Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems*. J. Comp. Phys., 219:717–732, 2006.

- [19] Katija, K. y J. O. Dabiri: *A viscosity-enhanced mechanism for biogenic ocean mixing*. Nature, 460:624–627, 2009.
- [20] Legendre, D., R. Zenit y J. R. Velez-Cordero: *On the deformation of gas bubbles in liquids*. Phys. Fluids, 24:043303, 2012.
- [21] Liu, X., S. Osher y T. Chan: *Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes*. J. Comp. Phys., 115:200–212, 1994.
- [22] Long, R. R.: *The motion of Fluids with Density Stratification*. J. Geophys. Res., 64:2151–2163, 1959.
- [23] Marugan-Cruz, C., J. Rodriguez-Rodriguez y C. Martinez-Bazan: *Negatively buoyant starting jets*. Phys. Fluids, 21:117101, 2009.
- [24] Mougin, G. y J. Magnaudet: *Path instability of a rising bubble*. Phys. Rev. Lett., 88:014502, 2002.
- [25] Ottino, J. M.: *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. Cambridge University Press, 1989.
- [26] Rivero, M.: *Étude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré*. Ph.D. thesis, Institute de Mécanique des Fluides de Toulouse, 1990.
- [27] Rodriguez, M. y E. Johnsen: *A high-order accurate, finite-difference method for numerical simulations of shock waves in heterogeneous viscoelastic media*. J. Comp. Phys. (submitted), 2016.
- [28] Sau, R. y K. Mahesh: *Passive scalar mixing in vortex rings*. J. Fluid Mech. Phys. Fluids, 582:449–461, 2007.

- [29] Shu, C. W.: *Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. ICASE Report, 97-65:206253, 1997.
- [30] Turkdogan, E. T.: *Fundamentals of Steelmaking*. The Institute of Materials, 1996.
- [31] Zenit, R. y J. Magnaudet: *Path instability of rising spheroidal air bubbles: A shape-controlled process*. Phys. Fluids, 20(061702), 2008.
- [32] Zetina, S., G. Godinez y R. Zenit: *A hydrodynamic instability is used to create aesthetically appealing patterns in painting*. PLOS ONE, 10:e0126135, 2015.