



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Carcajes con potencial no degenerados  
asociados a triangulaciones de superficies:  
existencia y unicidad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

José Luis Miranda Olvera

TUTOR

Dr. Daniel Labardini Fragoso

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# HOJA DE DATOS

## 1. Datos del alumno

Miranda  
Olvera  
José Luis  
5548378430  
Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
413012397

## 2. Datos del tutor

Dr.  
Daniel  
Labardini  
Fragoso

## 3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Christof  
Geiss  
Hahn

## 4. Datos del sinodal 2

Dra.  
Diana  
Avella  
Alaminos

## 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Daniel  
Labardini  
Fragoso

## 6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Octavio  
Mendoza  
Hernández

## 7. Datos del sinodal 5

Dra  
Edith Corina  
Sáenz  
Valadez

## 8. Datos del trabajo escrito

Carcajes con potencial no degenerados  
asociados a triangulaciones de superficies:  
existencia y unicidad  
148 p  
2016

*A mi familia, en especial a mis padres, por todo su esfuerzo y sacrificio al apoyarme en la realización de mis estudios.*



# Agradecimientos

En algún momento de mi vida pensé en estudiar Medicina, tan es así, que estudié un año en la Universidad de Guadalajara, aunque después decidí salirme y volver a hacer lo que más me gustaba, las matemáticas. Si bien ya tenía un gusto por éstas desde pequeño, fue mi participación en la Olimpiada de Matemáticas lo que me impulsó a convertirme en un matemático.

Un día vi pegado en la preparatoria un cartel de la Olimpiada de Matemáticas, y decidí entrar en dicho concurso, sin saber todo lo que me esperaba por delante. Fui acompañado en mis primeros concursos por el profesor José Guadalupe Casillas, a quién le agradezco por ello. De igual manera, a los entrenadores de la Olimpiada en Jalisco: Maru, Cesar, Christa, Patricio, gracias a cuyas enseñanzas pude obtener buenos resultados durante mi participación en la OMM. A Leonardo Martínez por preparar y acompañar al equipo de la UNAM durante varios años en la Competencia Iberoamericana y en la IMC, por su buen trabajo como líder y por ser un excelente amigo. A Lalo, por pedir todos mis puntos durante la CIIM el año pasado, ya que sin estos puntos no habría obtenido esa medalla. A Alaín Acevedo por enseñarme a programar e impulsarme a participar junto con él en los concursos de programación ACM-ICPC. A los compañeros que compitieron conmigo, y con quienes me divertí mucho. A María Fernanda y Manuel Leal, a quienes debo el sobrenombre Pit; a Juan Carlos, por enseñarme el Teorema de Stewart, que utilice en el selectivo para ir a la IMO; y a Manuel Alcántara, quién además de entrenarnos jugaba de vez en cuando en nuestras reuniones.

Quiero agradecer a mi tutor por toda su paciencia al haberme ayudado a mejorar algunos aspectos que no desarrollé durante mi formación académica previa, por su esmero en transmitirme esa forma de pensar y trabajar en matemáticas. Debido al trabajo que he realizado con el Dr. Daniel Labardini, es que he logrado desarrollar ciertas habilidades que todo matemático debe poseer, y que sin lugar a duda me serán de gran ayuda en lo sucesivo.

A la Dra. Diana Avella por sugerirme hablar y haberme puesto en contacto con quién fue mi tutor para elaborar esta tesis. Así mismo, por las observaciones y correcciones que me hizo.

Le doy las gracias a aquellas personas que leyeron mi tesis contribuyendo con su opinión para mejorar mi trabajo: a mis sinodales, y a mi novia Aracely Guadalupe,

que hasta el último momento me ayudo a hacer minuciosas revisiones.

Finalmente agradezco al programa de becas de Exxon Mobil para la investigación por el apoyo económico otorgado durante la elaboración de esta tesis; también a Fundación Telmex por la beca que me fue otorgada a lo largo de mis estudios de Licenciatura.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA102215, Triangulaciones de superficies, álgebras jacobianas y equivalencias derivadas. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos y Resultados Básicos de Carcajes</b>	<b>5</b>
1.1. Potenciales y sus Ideales Jacobianos . . . . .	12
1.2. Carcajes con Potencial . . . . .	17
<b>2. Mutaciones de Carcajes con Potencial</b>	<b>25</b>
<b>3. El Carcaj asociado a una triangulación de una superficie</b>	<b>33</b>
3.1. Triangulaciones de superficies . . . . .	33
3.2. El Carcaj de una triangulación . . . . .	39
3.3. Triangulaciones etiquetadas . . . . .	52
<b>4. El álgebra Jacobiana de un Carcaj con Potencial asociado a una triangulación de una superficie</b>	<b>61</b>
<b>5. Carcajes con Potencial no degenerados asociados a triangulaciones de superficies</b>	<b>77</b>
5.1. Preliminares . . . . .	77
5.2. Superficies de género positivo con 2 punciones . . . . .	99
5.3. Superficies de género positivo con sólo una punción . . . . .	119
<b>A. Producto tensorial</b>	<b>133</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>137</b>
<b>Índice analítico</b>	<b>138</b>



# Introducción

Un *carcaj* es una cuarteta formada por un conjunto de vértices, un conjunto de flechas (que podemos identificar como una gráfica dirigida) y dos funciones  $t, h$  que indican los extremos de las flechas. Se asocia a un carcaj el álgebra completa de caminos, en la que los potenciales son sumas infinitas de ciclos. A cada pareja de un carcaj y un potencial (QP-*quivers with potenciales*) se asocia un *ideal Jacobiano* (generado por las derivadas del potencial) y un *álgebra Jacobiana*. Estas álgebras Jacobianas aparecen en el estudio de las álgebras de Calabi-Yau. En física suele utilizarse el término superpotencial para denominar a los potenciales.

En [5] S. Fomin, M. Shapiro, y D. Thurston estudiaron la relación existente entre las *álgebras de conglomerado* (cluster algebras) y las *superficies con puntos marcados*, a través del complejo de arcos etiquetados de cada superficie (este resultado se discute de manera precisa en el Teorema 7.11 [5]). A una triangulación  $\tau$  de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  se asocia una matriz de adyacencias la cual es antisimétrica, y cuyas filas y columnas son etiquetadas por los arcos de  $\tau$ . Esta matriz antisimétrica determina un carcaj sin lazos ni 2-ciclos. La mutación de las matrices de adyacencias es compatible con la mutación de carcajes.

Las álgebras de conglomerado fueron inventadas por S. Fomin y A. Zelevinsky [12] en un intento por obtener una aproximación combinatoria del dual de las bases canónicas de Lusztig de grupos cuánticos. H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky [3] dieron una de las principales relaciones entre la teoría de álgebras de conglomerado y la *teoría de representaciones* de álgebras, a través de su trabajo en carcajes con potencial  $(Q, S)$  y las representaciones del álgebra Jacobiana asociada  $\mathcal{P}(Q, S)$ . Las álgebras de conglomerado son una clase de anillos conmutativos provistos con una estructura combinatoria adicional, la cual contiene un conjunto de generadores (variables de conglomerado) agrupados en conjuntos no disjuntos entre sí, de la misma cardinalidad. El álgebra de conglomerado asociada a una matriz antisimétrica es el subálgebra de un campo de funciones racionales generada por un conjunto inductivamente construido de variables de conglomerado.

En 2009 A. Felikson, M. Shapiro y P. Tumarkin [4] demostraron que los carcajes 2-acíclicos de tipo de mutación finito son los carcajes asociados a una triangulación de una superficie, salvo algunos casos excepcionales.

En su tesis doctoral [8], D. Labardini, asesor de esta tesis, estudió un tipo parti-

cular de potenciales en el carcaj asociado a una triangulación de una superficie. Para triangulaciones "buenas", estos potenciales contienen la mínima información combinatoria de la triangulación, ya que presentan exactamente un ciclo dirigido por cada triángulo y múltiplos escalares de los ciclos alrededor de cada punto marcado en el interior de la superficie. D. Labardini mostró que la operación de mutación a nivel de carcajes con potencial es compatible con la operación de reemplazo de arcos a nivel de triangulaciones de superficies. También, demostró que en el caso de superficies con frontera no vacía estos potenciales eran rígidos y no *degenerados* (es posible aplicar cualquier sucesión de mutaciones al carcaj con potencial).

Una pregunta de particular interés fue el estudiar la dimensión del álgebra Jacobiana asociada a los carcajes con potencial descritos por D. Labardini, quien conjeturo que son de dimensión finita. Para superficies con frontera no vacía mostro que en efecto así era, así como también para el toro con una punción y frontera vacía. En 2009 S. Trepode y Y. Valdivieso [14] trabajaron el caso de esferas con cualquier cantidad de puntos marcados. Finalmente, en 2012 S. Ladkani [13] demostró esta conjetura en general para superficies con frontera vacía.

En un trabajo posterior, publicado en 2016 [6], C. Geiss, D. Labardini y J. Schröer mostraron que para una gran cantidad de superficies (más precisamente toda superficie con frontera no vacía distinta de un toro con un punto marcado, ó frontera vacía y al menos 5 puntos en el caso de esferas y al menos tres puntos para superficies de género positivo), la construcción de Labardini es la única bajo la cual la combinatoria de las triangulaciones y el álgebra de los carcajes con potencial pueden ser mutuamente compatibles, es decir, todo potencial no degenerado es equivalente al potencial propuesto. En este mismo trabajo se muestra la existencia de al menos dos potenciales no degenerados y no equivalentes en triangulaciones de superficies con frontera vacía y sólo un punto marcado. Para el caso de superficies con frontera vacía y dos puntos marcados se conjeturó que el potencial propuesto por Labardini es el único (salvo equivalencia) no degenerado.

Esta tesis da una revisión del marco teórico necesario para entender los resultados de C. Geiss, D. Labardini y J. Schröer acerca de la clasificación de potenciales no degenerados, iniciando con la teoría de mutación de carcajes con potencial desarrollada por H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky [3]. Finalmente se prueba la conjetura presentanda en [6] y se muestra que los carcajes asociados a triangulaciones de superficies de género positivo, frontera vacía y sólo un punto marcado admiten una cantidad numerable de potenciales compatibles y no equivalentes (en 2013, en su tesis de maestría J. Geuenich [7] había probado ya este resultado para el caso de un toro con un punto). En este momento D. Labardini se encuentra trabajando de manera conjunta con J. Geuenich en la elaboración de un artículo que incluirá algunos de los resultados que obtuvimos en esta tesis.

El desarrollo de capítulos es el siguiente:

Los primeros dos capítulos presentan de manera general los conceptos neces-

rios para trabajar con carcajes con potencial. En su mayor parte están basados en un artículo de H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky [3]. El primer capítulo inicia con la definición formal de un Carcaj, y se describe el álgebra completa de caminos. Se presenta una manera de trabajar con los automorfismos de esta álgebra. En la sección 1.1 se asocia a una pareja de un carcaj y un potencial un ideal Jacobiano y un álgebra Jacobiana. La sección 1.2 habla acerca de la equivalencia a derecha y equivalencia débil a derecha de carcajes con potencial. En el capítulo 2 se presenta la operación de mutación en el espacio de carcajes con potencial (sin lazos que pasen por el vértice con el que se va a mutar).

El capítulo 3 asocia un carcaj a una triangulación de una superficie compacta y conexa, y describe algunas de sus características (esta asociación fue presentada por S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston [5]).

En el capítulo 4 se presenta la clase de potenciales definidos y estudiados por D. Labardini, posteriormente se presenta una clase más amplia (de utilidad sólo en el caso específico de superficies con frontera vacía y un punto marcado) de potenciales. El capítulo finaliza con la descripción de una base como espacio vectorial del álgebra Jacobiana (que es de dimensión finita) asociada a los carcajes con potencial de esta clase. La mayor parte de los resultados se basan en el trabajo de S. Ladkani [13].

Por último, el capítulo 5 describe la estrategia de C. Geiss, D. Labardini y J. Schröer [6] para probar la unicidad de carcajes con potencial compatibles con la estructura combinatoria de las triangulaciones, y se dan una pequeña variante de algunos resultados. En la sección 5.1 se prueba la conjetura mencionada anteriormente (que es el principal resultado de esta tesis). La sección 5.2 muestra una cantidad numerable de carcajes con potencial compatibles y no equivalentes para superficies de género positivo y un punto marcado (el segundo resultado importante de este trabajo).



# Capítulo 1

## Conceptos y Resultados Básicos de Carcajes

**Definición 1.1** ([3]). *Un carcaj (quiver en inglés) es una cuarteta  $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ , donde  $Q_0$  es un conjunto de vértices (finito),  $Q_1$  es un conjunto de flechas (también finito),  $h : Q_1 \rightarrow Q_0$  y  $t : Q_1 \rightarrow Q_0$  son respectivamente las funciones cabeza y cola (head and tail) de las flechas. Es decir, un carcaj  $Q$  se puede representar como una gráfica dirigida, donde cada flecha  $a \in Q_1$  va del vértice  $t(a) \in Q_0$  al vértice  $h(a) \in Q_0$ .*

Dado un campo  $K$ , se asocian al carcaj  $Q$  dos espacios vectoriales  $R = K^{Q_0}$  y  $A = K^{Q_1}$ , el espacio de vértices y el espacio de flechas respectivamente<sup>1</sup>. El espacio  $R$  es un álgebra conmutativa, con elemento unidad la función constante 1, mientras que el espacio  $A$  es un  $R$ - $R$ -bimódulo, con la siguiente estructura: para cada  $e \in R$ , para cada  $f \in A$  y para cualquier  $a \in Q_1$ , definimos  $(e \cdot f)(a) = e(h(a))f(a)$  y  $(f \cdot e)(a) = f(a)e(t(a))$

Denotamos por  $Q^*$  al carcaj dual u opuesto, el cual contiene las flechas de  $Q$  en sentido inverso, es decir,  $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ , mientras que  $Q^* = (Q_0, Q_1, t, h)$ . El espacio de flechas de este carcaj  $A^*$  es el bimódulo dual de  $A$  (éste tiene estructura de  $R$ - $R$ -bimódulo).

Dado un conjunto de vértices  $Q_0$  con su asociado espacio de vértices  $R$ , todo  $R$ - $R$ -bimódulo de dimensión finita  $B$  es el espacio de flechas de algún carcaj sobre  $Q_0$ . En efecto, consideremos a los elementos de la forma  $e_i \in R$  con  $i \in Q_0$ , tales que  $e_i(j) = \delta_{ij}$  para cada  $j \in Q_0$ ; éstos forman una base de idempotentes de  $R$ . Así,  $B$  tiene una descomposición en suma directa  $B = \bigoplus_{i,j \in Q_0} B_{i,j}$ , donde  $B_{i,j} = e_i B e_j \subseteq B$  para cada  $i, j \in Q_0$ . Identificamos una  $K$ -base de  $B$  formada por la unión de  $K$ -bases

---

<sup>1</sup>Para cada conjunto  $X$ , se define  $K^X$  como el espacio de funciones de  $X$  a  $K$ . Existen operaciones canónicas de suma y producto en este espacio, dadas por las operaciones del campo.

para cada uno de los subespacios  $B_{i,j}$   $i, j \in Q_0$  con un conjunto de flechas  $Q_1$  (finito, ya que  $B$  es de dimensión finita). Para cada  $a \in Q_1 \cap B_{i,j}$  se define  $h(a) = i$  y  $t(a) = j$ .

Dado un carcaj  $Q$  con su espacio de flechas  $A$ , para cada entero positivo  $d \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ , denotamos por  $A^d$  al  $R$ - $R$ -bimódulo<sup>2</sup>

$$A^d = \underbrace{A \otimes_R A \otimes_R \cdots \otimes_R A}_d, \quad (1.1)$$

el espacio de caminos de longitud  $d$ ; por convención  $A^0 = R$ .

**Definición 1.2** ([3], Definición 2.1). *Se define el álgebra de caminos del carcaj  $Q$  como el álgebra tensorial graduada<sup>3</sup>*

$$R\langle A \rangle = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A^d. \quad (1.2)$$

Para cada  $i, j \in Q_0$ , la componente  $R\langle A \rangle_{i,j} = e_i R\langle A \rangle e_j$  es llamada el espacio de caminos de  $j$  a  $i$ .

Identificamos cada flecha  $a \in Q_1$  con la función  $1_a \in A$ , tal que  $1_a(b) = \delta_{ab}$  para toda flecha  $b \in Q_1$ . De esta forma, podemos afirmar que el conjunto de flechas  $Q_1$  es una  $K$ -base de  $A$ . Para cada  $d \geq 1$  el conjunto  $\{a_1 a_2 \cdots a_d \mid a_i \in Q_1, t(a_i) = h(a_{i+1}) \forall i \in \{1, \dots, d-1\}, \text{ y } a_d \in Q_1\}$  forma una  $K$ -base (finita) de  $A^d$ , a la que llamamos base de caminos de  $A^d$  asociada a  $Q_1$ . Para  $d = 0$ ,  $\{e_i \mid i \in Q_0, e_i(j) = \delta_{i,j} \text{ para cada } j \in Q_0\}$  es la base de caminos de  $A^0 = R$ . Nombramos a la unión sobre las distintas  $d$  de las bases de caminos como la base de caminos de  $R\langle A \rangle$ , y a los elementos de la base de caminos, simplemente, como caminos. Un camino  $a_d \cdots a_1$  va del vértice  $t(a_1)$  al vértice  $h(a_d)$ . Nótese que el producto de dos caminos  $(a_{d+k} \cdots a_{d+1})(a_d \cdots a_1)$  es distinto de 0 si y sólo si  $t(a_{d+1}) = h(a_d)$ .

**Definición 1.3** ([3], Definición 2.2). *Se define el álgebra completa de caminos de  $Q$  como<sup>4</sup>*

$$R\langle\langle A \rangle\rangle = \prod_{d=0}^{\infty} A^d. \quad (1.3)$$

Los elementos en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  son combinaciones  $K$ -lineales (posiblemente infinitas) de caminos de  $R\langle A \rangle$ . Denotemos a cada  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  como  $(x^{(d)})_{d \geq 0}$ , donde  $x^{(d)} \in A^d$ .

<sup>2</sup>La definición y algunas propiedades del producto tensorial pueden consultarse en el Apéndice A.

<sup>3</sup>La multiplicación en  $R\langle A \rangle$  esta determinada por los isomorfismos canónicos  $A^i \otimes A^j \rightarrow A^{i+j}$  para cada  $i, j \geq 0$ , dados por el producto tensorial, este producto se extiende por linealidad a todo  $R\langle A \rangle$ .

<sup>4</sup>Seguendo la notación usada en [6], cuando tomemos a  $K$  como el campo complejo  $\mathbb{C}$  denotaremos al álgebra completa de caminos como  $\mathbb{C}\langle\langle Q \rangle\rangle$ .

**Observación 1.4.** *La suma y multiplicación en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  extienden naturalmente a la suma y multiplicación en  $R\langle A \rangle$  (y están bien definidos).*

*Dados  $x, y \in R\langle\langle A \rangle\rangle$ , los elementos  $x + y, x \otimes y \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  satisfacen:*

$$(x + y)^{(d)} = x^{(d)} + y^{(d)} \text{ para toda } d \geq 0,$$

$$y (x \otimes y)^{(d)} = \sum_{i=0}^d x^{(i)} \otimes y^{(d-i)} \text{ para toda } d \geq 0.$$

*Cabe resaltar el hecho de que aun cuando los elementos en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  pueden ser combinaciones lineales infinitas de caminos, para cada  $d \geq 0$ , la componente en  $A^d$  de la suma o producto de dos de ellos depende únicamente de una cantidad finita de caminos.*

**Definición 1.5.** *Dados  $c, x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  un camino y un elemento del álgebra completa de caminos respectivamente, diremos que el camino  $c$  aparece en  $x$  si en la descomposición de  $x$  como suma infinita de todos los caminos, el camino  $c$  aparece acompañado de un escalar distinto de cero.*

*Sean  $x, y \in R\langle\langle A \rangle\rangle$ , diremos que  $x$  y  $y$  son ajenos respecto a la base de caminos si ningún camino  $c$  aparece simultáneamente en ambos elementos del álgebra completa de caminos.*

Cabe resaltar que la definición anterior no es estandar. En este trabajo se hará uso de ella en el capítulo 4.

**Observación 1.6** ([3]). *Si el carcaj  $Q$  es acíclico (sin ciclos dirigidos), entonces, debido a que  $Q$  tiene una cantidad finita de flechas, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $d \geq N$  el espacio  $A^d$  es trivial, es decir,  $A^d = \{0\}$ . En este caso, las álgebras  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $R\langle A \rangle$  son iguales. Así,  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  es de dimensión finita.*

Denotemos por  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A)$  al ideal bilateral de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  dado por

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A) = \prod_{d=1}^{\infty} A^d. \quad (1.4)$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$ , la potencia  $n$ -ésima de  $\mathfrak{m}(A)$  es

$$\mathfrak{m}^n = \prod_{d=n}^{\infty} A^d. \quad (1.5)$$

El ideal  $\mathfrak{m}$  es el único ideal bilateral maximal que tiene intersección cero con  $R = A^0$ . Dado  $x = (x^{(d)})_{d \geq 0} \in R\langle\langle A \rangle\rangle \setminus \mathfrak{m}$ , existe algún idempotente  $e_i \in R$  con  $i \in Q_0$  que cumple que  $e_i x^{(0)} e_i$  es un elemento distinto de cero en  $R$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $e_i x^{(0)} e_i = e_i$  (en realidad un múltiplo escalar de  $x$  satisface

esta condición). Considérese ahora el elemento  $y = e_i - (e_i x e_i - e_i) + (e_i x e_i - e_i)^2 - (e_i x e_i - e_i)^3 + \dots$ , éste está bien definido, ya que para cada  $n > 0$  tenemos que  $(e_i x e_i - e_i)^n$  está en  $\mathfrak{m}^n = \prod_{d=n}^{\infty} A^d$ . Finalmente notemos que  $e_i x e_i y = e_i \neq 0$ , es decir,  $e_i x e_i y \in R \setminus \{0\}$ .

El álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  dotada con la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica (también llamada topología de Krull) es una  $K$ -álgebra topológica, que tiene como base de vecindades abiertas de 0 a las potencias de  $\mathfrak{m}$ . La cerradura de cualquier subconjunto  $U \subseteq R\langle\langle A \rangle\rangle$  está dada por

$$\bar{U} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (U + (\mathfrak{m}(A))^n). \quad (1.6)$$

La  $K$ -álgebra topológica  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  es un espacio completo, Hausdorff y 1-numerable. Para cada sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ , existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  si y sólo si para cada  $d \geq 0$  existe  $N_d \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n^{(d)} = x_{N_d}^{(d)}$  para toda  $n \geq N_d$ . Si el límite de una sucesión de elementos existe, entonces el límite es único. Así, dada una sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , (es decir, para toda  $d \geq 0$  existe  $N_d$  que para toda  $n \geq N_d$  se satisface  $y_n \in \mathfrak{m}(A)^d$ ), el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n y_n = y_0 + y_1 + \dots$  existe y es único.

**Definición 1.7** ([6]). *Dado un elemento  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  distinto de cero, denotamos por  $\text{short}(x)$  al único entero no negativo tal que  $x \in (\mathfrak{m}(A))^{\text{short}(x)}$  y  $x \notin (\mathfrak{m}(A))^{\text{short}(x)+1}$  (obsérvese que  $(\mathfrak{m}(A))^0 = R\langle\langle A \rangle\rangle$ ). Decimos que  $\text{short}(0)$  es igual a  $\infty$ .*

**Observación 1.8.** *Dados dos  $R$ - $R$ -bimódulos de dimensión finita  $A$  y  $A'$ , cualquier homomorfismo de álgebras  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R$  es la identidad satisface que  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}(A')) = \mathfrak{m}(A)$ . Demostremos esta afirmación:*

*Demostración.* Supongamos que existe  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle \setminus \mathfrak{m}(A)$  tal que  $\varphi(x) \in \mathfrak{m}(A')$ , entonces existen  $y \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $e \in R$  que hacen  $exy \in R \setminus \{0\}$ . Así,  $\varphi(e)\varphi(x)\varphi(ey) \in R \setminus \{0\}$ , lo que es una contradicción, ya que  $\varphi(x)$  está en el ideal bilateral  $\mathfrak{m}(A')$ .

Si suponemos que existe  $x \in \mathfrak{m}(A)$  tal que  $\varphi(x) \notin \mathfrak{m}(A')$ , es decir,  $\varphi(x)^{(0)} \neq 0$ , entonces  $x - \varphi(x)^{(0)}$  no está en  $\mathfrak{m}(A)$ , y  $\varphi(x - \varphi(x)^{(0)}) = \varphi(x) - \varphi(x)^{(0)} \in \mathfrak{m}(A')$ , lo que es una contradicción.

Tenemos que  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}(A')) = \mathfrak{m}(A)$ , por lo que para toda  $n \geq 0$  se satisface  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}(A')^n) = \mathfrak{m}(A)^n$ . De esta forma el homomorfismo de álgebras  $\varphi$  es continuo en 0, y por tanto continuo en todo  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ .  $\square$

*En conclusión, todo homomorfismo de álgebras  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R$  es la identidad, es un homomorfismo de álgebras topológicas.*

**Observación 1.9.** Sea  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  un homomorfismo de álgebras topológicas, tal que  $\varphi|_R$  es la identidad, como en la observación anterior. Supongamos que  $\varphi$  es biyectivo, entonces  $\varphi(\mathfrak{m}(A))$  es igual a  $\mathfrak{m}(A')$ ; en general para cada entero no negativo  $n$ ,  $\varphi((\mathfrak{m}(A))^n) = (\mathfrak{m}(A'))^n$ . Sea  $U$  subconjunto de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ , la cerradura de la imagen de  $U$  en  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$  es

$$\overline{\varphi(U)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\varphi(U) + (\mathfrak{m}(A'))^n) \quad (1.7)$$

$$= \bigcap_{n=0}^{\infty} (\varphi(U) + \varphi((\mathfrak{m}(A))^n)) = \varphi\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} U + (\mathfrak{m}(A))^n\right),$$

es decir,  $\overline{\varphi(U)} = \varphi(\overline{U})$ . Por lo tanto el homomorfismo  $\varphi$  es cerrado;  $\varphi$  es biyectivo, por lo que también es abierto.

**Observación 1.10.** Cualquier homomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos  $\phi : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')$  puede extenderse de manera única a un homomorfismo de álgebras topológicas  $\hat{\phi} : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\hat{\phi}|_R$  es la identidad y  $\hat{\phi}|_A = \phi$ . Existe un único homomorfismo de álgebras  $\tilde{\phi} : R\langle A \rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\tilde{\phi}|_A = \phi$  y  $\tilde{\phi}|_R$  es la identidad; para cada camino  $a_1 \cdots a_d$  el homomorfismo  $\tilde{\phi}$  satisface  $\tilde{\phi}(a_1 \cdots a_d) = \phi(a_1) \cdots \phi(a_d)$ . Extendiendo  $\tilde{\phi}$  de manera continua a todo  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  obtenemos el homomorfismo  $\hat{\phi}$  buscado. Recordemos que las álgebras  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$  son espacios de Hausdorff y 1-numerables, y  $R\langle\langle A \rangle\rangle = \overline{R\langle A \rangle}$ ; por lo que un homomorfismo de álgebras  $\Psi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  es continuo si y sólo si para cada sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R\langle A \rangle$  convergente a un elemento en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  se satisface que  $\Psi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x_n)$ .

Por lo tanto, cualquier homomorfismo de álgebras topológicas  $\varphi$  como en la Observación 1.8, está únicamente determinado por su restricción a  $A^1 = A$ ;  $\varphi|_A : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')$ .

El ideal  $\mathfrak{m}(A')$  es igual a la suma directa  $A' \oplus (\mathfrak{m}(A'))^2$ , por lo que podemos escribir al homomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos  $\varphi|_A$  como  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ , donde  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A'$  y  $\varphi^{(2)} : A \rightarrow (\mathfrak{m}(A'))^2$  son homomorfismos de  $R$ - $R$ -bimódulos.

**Proposición 1.11** ([3], Proposición 2.2). Toda pareja de homomorfismos de  $R$ - $R$ -bimódulos  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  con  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A'$  y  $\varphi^{(2)} : A \rightarrow (\mathfrak{m}(A'))^2$  determina un único homomorfismo de álgebras topológicas  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R$  es la identidad y  $\varphi|_A = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ . Más aun,  $\varphi$  es un isomorfismo de álgebras topológicas si y sólo si  $\varphi^{(1)}$  es un isomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos entre  $A$  y  $A'$ .

La primera parte de la Proposición 1.11 se debe a la Observación 1.10. Para demostrar la segunda afirmación, probaremos antes el siguiente Lema.

**Lema 1.12.** *Dado un homomorfismo de álgebras topológicas  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$ , como en la Observación 1.8, el homomorfismo  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A'$  es sobreyectivo si y sólo si  $\varphi$  es sobreyectivo.*

*Demostración.* Supongamos que  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo. Notemos que para cada entero  $d \geq 1$ , el homomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos

$$\Psi_d = \underbrace{\varphi^{(1)} \otimes_R \varphi^{(1)} \otimes_R \cdots \otimes_R \varphi^{(1)}}_d : A^d \rightarrow (A')^d \quad (1.8)$$

es sobreyectivo. Además,  $\varphi|_{A^d} = \Psi_d + (\varphi|_{A^d} - \Psi_d)$ , donde el homomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos  $(\varphi|_{A^d} - \Psi_d)$  va de  $A^d$  a  $(\mathfrak{m}(A'))^{d+1}$ . Así, para cada  $v \in (\mathfrak{m}(A'))^d$  existe  $u \in A^d$  tal que  $\varphi(u) = v + w$  para algún  $w \in (\mathfrak{m}(A'))^{d+1}$ .

Sean  $n \geq 1$  y  $y \in (\mathfrak{m}(A'))^n$ .

Afirmación: Existe una sucesión  $(x_i)_{i \geq 0}$  con  $x_i \in A^{n+i}$ , tal que para cada  $N \geq 0$  se satisface  $\varphi(\sum_{i=0}^N x_i) = y + r_N$  para algún  $r_N \in (\mathfrak{m}(A'))^{n+N+1}$ .

Podemos probar la existencia de tales “ $x_i$ ” recursivamente. Cada  $x_i$  está en  $A^{n+i}$ , por lo que la serie  $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N x_i$  es un elemento del ideal  $(\mathfrak{m}(A))^n$ ; y al evaluar  $\varphi$  en  $x$  tenemos  $\varphi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(\sum_{i=0}^N x_i) = y$ .

Al considerar el caso  $n = 1$ , tenemos que  $\mathfrak{m}(A')$  está contenido en la imagen bajo  $\varphi$  de  $\mathfrak{m}(A)$ ; más aún  $\varphi(\mathfrak{m}(A)) = \mathfrak{m}(A')$ . Dado que  $\varphi|_R$  es la identidad, entonces  $\varphi$  es sobreyectivo.

Supongamos ahora que  $\varphi$  es sobreyectivo. Para cada  $c \in A'$ , existe un elemento  $b \in R\langle\langle A \rangle\rangle$ , tal que  $\varphi(b) = c$ . Descomponiendo a  $b$  en sus partes de longitud 0, 1 y el resto tenemos

$$\varphi(b) = \varphi(b^{(0)}) + \varphi(b^{(1)}) + \varphi(b - b^{(0)} - b^{(1)}) = b^{(0)} + \varphi(b^{(1)}) + \varphi(b - b^{(0)} - b^{(1)}) = c,$$

por lo que  $b^{(0)} = 0$ . De esta forma  $\varphi(b^{(1)}) = c - \varphi(b - b^{(1)})$ . Recordando que  $\varphi((\mathfrak{m}(A))^2) = (\mathfrak{m}(A'))^2$ , tenemos que  $\varphi^{(1)}(b^{(1)})$  es igual a  $c$ , ya que  $b - b^{(1)} \in (\mathfrak{m}(A))^2$ . De lo cual concluimos que  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo. □

Demostremos ahora la segunda parte de la Proposición 1.11.

*Demostración de la Proposición 1.11.* Supongamos que  $\varphi$  es un isomorfismo, entonces por el Lema 1.12  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo. Si  $\varphi^{(1)}$  no fuera inyectivo, existirían  $b_1, b_2 \in A$  distintos, tales que  $\varphi^{(1)}(b_1) = \varphi^{(1)}(b_2)$ . El homomorfismo  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo, por lo que, utilizando el Lema 1.12 existen  $x_1, x_2 \in (\mathfrak{sm}(A))^2$  tales que

$\varphi(x_1) = \varphi^{(2)}(b_1)$  y  $\varphi(x_2) = \varphi^{(2)}(b_2)$ . Así,  $b_1 - x_1$  y  $b_2 - x_2$  son elementos distintos de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ , tales que  $\varphi(b_1 - x_1) = \varphi^{(1)}(b_1)$  y  $\varphi(b_2 - x_2) = \varphi^{(1)}(b_2)$ , lo que es una contradicción al hecho de que  $\varphi$  es inyectivo. Concluyendo,  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo e inyectivo, es decir, es un isomorfismo.

Supongamos ahora que  $\varphi^{(1)}$  es un isomorfismo. En particular,  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo. Por el Lema 1.12, tenemos que  $\varphi$  es sobreyectivo. Si  $\varphi$  no fuera inyectivo, existirían  $x_1, x_2 \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  distintos, tales que  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ . De esta forma  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)}$ , ya que  $\varphi|_R$  es la identidad. Sea  $n$  el mínimo  $d \in \mathbb{N}$ , tal que  $x_1^{(d)} \neq x_2^{(d)}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x_1^{(d)} = 0$  para todo  $d \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Sea  $\Psi_n$  el isomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos definido como en (1.8), entonces  $\varphi|_{A^n} = \Psi_n + (\varphi|_{A^n} - \Psi_n)$ .

El homomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos  $(\varphi|_{A^n} - \Psi_n)$  va de  $A^n$  a  $(\mathfrak{m}(A'))^{n+1}$  y  $\varphi((\mathfrak{m}(A))^n) = (\mathfrak{m}(A'))^n$ , entonces

$$\varphi(x_1) = \Psi_n(x_1^{(n)}) + (\varphi|_{A^n} - \Psi_n)(x_1^{(n)}) + \varphi(x_1 - x_1^{(n)}),$$

donde  $\Psi_n(x_1^{(n)}) \in (\mathfrak{m}(A'))^n$  y  $(\varphi|_{A^n} - \Psi_n)(x_1^{(n)}) + \varphi(x_1 - x_1^{(n)}) \in (\mathfrak{m}(A'))^{n+1}$ ; de manera similar  $\Psi_n(x_2^{(n)}) \in (\mathfrak{m}(A'))^n$  y  $(\varphi|_{A^n} - \Psi_n)(x_2^{(n)}) + \varphi(x_2 - x_2^{(n)}) \in (\mathfrak{m}(A'))^{n+1}$ , lo que es una contradicción, ya que al ser  $x_1^{(n)} \neq x_2^{(n)}$  y  $\Psi_n$  un isomorfismo, tenemos que  $\Psi_n(x_1^{(n)}) \neq \Psi_n(x_2^{(n)})$  y por tanto  $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ . Así  $\varphi$  es biyectivo, es decir, un isomorfismo. □

**Definición 1.13** ([3], Definición 2.5, [6]). *Sea  $\varphi$  un automorfismo del álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  (tal que  $\varphi|_R$  es la identidad), correspondiente a la pareja  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ .*

- Si  $\varphi^{(1)}$  es el automorfismo identidad de  $A$ , entonces decimos que  $\varphi$  es un automorfismo unitriangular. Más aún, decimos que  $\varphi$  tiene profundidad (depth)  $d \geq 1$ , si  $\varphi^{(2)}(A) \subseteq (\mathfrak{m}(A))^{d+1}$  y  $\varphi^{(2)}(A) \not\subseteq (\mathfrak{m}(A))^{d+2}$ . En el caso en que  $\varphi^{(2)} = 0$  decimos que  $\varphi$  es un automorfismo de profundidad infinita.
- Si  $\varphi^{(2)} = 0$ , entonces llamamos a  $\varphi$  un cambio de flechas.

**Observación 1.14** ([6]). *Si  $\varphi$  es un automorfismo unitriangular de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  de profundidad  $d$ , entonces para cada  $c \in A^n$  la diferencia  $\varphi(c) - c$  se encuentra en  $(\mathfrak{m}(A))^{n+d}$ . Así para cada  $x \in (\mathfrak{m}(A))^n$ ,  $\varphi(x) - x \in (\mathfrak{m}(A))^{n+d}$ .*

*Para cada  $e \in R$   $\varphi(e) = e$ , por lo que  $\varphi(e) - e = 0$ . De esta forma, para cada  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  obtenemos que  $\varphi(x) - x \in (\mathfrak{m}(A))^{\text{short}(x)+d}$  ( $\text{short}(0) = \infty$  y  $A^\infty = 0$ ).*

**Observación 1.15.** *Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son dos automorfismos unitriangulares de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ , entonces la composición  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  es un automorfismo unitriangular, y*

$$\text{depth}(\varphi_2 \circ \varphi_1) \geq \min\{\text{depth}(\varphi_1), \text{depth}(\varphi_2)\}.$$

**Proposición 1.16.** *Supongamos que  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  es un homomorfismo de álgebras topológicas como en la Proposición 1.11, tal que  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A'$  es inyectivo (no imponemos condiciones sobre  $\varphi^{(2)} : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')$ ). Entonces, el homomorfismo  $\varphi$  es cerrado.*

*Demostración.* Recordemos que las álgebras topológicas  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$  son espacios 1-numerables. Así, podemos caracterizar a los conjuntos cerrados por medio de sucesiones, es decir, un subconjunto  $U \subseteq R\langle\langle A \rangle\rangle$  es cerrado si y sólo si para cada sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  formada por elementos en  $U$  el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in U$  (el análogo ocurre en  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$ ).

Dado un subconjunto cerrado  $U \subseteq R\langle\langle A \rangle\rangle$ , sea  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente en  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$  formada por elementos en  $U' = \varphi(U)$ . La sucesión  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U'$  es convergente, por lo tanto para cada  $d \geq 0$  existe algún  $N \in \mathbb{N}$  que satisface  $x'_n{}^{(d)} = x'_N{}^{(d)}$  para toda  $n \geq N$ ; sea  $N_d$  el mínimo de las  $N \in \mathbb{N}$  con tal propiedad. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$  con la propiedad de que  $\varphi(x_n) = x'_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $d \geq 0$  definamos  $M_d = \max\{N_i \mid i \geq 0, i \leq d\}$ .

**Afirmación:** Para toda  $n \geq M_d$   $x_n^{(d)} = x_{M_d}^{(d)}$ .

Demostremos esta afirmación inductivamente. Recordemos que  $\varphi|_{A^0}$  es la identidad; dado que para cada  $n \geq N_0$   $\varphi(x_n)^{(0)} = \varphi(x_{N_0})^{(0)}$ , entonces  $x_n^{(0)} = x_{N_0}^{(0)}$  para toda  $n \geq N_0 = M_0$ . Supongamos ahora que la afirmación es válida para toda  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ . Para cada  $n \geq M_{d+1}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(x_n^{(i)})^{(d+1)} = \varphi(x_n)^{(d+1)} = \varphi(x_{M_{d+1}})^{(d+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(x_{M_{d+1}}^{(i)})^{(d+1)},$$

entonces  $\varphi(x_n^{(d+1)})^{(d+1)} = \varphi(x_{M_{d+1}}^{(d+1)})^{(d+1)}$ , ya que  $x_n^{(i)} = x_{M_{d+1}}^{(i)}$  para toda  $i \in \{0, \dots, d\}$  y  $\varphi(\mathfrak{m}(A)^{d+2}) \subseteq \mathfrak{m}(A')^{d+2}$ . Al ser  $\varphi^{(1)}$  inyectivo, el homomorfismo de  $R$ - $R$ -bimódulos  $\Psi_{d+1}$  descrito en (1.8) es inyectivo: para toda  $n \geq M_{d+1}$  tenemos  $\Psi_{d+1}(x_n^{(d+1)}) = \Psi_{d+1}(x_{M_{d+1}}^{(d+1)})$ , entonces  $x_n^{(d+1)} = x_{M_{d+1}}^{(d+1)}$ .

El conjunto  $U$  es cerrado, por la afirmación la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un elemento  $x \in U$ . El homomorfismo  $\varphi$  es continuo, entonces  $\varphi(x) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n \in U'$ . De esta manera,  $U'$  es cerrado. □

## 1.1. Potenciales y sus Ideales Jacobianos

Cada espacio  $A^d$  tiene una descomposición como suma directa de  $R$ - $R$ -bimódulos  $A^d = \bigoplus_{i,j \in Q_0} A_{i,j}^d$ , donde  $A_{i,j}^d$  es el espacio de caminos de longitud  $d$  que van de  $j$  a  $i$ , es decir,  $A_{i,j}^d$  está generado por los caminos  $a_1 a_2 \cdots a_d$  con  $t(a_d) = j$  y  $h(a_1) = i$ .

**Definición 1.17** ([3], Definición 3.1; [6]).

- Para cada  $d \geq 1$ , definimos la parte cíclica de  $A^d$  como el sub- $R$ - $R$ -bimódulo  $A_{\text{cyc}}^d = \bigoplus_{i \in Q_0} A_{i,i}^d$ . A los caminos que forman  $A_{\text{cyc}}^d$  los llamamos caminos cíclicos o simplemente ciclos.
- Decimos que dos ciclos  $v_1, v_2 \in A_{\text{cyc}}^d$  son rotacionalmente equivalentes si existen dos caminos  $w_1$  y  $w_2$  en  $Q$  tales que  $v_1 = w_1 w_2$  y  $v_2 = w_2 w_1$ . En este caso denotamos  $v_1 \sim_{\text{rot}} v_2$ .
- Definimos la parte cíclica de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  como el subespacio vectorial cerrado

$$R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}} = \prod_{d=1}^{\infty} A_{\text{cyc}}^d.$$

Llamamos a los elementos de  $R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$  potenciales.

- Dado un ciclo  $w$ , diremos que un potencial  $S$  involucra al ciclo  $w$ , si en la descomposición  $S = \sum_{v \in \bigsqcup_{d=1}^{\infty} A_{\text{cyc}}^d} \lambda_v v$  donde  $\lambda_v$  son escalares, la suma  $\sum_{v \sim_{\text{rot}} w} \lambda_v$  es distinta de cero.
- Dos potenciales  $S$  y  $S'$  son rotacionalmente disjuntos si no involucran a un mismo ciclo.
- Para cada  $\alpha \in A^*$  definimos la derivada cíclica  $\partial_\alpha$  como la función  $K$ -lineal y continua  $\partial_\alpha : R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}} \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$  que en cada ciclo  $a_1 a_2 \cdots a_d$  está dada por la regla

$$\partial_\alpha(a_1 \cdots a_d) = \sum_{k=1}^d \alpha(a_k) a_{k+1} \cdots a_d a_1 \cdots a_{k-1}.$$

- Para cada potencial  $S$ , definimos su ideal Jacobiano  $J(S)$  como la cerradura en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  del ideal bilateral generado por los elementos de la forma  $\partial_\alpha(S)$  con  $\alpha \in A^*$ . Nótese que  $J(S)$  es un ideal bilateral de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ .
- Llamamos al cociente  $R\langle\langle A \rangle\rangle/J(S)$  el álgebra Jacobiana de  $(A, S)$  (o  $(Q, S)$ ), el cual denotamos como  $\mathcal{P}(Q, S)$  o  $\mathcal{P}(A, S)$ .

Para cada flecha  $a \in Q_1$ , usamos la notación  $\partial_a$  para la derivada cíclica  $\partial_{a^*}$ , donde  $Q_1^* = \{a^* \mid a \in Q_1\}$  es la base dual de  $Q_1$  en  $A^*$ .

Para cada potencial  $S \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$  denotaremos el espacio de derivadas cíclicas de  $S$  como

$$\partial S = \{\partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^*\}. \quad (1.9)$$

**Observación 1.18.** El ideal bilateral generado por los elementos de la forma  $\partial_\alpha(S)$  con  $\alpha \in A^*$  es el subespacio vectorial de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  generado por  $R\langle\langle A \rangle\rangle\{\partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^*\}R\langle\langle A \rangle\rangle$ , es decir, el ideal Jacobiano es

$$J(S) = \overline{R\langle\langle A \rangle\rangle\{\partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^*\}R\langle\langle A \rangle\rangle}. \quad (1.10)$$

Sea  $I(S)$  el espacio vectorial

$$I(S) = \left\langle \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right) \{ \partial_a(S) \mid a \in Q_1 \} \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right) \right\rangle. \quad (1.11)$$

Notemos que  $J(S)$  es la cerradura en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  de  $I(S)$ . Es claro que  $I(S)$  está contenido en  $J(S)$ , así  $I(S) \subseteq J(S)$ . El álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  es la cerradura del espacio  $\bigoplus_{d=0}^{\infty} A^d = \left\langle \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right\rangle$ , por lo que  $R\langle\langle A \rangle\rangle\{\partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^*\}R\langle\langle A \rangle\rangle$  es igual a

$$\overline{\left\langle \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right\rangle \{ \partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^* \} \left\langle \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right\rangle},$$

dicho producto está contenido en

$$\frac{\overline{\left\langle \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right\rangle \{ \partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^* \} \left\langle \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right\rangle}}{\overline{\left\langle \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right) \{ \partial_a(S) \mid a \in Q_1 \} \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d \right) \right\rangle}}.$$

Así  $J(S) = \overline{R\langle\langle A \rangle\rangle\{\partial_\alpha(S) \mid \alpha \in A^*\}R\langle\langle A \rangle\rangle}$ , está contenido en  $\overline{I(S)}$ , es decir,  $J(S) = \overline{I(S)}$ .

**Definición 1.19** ([3], Definición 3.2). Diremos que dos potenciales  $S$  y  $S'$  son cíclicamente equivalentes  $S \sim_{\text{cyc}} S'$  si su diferencia  $S - S'$  se encuentra en la cerradura del espacio vectorial que consiste de los elementos de la forma  $a_1 \cdots a_d - a_2 \cdots a_d a_1$ , donde  $a_1 \cdots a_d$  es un ciclo.

Dos potenciales son cíclicamente equivalentes si involucran exactamente los mismos ciclos, y para cada uno de éstos la suma de escalares que acompañan a los ciclos rotacionalmente equivalentes es igual.

La siguiente observación es clara a partir de la definición de equivalencia cíclica.

**Observación 1.20** ([3], Proposición 3.3). Si dos potenciales  $S$  y  $S'$  son cíclicamente equivalentes, entonces para cada  $\alpha \in A^*$  tenemos que  $\partial_\alpha(S) = \partial_\alpha(S')$ , y por lo tanto,  $J(S) = J(S')$  y  $\mathcal{P}(A, S) = \mathcal{P}(A, S')$ .

**Proposición 1.21** ([3], Proposición 3.7). *Sea  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  un isomorfismo de  $R$ -álgebras tal que  $\varphi|_R$  es la identidad y sea  $S \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  un potencial. El isomorfismo  $\varphi$  satisface  $\varphi(J(S)) = J(\varphi(S))$ . De esta forma, existe un isomorfismo entre las álgebras jacobianas  $\mathcal{P}(A, S)$  y  $\mathcal{P}(A', \varphi(S))$ .*

Antes de dar la prueba de esta proposición desarrollaremos algo de notación que será de utilidad para trabajar con derivadas cíclicas.

Consideremos al espacio

$$R\langle\langle A \rangle\rangle \widehat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle = \prod_{d,e \geq 0} (A^d \otimes_K A^e) \quad (1.12)$$

(nótese que estamos tomando el producto tensorial sobre el campo  $K$ ), veamos a este espacio como un espacio vectorial topológico con un sistema de vecindades abiertas alrededor de 0 formado por los conjuntos de la forma  $\prod_{d+e \geq n} (A^d \otimes_K A^e)$  para cada  $n \geq 0$ . El subespacio  $R\langle\langle A \rangle\rangle \otimes_K R\langle\langle A \rangle\rangle$  es denso en  $R\langle\langle A \rangle\rangle \widehat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle$ . Para cada  $\alpha \in A^*$ , definimos la función continua  $K$ -lineal  $\Delta_\alpha : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle \widehat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle$  dada por  $\Delta_\alpha(e) = 0$  para cada  $e \in R = A^0$  y

$$\Delta_\alpha(a_1 \cdots a_d) = \sum_{i=1}^d \alpha(a_i) a_1 \cdots a_{i-1} \otimes a_{i+1} \cdots a_d \quad (1.13)$$

para cada camino  $a_1 \cdots a_d$  de longitud positiva. Definamos ahora una función continua  $K$ -bilineal  $\square : (R\langle\langle A \rangle\rangle \widehat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle) \times R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$  determinada por

$$(u \otimes v) \square g = vgu \quad (1.14)$$

para cada  $u, v, g \in R\langle\langle A \rangle\rangle$ .

**Lema 1.22** ([3], Lema 3.8). *(Regla cíclica de Leibniz). Dados dos vértices  $i, j \in Q$ , sean  $f$  y  $g$  dos elementos del álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  tales que  $f \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{i,j}$  y  $g \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{j,i}$ . Si  $fg \in \mathfrak{m}(A)$ , entonces para cada  $\alpha \in A^*$  tenemos que*

$$\partial_\alpha(fg) = \Delta_\alpha(f) \square g + \Delta_\alpha(g) \square f. \quad (1.15)$$

*En general, para cualquier sucesión finita de vértices en  $Q$   $i_1, i_2, \dots, i_d, i_{d+1} = i_1$  y para cualquier sucesión de elementos en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$   $f_1, f_2, \dots, f_d$  tales que para cada  $k \in \{1, 2, \dots, d\}$   $f_k \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{i_k, i_{k+1}}$  (con  $f_1 \cdots f_d \in \mathfrak{m}(A)$ ), tenemos*

$$\partial_\alpha(f_1 \cdots f_d) = \sum_{k=1}^d \alpha(f_k) \square (f_{k+1} \cdots f_d f_1 \cdots f_{k-1}). \quad (1.16)$$

*Demostración.* Probemos la igualdad dada en (1.15). Las funciones  $\partial_\alpha$  y  $\Delta_\alpha$  son lineales y continuas, mientras que  $\square$  es bilineal y continua; así para probar (1.15) basta con probarlo en el caso en que  $f$  y  $g$  son dos caminos. Si  $f$  es un camino de longitud 0,  $f \in R = A^0$  (en este caso los vértices  $i$  y  $j$  son el mismo, y  $f$  es un múltiplo escalar del idempotente  $e_i \in R$ ), entonces  $g$  es un camino de longitud positiva,  $g = a_1 \cdots a_d$  y

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(g) \square f &= \sum_{k=1}^d \alpha(a_k) a_{k+1} \cdots a_d e_i a_1 \cdots a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^d \alpha(a_k) a_{k+1} \cdots a_d a_1 \cdots a_{k-1} = \partial_\alpha(e_i g). \end{aligned}$$

El caso en que  $g$  es un camino de longitud 0 es análogo. Si  $f$  y  $g$  son caminos de longitud positiva,  $f = a_1 \cdots a_d$  y  $g = a_{d+1} \cdots a_{d+s}$ , entonces de acuerdo a la definición de derivada cíclica,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(fg) &= \sum_{k=1}^{d+s} \alpha(a_k) a_{k+1} \cdots a_{d+s} a_1 \cdots a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^d \alpha(a_k) a_{k+1} \cdots a_d g a_1 \cdots a_{k-1} + \sum_{k=d+1}^{d+s} \alpha(a_k) a_{k+1} \cdots a_{d+s} f a_{d+1} \cdots a_{k-1} \\ &= \Delta_\alpha(f) \square g + \Delta_\alpha(g) \square f. \end{aligned}$$

Por inducción (sobre  $d$ ) podemos probar la igualdad (1.16). □

**Lema 1.23** ([3], Lema 3.9). (*Regla cíclica de la Cadena*). Si  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  es un homomorfismo de álgebras topológicas como en 1.11, entonces para cada potencial  $S \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$  y cada  $\alpha \in A'^*$  se satisface

$$\partial_\alpha(\varphi(S)) = \sum_{\alpha \in Q_1} \Delta_\alpha(\varphi(a)) \square \varphi(\partial_a(S)). \quad (1.17)$$

*Demostración.* De manera similar al lema anterior, basta demostrar la igualdad (1.17) en el caso en que  $S$  es un ciclo  $a_1 \cdots a_d$ . De la igualdad (1.16) del Lema 1.22 aplicada a  $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_d)$  se sigue que la derivada cíclica de  $\varphi(S)$  con respecto a  $\alpha$  es

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^d \Delta_\alpha(\varphi(a_k)) \square \varphi(a_{k+1} \cdots a_d a_1 \cdots a_{k-1}) \\ &= \sum_{a \in Q_1} \Delta_\alpha(\varphi(a)) \square \varphi\left(\sum_{k: a_k = a} a_{k+1} \cdots a_d a_1 \cdots a_{k-1}\right) \\ &= \sum_{\alpha \in Q_1} \Delta_\alpha(\varphi(a)) \square \varphi(\partial_a(S)). \end{aligned}$$

□

El Lema 1.23 nos dice que para cada  $\alpha \in A'^*$  la derivada cíclica  $\partial_\alpha(\varphi(S))$  se encuentra en el ideal generado por  $\{\varphi(\partial_a(S)) \mid a \in Q_1\}$ , por lo que tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.24.** *Dados un homomorfismo de álgebras topológicas  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  como en el Lema 1.23, y un potencial  $S \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$ ; el espacio de derivadas cíclicas  $\partial\varphi(S)$  está contenido en el ideal bilateral generado por  $\varphi(\partial(S))$ .*

Ahora tenemos las herramientas necesarias para demostrar la Proposición 1.21.

*Demostración de la Proposición 1.21.* Utilizando el Corolario 1.24 obtenemos que el espacio  $I(\varphi(S))$  está contenido en el ideal  $\overline{\varphi(J(S))}$ . Por la Observación 1.9  $\varphi$  es cerrado, entonces  $\varphi(J(S)) = \varphi(\overline{I(S)}) = \overline{\varphi(I(S))}$ , es decir,  $\varphi(J(S))$  es cerrado. De esta forma el ideal  $J(\varphi(S))$  está contenido en  $\varphi(J(S))$ . Aplicando este mismo resultado con  $\varphi^{-1}$  en lugar de  $\varphi$ , y  $\varphi(S)$  en lugar de  $S$ , tenemos que  $J(S) = J(\varphi^{-1}(\varphi(S)))$  está contenido en  $\varphi^{-1}(J(\varphi(S)))$ . Finalmente aplicando  $\varphi$  en la contención anterior  $\varphi(J(S)) \subseteq J(\varphi(S))$ , así  $\varphi(J(S))$  es igual a  $J(\varphi(S))$ . □

## 1.2. Carcajes con Potencial

**Definición 1.25** ([3], Definición 4.1). *Dados un carcaj  $Q$  con su espacio de flechas  $A$ , y un potencial  $S \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$ , llamamos carcaj con potencial  $(QP, \text{quiver with potential})$ , a la pareja  $(Q, S)$  (ó  $(A, S)$ ) si ésta cumple las siguientes dos condiciones:*

$$\text{El carcaj } Q \text{ no tiene lazos, es decir, para cada vértice } i \in Q_0, A_{i,i} = 0. \quad (1.18)$$

$$\text{No aparecen dos ciclos rotacionalmente equivalentes en la descomposición de } S. \quad (1.19)$$

La condición (1.18) nos dice que el potencial  $S$  se encuentra en  $(\mathcal{M}(A))^2$ , mientras que la condición (1.19) nos dice que  $S$  no es un potencial distinto de 0 y rotacionalmente equivalente a 0.

**Definición 1.26** ([3], Definición 4.2). *Dados dos carcajes con potencial  $(A, S)$  y  $(A', S')$  sobre el mismo conjunto de vértices  $Q_0$ , definimos una equivalencia a derecha entre  $(A, S)$  y  $(A', S')$  como un isomorfismo de álgebras topológicas  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R$  es la identidad, y  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a  $S'$ ; en este caso, diremos que  $(A, S)$  y  $(A', S')$  son equivalentes a derecha,  $(A, S) \cong (A', S')$ . Si  $(A, S) \cong (A', S')$  y  $A = A'$ , simplemente diremos que los potenciales  $S$  y  $S'$  son equivalentes a derecha sobre  $A$ .*

Cualquier homomorfismo de álgebras  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R$  es la identidad, envía potenciales cíclicamente equivalentes en potenciales cíclicamente equivalentes. Así, la inversa de una equivalencia a derecha entre  $(A, S)$  y  $(A', S')$  es una equivalencia a derecha entre  $(A', S')$  y  $(A, S)$ , mientras que, la composición de dos equivalencias a derecha es una equivalencia a derecha.

De la Proposición 1.11 se sigue que una equivalencia a derecha  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  induce un isomorfismo de  $R$ -bimódulos entre  $A$  y  $A'$ . De esta forma, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A = A'$ .

De las Observación 1.20 y la Proposición 1.21 se sigue que una equivalencia a derecha entre dos carcajes con potencial  $(A, S) \cong (A', S')$  induce un isomorfismo entre sus álgebras Jacobianas,  $\mathcal{P}(A, S) \cong \mathcal{P}(A', S')$ .

En [6] se introduce el concepto de equivalencia débil a derecha.

**Definición 1.27** ([6]). *Si  $(A, S)$  y  $(A', S')$  son dos carcajes con potencial sobre el mismo conjunto de vértices  $Q_0$ , diremos que  $(A, S)$  y  $(A', S')$  son equivalentes débilmente a derecha si existe un escalar distinto de cero  $t \in K$  (el campo sobre el cual se toman los espacios  $R$  y  $A$ ) tal que los carcajes con potencial  $(A, S)$  y  $(A', tS')$  son equivalentes a derecha.*

Si dos carcajes con potencial son equivalentes débilmente a derecha, entonces sus álgebras Jacobianas son isomorfas.

Presentaremos ahora un resultado de gran utilidad para definir equivalencias a derecha.

**Lema 1.28** ([11], Lema 2.4). *Sean  $Q$  un carcaj, y  $(\varphi_n)_{n>0}$  una sucesión de automorfismos unitriangulares del  $R$ -álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ . Supóngase que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{depth}(\varphi_n) = \infty$ . Entonces el límite*

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1 \quad (1.20)$$

*está bien definido y es un automorfismo unitriangular del  $R$ -álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ . Más aun, si  $S$  y  $(S_n)_{n>0}$  son un potencial y una sucesión de potenciales respectivamente, tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  y  $\varphi_n$  es una equivalencia a derecha entre  $(Q, S_n)$  y  $(Q, S_{n+1})$ ; entonces  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1$  es una equivalencia a derecha entre  $(Q, S_1)$  y  $(Q, S)$ .*

*Demostración.* Para cada  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  definimos  $\varphi(x)$  como el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \cdots \varphi_1(x)$ . Por la Observación 1.14, para cada  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  y cada  $n > 0$

$$\varphi_n(x) - x \in (\mathfrak{m}(A))^{\text{short}(x) + \text{depth}(\varphi)} \subseteq (\mathfrak{m}(A))^{\text{depth}(\varphi)}.$$

Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{depth}(\varphi_n) = \infty$ , por lo que, para cada  $d \geq 0$  existe  $N$  que satisface  $\text{depth}(\varphi_n) > d$  para toda  $n \geq N$ , sea  $N_d$  la mínima de tales  $N$ 's. Así, para cada

$x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  y para toda  $n \geq N_d$ ,  $\varphi_n(x) - x \in (\mathfrak{m}(A))^{d+1}$  y

$$\varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_N \cdots \varphi_1(x) - \varphi_{N_d-1} \cdots \varphi_1(x) \in (\mathfrak{m}(A))^{d+1}.$$

De esta forma, para cada  $d \geq 0$  y cada  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  la componente de longitud  $d$  de  $\varphi(x)$  está dada por  $(\varphi(x))^{(d)} = ((\varphi_{N_d-1} \cdots \varphi_1)(x))^{(d)}$ .

Para cada  $n > 0$  los potenciales  $\varphi_n(S_n)$  y  $S_{n+1}$  son cíclicamente equivalentes. De manera inductiva, tenemos que para cada  $n > 0$  los potenciales  $\varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1(S_1)$  y  $S_{n+1}$  son rotacionalmente equivalentes. Así, los potenciales  $\varphi(S_1)$  y  $S_1$  son rotacionalmente equivalentes, y  $\varphi$  es una equivalencia a derecha entre  $(Q, S_1)$  y  $(Q, S)$ .  $\square$

Si  $(A, S)$  y  $(A', S')$  son dos carcajes con potencial sobre el mismo conjunto de vértices  $Q_0$ , podemos considerar su suma directa  $(A, S) \oplus (A', S') = (A \oplus A', S + S')$ . Las álgebras completas de caminos  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tienen encajes canónicos en  $R\langle\langle A \oplus A' \rangle\rangle$ .

Ahora analizaremos el caso de carcajes con potencial  $S$ , tales que  $S \in A^2$ . En este caso  $\partial S \subseteq A$ .

**Definición 1.29** ([3], Definición 4.3). *Diremos que un carcaj con potencial  $(A, S)$  es trivial si  $S \in A^2$  y  $\partial S = A$ , es decir,  $\mathcal{P}(A, S) = R$ .*

**Proposición 1.30** ([3], Proposición 4.4). *Sea  $(A, S)$  un carcaj con potencial que cumple que  $S \in A^2$ . El  $QP$  es trivial si y sólo si  $Q_1$  consiste de  $2N$  flechas distintas  $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$  tales que para cada  $k \in \{1, \dots, N\}$   $a_k b_k$  es un 2-ciclo (ciclo de longitud dos) y existe un cambio de flechas  $\varphi$  tal que  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a  $a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$ , es decir, el  $QP$   $(A, S)$  es equivalente a derecha al  $QP$   $(A, a_1 b_1 + \dots + a_N b_N)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $Q_1$  es un conjunto de  $2N$  flechas, y que existe un cambio de flechas  $\varphi$  tal que  $\varphi(S)$  es rotacionalmente equivalente a  $a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$ . El Corolario 1.24 nos dice que el espacio de derivadas cíclicas  $\partial \varphi(S) = \partial(a_1 b_1 + \dots + a_N b_N) = A$ , está contenido en el ideal bilateral generado por  $\varphi(\partial S)$ . De esta manera  $\varphi(\partial S) = A$ , por lo que el homomorfismo de  $R$ -bimódulos  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A$  es biyectivo (ya que  $A$  es de dimensión finita y  $\varphi^{(1)}$  es sobreyectivo). Así,  $\partial S = A$ , con lo que concluimos que el carcaj con potencial  $(A, S)$  es trivial.

Supongamos ahora que el carcaj con potencial  $(A, S)$  es trivial. Nótese que la función  $D : A^* \rightarrow A$  dada por  $D(\alpha) = \partial_\alpha(S)$  es lineal y sobreyectiva. Dado un par de vértices distintos  $i, j \in Q_0$ , para cada  $a \in A_{i,j}$  la derivada cíclica  $\partial_a(S)$  se encuentra en  $A_{j,i}$ ; por lo que para cada  $\alpha \in A_{i,j}^*$  se sigue  $\partial_\alpha(S) \in A_{j,i}$ . Al ser  $D$  sobreyectiva y lineal, se tiene que  $D(A_{i,j}^*) = A_{j,i}$  y  $\dim(A_{i,j}) = \dim(A_{i,j}^*) \geq \dim(A_{j,i})$ ; intercambiando  $i$  y  $j$  obtenemos  $\dim(A_{j,i}) \geq \dim(A_{i,j})$ , por lo que  $\dim(A_{i,j}) = \dim(A_{j,i})$ , es decir, hay la misma cantidad de flechas en  $Q_1$  que van del vértice  $j$  al vértice  $i$  que

de flechas que van del vértice  $i$  al vértice  $j$ . Así,  $Q_1$  consiste de  $2N$  flechas distintas. Numeremos los vértices,  $Q_0 = \{i_1, \dots, i_{|Q_0|}\}$ . Sean  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  un conjunto de flechas que generan al espacio vectorial  $\bigoplus_{1 \leq k_1 < k_2 \leq |Q_0|} A_{i_{k_1}, i_{k_2}}$  y  $\{b_1, \dots, b_N\}$  un conjunto de flechas que generan a  $\bigoplus_{1 \leq k_1 < k_2 \leq |Q_0|} A_{i_{k_2}, i_{k_1}}$ , tales que para cada  $k \in \{1, \dots, N\}$   $a_k b_k$  es un 2-ciclo. Sea  $\Psi$  un cambio de flechas tal que para cada  $k \in \{1, \dots, N\}$   $\Psi(a_k) = a_k$  y  $\Psi(b_k) = \partial_{a_k}(S)$ . Observemos que  $\Psi(a_1 b_1 + \dots + a_N b_N)$  es cíclicamente equivalente a  $S$ , por lo que el cambio de flechas  $\varphi = \Psi^{-1}$  es una equivalencia a derecha entre  $(A, S)$  y  $(A, a_1 b_1 + \dots + a_N b_N)$ . □

**Proposición 1.31** ([3], Proposición 4.5). *Sean  $(A, S)$  un carcaj con potencial y  $(C, T)$  un carcaj con potencial trivial. El encaje canónico  $R\langle\langle A \rangle\rangle \hookrightarrow R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle$  induce un isomorfismo de álgebras Jacobianas  $\mathcal{P}(A, S) \cong \mathcal{P}(A \oplus C, S \oplus T)$ .*

*Demostración.* Sea  $L$  la cerradura del ideal bilateral en  $R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle$  generado por  $C$ , es decir, el ideal  $L$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales (posiblemente infinitas) de caminos que contienen al menos una flecha en  $C$ . Así,

$$R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle = R\langle\langle A \rangle\rangle \oplus L,$$

y el ideal Jacobiano  $J(S + T) \subseteq R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle$  es igual a la suma directa del ideal  $J(S)$  en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  y el ideal  $L$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \oplus C, S + T) &= R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle / J(S + T) = (R\langle\langle A \rangle\rangle \oplus C) / (J(S) \oplus L) \\ &\cong R\langle\langle A \rangle\rangle / J(S) = \mathcal{P}(A, S), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

**Definición 1.32** ([3]). *Para cada carcaj con potencial  $(A, S)$ ,  $S^{(2)}$  es la componente de longitud dos de  $S$ . Llamaremos a  $(A, S)$  reducido si  $S^{(2)} = 0$ , es decir,  $S \in (\mathfrak{m}(A))^3$ . Definimos los espacios de flechas trivial y reducido de  $(A, S)$  como los  $R$ -bimódulos de dimensión finita*

$$A_{\text{triv}} = A_{\text{triv}}(S) = \partial S_{(2)} \tag{1.21}$$

$$A_{\text{red}} = A_{\text{red}}(S) = A / \partial S_{(2)}. \tag{1.22}$$

**Observación 1.33.** *Dado un carcaj con potencial  $(A, S)$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que el espacio de flechas trivial es el espacio generado por  $2N$  flechas que por parejas forman 2-ciclos, como en la Proposición 1.30.*

**Teorema 1.34** ([3], Teorema 4.6). (*Splitting Theorem*). *Dado un carcaj con potencial  $(A, S)$  con espacio de flechas trivial  $A_{\text{triv}}$  y espacio de flechas reducido  $A_{\text{red}}$ , existen un  $QP$  trivial  $(A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}})$  y un  $QP$  reducido  $(A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$  tales que  $(A, S)$  es equivalente a derecha a la suma directa  $(A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}}) \oplus (A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$ . Más aun, la clase de equivalencia a derecha de cada uno de los carcajes con potencial  $(A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}})$  y  $(A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$  está determinada por la clase de equivalencia a derecha de  $(A, S)$ .*

Por la Observación 1.33, para cada carcaj con potencial  $(A, S)$  podemos asumir salvo equivalencia cíclica que  $S$  es de la forma

$$S = \sum_{k=1}^N (a_k b_k + a_k u_k + v_k b_k) + S', \quad (1.23)$$

donde  $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$  forman una base de  $A_{\text{triv}}$  y  $a_k b_k$  son 2-ciclos,  $u_k, v_k$  son elementos de  $\mathfrak{m}^2$  y el potencial  $S' \in \mathfrak{m}^3$  es una combinación lineal de ciclos que no involucran a ninguna de las flechas  $a_k$  o  $b_k$   $k \in \{1, \dots, N\}$ .

Para probar la primera parte del Teorema 1.34, probaremos el siguiente lema.

**Lema 1.35** ([3], Lema 4.7). *Dado un potencial  $S$  de la forma (1.23), existe un automorfismo unitriangular de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$   $\varphi$  tal que  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a un potencial  $\hat{S}$  de la forma (1.23), con  $u_k$  y  $v_k$  iguales a 0, para toda  $k \in \{1, \dots, N\}$  y  $\hat{S}_{(2)} = S_{(2)}$ .*

Sea  $d \geq 1$ , diremos que un potencial  $S$  es  $d$ -dividido si es de la forma (1.23) con  $u_k, v_k \in \mathfrak{m}^{d+1}$  para toda  $k \in \{1, \dots, N\}$ , es decir, al quitarle a  $S$  su componente de longitud dos, el resto pertenece a la suma directa del álgebra completa de caminos generada por  $A_{\text{red}}$  y la potencia  $d+2$  del ideal  $\mathfrak{m}(A_{\text{triv}})$  en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ ,  $S - S^{(2)} \in R\langle\langle A_{\text{red}} \rangle\rangle \oplus (\mathfrak{m}(A_{\text{triv}}))^{d+2}$ .

El Lema 1.35 es consecuencia del Lema 1.36.

**Lema 1.36** ([3], Lema 4.8). *Dado un potencial  $S$   $d$ -dividido para alguna  $d \geq 1$ . Existe un automorfismo unitriangular  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$   $\varphi$  de profundidad  $d$ , tal que  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a un potencial  $\tilde{S}$   $2d$ -dividido que satisface  $\tilde{S}^{(2)} = S^{(2)}$ .*

*Demostración.* El potencial  $S$  es de la forma  $S = \sum_{k=1}^N (a_k b_k + a_k u_k + v_k b_k) + S'$ , con  $u_k, v_k \in \mathfrak{m}^{d+1}$ . Sea  $\varphi$  el automorfismo unitriangular dado por

$$\varphi(a_k) = a_k - v_k, \quad \varphi(b_k) = b_k - u_k \text{ para cada } k \in \{1, \dots, N\}, \text{ y}$$

$$\varphi(c) = c \text{ para toda flecha } c \in Q_1 \setminus \{a_1, b_1, \dots, a_N, b_n\}.$$

El automorfismo  $\varphi$  es de profundidad  $d$ , y por la Observación 1.14 para toda  $k \in \{1, \dots, N\}$  se tiene

$$\varphi(u_k) = u_k - u'_k \text{ y } \varphi(v_k) = v_k - v'_k, \text{ con } u'_k, v'_k \in \mathfrak{m}^{2d+1}.$$

Por lo tanto, aplicando  $\varphi$  a  $S$  obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= \sum_{k=1}^N ((a_k - v_k)(b_k - u_k) + (a_k - v_k)(u_k - u'_k) + (v_k - v'_k)(b_k - u_k)) + S' \\ &= \sum_{k=1}^N (a_k b_k + a_k u'_k + v'_k b_k) - \sum_{k=1}^N (u_k v_k + v_k u'_k + v'_k u_k) + S'. \end{aligned}$$

El potencial  $-\sum_{k=1}^N (u_k v_k + v_k u'_k + v'_k u_k) \in \mathfrak{m}^{2d+2}$  es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma 1.23, es decir, cíclicamente equivalente a  $\sum_{k=1}^N (a_k u''_k + v''_k b_k) + S''$ , con  $u''_k, v''_k \in \mathfrak{m}^{2d+1}$  y  $S''$  un potencial que no involucra a ninguna de las flechas  $a_k$  o  $b_k$ . Así,

$$\varphi(S) \sim_{\text{cyc}} \tilde{S} = \sum_{k=1}^N (a_k b_k + a_k (u'_k + u''_k) + (v'_k + v''_k) b_k) + (S' + S'').$$

□

Con ayuda del Lema 1.36 probaremos el Lema 1.35.

*Demostración del Lema 1.35.* Sea  $S$  un potencial de la forma (1.23). Construiremos una sucesión de potenciales  $(S_n)_{n \geq 1}$  y una sucesión de automorfismo unitriangulares  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  que cumplen:

1. Para cada  $n \geq 1$  el potencial  $S_n$  es  $2^n$ -dividido.
2. El automorfismo unitriangular  $\varphi_1$  es de profundidad 1, y es una equivalencia a derecha entre  $(A, S)$  y  $(A, S_1)$ .
3. Para cada  $n \geq 2$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_n$  es de profundidad  $2^{n-1}$ , y es una equivalencia a derecha entre  $(A, S_{n-1})$  y  $(A, S_n)$ .

La construcción de dichos potenciales y automorfismos se hará de manera inductiva. El potencial  $S$  es 1-dividido, por el Lema 1.36 existe un potencial  $S_1$  2-dividido y un automorfismo unitriangular de profundidad 1 que hace equivalentes a derecha a los carcajes con potencial  $(A, S)$  y  $(A, S_1)$ . Si  $S_n$  es un potencial  $2^n$ -dividido, el Lema

1.36 nos da la existencia de un potencial  $S_{n+1}$   $2^{n+1}$ -dividido y un automorfismo unitriangular  $\varphi_{n+1}$  de profundidad  $2^n$ , tales que  $\varphi_{n+1}$  es una equivalencia derecha entre  $(A, S_n)$  y  $(A, S_{n+1})$ .

Utilizando el Lema 1.28, obtenemos un automorfismo unitriangular bien definido  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \cdots \varphi_1$ . Denotemos por  $\hat{S}$  a la imagen de  $S$  bajo  $\varphi$ ,  $\hat{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \cdots \varphi_1(S)$ .

Para cada  $n \geq 1$   $S_n^{(2)} = S^{(2)}$  y  $S_n - S_n^{(2)} \in R\langle\langle A_{\text{red}} \rangle\rangle \oplus (\mathfrak{m}(A_{\text{triv}}))^{d+2}$ , donde  $R\langle\langle A_{\text{red}} \rangle\rangle$  es el álgebra completa de caminos de  $A_{\text{red}}$  y  $\mathfrak{m}(A_{\text{triv}})$  es el ideal de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  generado por  $A_{\text{triv}}$ . Por lo tanto,  $\hat{S}^{(2)} = S^{(2)} = a_1 b_1 + \cdots + a_N b_N$  y  $\hat{S} - \hat{S}^{(2)} \in R\langle\langle A_{\text{red}} \rangle\rangle$ .  $\square$

Probemos ahora el Teorema 1.34.

*Demostración del Teorema 1.34.* Por el Lema 1.35 existe un potencial  $\hat{S}$  equivalente a derecha al potencial  $S$  que satisface  $\hat{S}^{(2)} \in A_{\text{triv}}^2$  y  $\hat{S} - \hat{S}^{(2)} \in R\langle\langle A_{\text{red}} \rangle\rangle$ . De esta manera, el carcaj con potencial  $S$  es la suma directa del potencial trivial  $(A_{\text{triv}}, \hat{S}^{(2)})$  y el carcaj con potencial reducido  $(A_{\text{red}}, \hat{S} - \hat{S}^{(2)})$ . Esto demuestra la primera parte del Teorema 1.34.

Demostremos la segunda parte del teorema. Dados dos QPs triviales  $(A, S)$  y  $(A', S')$ , y dos QPs reducidos  $(C, T)$  y  $(C', T')$ , supongamos que  $\varphi$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(A \oplus C, S + T)$  y  $(A' \oplus C', S' + T')$ . El potencial  $T$  se encuentra en  $(\mathfrak{m}(A \oplus C))^3$ , por lo que  $\varphi(T) \in (\mathfrak{m}(A' \oplus C'))^3$  y  $S' = S'^{(2)}$  es cíclicamente equivalente a  $\varphi(S)^{(2)} = (\varphi^{(1)} \otimes \varphi^{(1)})(S)$ . Sea  $\Psi : R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \oplus C' \rangle\rangle$  el homomorfismo de  $K$ -álgebras topológicas tal que  $\Psi|_R$  es la identidad, determinado por la pareja  $(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) = (\varphi^{(1)}, 0)$ ; este homomorfismo satisface  $\Psi(S) = (\varphi^{(1)} \otimes \varphi^{(1)})(S) \sim_{\text{cyc}} S'$ . Notemos que el espacio de derivadas cíclicas del potencial  $S$  es el mismo si se considera dentro de  $R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle$  ó dentro de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ , de igual manera el espacio de derivadas cíclicas de  $S'$  es el mismo en  $R\langle\langle A' \oplus C' \rangle\rangle$  y en  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$ . Por el Corolario 1.24, el espacio de derivadas cíclicas  $\partial\Psi(S) = \partial S'$  se encuentra en el ideal bilateral generado por  $\Psi(\partial S) = \Psi(A)$ . Por lo tanto  $A'$  está contenido en el ideal bilateral generado por  $\Psi(A)$ , así  $A' \subseteq \Psi(A) = \varphi^{(1)}(A)$ . Razonamientos similares nos permiten afirmar  $A \subseteq \varphi^{(1)-1}(A')$ , por lo que  $\varphi^{(1)}|_A$  es un isomorfismo entre  $A$  y  $A'$ . De esta manera, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A = A'$  y que  $\varphi|_A$  es la identidad. Así, el teorema se concluye de la Proposición 1.37.  $\square$

**Proposición 1.37** ([3], Proposición 4.9). *Sean  $(A, S)$  y  $(A, S')$  dos carcajes con potencial reducidos y  $(C, T)$  un carcaj con potencial trivial. Si  $(A \oplus C, S + T)$  es equivalente a derecha a  $(A \oplus C, S' + T)$ , entonces  $(A, S)$  es equivalente a derecha a  $(A, S')$ .*

Omitiremos la prueba de esta proposición debido a que es algo técnica y larga.



# Capítulo 2

## Mutaciones de Carcajes con Potencial

**Definición 2.1** ([6], [3]). Sean  $(A, S)$  un carcaj con potencial y  $k \in Q_0$  un vértice. Supongamos que

$$\text{no hay 2-ciclos orientados en } Q \text{ que pasen por el vértice } k, \quad (2.1)$$

es decir, para cada vértice  $i \in Q_0$ , el espacio  $A_{i,k} = 0$  o  $A_{k,i} = 0$ . Podemos suponer, salvo equivalencia cíclica, que

$$\text{los ciclos que aparecen en la descomposición de } S \text{ no inician en el} \quad (2.2)$$

vértice  $k$  (y por tanto no finalizan en  $k$ ).

Suponiendo que el QP  $(A, S)$  satisface (2.1) y (2.2), asociamos a éste un carcaj con potencial  $\tilde{\mu}_k(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$ . El QPs  $(\tilde{A}, \tilde{S})$  tiene el mismo conjunto de vértices  $Q_0$  que el QP  $(A, S)$ . Para cada  $i, j \in Q_0$  definimos la componente  $\tilde{A}_{i,j}$  como:

$$\tilde{A}_{i,j} = \begin{cases} (A_{j,i})^* & \text{si } i = k \text{ o } j = k; \\ A_{i,j} \oplus A_{i,k}A_{k,j} & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $(A_{j,i})^*$  es el dual del espacio de flechas del vértice  $j$  al vértice  $i$ , y  $A_{i,k}A_{k,j}$  es un subespacio de  $A^2 \subset R\langle\langle A \rangle\rangle$ . El R-R-bimódulo  $\tilde{A}$  está dado por

$$\tilde{A} = \bar{e}_k A \bar{e}_k \oplus A e_k A \oplus (e_k A)^* \oplus (A e_k)^*, \quad (2.4)$$

donde  $\bar{e}_k = 1 - e_k = \sum_{i \in Q_0 \setminus \{k\}} e_i$ .

Asociamos a  $Q_1$  el conjunto de flechas  $\tilde{Q}_1$  formado de la siguiente manera:

- Tomamos las flechas en  $Q_1$  que no tienen como uno de sus extremos al vértice  $k$ .

- Para cada flecha  $a$  que termina en  $k$  y cada flecha  $b$  que inicia en  $k$ , creamos la flecha “compuesta”  $[ba]$ , que identificamos con el producto  $ba \in Ae_kA$ .
- Reemplazamos cada flecha  $a$  que termina en  $k$  por la flecha dual  $a^* \in Q_1^*$ . De igual manera, reemplazamos cada flecha  $b$  que inicia en  $k$  por la flecha dual  $b^* \in Q_1^*$ .

La premutación<sup>1</sup> de  $A$  es  $\tilde{A}$ , donde  $\mu_k(Q_1) = \tilde{Q}_1$ .

Asociamos al potencial  $S$  el potencial  $\tilde{\mu}_k(S) = \tilde{S} \in R\langle\langle\tilde{A}\rangle\rangle$  dado por

$$\tilde{S} = [S] + \Delta_k, \quad (2.5)$$

donde

$$\Delta_k = \Delta_k(A) = \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} [ba]a^*b^*, \quad (2.6)$$

y  $[S]$  se obtiene al sustituir en cada ciclo  $a_1 \cdots a_d$  que aparece en  $S$ , el factor  $a_p a_{p+1}$  por  $[a_p a_{p+1}]$  si  $t(a_p) = h(a_{p+1}) = k$  (la condición (2.2) nos dice que ningún ciclo en  $S$  inicia en  $k$ ).

Llamamos al carcaj con potencial  $\tilde{\mu}_k(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$  la premutación de  $(A, S)$  respecto al vértice  $k$ .

La siguiente observación se sigue de la definición de premutación.

**Observación 2.2** ([3], Proposición 5.1). Si un carcaj con potencial  $(A, S)$  satisface (2.1) y (2.2), y  $(A', S')$  es un QP tal que  $e_k A' = A' e_k = 0$ , entonces

$$\tilde{\mu}_k(A \oplus A', S + S') = \tilde{\mu}_k(A, S) \oplus (A', S'). \quad (2.7)$$

**Teorema 2.3** ([3], Proposición 5.1). La clase de equivalencia a derecha de la premutación  $\tilde{\mu}_k(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$  es determinada por la clase de equivalencia a derecha del QP  $(A, S)$ .

*Demostración.* Sea  $\hat{A}$  el  $R$ - $R$ -bimódulo de dimensión finita dado por

$$\hat{A} = A \oplus (e_k A)^* \oplus (A e_k)^*. \quad (2.8)$$

El encaje natural  $A \hookrightarrow \hat{A}$  identifica al álgebra  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  con una subálgebra cerrada de  $R\langle\langle \hat{A} \rangle\rangle$ .

Notemos que existe un encaje natural  $\tilde{A} \hookrightarrow R\langle\langle \hat{A} \rangle\rangle$ , que envía cada flecha compuesta  $[ba]$  al producto  $ba$ . De esta manera, identificamos al potencial  $\tilde{S}$  dado en (2.5), con un elemento en  $R\langle\langle \hat{A} \rangle\rangle$  cíclicamente equivalente al potencial

$$S + \left( \sum_{b \in Q_1 e_k} b^* b \right) \left( \sum_{a \in e_k Q_1} a a^* \right). \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>El concepto de premutación fue introducido por D. Labardini, mientras que en [3] se define la mutación de carcajes con potencial sin hacer uso de éste término.

Así, el teorema se sigue del Lema 2.4. □

**Lema 2.4** ([3], Lema 5.3). *Todo automorfismo  $\varphi$  de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  se puede extender a un automorfismo  $\widehat{\varphi}$  de  $R\langle\langle \widehat{A} \rangle\rangle$  que satisface*

$$\widehat{\varphi}(R\langle\langle \widehat{A} \rangle\rangle) = R\langle\langle \widehat{A} \rangle\rangle, \quad (2.10)$$

y

$$\varphi\left(\sum_{a \in e_k Q_1} aa^*\right) = \sum_{a \in e_k Q_1} aa^*, \quad \varphi\left(\sum_{b \in Q_1 e_k} b^*b\right) = \sum_{b \in Q_1 e_k} b^*b. \quad (2.11)$$

*Demostración.* Para extender el automorfismo  $\varphi$  a un automorfismo  $\widehat{\varphi}$  de  $R\langle\langle \widehat{A} \rangle\rangle$ , sólo hay que definir los valores  $\varphi(a)$  para cada flecha  $a \in e_k Q_1$  y  $\varphi(b)$  para cada flecha  $b \in Q_1 e_k$ .

Definamos la acción de  $\widehat{\varphi}$  sobre las flechas en  $e_k Q_1 = \{a_1, \dots, a_r\}$ . La restricción  $\varphi|_{e_k Q_1}$  está dada por  $\varphi^{(1)}|_{e_k Q_1} + \varphi^{(2)}|_{e_k Q_1}$ . Podemos representar al isomorfismo  $\varphi^{(1)}|_{e_k Q_1} : e_k Q_1 \rightarrow e_k Q_1$  por medio de una matriz invertible  $C_1$  con entradas en  $K$  (de dimensiones  $r \times r$ ), de forma que

$$\left(\varphi^{(1)}|_{e_k Q_1}(a_1) \quad \varphi^{(1)}|_{e_k Q_1}(a_2) \quad \cdots \quad \varphi^{(1)}|_{e_k Q_1}(a_r)\right) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r)C_1, \quad (2.12)$$

y representamos al homomorfismo  $\varphi^{(2)}|_{e_k Q_1}$  con una matriz  $C_2$  con entradas en  $\mathfrak{m}(A)$ , es decir,

$$(\varphi(a_1) \ \varphi(a_2) \ \cdots \ \varphi(a_d)) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_d)(C_1 + C_2). \quad (2.13)$$

Notemos que la matriz  $C_1 + C_2 = C_1(I + C_1^{-1}C_2)$  es invertible, y su inversa está dada por

$$(C_1 + C_2)^{-1} = (I + C_1^{-1}C_2)^{-1}C_1^{-1} = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (C_1^{-1}C_2)^n\right) C_1^{-1}; \quad (2.14)$$

la suma infinita está bien definida ya que para cada  $n \geq 1$  la matriz  $(C_1^{-1}C_2)^n$  tiene entradas en  $(\mathfrak{m}(A))^n$ . Definimos la función  $\widehat{\varphi}$  sobre el conjunto  $e_k Q_1$  como

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(a_1^*) \\ \widehat{\varphi}(a_2^*) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(a_r^*) \end{pmatrix} = (C_1 + C_2)^{-1} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_r^* \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Así,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} \left( \sum_{j=1}^r a_j a_j^* \right) &= (\widehat{\varphi}(a_1) \widehat{\varphi}(a_2) \cdots \widehat{\varphi}(a_r)) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(a_1^*) \\ \widehat{\varphi}(a_2^*) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(a_r^*) \end{pmatrix} \\ &= (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r) \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_r^* \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^r a_j a_j^*. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La definición de  $\widehat{\varphi}$  sobre el conjunto de flechas  $Q_1 e_k = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$  se realiza de manera similar. La función  $\varphi|_{Q_1 e_k}$  está dada por

$$\begin{pmatrix} \varphi(b_1) \\ \varphi(b_2) \\ \vdots \\ \varphi(b_t) \end{pmatrix} = (D_1 + D_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $D_1$  es una matriz invertible con entradas en  $K$ , y  $D_2$  es una matriz con entradas en  $m(A)$ . Definimos  $\widehat{\varphi}$  sobre las flechas en  $Q_1 e_k$  como

$$(\widehat{\varphi}(b_1^*) \widehat{\varphi}(b_2^*) \cdots \widehat{\varphi}(b_t^*)) = (b_1^* \ b_2^* \ \cdots \ b_t^*) (D_1 + D_2)^{-1}. \quad (2.18)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} \left( \sum_{j=1}^t b_j^* b_j \right) &= (\widehat{\varphi}(b_1^*) \widehat{\varphi}(b_2^*) \cdots \widehat{\varphi}(b_t^*)) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(b_1) \\ \widehat{\varphi}(b_2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(b_t) \end{pmatrix} \\ &= (b_1^* \ b_2^* \ \cdots \ b_t^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^t b_j^* b_j. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, el automorfismo  $\widehat{\varphi}$  satisface la condición (2.11). La condición (2.10) se cumple por la construcción de  $\widehat{\varphi}$ . □

El automorfismo  $\widehat{\varphi}$  obtenido en el Lema 2.4 puede restringirse a un automorfismo de  $R\langle\langle \widetilde{A} \rangle\rangle$ , de lo que se concluye el Teorema 2.3.

Nótese que si un carcaj con potencial  $(A, S)$  es reducido, entonces la premutación  $\tilde{\mu}_k(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$  no necesariamente es reducida, ya que la componente  $[S]^{(2)} \in \tilde{A}^2$  puede ser distinta de 0.

Utilizando los Teoremas 1.34 y 2.3 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.5** ([3], Corolario 5.4). *Sea  $(A, S)$  un carcaj con potencial que satisface las condiciones (2.1) y (2.2) con respecto a un vértice  $k \in Q_0$ . Si  $(\bar{A}, \bar{S})$  es un QP reducido tal que*

$$\tilde{\mu}_k(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S}) \cong (\tilde{A}_{\text{triv}}, \tilde{S}^{(2)}) \oplus (\bar{A}, \bar{S}), \quad (2.20)$$

entonces la clase de equivalencia a derecha de  $(\bar{A}, \bar{S})$  está determinada por la clase de equivalencia a derecha de  $(A, S)$ .

**Definición 2.6** ([3], Definición 5.5). *Definimos la mutación de  $(A, S)$  con respecto al vértice  $k$  como la parte reducida de la premutación  $\tilde{\mu}_k(A, S)$ ; por el Corolario 2.5 ésta está bien definida salvo equivalencia a derecha. Denotamos a la mutación del QP  $(A, S)$  como  $\mu_k(A, S)$ .*

Notemos que los carcajes con potencial  $(\tilde{A}, \tilde{S})$  y  $(\bar{A}, \bar{S})$  considerados en el Corolario 2.5 satisfacen las condiciones (2.1) y (2.2). La mutación con respecto al vértice  $k$  es una transformación bien definida en el conjunto de clases de equivalencia a derecha de carcajes con potencial reducidos (sobre el mismo conjunto de vértices).

**Teorema 2.7** ([3], Teorema 5.7). *Para cada vértice  $k$ , mutar con respecto a  $k$  es una involución en el conjunto de clases de equivalencia a derecha de carcajes con potencial reducidos que satisfacen (2.1) y (2.2); es decir,  $\mu_k^2(A, S) = \mu_k \mu_k(A, S) \cong (A, S)$ .*

*Demostración.* Sea  $(A, S)$  un QP reducido que satisface (2.1) y (2.2) con respecto al vértice  $k$ . Por el Teorema 1.34 y la Observación 2.2, las parte reducidas de los QPs  $\tilde{\mu}_k^2(A, S) = (\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{S}})$  y  $\mu_k^2(A, S)$  son equivalentes a derecha. Así, basta demostrar que

$$(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{S}}) \text{ es equivalente a derecha a } (A, S) \oplus (C, T), \text{ donde } (C, T) \text{ es un QP trivial,} \quad (2.21)$$

para concluir el teorema.

Recordemos que  $\tilde{A}$  está dado por la igualdad (2.4). Obsérvese que  $\bar{e}_k \tilde{A} \bar{e}_k = \bar{e}_k A \bar{e}_k \oplus A e_k A$ ,  $(e_k A)^{**} = e_k A$ ,  $(A e_k)^{**} = A e_k$ ,  $e_k \tilde{A} = (A e_k)^*$ , y  $\tilde{A} e_k = (e_k A)^*$ ; por tanto

$$\tilde{\tilde{A}} = \bar{e}_k A \bar{e}_k \oplus A e_k A \oplus A^* e_k A^* \oplus A e_k \oplus e_k A \quad (2.22)$$

$$= A \oplus \bar{e}_k A \bar{e}_k \oplus A e_k A \oplus A^* e_k A^*, \quad (2.23)$$

y el conjunto de flechas  $\widetilde{Q}_1$  es  $Q_1$  junto con las flechas  $[ba]$ ,  $[a^*b^*]$  para cada  $a \in e_k Q_1$  y  $b \in Q_1 e_k$ .

Por (2.5) y (2.6), el potencial  $\widetilde{S}$  está dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{S} &= [[S] + \Delta_k(A)] + \Delta_k(\widetilde{A}) = [S] + \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} ([ba][a^*b^*] + [a^*b^*]ba) \quad (2.24) \\ &\sim_{\text{cyc}} S_1 = [S] + \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} ([ba] + ba)[a^*b^*].\end{aligned}$$

Demostremos que el QP  $(\widetilde{A}, S_1)$  es equivalente a derecha a  $(A, S) \oplus (C, T)$ , donde  $(C, T)$  es el QP trivial

$$(C, T) = \left( Ae_k A \oplus A^* e_k A^*, \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} [ba][a^*b^*] \right). \quad (2.25)$$

La prueba se hará componiendo tres automorfismos  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  de  $R\langle\langle \widetilde{A} \rangle\rangle$ :

- Sea  $\varphi_1$  el cambio de flechas tal que  $\varphi_1(b) = -b$  para cada flecha  $b \in e_k Q_1$ , y es la identidad en el resto de las flechas. Entonces,

$$\varphi_1(S_1) = S_2 = [S] + \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} ([ba] - ba)[a^*b^*]. \quad (2.26)$$

- Sea  $\varphi_2$  el automorfismo unitriangular tal que  $\varphi_2([ba]) = [ba] + ba$  para cada flecha  $[ba] \in Ae_k A$ , y es la identidad en el resto de las flechas. El potencial  $[S]$  se obtiene al reemplazar en  $S$  cada producto de la forma  $ba$  con  $a \in e_k Q_1$  y  $b \in Q_1 e_k$  por  $[ba]$ , por lo que  $\varphi_2([S])$  es cíclicamente equivalente a un potencial de la forma  $S + \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} [ba]\varpi_{a,b}$  para algunos elementos  $\varpi_{a,b} \in m(A \oplus Ae_k A)^2$ . Por lo tanto,

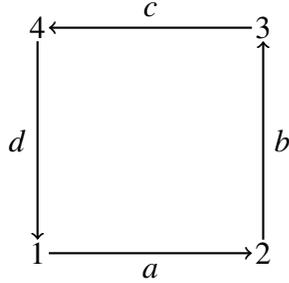
$$\varphi_2(S_2) \sim_{\text{cyc}} S_3 = S + \sum_{a,b \in Q_1: h(a)=t(b)=k} [ba]([a^*b^*] + \varpi_{a,b}) \quad (2.27)$$

- Sea  $\varphi_3$  el automorfismo unitriangular tal que  $\varphi_3([a^*b^*]) = [a^*b^*] - \varpi_{a,b}$  para cada flecha  $[a^*b^*] \in A^* e_k A^*$ , y es la identidad en el resto de las flechas. La imagen de  $S_3$  bajo  $\varphi_3$  es  $S + T$ .

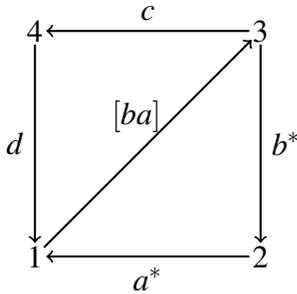
De esta forma,  $(\widetilde{A}, S_1) \cong (\widetilde{A}, S_2) \cong (\widetilde{A}, S_3) \cong (A, S) \oplus (C, T)$ , y la composición  $\varphi_3 \varphi_2 \varphi_1$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(\widetilde{A}, S_1)$  y  $(A, S) \oplus (C, T)$ .

□

**Ejemplo 2.8.** Consideremos el carcaj  $Q$  con vértices  $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$  y flechas  $a : 1 \rightarrow 2$ ,  $b : 2 \rightarrow 3$ ,  $c : 3 \rightarrow 4$ , y  $d : 4 \rightarrow 1$ :

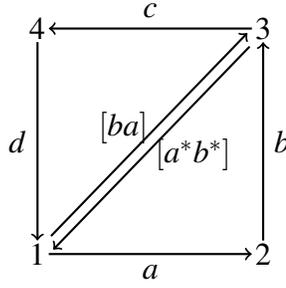


Sea  $S'$  el potencial  $adcb$ . El  $QP(Q, S')$  satisface la condición (2.1) con respecto al vértice 2, pero no satisface (2.2) con respecto a 2. Reemplacemos al potencial  $S'$  por el potencial cíclicamente equivalente  $S = dcba$ . La premutación de  $(Q, S)$  con respecto al vértice 2 reemplaza la flecha  $a$  por la flecha  $a^* : 2 \rightarrow 1$ , reemplaza la flecha  $b$  por la flecha  $b^* : 3 \rightarrow 2$  y agrega una nueva flecha  $[ba] : 1 \rightarrow 3$ . Así, el carcaj  $\tilde{Q}$  tiene como vértices  $\tilde{Q}_0 = Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$  y flechas  $\tilde{Q}_1 = \{c, d, a^*, b^*, [ba]\}$ :



El potencial  $\tilde{\mu}_2(S) = \tilde{S}$  está dado por  $\tilde{S} = dc[ba] + [ba]a^*b^*$ . El carcaj con potencial  $\tilde{\mu}_2(A, S)$  es reducido, por lo que  $\mu_2(A, S) = \tilde{\mu}_2(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$ .

Nótese que el  $QP \mu_2(A, S)$  satisface las condiciones (2.1) y (2.2) con respecto al vértice 2. La premutación de  $\mu_2(A, S)$  con respecto a 2 reemplaza a las flechas  $a^*$  por  $a^{**} = a$  y  $b^*$  por  $b^{**} = b$ ; además agrega la flecha compuesta  $[a^*b^*] : 3 \rightarrow 1$ :



El potencial  $\tilde{\mu}_2(\tilde{S})$  está dado por

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= dc[ba] + [ba][a^*b^*] + [a^*b^*]ba \\ \sim_{\text{cyc}} S_1 &= dc[ba] + ([ba] + ba)[a^*b^*].\end{aligned}$$

Si  $\varphi_1$  es el cambio de flechas tal que  $\varphi_1(b) = -b$  y  $\varphi_1|_{Q_1 \setminus \{b\}}$  es la identidad, entonces

$$\varphi_1(S_1) = S_2 = dc[ba] + ([ba] - ba)[a^*b^*].$$

Sea  $\varphi_2$  el cambio de flechas tal que  $\varphi_2([ba]) = [ba] + ba$  y  $\varphi_2|_{Q_1 \setminus \{[ba]\}}$  es la identidad. La imagen de  $S_2$  bajo  $\varphi_2$  es cíclicamente equivalente a

$$S_3 = dcba + [ba](dc + [a^*b^*]).$$

Tomemos ahora  $\varphi_3$  como el automorfismo unitriangular tal que  $\varphi_3([a^*b^*]) = [a^*b^*] - dc$  y  $\varphi_3|_{Q_1 \setminus \{[a^*b^*]\}}$  es la identidad.

$$\varphi_3(S_3) = S + [ba][a^*b^*].$$

La parte reducida de  $\tilde{\mu}_2\mu_2(A, S) = \mu_2\mu_2(A, S)$  es equivalente a derecha a  $(A, S)$ .

**Definición 2.9** ([3], Definición 7.2). Sea  $(Q, S)$  un QP 2-acíclico. Dados  $n$  vértices  $i_1, i_2, \dots, i_n \in Q_0$ , se dice que  $(Q, S)$  es  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ -no degenerado si los carcajes subyacentes a los QPs  $\mu_{i_1}(Q, S)$ ,  $\mu_{i_2}\mu_{i_1}(Q, S)$ ,  $\dots$ ,  $\mu_{i_n}\mu_{i_{n-1}} \cdots \mu_{i_1}(Q, S)$  están bien definidos y son 2-acíclicos. Diremos que  $(Q, S)$  es no degenerado si el QP es  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ -no degenerado para cualquier sucesión finita de vértices  $i_1, i_2, \dots, i_n \in Q_0$ .

En [3, Corolario 7.4] se demuestra que si el campo  $K$  es no numerable (en particular si  $K = \mathbb{C}$ ), entonces para cada carcaj  $Q$  existe al menos un potencial  $S$  que satisface que el carcaj con potencial  $(A, S)$  es no degenerado.

**Nota 2.10.** Dado un carcaj  $Q$ , diremos que un potencial  $S \in R\langle\langle Q \rangle\rangle$  es un potencial no degenerado sobre  $Q$  si el QP  $(Q, S)$  es no degenerado.

# Capítulo 3

## El Carcaj asociado a una triangulación de una superficie

En este capítulo se presenta la definición de triangulación de una superficie, y la manera en que asociamos un carcaj a una triangulación. La estructura combinatoria entre los arcos de la triangulación y su transformación mediante reemplazos resulta compatible con la mutación a nivel de carcajes.

### 3.1. Triangulaciones de superficies

**Definición 3.1** ([5], Definición 2.1). *Una superficie bordeada con puntos marcados, o simplemente superficie marcada, es una pareja  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , donde  $\Sigma$  es una superficie de Riemann orientada conexa y compacta con frontera (la frontera puede ser vacía), y  $\mathbb{M}$  es un conjunto finito y no vacío de puntos de  $\Sigma$ , llamados puntos marcados, que contiene al menos un punto en cada componente conexa de la frontera de  $\Sigma$ . Los puntos marcados en el interior de  $\Sigma$  son llamados punciones o ponchaduras; denotaremos por  $\mathbb{P}$  al conjunto de punciones.*

Se trabajará con triangulaciones de  $\Sigma$  con vértices en los puntos marcados  $\mathbb{M}$ . Para poder construir al menos dos triangulaciones siempre se supondrá que  $(\Sigma, \mathbb{M})$  no es:

- un monógono, dígono o triángulo sin punciones, es decir, un disco con uno, dos o tres puntos en la frontera;
- ni un monógono con una punción.

También se supondrá que  $(\Sigma, \mathbb{M})$  no es:

- una esfera con menos de cinco punciones, debido a las propiedades que presentan algunos triángulos en esferas con menos de cinco punciones.

**Definición 3.2** ([2], Definición 3.2). Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados.

- Un arco ordinario, o simplemente arco, es una curva  $i$  en  $\Sigma$  tal que:
  - los extremos de  $i$  pertenecen a  $\mathbb{M}$ ;
  - $i$  no se interseca a sí mismo, excepto posiblemente en sus extremos, que pueden coincidir, en cuyo caso llamaremos a  $i$  un lazo;
  - el interior relativo de  $i$  es disjunto de  $\mathbb{M}$  y de la frontera de  $\Sigma$ ;
  - $i$  no corta un monógono o dígono sin punciones.
- Dos arcos  $i_1$  e  $i_2$  son isotópicos relativo a  $\mathbb{M}$  si existe una isotopía  $H : I \times \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que  $H(0, x) = x$  para toda  $x \in \Sigma$ ,  $H(1, i_1) = i_2$  y  $H(t, p) = p$  para toda  $t \in I$  y toda  $p \in \mathbb{M}$ . Denotamos al conjunto de clases de isotopía de arcos en  $(\Sigma, \mathbb{M})$  como  $\mathbf{A}^\circ(\Sigma, \mathbb{M})$ .
- Dos arcos  $i_1$  e  $i_2$  son compatibles si en sus respectivas clases de isotopía es posible encontrar arcos  $i'_1$  e  $i'_2$  cuyos interiores relativos no se intersecan.

**Proposición 3.3** ([5], Proposición 2.3). Para cualquier colección de arcos compatibles por parejas, existen representantes de cada una de las clases de isotopía de estos arcos que no se intersecan en el interior de  $\Sigma$ .

La proposición anterior nos dice que podemos tomar simultáneamente todos los arcos (que son compatibles) sobre la superficie evitando que éstos se crucen.

**Definición 3.4** ([5], Definición 2.6, [6]). Definimos una triangulación ideal (o simplemente triangulación) de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  como una colección maximal de arcos compatibles.

Si  $\tau$  es una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ :

1. Para cada punción  $p \in \mathbb{M}$ , definimos la valencia de  $p$ ,  $\text{val}_\tau(p)$ , como la cantidad de arcos en  $\tau$  que tienen como uno de sus extremos a  $p$ , los lazos en  $p$  son contados dos veces.
2. Para cada componente conexa del complemento en  $\Sigma$  de la unión de los arcos en  $\tau$ , llamaremos a su cerradura un triángulo ideal (o simplemente triángulo) de  $\tau$ .
3. Un triángulo de  $\tau$  es llamado interior si su intersección con la frontera de  $\Sigma$  está contenida en  $\mathbb{M}$  (puede ser vacía).
4. Nótese que un triángulo interior puede estar formado por dos arcos distintos de  $\tau$ , en este caso llamaremos a dicho triángulo autoplegado.

En la siguiente figura se muestra un triángulo autoplegado.

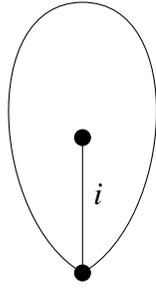


Figura 3.1: El arco  $i$  es el lado plegado del triángulo.

**Nota 3.5.** Más adelante se tomarán superficies marcadas con frontera vacía y género positivo. Sobre estas superficies se trabajará con triangulaciones representables a través del  $4g$ -gono, donde se considerará al vértice como una punción y a los lados de este polígono como arcos de una triangulación.

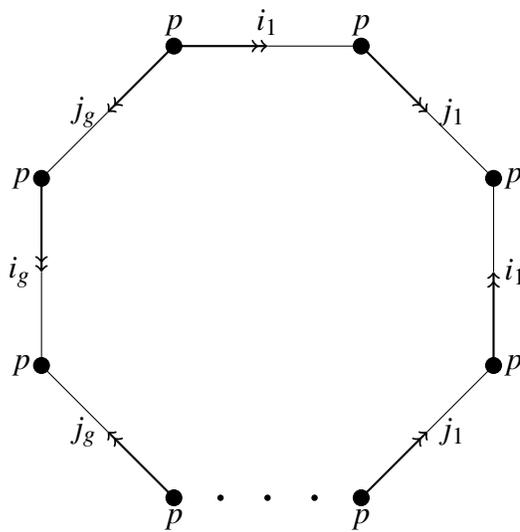


Figura 3.2: Consideramos los lados  $i_1, i_2, \dots, i_g$  y  $j_1, \dots, j_g$  como arcos de una triangulación.

**Ejemplo 3.6.** A continuación se presenta un ejemplo de una triangulación de un toro con una punción:

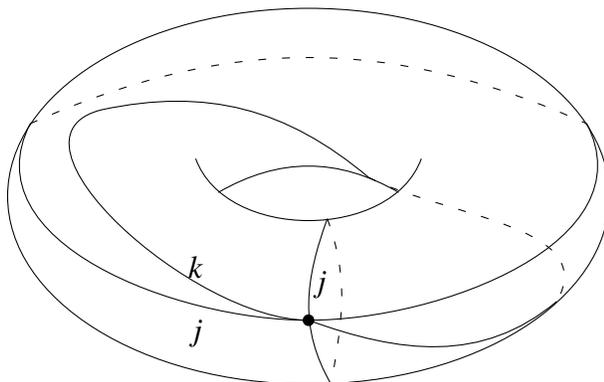


Figura 3.3: El toro con una punción.

Identificando los lados opuestos de un cuadrado obtenemos al toro, Figura 3.3 (cf. Nota 3.5).

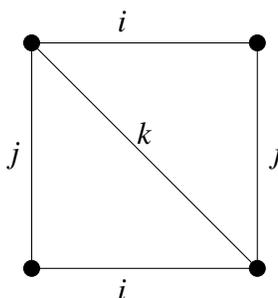


Figura 3.4: Toda triangulación de un toro con sólo una punción es representable a través del 4-gono.

La siguiente proposición se obtiene a partir un conteo utilizando la característica de Euler.

**Proposición 3.7** ([5], Proposición 2.10). *Sea  $\tau$  una triangulación de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . La cantidad de arcos en  $\tau$  es*

$$n = 6g + 3b + 3p + c - 6; \quad (3.1)$$

donde

- $g$  es el género de  $\Sigma$ ,
- $b$  es el número de componentes de la frontera de  $\Sigma$ ,

- $p$  es la cantidad de punciones,
- y  $c$  es la cantidad de puntos marcados en la frontera de  $\Sigma$ .

Al número  $n$  de la proposición anterior se le llama el *rango* de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  (término que se debe a que  $n$  es el rango del álgebra de conglomerado asociada a la superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ ). El rango de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es un invariante para cualquier triangulación.

**Corolario 3.8** ([5], Corolario 2.11). *Para cada entero positivo  $n$ , existen una cantidad finita (salvo homeomorfismos) de superficies con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  cuyo rango es igual a  $n$ .*

**Lema 3.9** ([5], Lema 2.13). *Toda superficie con puntos marcados (omitiendo los casos mencionados al inicio del capítulo) tiene una triangulación sin triángulos autoplegados.*

**Definición 3.10** ([5], Definición 3.5). *Sean  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  e  $i \in \tau$  un arco. Si  $i$  no es el lado plegado de un triángulo autoplegado, entonces existe exactamente un arco  $i'$  (salvo isotopía) tal que  $\sigma = (\tau \setminus \{i\}) \cup \{i'\}$  es una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . En este caso, decimos que  $\sigma$  se obtiene aplicando un reemplazo (flip en inglés) a  $\tau$ , o reemplazando (flipping) el arco  $i$ , escribimos  $\sigma = f_i(\tau)$ .*

Si  $i$  no es el lado plegado de un triángulo autoplegado de  $\tau$ , entonces  $i$  pertenece a exactamente dos triángulos de  $\tau$ . Así, al remover el arco  $i$  se forma un cuadrilátero, del cual  $i$  es una diagonal. El arco  $i'$  mencionado en la definición anterior es la otra diagonal de tal cuadrilátero.

**Ejemplo 3.11.** *La siguiente figura muestra las dos triangulaciones de un cuadrado sin punciones y su relación mediante un reemplazo.*

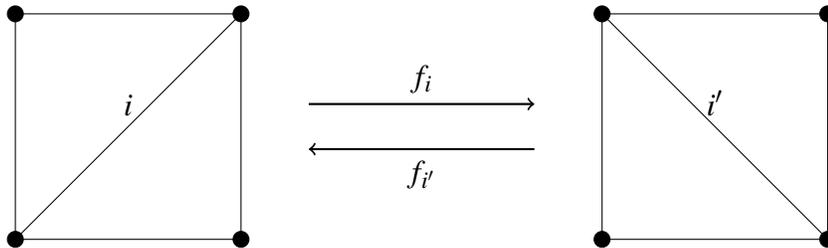
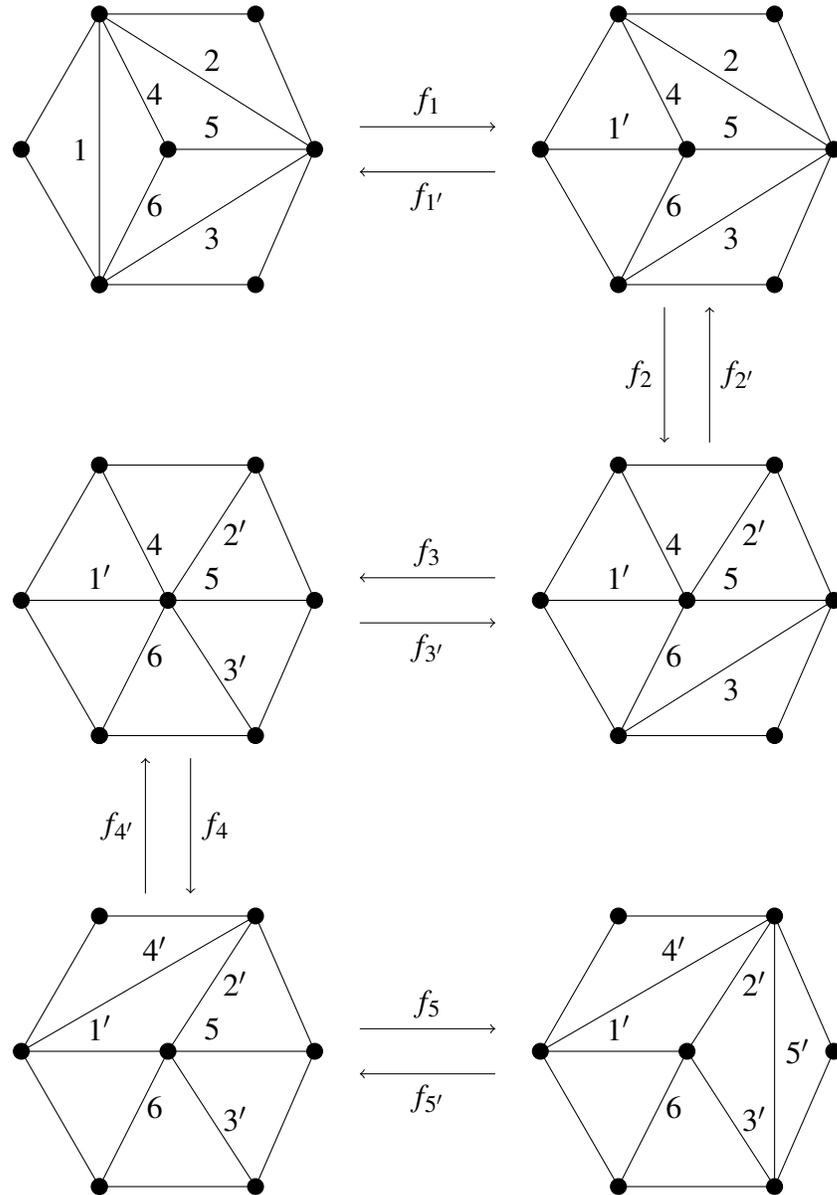


Figura 3.5: Reemplazamos una diagonal por la otra.

**Proposición 3.12** ([9], Proposición 6). *Cualesquiera dos triangulaciones de una superficie marcada  $(\Sigma, \mathbb{M})$  están relacionadas por una sucesión de reemplazos.*

**Ejemplo 3.13.** *Mostraremos una sucesión de reemplazos en triangulaciones de un hexágono con una punción:*



*De esta forma una sucesión de seis reemplazos lleva a:*

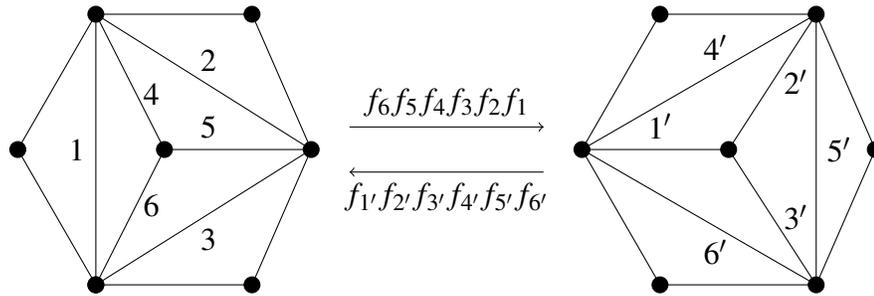


Figura 3.6: Una sucesión de reemplazos en un hexágono con una punción.

En la siguiente figura se muestran la relación mediante reemplazos de las triangulaciones de un dígono con una punción.

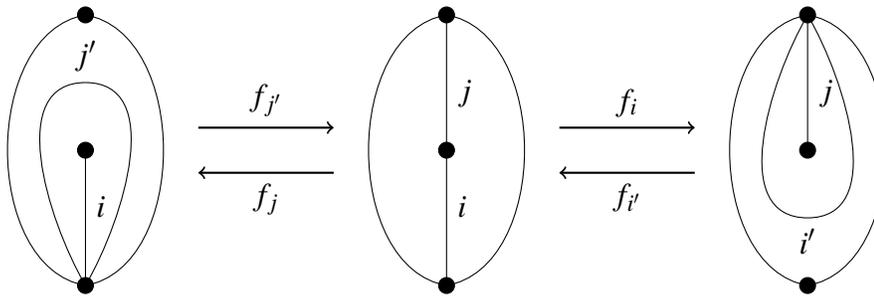


Figura 3.7: Las 3 triangulaciones de un dígono con una punción.

Del Lema 3.9 y la Proposición 3.12 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.14** ([5], Corolario 3.9). *Para cualquier triangulación  $\rho$  de una superficie marcada  $(\Sigma, \mathbb{M})$  existe una sucesión de reemplazos que transforman a  $\rho$  en una triangulación  $\tau$  sin triángulos autoplegados.*

Obsérvese que no existe una manera trivial para definir el reemplazo del lado plegado de un triángulo autoplegado. En la sección 3.3 se trabajará con triangulaciones etiquetadas, donde se podrá reemplazar cualquier arco de estas triangulaciones.

## 3.2. El Carcaj de una triangulación

**Definición 3.15** ([5], Definición 4.1; [6]). *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados. Dada una triangulación ideal  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  etiquetamos los arcos de  $\tau$*

con los números  $1, 2, \dots, n$ , donde  $n$  es la cantidad de arcos de  $\tau$ . Definimos la función  $\pi_\tau : \tau \rightarrow \tau$  como

$$\pi_\tau(i) = \begin{cases} j & \text{si } i \text{ es el lado plegado de un triángulo autoplegado y } j \text{ es el} \\ & \text{otro arco que forma el triángulo,} \\ i & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada arco  $i \in \tau$ . Asociamos a  $\tau$  la matriz de adyacencias signada  $B = B(\tau)$ , que refleja la combinatoria de  $\tau$ , dada por  $B(\tau) = \sum_{\Delta} B^\Delta$ , donde la suma corre sobre

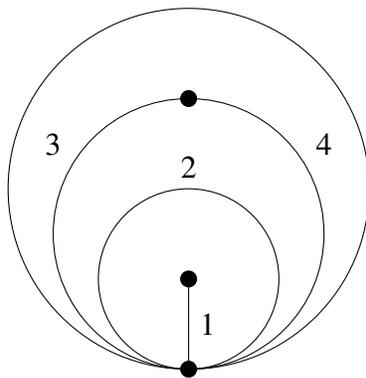
todos los triángulos no autoplegados de  $\tau$ , y  $B^\Delta$  es una matriz cuadrada con  $n$  filas y  $n$  columnas identificadas con los arcos de  $\tau$  tal que para cada  $i, j \in \tau$  la entrada  $b_{i,j}^\Delta$  es igual a

$$b_{i,j}^\Delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_\tau(i) \text{ y } \pi_\tau(j) \text{ son lados de } \Delta, \text{ y el lado } \pi_\tau(j) \text{ va después} \\ & \text{de } \pi_\tau(i) \text{ en el sentido de las manecillas del reloj,} \\ -1 & \text{si } \pi_\tau(i) \text{ y } \pi_\tau(j) \text{ son lados de } \Delta, \text{ y el lado } \pi_\tau(i) \text{ va después} \\ & \text{de } \pi_\tau(j) \text{ en el sentido de las manecillas del reloj,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2)$$

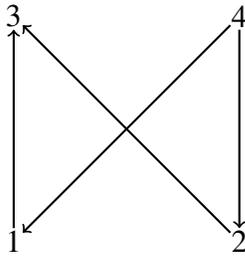
La matriz  $B(\tau)$  es antisimétrica, por lo que determina un carcaj 2-acíclico  $Q(\tau)$  con vértices etiquetados por los arcos de  $\tau$  y  $b_{i,j}$  flechas de  $i$  a  $j$  si  $b_{i,j} > 0$ . Llamamos a  $Q(\tau)$  el carcaj de adyacencias signado.

Siguiendo la notación usada en [6], cuando tomemos al campo complejo  $\mathbb{C}$  denotaremos al álgebra completa de caminos de  $Q(\tau)$  como  $\mathbb{C}\langle\langle Q \rangle\rangle$ .

**Ejemplo 3.16** ([5]). A continuación se muestran las matriz de adyacencias y el carcaj de adyacencias de una triangulación de un monógono con dos punciones.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Observación 3.17.** Si  $j$  es el lado plegado de un triángulo autoplegado en  $\tau$  e  $i$  es el arco que encierra a  $j$ , entonces en  $Q(\tau)$  existe exactamente una flecha que inicia en  $j$  y exactamente una flecha que termina en  $j$  (lo mismo ocurre con  $i$ ). Más aun, para cada vértice  $k \in Q_0(\tau)$  existe una flecha que va de  $k$  a  $j$  si y sólo si existe una flecha que va de  $k$  a  $i$ . De la misma manera para cada vértice  $k \in Q_0(\tau)$  existe una flecha que va de  $j$  a  $k$  si y sólo si existe una flecha que va de  $i$  a  $k$ .

**Observación 3.18.** Cada arco de una triangulación  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , que no es el lado plegado de un triángulo autoplegado, está contenido en exactamente dos triángulos. Por lo tanto, para cada  $i, j \in \tau$  la entrada  $b_{i,j} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

El lado plegado de un triángulo autoplegado es incidente a una punción de valencia uno.

Si  $i, j$  son dos arcos de  $\tau$  que pertenecen ambos a dos triángulos, de forma tal que en uno de ellos el arco  $i$  va después del arco  $j$  en el sentido de las manecillas del reloj y en el otro triángulo el arco  $i$  va antes del arco  $j$ , entonces estos dos triángulos se ven como en la figura siguiente:

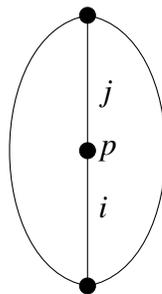


Figura 3.8: Los arcos  $i, j$  inciden en una punción de valencia 2,  $\text{val}_\tau(p) = 2$ .

Si dos arcos  $i, j$  no inciden en una punción con valencia menor a tres, entonces la entrada  $B_{i,j}(\tau)$  es igual a cero si y sólo si ningún triángulo contiene a ambos arcos.

A continuación se muestra una definición alternativa del carcaj de adyacencias. Esta resulta equivalente a la dada en la Definición 3.15 cuando la triangulación carece de triángulos autoplegados.

**Definición 3.19** ([10], Definición 3.2). *Sea  $\tau$  una triangulación sin triángulos autoplegados de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , definimos el carcaj de adyacencias  $Q(\tau)$  de la siguiente manera:*

1. *Consideramos un conjunto de vértices del mismo cardinal que el conjunto de arcos, con los que serán identificados.*
2. *Para cada triángulo  $\triangle$  con lados  $i, j, k \in \tau$ , sin pérdida de generalidad los tres arcos ordenados en el sentido de las manecillas del reloj, agregamos al carcaj las flechas  $i \rightarrow j$ ,  $j \rightarrow k$  y  $k \rightarrow i$ .*

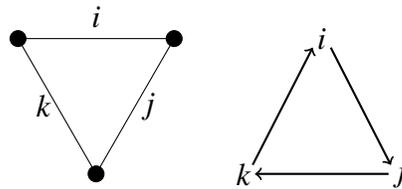


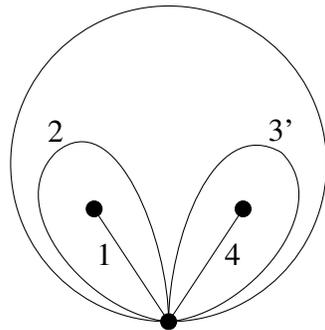
Figura 3.9: Flechas en el carcaj de adyacencias.

3. *Borramos los 2-ciclos.*

**Teorema 3.20** ([10], Teorema 3.4). *Sean  $\tau, \sigma$  dos triangulaciones de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  tales que  $\sigma = f_i(\tau)$ , entonces  $Q(\sigma) = \mu_i(Q(\tau))$ .*

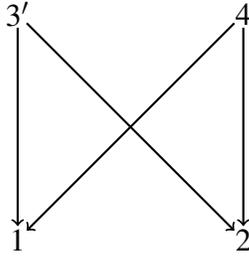
A nivel del carcaj asociado a la triangulación de una superficie podemos identificar la operación de reemplazo en la superficie por medio de la correspondiente mutación del vértice del carcaj.

**Ejemplo 3.21** ([5]). *Consideremos la triangulación de un monógono con dos punciones mostrada en el Ejemplo 3.16. Al tomar el reemplazo del arco 3 la triangulación resultante, y la matriz de adyacencias asociada son:*



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El carcaj de adyacencias asociado es la mutación con respecto al vértice 3 del carcaj de adyacencias mostrado en el Ejemplo 3.16.



**Ejemplo 3.22.** Consideremos ahora un doble toro sin punciones (recordando que podemos verlo al identificar los lados de un octágono, lo cuales tomaremos como arcos de la triangulación).

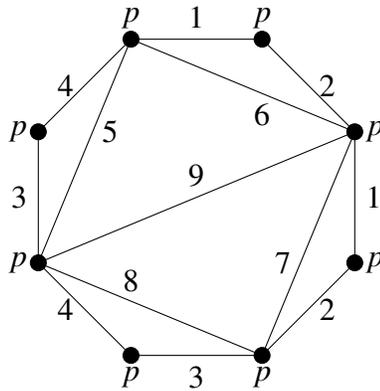


Figura 3.10: Una triangulación  $\tau$  de un doble toro.

Éste tiene el siguiente carcaj de adyacencias asociado:

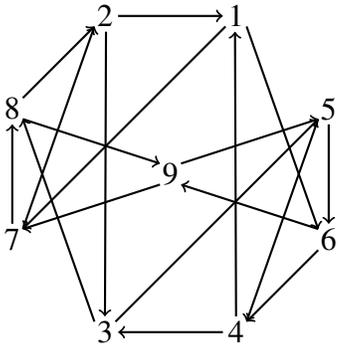


Figura 3.11: El carcaj de adyacencias asociado  $Q(\tau)$ .

*La permutación con respecto al vértice 9 del carcaj mostrado en la figura anterior da como resultado el siguiente carcaj:*

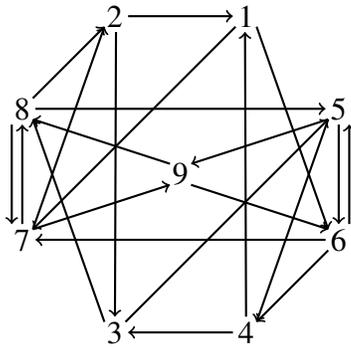


Figura 3.12: La permutación  $\tilde{\mu}_9(Q(\tau))$ .

*Al borrar los 2-ciclos obtenemos la mutación  $\mu_9(Q(\tau))$ .*

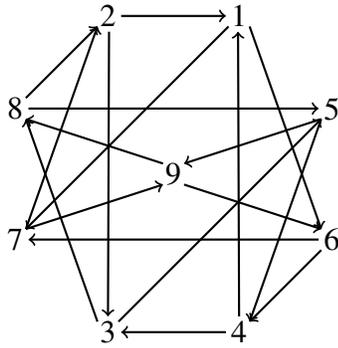


Figura 3.13: La mutación  $\mu_9(Q(\tau))$ .

Notemos que  $\mu_9(Q(\tau))$  es el carcaj de adyacencias asociado a la triangulación resultante de aplicar el reemplazo del arco 9 a la triangulación  $\tau$ .

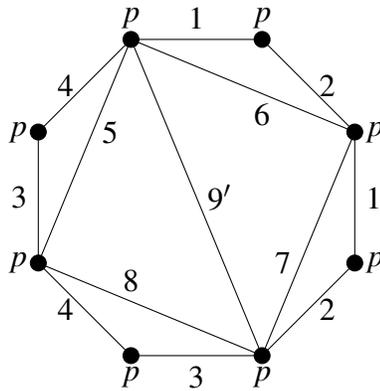


Figura 3.14: La triangulación resultante al aplicar el reemplazo del arco 9 a la triangulación  $\tau$ .

**Nota 3.23.** A partir de este momento en lo que resta de esta sección (y en general en los capítulos 4 y 5) se trabajará con superficies con puntos marcados y frontera vacía. Sobre estas superficies consideraremos triangulaciones  $\tau$  con la siguiente propiedad (cf. [13]):

( $\mathcal{F}3$ ) Para cada  $p \in \mathbb{M}$  hay al menos tres arcos de  $\tau$  que inciden en  $p$ ,

es decir, la valencia de cada punci3n es al menos tres,  $\text{val}_\tau(p) \geq 3$ .

Tener la propiedad ( $\mathcal{F}3$ ) implica que en la triangulación no hay triángulos auto-pegados. Además, al construir el carcaj de adyacencias como en la Definici3n 3.19

los primeros dos pasos no generan 2-ciclos. En [13, Proposición 5.1] se demuestra que para cualquier superficie marcada  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que tenga frontera vacía, y sea distinta de una esfera con menos de cuatro punciones, existe una triangulación  $\tau$  que satisface la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ .

**Proposición 3.24** ([13], Proposición 2.1). *Sea  $Q(\tau)$  el carcaj de adyacencias de una triangulación  $\tau$  que cumple la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ . Entonces:*

- a)  $Q(\tau)$  es conexo, y no tiene lazos ni 2-ciclos.
- b) Para todo arco  $i \in Q_1(\tau)$  hay exactamente dos flechas en  $Q_1(\tau)$  que inician en  $i$ , y exactamente dos flechas en  $Q_1(\tau)$  que finalizan en  $i$ .
- c) Existen biyecciones  $f, g : Q_1(\tau) \rightarrow Q_1(\tau)$  que cumplen:
  - Para toda flecha  $a \in Q_1(\tau)$ , el conjunto  $\{f(a), g(a)\}$  consiste de dos flechas distintas que inician en el mismo vértice donde finaliza  $a$ , es decir,  $t(f(a)) = t(g(a)) = h(a)$ . Más aun, para cada flecha  $b \in Q_1(\tau)$  el producto  $ba$  es distinto de 0 si y sólo si  $b \in \{f(a), g(a)\}$ .
  - $f^3$  es la identidad en  $Q_1(\tau)$ .

*Demostración.*

- a) Se sigue de la Definición 3.19 que  $Q(\tau)$  es conexo, ya que al cumplir  $\tau$  la propiedad  $(\mathcal{T}3)$  no se generan 2-ciclos durante su construcción. Es claro que  $Q(\tau)$  no tiene lazos ni 2-ciclos.
- b) Todo arco  $i \in \tau$  está contenido en exactamente dos triángulos formados en  $\tau$ , ya que no hay triángulos autoplegados; por cada uno de ellos hay exactamente una flecha en  $Q_1(\tau)$  que tiene a  $i$  como vértice inicial y exactamente una que lo tiene como vértice final.
- c) Dada una flecha  $a \in Q_1(\tau)$ , existen exactamente dos flechas en  $Q_1(\tau)$  que inician en  $h(a)$ ; sea  $f(a)$  la flecha que está en el mismo triángulo de  $\tau$  que  $a$ , y  $g(a)$  la otra, (cf. Figura 3.15).

Las flechas  $a$  y  $g(a)$  son flechas entre arcos que inciden a una misma punción de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Mientras que,  $a, f(a), f^2(a)$  son flechas distintas entre los arcos de un mismo triángulo. Al tener cada triángulo exactamente 3 flechas se sigue que  $f^3(a) = a$ .

Para cada  $b \in Q_1(\tau)$  se satisface  $ba \neq 0$  si y sólo si  $t(b) = h(a)$ . Hay sólo dos flechas en  $Q_1$  que inician en  $h(a)$ , éstas son  $f(a)$  y  $g(a)$ .

□

**Definición 3.25** ([13], Definición 3.1). *Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$ , denotaremos por  $\bar{a}$  a la única flecha en  $Q_1(\tau)$  distinta de  $a$  que inicia en el mismo vértice que  $a$ , es decir,  $a \neq \bar{a}$  y  $t(a) = t(\bar{a})$ .*

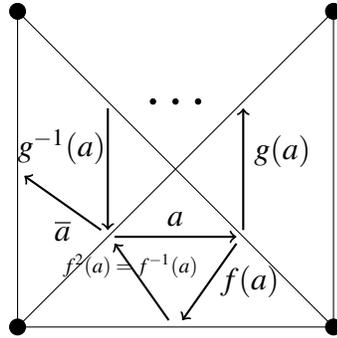


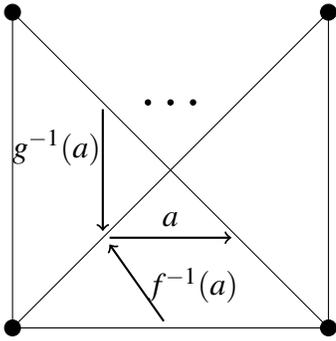
Figura 3.15: La flecha  $a$ , y las operaciones  $f$ ,  $g$  y  $\bar{\cdot}$ .

**Lema 3.26** ([13], Lema 3.2). *Sea  $Q(\tau)$  el carcaj de adyacencias asociado a una triangulación  $\tau$  que cumple la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ . Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  se satisface:*

- a)  $f^{-1}(a)$  y  $g^{-1}(a)$  son las dos flechas que terminan donde inicia  $a$ ;
- b)  $\overline{f(a)} = g(a)$ ,  $\overline{g(a)} = f(a)$ ;
- c)  $gf^{-1}(a) = fg^{-1}(a) = \bar{a}$ ;
- d)  $f^{-1}(\bar{a}) = g^{-1}(a)$ ,  $g^{-1}(\bar{a}) = f^{-1}(a)$ ; y
- e)  $f^{-1}g(a) = g^{-1}f(a)$  y esta flecha finaliza en el mismo vértice que  $a$ ;

*Demostración.*

- a) Por construcción  $t(f(a)) = t(g(a)) = h(a)$ . Además para cada  $b \in Q_1(\tau)$  las flechas  $f(b)$  y  $g(b)$  son distintas, por lo que  $f^{-1}(a) \neq g^{-1}(a)$  ya que  $ff^{-1}(a) = gg^{-1}(a) = a$ .



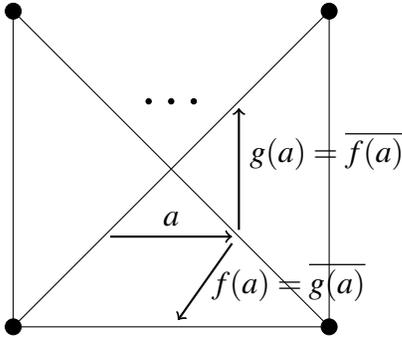
b) Las flechas  $\overline{f(a)}$  y  $f(a)$  son distintas. Además,

$$t(\overline{f(a)}) = t(f(a)) = h(a) = t(g(a)).$$

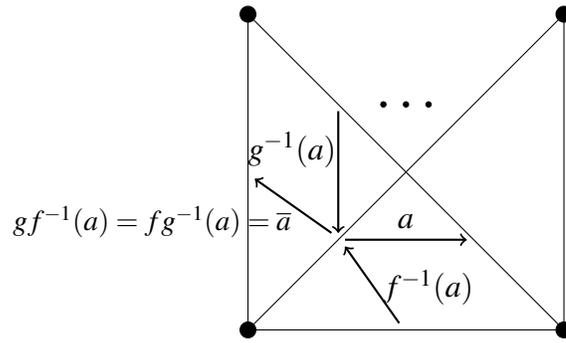
Las únicas flechas que inician en  $h(a)$  son  $f(a)$  y  $g(a)$ , por lo que  $\overline{f(a)} = g(a)$ . De la misma forma, las flechas  $\overline{g(a)}$ ,  $g(a)$  son distintas y

$$t(\overline{g(a)}) = t(g(a)) = h(a) = t(f(a)),$$

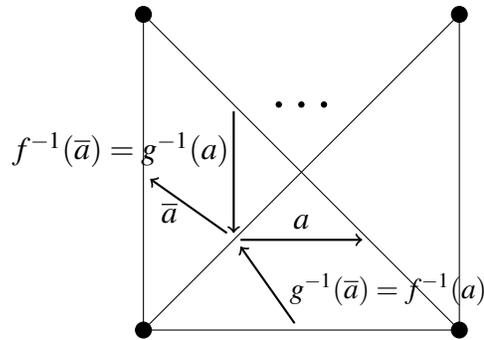
por lo que  $\overline{g(a)} = f(a)$ .



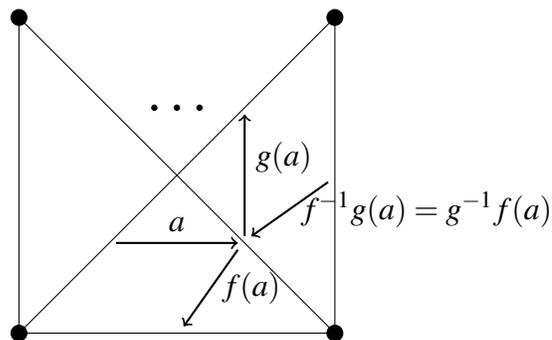
c) Las únicas dos flechas que inician en el vértice  $t(a)$  son  $a$  y  $\bar{a}$ . Además,  $t(gf^{-1}(a)) = h(f^{-1}(a)) = t(a)$ , que es igual a  $h(g^{-1}(a)) = t(fg^{-1}(a))$ . Las flechas  $gf^{-1}(a)$  y  $fg^{-1}(a)$  son distintas de  $a$ , por tanto  $gf^{-1}(a) = fg^{-1}(a) = \bar{a}$ .



- d) Por el inciso c),  $gf^{-1}(a) = \bar{a}$ . Aplicando  $g^{-1}$  se obtiene  $f^{-1}(a) = g^{-1}(\bar{a})$ . El inciso c) también nos dice que  $fg^{-1}(a) = \bar{a}$ . Al aplicar  $f^{-1}$  obtenemos  $g^{-1}(a) = f^{-1}(\bar{a})$ .



- e) Sólo hay dos flechas que finalizan en  $h(a)$ . Las flechas  $f^{-1}g(a)$  y  $g^{-1}f(a)$  son distintas de  $a$ , y  $h(f^{-1}g(a)) = t(g(a)) = h(a)$ , que es igual a  $t(f(a)) = h(g^{-1}f(a))$ , por lo que  $f^{-1}g(a) = g^{-1}f(a)$ .



□

Las funciones  $f, g$  son invertibles, por lo tanto cada una induce una partición de  $Q_1$ , en  $f$ -órbitas y  $g$ -órbitas, respectivamente. La  $f$ -órbita de una flecha  $a \in Q_1$  está definida como el conjunto de flechas  $\{f^z(a) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ , y su  $g$ -órbita como  $\{g^z(a) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ . Cada  $f$ -órbita está en correspondencia con las flechas dentro de un mismo triángulo de  $\tau$ , mientras que cada  $g$ -órbita corresponde a las flechas que rodean a una misma punción de  $\Sigma$ . Sean  $\Gamma$  un sistema de representantes de las  $f$ -órbitas (es decir,  $\Gamma$  contiene exactamente un elemento de cada  $f$ -órbita), y  $\Omega$  un sistema de representantes de las  $g$ -órbitas.

**Definición 3.27** ([13]). *Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  usaremos la notación*

$$n_a = \min\{z \in \mathbb{Z}^{>0} \mid g^z(a) = a\}.$$

**Observación 3.28.**

- a) *Toda punción tiene valencia finita. Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$ ,  $a$  y  $g(a)$  son flechas consecutivas que giran alrededor de una misma punción  $p$ , por tanto  $a = g^z(a)$  para algún  $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Más aún,  $n_a = \text{val}_\tau(p)$ .*
- b) *Al cumplir  $\tau$  la propiedad  $\mathcal{T}3$  se sigue que  $n_a \geq 3$ .*

**Definición 3.29.** *Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$ :*

- *Definimos el  $f$ -ciclo de  $a$  como  $\mathcal{F}(a) = f^2(a)f(a)a$ .*
- *Para toda  $m \geq 1$ , llamaremos el  $f$ -camino de longitud  $m$  con respecto a la flecha  $a$  al producto  $F(m, a) = f^{m-1}(a)f^{m-2}(a)\dots f(a)a$ . Y llamaremos el  $f$ -camino de longitud cero a  $F(0, a)$ , el idempotente  $e_{t(a)} \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  asociado a  $t(a)$ .*
- *Definimos el  $g$ -ciclo de la flecha  $a$  como  $\mathcal{G}(a) = g^{n_a-1}(a)g^{n_a-2}(a)\dots g(a)a$ .*
- *Para toda  $m \geq 1$ , llamaremos el  $g$ -camino de longitud  $m$  con respecto a la flecha  $a$  al producto  $G(m, a) = g^{m-1}(a)g^{m-2}(a)\dots g(a)a$ . Y llamaremos el  $g$ -camino de longitud cero a  $G(0, a)$ , el idempotente  $e_{h(a)} \in R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  asociado a  $h(a)$ .*

**Observación 3.30.** *Obsérvese que para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$ , el  $f$ -ciclo  $\mathcal{F}(a) = f^2(a)f(a)a$  con respecto a  $a$  es el  $f$ -camino de longitud 3 con respecto a  $a$  y  $\mathcal{G}(a) = G(n_a, a)$  es el  $g$ -camino de longitud  $n_a$  con respecto a  $a$ .*

**Observación 3.31.** *Un camino  $c = a_l a_{l-1} \dots a_2 a_1 \in R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de longitud positiva tiene exactamente una de las siguientes tres formas:*

1. Para cada  $i$  entre  $1$  y  $l - 1$  la flecha  $a_{i+1}$  es igual a  $f(a_i)$ . Es decir,  $c$  es un  $f$ -camino.
2. Para cada  $i$  entre  $1$  y  $l - 1$  la flecha  $a_{i+1}$  es igual a  $g(a_i)$ . Es decir,  $c$  es un  $g$ -camino.
3. Existen índices  $i, j \in \{1, 2, \dots, l - 1\}$  tales que  $a_{i+1} = f(a_i)$  y  $a_{i+1} = g(a_j)$ . Llamaremos a un camino de esta forma  $fg$ -camino-mezclado.

De la misma manera hay tres categorías de ciclos:

1. Potencias de  $f$ -ciclos.
2. Potencias de  $g$ -ciclos.
3. Una tercera forma de aquellos ciclos que no son de alguna de las categorías anteriores, llamaremos a los ciclos de esta tercera categoría como  $fg$ -ciclos-mezclados.

Un ciclo es de la categoría 1 o 2 si toda rotación cíclica de éste es un camino de la forma 1 o 2, respectivamente. Nótese que un ciclo de la tercera categoría es rotacionalmente equivalente a un ciclo  $b_l b_{l-1} \cdots b_2 b_1$  donde  $b_{l-1} = g(b_{l-2})$  y  $b_l = f(b_{l-1})$ .

**Nota 3.32.** Cabe señalar que las Definiciones 3.29 y 3.34 no aparecen en la literatura y son presentadas por el autor, quien considera que facilitan el manejo de algunos elementos en el álgebra completa de caminos.

**Observación 3.33.** Sea  $\tau$  una triangulación, de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , que cumple la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ . Podemos descomponer a cada potencial  $S \in R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  como una suma de tres potenciales rotacionalmente disjuntos:

$$S = S_f + S_g + S_{fg}, \quad (3.3)$$

donde  $S_f$  es combinación lineal de potencias de  $f$ -ciclos,  $S_g$  es combinación lineal de potencias de  $g$ -ciclos y  $S_{fg}$  es combinación lineal de  $fg$ -ciclos-mezclados (todo ciclo en  $Q(\tau)$  es de alguno de estas tres categorías, Observación 3.31). Más aun cada uno de estos tres potenciales es de la forma:

$$S_f \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{\gamma,n} (\mathcal{F}(\gamma))^n, \quad (3.4)$$

$$S_g \sim_{\text{cyc}} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\omega,n} (\mathcal{G}(\omega))^n, \quad (3.5)$$

$$S_{fg} \sim_{\text{cyc}} \sum_{a \in Q(\tau)} f^2(a)f(a)\bar{\omega}_a, \quad (3.6)$$

donde  $v_{\gamma,n}$ ,  $\mu_{\omega,n}$  son escalares, y  $\bar{\omega}_a = g^{-1}(a)c$  para algún camino  $c$ . La forma del potencial  $S_{fg}$  se debe a que todo  $fg$ -ciclo-mezclado contiene dos términos rotacionalmente consecutivos tales que uno se obtiene de aplicar la función  $f$  al otro.

Numeremos los elementos en los conjuntos  $\Gamma$  y  $\Omega$ ,  $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{|\Gamma|}\}$ ,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{|\mathbb{P}|}\}$ . Recordemos que  $|\Omega| = |\mathbb{P}|$  debido a que las  $g$ -órbitas están en correspondencia canónica con las punciones. Así,

$$S_f \sim_{\text{cyc}} \sum_{j=1}^{|\Gamma|} \sum_{n=1}^{\infty} v_{\gamma_j,n} (\mathcal{F}(\gamma_j))^n, \quad y \quad (3.7)$$

$$S_g \sim_{\text{cyc}} \sum_{i=1}^{|\mathbb{P}|} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\omega_i,n} (\mathcal{G}(\omega_i))^n. \quad (3.8)$$

**Definición 3.34** ([6]). Siguiendo la notación utilizada en [6, Lema 8.6], llamaremos:

**Ciclos de tipo rotacional I:** A las potencias mayores a uno de  $f$ -ciclos.

**Ciclos de tipo rotacional II:** A las potencias mayores a uno de  $g$ -ciclos.

**Ciclos de tipo rotacional III:** A los ciclos de la forma  $f^2(b)f(b)\lambda f^2(a)f(a)\rho$  para algunas flechas  $a, b \in Q_1(\tau)$ , y algunos caminos  $\lambda, \rho$  tales que  $\lambda = g^{-1}f(b)\lambda'$  para algún camino  $\lambda'$ , o  $\rho = \rho'gf^2(b)$  para algún camino  $\rho'$ .

Si un potencial  $S \in R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es una combinación lineal de los 3 tipos de ciclos mencionados anteriormente, escribimos a  $S$  como la suma de las componentes de cada uno de estos tipos:

$$S = S_I + S_{II} + S_{III} \quad (3.9)$$

Para muchas de las triangulaciones, todo  $fg$ -ciclo-mezclado es rotacionalmente equivalente a un ciclo de tipo rotacional III. Más adelante se mostrarán algunos ejemplos en los que esto sucede y otros en los que no.

### 3.3. Triangulaciones etiquetadas

En las secciones 3.1 y 3.2 se definió el concepto de triangulación  $\tau$  de una superficie, y se asocio a cada una de estas un carcaj  $Q(\tau)$ . Para cada arco que no es el lado plegado de un triángulo autoplegado, la operación de reemplazo a nivel

de triangulaciones es compatible con la operación mutación a nivel de carcajes (cf. Teorema 3.20). En esta sección se dará una forma mediante la cual “será posible” aplicar la operación de reemplazo respecto a arcos que son el lado plegado de un triángulo autoplegado.

**Definición 3.35** ([5], Definición 7.1). *Cada arco  $i \in (\Sigma, \mathbb{M})$  tiene dos extremos, usaremos vecindades pequeñas de estos dos para etiquetar el arco. Un arco etiquetado es un arco cuyos extremos han sido etiquetados cada uno como plano o muescado, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

- *el arco no corta a un monógono sin punciones;*
- *cada extremo de un arco, que pertenece a la frontera es etiquetado como plano; y*
- *los dos puntos extremos de un lazo son etiquetados de la misma manera.*

*En las figuras, los extremos etiquetados son mostrados de la manera habitual, mientras que los extremos muescados son representados con el símbolo  $\bowtie$ .*

**Definición 3.36** ([5], Definición 7.2). *Cada arco  $i$  ordinario (“plano”) puede ser representado como un arco etiquetado  $\tau(i)$  de la siguiente manera:*

- *si  $i$  no corta a un monógono con sólo una punción, entonces  $\tau(i)$  es el arco  $i$  con ambos extremos etiquetados planos; mientras que*
- *si  $i$  es un lazo basado en el punto  $a$ , tal que corta a un monógono con una punción  $b$  en su interior (Figura 3.16), sea  $j$  el único arco que conecta a los puntos  $a$  y  $b$  compatible con  $i$ . El arco  $\tau(i)$  es obtenido al etiquetar  $j$  como plano cerca de  $a$ , y como muescado cerca de  $b$ .*

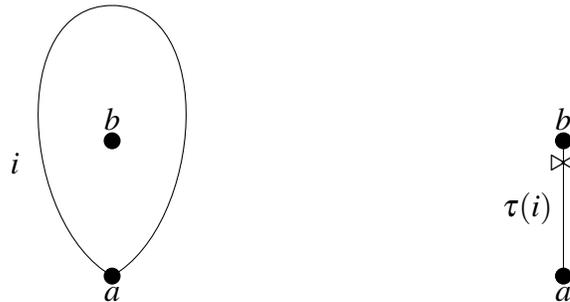


Figura 3.16: Asociamos a  $i$  un arco etiquetado.

Denotaremos al conjunto de todos los arcos etiquetados de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  como  $A^{\bowtie}(\Sigma, \mathbb{M})$ . La función  $\tau$  presentada en la Definición 3.36 es una función canónica de  $A^{\circ}(\Sigma, \mathbb{M})$  a  $A^{\bowtie}(\Sigma, \mathbb{M})$ .

**Observación 3.37** ([5], Observación 7.3). *Cada arco etiquetado  $i \in (\Sigma, \mathbb{M})$  pertenece a una de las siguientes clases:*

- *$i$  es un arco plano que conecta dos puntos marcados distintos sobre la frontera;*
- *$i$  es un arco plano que conecta un punto marcado en la frontera con sí mismo y no encierra, ni es el lado de un monógono con una punción;*
- *$i$  conecta a un punción con sí misma y no encierra, ni es el lado de un monógono con una punción. Los dos extremos de  $i$  son etiquetados ambos como planos o muescados;*
- *$i$  conecta a un punto marcado en la frontera con una punción (hay dos arcos etiquetados por cada clase de isotopía de arcos no etiquetados);*
- *$i$  conecta dos punciones distintas (hay cuatro arcos etiquetados por cada clase de isotopía de arcos no etiquetados).*

**Definición 3.38** ([5], Definición 7.4). *(Compatibilidad de arcos etiquetados). Diremos que dos arcos  $i, j \in A^{\bowtie}(\Sigma, \mathbb{M})$  son compatibles si satisfacen las siguientes condiciones:*

- *las versiones no etiquetadas de  $i$  y  $j$  son compatibles;*
- *si las versiones no etiquetadas de  $i$  y  $j$  son diferentes y  $i, j$  inciden en un mismo punto  $p$ , entonces los extremos de  $i$  y  $j$  que inciden en  $p$  son etiquetados de la misma manera;*
- *si las versiones no etiquetadas de  $i$  y  $j$  coinciden, entonces al menos uno de los extremos de  $i$  debe ser etiquetado de la misma manera que el correspondiente extremo de  $j$ .*

**Observación 3.39** ([5], Observación 7.6). *Si dos arcos planos  $i$  y  $j$  son compatibles, entonces los arcos etiquetados  $\tau(i)$  y  $\tau(j)$  (determinados como en la Definición 3.36) son compatibles. El recíproco de esta afirmación es falso: en un dígono con sólo una punción, los dos lazos (incidentes cada uno en un mismo punto de la frontera) no son compatibles, mientras que los arcos etiquetados correspondientes son compatibles. Las dos nociones de compatibilidad de arcos coinciden para arcos que no cortan a un monógono con una punción.*

De manera similar a las triangulaciones ideales, se define una *triangulación etiquetada* como una colección maximal de arcos etiquetados compatibles en  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Todas las triangulaciones etiquetadas tienen la misma cardinalidad, que es igual al rango de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ .

**Observación 3.40.** *Para cada arco  $i$  de una triangulación etiquetada  $\tau$  de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , existe exactamente un arco  $i' \in A^{\times}(\Sigma, \mathbb{M})$  distinto de  $i$  que satisface que  $\sigma = (\tau \setminus \{i\}) \cup \{i'\}$  es una triangulación etiquetada.*

En analogía al caso de triangulaciones ideales, llamaremos a la operación combinatoria que lleva de  $\tau$  a  $\sigma$  un *reemplazo de arcos* (flip), a la que denotaremos como  $f_i(\tau) = \sigma$ . Llamaremos a una secuencia  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l)$  de triangulaciones etiquetadas una *secuencia de reemplazos* si para cada  $k \in \{1, 2, \dots, l\}$  las triangulaciones  $\tau_{k-1}$  y  $\tau_k$  están relacionadas por un reemplazo. Una secuencia de reemplazos será llamada una *secuencia de reemplazos ideales*, si la secuencia sólo involucra triangulaciones ideales.

**Proposición 3.41** ([11], Proposición 2.7). *Si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  no es una superficie con frontera vacía y exactamente un punto marcado, entonces cualesquiera dos triangulaciones etiquetadas son miembros de una secuencia de reemplazos  $(\tau, \tau_1, \dots, \tau_{l-1}, \sigma)$ .*

Cada arco ordinario puede ser representado como un arco etiquetado (cf. Definición 3.36). A continuación se muestra la manera de representar triangulaciones ideales con triangulaciones etiquetadas y viceversa.

**Definición 3.42** ([11], Definición 2.8; [5]). *Sea  $\varepsilon : \mathbb{P} \rightarrow \{-1, 1\}$  una función. Definimos la función  $t_\varepsilon : A^\circ(\Sigma, \mathbb{M}) \rightarrow A^{\times}(\Sigma, \mathbb{M})$  que representa arcos ordinarios como arcos etiquetados de la siguiente manera:*

- *Si  $i$  es un arco ordinario que no es un lazo que encierra un monógono con una punción, entonces el arco etiquetado  $t_\varepsilon(i)$  es el arco  $i$  cuyos extremos (cada uno respectivamente) han sido etiquetados como muescados si y sólo si el correspondiente punto marcado en  $\mathbb{P}$  es enviado a  $-1$  por  $\varepsilon$ .*
- *Si  $j$  es un lazo basado en el punto marcado  $q$  que encierra un monógono con una punción, y  $p$  es el punto dentro del monógono, entonces  $t_\varepsilon(j)$  es el arco que conecta a  $p$  y  $q$  dentro del monógono, que ha sido etiquetado en su extremo en  $q$  como muescado si y sólo si  $\varepsilon(q) = -1$ , y etiquetado como muescado en su extremo en  $p$  si y sólo si  $\varepsilon(p) = 1$ .*

La Figura 3.17 ilustra el comportamiento de la función  $t_\varepsilon$ .

$i$	$\varepsilon(p), \varepsilon(q)$	$t_\varepsilon(i)$
	$\varepsilon(p) = 1$ $\varepsilon(q) = 1$	
	$\varepsilon(p) = 1$ $\varepsilon(q) = -1$	
	$\varepsilon(p) = -1$ $\varepsilon(q) = 1$	
	$\varepsilon(p) = -1$ $\varepsilon(q) = -1$	

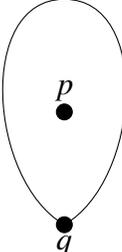
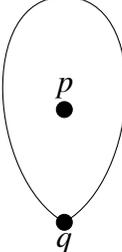
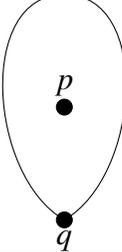
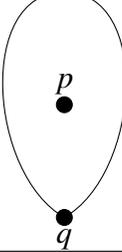
$i$	$\varepsilon(p), \varepsilon(q)$	$t_\varepsilon(i)$
	$\varepsilon(p) = 1$ $\varepsilon(q) = 1$	
	$\varepsilon(p) = 1$ $\varepsilon(q) = -1$	
	$\varepsilon(p) = -1$ $\varepsilon(q) = 1$	
	$\varepsilon(p) = -1$ $\varepsilon(q) = -1$	

Figura 3.17: La función  $t_\varepsilon$  ([11], Ejemplo 2.9).

**Definición 3.43** ([5], Definición 9.1; [11]). *Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ .*

1. Definimos la firma de  $\tau$  como la función  $\delta_\tau : \mathbb{P} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  dada por

$$\delta_\tau(p) = \begin{cases} 1 & \text{si todos los extremos de arcos etiquetados en } \tau \text{ incidentes} \\ & \text{en } p \text{ son etiquetados como planos;} \\ -1 & \text{si todos los extremos de arcos etiquetados en } \tau \text{ incidentes} \\ & \text{en } p \text{ son etiquetados como muescados;} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Definimos la firma débil de  $\tau$  como la función  $\varepsilon_\tau : \mathbb{P} \rightarrow \{-1, 1\}$  determinada por:

$$\varepsilon_\tau(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_\tau(p) \in \{0, 1\}; \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Observación 3.44.** En la definición anterior, nótese que si  $\delta_\tau(p) = 0$ , entonces hay exactamente dos arcos en  $\tau$  incidentes a  $p$  y las versiones no etiquetadas de estos arcos coinciden. Además, estos arcos tienen la misma etiqueta en su extremo distinto de  $p$ .

**Definición 3.45** ([5], Definición 9.2; [11], Definición 2.11). Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Reemplazamos cada arco etiquetado en  $\tau$  con un arco ordinario de la siguiente manera:

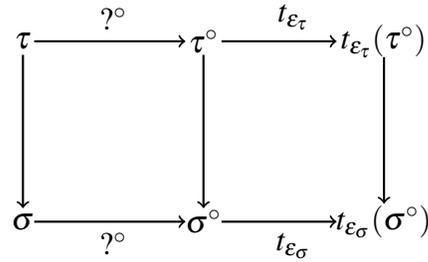
1. borramos todas las etiquetas en las punciones  $p$  con firma distinta de cero;
2. para cada punción  $p$  con firma cero  $\delta_\tau(p) = 0$ , reemplazamos el arco etiquetado  $i \in \tau$  que es etiquetado como muescado en  $p$  por el ciclo que encierra a  $p$  e  $i$ .

Denotaremos a la colección de arcos ordinarios que resulta de este proceso como  $\tau^\circ$ . Para cada  $i \in \tau$  denotaremos como  $i^\circ$  al arco en  $\tau^\circ$  que reemplaza a  $i$  (notemos que  $i^\circ$  depende de  $\tau$  y no sólo de sí mismo).

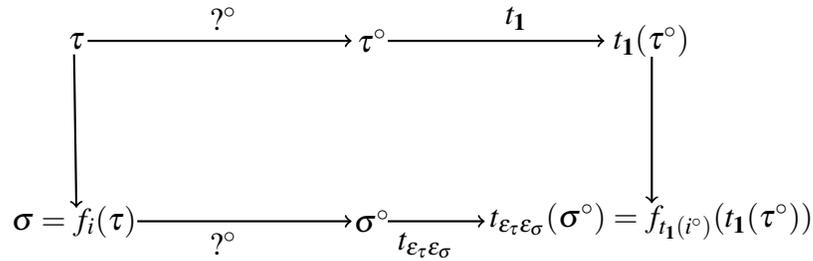
**Proposición 3.46** ([11], Proposición 2.12). Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados.

1. Para toda función  $\varepsilon : \mathbb{P} \rightarrow \{-1, 1\}$  la función  $t_\varepsilon : A^\circ(\Sigma, \mathbb{M}) \rightarrow A^{\boxtimes}(\Sigma, \mathbb{M})$  es inyectiva y preserva la compatibilidad. Si  $i_1$  e  $i_2$  son arcos ordinarios compatibles, entonces los arcos etiquetados  $t_\varepsilon(i_1)$  y  $t_\varepsilon(i_2)$  son compatibles. De esta manera, si  $T$  es una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , entonces  $t_\varepsilon(T) = \{t_\varepsilon(i) | i \in T\}$  es una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Más aun, si  $T_1$  y  $T_2$  son dos triangulaciones ideales que cumplen  $T_2 = f_i(T_1)$  para algún arco  $i \in T_1$ , entonces  $t_\varepsilon(T_2) = f_{t_\varepsilon(i)}(t_\varepsilon(T_1))$ .

2. Si  $\tau$  es una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , entonces  $\tau^\circ$  es una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  y la función que manda a cada arco  $i$  en  $i^\circ$  es una biyección entre  $\tau$  y  $\tau^\circ$ .
3. Para cada triangulación ideal  $T$ , las triangulaciones  $(t_{\mathbf{1}}(T))^\circ$  y  $T$  son la misma, donde  $\mathbf{1} : \mathbb{P} \rightarrow \{-1, 1\}$  es la función constante 1.
4. Para toda triangulación etiquetada  $\tau$  y todo arco  $i \in \tau$  tenemos que  $t_{\varepsilon_\tau}(i^\circ) = i$ , donde  $i^\circ$  es el arco ordinario que reemplaza a  $i$  en la Definición 3.45. Por lo tanto,  $t_{\varepsilon_\tau}(\tau^{\text{circ}}) = \tau$ .
5. Si  $\tau$  y  $\sigma$  son triangulaciones etiquetadas que satisfacen  $\varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma$  y  $\sigma = f_i(\tau)$  para algún arco etiquetado  $i \in \tau$ , entonces  $\sigma^\circ = f_{i^\circ}(\tau^\circ)$ , donde  $i^\circ$  es el arco ordinario que reemplaza a  $i$  en la Definición 3.45. Más aun, el siguiente diagrama de funciones conmuta al tomar las flechas verticales como las funciones canónicamente inducidas por la operación de reemplazo de arcos.



6. Sean  $\tau$  y  $\sigma$  triangulaciones etiquetadas tales que  $\sigma = f_i(\tau)$  para algún arco  $i \in \tau$ . Las funciones  $\varepsilon_\tau$  y  $\varepsilon_\sigma$  son iguales o difieren exactamente en una punción  $q$ . En el caso en que  $\varepsilon_\tau \neq \varepsilon_\sigma$ , si  $\varepsilon_\tau(q) = 1 = -\varepsilon_\sigma(q)$ , entonces  $i^\circ$  es un lado plegado en  $\tau^\circ$  incidente en la punción  $q$ , y  $t_{\varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma}(\sigma^\circ) = f_{t_{\mathbf{1}}(i^\circ)}(t_{\mathbf{1}}(\tau^\circ))$ , donde la función  $\varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \{-1, 1\}$  es la función producto  $p \mapsto \varepsilon_\tau(p) \varepsilon_\sigma(p)$ . Más aun, el diagrama de funciones



*conmuta, donde las flechas verticales son las funciones canónicas inducidas por la operación de reemplazo de arcos.*

Las Definiciones 3.42 y 3.45 nos indican como pasar de una triangulación ideal a una triangulación etiquetada y viceversa. En las triangulaciones etiquetadas es posible tomar el reemplazo con respecto a cualquier arco, por lo que el uso de triangulaciones etiquetadas nos permite de alguna manera “resolver” el problema de reemplazar un arco plegado de una triangulación ideal.

Definimos el carcaj asociado a una triangulación etiquetada  $\tau$  como el carcaj obtenido de  $Q(\tau^\circ)$  al reemplazar cada uno de sus vértices  $i \in \tau^\circ$  por  $t_{e_\tau}(i) \in \tau$ .

Al igual que en triangulaciones ideales, la operación de reemplazo de arcos es compatible con la mutación de carcajes.

**Teorema 3.47** ([11], Teorema 2.14; [5]). *Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados, y  $\tau$  y  $\sigma$  dos triangulaciones de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Si  $\sigma = f_i(\tau)$  para algún arco etiquetado  $i \in \tau$ , entonces  $Q(\sigma) = \mu_i(Q(\tau))$ .*



# Capítulo 4

## El álgebra Jacobiana de un Carcaj con Potencial asociado a una triangulación de una superficie

En este capítulo trabajaremos con un tipo particular de potenciales asociados a una triangulación de una superficie que cumple la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ . Como se vio en la Sección 3.2, tener la propiedad  $(\mathcal{T}3)$  provee de muchas características al carcaj de adyacencias asociado.

Recordemos que el carcaj de adyacencias asociado a una triangulación  $\tau$  de una superficie es 2-acíclico (cf. Definición 3.15). Por la Observación 3.18 si dos arcos  $i, j$  de  $\tau$  son ambos adyacentes a una misma punción  $p$  de valencia 2, entonces no hay flechas en  $Q(\tau)$  que vayan de  $i$  a  $j$  ni viceversa.

**Definición 4.1** ([9], Definición 8). *Dada una triangulación ideal  $\tau$  de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , para cada pareja de arcos  $i_1, i_2$  que son incidentes a una misma punción de valencia 2, añadimos al carcaj  $Q(\tau)$  una flecha que va de  $i_1$  a  $i_2$  y otra que va de  $i_2$  a  $i_1$ , y llamamos al carcaj resultante el carcaj de adyacencias signado no reducido  $\widehat{Q(\tau)}$ .*

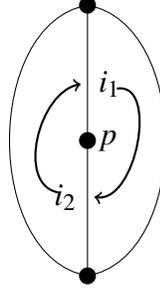
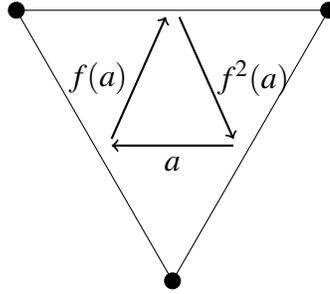


Figura 4.1: Añadimos a  $Q(\tau)$  2-ciclos.

El carcaj de adyacencias  $Q(\tau)$  es la parte reducida del carcaj  $\widehat{Q(\tau)}$ .

**Definición 4.2** ([9], Definición 23). *Sea  $\tau$  una triangulación ideal de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Escojamos una colección  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  de escalares distintos de 0. Asociamos a  $\tau$  un potencial  $\widehat{S}(\tau, \mathbf{x}) \in R\langle\langle \widehat{Q(\tau)} \rangle\rangle$  definido de la siguiente manera:*

- *Para cada triángulo interior  $\Delta$  no autoplegado de  $\tau$  tenemos un 3-ciclo orientado en  $\widehat{Q(\tau)}$  (salvo equivalencia rotacional), denotamos como  $\widehat{S}^\Delta$  a dicho ciclo. En la siguiente figura definimos  $\widehat{S}^\Delta = f^2(a)f(a)a$ .*



- *Si  $\Delta$  es un triángulo interior no autoplegado adyacente a dos triángulos autoplegados como en figura 4.2, entonces definimos  $\widehat{T}^\Delta = \frac{b_2 b_3 b_4}{x_p x_q}$ , donde  $p$  y  $q$  son las punciones de valencia 1 dentro de los triángulos autoplegados adyacentes a  $\Delta$ .*

*En otro caso<sup>1</sup>, si  $\Delta$  es adyacente a menos de 2 triángulos autoplegados, definimos  $\widehat{T}^\Delta = 0$ .*

<sup>1</sup>Si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  no es una esfera con menos de 5 punciones, entonces cada triángulo no autoplegado es adyacente a lo más a dos triángulos autoplegados.

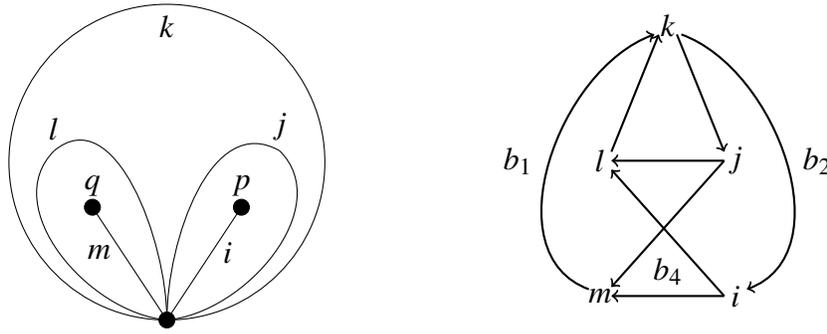
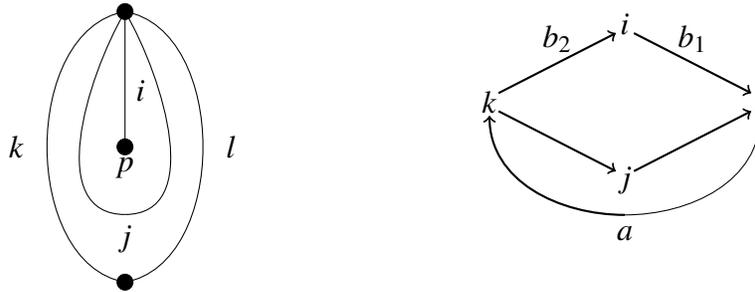


Figura 4.2: Un triángulo adyacente a dos triángulos autoplegados.

- Si una punción  $p$  es adyacente a exactamente un arco  $i$  de  $\tau$ , es decir,  $i$  es el lado autoplegado de un triángulo alrededor de  $p$ , como en la siguiente figura, definimos  $\widehat{S}^p = -\frac{ab_1b_2}{x_p}$ .



- Si una punción  $p$  es adyacente a más de un arco, borramos todos los lazos adyacentes a  $p$  que forman triángulos autoplegados. El producto de todas las flechas entre los arcos restantes  $a_1^p \cdots a_d^p$  es un ciclo que da exactamente una vuelta alrededor de  $p$  en sentido inverso a las manecillas del reloj. Salvo equivalencia rotacional, definimos  $\widehat{S}^p = x_p a_1^p \cdots a_d^p$ .

Definimos el potencial no reducido  $\widehat{S}s(\tau) \in R\langle\langle\widehat{Q}(\tau)\rangle\rangle$  como

$$\widehat{S}(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{\Delta} (\widehat{S}^{\Delta} + \widehat{T}^{\Delta}) + \sum_{p \in \mathbb{P}} \widehat{S}^p. \quad (4.1)$$

Finalmente, definimos el carcaj con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  como la parte reducida (salvo equivalencia a derecha) del  $QP(\widehat{Q}(\tau), \widehat{S}(\tau, \mathbf{x}))$ .

Para el caso en que  $\tau$  es una triangulación que cumple la propiedad ( $\mathcal{T}3$ ), el potencial  $S(\tau, \mathbf{x})$  está dado por

$$\begin{aligned}
 S(\tau, \mathbf{x}) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}(\gamma) + \sum_{p \in \mathbb{P}} x_p \mathcal{G}(\omega_p) \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}(\gamma) + \sum_{\omega \in \Omega} x_p \mathcal{G}(\omega), \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

(recordemos que hay una biyección entre  $\Omega$  y  $\mathbb{P}$ ). Es decir,  $S(\tau, \mathbf{x})$  es una suma de  $f$ -ciclos rotacionalmente disjuntos, más una suma de múltiplos escalares de  $g$ -ciclos rotacionalmente disjuntos. Las rotaciones cíclicas de los ciclos que aparecen en  $S(\tau, \mathbf{x})$  generan a todos los  $f$ -ciclos y  $g$ -ciclos en  $Q(\tau)$ .

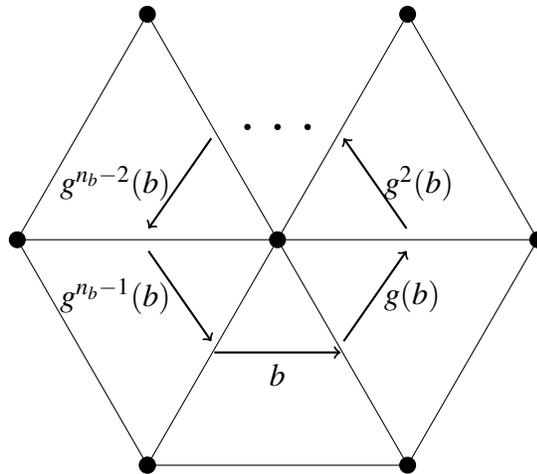


Figura 4.3: El potencial  $S(\tau, \mathbf{x})$  involucra exactamente a un ciclo rotacionalmente equivalente a  $\mathcal{G}(b)$ .

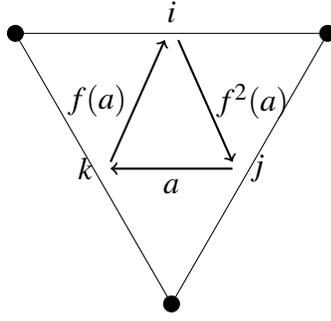


Figura 4.4: El potencial  $S(\tau, \mathbf{x})$  involucra exactamente a un ciclo rotacionalmente equivalente a  $\mathcal{F}(a)$ .

**Teorema 4.3** ([9], Teorema 30). *Si  $\tau$  y  $\sigma$  son dos triangulaciones ideales de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  tales que  $\sigma = f_i(\tau)$  para algún arco  $i \in \tau$ , entonces los carcajes con potencial  $\mu_i(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  y  $(Q(\sigma), S(\sigma, \mathbf{x}))$  son equivalentes a derecha.*

El teorema anterior nos dice que en el conjunto de triangulaciones ideales, la operación de reemplazo de arcos es compatible con la mutación de carcajes con potencial.

**Definición 4.4** ([11], Definición 3.2). *Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , y  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  una colección de escalares distintos de cero. Definimos el potencial asociado a  $\tau$  con respecto a la colección  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  como  $S(\tau, \mathbf{x}) = t_{\varepsilon_\tau}(S(\tau^\circ, \varepsilon_\tau \cdot \mathbf{x})) \in R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ .*

**Observación 4.5** ([11], Observación 3.2). *Si  $\tau$  es una triangulación ideal, entonces al identificar a  $\tau$  con  $t_I(\tau)$  (es decir, a cada arco  $i \in \tau$  con  $t_I(i) \in t_I(\tau)$ ), el QP  $(Q(t_I(\tau)), S(t_I(\tau), \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}))$  coincide con el QP  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  definido en 4.2.*

**Teorema 4.6** ([11], Teorema 8.1). *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados distinta de una esfera con cinco punciones. Si  $\tau$  y  $\sigma$  son dos triangulaciones etiquetadas de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  relacionadas por un reemplazo de un arco  $i \in \tau$  ( $\sigma = f_i(\tau)$ ), y  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  es una colección de escalares distintos de cero, entonces los QPs  $\mu_i(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  y  $(Q(\sigma), S(\sigma, \mathbf{x}))$  son equivalentes a derecha.*

**Corolario 4.7** ([11], Corolario 9.1). *Si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  no es una esfera con cinco punciones, entonces cualquier carcaj con potencial de la forma  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  es no degenerado.*

El Corolario 4.7 se obtiene a partir del Teorema 4.6 y del hecho de que los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  son reducidos.

El carcaj con potencial  $S(\tau, \mathbf{x})$ , propuesto y estudiado inicialmente por D. Labardini presenta muchas propiedades; en el siguiente capítulo se hablará acerca de que para muchas de las triangulaciones de superficies este potencial determina la única clase de equivalencia débil a derecha de los carcajes con potencial no degenerados.

En [9], Teorema 36 D. Labardini demuestra que si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es una superficie con frontera no vacía, entonces para toda triangulación ideal  $\tau$  el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  es de dimensión finita. Mientras que en [13] Proposición 4.2 S. Ladkani muestra que si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es una superficie con frontera vacía, entonces para toda triangulación ideal  $\tau$  el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  es de dimensión finita.

Para el caso de triangulaciones de superficies con frontera vacía que satisfacen la propiedad  $\mathcal{T}3$ , definiremos un tipo más general de potenciales, donde para cada punci3n  $p \in \mathbb{P}$  permitiremos tomar no un múltiplo escalar del  $g$ -ciclo alrededor de  $p$ , si no un múltiplo escalar de una potencia de dicho  $g$ -ciclo. Demostraremos que en general estos potenciales son de dimensión finita (cf. Teorema 4.16), y en el siguiente capítulo demostraremos en que casos son no degenerados sobre el carcaj  $Q(\tau)$ .

**Definición 4.8.** *Sea  $\tau$  una triangulación, que cumple la propiedad ( $\mathcal{T}3$ ), de una superficie con puntos marcados y frontera vacía. Para una colección  $\lambda = (\lambda_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de escalares distintos de 0 y una colección de enteros positivos  $m = (m_\omega)_{\omega \in \Omega}$  definimos el potencial  $S(\tau, \lambda, m)$  como*

$$S(\tau, \lambda, m) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}(\gamma) + \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_\omega (\mathcal{G}(\omega))^{m_\omega}. \quad (4.3)$$

Para cada flecha  $a \in Q_1$  existe un único representante  $\omega_a \in \Omega$  tal que  $\omega_a = g^r(a)$  para algún  $r \in \mathbb{N}$ , ( $n_a = n_{\omega_a}$ ), denotemos  $m_a = m_{\omega_a}$  y  $\lambda_a = \lambda_{\omega_a}$ ; también, existe un único  $\gamma_a \in \Gamma$  tal que  $\gamma_a = f^t(a)$  para algún  $t \in \mathbb{N}$ .

Nótese que el potencial  $S(\tau, \mathbf{x})$  descrito en (4.2) es un potencial de la forma  $S(\tau, \lambda, m)$  con  $m = (1)_{\omega \in \Omega}$ .

En [13] S. Ladkani estudió el álgebra Jacobiana de los QP's  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  asociados a triangulaciones que cumplen ( $\mathcal{T}3$ ). En este capítulo generalizaremos algunos resultados de S. Ladkani, para el caso de los potenciales  $S(\tau, \lambda, m)$ .

El siguiente lema es una generalización del Lema 3.5.

**Lema 4.9.** *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía. Si  $\tau$  es una triangulación de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que cumple ( $\mathcal{T}3$ ), para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  el elemento  $f(a)a + \lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a})$  se encuentra en el ideal Jacobiano  $J(S(\tau, \lambda, m))$ ; es decir,  $f(a)a$  es congruente con  $-\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a})$  módulo  $J(S(\tau, \lambda, m))$ .*

*Demostración.* Para cada flecha  $b \in Q_1(\tau)$  el potencial  $S(\tau, \lambda, m)$  está dado por

$$S(\tau, \lambda, m) = \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_b\}} \mathcal{F}(\gamma) + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{\omega_b\}} \lambda_\omega (\mathcal{G}(\omega))^{m_\omega} + \mathcal{F}(\gamma_b) + \lambda_b \mathcal{G}(b).$$

La flecha  $b$  no aparece en los primeros dos sumandos, por lo que al derivar cíclicamente con respecto a  $b$  obtenemos

$$\partial_b(S(\tau, \lambda, m)) = f^2(b)f(b) + \lambda_b m_b G(m_b n_b - 1, g(b)). \quad (4.4)$$

Evaluando esta expresión al tomar  $b = f^{-1}(a)$

$$\partial_{f^{-1}(a)}(S(\tau, \lambda, m)) = f(a)a + \lambda_{f^{-1}(a)} m_{f^{-1}(a)} G(m_{f^{-1}(a)} n_{f^{-1}(a)} - 1, f^{-1}(a)).$$

Por el inciso d) del Lema 3.26  $f^{-1}(a) = g^{-1}(\bar{a})$ . Recordemos también que  $\lambda_{g^{-1}(\bar{a})} = \lambda_{\bar{a}}$ ,  $m_{g^{-1}(\bar{a})} = m_{\bar{a}}$  y  $n_{g^{-1}(\bar{a})} = n_{\bar{a}}$ , de manera que

$$f(a)a + \lambda_{\bar{a}} G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) = \partial_{f^{-1}(a)} \in J(S(\tau, \lambda, m)). \quad (4.5)$$

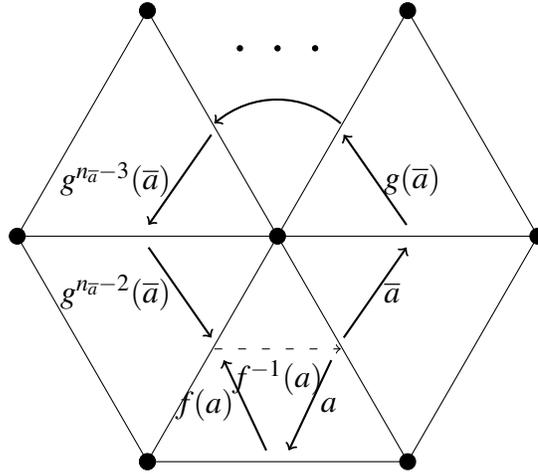


Figura 4.5: En el caso en que  $m_{\bar{a}} = 1$ ,  $f(a)a$  es congruente con  $\lambda_{\bar{a}} G(n_{\bar{a}} - 1, \bar{a})$ .

□

La siguiente proposición es una generalización de la Proposición 3.6.

**Proposición 4.10.** *Sea  $\tau$  una triangulación como en el Lema 4.9. Para toda flecha  $a \in Q_1(\tau)$  se satisface:*

- a)  $-\lambda_a m_a (\mathcal{G}(a))^{m_a} \equiv \mathcal{F}(a) \equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} (\mathcal{G}(\bar{a}))^{m_{\bar{a}}} \equiv \mathcal{F}(\bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ .
- b)  $fg(a)g(a)a \equiv -\lambda_{f(a)} m_{f(a)} G(m_{f(a)} n_{f(a)} - 1, f(a))a \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ .
- c)  $gf(a)f(a)a \equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} f g^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 2}(\bar{a}) G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ .

*Demostración.*

- a) Al multiplicar la derivada  $\partial_a(S(\tau, \lambda, m))$  (ver (4.4)) por la derecha por  $a$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_a(S(\tau, \lambda, m))a &= f^2(a)f(a)a + \lambda_a m_a G(m_a n_a - 1, g(a))a \\ &= \mathcal{F}(a) + \lambda_a m_a (\mathcal{G}(a))^{m_a} \in J(S(\tau, \lambda, m)).\end{aligned}$$

Ésto muestra la primera congruencia, la tercera congruencia se demuestra con el mismo razonamiento sustituyendo  $a$  por  $\bar{a}$ .

Para demostrar la segunda congruencia multipliquemos por la izquierda por  $f^2(a)$  la congruencia dada en el Lema 4.9

$$f^2(a)f(a)a \equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} f^2(a) G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}. \quad (4.6)$$

Recordemos que  $f^2(a) = g^{-1}(\bar{a})$ , Lema 3.26, y observemos que  $g^{-1}(\bar{a}) = g^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1}(\bar{a})$ , por lo que

$$\begin{aligned}f^2(a)f(a)a &\equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} g^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1}(\bar{a}) G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) \\ &\equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}}, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{F}(a) \equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} \mathcal{G}(\bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}. \quad (4.7)$$

- b) Por el Lema 3.26,  $\overline{g(a)} = f(a)$ . Aplicando el Lema 4.9 a  $g(a)$ ,

$$fg(a)g(a) \equiv -\lambda_{f(a)} m_{f(a)} G(m_{f(a)} n_{f(a)} - 1, f(a)) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}.$$

Multiplcando por la derecha por  $a$  obtenemos el resultado buscado.

- c) Multiplcando por la izquierda por  $gf(a)$  la congruencia del Lema 4.9,

$$gf(a)f(a)a \equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} gf(a) G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}.$$

Aplicando la primera igualdad del inciso b) del Lema 3.26 a  $f(a)$  tenemos  $gf(a) = \overline{ff(a)}$ , que es igual a  $\overline{f^{-1}(a)}$ ; por la segunda igualdad del inciso d) del mismo lema,  $\overline{f^{-1}(a)} = \overline{g^{-1}(\bar{a})}$ , que es igual a  $\overline{gg^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 2}}$ ; por la segunda igualdad del inciso b),  $\overline{gg^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 2}} = \overline{fg^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 2}}$ . Vemos entonces que  $gf(a) = \overline{fg^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 2}}$ , y así

$$gf(a)f(a)a \equiv -\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}} fg^{m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 2} G(m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}. \quad (4.8)$$

□

Para los siguientes resultados del ideal Jacobiano (y el álgebra Jacobiana) pediremos que se satisfaga un poco más que la propiedad ( $\mathcal{T}3$ ). Diremos que el QP  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  cumple la propiedad

( $\mathcal{N}4$ ) Si  $\tau$  cumple la propiedad ( $\mathcal{T}3$ ), y para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$ :

$$n_a \geq 4, \text{ o } n_{\bar{a}} \geq 4, \text{ o } m_a \geq 2, \text{ o } m_{\bar{a}} \geq 2.$$

**Observación 4.11.** Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  se satisface  $n_a \geq 3$  y  $n_{\bar{a}} \geq 3$  debido a la propiedad ( $\mathcal{T}3$ ). Además  $m_a \geq 1$  y  $m_{\bar{a}} \geq 1$ , por lo que  $m_a n_a \geq 3$  y  $m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} \geq 3$ . La propiedad ( $\mathcal{N}4$ ) nos dice que  $m_a n_a \geq 4$  o  $m_{\bar{a}} n_{\bar{a}} \geq 4$ .

La propiedad  $\mathcal{N}4$  indica que cada arco en  $\tau$ , alguno de sus dos extremos (que son punciones en  $\mathbb{P}$ ) tiene asociado en  $S(\tau, x)$  una potencia de un  $g$ -ciclo de longitud al menos 4.

**Observación 4.12.** Si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es una superficie marcada con frontera vacía, género positivo y sólo una punción, entonces toda triangulación  $\tau$  está formada por exactamente  $6(\text{género}(\Sigma)) - 3$  arcos (Proposición 3.8), todos incidentes a la única punción  $p$ , por lo que  $\text{val}_\tau(p) = 12(\text{género}(\Sigma)) - 6$ . Así, para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  se tiene  $n_a = 12(\text{género}(\Sigma)) - 6 \geq 6$ .

El siguiente lema generaliza el Lema 3.10 presentado en [13] por S. Ladkani, par el caso  $m = (1)_{\omega \in \Omega}$ .

**Lema 4.13.** Si el carcaj con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  cumple ( $\mathcal{N}4$ ), entonces para toda flecha  $a \in Q_1(\tau)$

- a)  $fg(a)g(a)a \equiv 0 \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ , y
- b)  $gf(a)f(a)a \equiv 0 \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ .

*Demostración.*

- a) Afirmación: Para toda  $k \in \mathbb{Z}^{>0}$  existen una flecha  $b_k \in Q_1(\tau)$ , un escalar distinto de cero  $\lambda_k \in \mathbb{F}$  y dos caminos  $c_{k_1}, c_{k_2}$  tales que

$$fg(a)g(a)a \equiv \rho_k c_{k_1} fg(b_k)g(b_k)b_k c_{k_2} \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))},$$

$$\text{longitud}(c_{k_1}) + \text{longitud}(c_{k_2}) \geq k.$$

Demostraremos esta afirmación por inducción sobre  $k$ . Por el inciso a) de la Proposición 4.10,

$$fg(a)g(a)a \equiv -\lambda_{f(a)} m_{f(a)} G(m_{f(a)} n_{f(a)} - 1, f(a))a \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}.$$

Además,  $G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 1, f(a)) = G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 3, g^2f(a))gf(a)f(a)$ , por lo que

$$fg(a)g(a)a \equiv -\lambda_{f(a)}m_{f(a)}G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 3, g^2f(a))gf(a)f(a)a \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}.$$

Reemplazando  $gf(a)f(a)a$  por el elemento equivalente módulo el ideal Jacobiano mostrado en el inciso c) de la Proposición 4.10, obtenemos que  $fg(a)g(a)a$  es congruente a

$$\lambda_{f(a)}\lambda_{\bar{a}}m_{f(a)}m_{\bar{a}}G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 3, g^2f(a))fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}} - 1, \bar{a})$$

módulo el ideal Jacobiano  $J(S(\tau, \lambda, m))$ . Observemos que

$$\begin{aligned} & G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 3, g^2f(a))fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}} - 1, \bar{a}) \\ &= G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 3, g^2f(a))fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})g^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})g^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-3}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}} - 3, \bar{a}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando la primera igualdad del inciso b) del Lema 3.26 a  $f(a)$  obtenemos  $\overline{f^2(a)} = gf(a)$ . De la observación 4.11 se sigue

$$m_{f^2(a)}n_{f^2(a)} - 3 + m_{gf(a)}n_{gf(a)} - 3 \geq 1,$$

y

$$\begin{aligned} & \text{longitud}(G(m_{f(a)}n_{f(a)} - 3, g^2f(a))) + \text{longitud}(G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}} - 1, \bar{a})) \\ &= m_{f(a)}n_{f(a)} - 3 + m_{\bar{a}}n_{\bar{a}} - 3 \geq 1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ya que  $m_{f(a)} = m_{gf(a)}$ ,  $n_{f(a)} = n_{gf(a)}$ ,  $m_{g^2f(a)} = m_{f^2(a)}$ ,  $n_{g^2f(a)} = n_{f^2(a)}$  y  $\bar{a} = g^2f(a)$ . Todo esto concluye el caso  $k = 1$ .

Dada  $k \in \mathbb{Z}^{>0}$ , si suponemos que

$$fg(a)g(a)a \equiv \rho_k c_{k_1} fg(b_k)g(b_k) b_k c_{k_2} \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$$

para algunos caminos  $c_{k_1}$  y  $c_{k_2}$  con  $\text{longitud}(c_{k_1}) + \text{longitud}(c_{k_2}) \geq k$ , entonces aplicando el caso base ( $k = 1$ ) sobre  $fg(b_k)g(b_k) b_k$ ,

$$\begin{aligned} fg(a)g(a)a &\equiv \rho_k c_{k_1} fg(b_k)g(b_k) b_k c_{k_2} \\ &\equiv \rho_k \rho'_k c_{k_1} c'_1 fg(b_{k'})g(b_{k'}) b_{k'} c'_2 c_{k_2} \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}, \end{aligned}$$

y  $\text{longitud}(c_{k_1} c'_1) + \text{longitud}(c_{k_2} c'_2) \geq k + 1$ , con lo cual queda demostrada la afirmación.

La afirmación nos dice que  $(fg(a)g(a)a - \rho_k c_{k_1} fg(b_k)g(b_k) b_k c_{k_2})_{k \in \mathbb{Z}^{>0}}$  es una sucesión de elementos en el ideal Jacobiano  $J(S(\tau, \lambda, m))$ ; esta sucesión converge a  $fg(a)g(a)a$ , y por lo tanto  $fg(a)g(a)a \in J(S(\tau, \lambda, m))$ .

b) Por el inciso c) de la Proposición 4.10,

$$gf(a)f(a)a \equiv -\lambda_{\bar{a}}m_{\bar{a}}fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-1, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} & fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-1, \bar{a}) \\ &= fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})g^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})g^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-3}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-3, \bar{a}). \end{aligned}$$

De esta forma, al utilizar el ya demostrado inciso a) del presente lema,

$$\begin{aligned} gf(a)f(a)a &\equiv fg^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})g^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2}(\bar{a})g^{m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-3}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-3, \bar{a}) \\ &\equiv 0 \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}. \end{aligned}$$

□

**Observación 4.14.** *Todo  $fg$ -camino-mezclado contiene un camino de la forma  $fg(a)g(a)a$  o  $gf(a)f(a)a$  para alguna flecha  $a \in Q_1(\tau)$ , Observación 3.33. Por lo tanto cualquier  $fg$ -camino-mezclado es congruente con 0 módulo el ideal Jacobiano  $J(S(\tau, \lambda, m))$ . Así, los caminos que son distintos de 0 módulo  $J(S(\tau, \lambda, m))$  son algunos  $f$ -caminos, o algunos  $g$ -caminos.*

El siguiente Lema generaliza el Lema 4.1, presentado por S. Ladkani para el caso del potencial  $S(\tau, \lambda, (1)_{\omega \in \Omega})$ .

**Lema 4.15.** *Para toda flecha  $a \in Q_1(\tau)$ :*

1. Si  $r \in \mathbb{Z}^{\geq 4}$ , entonces el  $f$ -camino  $F(r, a) \equiv 0 \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ .
2. Si  $t \in \mathbb{Z}^{\geq m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}}$ , entonces el  $g$ -camino  $G(t, a) \equiv 0 \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}$ .

*Demostración.*

1. El  $f$ -camino  $F(r, a)$  es igual a  $F(r-4, f^4(a))f^3(a)\mathcal{F}(a)$ . Por la Proposición 4.10,

$$F(4, a) \equiv -\lambda_{\bar{a}}m_{\bar{a}}F(r-4, f^4(a))f^3(a)G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}, \bar{a}) \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}. \quad (4.11)$$

Notemos que el producto  $F(r-4, f^4(a))f^3(a)G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}, \bar{a}, \bar{a})$  es igual a la composición  $F(r-4, f^5(a))ag^{-1}(\bar{a})g^{-2}(\bar{a})G(m_{\bar{a}}n_{\bar{a}}-2, \bar{a})$ , y recordemos también que  $g^{-1}(\bar{a}) = f^{-1}(a)$ . Utilizando el Lema 4.13 tenemos que

$$F(4, a) \equiv 0 \pmod{J(S(\tau, \lambda, m))}. \quad (4.12)$$

2. De manera similar al inciso anterior, si  $t \in \mathbb{Z}^{\geq m_a n_a}$ , entonces

$$\begin{aligned} G(t, a) &\equiv -\frac{1}{\lambda_a} G(t - m_a n_a - 1) a f^2(a) f(a) a \\ &\equiv 0 \pmod{(J(S(\tau, \lambda, m)))}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

□

La operación que manda cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  en  $\bar{a} \in Q_1$  es una involución. Sea  $\Theta \subset Q_1(\tau)$  un conjunto de flechas representantes de las órbitas producidas por esta operación (cada una de tamaño 2).

El siguiente teorema generaliza la Proposición 4.2 de [13], al describir una base del álgebra Jacobiana asociada al QP  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  en lugar de una base para el álgebra Jacobiana asociada al QP  $(Q(\tau), S(\tau, x))$ .

**Teorema 4.16.** *Sea  $\tau$  una triangulación de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con frontera vacía, que cumple la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ . Si el carcaj con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  satisface la propiedad  $(\mathcal{N}4)$ , entonces  $\mathcal{B} + J(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  es una base (como espacio vectorial) del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$ , donde  $\mathcal{B}$  está dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = &\{e_i | i \in Q_0(\tau)\} \cup \{G(r, a) | a \in Q_1(\tau), \text{ y } 1 \leq r, r < m_a n_a\} \\ &\cup \{G(m_\theta n_\theta, \theta) | \theta \in \Theta\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Cualquier  $fg$ -camino-mezclado es congruente con 0 módulo el ideal Jacobiano  $J(S(\tau, \lambda, m))$  (Observación 4.14); todo  $f$ -camino de longitud mayor a 3 es congruente a 0 módulo  $J(S(\tau, \lambda, m))$  (Lema 4.15); los  $f$ -caminos de longitud 3 y 2 son congruentes a algún  $g$ -camino (Lema 4.9 y Proposición 4.10); un  $f$ -camino de longitud uno es un  $g$ -camino de longitud uno. Por lo tanto, el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  es generada (como espacio vectorial) por los  $g$ -caminos y los idempotentes del álgebra completa de caminos.

Cada idempotente  $e \in R$  es ajeno (respecto a la base de caminos) de los elementos de  $J(S(\tau, \lambda, m))$ , ya que cada derivada cíclica tiene longitud al menos dos (los ciclos involucrados en  $S(\tau, \lambda, m)$  tienen longitud al menos tres).

Sea  $I(S(\tau, \lambda, m))$  el subespacio vectorial

$$I(S(\tau, \lambda, m)) = \left\langle \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1(\tau)^d \right) \{ \partial_a(S) | a \in Q_1(\tau) \} \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1(\tau)^d \right) \right\rangle.$$

Recordemos que  $J(S(\tau, \lambda, m))$  es igual a la cerradura  $\overline{I(S(\tau, \lambda, m))}$  (Observación 1.18).

Para demostrar que  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente analizaremos los elementos de  $I(S(\tau, \lambda, m))$  que involucran al menos un  $g$ -camino de longitud a lo más  $m_a n_a$  con respecto a  $a$  para alguna flecha  $a \in Q_1(\tau)$  (los  $g$ -caminos de longitud mayor se encuentran en el ideal  $J(S(\tau, \lambda, m))$ ), Lema 4.15).

Dada una flecha  $a \in Q_1(\tau)$ , sean  $x, y \in \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1^d$  (la base de caminos) tales que  $x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y \neq 0 \in R\langle\langle A \rangle\rangle$ . El producto  $x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y$  es igual a  $xf^2(a)f(a)y + \lambda_a m_a xG(m_a n_a - 1, g(a))y$ . La composición  $xf^2(a)f(a)y$  es un  $fg$ -camino-mezclado o un  $f$ -camino. Si  $xG(m_a n_a - 1, g(a))y$  es un  $g$ -camino con respecto a alguna flecha  $b \in Q_1(\tau)$ , es decir  $xG(m_a n_a - 1, g(a))y = G(r, b)$ , entonces  $b$  está en la misma  $g$ -órbita que  $a$ , y  $m_b = m_a$ ,  $n_b = n_a$ ; de esta manera  $xG(m_a n_a - 1, g(a))y = G(r, b)$  es de longitud a lo más  $m_b n_b$  si y sólo si  $\text{longitud}(x) + \text{longitud}(y) \leq 1$ . Hay sólo cuatro casos en los que  $\text{longitud}(x) + \text{longitud}(y) \leq 1$  y  $x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y \neq 0 \in R\langle\langle A \rangle\rangle$ :

1.  $x = h(g^{m_a n_a - 1}(a))$  y  $y = t(g(a))$ .

En este caso  $x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y = f^2(a)f(a) + \lambda_a m_a G(m_a n_a - 1, g(a))$ . Obtengamos el  $f$ -camino de longitud dos con respecto a  $f(a)$  más un múltiplo escalar del  $g$ -camino de longitud  $m_a n_a - 1$  asociado a  $g(a)$ .

2.  $x = h(g^{m_a n_a - 1}(a))$  y  $y = a$ .

En este caso

$$\begin{aligned} x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y &= f^2(a)f(a)a + \lambda_a m_a G(m_a n_a - 1, g(a))a \\ &= \mathcal{F}(a) + \lambda_a (\mathcal{G}(a))^{m_a}. \end{aligned}$$

Obtenemos el  $f$ -ciclo con respecto a a la flecha  $a$  más un múltiplo escalar de la potencia  $m_a$  del  $g$ -ciclo asociado a  $a$ .

3.  $x = h(g^{m_a n_a - 1}(a))$  y  $y = f^{-1}g(a)$ .

En este caso

$$x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y = f^2(a)f(a)g^{-1}f(a) + \lambda_a m_a G(m_a n_a - 1, g(a))f^{-1}g(a),$$

ya que  $f^{-1}g(a) = g^{-1}f(a)$ . Ambos caminos son  $fg$ -camino-mezclados.

4.  $x = g^{m_a n_a}(a)$  y  $y = t(g(a))$ .

En este caso  $x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y = af^2(a)f(a) + \lambda_a m_a g^{m_a n_a}(a)G(m_a n_a - 1, g(a))$ , debido a que  $g^{m_a n_a}(a) = a$ . Así,

$$x\partial_a(S(\tau, \lambda, m))y = \mathcal{F}(f(a)) + \lambda_a \mathcal{G}(g(a)).$$

Recordemos que  $g(a) = \overline{f(a)}$  (Lema 3.26). De esta forma obtenemos un  $f$ -ciclo más un múltiplo escalar de una potencia de un  $g$ -ciclo, ambos asociados a dos flechas que inician en el mismo vértice.

5.  $x = fg^{m_a n_a - 1}(a)$  y  $y = t(g(a))$ . En este caso

$$x \partial_a(S(\tau, \lambda, m)) = g f^2(a) f^2(a) f(a) + \lambda_a m_a f g^{m_a n_a - 1}(a) G(m_a n_a - 1, g(a)).$$

Ambos caminos son  $fg$ -caminos-mezclados.

Para cada  $z \in I(S(\tau, \lambda, m))$  y cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  tenemos lo siguiente:

1. Los  $g$ -caminos de longitud menor a  $m_a n_a - 1$  asociados a  $a$  no son involucrados en  $z$ .
2. Si escribimos  $z = \mu_{z,a} G(m_a n_a - 1, a) + z'$  donde  $\mu_{z,a}$  es un escalar (que puede ser cero) y  $z'$  no es un múltiplo escalar de  $G(m_a n_a - 1, a)$ , entonces

$$z' = \frac{\mu_{z,a}}{\lambda_{g^{-1}(a)} m_{g^{-1}(a)}} f^2 g^{-1}(a) f g^{-1}(a) + z''$$

con  $z''$  disntinto de un múltiplo escalar de  $f^2 g^{-1}(a) f g^{-1}(a)$ .

3. Si escribimos  $z = \kappa_{z,a} (\mathcal{G}(a))^{m_a} + \kappa_{z,\bar{a}} (\mathcal{G}(\bar{a}))^{m_{\bar{a}}} + z'''$ , donde  $\kappa_{z,a}$  y  $\kappa_{z,\bar{a}}$  son escalares y  $z'''$  no involucra a  $(\mathcal{G}(a))^{m_a}$  o  $(\mathcal{G}(\bar{a}))^{m_{\bar{a}}}$ , entonces  $z''' = \iota_{z,a} \mathcal{F}(a) + \iota_{z,\bar{a}} \mathcal{F}(\bar{a}) + z''''$  tal que  $z''''$  no involucra a  $\mathcal{F}(a)$  o  $\mathcal{F}(\bar{a})$ , y  $\iota_{z,a} + \iota_{z,\bar{a}} = \frac{\kappa_{z,a}}{\lambda_a m_a} + \frac{\kappa_{z,\bar{a}}}{\lambda_{\bar{a}} m_{\bar{a}}}$ .

Estas tres afirmaciones se obtienen ya que  $z \in I(S(\tau, \lambda, m))$ ,  $z = \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \cdots + \zeta_t z_t$  para algunos escalares  $\zeta_1, \dots, \zeta_t$  y algunos elementos

$$z_1, \dots, z_t \in \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1(\tau)^d \right) \{ \partial_a(S) \mid a \in Q_1(\tau) \} \left( \bigsqcup_{d=0}^{\infty} Q_1(\tau)^d \right),$$

y las afirmaciones se cumplen para cada  $z_i$   $i \in \{1, \dots, t\}$ .

El ideal  $J(S(\tau, \lambda, m))$  es la cerradura de  $I(S(\tau, \lambda, m))$  en  $R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , por lo tanto  $w \in J(S(\tau, \lambda, m))$  si y sólo si existe una sucesión  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $w + z_i \in I(S(\tau, \lambda, m))$  y  $\text{short}(w_i) > i$ , es decir, tal que  $w = \lim_{i \rightarrow \infty} (w + z_i)$ . Si

$$\sum_{e \in Q_0(\tau)} \mu_e e + \sum_{a \in Q_1(\tau)} \sum_{r=1}^{m_a n_a - 1} \nu_{r,a} G(r, a) + \sum_{\theta \in \Theta} \nu_{\theta} G(m_{\theta} n_{\theta}, \theta) \in J(S(\tau, \lambda, m)),$$

entonces existe  $z$  tal que  $\text{short}(z) > \max\{m_a n_a \mid a \in Q_1(\tau)\}$ , en particular  $z$  es ajeno (respecto a la base de caminos) de los elementos de  $\mathcal{B}$ , y

$$\sum_{e \in Q_0(\tau)} \mu_e e + \sum_{a \in Q_1(\tau)} \sum_{r=1}^{m_a n_a - 1} \nu_{r,a} G(r, a) + \sum_{\theta \in \Theta} \nu_{\theta} G(m_{\theta} n_{\theta}, \theta) + z \in I(S(\tau, \lambda, m)).$$

Así, para cada  $e \in Q_0(\tau)$  el escalar  $\mu_v$  es igual a 0. El camino  $z$  es de longitud mayor a 2, y por tanto ajeno (respecto a la base de caminos) de cualquier camino de la forma  $f(a)a$  para toda  $a \in Q_1(\tau)$ , entonces  $v_{r,a} = 0$  para toda  $a \in Q_1(\tau)$  y cualquier  $r \in \{1, \dots, m_a n_a - 1\}$ . Finalmente,  $z$  es ajeno (respecto a la base de caminos) de los elementos de  $\mathcal{B}$ , y por tanto de  $(\mathcal{G}(\bar{\theta})^{m_{\bar{\theta}}})$  para toda  $\theta \in \Theta$ , también es ajeno de  $\mathcal{F}(\theta)$  y  $\mathcal{F}(\bar{\theta})$ , por lo que  $v_\theta = 0$  para toda  $\theta \in \Theta$ .

Concluimos entonces que  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente en  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  y por tanto,  $\mathcal{B}$  es una base. □

Del teorema anterior se concluye que el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  es de dimensión finita. Más aun, es posible calcular explícitamente el valor de su dimensión. El conjunto de vértices del carcaj  $Q_0(\tau)$  está en biyección con el conjunto de arcos de la triangulación  $\tau$ , cuyo cardinal está dado por la formula (3.1). Mientras que el conjunto  $\Theta$  contiene a la mitad de los arcos en  $Q_1(\tau)$ . El QP  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  satisface la Propiedad ( $\mathcal{N}4$ ), por lo que la cantidad de flechas en  $Q_1(\tau)$  es el doble de la cantidad arcos en  $\tau$ . Así, el cardinal de  $\theta$  es exactamente la cantidad de arcos en  $\tau$ .

La dimensión del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  está dada por la siguiente formula:

$$\sum_{\omega \in \Omega} n_\omega (n_\omega m_\omega - 1) + 2n, \quad (4.14)$$

donde  $n$  es la cantidad de arcos de la triangulación  $\tau$  (cf. (3.1)).



# Capítulo 5

## Carcajes con Potencial no degenerados asociados a triangulaciones de superficies

En [6] C. Geiss, D. Labardini y J. Schröer estudiaron los carcajes con potencial no degenerados asociados a triangulaciones de superficies, y demostraron que para la mayor parte de las triangulaciones existe sólo un QP no degenerado salvo equivalencia débil a derecha (Teorema 5.6), a saber, el QP  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  estudiado en el capítulo anterior. En este capítulo se presenta la conjetura que motivo la realización de esta tesis (cf. Conjetura 5.7), así como algunas variantes de los resultados a partir de los cuales se obtuvo el Teorema 5.6, que permitieran concluir la veracidad de esta conjetura (cf. Teorema 5.32).

**Nota 5.1.** *Se trabajará sobre el campo complejo ( $K = \mathbb{C}$ ), y se denotará al álgebra completa de caminos asociada a una triangulación ideal  $\tau$  de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  como  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ .*

Se hace uso del hecho de trabajar sobre el campo complejo (algebraicamente cerrado) en la demostración de los Lemas 5.9 y 5.39.

### 5.1. Preliminares

**Definición 5.2** ([3], Definición 8.8). *Dados un carcaj con potencial  $(A, S)$  y un subconjunto de vértices  $I \subseteq Q_0$ , definimos la restricción de  $(A, S)$  a  $I$  como el QP  $(A|_I, S|_I)$  dado por*

$$A|_I = \bigoplus_{i,j \in I} A_{i,j}, \quad (5.1)$$

y

$$S|_I = \Psi_I(S), \quad (5.2)$$

donde  $\Psi_I : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A|_I \rangle\rangle$  es el homomorfismo de álgebras tal que  $\Psi_I(a) = a$  para toda flecha  $a \in A|_I$ , y  $\Psi_I(b) = 0$  para toda flecha  $b \notin A|_I$ .

La restricción del QP  $(A, S)$  al conjunto de vértices  $I$ , es la pareja formada por el carcaj cuyo conjunto de vértices es  $I$  y el conjunto de flechas son las flechas de  $A$  que van entre los vértices de  $I$ , y el potencial obtenido al eliminar de  $S$  los ciclos que pasen por al menos un vértice que no está en  $I$ .

**Proposición 5.3** ([6], Proposición 2.3). *Sean  $(Q, S)$  un carcaj con potencial no degenerado e  $I \subseteq Q_0$ . El QP  $(Q|_I, S|_I)$  es no degenerado.*

Del resultado anterior obtenemos la Proposición 5.4.

**Proposición 5.4** ([6], Proposición 2.4). *Sean  $(Q, S)$  un carcaj con potencial no degenerado, e  $I \subseteq Q_0$  un subconjunto de vértices tal que:*

1.  $Q|_I$  contiene exactamente  $r$  flechas  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ;
2. el producto  $c := a_1 a_2 \cdots a_r$  es un ciclo en  $Q$ ;
3. los vértices  $t(a_1), t(a_2), \dots, t(a_r)$  son todos distintos;

entonces el potencial  $S$  involucra al ciclo  $c$ .

**Corolario 5.5** ([6], Corolario 2.5). *Sea  $(Q, S)$  un QP no degenerado. Dadas tres flechas  $a, b, c$  en  $Q$  que forman un 3-ciclo  $cba$ , y tales que no hay flechas múltiples entre los vértices  $t(c)$ ,  $t(b)$  y  $t(a)$ , el potencial  $S$  involucra al ciclo  $cba$ .*

**Teorema 5.6** ([6], Teorema 8.4). *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados y frontera vacía tal que<sup>1</sup>*

$$|\mathbb{M}| \geq \begin{cases} 6 & \text{si } \Sigma \text{ es una esfera,} \\ 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Para cualquier triangulación etiquetada  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , el carcaj  $Q(\tau)$  admite sólo un potencial no degenerado salvo equivalencia débil a derecha.*

En [6] se presenta la siguiente conjetura:

**Conjetura 5.7** ([6]). *Toda superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  y frontera vacía, con género  $(\Sigma) \geq 1$  y dos punciones ( $|\mathbb{M}| = 2$ ), admite sólo un potencial no degenerado salvo equivalencia débil a derecha.*

<sup>1</sup>Este resultado es válido para la esfera con 5 puntos marcados (cf. [6] Proposición 8.13), sin embargo, la demostración para este caso es distinta.

En [6] C. Geiss, D. Labardini y J. Schröer demostraron que para el caso de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con frontera vacía y sólo una punción (es decir,  $|\mathbb{M}| = 1$ ), existen al menos dos QP no degenerados y no equivalentes débilmente a derecha. También probaron un teorema similar al Teorema 5.6 para el caso de superficies con frontera no vacía, este teorema se presenta a continuación.

**Teorema 5.8** ([6], Teorema 8.20). *Supóngase que  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es una superficie marcada con frontera no vacía, y  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es distinta de un toro con una punción ( $|\mathbb{M}| = 1$ ). Para toda triangulación etiquetada  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  el carcaj  $Q(\tau)$  admite sólo un potencial no degenerado salvo equivalencia débil a derecha.*

A continuación se presenta la estrategia que Geiss-Labardini-Schröer siguen en [6] para probar el Teorema 5.6.

**Lema 5.9** ([6], Lema 8.5). *Supongamos que  $\tau$  es una triangulación ideal de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con puntos marcados y frontera vacía distinta de una esfera con  $|\mathbb{M}| = 4, 5$ . Dadas dos colecciones de escalares distintos de cero  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  y  $\mathbf{y} = (y_p)_{p \in \mathbb{P}}$ , los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{y}))$  son equivalentes débilmente a derecha.*

Por el lema anterior, para demostrar el Teorema 5.6 basta con demostrar que todo carcaj con potencial no degenerado es equivalente derecho a un QP de la forma  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$ . Recuérdese que todo QP de la forma  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  es no degenerado (cf. Corolario 4.7).

Un carcaj con potencial es no degenerado si y sólo si el carcaj con potencial obtenido al mutar respecto a cualquier vértice del carcaj es no degenerado. Dos potenciales sobre el mismo carcaj son equivalentes a derecha si y sólo si las mutaciones respecto de cada uno de ellos respecto a un mismo vértice son equivalentes a derecha. La mutación a nivel de carcajes es compatible con la operación de reemplazo a nivel de triangulaciones (cf. Teorema 4.6). Todas las triangulaciones de una superficie están relacionadas mediante una secuencia de reemplazos. Así, podemos trabajar con triangulaciones que cumplen algunas características especiales.

**Lema 5.10** ([6], Lema 8.11). *Dada una superficie con puntos marcados y frontera vacía  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , si*

$$|\mathbb{M}| \geq \begin{cases} 6 & \text{si } \Sigma \text{ es una esfera,} \\ 3 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

*entonces, existe una triangulación  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las siguientes tres propiedades:*

$$\text{la valencia de cada punción es al menos cuatro,} \quad (5.3)$$

$$Q(\tau) \text{ no tiene flechas dobles, y} \quad (5.4)$$

ninguno de los arcos en  $\tau$  es un lazo. (5.5)

Estas propiedades jugarán un papel importante más adelante.

**Observación 5.11.** Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados y frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Si  $|\mathbb{M}| = 1$ , entonces todo arco en  $\tau$  es un lazo ya que sus puntos extremos son la única punción en  $\mathbb{M}$ . Mientras que si  $|\mathbb{M}| = 2$ , entonces para cada triángulo al menos uno de los arcos que forman la frontera de dicho triángulo es un lazo; y así los arcos en  $\tau$  que son lazos son al menos la tercera parte de todos los arcos (esta cota es justa). De esta manera, para toda superficie con puntos marcados y frontera vacía  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , si  $|\mathbb{M}| \leq 2$ , entonces no existe una triangulación que satisfaga la propiedad (5.5).

**Observación 5.12.** Analicemos las implicaciones de las tres propiedades mencionadas en el Lema 5.10 (supondremos que  $\tau$  cumple  $(\mathcal{T}3)$ ).

**Propiedad (5.3):** Si la valencia de cada punción es al menos cuatro (en particular  $\tau$  cumple la propiedad  $(\mathcal{T}3)$ ), todo g-ciclo tiene longitud al menos cuatro.

**Propiedad (5.4):** Nos da dos resultados importantes:

- Recordemos que entre cualesquiera dos vértices del carcaj  $Q(\tau)$  hay a lo más dos flechas. Si en  $Q(\tau)$  no hay flechas dobles (y suponiendo que  $\tau$  satisface  $(\mathcal{T}3)$ ), entonces al aplicar el Corolario 5.5 en cualesquiera tres vértices del carcaj que representan los arcos de un mismo triángulo, se sigue que todo potencial  $S$  tal que el  $QP(Q(\tau), S)$  es no degenerado, involucra a todos los f-ciclos. Más aun,  $(Q(\tau), S)$  es equivalente a derecha a  $(Q(\tau), T(\tau) + S')$ , donde

$$T(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}(\gamma), \quad (5.6)$$

y el potencial  $S'$  es rotacionalmente disjunto de  $T(\tau)$ .

- Todo fg-ciclo-mezclado es de la forma  $f(a)ag^{-1}(a)c$  para alguna flecha  $a \in Q(\tau)$  y algún camino  $c$  (cf. Observación 3.31). La flecha  $f^2(a) \in Q(\tau)$  es la única flecha que inicia en  $h(g(a))$  y termina en  $t(a)$ , y  $f^2(a) \neq g^{-1}(a)$ , por lo que el camino  $c$  es de longitud positiva. Así, todo fg-ciclo-mezclado es de longitud al menos cuatro.

**Propiedad (5.5):** Para cada punción  $p \in \mathbb{P}$  sea  $I_p \subseteq Q_0(\tau)$  el conjunto de arcos incidentes a  $p$  (de cardinalidad  $\text{val}_\tau(p)$ ). Al tomar la restricción de  $Q(\tau)$  a  $I_p$  se satisface que para cada uno los vértices hay exactamente una flecha que inicia y exactamente una que termina en éste. Además las flechas en la restricción de  $Q(\tau)|_{I_p}$  forman un ciclo (el g-ciclo que rodea la punción  $p$ ). Por lo que:

- Aplicando la Proposición 5.4 al conjunto  $I_p$  obtenemos que si un potencial  $S$  es no degenerado sobre el carcaj  $Q(\tau)$ , entonces el  $QP(Q(\tau), S)$  es equivalente a derecha al  $QP(Q(\tau), P(\tau, \mathbf{x}) + S')$ , donde

$$P(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{|\mathbb{P}|} x_i \mathcal{G}(\omega_i) \quad (5.7)$$

para alguna colección de escalares  $(x_i)_{i=1}^{|\mathbb{P}|}$  distintos de cero, y un potencial  $S'$  rotacionalmente disjunto de  $P(\tau, \mathbf{x})$ .

- Un  $g$ -camino es un ciclo si y sólo si es una potencia de un  $g$ -ciclo. De esta afirmación se sigue que todo  $fg$ -ciclo mezclado es un ciclo de tipo rotacional III (cf. Lema 5.14).

Para una triangulación  $\tau$  que cumple  $(\mathcal{T}3)$ , el potencial  $S(\tau, \mathbf{x})$  es igual a

$$S(\tau, \mathbf{x}) = T(\tau) + P(\tau, \mathbf{x}). \quad (5.8)$$

**Observación 5.13.** Dada una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  y frontera vacía, si  $\tau$  es una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades  $(\mathcal{T}3)$  y (5.5), entonces  $\tau$  satisface la propiedad (5.4). En efecto, supongamos que  $\tau$  es una triangulación de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  en la cual existen dos flechas que van del vértice  $j$  al vértice  $i$ . Los arcos correspondientes a los vértices  $i, j \in Q_0(\tau)$  pertenecen ambos a una pareja de triángulos determinados por  $\tau$ ; la figura 5.1 representa estos dos triángulos unidos por el arco correspondiente al vértice  $i$ .

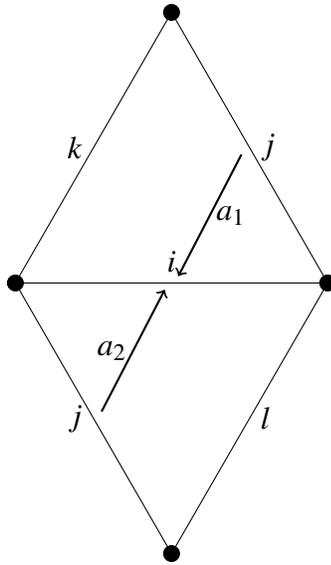


Figura 5.1: Existe sólo una forma de identificar al arco correspondiente al vértice  $j$ .

La superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es orientable, por lo que existe sólo una forma de identificar al arco correspondiente al vértice  $j$ . Así, los arcos  $k$  y  $l$  son lazos.

**Lema 5.14** ([6], Lema 8.6). Si  $(\Sigma, \mathbb{M})$  es una superficie con puntos marcados y frontera vacía, y si  $\tau$  es una triangulación de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3), (5.4) y (5.5), entonces, todo ciclo en  $Q(\tau)$  que sea rotacionalmente disjunto de  $S(\tau, \mathbf{x})$  es rotacionalmente equivalente a uno de los siguiente tres tipos de ciclos:

**Ciclos de tipo rotacional I:** Potencias mayores a uno de  $f$ -ciclos.

**Ciclos de tipo rotacional II:** Potencias mayores a uno de  $g$ -ciclos.

**Ciclos de tipo rotacional III:** Ciclos de la forma  $f^2(\beta)f(\beta)\lambda f^2(\alpha)f(\alpha)\rho$  para algunas flechas  $\alpha, \beta \in Q_1(\tau)$ , y algunos caminos  $\lambda, \rho$  tales que  $\lambda = g^{-1}f(\beta)\lambda'$  para algún camino  $\lambda'$ , o  $\rho = \rho'gf^2(b)$  para algún camino  $\rho'$ .

**Observación 5.15.**

- a) Si  $c \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  un  $fg$ -camino-mezclado, entonces, para cualesquiera dos caminos  $w, z \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  el producto  $wcz$  es un  $fg$ -camino-mezclado.
- b) Todo ciclo de tipo rotacional III es rotacionalmente equivalente a un ciclo de la forma  $f^2(a)f(a)v_a$  para alguna flecha  $a \in Q_1(\tau)$  y algún  $fg$ -camino-mezclado  $v_a$ . En efecto, si  $c \sim_{\text{cyc}} f^2(\beta)f(\beta)\lambda f^2(\alpha)f(\alpha)\rho$  (cf. Lema 5.14), tomando  $a = \alpha$  y  $v_a = \rho f^2(\beta)f(\beta)\lambda$  se verifica que  $c \sim_{\text{cyc}} f^2(a)f(a)v_a$ . Nótese además que un ciclo de tipo rotacional III tiene longitud al menos cinco.

**Lema 5.16** ([6], Lema 8.12). Dada una superficie con puntos marcados y frontera vacía  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , sea  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3), (5.4) y (5.5). Todo potencial  $S$  no degenerado en  $Q(\tau)$  es equivalente a derecha a un potencial de la forma

$$S(\tau, \mathbf{x}) + S',$$

donde  $S'$  es un potencial rotacionalmente disjunto de  $S(\tau, \mathbf{x})$ .

El Lema 5.16 es consecuencia de la Observación 5.12 y la ecuación (5.8).

Ahora daremos una tercía de lemas que nos permitirán afirmar que después de aplicar una secuencia de automorfismos del álgebra completa de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , el término  $S'$  mencionado en el Lema 5.16, dejará de aparecer.

**Lema 5.17** ([6], Lema 8.7). Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que cumple las propiedades (5.3), (5.4), y (5.5). Si  $S' \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es un potencial rotacionalmente disjunto de  $S(\tau, \mathbf{x})$ , entonces el  $QP(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + S')$  es equivalente a derecha a  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + W)$  para algún potencial  $W \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que involucra sólo ciclos de los tipos I y III.

*Demostración.* Podemos escribir al potencial  $S'$  como  $S' = S'_I + S'_{II} + S'_{III}$ , donde  $S'_I$ ,  $S'_{II}$  y  $S'_{III}$  son potenciales de tipo rotacional  $I$ , tipo rotacional  $II$  y tipo rotacional  $III$ , respectivamente. El potencial  $S'_{II}$  es de la forma

$$S'_{II} = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{m=2}^{\infty} z_{\omega,m} (\mathcal{G}(\omega))^m.$$

Afirmación: Existen dos sucesiones de potenciales  $(S_n)_{n \geq 0}$  y  $(W_n)_{n \geq 0}$ , y una sucesión de automorfismos unitriangulares  $(\Psi_n)_{n \geq 1}$  que satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $S_0 = S'$ ;
2.  $W_0 = 0$ ;
3. y para cada  $n \geq 1$  cumplen:
  - a) el potencial  $W_n$  involucra sólo ciclos de tipo rotacional  $I$  y  $III$ ;
  - b)  $\text{short}(S_n) > \text{short}(S_{n-1})$ ;
  - c)  $\text{depth}(\Psi_n) = \text{short}(S_n) - \text{short}(S(\tau, x)) \geq \text{short}(S(\tau, x))$ ;
  - d) y  $\Psi_n$  es una equivalencia a derecha entre los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, x) + S_{n-1} + W_{n-1})$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + S_n + W_n)$ .

Demostraremos de manera recursiva esta afirmación.

*Demostración de la afirmación.* Para el caso base  $n = 1$ , definamos el automorfismo unitriangular  $\Psi_1 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  mediante la regla  $\Psi_1|_{Q_1(\tau) \setminus \Omega} = I_{Q_1(\tau) \setminus \Omega}$  y  $\Psi_1(\omega) = \omega - \omega \sum_{m=2}^{\infty} \frac{z_{\omega,m}}{x_{\omega}} (\mathcal{G}(\omega))^{m-1}$ . Al evaluar el automorfismo  $\Psi_1$  en  $S(\tau, x) + S_0 + W_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_1(S(\tau, x) + S_0 + W_0) &\sim_{\text{cyc}} S(\tau, x) + (\Psi_1(T(\tau)) - T(\tau)) - \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{m=2}^{\infty} z_{\omega,m} (\mathcal{G}(\omega))^m \\ &\quad + S_0 + W_0 + (\Psi_1(S_0) - S_0) + (\Psi_1(W_0) - W_0) \\ &= S(\tau, x) + (\Psi_1(T(\tau)) - T(\tau)) + (S_0)_I + (S_0)_{III} \\ &\quad + (\Psi_1(S_0) - S_0) + (\Psi_1(W_0) - W_0). \end{aligned}$$

Observemos que:

- $\text{depth}(\Psi_1) = \text{short}(S_0) - \text{short}(S(\tau, x)) \geq \text{short}(S(\tau, x))$ ;

- $(\Psi_1(T(\tau)) - T(\tau))$  involucra únicamente ciclos de tipo rotacional *I* y ciclos de tipo rotacional *III*. Esto se debe al hecho de que en  $(\Psi_1(T(\tau)) - T(\tau))$  hay flechas que giran alrededor de punciones distintas (en  $\tau$  no hay arcos que sean lazos, Propiedad (5.5)), por lo que no involucra ciclos de tipo rotacional *II*;
- $(\Psi(W_0) - W_0)$  no involucra ciclos de tipo rotacional *II*;
- y  $\text{short}(\Psi_1(S_0) - S_0) \geq \text{depth}(\Psi_1) + \text{short}(S_0) > \text{short}(S_0)$ .

Así, si consideremos  $S_1 = \Psi_1(S_0) - S_0$  y  $W_1 = \Psi_1(T(\tau)) - T(\tau) + (S_0)_I + (S_0)_{III} + \Psi_1(W_0) - W_0$ , entonces el automorfismo unitriangular  $\Psi_1$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, x) + S_0 + W_0)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + S_1 + W_1)$ , concluyendo la afirmación en el caso  $n = 1$ . De la misma manera podemos demostrar la afirmación en el caso general.  $\square$

De los incisos 3b) y 3c) de la afirmación se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{depth}(\Psi_n) = \infty$ . Por el Lema 1.28, el automorfismo unitriangular  $\Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n \Psi_{n-1} \cdots \Psi_1$  es una equivalencia a derecha entre  $(Q(\tau), S(\tau, x) + S_0 + W_0)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + W)$ , donde  $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$  involucra únicamente ciclos de tipo rotacional *I* y ciclos de tipo rotacional *III*.  $\square$

**Lema 5.18** ([6], Lema 8.8). *Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que cumple las propiedades (5.3), (5.4), y (5.5). Si  $W \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es un potencial que involucra sólo ciclos de los tipos *I* y *III*, entonces el QP  $(Q(\tau), S(\tau, x) + W)$  es equivalente a derecha a  $(Q(\tau), S(\tau, x) + U)$ , para algún potencial  $U \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que involucra sólo ciclos de tipo *III*.*

*Demostración.* Para la demostración de este lema haremos uso de la siguiente afirmación.

Afirmación: Existen dos sucesiones de potenciales  $(W_n)_{n \geq 0}$  y  $(U_n)_{n \geq 0}$ , y una sucesión de automorfismos unitriangulares  $(\Phi_n)_{n \geq 1}$  que satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $W_0 = W$  y  $U_0 = 0$ ;
2. y para cada  $n \geq 1$  se cumple que:
  - a) el automorfismo  $\Phi_n$  es una equivalencia a derecha entre los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, x) + W_{n-1} + U_{n-1})$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + W_{n-1} + U_{n-1})$ ;
  - b) el potencial  $U_n$  involucra sólo ciclos de tipo rotacional *III*;

- c)  $\text{short}(W_n) > \text{short}(W_{n-1})$ ;  
d) y  $\text{depth}(\Phi_n) \geq \text{short}(W_{n-1}) - 3 > 0$ ;

*Demostración de la afirmación.* Demostramos de manera recursiva esta afirmación. Supongamos que tenemos un potencial  $U_{n-1}$  que sólo involucra ciclos de tipo rotacional *III* y un potencial  $W_{n-1}$  rotacionalmente disjunto de  $S(\tau, \mathbf{x})$  que no involucra ciclos de tipo rotacional *II*. Podemos escribir a  $W_{n-1} = (W_{n-1})_I + (W_{n-1})_{III}$ , donde la parte de tipo rotacional *I* es de la forma

$$(W_{n-1})_I \sim_{\text{cyc}} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} y_{\gamma, m} (\mathcal{F}(\gamma))^m.$$

Definamos el automorfismo unitriangular  $\Phi_n : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  mediante la regla  $\Phi_n|_{Q_1(\tau) \setminus \Gamma} = I_{Q_1(\tau) \setminus \Gamma}$  y  $\Phi_n(\gamma) = \gamma - \gamma \sum_{m=2}^{\infty} y_{\gamma, m} (\mathcal{F}(\gamma))^{m-1}$ . El potencial  $\Phi_n(S(\tau, \mathbf{x}) + W_{n-1} + U_{n-1})$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} & S(\tau, \mathbf{x}) - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} y_{\gamma, m} (\mathcal{F}(\gamma))^m + (\Phi_n(P(\tau, \mathbf{x})) - P(\tau, \mathbf{x})) + W_{n-1} \\ & + (\Phi_n(W_{n-1}) - W_{n-1}) + \Phi_n(U_{n-1}) \\ = & S(\tau, \mathbf{x}) + (\Phi_n(P(\tau, \mathbf{x})) - P(\tau, \mathbf{x})) + (W_{n-1})_{III} + (\Phi_n(W_{n-1}) - W_{n-1}) + \Phi_n(U_{n-1}). \end{aligned}$$

Observemos que

- $\text{depth}(\Phi_n) = \text{short}((W_{n-1})_I) - 3$ ;
- $(\Phi_n(P(\tau, \mathbf{x})) - P(\tau, \mathbf{x}))$  involucra únicamente ciclos de tipo rotacional *III*;
- $\text{short}(\Phi_n(W_{n-1}) - W_{n-1}) \geq \text{depth}(\Phi_n) + \text{short}(W_{n-1}) > \text{short}(W_{n-1})$ ;
- y  $\Phi_n(U_{n-1})$  involucra sólo ciclos de tipo rotacional *III*.

De esta manera, el automorfismo  $\Phi_n$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + W_{n-1} + U_{n-1})$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + W_n + U_n)$ , donde  $W_n = \Phi_n(W_{n-1}) - W_{n-1}$  y  $U_n = (\Phi_n(P(\tau, \mathbf{x})) - P(\tau, \mathbf{x})) + (W_{n-1})_{III} + \Phi_n(U_{n-1})$ . Nótese que  $U_n$  y  $W_n$  cumplen las condiciones de la afirmación, quedando así demostrada.  $\square$

Por el Lema 1.28, el automorfismo unitriangular  $\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n \Phi_{n-1} \cdots \Phi_1$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + W_0 + U_0)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + U)$ , donde  $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$  es un potencial que involucra únicamente ciclos de tipo rotacional *III* ( $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$ ).  $\square$

**Lema 5.19** ([6], Lema 8.9). Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que cumple las propiedades (5.3), (5.4), y (5.5). Si  $U \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es un potencial que involucra sólo ciclos de tipo III, entonces el  $QP(Q(\tau), S(\tau, x)) + U$  es equivalente a derecha a  $(Q(\tau), S(\tau, x))$ .

*Demostración.* El potencial  $U$  involucra sólo ciclos de tipo rotacional III, por lo que es de la forma

$$U = \sum_{a \in Q_1(\tau)} f^2(a)f(a)\bar{\omega}_a, \quad (5.9)$$

donde  $\bar{\omega}_a$  es una suma (posiblemente infinita) de  $fg$ -ciclos-mezclados (cf. Observación 5.15). Denotemos por  $U_0$  al potencial  $U$ .

**Afirmación:** Existen una sucesión de potenciales  $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}^{>0}}$  que sólo involucran ciclos de tipo rotacional III y una sucesión de automorfismos unitriangulares  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}^{>0}}$  del álgebra completa de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , tales que  $\varphi_n(S(\tau, x) + U_n)$  es cíclicamente equivalente a  $S(\tau, x) + U_{n+1}$ ,  $\text{short}(U_{n+1}) > \text{short}(U_n)$ , y  $\text{depth}(\varphi_n) = \text{short}(U_n) - 3$ .

Podemos demostrar esta afirmación recursivamente.

*Demostración de la afirmación.* Para el caso base,

$$U_0 = \sum_{a \in Q_1(\tau)} f^2(a)f(a)\bar{\omega}_a,$$

definimos el automorfismo unitriangular  $\varphi_0 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  satisface  $\varphi_0(a) = a - \bar{\omega}_a$ ; este automorfismo tiene profundidad  $\text{short}(U_0) - 3$ . Recordemos que  $S(\tau, x) = T(\tau) + P(\tau, x)$ . Al evaluar el automorfismo  $\varphi_0$  en  $S(\tau, x) + U_0$ , obtenemos

$$\varphi_0(S(\tau, x) + U_0) = T(\tau) + P(\tau, x) + U_0 + (\varphi_0 T(\tau)) - T(\tau) \quad (5.10)$$

$$+ (\varphi_0(P(\tau, x)) - P(\tau, x)) + (\varphi_0(U_0) - U_0). \quad (5.11)$$

Todo los ciclos que aparecen en  $(\varphi_0(P(\tau, x)) - P(\tau, x)) + (\varphi_0(U_0) - U_0)$  son de tipo rotacional III, ya que son productos de algún  $fg$ -camino-mezclado  $\bar{\omega}_a$  por algunos otros caminos, y al cumplir  $\tau$  la propiedad (5.5) todo  $fg$ -ciclo-mezclado es un ciclo de tipo rotacional III. Además,  $\text{short}(\varphi_0(P(\tau, x) + U_0) - (P(\tau, x) + U_0)) \geq \text{depth}(\varphi_0) + \text{short}(P(\tau, x) + U_0) \geq \text{short}(U_0) - 3 + 5 > \text{short}(U_0)$ , y  $\varphi_0(T(\tau))$  es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma) - \bar{\omega}_{f^2(\gamma)})(f(\gamma) - \bar{\omega}_{f(\gamma)})(\gamma - \bar{\omega}_\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} f^2(\gamma)f(\gamma)\gamma - \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma)f(\gamma)\bar{\omega}_\gamma + f^2(\gamma)\bar{\omega}_{f(\gamma)}\gamma + \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}f(\gamma)\bar{\omega}_\gamma) \\ & \quad + \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma)\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma + \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\gamma + \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}f(\gamma)\bar{\omega}_\gamma - \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \varphi_0(T(\tau)) &\sim_{\text{cyc}} T(\tau) + U_0 \\ &+ \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma) \overline{\omega}_{f(\gamma)} \overline{\omega}_\gamma + \overline{\omega}_{f^2(\gamma)} \overline{\omega}_{f(\gamma)} \gamma + \overline{\omega}_{f^2(\gamma)} f(\gamma) \overline{\omega}_\gamma - \overline{\omega}_{f^2(\gamma)} \overline{\omega}_{f(\gamma)} \overline{\omega}_\gamma). \end{aligned}$$

Todos los los ciclos en  $\varphi_0(T(\tau)) - T(\tau) - U_0$  son rotacionalmente equivalentes a ciclos de tipo rotacional III, de longitud al menos  $2(\text{short}(U_0) - 2) + 1 \geq \text{short}(U_0) - 2 + 3 + 1 > \text{short}(U_0)$ . Tomando

$$\begin{aligned} U_1 &= (\varphi_0(P(\tau, \mathbf{x})) - P(\tau, \mathbf{x})) + (\varphi_0(U_0) - U_0) \\ &+ \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma) \overline{\omega}_{f(\gamma)} \overline{\omega}_\gamma + \overline{\omega}_{f^2(\gamma)} \overline{\omega}_{f(\gamma)} \gamma + \overline{\omega}_{f^2(\gamma)} f(\gamma) \overline{\omega}_\gamma - \overline{\omega}_{f^2(\gamma)} \overline{\omega}_{f(\gamma)} \overline{\omega}_\gamma), \end{aligned}$$

tenemos la afirmación en el caso base. El paso recursivo de la afirmación se muestra de manera similar.  $\square$

De la afirmación anterior y del Lema 1.28 se sigue que el automorfismo  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_0$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + U)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$ .  $\square$

Combinando los Lemas 5.17, 5.18 y 5.19 obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 5.20** ([6], Proposición 8.10). *Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que cumple las propiedades (5.3), (5.4), y (5.5). Para cualquier potencial  $S' \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  rotacionalmente disjunto de  $S(\tau, \mathbf{x})$ , se satisface que los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + S')$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  son equivalentes a derecha.*

Al combinar los Lemas 5.9, 5.10, 5.16 y la Proposición 5.20 se concluye el Teorema 5.6.

La propiedad (5.5) nos dice que todo  $fg$ -ciclo-mezclado es un ciclo de tipo rotacional III, hecho que es clave en la demostración de la Proposición 5.20. Toda triangulación de una superficie marcada con frontera vacía y sólo una punción tiene arcos que son lazos. No es suficiente que una triangulación  $\tau$  cumpla con las propiedades (5.3) y (5.4) para poder afirmar que un potencial de la forma  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + S')$  es equivalente a derecha al potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$ .

**Ejemplo 5.21.** *Consideremos un toro con 2 punciones, y la siguiente triangulación  $\tau$ :*

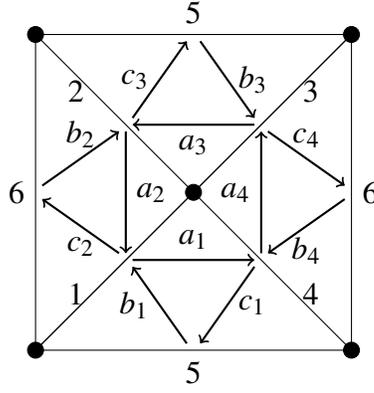


Figura 5.2: Identificamos apropiadamente los lados 5 y 6 para obtener un toro. Los 4 vértices del cuadrado son una misma punción en el toro.

*Sobre el carcaj de adyacencias asociado a esta triangulación  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  tomemos el potencial*

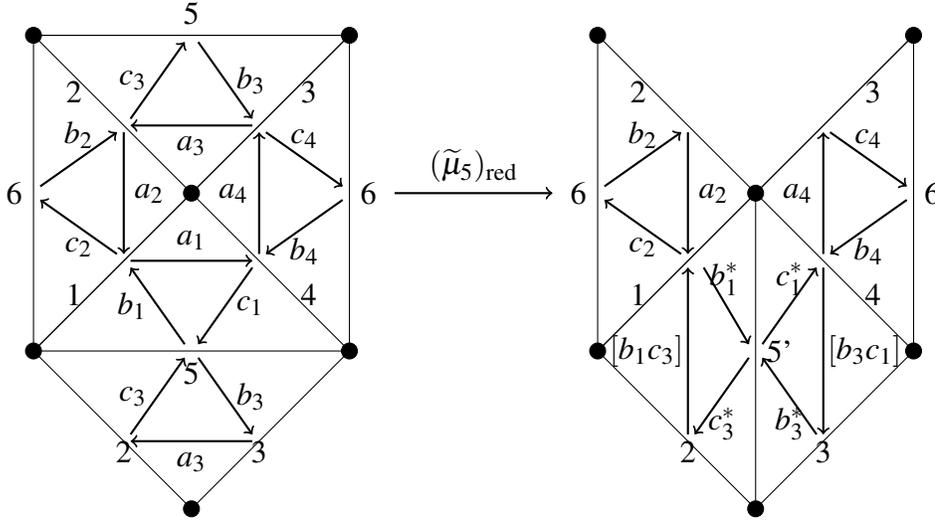
$$\begin{aligned}
U = & b_4c_2b_1c_1 + b_1c_3b_2c_2 + b_2c_4b_3c_3 + b_3c_1b_4c_4 \\
& + b_4c_2a_2a_3a_4 + a_1b_1c_3a_3a_4 + a_1a_2b_2c_4a_4 + a_1a_2a_3b_3c_1 \\
& + b_4c_2b_1c_3a_3a_4 + b_4c_2a_2b_2c_4a_4 + b_4c_2a_2a_3b_3c_1 \\
& + a_1b_1c_3b_2c_4a_4 + a_1b_1c_3a_3b_3c_1 + a_1a_2b_2c_4b_3c_1 \\
& + b_4c_2b_1c_3b_2c_4a_4 + b_4c_2b_1c_3a_3b_3c_1 \\
& + b_4c_2a_2b_2c_4b_3c_1 + a_1b_1c_3b_2c_4b_3c_1.
\end{aligned}$$

*Recordemos que el QP  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  es no degenerado para toda colección  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  (cf. Corolario 4.7). Más adelante demostraremos que  $(Q(\tau), S(\tau, 1) + U)$  es degenerado, por tanto los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, 1))$  y  $(Q(\tau), S(\tau, 1) + U)$  no son equivalentes débilmente a derecha (ya que si un QP es no degenerado, entonces todo carcaj con potencial equivalente débilmente a derecha a éste es no degenerado). Nótese que el potencial  $U$  involucra fg-ciclos-mezclados que no son ciclos de tipo rotacional III, por ejemplo el ciclo  $b_4c_2b_1c_1$ .*

*Demostración ( $(Q(\tau), S(\tau, 1) + U)$  es degenerado).* Observemos que el automorfismo unitriangular  $\Psi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  dado por  $\Psi(a_i) = a_i + b_i c_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  y la identidad en el resto de las flechas, es una equivalencia a derecha entre los QP  $(Q(\tau), W)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, 1) + U)$ , donde el potencial  $W$  es

$$W = T(\tau) + a_1a_2a_3a_4 = \sum_{i=1}^4 a_i b_i c_i + a_1a_2a_3a_4.$$

A diferencia de  $S(\tau, 1)$ , el potencial  $W$  sólo involucra a uno de los dos  $g$ -ciclos. La parte reducida de la permutación del carcaj  $Q(\tau)$  con respecto al vértice asociado al arco 5 da como resultado el siguiente carcaj (recordemos que a nivel del carcaj podemos identificar esta operación con aplicar el reemplazo correspondiente a la triangulación y obtener el carcaj asociado, cf. Teorema 3.20):



La permutación del potencial  $W$  con respecto al vértice 5 es

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_5(W) = & a_2 b_2 c_2 + a_4 b_4 c_4 + a_1 [b_1 c_1] + a_3 [b_3 c_3] \\ & + c_1^* b_1^* [b_1 c_1] + c_3^* b_3^* [b_3 c_3] + c_1^* b_3^* [b_3 c_1] + c_3^* b_1^* [b_1 c_3]. \end{aligned}$$

Si  $\varphi_1$  es el automorfismo unitriangular  $\varphi_1 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  dado mediante la regla  $\varphi_1(a_1) = a_1 - c_1^* b_1^*$ ,  $\varphi_1(a_3) = a_3 - c_3^* b_3^*$  y la identidad en el resto de las flechas, entonces al evaluar  $\varphi_1$  en  $\tilde{\mu}_5(W)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tilde{\mu}_5(W)) = & a_2 b_2 c_2 + a_4 b_4 c_4 + a_1 [b_1 c_3] + a_3 [b_3 c_3] + a_1 a_2 a_3 a_4 \\ & - c_1^* b_1^* a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 c_3^* b_3^* a_4 + c_1^* b_1^* a_2 c_3^* b_3^* a_4 + c_1^* b_3^* [b_3 c_1] + c_3^* b_1^* [b_1 c_3]. \end{aligned}$$

Sea  $\varphi_2$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_2 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  determinado por  $\varphi_2([b_1 c_1]) = [b_1 c_1] - a_2 a_3 a_4 + a_2 c_3^* b_3^* a_4$  y es la identidad en el resto de las flechas, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_2 \varphi_1(\tilde{\mu}_5(W)) = & a_2 b_2 c_2 + a_4 b_4 c_4 + a_1 [b_1 c_1] + a_3 [b_3 c_3] - c_1^* b_1^* a_2 a_3 a_4 \\ & + c_1^* b_1^* a_2 c_3^* b_3^* a_4 + c_1^* b_3^* + c_3^* b_1^* [b_1 c_3]. \end{aligned}$$

Si llamamos  $\varphi_3$  al automorfismo unitriangular  $\varphi_3 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  tal que  $\varphi_3([b_3 c_3]) = [b_3 c_3] + a_4 c_1^* b_1^* a_2$  y es la identidad en el resto de las flechas, entonces

al evaluar  $\varphi_3$  se tiene

$$\begin{aligned}\varphi_3\varphi_2\varphi_1(\tilde{\mu}_5(W)) &= a_2b_2c_2 + a_4b_4c_4 + a_1[b_1c_1] + a_3[b_3c_3] + c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*a_4 \\ &\quad + c_1^*b_3^* + c_3^*b_1^*[b_1c_3].\end{aligned}$$

La mutación  $\mu_5(Q(\tau), W)$  es equivalente a derecha al QP  $(\mu_5(Q(\tau)), W')$ , donde  $W' = a_2b_2c_2 + a_4b_4c_4 + c_1^*b_3^* + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*a_4$ . Si ahora aplicamos la premutación a  $\mu_5(Q(\tau))$  con respecto al vértice 6, la parte 2-acíclica del carcaj es el carcaj mostrado en la figura 5.3. Mientras que la premutación del potencial  $W'$  con respecto al vértice 6 es

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_6(W') &= a_2[b_2c_2] + a_4[b_4c_4] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*a_4 \\ &\quad + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_4^*b_4^*[b_4c_4] + c_2^*b_4^*[b_4c_2] + c_4^*b_2^*[b_2c_4].\end{aligned}$$

Si  $\varphi_4$  es el automorfismo unitriangular  $\varphi_4\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  dado mediante la regla  $\varphi_4(a_2) = a_2 - c_2^*b_2^*$ ,  $\varphi_4(a_4) = a_4 - c_4^*b_4^*$  y la identidad en el resto de las flechas. Al evaluar  $\varphi_4$  en  $\tilde{\mu}_6(W')$  obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi_4(\tilde{\mu}_6(W')) &= a_2[b_2c_2] + a_4[b_4c_4] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*a_4 \\ &\quad - c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*c_4^*b_4^* - c_1^*b_1^*c_2^*b_2^*c_3^*b_3^*a_4 + c_1^*b_1^*c_2^*b_2^*c_3^*b_3^*c_4^*b_4^* \\ &\quad + c_2^*b_4^*[b_4c_2] + c_4^*b_2^*[b_2c_4].\end{aligned}$$

Sea  $\varphi_5$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_5\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  determinado por  $\varphi_5([b_2c_2]) = [b_2c_2] - c_3^*b_3^*a_4c_1^*b_1^* + c_3^*b_3^*c_4^*b_4^*c_1^*b_1^*$  y es la identidad en el resto de las flechas, obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi_5\varphi_4(\tilde{\mu}_6(W')) &= a_2[b_2c_2] + a_4[b_4c_4] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] - c_1^*b_1^*c_2^*b_2^*c_3^*b_3^*a_4 \\ &\quad + c_1^*b_1^*c_2^*b_2^*c_3^*b_3^*c_4^*b_4^* + c_2^*b_4^*[b_4c_2] + c_4^*b_2^*[b_2c_4].\end{aligned}$$

Si llamamos  $\varphi_6$  al automorfismo unitriangular  $\varphi_6\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  tal que  $\varphi_6([b_4c_4]) = [b_4c_4] + c_1^*b_1^*c_2^*b_2^*c_3^*b_3^*$  y es la identidad en el resto de las flechas, al evaluar  $\varphi_6$

$$\begin{aligned}\varphi_6\varphi_5\varphi_4(\tilde{\mu}_6(W')) &= a_2[b_2c_2] + a_4[b_4c_4] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + c_1^*b_1^*c_2^*b_2^*c_3^*b_3^*c_4^*b_4^* \\ &\quad + c_2^*b_4^*[b_4c_2] + c_4^*b_2^*[b_2c_4].\end{aligned}$$

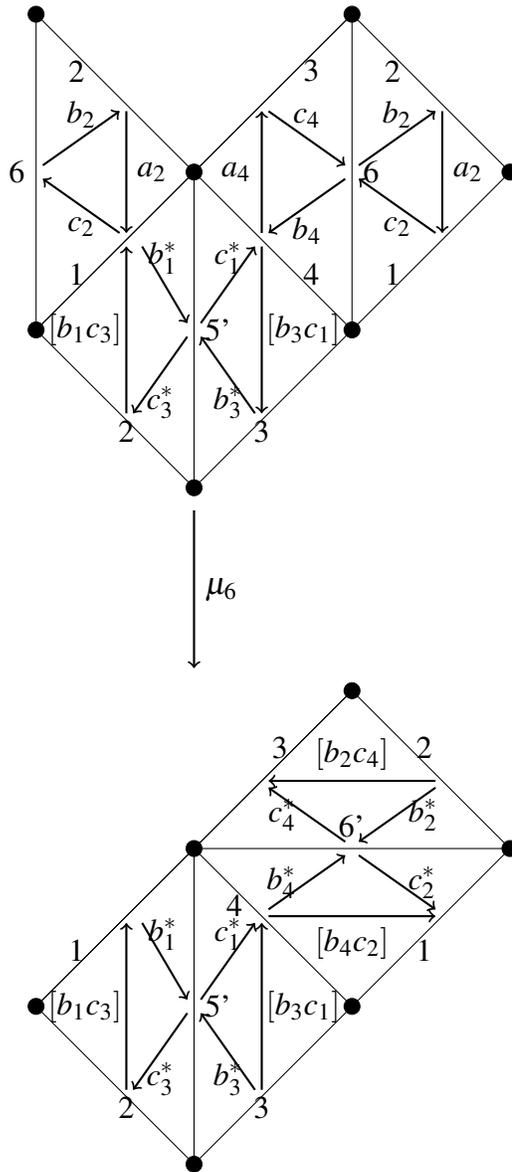


Figura 5.3: La mutación del carcaj respecto al vértice 6.

Por lo tanto, la mutación del carcaj con potencial  $(\mu_5(Q(\tau)), W')$  con respecto al vértice 6 da como resultado un QP equivalente a derecha a la pareja formada por el carcaj de la figura 5.4, y el potencial  $V$  de la forma

$$V = c_1^* b_3^* [b_3 c_1] + c_3^* b_1^* [b_1 c_3] + c_1^* b_1^* c_2^* b_2^* c_3^* b_3^* c_4^* b_4^* + c_2^* b_4^* [b_4 c_2] + c_4^* b_2^* [b_2 c_4].$$

Al aplicar la restricción de  $\mu_6 \mu_5(Q(\tau), W)$  al conjunto de vértices  $\{1, 2, 3, 4\}$ , por

la Proposición 5.4 el QP  $\mu_6\mu_5(Q(\tau), W)$  es degenerado. Por tanto, el QP  $(Q(\tau), W)$  es degenerado.

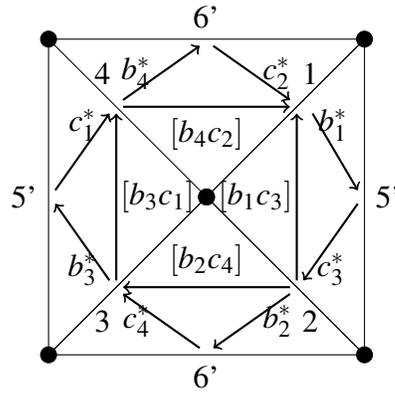


Figura 5.4: El Carcaj  $\mu_6\mu_5(Q(\tau))$ .

□

Hasta el momento hemos mostrado la estrategia de Geiss-Labardini-Schröer seguida en [6] para demostrar el Teorema 5.6, y por que no es posible utilizar exactamente la misma estrategia para demostrar la Conjetura 5.7. Ahora presentaremos algunos resultados técnicos, similares a los utilizados en [6], con los que en la siguiente sección se probará la conjetura 5.7 (cf. Teorema 5.32).

**Proposición 5.22.** Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3) y (5.4). Dados dos potenciales  $U, Z \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  rotacionalmente disjuntos de  $T(\tau)$  ( $Z$  posiblemente cero), existe un automorfismo unitriangular  $\varphi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad al menos  $\text{short}(U) - 3$  y un potencial  $W \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos, tales que  $\varphi$  hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + U)$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + W)$ , y  $\text{short}(W) \geq \text{short}(U)$ .

**Corolario 5.23.** Dada una superficie marcada  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con frontera vacía, sea  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3) y (5.4). Para todo potencial  $U \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  rotacionalmente disjunto de  $T(\tau)$ , existe un potencial  $W \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que involucra únicamente potencias de  $g$ -ciclos y con la propiedad de que los carcajes con potencial  $(Q(\tau), T(\tau) + U)$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + W)$  son equivalentes a derecha.

El Corolario 5.23 es el caso particular de la Proposición 5.22 donde  $Z = 0$ . La prueba de la Proposición 5.22 se dará más adelante, debido a que hará uso de los Lemas 5.24 y 5.25.

Todo potencial  $S \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  puede escribirse como una suma de tres potenciales  $S = S_f + S_g + S_{fg}$  (cf. Observación 3.33).

**Lema 5.24.** *Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3) y (5.4). Si  $S, A \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  son dos potenciales rotacionalmente disjuntos de  $T(\tau)$  ( $S$  posiblemente cero), de forma tal que  $A_f \neq 0$ , existe un potencial  $B \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  disjunto de  $T(\tau)$  que satisface:*

$$\begin{aligned} \text{short}(B_f) &> \text{short}(A_f), \\ \text{short}(B_g) &\geq \min\{\text{short}(A_g), \text{short}(A_f) + 1\} \text{ y} \\ \text{short}(B_{fg}) &\geq \min\{\text{short}(A_{fg}), \text{short}(A_f) + 1\}; \end{aligned}$$

y existe un automorfismo unitriangular  $\Phi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  de profundidad  $\text{short}(A_f) - 3$ , que hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), T(\tau) + S + A)$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + S + B)$ .

*Demostración.* El potencial  $A$  puede escribirse como una suma de tres potenciales  $A = A_f + A_g + A_{fg}$ , donde cada uno de estos tres potenciales involucra únicamente potencias de  $f$ -ciclos, potencias de  $g$ -ciclos y  $fg$ -ciclos-mezclados respectivamente. El potencial  $A_f$  es de la forma

$$A_f \sim_{\text{cyc}} \sum_{j=1}^{|\Gamma|} \sum_{n=2}^{\infty} v_{\gamma_j, n} (\mathcal{F}(\gamma_j))^n.$$

Sea  $\psi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau)\rangle\rangle$  el automorfismo unitriangular de profundidad  $\text{depth}(A_f) - 3$  determinado mediante la regla  $\psi|_{Q_0(\tau) \setminus \Gamma} = \text{Id}_{Q_0(\tau) \setminus \Gamma}$  y  $\psi(\gamma_j) = \gamma_j - \sum_{n=2}^{\infty} v_{\gamma_j, n} (\mathcal{F}(\gamma_j))^{n-1}$  para cada  $j \in \{1, 2, \dots, |\Gamma|\}$ .

La triangulación  $\tau$  satisface las propiedades (5.3) y (5.4), por lo que todo  $g$ -ciclo tiene longitud al menos cuatro, y todo  $fg$ -ciclo-mezclado tiene longitud al menos cuatro (cf. Observación 5.12). Debido a que  $A$  es rotacionalmente disjunto de  $T(\tau)$  tenemos que  $\text{short}(A + S) \geq 4$ ; por la Observación 1.14 concluimos que

$$\text{short}(\psi(A + S) - (A + S)) \geq \text{depth}(\psi) + \text{short}(A + S) \geq \text{short}(A_f) - 3 + 4 > \text{short}(A_f).$$

La imagen de  $T(\tau)$  bajo el automorfismo  $\psi$  es cíclicamente equivalente al potencial  $T(\tau) - \sum_{j=1}^{|\Gamma|} \sum_{n=2}^{\infty} v_{\gamma_j, n} (\mathcal{F}(\gamma_j))^n \sim_{\text{cyc}} T(\tau) - A_f$ , por lo que

$$\begin{aligned} \psi(T(\tau) + A + S) &\sim_{\text{cyc}} T(\tau) - A_f + A + S + (\psi(A + S) - (A + S)) \\ &= T(\tau) + S + B, \end{aligned}$$

donde el potencial  $B$  es igual a  $A_g + A_{fg} + (\psi(A + S) - (A + S))$ . Observemos que

- $\text{short}(B_f) = \text{short}((\psi(A+S) - (A+S))_f) > \text{short}(A_f)$ ;
- $\text{short}(B_g) \geq \min\{\text{short}(A_g), \text{short}((\psi(A+S) - (A+S))_g)\}$   
 $\geq \min\{\text{short}(A_g), \text{short}(A_f) + 1\}$ ; y
- $\text{short}(B_{fg}) \geq \min\{\text{short}(A_{fg}), \text{short}((\psi(A+S) - (A+S))_{fg})\}$   
 $\geq \min\{\text{short}(A_{fg}), \text{short}(A_f) + 1\}$ .

□

**Lema 5.25.** Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie marcada con frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3) y (5.4). Dados dos potenciales  $S, C \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  rotacionalmente disjuntos de  $T(\tau)$  ( $S$  posiblemente cero), de forma tal que  $C_{fg} \neq 0$ , existe un potencial  $D \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  disjunto de  $T(\tau)$  que satisface:

$$\text{short}(D_f) \geq \min\{\text{short}(C_f), \text{short}(C_{fg}) + 1\},$$

$$\text{short}(D_g) \geq \min\{\text{short}(C_g), \text{short}(C_{fg}) + 1\}, \text{ y}$$

$$\text{short}(D_{fg}) > \text{short}(C_{fg});$$

y existe un automorfismo unitriangular  $\Psi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad  $\text{short}(C_{fg}) - 3$ , que hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), T(\tau) + S + C)$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + S + D)$ .

*Demostración.* El potencial  $C$  puede escribirse como una suma de tres potenciales  $C = C_f + C_g + C_{fg}$ , que involucran únicamente potencias de  $f$ -ciclos, potencias de  $g$ -ciclos y  $fg$ -ciclos-mezclados, respectivamente. El potencial  $C_{fg}$  es de la forma

$$C_{fg} \sim_{\text{cyc}} \sum_{a \in Q_1(\tau)} f^2(a)f(a)\bar{\omega}_a,$$

donde cada  $\bar{\omega}_a$  es un elemento del álgebra completa de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ .

Definamos al automorfismo unitriangular  $\Phi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  satisface  $\Phi(a) = a - \bar{\omega}_a$ . Este automorfismo es de profundidad  $\text{depth}(\Phi) = \text{short}(C_{fg}) - 3$ , que es mayor a cero, ya que todo  $fg$ -ciclo-mezclado tiene longitud al menos cuatro.

Al evaluar el automorfismo  $\Phi$  en  $T(\tau) + S + C$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(T(\tau) + S + C) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma) - \bar{\omega}_{f^2(\gamma)})(f(\gamma) - \bar{\omega}_{f(\gamma)})(\gamma - \bar{\omega}_\gamma) \\ &\quad + S + C + (\Phi(S + C) - (S + C)). \end{aligned}$$

El desarrollo del término  $\sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma) - \bar{\omega}_{f^2(\gamma)})(f(\gamma) - \bar{\omega}_{f(\gamma)})(\gamma - \bar{\omega}_\gamma)$  que aparece en la ecuación anterior es el siguiente

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma} f^2(\gamma)f(\gamma)\gamma - \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma)f(\gamma)\bar{\omega}_\gamma + f^2(\gamma)\bar{\omega}_{f(\gamma)}\gamma + \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}f(\gamma)\gamma) \\ & + \sum_{\gamma \in \Gamma} (f^2(\gamma)\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma + \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}f(\gamma)\bar{\omega}_\gamma + \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\gamma) - \sum_{\gamma \in \Gamma} \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma \\ \sim_{\text{cyc}} & \sum_{\gamma \in \Gamma} f^2(\gamma)f(\gamma)\gamma - \sum_{a \in Q_1(\tau)} f(a)a\bar{\omega}_a + \sum_{a \in Q_1(\tau)} f^2(a)\bar{\omega}_{f(a)}\bar{\omega}_a - \sum_{\gamma \in \Gamma} \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Phi(T(\tau) + S + C) &= T(\tau) + S + C_f + C_g + (\Phi(S + C) - (S + C)) \\ &+ \sum_{a \in Q_1(\tau)} f^2(a)\bar{\omega}_{f(a)}\bar{\omega}_a - \sum_{\gamma \in \Gamma} \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma. \end{aligned}$$

Para cada  $a \in Q_1(\tau)$  se satisface

$$\text{short}(f^2(a)\bar{\omega}_{f(a)}\bar{\omega}_a) \geq 2(\text{short}(C_{fg}) - 2) + 1 \geq \text{short}(C_{fg}) - 2 + 2 + 1 > \text{short}(C_{fg}).$$

Mientras que, para cada  $\gamma \in \Gamma$  se satisface

$$\text{short}(\bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma) \geq 3(\text{short}(C_{fg}) - 2) \geq \text{short}(C_{fg}) - 2 + 2 + 2 > \text{short}(C_{fg}).$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{short}(\Phi(S + C) - (S + C)) &\geq \text{depth}(\Phi) + \text{short}(S + C) \geq \text{short}(C_{fg}) - 2 + 4 \\ &> \text{short}(C_{fg}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si nombramos  $D$  al potencial

$$D = C_f + C_g + (\Phi(S + C) - (S + C)) + \sum_{a \in Q_0(\tau)} f^2(a)\bar{\omega}_{f(a)}\bar{\omega}_a - \sum_{\gamma \in \Gamma} \bar{\omega}_{f^2(\gamma)}\bar{\omega}_{f(\gamma)}\bar{\omega}_\gamma,$$

entonces se cumple

- $\text{short}(D_f) \geq \min\{\text{short}(C_f), \text{short}(C_{fg}) + 1\},$
- $\text{short}(D_g) \geq \min\{\text{short}(C_g), \text{short}(C_{fg}) + 1\},$
- $\text{short}(D_{fg}) > \text{short}(C_{fg}).$

□

Con ayuda de los Lemas 5.24 y 5.25 probaremos ahora la Proposición 5.22.

*Demostración de la Proposición 5.22.* Llamemos  $W_0$  al potencial  $U_g$ , y  $U_0$  al potencial  $U - U_g$ . Nótese que  $\text{short}(U_0), \text{short}(W_0) \geq \text{short}(U)$ .

**Afirmación:** Existen dos sucesiones de potenciales  $(U_n)_{n=1}^\infty, (W_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  rotacionalmente disjuntos de  $T(\tau)$ , y una sucesión de automorfismos unitriangulares  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  del álgebra completa de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , tales que para cada  $n \geq 1$ :

- el automorfismo  $\varphi_n$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + U_{n-1} + W_{n-1})$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + U_n + W_n)$ ;
- $\text{depth}(\varphi_n) = \text{short}(U_{n-1}) - 3$ ;
- $\text{short}(U_n) \geq \text{short}(U_{n-1})$ . Si  $n \geq 2$ , entonces  $\text{short}(U_n) > \text{short}(U_{n-2})$ ;
- $U_n$  no involucra potencias de  $g$ -ciclos;
- $W_n$  involucra únicamente potencias de  $g$ -ciclos;
- y  $\text{short}(W_n - W_{n-1}) > \text{short}(U_{n-1})$ .

Probaremos recursivamente la existencia de estos potenciales y automorfismos.

*Demostración de la afirmación.* Para el caso base  $n = 1$ , sean  $\delta_0, \rho_0 \in \{f, fg\}$  tales que  $\{\delta_0, \rho_0\} = \{f, fg\}$  y  $\text{short}((U_0)_{\delta_0}) \leq \text{short}((U_0)_{\rho_0})$ . Si  $U_0 = 0$ , basta con tomar  $\varphi_1$  como el automorfismo identidad, y a los potenciales  $U_1, W_1$  como  $U_0$  y  $W_0$ . Por los Lemas 5.24 y 5.25 (considerando  $S = Z + W_0$ ) existen un potencial  $V_1$  y un automorfismo unitriangular  $\varphi_1$  que hace equivalentes a derecha a los carcajes con potencial  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + U_0 + W_0)$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + V_1 + W_0)$ , que además satisfacen:

$$\text{depth}(\varphi_1) = \text{short}(U_0) - 3,$$

$$\text{short}((V_1)_{\delta_0}) > \text{short}((U_0)_{\delta_0}),$$

$$\text{short}((V_1)_{\rho_0}) \geq \min\{\text{short}((U_0)_{\rho_0}), \text{short}((U_0)_{\rho_0}) + 1\} \text{ y}$$

$$\text{short}((V_1)_g) \geq \min\{\text{short}((U_0)_g), \text{short}((U_0)_{\delta_0}) + 1\} > \text{short}(U_0).$$

Al tomar  $W_1 = W_0 + (V_1)_g$  y  $U_1 = V_1 - (V_1)_g$  obtenemos la afirmación para  $n = 1$ , ya que  $U_1 + W_1 = V_1 + W_0$ ; el potencial  $W_1$  involucra sólo potencias de  $g$ -ciclos, mientras que el potencial  $U_1$  no involucra potencias de  $g$ -ciclos; además  $\text{short}(U_1) \geq \text{short}(U_0)$  y  $\text{short}(W_1 - W_0) > \text{short}(U_0)$ .

El paso recursivo de la afirmación se demuestra de manera análoga. Dados dos potenciales  $U_{n-1}$  y  $W_{n-1}$  que satisfacen las condiciones requeridas, definimos  $\delta_{n-1}, \rho_{n-1} \in \{f, fg\}$  con la propiedad  $\{\delta_{n-1}, \rho_{n-1}\} = \{f, fg\}$  y  $\text{short}((U_{n-1})_{\delta_{n-1}}) \leq \text{short}((U_{n-1})_{\rho_{n-1}})$ . Por los Lemas 5.24 y 5.25 (considerando  $S = Z + W_{n-1}$ ) existen un potencial  $V_n$  y un automorfismo unitriangular  $\varphi_n$  que hace equivalentes a derecha

a los carcajes con potencial  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + U_{n-1} + W_{n-1})$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + V_n + W_{n-1})$  (si  $U_{n-1} = 0$ , basta con tomar  $\varphi_n$  como el automorfismo identidad, y a los potenciales  $U_n, W_n$  como  $U_{n-1}$  y  $W_{n-1}$ ), que además satisfacen:

$$\text{depth}(\varphi_n) = \text{short}(U_{n-1}) - 3,$$

$$\text{short}((V_n)_{\delta_{n-1}}) > \text{short}((U_{n-1})_{\delta_{n-1}}),$$

$$\text{short}((V_n)_{\rho_{n-1}}) \geq \min\{\text{short}((U_{n-1})_{\rho_{n-1}}), \text{short}((U_{n-1})_{\rho_{n-1}}) + 1\} \text{ y}$$

$$\text{short}((V_n)_g) \geq \min\{\text{short}((U_{n-1})_g), \text{short}((U_{n-1})_{\delta_{n-1}}) + 1\} > \text{short}(U_{n-1}).$$

Tomemos  $W_n = W_{n-1} + (V_n)_g$  y  $U_n = V_n - (V_n)_g$ . Notemos que  $U_n + W_n = V_n + W_{n-1}$ ; el potencial  $W_n$  involucra sólo potencias de  $g$ -ciclos, mientras que el potencial  $U_n$  no involucra potencias de  $g$ -ciclos;  $\text{short}(U_n) \geq \text{short}(U_{n-1})$  y  $\text{short}(W_n - W_{n-1}) > \text{short}(U_{n-1})$ .

Finalmente, si  $n \geq 2$  y  $\delta_{n-1} = \delta_{n-2}$ , entonces

$$\text{short}(U_n) \geq \text{short}((U_{n-1})_{\delta_{n-1}}) > \text{short}((U_{n-2})_{\delta_{n-2}}) = \text{short}(U_{n-2}).$$

Mientras que si  $n \geq 2$  y  $\delta_{n-1} \neq \delta_{n-2}$ , entonces

$$\text{short}(U_n) > \text{short}((U_{n-1})_{\delta_{n-1}}) \geq \text{short}((U_{n-2})_{\delta_{n-2}}) = \text{short}(U_{n-2}).$$

□

Para todo entero  $n \geq 2$  se satisface que  $\text{short}(U_{n+2}) > \text{short}(U_n)$ , y por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{short}(U_n) = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{depth}(\varphi_n) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{short}(W_n - W_{n-1}) = \infty$ . Por el Lema 1.28, el automorfismo unitriangular  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + U)$  y  $(Q(\tau), T(\tau) + Z + W)$ , donde

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n.$$

□

**Lema 5.26.** Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con puntos marcados y frontera vacía, y  $\tau$  una triangulación de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades (5.3) y (5.4). Si  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  es una colección de escalares distintos de cero,  $m, t \in \mathbb{Z}^{>0}$  son dos enteros positivos, y  $R, H \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  son dos potenciales que satisfacen las siguientes propiedades

- $\text{short}(H) \geq m$ ;
- $R = \lambda f(a) a G(t, g^{-t}(a)) c$  para alguna flecha  $a \in Q_0(\tau)$ , un camino  $c$ , y  $\lambda$  un escalar distinto de cero;

- $y \ 2 \text{short}(R) - 3 > m$ ;

entonces existe un automorfismo unitriangular  $\zeta : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad  $\text{short}(R) - 3$  que hace equivalentes a derecha a los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + R + H)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + R' + H + K)$ , donde  $R', K \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  son potenciales que cumplen

- $\text{short}(K) > m$ ;
- $R' = \lambda' f(a') a' G(t-1, g^{-(t-1)}(a')) c'$  para alguna flecha  $a' \in Q_0(\tau)$ , un camino  $c'$ , y  $\lambda'$  un escalar distinto de cero;
- $y \ \text{short}(R') > \text{short}(R)$ .

*Demostración.* Sea  $\zeta : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  el automorfismo unitriangular de profundidad  $\text{short}(R) - 3$  determinado mediante la regla

$$\zeta(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a) - \lambda G(t, g^{-t}(a))c \text{ y } \zeta|_{Q_1(\tau) \setminus \{f^{-1}(a)\}} = \text{Id}|_{Q_1(\tau) \setminus \{f^{-1}(a)\}}.$$

Al evaluar este automorfismo en  $S(\tau, \mathbf{x}) + R + H$  obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(S(\tau, \mathbf{x}) + R + H) &\sim_{\text{cyc}} S(\tau, \mathbf{x}) - \lambda f(a) a G(t, g^{-t}(a))c \\ &\quad - \lambda x_{\omega_{f^{-1}(a)}} G(n_{f^{-1}(a)} - 1, g f^{-1}(a)) G(t, g^{-t}(a))c \\ &\quad + R + H + (\zeta(R + H) - (R + H)) \\ &\sim_{\text{cyc}} S(\tau, \mathbf{x}) - \lambda' g f^{-1}(a) g^{-1}(a) G(t-1, g^{-t}(a))c' \\ &\quad + H + K, \end{aligned}$$

donde  $\lambda' = \lambda x_{\omega_{f^{-1}(a)}}$ ,  $c' = c G(n_{f^{-1}(a)} - 2, g^2 f^{-1}(a))$  y  $K = (\zeta(R + H) - (R + H))$ . Observemos que  $\text{short}(\zeta(R) - R) \geq \text{depth}(\zeta) + \text{short}(R) = 2 \text{short}(R) - 3 > m$  y  $\text{short}(\zeta(H) - H) \geq \text{depth}(\zeta) + \text{short}(H) = \text{short}(R) - 3 + \text{short}(H) > \text{short}(H) > m$ , por lo que  $\text{short}(K) \geq \min\{\text{short}(\zeta(R) - R), \text{short}(\zeta(H) - H)\} > m$ . Notemos además que

$$\text{short}(g f^{-1}(a) g^{-1}(a) G(t-1, g^{-t}(a))c') = \text{short}(R) - 2 + n_{f^{-1}(a)} - 1 > \text{short}(R),$$

ya que  $\tau$  satisface la propiedad (5.3).

Recordemos que  $g f^{-1}(a) = f g^{-1}(a)$ , por lo que tomando  $a' = g^{-1}(a)$  y  $R' = g f^{-1}(a) g^{-1}(a) G(t-1, g^{-t}(a))c'$  concluimos el Lema.  $\square$

**Corolario 5.27.** *Considerando las mismas hipótesis del Lema 5.26, si el camino  $c$  es una flecha, entonces existe un automorfismo unitriangular  $\Pi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad mayor o igual a  $\min\{\text{short}(R) - 3, m - 3\}$  que hace equivalentes a derecha a  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + R + H)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + H + \xi)$ , donde  $\xi$  es un potencial que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y  $\text{short}(\xi) > m$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $R_0$  al potencial  $R$ ,  $K_0$  al potencial  $0$ ,  $a_0 = a$ ,  $\lambda_0 = \lambda$  y  $c_0 = c$ . La siguiente afirmación se obtiene al utilizar de manera recursiva el Lema 5.26:

Afirmación: Existen dos colecciones de potenciales  $(R_i)_{i=1}^t$  y  $(K_i)_{i=1}^t$ , y una colección de automorfismos unitriangulares  $(\zeta_i)_{i=1}^t$ , que para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$  cumplen

- $R_i = \lambda_i f(a_i) a_i G(t-i, g^{-(t-i)}(a_i)) c_i$  para algún escalar  $\lambda_i$  distinto de cero, alguna flecha  $a_i$  y algún camino  $c_i$ . Además,  $\text{short}(R_i) \geq \text{short}(R) + i$ ;
- $\text{short}(K_i) > m$ ;
- $\text{depth}(\zeta_i) \geq \text{short}(R_{i-1}) - 3$ ; y
- $\zeta_i$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R_{i-1} + H + K_{i-1})$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R_i + H + K_i)$ .

Si  $R_{i-1}$  y  $K_{i-1}$  son dos potenciales que satisfacen  $\text{short}(R_{i-1}) \geq \text{short}(R) + i - 1$ ,  $R_{i-1} = \lambda_{i-1} f(a_{i-1}) a_{i-1} G(t-(i-1), g^{-(t-(i-1))}(a_{i-1})) c_{i-1}$  y  $\text{short}(K_{i-1}) > m$ , entonces por el Lema 5.26 existen dos potenciales  $R_i$ ,  $K$  y un automorfismo unitriangular  $\zeta_i$  de profundidad  $\text{short}(R_{i-1}) - 3$  que hace equivalentes a derecha a los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R_{i-1} + H + K_{i-1})$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R_i + H + K_{i-1} + K)$ . Obsérvese que  $\text{short}(R_i) \geq \text{short}(R_{i-1}) + 1 \geq \text{short}(R) + i$ . Obtenemos la afirmación al considerar  $K_i = K + K_{i-1}$ , ya que  $\text{short}(K_{i-1} + K) > m$ .

De la afirmación se sigue que la composición  $\zeta = \zeta_t \zeta_{t-1} \cdots \zeta_1$  es un automorfismo unitriangular de profundidad al menos  $\text{short}(R) - 3$  que hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R + H)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R_t + H + K_t)$ . Además,  $R_t$  es un potencial de la forma  $R_t = \lambda_t f(a_t) a_t c_t$  ( $R_t$  es un  $f$ -ciclo o un  $fg$ -ciclo mezclado) y  $\text{short}(R_t) \geq \text{short}(R) + t = 2 \text{short}(R) - 3 > m$ .

Al considerar  $U = R_t + K_t$  y  $Z = P(\tau, x) + H$ , por la Proposición 5.22 existe un automorfismo unitriangular  $\varphi$  de profundidad al menos  $\text{short}(R_t + K_t) - 3 > m - 3$  que hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R_t + H + K_t)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) + H + \xi)$ , para algún potencial  $\xi$  que involucra sólo potencias de  $g$ -ciclos y tal que  $\text{short}(\xi) \geq \text{short}(R_t + K_t) > m$ .

El automorfismo  $\Pi$  se obtiene al componer los automorfismos  $\zeta$  y  $\varphi$ , es decir,  $\Pi = \varphi \zeta$ , y  $\text{depth}(\Pi) \geq \min\{\text{depth}(\zeta), \text{depth}(\varphi)\} \geq \min\{\text{short}(R) - 3, m - 3\}$ . □

## 5.2. Superficies de género positivo con 2 punciones

En esta sección trabajaremos con superficies con frontera vacía y dos punciones, y concluiremos con la demostración de la Conjetura 5.7 (cf. Teorema 5.32).

**Lema 5.28.** *Dada una superficie con dos puntos marcados  $(\Sigma, \mathbb{M})$  ( $|\mathbb{M}| = 2$ ), tal que  $\Sigma$  tiene frontera vacía y género positivo, existe una triangulación ideal  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$  que satisface las propiedades 5.3 y 5.4.*

*Demostración.* Sean  $p$  y  $q$  los dos puntos marcados en  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Sea  $g$  el género de  $\Sigma$ . Consideremos la siguiente triangulación  $\tau$ , representable por medio del  $4g$ -gono:

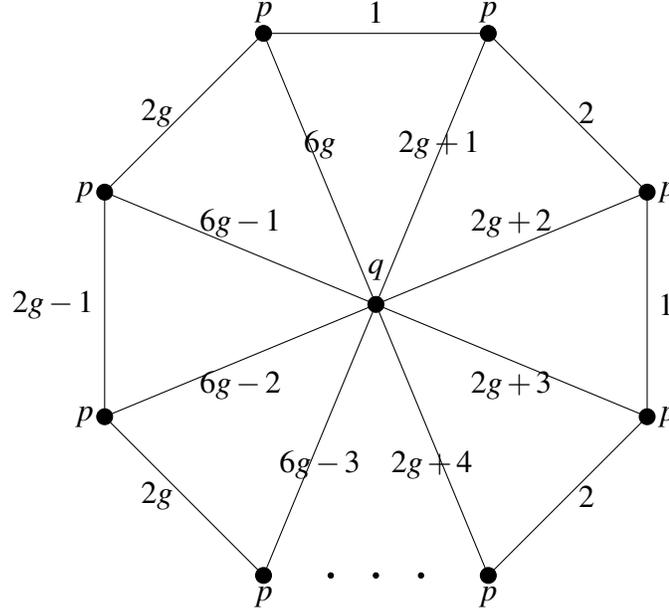


Figura 5.5: Identificamos apropiadamente los lados del polígono.

En esta triangulación  $4g$  arcos, enumerados de  $2g + 1$  a  $6g$ , inciden en las punciones  $p$  y  $q$  (en ambas cada uno de ellos). Mientrás que  $2g$  arcos, numerados de  $1$  a  $2g$ , son lazos que únicamente inciden en  $p$ . Las valencias de las punciones  $q$  y  $p$  son  $4g$  y  $8g$  respectivamente, por lo que  $\tau$  cumple la propiedad (5.3).

Para cada  $i \in \{2, 3, \dots, 2g\}$  existe  $k \in \{2g + 1, 2g + 2, \dots, 6g - 3\}$  tal que los tres arcos  $i, k, k + 1$  forman un triángulo de  $\tau$  y los arcos  $i, k + 2, k + 3$  forman otro triángulo de  $\tau$ . Los arcos  $1, 6g, 2g + 1$  forman un triángulo, y los arcos  $1, 2g + 2, 2g + 3$  forman otro triángulo. Así, en  $Q(\tau)$  no hay flechas dobles que pasen por alguno de los vértices correspondientes a los arcos numerados de  $2$  a  $2g$ . Para cualesquiera dos arcos  $i, j \in \{2g + 1, 2g + 2, \dots, 6g\}$  existe una flecha que va del vértice  $j \in Q_0(\tau)$  (vértice correspondinte al arco  $j$ ) al vértice  $i$  si y sólo si  $j = i + 1$ , o  $j = 2g + 1$  e  $i = 6g$ . Así, en  $Q(\tau)$  no hay flechas dobles (propiedad (5.4)). □

La triangulación  $\tau$  presentada en el Lema 5.28 para la superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con dos puntos marcados, frontera vacía y género positivo satisface las propiedades (5.3) y

(5.4), por lo tanto, debido a la Observación 5.12 todo potencial  $S$  no degenerado sobre  $Q(\tau)$  es equivalente a derecha a un potencial de la forma  $T(\tau) + U$ , para algún potencial  $U$  rotacionalmente disjunto de  $T(\tau)$ . El Corolario 5.23 nos permite afirmar que  $(Q(\tau), T(\tau) + U)$  es equivalente a derecha a un QP  $(Q(\tau), T(\tau) + W)$ , donde  $W$  involucra sólo potencias de  $g$ -ciclos.

**Lema 5.29.** *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con dos puntos marcados como en el Lema 5.28, y sea  $\tau$  la triangulación dada en el mismo Lema, figura 5.5. Si  $W \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es un potencial que involucra sólo potencias de  $g$ -ciclos, y tal que el carcaj con potencial  $(Q(\tau), T(\tau) + W)$  es no degenerado, entonces  $W$  involucra al  $g$ -ciclo asociado a  $p$  y también involucra al  $g$ -ciclo asociado a  $q$ .*

*Demostración.* Nombremos a las flechas del carcaj de adyacencias  $Q(\tau)$  asociado a la triangulación  $\tau$ , figura 5.5, de la siguiente manera:

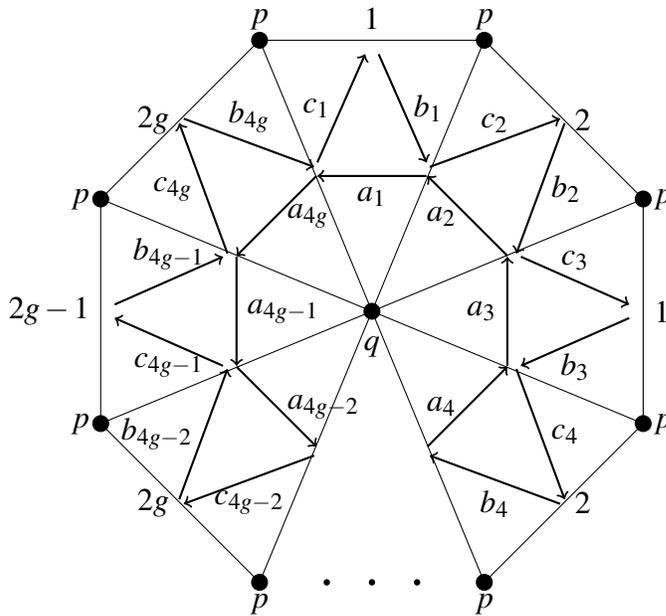


Figura 5.6: Las flechas del carcaj asociado,  $Q(\tau)$ .

El potencial  $W$  es cíclicamente equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (a_1 a_2 \cdots a_{4g})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n (b_{4g} c_{4g-2} b_{4g-3} c_{4g-1} b_{4g-2} c_{4g} b_{4g-1} c_{4g-3} \cdots b_4 c_2 b_1 c_3 b_2 c_4 b_3 c_1)^n,$$

que es igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4g} a_j \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-1} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \right)^n,$$

donde  $\rho_n, \nu_n$  son escalares (posiblemente cero). Sea  $I = \{2g+1, 2g+2, \dots, 6g\}$ , la restricción  $Q(\tau)|_I$  contiene exactamente  $4g$  flechas  $a_1, a_2, \dots, a_{4g}$  (cada una de ellas inicia en un v\u00e9rtice distinto), que forman el  $g$ -ciclo asociado a  $q$ . El QP  $(Q(\tau), T(\tau) + W)$  es no degenerado, por la Proposici\u00f3n 5.4 el potencial  $W$  involucra al  $g$ -ciclo  $a_1 a_2 \dots a_{4g}$ , es decir,  $\rho_1 \neq 0$ .

Todos los arcos de  $\tau$  que son lazos inciden en  $p$ , y est\u00e1n numerados de 1 a  $g$ . Observemos que para cada  $k \in \{1, 2, \dots, g\}$ , los dos tri\u00e1ngulos que tienen al arco  $k$  como lado tienen (cada uno de ellos) como lados a otros dos arcos que no son lazos (es decir, arcos incidentes en ambas punci\u00f3nes  $p$  y  $q$ ). Por lo que, al aplicar el reemplazo a  $\tau$  con respecto a cualquiera de los arcos  $\{1, 2, \dots, g\}$  obtenemos un lazo incidente en  $q$ .

Afirmaci\u00f3n: Para cada  $k \in \{1, 2, \dots, g\}$  se satisface

$$\mu_{2k} \mu_{2k-1} \dots \mu_2 \mu_1 (Q(\tau), T(\tau) + W) \cong (Q(\sigma_k), S_k), \quad (5.12)$$

donde la triangulaci\u00f3n  $\sigma_k$  se obtiene de aplicar a  $\tau$  los reemplazos de los arcos  $1, 2, \dots, 2k$ , es decir,  $\sigma_k = f_{2k} f_{2k-1} \dots f_1(\tau)$ , y el potencial  $S_k$  es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\ & \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + \sum_{j=4k+1}^{4g} a_j b_j c_j \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \prod_{j=4k+1}^{4g} a_j \right)^n \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-1} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n. \end{aligned}$$

M\u00e1s adelante daremos la prueba de esta afirmaci\u00f3n, la cual es un poco t\u00e9cnica. De la afirmaci\u00f3n se sigue

$$\mu_{2g} \mu_{2g-1} \dots \mu_2 \mu_1 (Q(\tau), T(\tau) + W) \cong (Q(\sigma_g), S_g),$$

donde el potencial  $S_g$  es de la forma

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\ & + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4g} c_j^* b_j^* \right)^n \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \\ & \left( \prod_{j=0}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n. \end{aligned}$$

Recordemos que  $I$  es el conjunto  $\{2g+1, 2g+2, \dots, 6g\}$ . La restricción  $Q(\sigma_g)|_I$  contiene exactamente  $4g$  flechas  $[b_{4g} c_{4g-2}], [b_{4g-3} c_{4g-1}], \dots, [b_2 c_4] [b_3 c_1]$  (cada una de ellas inicia en un v3rtice distinto), que forman el  $g$ -ciclo asociado a  $p$  (en  $\sigma_g$  no hay lazos incidentes en  $p$ ). El QP  $Q(\sigma_g, S_g)$  es no degenerado, por la Proposici3n 5.4, el potencial  $S_g$  involucra al  $g$ -ciclo

$$\prod_{j=0}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}],$$

es decir,  $v_1 \neq 0$ . As3i, el potencial  $W$  involucra al  $g$ -ciclo

$$\prod_{j=0}^{g-1} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3},$$

por lo tanto, el potencial  $T(\tau) + W$  es de la forma  $S(\tau, x) + V$ , donde  $V$  involucra s3lo potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos. As3i, concluimos el Lema.  $\square$

Demostremos ahora la afirmaci3n hecha en el Lema 5.29.

*Demostraci3n de la afirmaci3n.* Empezemos por el caso  $k = 1$ . El potencial  $T(\tau)$  es de la forma

$$T(\tau) \sim_{\text{cyc}} \sum_{j=1}^{4g} a_j b_j c_j.$$

Al tomar la premutaci3n respecto al v3rtice (correspondiente al arco) 1, obtenemos

que la premutación  $\widetilde{\mu}_1(T(\tau) + W)$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} & a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_1^*b_1^*[b_1c_1] + c_3^*b_3^*[b_3c_3] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] \\ & + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4g} a_j \right)^n \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n. \end{aligned}$$

Sea  $\varphi_{1,1}$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_{1,1} : \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle$  determinado mediante la regla  $\varphi_{1,1}|_{\widetilde{Q}_1(\tau)\setminus\{a_1\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau)\setminus\{a_1\}}$  y  $\varphi_{1,1}(a_1) = a_1 - c_1^*b_1^*$ . La evaluación de este automorfismo en  $\widetilde{R}_1 = \widetilde{\mu}_1(T(\tau) + W)$ ,  $\varphi_{1,1}(\widetilde{R}_1)$  es cíclicamente equivalente al potencial

$$\begin{aligned} & a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_3^*b_3^*[b_3c_3] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] \\ & + \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( (a_1 - c_1^*b_1^*) \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^n \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n. \end{aligned}$$

Al desarrollar apropiadamente algunos términos (cf. Observación 5.30) vemos que  $\varphi_{1,1}(\widetilde{R}_1)$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} & a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_3^*b_3^*[b_3c_3] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] \\ & + \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i a_1 \prod_{j=2}^{4g} a_j \left( (a_1 - c_1^*b_1^*) \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^{n-i-1} \left( c_1^*b_1^* \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^i \right. \\ & \quad \left. + (-1)^n \left( c_1^*b_1^* \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^n \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n. \end{aligned}$$

Tomemos  $\varphi_{1,2}$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_{1,2} : \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle$  determinado por  $\varphi_{1,2}|_{\widetilde{Q}_1(\tau)\setminus\{[b_1c_1]\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau)\setminus\{[b_1c_1]\}}$  y

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}([b_1c_1]) &= [b_1c_1] \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \prod_{j=2}^{4g} a_j \left( (a_1 - c_1^* b_1^*) \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^{n-i-1} \left( c_1^* b_1^* \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^i \right). \end{aligned}$$

Al evaluar este automorfismo en  $\varphi_{1,1}(\widetilde{R}_1)$  obtenemos que  $\varphi_{1,2}\varphi_{1,1}(\widetilde{R}_1)$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} &a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_3^*b_3^*[b_3c_3] + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] \\ &+ \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( c_1^*b_1^* \prod_{j=2}^{4g} a_j \right)^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)}c_{4(g-j)-2}b_{4(g-j)-3}c_{4(g-j)-1}b_{4(g-j)-2}c_{4j}b_{4(g-j)-1}c_{4(g-j)-3} \right. \\ &\quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n. \end{aligned}$$

Sea  $\varphi_{3,1}$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_{3,1} : \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle$  dado por  $\varphi_{3,1}|_{\widetilde{Q}_1(\tau)\setminus\{a_3\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau)\setminus\{a_3\}}$  y  $\varphi_{3,1}(a_3) = a_3 - c_3^*b_3^*$ . El potencial  $\varphi_{3,1}\varphi_{1,2}\varphi_{1,1}(\widetilde{R}_1)$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} &a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] \\ &+ \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( c_1^*b_1^*a_2(a_3 - c_3^*b_3^*)a_4 \prod_{j=5}^{4g} a_j \right)^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)}c_{4(g-j)-2}b_{4(g-j)-3}c_{4(g-j)-1}b_{4(g-j)-2}c_{4j}b_{4(g-j)-1}c_{4(g-j)-3} \right. \\ &\quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n \end{aligned}$$

que es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(-1)^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i a_3a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^*b_1^*a_2 \left( (a_3 - c_3^*b_3^*)a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^*b_1^*a_2 \right)^{n-i-1} \right. \\
& \quad \cdot \left. \left( c_3^*b_3^*a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^*b_1^*a_2 \right)^i + (-1)^n \left( c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*a_4 \prod_{j=5}^{4g} a_j \right)^n \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)}c_{4(g-j)-2}b_{4(g-j)-3}c_{4(g-j)-1}b_{4(g-j)-2}c_4b_{4(g-j)-1}c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n.
\end{aligned}$$

Llamemos  $\varphi_{3,2}$  al automorfismo unitriangular  $\varphi_{3,2} : \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle\widetilde{Q}(\tau)\rangle\rangle$  definido por  $\varphi_{3,2}|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_3c_3]\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_3c_3]\}}$  y

$$\begin{aligned}
\varphi_{3,2}([b_3c_3]) &= [b_3c_3] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(-1)^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^*b_1^*a_2 \left( (a_3 - c_3^*b_3^*)a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^*b_1^*a_2 \right)^{n-i-1} \right. \\
& \quad \cdot \left. \left( c_3^*b_3^*a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^*b_1^*a_2 \right)^i \right).
\end{aligned}$$

La composición  $\varphi_{3,2}\varphi_{3,1}\varphi_{1,2}\varphi_{1,1}$  es una equivalencia a derecha entre los carcajes con potencial  $\widetilde{\mu}_1(Q(\tau), T(\tau) + W)$  y  $(\widetilde{Q}(\tau), O_1)$ , donde

$$\begin{aligned}
O_1 &= a_1[b_1c_1] + a_2b_2c_2 + a_3[b_3c_3] + a_4b_4c_4 + c_1^*b_3^*[b_3c_1] + c_3^*b_1^*[b_1c_3] + \sum_{j=5}^{4g} a_jb_jc_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_1^*b_1^*a_2c_3^*b_3^*a_4 \prod_{j=5}^{4g} a_j \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)}c_{4(g-j)-2}b_{4(g-j)-3}c_{4(g-j)-1}b_{4(g-j)-2}c_4b_{4(g-j)-1}c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot b_4c_2[b_1c_3]b_2c_4[b_3c_1] \right)^n.
\end{aligned}$$

Así,  $\mu_1(Q(\tau), T(\tau) + W)$  es equivalente a derecha al QP  $(Q(f_1(\tau)), U_1)$ , donde el

potencial  $U_1$  es de la forma

$$\begin{aligned}
& a_2 b_2 c_2 + a_4 b_4 c_4 + c_1^* b_3^* [b_3 c_1] + c_3^* b_1^* [b_1 c_3] + \sum_{j=5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_1^* b_1^* a_2 c_3^* b_3^* a_4 \prod_{j=5}^{4g} a_j \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot b_4 c_2 [b_1 c_3] b_2 c_4 [b_3 c_1] \right)^n.
\end{aligned}$$

La premutación  $\tilde{\mu}_2(U_1)$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& a_2 [b_2 c_2] + a_4 [b_4 c_4] + c_1^* b_3^* [b_3 c_1] + c_3^* b_1^* [b_1 c_3] + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] + c_4^* b_4^* [b_4 c_4] \\
& + c_2^* b_4^* [b_4 c_2] + c_4^* b_2^* [b_2 c_4] + \sum_{j=5}^{4g} a_j b_j c_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_1^* b_1^* a_2 c_3^* b_3^* a_4 \prod_{j=5}^{4g} a_j \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot [b_4 c_2] [b_1 c_3] [b_2 c_4] [b_3 c_1] \right)^n.
\end{aligned}$$

Sean  $\varphi_{4,2}, \varphi_{4,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{2,1} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(f_1(\tau)) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(f_1(\tau)) \rangle\rangle$  los automorfismos unitriangulares dados por

- $\varphi_{2,1}|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{a_2\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{a_2\}}$  y  $\varphi_{2,1}(a_2) = a_2 - c_2^* b_2^*$ ;
- $\varphi_{2,2}|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{b_2 c_2\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{b_2 c_2\}}$ , y

$$\begin{aligned}
& \varphi_{2,2}([b_2 c_2]) = [b_2 c_2] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i c_3^* b_3^* a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^* b_1^* \left( (a_2 - c_2^* b_2^*) c_3^* b_3^* a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^* b_1^* \right)^{n-i-1} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \left( c_2^* b_2^* c_3^* b_3^* a_4 \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^* b_1^* \right)^i \right);
\end{aligned}$$

- $\varphi_{4,1}|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{a_4\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{a_4\}}$ , y  $\varphi_{4,1}(a_4) = a_4 - c_4^* b_4^*$ ;
- $\varphi_{4,2}|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{b_4 c_4\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(f_1(\tau)) \setminus \{b_4 c_4\}}$  y

$$\begin{aligned} & \varphi_{4,2}([b_4c_4]) = [b_4c_4] \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^* b_1^* c_2^* b_2^* c_3^* b_3^* \right. \\ & \quad \cdot \left. \left( (a_4 - c_4^* b_4^*) \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^* b_1^* c_2^* b_2^* c_3^* b_3^* \right)^{n-i-1} \left( c_4^* b_4^* \left( \prod_{j=5}^{4g} a_j \right) c_1^* b_1^* c_2^* b_2^* c_3^* b_3^* \right)^i \right). \end{aligned}$$

Al evaluar la composición  $\varphi_{4,2}\varphi_{4,1}\varphi_{2,2}\varphi_{2,1}$  en  $\tilde{\mu}_2(U_1)$  obtenemos que el potencial  $\varphi_{4,2}\varphi_{4,1}\varphi_{2,2}\varphi_{2,1}(\tilde{\mu}_2(U_1))$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} & a_2[b_2c_2] + a_4[b_4c_4] + c_1^* b_3^* [b_3c_1] + c_3^* b_1^* [b_1c_3] + c_2^* b_4^* [b_4c_2] + c_4^* b_2^* [b_2c_4] \\ & + \sum_{j=5}^{4g} a_j b_j c_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_1^* b_1^* c_2^* b_2^* c_3^* b_3^* c_4^* b_4^* \prod_{j=5}^{4g} a_j \right)^n \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \right. \\ & \quad \cdot [b_4c_2][b_1c_3][b_2c_4][b_3c_1] \left. \right)^n. \end{aligned}$$

Así, los caracjes con potencial  $\mu_2\mu_1(Q(\tau), T(\tau) + W)$  (que es equivalente a derecha a  $\mu_2(Q(f_1(\tau)), U_1)$ ) y  $(Q(\sigma_1), S_1)$  son equivalentes a derecha.

La afirmación se prueba de manera similar para los casos donde  $k \in \{2, 3, \dots, g\}$ .

Sea  $k \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ . Supongamos que la afirmación es valida para todo  $i$  menor o igual a  $k$

$$\mu_{2k}\mu_{2k-1} \cdots \mu_2\mu_1(Q(\tau), T(\tau) + W) \cong (Q(\sigma_k), S_k). \quad (5.13)$$

El potencial  $S_k$  es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}]) \\ & + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}] + \sum_{j=4k+1}^{4g} a_j b_j c_j \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \prod_{j=4k+1}^{4g} a_j \right)^n \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-1} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \right. \\ & \quad \cdot \left. \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n. \end{aligned}$$

Al tomar la permutación respecto al vértice  $2k + 1$ , obtenemos que  $\widetilde{R}_{2k+1} = \widetilde{\mu}_{2k+1}(S_k)$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+1}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+1}] \\
& + c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] \\
& + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \prod_{j=4k+1}^{4g} a_j \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Sea  $\varphi_{4k+1,1}$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_{4k+1,1} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  determinado mediante la regla  $\varphi_{4k+1,1}|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{a_{k+1}\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{a_{k+1}\}}$  y  $\varphi_{4k+1,1}(a_{k+1}) = a_{k+1} - c_{k+1}^* b_{k+1}^*$ . La evaluación de este automorfismo en  $\widetilde{R}_{2k+1}$ ,  $\varphi_{4k+1,1}(\widetilde{R}_{2k+1})$  es cíclicamente equivalente al potencial

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+3}] \\
& + c_{4k+1}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] \\
& + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* (a_{4k+1} - c_{4k+1}^* b_{4k+1}^*) \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Por la Observación 5.30,  $\varphi_{4k+1,1}(\widetilde{R}_{2k+1})$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+3}] \\
& + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i a_{4k+1} \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \left( (a_{k+1} - c_{k+1}^* b_{k+1}^*) \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^{n-i-1} \right. \\
& \quad \cdot \left( c_{k+1}^* b_{k+1}^* \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^i + (-1)^n \left( c_{k+1}^* b_{k+1}^* \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^n \Big) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \cdot \left. \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Tomemos  $\varphi_{4k+1,2}$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_{4k+1,2} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  determinado por  $\varphi_{4k+1,2}|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_{k+1} c_{k+1}]\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_{k+1} c_{k+1}]\}}$  y

$$\begin{aligned}
& \varphi_{4k+1,2}([b_{k+1} c_{k+1}]) = [b_{k+1} c_{k+1}] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \left( (a_{k+1} - c_{k+1}^* b_{k+1}^*) \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^{n-i-1} \right. \\
& \quad \cdot \left. \left( c_{k+1}^* b_{k+1}^* \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^i \right).
\end{aligned}$$

Al evaluar este automorfismo en  $\varphi_{4k+1,1}(\widetilde{R}_{2k+1})$  obtenemos que  $\varphi_{4k+1,2} \varphi_{4k+1,1}(\widetilde{R}_{2k+1})$

es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+3}] \\
& + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( c_{k+1}^* b_{k+1}^* \prod_{j=4k+2}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Sea  $\varphi_{4k+3,1}$  el automorfismo unitriangular  $\varphi_{4k+3,1} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  dado por  $\varphi_{4k+3,1}|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{a_{k+3}\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{a_{k+3}\}}$  y  $\varphi_{4k+3,1}(a_{k+3}) = a_{k+3} - c_{k+3}^* b_{k+3}^*$ .

El potencial  $\varphi_{4k+3,1} \varphi_{4k+1,2} \varphi_{4k+1,1} (\widetilde{R}_{2k+1})$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] \\
& + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} (a_{4k+3} - c_{4k+3}^* b_{4k+3}^*) a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n,
\end{aligned}$$

que es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] \\
& + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i a_{4k+3} a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left( (a_{4k+3} - c_{4k+3}^* b_{4k+3}^*) a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^{n-i-1} \cdot \\
& \quad \cdot \left( c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^i \\
& \quad \left. + (-1)^n \left( c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^n \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Llamemos  $\varphi_{4k+3,2}$  al automorfismo unitriangular  $\varphi_{4k+3,2} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  definido por  $\varphi_{4k+3,2} \Big|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_{k+3} c_{k+3}]\}} = Id \Big|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_{k+3} c_{k+3}]\}} \text{ y}$

$$\begin{aligned}
& \varphi_{4k+3,2}([b_{k+3} c_{k+3}]) = [b_{k+3} c_{k+3}] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left( (a_{4k+3} - c_{4k+3}^* b_{4k+3}^*) a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^{n-i-1} \cdot \\
& \quad \left. \cdot \left( c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^i \right).
\end{aligned}$$

La composición  $\varphi_{4k+3,2} \varphi_{4k+3,1} \varphi_{4k+1,2} \varphi_{4k+1,1}$  es una equivalencia a derecha entre los carcajes con potencial  $\widetilde{\mu}_{k+1}(Q(\sigma_k), S_k)$  y  $(\widetilde{Q}(\sigma_k), O_{2k+1})$ , donde  $O_{2k+1}$  es

igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+1} [b_{4k+1} c_{4k+1}] + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} \\
& + a_{4k+3} [b_{4k+3} c_{4k+3}] + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] \\
& + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \cdot \left. \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Así,  $\mu_{k+1}(Q(\sigma_k), S_k)$  es equivalente a derecha al QP  $(Q(f_{2k+1}(\sigma_k)), U_{2k+1})$ , donde el potencial  $U_{2k+1}$  es de la forma

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+2} b_{4k+2} c_{4k+2} + a_{4k+4} b_{4k+4} c_{4k+4} \\
& + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \cdot b_{4k+4} c_{4k+2} [b_{4k+1} c_{4k+3}] b_{4k+2} c_{4k+4} [b_{4k+3} c_{4k+1}] \cdot \\
& \quad \cdot \left. \prod_{j=g-k}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

La permutación  $\tilde{\mu}_{2k+2}(U_{2k+1})$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+2} [b_{4k+2} c_{4k+2}] + a_{4k+4} [b_{4k+4} c_{4k+4}] \\
& + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + c_{4k+2}^* b_{4k+2}^* [b_{4k+2} c_{4k+2}] \\
& + c_{4k+4}^* b_{4k+4}^* [b_{4k+4} c_{4k+4}] + c_{4k+4}^* b_{4k+2}^* [b_{4k+2} c_{4k+4}] + c_{4k+2}^* b_{4k+4}^* [b_{4k+4} c_{4k+2}] \\
& + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* a_{4k+2} \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k-1}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

Sean  $\varphi_{4k+4,2}, \varphi_{4k+4,1}, \varphi_{4k+2,2}, \varphi_{4k+2,1} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \rangle\rangle$  los automorfismos unitriangulares dados por

- $\varphi_{4k+2,1} |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{a_{4k+2}\})} = Id |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{a_{4k+2}\})}$  y  $\varphi_{4k+2,1}(a_{4k+2}) = a_{4k+2} - c_{4k+2}^* b_{4k+2}^*$ ;
- $\varphi_{4k+2,2} |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{[b_{4k+2} c_{4k+2}]\})} = Id |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{[b_{4k+2} c_{4k+2}]\})}$ , y

$$\begin{aligned}
& \varphi_{4k+2,2}([b_{4k+2} c_{4k+2}]) = [b_{4k+2} c_{4k+2}] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left( (a_{4k+2} - c_{4k+2}^* b_{4k+2}^*) c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* \right)^{n-i-1} \\
& \quad \left. \cdot \left( c_{4k+2}^* b_{4k+2}^* c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* a_{4k+4} \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* \right)^i \right);
\end{aligned}$$

- $\varphi_{4k+4,1} |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{a_{4k+4}\})} = Id |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{a_{4k+4}\})}$ , y  $\varphi_{4k+4,1}(a_{4k+4}) = a_{4k+4} - c_{4k+4}^* b_{4k+4}^*$ ;
- $\varphi_{4k+4,2} |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{[b_{4k+4} c_{4k+4}]\})} = Id |_{Q_1(\widetilde{Q}(f_{2k+1}(\sigma_k)) \setminus \{[b_{4k+4} c_{4k+4}]\})}$  y

$$\begin{aligned}
& \varphi_{4k+4,2}([b_{4k+4}c_{4k+4}]) = [b_{4k+4}c_{4k+4}] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (-1)^n \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* c_{4k+2}^* b_{4k+2}^* c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left( (a_{4k+4} - c_{4k+4}^* b_{4k+4}^*) \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* c_{4k+2}^* b_{4k+2}^* c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* \right)^{n-i-1} \cdot \\
& \quad \left. \cdot \left( c_{4k+4}^* b_{4k+4}^* \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) c_{k+1}^* b_{k+1}^* c_{4k+2}^* b_{4k+2}^* c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* \right)^i \right).
\end{aligned}$$

Al evaluar la composición  $\varphi_{4k+4,2} \varphi_{4k+4,1} \varphi_{4k+2,2} \varphi_{4k+2,1}$  en  $\tilde{\mu}_{2k+2}(U_{2k+1})$  obtenemos que el potencial  $\varphi_{4k+4,2} \varphi_{4k+4,1} \varphi_{4k+2,2} \varphi_{4k+2,1}(\tilde{\mu}_{2k+2}(U_{2k+1}))$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k (c_{4j-3}^* b_{4j-1}^* [b_{4j-1} c_{4j-3}] + c_{4j-1}^* b_{4j-3}^* [b_{4j-3} c_{4j-1}] + c_{4j-2}^* b_{4j}^* [b_{4j} c_{4j-2}] \\
& \quad + c_{4j}^* b_{4j-2}^* [b_{4j-2} c_{4j}]) + a_{4k+2} [b_{4k+2} c_{4k+2}] + a_{4k+4} [b_{4k+4} c_{4k+4}] \\
& + c_{4k+3}^* b_{4k+1}^* [b_{4k+1} c_{4k+3}] + c_{4k+1}^* b_{4k+3}^* [b_{4k+3} c_{4k+1}] + c_{4k+4}^* b_{4k+2}^* [b_{4k+2} c_{4k+4}] \\
& + c_{4k+2}^* b_{4k+4}^* [b_{4k+4} c_{4k+2}] + \sum_{j=4k+5}^{4g} a_j b_j c_j \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left( c_{k+1}^* b_{k+1}^* c_{k+2}^* b_{k+2}^* c_{4k+3}^* b_{4k+3}^* c_{k+4}^* b_{k+4}^* \prod_{j=4k+5}^{4g} a_j \left( \prod_{j=1}^{4k} c_j^* b_j^* \right) \right)^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \left( \prod_{j=0}^{g-k-2} b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2} b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1} b_{4(g-j)-2} c_{4j} b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \prod_{j=g-k-1}^{g-1} [b_{4(g-j)} c_{4(g-j)-2}] [b_{4(g-j)-3} c_{4(g-j)-1}] [b_{4(g-j)-2} c_{4(g-j)}] [b_{4(g-j)-1} c_{4(g-j)-3}] \right)^n.
\end{aligned}$$

De esta manera los QPs  $\mu_{2k+2} \mu_{2k+1}(Q(\sigma_k), S_k)$  y  $(Q(\sigma_{k+1}), S_{k+1})$  son equivalentes a derecha, concluyendo así la afirmación en el caso  $k+1$ .  $\square$

**Observación 5.30.** Sean  $c, d, \varpi \in \mathbb{C} \langle \langle Q(\tau) \rangle \rangle$  caminos tales que  $c\varpi$  y  $d\varpi$  son ciclos. Para cada entero positivo  $n$  se satisface

$$((c-d)\varpi)^n \sim_{\text{cyc}} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i c \varpi ((c-d)\varpi)^{n-i-1} (d\varpi)^i + (-1)^n (d\varpi)^n. \quad (5.14)$$

La afirmación se obtiene al desarrollar apropiadamente  $((c-d)\varpi)^n$ :

$$\begin{aligned} ((c-d)\varpi)^n &\sim_{\text{cyc}} c\varpi ((c-d)\varpi)^{n-1} - ((c-d)\varpi)^{n-1} d\varpi \\ &\sim_{\text{cyc}} c\varpi ((c-d)\varpi)^{n-1} - c\varpi ((c-d)\varpi)^{n-2} d\varpi + ((c-d)\varpi)^{n-2} (d\varpi)^2 \\ &\sim_{\text{cyc}} \cdots \sim_{\text{cyc}} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i c\varpi ((c-d)\varpi)^{n-i-1} (d\varpi)^i + (-1)^n (d\varpi)^n. \end{aligned}$$

**Lema 5.31.** *Dada una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  como en el Lema 5.28 y  $\tau$  la triangulación de esta superficie dada en el mismo lema (cf. figura 5.5), si  $\mathbf{x} = (x_p)_{p \in \mathbb{P}}$  es una colección de escalares distintos de cero, para cualquier potencial  $V \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que únicamente involucra potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos (en particular es rotacionalmente disjunto de  $S(\tau, \mathbf{x})$ ), los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  son equivalentes a derecha.*

*Demostración.* La superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  tiene dos puntos marcados  $p$  y  $q$ , cuyas valencias con respecto a la triangulación  $\tau$  son  $8g$  y  $4g$  respectivamente, donde  $g$  es el género de la superficie  $\Sigma$ . Sean  $\omega_p$  y  $\omega_q$  flechas en las  $g$ -órbitas alrededor de  $p$  y  $q$  respectivamente ( $n_{\omega_p} = 8g$  y  $n_{\omega_q} = 4g$ ).

El potencial  $V$  es de la forma

$$V \sim_{\text{cyc}} \sum_{n=2}^{\infty} v_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=2}^{\infty} v_{q,n} (\mathcal{G}(\omega_q))^n \quad (5.15)$$

para algunos escalares (posiblemente cero)  $v_{p,n}, v_{q,n} \in \mathbb{C}$  para toda  $n \geq 2$ .

Afirmación: Existen una sucesión de potenciales  $(V_m)_{m=8g}^{\infty} \subset \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , y una sucesión de automorfismos unitriangulares  $(\varphi_m)_{m=8g}^{\infty}$  del álgebra completa de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , que satisfacen las siguientes propiedades:

- $V_{8g} = V$ ;
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{depth}(\varphi_m) = \infty$ ;
- y para cada  $m \geq 8g$  cumplen:
  - el automorfismo  $\varphi_m$  es una equivalencia a derecha entre los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V_m)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V_{m+1})$ ;
  - el potencial  $V_m$  involucra únicamente potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos;
  - y  $\text{short}(V_m) \geq m$ .

Demostraremos de manera recursiva esta afirmación.

*Demostración de la afirmación.* Supongamos que para un entero  $m \geq 8g$  hemos definido un potencial  $V_m \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que sólo involucra potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos y  $\text{short}(V_m) \geq m$ . Podemos escribir al potencial  $V_m$  como

$$V_m \sim_{\text{cyc}} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_{q,n} (\mathcal{G}(\omega_q))^n \quad (5.16)$$

para algunos escalares (posiblemente cero)  $\lambda_{p,n}, \lambda_{q,n} \in \mathbb{C}$  para toda  $n \geq 2$ . Sean  $r_{p,m}$  (respectivamente  $r_{q,m}$ ) el primer valor  $n$  para el cual  $\lambda_{p,n} \neq 0$  (respectivamente  $\lambda_{q,n} \neq 0$ ) si esta  $n$  existe, e  $\infty$  si no existe tal  $n$ . Notemos que  $\text{short}(V_m) = \min(r_{p,m}8g, r_{q,m}4g) > 8g$ .

Definamos el automorfismo unitriangular  $\Upsilon_{p,m} : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad  $8g(r_{p,m} - 1)$ , dado mediante la regla  $\Upsilon_{p,m}|_{Q_1(\tau) \setminus \{\omega_p\}} = \text{Id}|_{Q_1(\tau) \setminus \{\omega_p\}}$  y  $\Upsilon_{p,m}(\omega_p) = \omega_p - \frac{\lambda_{p,r_{p,m}}}{x\omega_p} \omega_p (\mathcal{G}(\omega_p))^{r_{p,m}-1}$ . El potencial  $\Upsilon_{p,m}(S(\tau, x) + V_m)$  es igual a

$$\begin{aligned} & S(\tau, x) - \frac{\lambda_{p,r_{p,m}}}{x\omega_p} f^2(\omega_p) f(\omega_p) \omega_p (\mathcal{G}(\omega_p))^{r_{p,m}-1} - \lambda_{p,r_{p,m}} (\mathcal{G}(\omega_p))^{r_{p,m}} \\ & + \sum_{n=r_{p,m}}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n} (\mathcal{G}(\omega_q))^n \\ & + \left( \Upsilon \left( \sum_{n=r_{p,m}}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n \right) - \sum_{n=r_{p,m}}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n \right), \end{aligned}$$

que es cíclicamente equivalente a

$$S(\tau, x) + R + H,$$

donde los potenciales  $R$  y  $H$  son

$$\begin{aligned} R &= \frac{\lambda_{p,r_{p,m}}}{x\omega_p} f(\omega_p) \omega_p (\mathcal{G}(\omega_p))^{r_{p,m}-1} f^2(\omega_p), \\ H &= \sum_{n=r_{p,m}+1}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n} (\mathcal{G}(\omega_q))^n \\ & + \left( \Upsilon \left( \sum_{n=r_{p,m}}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n \right) - \sum_{n=r_{p,m}}^{\infty} \lambda_{p,n} (\mathcal{G}(\omega_p))^n \right). \end{aligned}$$

Notemos que  $2 \text{short}(R) - 3 \geq 2 * 8g(r_{p,m} - 1) + 3 \geq 8gr_{p,m} + 3 > 8gr_{p,m} \geq m$  y  $\text{short}(H) > m$ . Por el Corolario 5.27 existe un automorfismo unitriangular  $\Pi_{p,m}$  del álgebra de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad al menos  $\min(m - 3, 8g(r_{p,m} - 1))$  que hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R + H)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) +$

$H + \xi$ ), para algún potencial  $\xi$  que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y que satisfice  $\text{short}(\xi) > m \geq 8g$ . Nótese que  $\xi$  sólo involucra potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos ya que cada  $g$ -ciclo tiene longitud a lo más  $8g$ .

Observemos que el potencial  $H$  es de la forma

$$H \sim_{\text{cyc}} \sum_{n=r_{p,m}+1}^{\infty} \kappa_{p,n}(\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n, \quad (5.17)$$

para algunos escalares  $k_{p,n} \in \mathbb{C}$  para toda  $n \geq r_{p,m} + 1$ .

Consideremos el automorfismo unitriangular  $\Upsilon_{q,m} : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  dado por  $\Upsilon_{q,m}|_{Q_1(\tau) \setminus \{\omega_q\}} = \text{Id}|_{Q_1(\tau) \setminus \{\omega_q\}}$  y  $\Upsilon_{q,m}(\omega_q) = \omega_q - \frac{\lambda_{q,r_{q,m}}}{x\omega_q} \omega_q (\mathcal{G}(\omega_q))^{r_{q,m}-1}$ . Este automorfismo es de profundidad  $4g(r_{q,m})$ . Al evaluar este automorfismo en  $S(\tau, x) + H + \xi$  obtenemos

$$\begin{aligned} S(\tau, x) &- \frac{\lambda_{q,r_{q,m}}}{x\omega_q} f^2(\omega_q) f(\omega_q) \omega_q (\mathcal{G}(\omega_q))^{r_{q,m}-1} - \lambda_{q,r_{q,m}} (\mathcal{G}(\omega_q))^{r_{q,m}} \\ &+ \sum_{n=r_{p,m}+1}^{\infty} \kappa_{p,n}(\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n \\ &+ \left( \Upsilon \left( \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n \right) - \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n \right) + \Upsilon_{q,m}(\xi), \end{aligned}$$

que es cíclicamente equivalente a

$$S(\tau, x) + R' + H',$$

donde los potenciales  $R'$  y  $H'$  son

$$\begin{aligned} R' &= \frac{\lambda_{q,r_{q,m}}}{x\omega_q} f(\omega_q) \omega_q (\mathcal{G}(\omega_q))^{r_{q,m}-1} f^2(\omega_q), \\ H' &= \sum_{n=r_{q,m}+1}^{\infty} \kappa_{p,n}(\mathcal{G}(\omega_p))^n + \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n \\ &+ \left( \Upsilon \left( \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n \right) - \sum_{n=r_{q,m}}^{\infty} \lambda_{q,n}(\mathcal{G}(\omega_q))^n \right) + \Upsilon(\xi). \end{aligned}$$

Notemos que  $2 \text{short}(R') - 3 \geq 2 * 4g(r_{q,m} - 1) + 3 \geq 4gr_{q,m} + 3 > 4gr_{q,m} \geq m$  y  $\text{short}(H') > m$ . Por el Corolario 5.27 existe un automorfismo unitriangular  $\Pi_{q,m}$  del álgebra de caminos  $\mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad al menos  $\min(m - 3, 4g(r_{q,m} - 1))$  que hace equivalentes a derecha a los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, x) + R' + H')$  y  $(Q(\tau), S(\tau, x) +$

$H' + \xi'$ ), para algún potencial  $\xi'$  que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y que satisface  $\text{short}(\xi') > m \geq 8g$ . Nótese que  $\xi'$  sólo involucra potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos ya que cada  $g$ -ciclo tiene longitud a lo más  $8g$ .

El potencial  $H'$  únicamente involucra potencias de  $g$ -ciclos, y  $\text{short}(H') > m \geq 8g$ , por lo que sólo involucra potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos. El automorfismo unitriangular  $\varphi_m = \prod_{q,m} \Upsilon_{q,m} \prod_{p,m} \Upsilon_{q,m}$  de profundidad al menos  $\min(m - 3, 8g(r_{p,m} - 1), 4g(r_{q,m} - 1)) \geq m - 8g$ , es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V_m)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V_{m+1})$ , donde  $V_{m+1} = H' + \xi'$ . El potencial  $V_{m+1}$  y el automorfismo  $\varphi_m$  satisfacen las propiedades de la afirmación. Finalmente observemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{depth}(\varphi_m) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} m - 8g = \infty,$$

con lo cual concluimos la afirmación.  $\square$

Por el Lema 1.28, el automorfismo unitriangular  $\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m \varphi_{m-1} \cdots \varphi_8$  es una equivalencia a derecha entre los QP  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V_8)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$ .  $\square$

Al considerar la triangulación  $\tau$  dada en el Lema 5.28, todo potencial  $S$  no degenerado sobre  $Q(\tau)$  es de la forma  $S(\tau, \mathbf{x}) + V$ , donde  $V$  únicamente involucra potencias mayores a dos de  $g$ -ciclos. El Lema 5.31, nos indica que el QP  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}) + V)$  es equivalente a derecha al QP  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$ . Por el lema 5.9, todos los carcajes con potencial de la forma  $(Q(\tau), S(\tau, \mathbf{x}))$  son equivalentes débilmente a derecha. Así, concluimos el siguiente Teorema.

**Teorema 5.32.** *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con dos puntos marcados ( $|\mathbb{M}| = 2$ ), que cumpla que  $\Sigma$  tiene frontera vacía y género positivo. Para toda triangulación ideal  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , el carcaj  $Q(\tau)$  admite sólo un potencial no degenerado, salvo equivalencia débil a derecha.*

### 5.3. Superficies de género positivo con sólo una pun- ción

A diferencia de las superficies de género positivo, frontera vacía y al menos dos puntos marcados, las superficies de género positivo, frontera vacía y exactamente un punto marcado admiten potenciales no degenerados y no equivalentes débilmente a derecha (cf. Teorema 5.36).

Recordemos que para toda triangulación  $\tau$  de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con un punto marcado y frontera vacía se satisface la propiedad (5.3), por lo que, para todo potencial  $S \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , el QP  $(Q(\tau), S)$  satisface la propiedad  $\mathcal{N}4$  (cf. Observación 4.12).

Toda pareja  $(\lambda_1, m_1)$  formada por un escalar distinto de cero  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  y un entero positivo  $m_1 \in \mathbb{N}^{>0}$  determina un potencial  $S(\tau, \lambda, m)$  (descrito en (4.3)), donde  $\lambda = \{\lambda_1\}$  y  $m = \{m_1\}$ .

**Proposición 5.33.** *Dados un escalar distinto de cero  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  y un entero positivo  $m_1$ , si  $\tau$  y  $\sigma$  son dos triangulaciones ideales de una superficie con un punto marcado  $(\Sigma, \mathbb{M})$  y frontera vacía, tales que  $\sigma = f_i(\tau)$  para algún arco  $i \in \tau$ , entonces los carcajes con potencial  $\mu_i(Q(\tau), S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  y  $(Q(\sigma), S(\sigma, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  son equivalentes a derecha.*

*Demostración.* Para toda flecha  $a \in Q_1(\tau)$  se satisface  $n_a = 12(\text{género}(\Sigma)) - 6$ , denotemos por  $n$  a este valor.

Sean  $b_1, b_2 \in Q_1(\tau)$  las dos flechas que inician en el vértice  $i$ , es decir,  $t(b_1) = i = t(b_2)$ , y  $b_2 = \overline{b_1}$ . Llamemos  $a_1 = f(b_1)$ ,  $c_1 = f^2(b_1)$ ,  $a_2 = f(b_2)$  y  $c_2 = f^2(b_2)$ , figura 5.7.

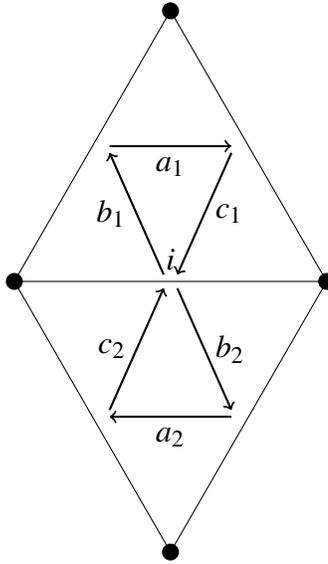


Figura 5.7: Las flechas incidentes en el arco  $i$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es de la forma

$$S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + (\mathcal{G}(a_1))^{m_1},$$

ya que hay sólo una punción y sólo un  $g$ -ciclo (salvo equivalencia rotacional).

Existen  $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  y  $s, t \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  que cumplen que  $r, s, s+1, t, t+1$  son distintos entre si y  $a_2 = g^r(a_1)$ ,  $c_1 = g^s(a_1)$ ,  $b_2 = g^{s+1}(a_1)$ ,  $c_2 = g^t(a_1)$  y  $b_1 = g^{t+1}(a_1)$ . Al ordenar en forma creciente los valores  $r, s, t$  se tienen 6 casos:

**Caso 1:**  $1 \leq r < s < t < n - 1$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es rotacionalmente equivalente a

$$\begin{aligned} S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) \sim_{\text{cyc}} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \\ & + (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1)) b_1 c_2 G(t-s-2, g^{s+2}(a_1)) b_2 c_1 \cdot \\ & \cdot G(s-r-1, g^{r+1}(a_1)) a_2 G(r-1, g(a_1)) a_1)^{m_1}. \end{aligned}$$

Al premutar con respecto al vértice correspondiente al arco  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) \sim_{\text{cyc}} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 [b_1 c_1] + a_2 [b_2 c_2] + \\ & + c_1^* b_1^* [b_1 c_1] + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1] \\ & + (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1)) [b_1 c_2] G(t-s-2, g^{s+2}(a_1)) [b_2 c_1] \cdot \\ & \cdot G(s-r-1, g^{r+1}(a_1)) a_2 G(r-1, g(a_1)) a_1)^{m_1} \\ \sim_{\text{cyc}} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 [b_1 c_1] + a_2 [b_2 c_2] + c_1^* b_1^* [b_1 c_1] \\ & + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1] + (C_1 a_2 D_1 a_1)^{m_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 = & G(n-t-2, g^{t+2}(a_1)) [b_1 c_2] G(t-s-2, g^{s+2}(a_1)) [b_2 c_1] \cdot \\ & \cdot G(s-r-1, g^{r+1}(a_1)), \end{aligned}$$

y

$$D_1 = G(r-1, g(a_1)).$$

**Caso 2:**  $1 \leq r < t < s < n - 1$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es rotacionalmente equivalente a

$$\begin{aligned} S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) \sim_{\text{cyc}} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \\ & + (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1)) b_2 c_1 G(s-t-2, g^{t+2}(a_1)) b_1 c_2 \cdot \\ & \cdot G(t-r-1, g^{r+1}(a_1)) a_2 G(r-1, g(a_1)) a_1)^{m_1}. \end{aligned}$$

Al premutar con respecto al vértice correspondiente al arco  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + \\
&+ c_1^*b_1^*[b_1c_1] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\
&+ (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2] \cdot \\
&\cdot G(t-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2G(r-1, g(a_1))a_1)^{m_1} \\
&\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_1^*b_1^*[b_1c_1] \\
&+ c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_2a_2D_2a_1)^{m_1},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
C_2 &= G(n-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2] \cdot \\
&\cdot G(t-r-1, g^{r+1}(a_1)),
\end{aligned}$$

y

$$D_2 = G(r-1, g(a_1)).$$

**Caso 3:**  $1 \leq s < r < t < n-1$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es rotacionalmente equivalente a

$$\begin{aligned}
S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \\
&+ (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1))b_1c_2G(t-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2 \cdot \\
&\cdot G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))b_2c_1G(s-2, g(a_1))a_1)^{m_1}.
\end{aligned}$$

Al premutar con respecto al vértice correspondiente al arco  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + \\
&+ c_1^*b_1^*[b_1c_1] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\
&+ (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2 \cdot \\
&\cdot G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-1, g(a_1))a_1)^{m_1} \\
&\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_1^*b_1^*[b_1c_1] \\
&+ c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_3a_2D_3a_1)^{m_1},
\end{aligned}$$

donde

$$C_3 = (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-r-1, g^{r+1}(a_1)),$$

y

$$D_3 = G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-1, g(a_1)).$$

**Caso 4**  $1 \leq t < r < s < n-1$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es rotacionalmente equivalente a

$$\begin{aligned} S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \\ &+ (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1))b_2c_1G(s-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2 \cdot \\ &\cdot G(r-t-2, g^{t+2}(a_1))b_1c_2G(t-2, g(a_1))a_1)^{m_1}. \end{aligned}$$

Al premutar con respecto al vértice correspondiente al arco  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + \\ &+ c_1^*b_1^*[b_1c_1] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\ &+ (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2 \cdot \\ &\cdot G(r-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-1, g(a_1))a_1)^{m_1} \\ &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_1^*b_1^*[b_1c_1] \\ &+ c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_4a_2D_4a_1)^{m_1}, \end{aligned}$$

donde

$$C_4 = (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-r-1, g^{r+1}(a_1))),$$

y

$$D_4 = G(r-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-1, g(a_1)).$$

**Caso 5**  $1 \leq s < t < r \leq n-1$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es rotacionalmente equivalente a

$$\begin{aligned} S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \\ &+ (G(n-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2G(r-t-2, g^{t+2}(a_1))b_1c_2 \cdot \\ &\cdot G(t-s-2, g^{s+2}(a_1))b_2c_1G(s-1, g(a_1))a_1)^{m_1}. \end{aligned}$$

Al premutar con respecto al vértice correspondiente al arco  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + \\
&+ c_1^*b_1^*[b_1c_1] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\
&+ (G(n-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2G(r-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2] \cdot \\
&\cdot G(t-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-1, g(a_1))a_1)^{m_1} \\
&\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_1^*b_1^*[b_1c_1] \\
&+ c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_5a_2D_5a_1)^{m_1},
\end{aligned}$$

donde

$$C_5 = G(n-r-1, g^{r+1}(a_1)),$$

y

$$\begin{aligned}
D_5 = &G(r-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1] \cdot \\
&\cdot G(s-1, g(a_1)).
\end{aligned}$$

**Caso 6**  $1 \leq t < s < r \leq n-1$ .

El potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es rotacionalmente equivalente a

$$\begin{aligned}
S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \\
&+ (G(n-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))b_2c_1 \cdot \\
&\cdot G(s-t-2, g^{t+2}(a_1))b_1c_2G(t-1, g(a_1))a_1)^{m_1}.
\end{aligned}$$

Al premutar con respecto al vértice correspondiente al arco  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) &\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + \\
&+ c_1^*b_1^*[b_1c_1] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\
&+ (G(n-r-1, g^{r+1}(a_1))a_2G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1] \cdot \\
&\cdot G(s-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-1, g(a_1))a_1)^{m_1} \\
&\sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_1^*b_1^*[b_1c_1] \\
&+ c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_6a_2D_6a_1)^{m_1},
\end{aligned}$$

donde

$$C_6 = G(n-r-1, g^{r+1}(a_1)),$$

y

$$D_6 = G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2] \cdot G(t-1, g(a_1)).$$

Para cada uno de estos seis casos ( $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) se cumple

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})) \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_1^*b_1^*[b_1c_1] \\ + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_k a_2 D_k a_1)^{m_1}. \end{aligned}$$

Observese que los caminos  $C_k, D_k$  no utilizan las flechas  $a_1, a_2, [b_1c_1]$ , y  $[b_2c_2]$ .

Para cada  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  definimos el automorfismo unitriangular  $\varphi_{k,1} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  mediante la regla  $\varphi_{k,1}|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{a_1\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{a_1\}}$  y  $\varphi_{k,1}(a_1) = a_1 - c_1^*b_1^*$ . El potencial  $\varphi_{k,1}(\tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})))$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] \\ + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (C_k a_2 D_k (a_1 - c_1^*b_1^*))^{m_1} \\ \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] \\ + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\ + \sum_{j=0}^{m_1-1} (-1)^j a_1 C_k a_2 D_k ((a_1 - c_1^*b_1^*) C_k a_2 D_k)^{m_1-j-1} (c_1^*b_1^* C_k a_2 D_k)^j \\ + (-1)^n (c_1^*b_1^* C_k a_2 D_k)^{m_1}, \end{aligned}$$

la segunda equivalencia rotacional se sigue de la Observación 5.30.

Para cada  $k \in \{1, \dots, 6\}$ , llamemos  $\varphi_{k,2}$  al automorfismo unitriangular  $\varphi_{k,2} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  determinado por  $\varphi_{k,2}|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_1c_1]\}} = Id|_{\widetilde{Q}_1(\tau) \setminus \{[b_1c_1]\}}$  y

$$\varphi_{k,2}([b_1c_1]) = [b_1c_1] - \sum_{j=0}^{m_1-1} (-1)^j C_k a_2 D_k ((a_1 - c_1^*b_1^*) C_k a_2 D_k)^{m_1-j-1} (c_1^*b_1^* C_k a_2 D_k)^j.$$

Al componer  $\varphi_{k,2}$  con  $\varphi_{k,1}$  obtenemos que  $\varphi_{k,2}\varphi_{k,1}(\tilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})))$  es cíclicamente equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_2^*b_2^*[b_2c_2] \\ + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (-1)^n (c_1^*b_1^* C_k a_2 D_k)^{m_1}. \end{aligned}$$

Para cada  $k \in \{1, \dots, 6\}$ , definimos los automorfismos unitriangulares  $\varphi_{k,4}, \varphi_{k,3} : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q}(\tau) \rangle\rangle$  como los automorfismos determinados mediante las reglas

- $\varphi_{k,3}|_{\widetilde{Q_1(\tau)\setminus\{a_2\}}} = Id|_{\widetilde{Q_1(\tau)\setminus\{a_2\}}}$  y  $\varphi_{k,3}(a_2) = a_2 - c_2^*b_2^*$ ;
- $\varphi_{k,4}|_{\widetilde{Q_1(\tau)\setminus\{[b_2c_2]\}}} = Id|_{\widetilde{Q_1(\tau)\setminus\{[b_2c_2]\}}}$  y  $\varphi_{k,4}([b_2c_2])$  igual a
$$[b_2c_2] - (-1)^n \sum_{j=0}^{m_1-1} (-1)^j D_k c_1^* b_1^* C_k ((a_2 - c_2^* b_2^*) D_k c_1^* b_1^* C_k)^{m_1-j-1} (c_2^* b_2^* D_k c_1^* b_1^* C_k)^j.$$

La evaluación de la composición  $\varphi_{k,4}\varphi_{k,3}$  en  $\varphi_{k,2}\varphi_{k,1}(\widetilde{\mu}_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})))$  es cíclicamente equivalente a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1[b_1c_1] + a_2[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] + (c_1^*b_1^*C_k c_2^*b_2^*D_k)^{m_1}.$$

Para cada caso  $k \in \{1, \dots, 6\}$  al sustituir explícitamente a  $C_k$  y  $D_k$  obtenemos lo siguiente:

**Caso 1:**  $1 \leq r < s < t < n - 1$ .

El potencial  $\mu_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  es equivalente a derecha (sobre  $\mu_i(\tau) = Q(\sigma)$ ) al potencial

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\ & + (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-s-2, g^{s+2}(a_1)))[b_2c_1] \cdot \\ & \cdot G(s-r-1, g^{r+1}(a_1))c_2^*b_2^*G(r-1, g(a_1))c_1^*b_1^*)^{m_1}. \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $1 \leq r < t < s < n - 1$ .

El potencial  $\mu_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  es equivalente a derecha (sobre  $\mu_i(\tau) = Q(\sigma)$ ) al potencial

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\ & + (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_1c_2]G(s-t-2, g^{s+2}(a_1)))[b_2c_1] \cdot \\ & \cdot G(t-r-1, g^{r+1}(a_1))c_2^*b_2^*G(r-1, g(a_1))c_1^*b_1^*)^{m_1}. \end{aligned}$$

**Caso 3:**  $1 \leq s < r < t < n - 1$ .

El potencial  $\mu_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  es equivalente a derecha (sobre  $\mu_i(\tau) = Q(\sigma)$ ) al potencial

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + c_2^*b_2^*[b_2c_2] + c_2^*b_1^*[b_1c_2] + c_1^*b_2^*[b_2c_1] \\ & + (G(n-t-2, g^{t+2}(a_1))[b_1c_2]G(t-r-1, g^{r+1}(a_1))c_2^*b_2^* \cdot \\ & \cdot G(r-s-2, g^{s+2}(a_1))[b_2c_1]G(s-1, g(a_1))c_1^*b_1^*)^{m_1}. \end{aligned}$$

**Caso 4:**  $1 \leq t < r < s < n - 1$ .

El potencial  $\mu_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  es equivalente a derecha (sobre  $\mu_i(\tau) = Q(\sigma)$ ) al potencial

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1] \\ & + (G(n-s-2, g^{s+2}(a_1)) [b_2 c_1] G(s-r-1, g^{r+1}(a_1)) c_2^* b_2^* \\ & \cdot G(r-t-2, g^{t+2}(a_1)) [b_1 c_2] G(t-1, g(a_1)) c_1^* b_1^*)^{m_1}. \end{aligned}$$

**Caso 5:**  $1 \leq s < t < r \leq n - 1$ .

El potencial  $\mu_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  es equivalente a derecha (sobre  $\mu_i(\tau) = Q(\sigma)$ ) al potencial

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1] \\ & + (G(n-r-1, g^{r+1}(a_1)) c_2^* b_2^* G(r-t-2, g^{t+2}(a_1)) [b_1 c_2] \cdot \\ & \cdot G(t-s-2, g^{s+2}(a_1)) [b_2 c_1] G(s-1, g(a_1)) c_1^* b_1^*)^{m_1}. \end{aligned}$$

**Caso 6:**  $1 \leq t < s < r \leq n - 1$ .

El potencial  $\mu_i(S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  es equivalente a derecha (sobre  $\mu_i(\tau) = Q(\sigma)$ ) al potencial

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1] \\ & + (G(n-r-1, g^{r+1}(a_1)) c_2^* b_2^* G(r-s-2, g^{s+2}(a_1)) [b_2 c_1] \cdot \\ & \cdot G(s-t-2, g^{t+2}(a_1)) [b_1 c_2] G(t-1, g(a_1)) c_1^* b_1^*)^{m_1}. \end{aligned}$$

En cada uno de los seis casos los carcajes con potencial  $(Q(\sigma), S(\sigma, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  y  $\mu_i(Q(\tau), S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  son equivalentes a derecha. □

Todo potencial de la forma  $S(\sigma, \lambda_1, m_1)$  es reducido. Así, de la proposición anterior se obtiene el Corolario 5.34. Cabe mencionar el hecho de que en cualquier triangulación  $\tau$  de una superficie con un punto marcado, no existen triángulos autoplegados, por lo que, podemos entender la mutación de  $Q(\tau)$  con respecto a cualquier vértice a través de la operación de reemplazo de un arco ordinario de  $\tau$ .

**Corolario 5.34.** *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con un punto marcado ( $|\mathbb{P}| = 1$ ), tal que  $\Sigma$  tiene frontera vacía y género positivo. Para toda triangulación ideal  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , todo escalar  $\lambda_1 \neq 0$  y todo entero positivo  $m_1 \in \mathbb{N}^{>0}$ ; el potencial  $S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\})$  es no degenerado sobre  $Q(\tau)$ .*

**Lema 5.35.** *Dada una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con un punto marcado, frontera vacía y género positivo. Para toda triangulación ideal  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , el potencial  $T(\tau)$  (descrito en (5.6)) es no degenerado sobre  $Q(\tau)$ , y el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), T(\tau))$  es un espacio vectorial de dimensión infinita.*

*Demostración.* El carcaj con potencial  $(Q(\tau), T(\tau))$  es reducido, por tanto, el hecho de que el carcaj con potencial  $(Q(\tau), T(\tau))$  es no degenerado se obtiene de la siguiente afirmación:

Afirmación: Dado un arco  $i \in \tau$ , sea  $\sigma = f_i(\tau)$ , la triangulación obtenida al aplicar el reemplazo del arco  $i$ . Los QPs  $\mu_i(Q(\tau), T(\tau))$  y  $(Q(\sigma), T(\sigma))$  son equivalentes a derecha.

*Demostración de la afirmación.* Sean  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  las flechas en los triángulos que tienen como uno de sus lados al arco  $i$ , como en la figura 5.7. El potencial  $T(\tau)$  es de la forma

$$T(\tau) \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2.$$

Así, al premutar respecto al vértice  $i$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i(T(\tau)) \sim_{\text{cyc}} & \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 [b_1 c_1] + a_2 [b_2 c_2] + c_1^* b_1^* [b_1 c_1] + c_2^* b_2^* [b_2 c_2] \\ & + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1]. \end{aligned}$$

El automorfismo unitriangular  $\varphi : \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q(\tau)} \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle \widetilde{Q(\sigma)} \rangle\rangle$  dado mediante la regla  $\varphi|_{\widetilde{Q_1(\tau)} \setminus \{a_1, a_2\}} = \text{Id}|_{\widetilde{Q_1(\tau)} \setminus \{a_1, a_2\}}$ ,  $\varphi(a_1) = a_1 - c_1^* b_1^*$  y  $\varphi(a_2) = a_2 - c_2^* b_2^*$  es tal que

$$\varphi(\tilde{\mu}_i(T(\tau))) \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}\}} \mathcal{F}(\gamma) + a_1 [b_1 c_1] + a_2 [b_2 c_2] + c_2^* b_1^* [b_1 c_2] + c_1^* b_2^* [b_2 c_1],$$

concluyendo así la afirmación. □

Analizemos ahora el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), T(\tau))$ . Para cada flecha  $a \in Q_1(\tau)$  se tiene  $\partial_a(T(\tau)) = f^2(a)f(a)$ . Por lo tanto, el ideal Jacobiano  $J(T(\tau))$  es la cerradura del espacio vectorial generado por los  $f$ -camino de longitud al menos dos y los  $fg$ -camino mezclados. Así, cualquier suma (posiblemente infinita) de idempotentes del álgebra completa de caminos y  $g$ -camino es distinta de 0 en el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), T(\tau))$ . De esta manera  $\mathcal{P}(Q(\tau), T(\tau))$  es de dimensión infinita (como espacio vectorial). □

**Teorema 5.36.** *Sea  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con un punto marcado ( $|\mathbb{P}| = 1$ ), en la que  $\Sigma$  tiene frontera vacía y género positivo. Para toda triangulación ideal  $\tau$  de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ , el carcaj  $Q(\tau)$  admite una cantidad numerable de potenciales no degenerados y no equivalentes débilmente a derecha.*

*Demostración.* Por el Corolario 5.34, todo potencial de la forma  $S(\tau, \lambda_1, m_1)$  es no degenerado sobre  $Q(\tau)$  (para cualesquiera  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  y  $m_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ). El carcaj con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda_1, m_1))$  satisface la propiedad  $\mathcal{N}4$  (cf. Observación 4.12). El Teorema 4.16 nos dice que  $\mathcal{B} + J(Q(\tau), S(\tau, \lambda_1, m_1))$  es una base (como espacio vectorial) del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda_1, m_1))$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \{e_i \mid i \in Q_0(\tau)\} \cup \{G(r, a) \mid a \in Q_1(\tau), \text{ y } 1 \leq r, r < m_1 n_a\} \\ & \cup \{G(m_1 n_\theta, \theta) \mid \theta \in \Theta\}. \end{aligned}$$

De esta manera, si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  son dos escalares distintos de cero, y  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  son dos enteros positivos que cumplen  $m_2 > m_1$ , entonces la dimensión del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda_1, m_1))$  es menor a la dimensión del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau, \lambda_2, m_2))$  (ambas dimensiones son finitas); y por tanto los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda_1, m_1))$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda_2, m_2))$  no son débilmente equivalentes a derecha.

Cabe mencionar que el lema 5.35 nos dice que el potencial  $T(\tau)$  es no degenerado y el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), T(\tau))$  es de dimensión infinita, por lo que, el potencial  $T(\tau)$  no es equivalente débilmente a derecha sobre  $Q(\tau)$  a ningún potencial de la forma  $S(\tau, \lambda, m)$ . □

Si  $\tau$  es una triangulación ideal de una superficie con un punto marcado, frontera vacía y género al menos uno, tal que  $\tau$  satisface las propiedades (5.4) (toda triangulación satisface la propiedad (5.3)), entonces todo potencial no degenerado sobre  $Q(\tau)$  es equivalente a derecha sobre  $Q(\tau)$  a un potencial de la forma  $T(\tau) + U$ , donde  $U$  es rotacionalmente disjunto de  $T(\tau)$  (cf. Observación 5.13). Por el Corolario 5.23 el potencial  $T(\tau) + U$  es equivalente a derecha al potencial  $T(\tau) + W$ , donde  $W$  involucra únicamente potencias de  $g$ -ciclos. De esta manera, si  $W \neq 0$ , entonces  $W$  es cíclicamente equivalente a  $S(\tau, \lambda, m) + V$ , para algún potencial  $V$  que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y que satisface  $\text{short}(V) > \text{short}(S(\tau, \lambda, m))$ .

**Conjetura 5.37.** *Si  $\tau$  es una triangulación ideal de una superficie  $(\Sigma, \mathbb{M})$  con un punto marcado, frontera vacía y género mayor a 1, entonces todo potencial no degenerado sobre el carcaj  $Q(\tau)$  es equivalente débilmente a derecha al potencial  $T(\tau)$ , ó equivalente débilmente a derecha a un potencial  $S(\tau, \{1\}, m_1)$ , para algún entero positivo  $m_1$ .*

El Lema 5.40 prueba algunos casos para los cuales un potencial de la forma  $S(\tau, \lambda, m) + V$  es equivalente a derecha al potencial  $S(\tau, \lambda, m)$ .



Así, los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \{\lambda_1\}, \{m_1\}))$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \{\lambda_2\}, \{m_1\}))$  son equivalentes débilmente a derecha. □

**Lema 5.40.** Sean  $(\Sigma, \mathbb{M})$  una superficie con un punto marcado, frontera vacía y género positivo y  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, \mathbb{M})$ . Dado un potencial de la forma  $S(\tau, \lambda, m) \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$ , si  $V \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es un potencial que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y tal que  $\text{short}(V) \geq 2\text{short}(S(\tau, \lambda, m))$ , entonces los carcajes con potencial  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + V)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$  son equivalentes a derecha.

*Demostración.* El Lema es consecuencia de la siguiente afirmación.

**Afirmación:** Si  $W \in \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  es un potencial que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y tal que  $\text{short}(W) \geq 2\text{short}(S(\tau, \lambda, m))$ , entonces existe un potencial  $W'$  que sólo involucra potencias de  $g$ -ciclos y un automorfismo unitriangular  $\varphi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  que satisfacen:

- $\text{short}(W') > \text{short}(W)$ ;
- $\text{depth}(\varphi) \geq \text{short}(W) - \text{short}(S(\tau, \lambda, m))$ ;
- y  $\varphi$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + W)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + W')$ .

*Demostración de la afirmación.* El potencial  $S(\tau, \lambda, m)$  es de la forma

$$S(\tau, \lambda, m) \sim_{\text{cyc}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}(\gamma) + \lambda_1 (\mathcal{G}(\omega))^{m_1}.$$

Mientras que  $V$  es de la forma

$$W \sim_{\text{cyc}} \sum_{k=r}^{\infty} \mu_k (\mathcal{G}(\omega))^k,$$

donde  $r$  es la mínima de las potencias de  $g$ -ciclos que aparecen en  $V$  ( $r \geq m_1 + 1$ ).

Consideremos el automorfismo unitriangular  $\Psi_1 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad  $\text{short}(W) - \text{short}(S(\tau, \lambda, m))$ , dado mediante la regla  $\Psi_1|_{Q_1(\tau) \setminus \{\omega\}} = I|_{Q_1(\tau) \setminus \{\omega\}}$  y  $\Psi_1(\omega) = \omega - \frac{\mu_r}{\lambda_1} \omega (\mathcal{G}(\omega))^{r-m_1}$ . Al evaluar el automorfismo  $\Psi_1$  en  $S(\tau, \lambda, m) + W$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_1(S(\tau, \lambda, m) + W) &= S(\tau, \lambda, m) - \frac{\mu_r}{\lambda_1} \mathcal{F}(\omega) (\mathcal{G}(\omega))^{r-m_1} - \mu_r (\mathcal{G}(\omega))^r + W \\ &\quad + (\Psi_1(W) - W) \\ &\sim_{\text{cyc}} S(\tau, \lambda, m) - \frac{\mu_r}{\lambda_1} f(\omega) \omega (\mathcal{G}(\omega))^{r-m_1} f^2(\omega) \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^{\infty} \mu_k (\mathcal{G}(\omega))^k + (\Psi_1(W) - W). \end{aligned}$$

Definamos el automorfismo unitriangular  $\Psi_2 : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad  $\text{short}(W) - \text{short}(S(\tau, \lambda, m))$ , dado por  $\Psi_2|_{Q_1(\tau) \setminus \{f^2(\omega)\}} = I|_{Q_1(\tau) \setminus \{f^2(\omega)\}}$  y  $\Psi_2(f^2(\omega)) = f^2(\omega) + \frac{\mu_r}{\lambda_1}(\mathcal{G}(\omega))^{r-m_1} f^2(\omega)$ . Observemos que  $\Psi_2\Psi_1(S(\tau, \lambda, m) + W)$  es cíclicamente equivalente a

$$S(\tau, \lambda, m) - \frac{\mu_r}{\lambda_1} f(\omega) \omega (\Psi_2((\mathcal{G}(\omega))^{r-m_1} f^2(\omega)) - ((\mathcal{G}(\omega))^{r-m_1} f^2(\omega))) \\ + \Psi_2\left(\sum_{k=r+1}^{\infty} \mu_k (\mathcal{G}(\omega))^k + (\Psi_1(W) - W)\right),$$

y  $\text{short}(\Psi_2\Psi_1(S(\tau, \lambda, m) + W) - S(\tau, \lambda, m)) \geq \text{short}(W) - \text{short}(S(\tau, \lambda, n)) + 3$ . Por la Proposición 5.22 (al tomar  $Z = \lambda_1(\mathcal{G}(\omega))^{m_1}$  y  $U = \Psi_2\Psi_1(S(\tau, \lambda, m) + W) - T(\tau)$ ) existen un autorfismo unitriangular  $\phi : \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  de profundidad al menos  $\text{short}(W) - \text{short}(S(\tau, \lambda, n))$  y un potencial  $W'$  de profundidad al menos  $\text{short}(W) - \text{short}(S(\tau, \lambda, n))$  que involucra únicamente potencias de  $g$ -ciclos, que satisfacen que  $\phi$  es una equivalencia a derecha entre los carcajes con potencial  $(Q(\tau), \Psi_2\Psi_1(S(\tau, \lambda, m) + W))$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + W')$ . La afirmación se concluye al tomar  $\varphi = \phi\Psi_2\Psi_1$ .  $\square$

De la afirmación, podemos obtener recursivamente una sucesión de potenciales  $(W_n)_{n \geq 0}$  y una sucesión de automorfismo unitriangulares  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  que satisfacen:

- $W_0 = W$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{depth}(\varphi_n) = \infty$ ;
- y para cada  $n \geq 1$  el automorfismo  $\varphi_n$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + W_{n-1})$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + W_n)$ .

Por el Lema 1.28 el automorfismo unitriangular  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1$  es una equivalencia a derecha entre los QPs  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m) + W)$  y  $(Q(\tau), S(\tau, \lambda, m))$ .  $\square$

# Apéndice A

## Producto tensorial

**Definición A.1** ([1], Definición A.12). *Dados un grupo abeliano aditivo  $G$  y un anillo  $A$ , sean  $M$  y  $N$  un  $A$ -módulo derecho y un  $A$ -módulo izquierdo respectivamente. Decimos que una función  $f : M \times N \rightarrow G$  es  $A$ -balanceada si para cualesquiera  $a, a' \in M$ ,  $b, b' \in N$  y  $\lambda \in A$  se cumple:*

1.  $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$
2.  $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$
3.  $f(a\lambda, b) = f(a, \lambda b)$

**Definición A.2** ([1], Definición A.13). *Sean  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo derecho y  $N$  un  $A$ -módulo izquierdo. Definimos el producto tensorial de  $M$  y  $N$  sobre  $A$  como un grupo abeliano  $M \otimes N$  junto con una función  $A$ -balanceada  $h : M \times N \rightarrow M \otimes N$ , con la siguiente propiedad universal: para toda función  $A$ -balanceada  $f : M \times N \rightarrow G$  ( $G$  grupo abeliano aditivo) existe un único morfismo de grupos  $\bar{f} : M \otimes N \rightarrow G$  tal que  $\bar{f}h = f$ .*

Podemos resaltar que el producto tensorial  $M \otimes N$  se considera sobre el anillo  $A$  denotándolo como  $M \otimes_A N$ .

**Proposición A.3** ([1], Proposición A.14). *Para cualesquier pareja  $(M, N)$  formada por un  $A$ -módulo derecho y un  $A$ -módulo izquierdo respectivamente, existe el producto tensorial  $M \otimes N$ , y éste es único salvo isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Veamos una construcción del producto tensorial:

Llamemos  $F$  al  $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base  $M \times N$ , es decir,

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(m_i, n_i) \mid n \in \mathbb{N}, \text{ y } (m_i, n_i) \in M \times N, a_i \in \mathbb{Z} \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Sea  $H \leq F$  el subgrupo de  $F$  generado por

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n),$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n'),$$

$$(ma, n) - (m, an),$$

para cada  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  y  $a \in A$ . El cociente  $F/H$  junto con la proyección natural  $h : M \times N \rightarrow F/H$  es el producto tensorial de  $M$  y  $N$ . Si para cada  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  y  $a \in A$ , denotamos como  $m \otimes n$  al elemento  $(m, n) + H \in F/H$ , entonces

$$h(m + m', n) = (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n = h(m, n) + h(m', n),$$

$$h(m, n + n') = m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' = h(m, n) + h(m, n'), \text{ y,}$$

$$h(ma, n) = ma \otimes n = m \otimes an = h(m, an),$$

y por tanto la función  $h$  es  $A$ -balanceada. Además, toda función  $A$ -balanceada  $f : M \times N \rightarrow G$  induce un morfismo de grupos  $f' : F \rightarrow G$ , tal que para todo  $(m, n) \in M \times N$   $f'(m, n) = f(m, n)$ . Dado que  $f$  es  $A$ -balanceada, entonces  $H \subseteq \text{Ker}(f')$ , por lo que existe un único morfismo  $\bar{f} : F/H \rightarrow G$ , tal que  $\bar{f}(h(m, n)) = f(m, n)$  para todo  $(m, n) \in M \times N$ . Esto concluye que  $F/H$  es el producto tensorial de  $M$  y  $N$ , denotaremos a  $F/H$  como  $M \otimes N$  y a sus elementos como  $m \otimes n$ .

El producto tensorial es único salvo isomorfismo. Si  $P$  es un grupo y  $g : M \times N \rightarrow P$  es una función  $A$ -balanceada, tales que juntos forman un producto tensorial de  $M$  y  $N$ , entonces, dado que  $M \otimes N$  y  $h$  forman otro producto tensorial, por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo de grupos  $f_1 : P \rightarrow M \otimes N$  tal que  $f_1 g = h$ , y existe un único morfismo de grupos  $f_2 : M \otimes N \rightarrow P$  tal que  $f_2 h = g$ . De esta forma  $(f_2 f_1) g = g$  y  $(f_1 f_2) h = h$ , por la propiedad universal del producto tensorial los únicos morfismos de grupos que cumplen  $\bar{g} g = g$  y  $\bar{h} h = h$  son  $I_P$  e  $I_{M \otimes N}$  respectivamente, con lo cual concluimos que  $P \cong M \otimes N$ . □

**Proposición A.4** ([1], Proposición A.15). Sean  $M, M', M''$   $A$ -módulos derechos y  $N, N', N''$   $A$ -módulos izquierdos. Si  $f : M \rightarrow M'$ ,  $f_1 : M' \rightarrow M''$  son morfismos de  $A$ -módulos derechos y  $g : N \rightarrow N'$ ,  $g_1 : N' \rightarrow N''$  son morfismos de  $A$ -módulos izquierdos, entonces se tienen los siguientes resultados:

1. Existe un morfismo de grupos  $f \otimes g : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$  tal que para todo  $m \otimes n \in M \otimes N$   $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ .
2. La composición de los morfismos  $(f_1 \otimes g_1)(f \otimes g)$  es igual a  $f_1 f \otimes g_1 g$ .
3. Si  $f$  y  $g$  son isomorfismos, entonces  $f \otimes g$  es un isomorfismo.

4. El automorfismo  $I_M \otimes I_N$  es igual a  $I_{M \otimes N}$ .

*Demostración.*

1. Definamos una función  $\alpha : M \times N \rightarrow M' \times N'$  tal que  $\alpha(m, n) = (f(m), g(n))$ . Si  $h'$  es la función  $A$ -balanceada del producto tensorial  $M' \otimes N'$ , entonces la composición  $h' \circ \alpha$  es una función  $A$ -balanceada; y por la propiedad universal del producto tensorial, existe un morfismo de grupos  $\beta : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$  tal que  $\beta(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$  para todo  $m \otimes n \in M \otimes N$ . Denotemos a esta función  $\beta$  como  $f \otimes g$ .
2. Por el inciso anterior aplicado a las funciones  $f_1$  y  $g_1$ , existe un morfismo de grupos  $f_1 \otimes g_1 : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$  tal que  $(f_1 \otimes g_1)(m' \otimes n') = (f_1(m') \otimes g_1(n'))$  para cada  $m' \otimes n' \in M' \otimes N'$ . Para todo  $m \otimes n \in M \otimes N$  se tiene  $(f_1 \otimes g_1)(f \otimes g)(m \otimes n) = (f_1 \otimes g_1)(f(m) \otimes g(n)) = f_1(f(m)) \otimes g_1(g(n))$ .
3. La función  $\alpha$  definida en el inciso 1 es un isomorfismo de  $A$ - $A$ -bimódulos, así  $f \otimes g$  es isomorfismo.
4. Este hecho es claro.

□



# Bibliografía

- [1] A. Argudin. “Teoría y conceptos precursores de los anillos semiperfectos”. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM (2014).
- [2] G. Cerulli, D. Labardini. “Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part III: Tagged triangulations and cluster monomials”. *Compositio Mathematica* (2012), vol. 148 (6), 1833-1866.
- [3] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky. “Quivers with potentials and their representations I: Mutations”. *Selecta Mathematica* (2008) vol. 14, 59-119.
- [4] A. Felikson, M. Shapiro, P. Tumarkin. “Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type”. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 14 (2012) no. 4 1135-1180.
- [5] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston. “Cluster A algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster Complexes”. *Acta Math* (2008), vol. 201, 83-146.
- [6] C. Geiss, D. Labardini, J. Schröer. “The representation type of Jacobian algebras”. *Advances in Mathematics* (2016), vol. 290, 364-452.
- [7] J. Geuenich. “Quivers with potentials for quivers with 3 vertices”. Master Thesis, University of Bonn (2013).
- [8] D. Labardini. “Quivers with potentials associated with triangulations of Riemann surfaces”. Tesis de doctorado. Northeastern University (2010).
- [9] D. Labardini. “Quivers with potentials associated to triangulated surfaces”. *Proc. London Math. Soc* (2009), vol. 98 (3), 797-839.
- [10] D. Labardini. “Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part II: Arc Representations”. arXiv preprint arXiv:0909.4100 [math.RT] (23 sep 2009).
- [11] D. Labardini. “Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part IV: Removing boundary assumptions”. *Selecta Mathematica* (Enero 2016), vol. 22 (1), 145-189.

- [12] S. Fomin, A. Zelevinsky. "Cluster algebras I: Foundations". Math. Soc. 15 (2002), no.2, 497-529.
- [13] S. Ladkani. "On Jacobian algebras from closed surfaces". arXiv:1207.3778v1 [math.RT] (16 Jul 2012).
- [14] S. Trepode, Y. Valdivieso. "On finite dimensional Jacobian algebras". Bol. Soc. Mat. Mex. (2015) 1-14.

# Índice alfabético

## Álgebra

- completa de caminos  $R\langle\langle A \rangle\rangle$ , 6
- de caminos  $R\langle A \rangle$ , 6
- Jacobiana  $\mathcal{P}(A, S)$ , 13

Ajenos, *véase* elementos ajenos

## Aparición

- de un camino, 7

## Arco, 34

- etiquetado, 53

## Arcos

- compatibles, 34
- isotópicos, 34

Automorfismo unitriangular, 11

## Base

- de caminos, 6

Cambio de flechas, 11

## Camino, 6

- $f$ , *véase*  $f$ -camino
- $fg$ , *véase*  $fg$ -camino-mezclado
- $g$ , *véase*  $g$ -camino

## Carcaj, 5

- acíclico, 7
- de adyacencias, 40
- de adyacencias no reducido, 61

Carcaj con Potencial, 17

- no degenerado, 32
- reducido, 20
- trivial, 19

## Ciclo, 13

- $f$ , *véase*  $f$ -ciclo
- $fg$ , *véase*  $fg$ -ciclo-mezclado

$g$ , *véase*  $g$ -ciclo

involucrado en un potencial, 13

depth, *véase* Profundidad

Derivada cíclica, 13

## Elementos de $R\langle\langle A \rangle\rangle$

ajenos, 7

## Equivalencia

- a derecha, 17
- cíclica, 14
- débil a derecha, 18
- rotacional, 13

## Espacio

- de derivadas cíclicas, 13
- de flechas, 5
  - reducido, 20
  - trivial, 20
- de vértices, 5

$f$ -ciclo, 50

$fg$ -camino-mezclado, 51

$fg$ -ciclo-mezclado, 51

## Firma

- débil de una triangulación, 57
- de una triangulación, 57

Flip, *véase* reemplazo

$g$ -camino, 50

$g$ -ciclo, 50

## Ideal

- Jacobiano, 13
- $m$ , 7

## Involucra

- un potencial a un camino, 13
- Lazo, 34
- Longitud
  - de un camino, 6
- m, véase Ideal
- Matriz de adyacencias, 40
- Mutación
  - de un Carcaj con potencial, 29
- Potencial, 13
  - $S(\tau, \lambda, m)$ , 66
  - $S(\tau, x)$ , 63
  - no degenerado, 32
  - rotacionalmente disjunto de otro, 13
- Permutación
  - de un carcaj, 26
  - de un Carcaj con potencial, 26
- Producto tensorial, 133
- Profundidad
  - de un automorfismo unitriangular, 11
- Punción, 33
- Punto marcado, 33
- Rango, 37
- Reemplazo, 37
- Restricción
  - de carcajes con potencial, 77
- short, 8
- Superficie marcada, 33
- Triángulo, 34
  - autoplegado, 34
- Triangulación
  - etiquetada, 54
- Triangulación de una superficie, 34
- Valencia de una punción, 34