



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

CONTROL DE ORIENTACIÓN BASADO EN CONTRACCIÓN PARA SATÉLITES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
HERNÁNDEZ RAMÍREZ JUAN CARLOS

TUTOR
DR. YU TANG XU
POSGRADO DE INGENIERÍA, UNAM.

MÉXICO D.F. SEPTIEMBRE DE 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario: Dr. Marcos Ángel González Olvera

Vocal: Dr. Yu Tang Xu

1^{er}. Suplente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

2^{do}. Suplente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Lugar donde se realizó la tesis:
Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Yu Tang Xu

FIRMA

Agradecimientos

Al Doctor Yu Tang Xu le agradezco por su dedicación como asesor en el desarrollo de esta tesis. Aprecio profundamente el tiempo, paciencia y esfuerzo para guiarme y orientarme a lo largo de este trabajo, por escuchar y resolver toda duda que tuviera por simple que fuera. Gracias por la disposición de escuchar y analizar conmigo toda idea planteada. Toda reunión con usted fue para mi una lección nueva. Este trabajo no sería posible sin la confianza, motivación y conocimientos brindados por usted.

A mis padres y mi hermano les agradezco por compartir conmigo los éxitos y frustraciones de cada día a lo largo de esta etapa. Gracias por su apoyo, por su paciencia, por su confianza y por todo el amor y cariño. He podido llegar al final de esta etapa gracias a ustedes. Gracias también a mi familia de cuatro patas por toda la alegría que traen a mi vida.

A Angélica le agradezco por terminar otra etapa a mi lado. Gracias pequeña por estar ahí para mi siempre.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología le agradezco el apoyo proporcionado para concluir con el plan de estudios y para la realización de esta tesis.

Resumen

Esta tesis presenta una metodología para el diseño de controladores de seguimiento orientación y observadores para satélites equipados con ruedas de reacción o con propulsores de gas. La metodología, basada en teoría de contracción, permite definir condiciones para garantizar en ausencia de ruido la convergencia de las trayectorias del sistema a una trayectoria prescrita y la convergencia exponencial del observador al sistema nominal. La herramienta también permite establecer condiciones para garantizar estabilidad cuando el observador se implanta en el controlador diseñado por separado. Finalmente, si las mediciones están contaminadas con ruido fuerte, se emplea la sincronización de observadores como herramienta para atenuar el efecto del ruido cuando se cuenta con sensores redundantes. Los resultados teóricos se verifican con simulaciones para las dos diferentes clases de satélites.

Abstract

This thesis presents a methodology for designing attitude tracking controllers and observers for satellites equipped with either reaction wheels or gas jet actuators. The proposed methodology, based on recent contraction theory, enables the designer to, in the absence of noise, establish conditions that guarantee convergence of the system trajectories to a given behavior and exponential convergence of the observer to the nominal system. Furthermore, this tool allows the individual, separate design of controller and observer and establishes conditions to guarantee stability when the latter is implanted in the former. Finally, if attitude measurements are highly noisy, observer synchronization is used as a tool to reduce the noise impact when redundant sensors are present. Theoretical results are verified with simulations for both classes of satellites.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Lista de Figuras	VIII
Lista de Tablas	XII
1. Introducción	1
1.1. Metas	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Alcances	3
1.4. Estructura del trabajo	3
2. Preliminares	5
2.1. Cinemática y dinámica de rotación	5
2.2. Teoría de contracción	18
2.3. Sincronización	21
3. Control para seguimiento de orientación por retroalimentación de estados	23
4. Diseño de observadores de orientación	33
4.1. Observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción	34
4.2. Observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas	37
4.3. Observadores de orden completo	39
4.4. Redundancia de sensores y sincronización de sistemas ante presencia de ruido	46
5. Control para seguimiento de orientación por retroalimentación de salida	49
5.1. Retroalimentación de salidas para satélite con ruedas de reacción	50
5.2. Retroalimentación de salidas para satélite con propulsor de gas	51
5.3. Retroalimentación de salidas ante fenómeno de desplegado	53

6. Simulaciones y Resultados	55
6.1. Control de seguimiento por retroalimentación de estados	55
6.2. Observadores	62
6.3. Control de seguimiento por retroalimentación de salidas	71
6.4. Sincronización de observadores	85
7. Conclusiones y Trabajo a Futuro	99
Anexo	101
Bibliografía	109

Lista de Figuras

2.1. Rotación en 2D	5
2.2. Sistemas de referencia	6
6.1. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 5 I$, $\lambda = 2$	56
6.2. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 5 I$, $\lambda = 2$	57
6.3. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$	58
6.4. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$	58
6.5. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] bajo fenómeno de desplegado con ley de control por retroalimentación de estados ($q(0) = -q_d(0)$). $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$	59
6.6. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] bajo fenómeno de desplegado con ley de control por retroalimentación de estados ($q(0) = -q_d(0)$). $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$	60
6.7. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] bajo fenómeno de desplegado ($q(0) = -q_d(0)$) con ley de control por retroalimentación de estados modificada. $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$	61
6.8. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] bajo fenómeno de desplegado ($q(0) = -q_d(0)$) con ley de control por retroalimentación de estados modificada. $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$	61
6.9. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$	63
6.10. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = 8 I$, $\gamma = 5$	63
6.11. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = 100 I$, $\gamma = 5$	64

6.12. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = \text{diag}(100, 10, 0.1)$, $\gamma = 0.01$	65
6.13. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.5), $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$	66
6.14. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.5), $K_o = 50 I$, $\gamma = 5$	66
6.15. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.2) con M no diagonal, $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$	67
6.16. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.2) con M no diagonal, $K_o = 50 I$, $\gamma = 5$	68
6.17. Cuaternión estimado \hat{q} y error de estimación de cuaternión \tilde{q} en [rad/s] para observador de orden completo para satélite con ruedas de reacción (4.7), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$	69
6.18. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden completo con ruedas de reacción (4.7), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$	69
6.19. Cuaternión estimado \hat{q} y error de estimación de cuaternión \tilde{q} en [rad/s] para observador de orden completo para satélite con propulsor de gas (4.11), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$	70
6.20. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden completo para satélite con propulsor de gas (4.11), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$	71
6.21. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2, K_o = 20 I$, $\gamma = 5$	72
6.22. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2, K_o = 20 I$, $\gamma = 5$	72
6.23. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2, K_o = 20 I$, $\gamma = 5$	73
6.24. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2, K_o = 1 I$, $\gamma = 5$	74
6.25. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2, K_o = 1 I$, $\gamma = 5$	74

6.26. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 1I$, $\gamma = 5$	75
6.27. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3). $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 20I$, $\gamma = 5$	76
6.28. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3). $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 20I$, $\gamma = 5$	76
6.29. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3). $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 20I$, $\gamma = 5$	77
6.30. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con ley de control (3.12) y observador (4.5) para M no diagonal. $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 20I$, $\gamma = 5$	78
6.31. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con ley de control (3.12) y observador (4.5) para M no diagonal. $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 20I$, $\gamma = 5$	78
6.32. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3) para M no diagonal. $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 20I$, $\gamma = 5$	79
6.33. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para giro de 270° . $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 1I$, $\gamma = 5$	80
6.34. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para giro de 270° . $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 1I$, $\gamma = 5$	80
6.35. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para giro de 270° . $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 1I$, $\gamma = 5$	81
6.36. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r estándar (3.5).	82
6.37. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r estándar (3.5).	82
6.38. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r estándar (3.5).	83
6.39. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r modificado (3.13).	83
6.40. Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r modificado (3.13).	84

6.41. Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r modificado (3.13).	84
6.42. Perfiles de par en [Nm] empleados en sincronización de observadores	85
6.43. Cuaternión medido, estimado con observador de orden completo y con observadores sincronizados (N=5).	86
6.44. Velocidad angular en [rad/s] estimada con observador de orden reducido, observador de orden completo completo y con observadores sincronizados (N=5).	87
6.45. Acercamiento en segundo 10 para q_0 medido y estimados.	88
6.46. Acercamiento en segundo 10 para estimaciones de ω_1 en [rad/s]	88
6.47. Cuaternión medido, estimado con observador de orden completo y con observadores sincronizados (N=5).	89
6.48. Velocidad angular en [rad/s] estimada con observador de orden reducido, observador de orden completo completo y con observadores sincronizados (N=5).	90
6.49. Acercamiento en segundo 10 para q_0 medido y estimados.	90
6.50. Acercamiento en segundo 10 para estimaciones de ω_1 en [rad/s]	91
6.51. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden reducido.	94
6.52. Medición de cuaternión y de velocidad angular en [rad/s] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden reducido.	94
6.53. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden completo.	95
6.54. Estimación de cuaternión y de velocidad angular en [rad/s] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden completo.	95
6.55. Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador sincronizado.	96
6.56. Estimación de cuaternión y de velocidad angular en [rad/s] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador sincronizado.	96

Lista de Tablas

- 6.1. ERMS comparativo para estimados de cuaternión y velocidad angular. Satélite con ruedas de reacción, $N=5$ 92
- 6.2. ERMS comparativo para estimados de cuaternión y velocidad angular. Satélite con propulsores de gas, $N=5$ 92
- 6.3. ERMS de observadores sincronizados para satélite con ruedas de reacción. . . . 92
- 6.4. ERMS de observadores sincronizados para satélite con propulsor de gas. 93

Capítulo 1

Introducción

El control de orientación de cuerpo rígido ha sido uno de los problemas más estudiados en las últimas décadas. Motivado especialmente por sistemas aeroespaciales como satélites y aeronaves, controlar la orientación de un sistema es un objetivo importante en vehículos terrestres y submarinos, así como en robots industriales [1].

En contraste con el problema de control de posición, el control de orientación se vuelve más complejo debido a la representación matemática de ésta. La representación principal para la orientación en tres dimensiones es el conjunto de matrices ortonormales cuyo determinante es uno: matrices de rotación (grupo especial ortonormal 3 $SO(3)$). Este espacio de configuración puede presentar dificultades para el desarrollo de controladores y observadores. Si bien existen resultados fuertes en este espacio [38], es preferible trabajar con diversas parametrizaciones de orientación que presentan cualidades más deseables [39]. Es necesario realizar el esfuerzo para entender las características de cada parametrización y cómo los resultados obtenidos en un espacio se traducen en $SO(3)$.

En la aplicación concreta de satélites artificiales, el éxito de la misión va más allá de colocarlo en órbita: el satélite debe poder recopilar información útil y comunicarse con el centro de comando en tierra para transmitir esta información. Ambas tareas requieren que los instrumentos pertinentes del satélite estén orientados adecuadamente, por lo general durante ventanas de tiempo muy reducidas [7]. Para ello, es necesario un control de orientación adecuado. Dependiendo de la precisión de la operación, un control de regulación no es suficiente. Esquemas de regulación y seguimiento han sido extensamente desarrollados con anterioridad [19–21, 24]. Los desarrollos son para modelos generales de satélites, pero se enfocan en un único tipo de actuador. Además, estos esquemas suponen mediciones de posición y velocidad angular disponibles y libres de ruido.

Un satélite convencional mide su propia orientación mediante instrumentos como sensores solares, mapas de estrellas y vectores de referencia de campo magnético o gravedad terrestres. Recientemente, con el avance en tecnología de sistemas microelectromecánicos (MEMS), ha aumentando el uso de Unidades de Medición Inercial, o IMU, por sus siglas en inglés: una colección

de acelerómetros, giroscopios y en ocasiones, magnetómetros. Estos dispositivos permiten conocer la orientación con mediciones complementarias, también aportan mediciones de velocidad angular. Sin embargo, todas las mediciones están generalmente sujetas a ruido y en particular las mediciones de velocidad angular son poco confiables. Existen trabajos de instrumentación dedicados exclusivamente a acondicionar estas señales para su análisis o uso posterior [2, 3]. Dentro del problema de control de orientación, se han propuesto diferentes maneras de enfrentar este problema.

Algunos autores desarrollan leyes de control capaces de lograr regulación y seguimiento de orientación prescindiendo por completo de mediciones de velocidad [5, 6, 35]. Si bien la regulación empleando únicamente datos de orientación se logra globalmente, en aquellos desarrollos para seguimiento las condiciones sobre trayectorias deseadas y regiones de validez pueden ser muy restrictivas. Ninguno de estos desarrollos considera que la medición de orientación pueda ser ruidosa o poco confiable.

Una alternativa es el desarrollo de observadores. Observadores de orden completo y orden reducido han sido exitosamente desarrollados para reconstruir orientación y velocidad angular [22, 30]. En la mayoría de los casos, sin embargo, se desarrolla únicamente el problema de observación y no se estudia la posibilidad de usar los datos estimados como entrada a un controlador. El efecto de estados estimados en el lazo de control no es trivial debido a que son sistemas no lineales. En [4] se estudia este problema y se derivan una serie de condiciones para garantizar estabilidad.

Este trabajo desarrolla el problema de control de orientación para regulación y seguimiento utilizando teoría de contracción como herramienta principal. Se usan cuaterniones de rotación como parametrización y se consideran los dos tipos de actuadores más comunes en satélites pequeños, propulsores de gas y ruedas de reacción. El trabajo enfrenta el problema de mediciones incompletas desarrollando también con teoría de contracción observadores de velocidad angular partiendo de aquél desarrollado en [30]. Para retomar el problema de control, se estudia la viabilidad de emplear estados estimados dentro de un lazo de control, para ello se opera en el contexto de sistemas jerárquicos [9]. Para el caso con mediciones contaminadas se desarrollan observadores de orden completo y se emplea teoría de sincronización con el objetivo de llevar las trayectorias sincronizadas cercanas al sistema libre de ruido [11].

1.1. Metas

El trabajo busca estudiar las propiedades de la representación de cuaterniones para emplearlos en diseño de controladores y observadores de orientación. Empleando herramientas de contracción, puede garantizarse la convergencia del error de orientación a cero, así como la convergencia exponencial de los estados del observador a los estados reales del sistema.

El desarrollo individual basado en contracción permite considerar al observador y controlador como dos sistemas contrayentes. Se desarrolla su estructura cuando se considera que operan juntos para permitir su análisis como una jerarquía de sistemas contrayentes y derivar condiciones de convergencia del sistema completo. Finalmente, se aprovecha la redundancia de sistemas de medición en satélites para emplear teoría de sincronización cuando se considera al sistema contaminado por ruido para reducir el efecto de éste.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un esquema para seguimiento de orientación empleando únicamente mediciones de salida, en otras palabras, considerando únicamente mediciones de orientación sin velocidad angular. Se presenta una metodología basada en contracción para el desarrollo independiente de controlador y de observador tal que puedan obtenerse de forma transparente condiciones para garantizar la convergencia cuando operan juntos.

1.3. Alcances

La metodología desarrollada en este trabajo para el acoplamiento de observadores y controladores diseñados individualmente mediante teoría de contracción puede extenderse a una variedad más amplia de sistemas dinámicos, como los sistemas lagrangianos en general. El resultado principal de este trabajo presenta una alternativa a [32] para obtener condiciones para la equivalencia cierta.

Por último, las herramientas de sincronización pueden también usarse para reducir el impacto del ruido en sensores en una gran variedad de sistemas donde se contemplen sensores redundantes.

1.4. Estructura del trabajo

El trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se definen la estructura y propiedades de los sistemas de orientación de cuerpo rígido. Se presentan las ecuaciones dinámicas y cinemáticas, se introduce el concepto de cuaternión y se define el error de orientación y su dinámica.

También se introducen una serie de conceptos y definiciones necesarios para estudiar sistemas dinámicos con teoría de contracción. Finalmente, se presenta la sincronización como una herramienta para recuperar el comportamiento libre de ruido a partir de múltiples sistemas ruidosos acoplados.

En el Capítulo 3 se desarrolla primero una ley de control contrayente, válida para satélites equipados con ruedas de reacción o propulsores, para garantizar la convergencia de los errores de seguimiento a cero cuando se poseen mediciones plenas de los estados. Se presenta también una alternativa para combatir el fenómeno de desplegamiento.

Después, en el Capítulo 4 se desarrollan observadores contrayentes de orden reducido y completo para cada clase de satélite. El objetivo principal es recuperar el dato de velocidad angular cuando sólo se dispone de la medición de la orientación de la aeronave.

En el Capítulo 5 se combinan los resultados de los dos capítulos anteriores: se analiza con teoría de contracción el efecto en la convergencia del sistema cuando se utilizan estados estimados en la ley de control. El análisis permite obtener condiciones para garantizar la convergencia exponencial de los errores de seguimiento y estimación a cero.

Por último, en el Capítulo 6 se presenta un esquema para reducir el efecto del ruido cuando se consideran mediciones de orientación contaminadas. Se desarrolla un esquema de observadores de orden completo sincronizados.

El Capítulo 7 presenta simulaciones de los esquemas desarrollados en el capítulo anterior para verificar su eficacia. En el caso de sistemas sincronizados, se cuantifica también el efecto de aumentar el número de sistemas acoplados.

Por último, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Cinemática y dinámica de rotación

Matrices de Rotación

Partiendo del ejemplo más simple en dos dimensiones, un objeto puede girar alrededor de un sistema de referencia fijo. Para representar este giro, se le asigna al objeto un sistema de referencia propio. Esto se muestra en la Figura 2.1:

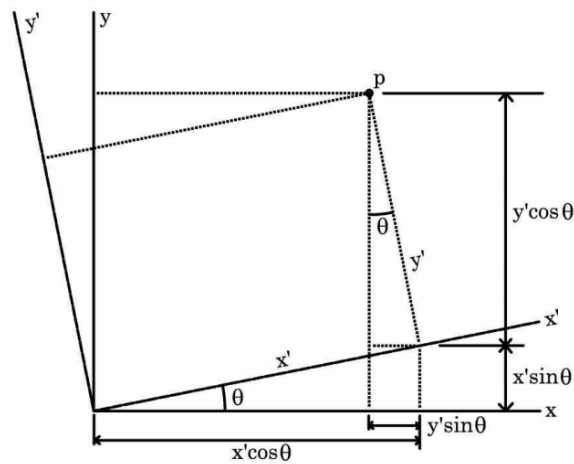


Figura 2.1: Rotación en 2D

Las coordenadas del punto P , (x, y) pueden expresarse en términos de los vectores (x', y') y viceversa:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\y &= x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta)\end{aligned}$$

O, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

La matriz que permite la transformación se le conoce como matriz de cosenos directores, o matriz de rotación transforma vectores del marco de referencia (x', y') al marco de referencia (x, y) .

Esta idea puede escalarse al espacio de tres dimensiones. La orientación de un cuerpo en el espacio se determina con dos triadas de vectores ortonormales dextrógiros, o marcos de referencia, con un origen común, como se muestra en la figura siguiente:

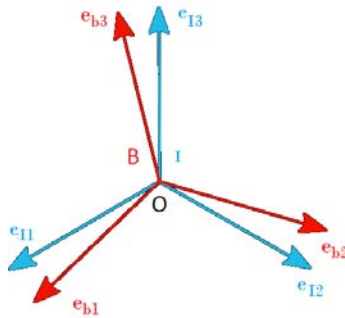


Figura 2.2: Sistemas de referencia

Éstos sistemas de referencia se describen como:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= (\hat{e}_{I_1}, \hat{e}_{I_2}, \hat{e}_{I_3}) \\ \hat{b} &= (\hat{e}_{b_1}, \hat{e}_{b_2}, \hat{e}_{b_3}) \end{aligned}$$

El primero, \hat{I} , es el marco de referencia inercial que se encuentra permanentemente fijo a un punto siempre conocido. El segundo, \hat{b} , es el marco de referencia del cuerpo rígido, se fija en el centro de masa del cuerpo y rota con él. Cada vector de \hat{b} puede ser mapeado en \hat{I} con una transformación lineal, de la forma:

$$\hat{e}_{I_i} = {}^I A_b \hat{e}_{b_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Las transformaciones ${}^I A_b$ pueden englobarse en una matriz en el grupo especial ortonormal tres, $SO(3) = R \in \mathbb{R}^3, \det(R) = 1$, denominada matriz de rotación y escrita como ${}^I R_b$. Los elementos r_{ij} de ${}^I R_b$ son los cosenos directores entre \hat{I} y \hat{b} , es decir:

$$r_{ij} = \bar{e}_{I_i} \cdot \bar{e}_{b_j}$$

Dado que \hat{b} y \hat{I} son ortonormales, R es también ortonormal. Esto implica que su determinante es unitario, con cualquier signo. Sin embargo, dado que los marcos de referencia son dextrógiros,

R se denomina especial, o propia, lo que implica que su determinante siempre es igual a uno. Estas dos propiedades definen al grupo especial $SO(3)$:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid RR^T = I, \det(R) = 1\} \quad (2.1)$$

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ un vector arbitrario (o vector físico [36]). Sus coordenadas en las bases \hat{I} y \hat{b} son x^I y x^b , respectivamente. La relación entre ambos está definida por la matriz de rotación:

$$x^I = {}^I R_b x^b$$

La matriz de rotación así definida se dice que lleva del marco de referencia en el cuerpo al marco de referencia inercial. Para simplificar la notación, en adelante en este trabajo a la matriz ${}^I R_b$ se le nombrará simplemente R . En otras palabras, toda matriz R en adelante se refiere exclusivamente a la matriz de rotación que mapea vectores del marco de referencia en el cuerpo al marco de referencia inercial. Se retomará la nomenclatura original sólo cuando sea necesario para mayor claridad. Entonces:

$$x^I = R x^b$$

Es importante señalar que ciertos trabajos usan una definición opuesta para la matriz de rotación [20, 21], es decir $R = {}^b R_I$, por lo que $x^b = R x^I$. Se debe siempre verificar cuál definición se usa en cada trabajo para evitar inconsistencias en desarrollos posteriores.

Las propiedades de $SO(3)$ (2.1) permiten obtener fácilmente el mapeo inverso, del marco de referencia inercial al marco de referencia en el cuerpo:

$$x^b = {}^b R_I x^I = ({}^I R_b)^T x^I = R^T x^I$$

En general, la orientación de un cuerpo respecto a un marco de referencia inercial queda completamente determinada por la matriz de rotación R , por lo que comúnmente ésta es la salida a controlar de sistemas de control de orientación.

Operador Antisimétrico

El operador vectorial producto cruz aparece siempre que se desarrollan ecuaciones de velocidad y aceleración de sistemas multivariable. En general, es más simple trabajar con el producto estándar de matrices que con el producto cruz. Para ello se define el operador antisimétrico $S(\cdot)$.

Definición 2.1. Para todo $u \in \mathbb{R}^3$, es decir, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$, $S(u)$ se define como:

$$S(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Teorema 2.1. *Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^3$, el operador antisimétrico $S(\cdot)$ verifica las siguientes propiedades :*

$$S(u)v = u \times v \quad (2.3)$$

$$S(u)v = -S(v)u \quad (2.4)$$

$$S(\alpha u + \beta v) = \alpha S(u) + \beta S(v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$S(u)S(v)w = -S(v)S(w)u - S(w)S(u)v \quad (2.6)$$

$$S(u) = R^T S(Ru)R, \quad R \in SO(3) \quad (2.7)$$

$$S(u)S(v) = -u^T v I_3 + v u^T \quad (2.8)$$

$$\|S(u)\|_2 = \|u\|_2 \quad (2.9)$$

Las pruebas de estas propiedades se incluyen en el anexo de este trabajo.

Ecuación cinemática

Cuando la aeronave con marco de referencia \hat{b} rota con velocidad angular $\bar{\omega}$ alrededor del marco inercial \hat{I} entonces la matriz de rotación es una función del tiempo, $R = R(t)$. La evolución de $R(t)$ es la ecuación cinemática, y es ésta la mayor diferencia entre control de orientación y control de posición en robótica.

Sea P un punto arbitrario sobre la aeronave y x su vector de posición. El vector \bar{x} tiene una representación en \hat{b} y en \hat{I} , x^b y x^I respectivamente. La relación entre ambas representaciones es la matriz de rotación: $x^I = R x^b$. La velocidad angular de la aeronave, $\bar{\omega}$, puede expresarse en coordenadas inerciales, ω^I o en coordenadas de la aeronave, ω^b . La relación entre ambas es la misma que aquélla del vector de posición: $\omega^I = R \omega^b$.

Pueden establecerse las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}^b = 0$$

$$\dot{x}^I = \omega^I \times x^I = S(\omega^I)x^I$$

La primera ecuación se debe a que el sistema de referencia \hat{b} rota con la aeronave y a que el cuerpo se considera rígido, por lo que el vector de posición en coordenadas de la aeronave no cambia, independientemente de la rotación. La segunda ecuación es el producto cruz estándar de velocidad angular y radio de giro (vector de posición), ya que el punto P sí cambia su posición respecto al marco de referencia inercial.

Con las relaciones anteriores y empleando las propiedades (2.1) y (2.9) puede desarrollarse la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}^I &= \frac{d}{dt}(R x^b) = \dot{R} x^b + R \dot{x}^b \\ S(\omega^I)x^I &= \dot{R} R^T x^I \end{aligned}$$

Como es cierto para cualquier punto P, y por lo tanto para cualquier vector x^I , entonces,

$$\begin{aligned}\dot{R}R^T &= S(\omega^I) \\ \dot{R} &= S(R\omega^b)R \\ \dot{R} &= RR^T S(R\omega^b)R \\ \dot{R} &= RS(\omega^b)\end{aligned}$$

Esta última ecuación es la ecuación cinemática en términos de la matriz de rotación:

$$\dot{R} = RS(\omega) \tag{2.10}$$

En esta última ecuación se suprime el superíndice de la velocidad angular, tal que ω se referirá en adelante siempre a la velocidad angular del cuerpo rígido en coordenadas del cuerpo rígido (\hat{b}). Se emplea la velocidad angular medida respecto al cuerpo rígido con mayor frecuencia que aquella medida respecto al marco inercial debido a la ecuación dinámica: el tensor de inercias respecto al marco inercial es variante en el tiempo mientras que es constante respecto al marco de referencia en el cuerpo.

Ecuación dinámica

El movimiento de la aeronave puede ser influenciado de dos maneras: pares externos, como cohetes o propulsores, o pares internos generados por dispositivos de intercambio o almacenamiento de momentum angular, como ruedas de reacción y giroscopios de control.

En este trabajo se consideran dos casos comunes en el control de micro y nano satélites, ruedas de reacción y propulsores de gas como actuadores. Las ecuaciones dinámicas se desarrollan en el anexo de este trabajo.

La ecuación dinámica para ruedas de reacción como actuadores está dada por:

$$M\dot{\omega} = S(R^T h^I)\omega + \tau \tag{2.11}$$

donde ω es nuevamente la velocidad angular de la aeronave en coordenadas de la aeronave, τ es el par generado por las ruedas de reacción, h^I es el vector columna de momentum angular total de la aeronave en coordenadas inerciales y $M = M^T > 0$ es la matriz de inercia total en coordenadas de la aeronave.

La matriz de inercia en coordenadas de la aeronave es constante (se conoce su norma en todo momento). El vector de momentum angular total en coordenadas inerciales es constante también.

La ecuación dinámica para propulsores de gas como actuadores está dada por:

$$M\dot{\omega} = S(M\omega)\omega + \tau \tag{2.12}$$

donde ω y M se definen del mismo modo que el caso anterior y τ es el vector de fuerzas externas debidas a los propulsores de gas.

De manera general, se usará:

$$M\dot{\omega} = N(\cdot)\omega + \tau \quad (2.13)$$

donde $N(\cdot) = N(R^T, \omega) = S(Rh^I)$ si se usan ruedas de reacción, o bien, $N(\cdot) = N(R, \omega) = S(M\omega)$ si se usan propulsores de gas. En cualquier caso, $N(\cdot)$ es siempre antisimétrica.

Cuaterniones de rotación

La cinemática definida con matrices de rotación (2.10) es una ecuación diferencial bien definida para cualquier orientación (representada por R) y no tiene singularidades. Diversos trabajos de control de orientación trabajan en $SO(3)$ precisamente por esta propiedad [37], [38].

Sin embargo, los elementos de R no son independientes. Los nueve elementos de la matriz de rotación están restringidos por las condición de ortogonalidad y propiedad (2.1). Estas condiciones generan seis restricciones para la matriz. Por ello, R puede ser parametrizada por menos elementos. La parametrización mínima es de tres elementos sin restricciones adicionales (ángulos de Euler, vector de Gibbs, etc.). Sin embargo, las representaciones mínimas introducen singularidades, por lo que una representación mínima no es siempre la más recomendable. Una ventaja de utilizar tres elementos es que el Jacobiano que mapea la velocidad angular con la evolución temporal de la parametrización es invertible en la región de validez de la cinemática, lo que permite desarrollos análogos a robots manipuladores [21].

El teorema de rotación de Euler detalla que cualquier rotación arbitraria es equivalente a girar una cantidad ϕ alrededor de un eje, cuyo vector unitario está dado por \hat{k} . Toda matriz de rotación puede determinarse a partir de estos dos elementos [12].

$$R(\phi, \hat{k}) = \cos\phi I + (1 - \cos\phi)\hat{k}\hat{k}^T - \sin\phi S(\hat{k}) \quad (2.14)$$

Pese a que esta representación no tiene singularidades, presenta la característica de que una misma rotación puede ser representada con un eje unitario en dirección contraria y un giro en sentido opuesto, es decir, $R(\phi, \hat{k}) = R(-\phi, -\hat{k})$.

En la práctica, resulta simple y transparente prescribir una orientación deseada a partir de un vector unitario y un ángulo. Sin embargo, no es una representación que se emplee en el diseño de leyes de control por su complejidad matemática. Por esta razón, se prefieren otras representaciones, como cuaterniones (parámetros de Euler), parámetros de Rodrigues o parámetros modificados de Rodrigues (MRP).

La definición original de Hamilton presenta al cuaternión como un elemento que expande los números complejos. Consta de cuatro elementos, un número real y tres números imaginarios:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

Para el problema de rotación, esta definición resulta poco práctica. Una definición más útil es que el cuaternión consta de una parte escalar y una parte vectorial:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_v \end{bmatrix}, \quad q_0 \in \mathbb{R}, \quad q_v \in \mathbb{R}^3 \quad (2.15)$$

En problemas de orientación se emplean exclusivamente cuaterniones unitarios, aquéllos que cumplen con la condición de norma:

$$q_0^2 + q_v^T q_v = 1 \quad (2.16)$$

En términos de la representación eje-ángulo de Euler el cuaternión se define como:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_v &= \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \hat{k} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Así definido, el cuaternión es siempre unitario. Este conjunto de cuaterniones unitarios recibe el nombre de parámetros de Euler-Rodrigues, parámetros de Euler o cuaterniones de rotación.

Trabajar con cuaterniones presenta ciertas ventajas contra $SO(3)$ [14]. En primer lugar requieren únicamente cuatro parámetros, no nueve, lo que disminuye la capacidad computacional requerida. También, requieren menos restricciones, una en lugar de seis. Una característica importante es que reforzar la restricción de norma del cuaternión es simple, mientras que reforzar la restricción de ortonormalidad de una matriz de rotación puede resultar muy complicado. Como se detalla más adelante, el cuaternión de rotación tiene la ventaja de que preserva la operación de rotaciones sucesivas en matrices de rotación.

La matriz de rotación (2.14) puede calcularse a partir del cuaternión mediante:

$$R(q) = (q_0^2 - q_v^T q_v)I + 2(q_v q_v^T - q_0 S(q_v)) \quad (2.18)$$

Esta relación entre matriz de rotación y cuaterniones se conoce como la fórmula Rodrigues [39] y puede verificarse empleando las identidades trigonométricas de medio ángulo. Una característica importante de esta relación es que R depende de valores cuadráticos de la parte escalar y vectorial del cuaternión así como de un producto de ambos. Esto implica que:

$$R(q) = R(-q) \quad (2.19)$$

Esta ambigüedad de signo es una propiedad heredada de la representación de eje-ángulo de Euler. Esta característica permite dos opciones para extraer el cuaternión de una matriz de rotación. Sin embargo, pasar de nueve elementos con seis restricciones a cuatro elementos con una restricción agrega otras complicaciones. Un método para extraer el cuaternión de la matriz

de rotación se muestra en el anexo de este trabajo. Puede apreciarse que esta operación es más demandante computacionalmente que su opuesta.

A continuación se definen tres operadores de álgebra de cuaterniones útiles para control de orientación.

Todo cuaternión q tiene un conjugado q^* tal que:

$$\begin{aligned} q_0 &= q_0^* \\ q_v &= -q_v^* \end{aligned} \quad (2.20)$$

El inverso de un cuaternión es:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|} = q^* \quad (2.21)$$

Ya que la norma es unitaria.

Una propiedad importante del cuaternión de rotación inverso es su relación con la matriz de rotación:

$$R(q^{-1}) = R^{-1}(q) = R^T(q) \quad (2.22)$$

Existen dos operaciones de producto definidas para cuaterniones. Una es el producto original definido por Hamilton, otra es una definición más moderna. Ambos son operadores asociativos y distributivos pero no conmutativos.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^4$. Los operadores producto \otimes y \odot se definen como:

$$x \otimes y = \begin{bmatrix} x_0 y_0 - x_v^T y_v \\ y_0 x_v + x_0 y_v - S(x_v) y_v \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$x \odot y = \begin{bmatrix} x_0 y_0 - x_v^T y_v \\ y_0 x_v + x_0 y_v + S(x_v) y_v \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La diferencia entre ambos operadores es un único signo, sin embargo, esta diferencia no es trivial. Ambos productos pueden definirse mediante una matriz, de la forma:

$$\begin{aligned} x \otimes y &= [x \otimes] y = \begin{bmatrix} x & P(x) \end{bmatrix} y \\ x \odot y &= [x \odot] y = \begin{bmatrix} x & J(x) \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

Para:

$$\begin{aligned} J(x) &= \begin{bmatrix} -x_v^T \\ x_0 I + S(x_v) \end{bmatrix} \\ P(x) &= \begin{bmatrix} -x_v^T \\ x_0 I - S(x_v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Realizando la multiplicación explícita y comparando con (2.18) puede verificarse que:

$$J^T(x)P(x) = R(x) \quad (2.25)$$

Lo que entrega una forma alternativa de calcular la matriz de rotación. Además, los operadores producto tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} x \otimes y &= y \odot x \\ [x^* \otimes] &= [x \otimes]^T \\ [x^* \odot] &= [x \odot]^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ambos operadores pueden extenderse para involucrar vectores en \mathbb{R}^3 . Para $z \in \mathbb{R}^3$ se define el cuaternión auxiliar $\zeta = [0 \ z]^T$ para poder operar con los productos antes definidos. Para esta clase particular de cuaterniones se pueden obtener las siguientes propiedades importantes que serán usadas más adelante para derivar ecuaciones de error.

$$\zeta \otimes x = x \odot \zeta = [x \ J(x)] [0 \ z]^T = J(x)z \quad (2.27)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} x^* \otimes \zeta \otimes x &= x^* \otimes (x \odot \zeta) = [x^* \otimes][x \odot]\zeta = [x \otimes]^T [x \odot]\zeta \\ &= \begin{bmatrix} x^T \\ P^T(x) \end{bmatrix} [x \ J(x)] \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T x & x^T J(x) \\ P^T(x)x & P^T(x)J(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ P^T(x)J(x)z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ R^T(x)z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde se hace uso de la propiedad $x^T J(x) = 0$ (que será demostrada en el siguiente apartado) y de la propiedad (2.25).

Una de las mayores ventajas de trabajar con cuaterniones es que el producto \otimes preserva la composición de rotaciones sucesivas [1]. Sean dos matrices de rotación, 2R_1 y 3R_2 , y sea la rotación compuesta definida como:

$${}^3R_1 = {}^3R_2 {}^2R_1$$

Entonces los cuaterniones extraídos de cada matriz de rotación cumplen con:

$$q({}^3R_1) = q({}^3R_2) \otimes q({}^2R_1) \quad (2.29)$$

Esta propiedad será útil al definir el error de orientación mediante cuaterniones de rotación.

La cinemática en términos del cuaternión de rotación se deriva de la expresión (2.17). Queda definida por:

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}q_v^T \omega \\ \dot{q}_v &= \frac{1}{2}[q_0 I + S(q_v)]\omega\end{aligned}\tag{2.30}$$

O bien:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}J(q)\omega\tag{2.31}$$

donde:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I + S(q_v) \end{bmatrix}\tag{2.32}$$

Es importante notar que $J(x) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$; no es una matriz invertible.

Formalizando este operador, $J(q)$ se denomina el Jacobiano del sistema. Este operador es análogo al mapeo entre coordenadas cartesianas y articulares en robótica. El Jacobiano posee varias propiedades útiles.

Teorema 2.2. *Para toda $x, y \in \mathbb{R}^4$, el operador Jacobiano $J(x)$ definido en (2.32) cumple con:*

$$J^T(x)J(x) = \|x\|^2 I_3\tag{2.33}$$

$$J(x)J^T(x) = \|x\|^2 I_4 - x x^T\tag{2.34}$$

$$J^T(x)x = 0\tag{2.35}$$

$$J(\alpha x + \beta y) = \alpha J(x) + \beta J(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\tag{2.36}$$

$$J^T(x)y = -J^T(y)x\tag{2.37}$$

$$\|J(x)\|_2 = \|x\|_2\tag{2.38}$$

$$\frac{d}{dt}(J(x)) = J(\dot{x})\tag{2.39}$$

Las primeras tres propiedades pueden encontrarse en [39]. Son propiedades conocidas y usadas frecuentemente, pueden verificarse por sustitución. En particular, si la x es un cuaternión de rotación, la propiedad (2.33) se simplifica a $J^T(x)J(x) = I_3$.

Las demás propiedades no son ampliamente conocidas ni utilizadas. En la literatura revisada durante la realización de esta investigación no se presenta su desarrollo ni aplicación. La propiedad (2.36) es de linealidad y la propiedad (2.37) es similar a la propiedad en la matriz de efectos centrífugos y de Coriolis en el modelo de robots manipuladores. Ambas se verifican por

sustitución.

La propiedad (2.38) indica que el operador Jacobiano está acotado por su argumento. En particular, si su argumento es un cuaternión de rotación, la norma euclidea del Jacobiano es uno. Esta propiedad es consecuencia inmediata de la propiedad (2.33), se verifica fácilmente notando que:

$$J(x)^T J(x) = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) I_3$$

La última propiedad (2.39) indica que tomar la derivada temporal del Jacobiano es equivalente a derivar el argumento y después aplicar el operador. Esta propiedad es debida a la estructura del operador: no hay términos cruzados para las componentes del argumento y las matrices de derivan elemento a elemento.

Es útil señalar que el operador $P(x)$ verifica las mismas propiedades que $J(x)$.

El resto del trabajo emplea como modelo de la planta a la ecuación dinámica (2.13) y a la cinemática del cuaternión (2.31). La planta es entonces:

$$\begin{aligned} M\dot{\omega} &= N(\cdot)\omega + \tau \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}J(q)\omega \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde $N(\cdot) = N(q, \omega) = S(R^T(q)h^I)$ si el satélite emplea ruedas de reacción y $N(\cdot) = N(q, \omega) = S(M\omega)$ si se usan propulsores de gas.

Errores de orientación y velocidad angular

Cuando se busca alcanzar o seguir una orientación de referencia, o deseada, debe definirse un tercer marco de referencia:

$$\hat{d} = (\bar{e}_{d1}, \bar{e}_{d2}, \bar{e}_{d3})$$

La matriz de rotación que define la orientación deseada respecto al marco de referencia inercial se denomina R_d . De manera explícita, $R_d = {}^I R_d$:

$$x^I = {}^I R_d x^d$$

Es decir, R_d mapea vectores del marco de referencia deseado, \hat{d} al inercial, \hat{I} .

Es claro que alcanzar la orientación deseada implica que:

$$R = R_d$$

Una opción común en sistemas de control es definir el error como una diferencia. En el caso de orientación sería:

$$R_e = R - R_d$$

Con esta definición, se buscaría lograr que R_e tienda a cero. Sin embargo esta definición no es la más adecuada. Siempre es deseable partir de una estructura útil para desarrollar teoría de control sobre el sistema y el grupo especial $SO(3)$ tiene una estructura bien desarrollada. El problema de la definición anterior es que la matriz de error así definida no pertenece a $SO(3)$. Una mejor alternativa es emplear la propiedad (2.1):

$$\begin{aligned} R &= R_d \\ R_d^T R &= R_d^T R_d \\ R_d^T R &= I \end{aligned}$$

Por lo que se puede definir el error de orientación como:

$$R_e = R_d^T R \tag{2.41}$$

Con esta definición, alcanzar la orientación deseada equivale a lograr que R_e tienda a la matriz identidad. Este resultado es muy conocido en robótica y es particularmente útil: así definido, el error de orientación sí pertenece a $SO(3)$.

Del desarrollo anterior, puede apreciarse que podría haberse despejado la matriz identidad del lado derecho de múltiples maneras, definiendo con ello múltiples matrices de rotación de error. La definición elegida no es arbitraria, tiene un significado dentro del enfoque de rotaciones sucesivas. De manera más explícita: Sea p un vector libre en el espacio. Sus representaciones en coordenadas inerciales, de cuerpo y deseada son p^I , p^b y p^d , respectivamente. Estos vectores se relacionan mediante matrices de rotación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p^I &= {}^I R_b p^b \\ p^b &= {}^b R_d p^d \\ p^I &= {}^I R_d p^d \end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera y comparando con la tercera, es claro que

$${}^I R_d = {}^I R_b {}^b R_d$$

Desarrollando con las propiedades previas de matrices de rotación:

$$\begin{aligned} {}^I R_b {}^b R_d &= {}^I R_d \\ {}^I R_b ({}^d R_b)^T &= {}^I R_d \\ ({}^d R_b)^T &= ({}^I R_b)^T {}^I R_d \\ {}^d R_b &= ({}^I R_d)^T {}^I R_b \\ R_e &= R_d^T R \end{aligned}$$

De esta manera, resulta evidente que $R_e = {}^d R_b$ es la matriz de rotación que lleva del marco de referencia del cuerpo \hat{b} al marco de referencia deseado \hat{d} . Si R_e es la matriz identidad, implica

que ambos sistemas coordenados están alineados.

Cuando se busca lograr seguimiento, se necesita más información que la orientación deseada, es necesaria su cinemática. La cinemática deseada está dada por:

$$\dot{R}_d = R_d S(\omega_d) \quad (2.42)$$

donde ω_d es la velocidad angular deseada en coordenadas del marco de referencia deseado. Ahora, puede obtenerse la cinemática del error a partir de (2.41) y (2.42).

$$\begin{aligned} \dot{R}_e &= R_d^T \dot{R} + \dot{R}_d^T R = R_d^T R S(\omega) - S(\omega_d) R_d^T R \\ &= R_e S(\omega) - S(\omega_d) R_e = R_e S(\omega) - S(R_e R_e^T \omega_d) R_e \end{aligned}$$

Usando la propiedad (2.7):

$$\dot{R}_e = R_e S(\omega - R_e^T \omega_d) \quad (2.43)$$

Este resultado es importante ya que permite definir adecuadamente el error de velocidad angular. En control de posición, el error de velocidad angular suele definirse como $\omega_e = \omega - \omega_d$. Sin embargo, esta operación no es igual en el caso de control de orientación. La razón es que ω se mide respecto al marco de referencia en el cuerpo y ω_d se mide respecto al marco de referencia deseado. Buscar la diferencia directa entre ambos elementos sería equivocado ya que se miden respecto a referencias diferentes. Para que la diferencia de velocidades sea un dato útil, ambos elementos deben medirse en las mismas coordenadas. La matriz R_e^T provee el mecanismo necesario para esto: recordando su definición, $R_e^T = {}^b R_d$. Es decir, R_e mapea los vectores del marco de referencia deseado al marco de referencia en el cuerpo. Por lo tanto, puede definirse el error de velocidad angular como:

$$\omega_e = \omega - R_e^T \omega_d \quad (2.44)$$

O, alternativamente:

$$\omega_e = \omega - \bar{\omega}_d$$

donde:

$$\bar{\omega}_d = R_e^T \omega_d \quad (2.45)$$

En otras palabras, $\bar{\omega}_d$ es la velocidad angular deseada en coordenadas del cuerpo.

Por supuesto, el error de velocidad no está necesariamente ligado a ningún marco de referencia específico, aquí se mide respecto al cuerpo, pero puede medirse en coordenadas inerciales o deseadas. Es importante enfatizar que no importa el marco en el que se mida, se necesitará de una manera u otra a la matriz de rotación R (y a R_d , aunque esto no es problemático). Esta característica tendrá un papel importante en el cálculo de derivadas. Por un lado $\dot{\omega}_d$ depende únicamente de R_d y ω_d , por lo que puede calcularse fuera de línea. Sin embargo, $\dot{\bar{\omega}}_d$ requerirá tanto a R como a ω , por lo que deberá calcularse en línea.

Como nota adicional, algunos autores definen desde el principio a ω_d en coordenadas del cuerpo. Esto permite definir desde el principio a $\omega_e = \omega - \omega_d$. Se trata de un simple cambio de notación, pero es importante notar que la cinemática deseada debe ajustarse también. Se usa:

$$\dot{R}_d = R_d S(R_e \omega_d) = R_d S(R_d^T R \omega_d) = S(R_d R_d^T R \omega_d) R_d = S(R \omega_d) R_d$$

Una de las mayores ventajas del cuaternión es que si el error de orientación se define como (2.41) entonces pueden usarse (2.22) y (2.29) para definir equivalentemente el error en cuaterniones como:

$$e = q_d^{-1} \otimes q = \begin{bmatrix} q_{d0}q_0 + q_{dv}^T q_v \\ q_{d0}q_v - q_0q_{dv} + S(q_{dv})q_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_v \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

donde q es el cuaternión asociado a la matriz de rotación actual del cuerpo, R , y q_d es el cuaternión asociado a la matriz de rotación deseada, R_d .

Definir el error de esta manera presenta ciertas ventajas para la implementación. Muchos sensores modernos de orientación entregan el dato de orientación como los cuatro elementos del cuaternión, vectores de euler, o eje-ángulo, no como una matriz de rotación. Las leyes de control diseñadas para cuaterniones requieren el error en esta representación. Ya que el dato del sensor es un cuaternión y la orientación deseada puede prescribirse con cualquier representación, resulta útil calcular el error directamente usando cuaterniones. La alternativa es obtener la matriz de rotación con la fórmula Rodrigues, calcular el error de orientación con matrices y después extraer el cuaternión de error. Esta última operación es poco práctica y debe evitarse de ser posible.

Para seguimiento, se define la cinemática deseada en cuaterniones:

$$\dot{q}_d = \frac{1}{2} J(q_d) \omega_d \quad (2.47)$$

Finalmente se presenta la cinemática del error para cuaterniones. Partiendo del desarrollo previo (2.43) puede escribirse [6]:

$$\dot{e} = \frac{1}{2} J(e) (\omega - R^T(e) \omega_d) = \frac{1}{2} J(e) \omega_e \quad (2.48)$$

2.2. Teoría de contracción

El análisis por contracción tiene sus orígenes en concepto de estabilidad ligeramente diferente empleado en mecánica de fluidos y de medio continuo. Convencionalmente, la estabilidad se define alrededor de una trayectoria nominal o punto de equilibrio. Alternativamente, un sistema es estable en una región si las condiciones iniciales y perturbaciones temporales son de alguna manera olvidadas: el comportamiento final del sistema es independiente de las condiciones iniciales, todas las trayectorias convergen a una trayectoria nominal.

El análisis por contracción es un análisis diferencial, a diferencia del análisis por Lyapunov a través de función integral implícita. Para evitar ambigüedad, a este concepto de estabilidad se le denomina simplemente *convergencia*. De manera más formal:

Definición 2.2. *Región de contracción ([9], Definición 1):*

Considere el sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.49)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y f es un campo vectorial de $n \times 1$. A la región del espacio de estados donde la parte simétrica del Jacobiano $\mathbb{J} = \frac{\partial f}{\partial x}$ es uniformemente negativa definida, o bien:

$$\exists \lambda > 0, \text{ t.q. } \mathbb{J}_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right) \leq -\lambda I < 0, \quad \forall x, \forall t \geq 0$$

se le denomina *región de contracción*.

Teorema 2.3. *Contracción ([9], Teorema 1):*

El sistema (2.49) es contrayente en la región de contracción con tasa de contracción menor o igual a λ . Esto implica convergencia exponencial de todas las trayectorias vecinas a una única trayectoria sin importar condiciones iniciales. Si la región de contracción es todo el espacio de estados, el resultado es global.

Demostración. Se supone un punto x arbitrario donde se desea analizar la convergencia de las trayectorias vecinas. Si el sistema es contrayente, se puede garantizar la convergencia de las trayectorias vecinas entre sí. Suponiendo que $f(x, t)$ es continuamente diferenciable en x , se puede obtener una relación de diferencial exacta a partir de (2.49):

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \delta x$$

donde δx se denomina el desplazamiento virtual entre dos trayectorias vecinas: un desplazamiento infinitesimal en tiempo fijo. Es de interés analizar si las trayectorias se acercan entre sí. Para ello, puede evaluarse la distancia al cuadrado entre ellas, dada por $\delta x^T \delta x$. La variación temporal de esta distancia está dada por:

$$\frac{d}{dt} (\delta x^T \delta x) = 2 \delta x^T \delta \dot{x} = 2 \delta x^T \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \delta x \leq 2 \lambda_{max} \delta x^T \delta x$$

donde $\lambda_{max}(x, t)$ es el valor característico más grande de la parte simétrica del Jacobiano. Entonces:

$$\|\delta x\| \leq \|\delta x_0\| e^{\int_0^t \lambda_{max}(x, t) dt}$$

Si $\lambda_{max}(x, t)$ es uniformemente negativa definida, entonces la distancia infinitesimal tiende exponencialmente a cero. Esto implica que todas las trayectorias tienden exponencialmente a una única trayectoria sin importar las condiciones iniciales. Δ

De manera más general, puede considerarse el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Análisis de Convergencia Generalizado ([9], Teorema 2):*
 Considere la transformación de coordenadas:

$$z = \Theta(x, t)x$$

donde $\Theta(x, t)$ es una matriz cuadrada uniformemente invertible. Entonces la distancia infinitesimal al cuadrado está dada por:

$$\delta z^T \delta z = \delta x^T \Theta^T \Theta \delta x \triangleq \delta x^T M \delta x$$

donde M representa una métrica continuamente diferenciable y simétrica. Analizando la evolución de la distancia infinitesimal:

$$\frac{d}{dt}(\delta z^T \delta z) = 2\delta z^T \delta \dot{z} = 2\delta z^T \left(\dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Theta^{-1} \delta z$$

Al término $F \triangleq \left(\dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Theta^{-1}$ se le conoce como el Jacobiano generalizado del sistema. Si el Jacobiano generalizado es uniformemente negativo definido, se garantiza la convergencia exponencial de todas las trayectorias vecinas del sistema transformado, z , y del sistema original, x , a una sola trayectoria.

Una vez definida la herramienta para analizar si un sistema es contrayente, se presenta la herramienta de contracción parcial para estudiar la convergencia de propiedades específicas del sistema, tales como convergencia a trayectorias nominales conocida o incluso convergencia entre ciertas variables de estado.

Teorema 2.5. *Contracción Parcial ([10], Teorema 1):*

Considere el sistema auxiliar, denominado sistema virtual:

$$\dot{y} = f(y, x, t) \tag{2.50}$$

Asociado al sistema no lineal suave de interés

$$\dot{x} = f(x, x, t)$$

Suponga que el sistema virtual es contrayente respecto a y , $\forall x, \forall t \geq t_0 > 0$. Entonces, si el sistema virtual (2.50) verifica alguna propiedad suave específica, entonces todas las trayectorias del sistema original x verifican esta misma propiedad exponencialmente. Se dice que el sistema x es parcialmente contrayente.

Es importante notar que la selección del sistema virtual no es arbitraria. El sistema virtual se construye tal que una solución particular de y sea el sistema de interés original y otra solución verifique la propiedad específica buscada.

Finalmente, se presenta un resultado para sistemas jerárquicos.

Lema 2.1. *Contracción de Sistemas Jerárquicos [9]:*

Considere dos sistemas, posiblemente de dimensiones diferentes, de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, t)\end{aligned}\tag{2.51}$$

Considere la dinámica del desplazamiento virtual de la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix}$$

Si en cierta región del espacio de estados F_1 y F_2 son uniformemente negativa definidas y F_{12} es acotada, el sistema original (2.51) es contrayente en dicha región de contracción.

Demostración. Este resultado puede analizarse de la siguiente manera. La primera ecuación no depende de la segunda, por lo que la convergencia de δz_1 está garantizada siempre que F_1 sea uniformemente negativa definida. Si F_{12} es acotada, el término $F_{12}\delta z_1$ representa una perturbación exponencialmente desvaneciente para la segunda ecuación. Entonces, si F_2 es uniformemente negativa definida, se garantiza la convergencia de δz_2 a una bola exponencialmente desvaneciente [41]. Por lo tanto, el sistema global converge exponencialmente a una única trayectoria.

△

2.3. Sincronización

La sincronización puede definirse varias maneras. Puede definirse a nivel de salidas o a nivel de estados. Una definición útil es la siguiente. Se considera que N agentes están sincronizados cuando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - x_j| = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

Para que exista contracción es necesaria la existencia de algún tipo de interacción entre los sistemas. La forma de estas interacciones o acoplamientos es muy variada, el tipo de interacción define la topología de la red de sistemas interconectados. Este trabajo estudia únicamente una topología, la denominada *red simétrica todos con todos*:

$$\dot{x}_i = f(x_i, t) + K_s \sum_{j=1}^N (x_j - x_i), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad K_s > 0\tag{2.52}$$

La sincronización puede estudiarse en el contexto de teoría de contracción, con la siguiente herramienta.

Teorema 2.6. *Sincronización de redes simétricas todos con todos [11]:*

Considere los N sistemas acoplados mediante una red simétrica todos con todos (2.52). Los N alcanzarán la sincronización de manera exponencial, sin importar los estados iniciales x_{i0} si el sistema global es contrayente.

Demostración. Esta afirmación puede verificarse fácilmente empleando el Teorema de contracción parcial, definiendo como sistema virtual a:

$$\dot{y} = f(y, t) + K_s \sum_{j=1}^N (x_j - y)$$

Es claro que el sistema virtual tiene como solución a cada uno de los N sistemas acoplados. Si el sistema virtual es contrayente, entonces todas las soluciones particulares tienden a una sola trayectoria lo que implica que los N sistemas se sincronizan exponencialmente.

△

Capítulo 3

Control para seguimiento de orientación por retroalimentación de estados

El objetivo de este trabajo es lograr regulación y seguimiento de la orientación del satélite. El objetivo de regulación se cumple cuando R_e definido en (2.41) tiende a la matriz identidad. El objetivo de seguimiento requiere adicionalmente que ω_e definido en (2.44) tienda a cero.

El control de orientación no es un problema nuevo, se han realizado muchos avances en este campo. La herramienta por excelencia fue durante muchos años la teoría de pasividad. La razón es que los satélites son sistemas lagrangianos plenamente actuados, similares en estructura a los sistemas de robótica donde durante muchos años se han usado estas herramientas con éxito. Brevemente, en [16] se presentan herramientas de pasividad para lograr regulación de orientación usando diferentes parametrizaciones. La estructura de estos algoritmos es equivalente al control PD para robots manipuladores. Los mismos autores retoman este análisis en [35] donde, enfocados a la representación en cuaternión, explotan las propiedades pasivas del sistema para logra regulación sin mediciones de velocidad. El mismo problema es analizado en [4] donde se usa un esquema diferente “tipo observador” para lograr el mismo resultado.

El problema de seguimiento es analizado en [19]. El esquema propuesto, basado en cuaterniones, es análogo al algoritmo Slotine-Li usado en robótica. Este algoritmo será adaptado para este trabajo. Paralelamente, en [21] se analiza este mismo esquema dentro del contexto de sistemas Hamiltonianos, la idea es transformar el sistema a uno idéntico en estructura a un robot manipulador. Este esquema, sin embargo, no es global y sólo es válido para parametrizaciones mínimas. En [20, 24] se profundiza el análisis de pasividad para obtener resultados adicionales. Finalmente, los autores de [5] retoman su esquema para regulación sin mediciones de velocidad para lograr seguimientos usando únicamente mediciones de velocidad. El resultado es un esquema complicado y con muchas limitaciones en las maniobras permitidas al satélite, por esta razón el esquema sólo es verificado para el caso especial de regulación.

En este capítulo, se desarrolla una ley de control que supone a todos los estados medibles, en particular, a las velocidades angulares.

En [19], los autores desarrollan una ley de control para seguimiento de trayectorias análoga al algoritmo Slotine-Li [18] para control de robots. Todo el análisis se realiza por estabilidad L_p y pasividad. Aquí se presenta un controlador similar, sin embargo, se analiza mediante teoría de contracción con el objetivo de acoplar los resultados con el diseño de observadores.

Primero, se define la trayectoria deseada compuesta por ω_d y R_d . Estos dos valores están ligados por la cinemática deseada (2.10):

$$\dot{R}_d = R_d S(\omega_d), \quad R_d(0) = R_{d0} \in SO(3)$$

Sin embargo, es recomendable prescribir la trayectoria deseada con ω_d y q_d , ligados por la cinemática deseada para cuaternión (2.47). Si se emplea esta representación, entonces $q_d(0) = q_{d0}$ t. q. $\|q_{d0}\| = 1$. Obtener la trayectoria deseada implica resolver esta ecuación diferencial. Dependiendo de la aplicación, se puede resolver en línea o fuera de línea. Usando en un principio la representación en cuaternión, el error de cuaternión se puede calcular directamente mediante (2.46).

Análogo al algoritmo Slotine-Li para robots, se define la variable compuesta:

$$\omega_r = \bar{\omega}_d - \Lambda e_v, \quad \Lambda = \Lambda^T > 0$$

Con $\bar{\omega}_d$ y e_v definidos en (2.45) y (2.46), respectivamente. Por simplicidad, se considera que $\Lambda = \lambda I$ con $\lambda > 0$, entonces:

$$\omega_r = \bar{\omega}_d - \lambda e_v \tag{3.1}$$

Puede definirse también una variable auxiliar s , similar a aquella empleada en el control por modos deslizantes, de la siguiente manera:

$$s = \omega - \omega_r \tag{3.2}$$

La estructura de esta variable compuesta merece su propio análisis.

Para entender el diseño de ω_r se presenta primero el caso conocido de control de posición de robots:

$$\omega_r = \dot{\omega}_d - \lambda(x - x_d) = \dot{\omega}_d - \lambda(x_e)$$

donde x , x_d , x_e son las coordenadas generalizadas de la planta, deseadas y de error, respectivamente. Además, para control de posición, la cinemática de las coordenadas generalizadas es trivial:

$$\dot{x} = \omega$$

Entonces:

$$s = \omega - \omega_r = \omega_e + \lambda x_e = \dot{x}_e + \lambda x_e$$

La cinemática, restringida a la superficie $s = 0$, tiene un punto equilibrio exponencialmente estable en $x_e = 0$:

$$s = 0 \Rightarrow \dot{x}_e = -\lambda x_e$$

Como $\lambda > 0$, se trata de un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable, por lo que $x_e \rightarrow 0$ exponencialmente. Este conocido resultado puede estudiarse con teoría de contracción, lo que garantiza la convergencia exponencial.

Visto de otra forma, la definición de s puede escribirse como una función de transferencia:

$$x_e = \frac{1}{\sigma + \lambda} s$$

donde σ es el operador derivada en Laplace. De esta representación, es claro que x_e es la salida de un filtro estable de primer orden cuya entrada es s . De hecho, el resultado de convergencia de x_e puede extenderse al caso más general

$$x_e = F(\sigma)s$$

donde $F(\sigma)$ es una función de transferencia estable y estrictamente propia [40].

Se diseña la variable auxiliar s tal que el sistema restringido a la superficie $s = 0$ permita que $x_e \rightarrow 0$. Cuando $s \rightarrow 0$ y $x_e \rightarrow 0$, por la forma de s , $\omega_e \rightarrow 0$. Cumplir con el objetivo de control se reduce a diseñar una ley de control que garantice que $s \rightarrow 0$.

El desarrollo para control de orientación es más complejo, pero se busca un resultado análogo al usado en control de posición.

Lema 3.1. *Convergencia asintótica en la superficie $s = 0$:*

Con ω_r y s definidos en (3.1) y (3.2), la cinemática del error, (2.48) restringida a la superficie $s = 0$, tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en $e_v = 0$. Entonces, si $s \rightarrow 0$, $e_v \rightarrow 0$, $\omega_e \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow \pm 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea la función candidata de Lyapunov positiva definida:

$$V = (1 - e_0)^2 + e_v^T e_v$$

Se debe notar que $V = V(e_v)$ ya que puede escribirse como:

$$V = 2 - 2\sqrt{e_v^T e_v}$$

Desarrollando la función y utilizando la condición de norma del cuaternión (2.16):

$$V = 2(1 - e_0)$$

Tomando su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V} = -2\dot{e}_0 = e_v^T \omega_e$$

La superficie $s = 0$ define una retroalimentación negativa de e_v para la cinemática del error:

$$s = 0 \Rightarrow \omega_e = -\lambda e_v$$

Sustituyendo en la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov a la restricción cuando $s = 0$, se obtiene:

$$\dot{V} = e_v^T \omega_e = -e_v^T \lambda e_v < 0$$

Por lo que $e_v \rightarrow 0$ asintóticamente. Dado este resultado, por la restricción de norma, $e_0 \rightarrow \pm 1$. Desarrollando la variable s :

$$s = \omega - \omega_r = \omega - \bar{\omega} + \lambda e_v = \omega_e + \lambda e_v$$

Como $s = 0$ y $e_v = 0$ entonces $\omega_e = s - \lambda e_v = 0$

△

El resultado obtenido, usando cuaterniones como parametrización, no es global. Se trata un resultado característico del control de orientación, no puede obtenerse un resultado global usando leyes de control continuas [23]. En concreto, existen dos puntos de equilibrio: $\omega_e = 0$, $e = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y $\omega_e = 0$, $e = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Ambos cuaterniones representan la misma matriz de rotación, $R_e = I$ lo que implica que se alcanza la orientación deseada. Esta multiplicidad de equilibrios impide que el sistema sea contrayente globalmente [9]. Para sistemas de orientación, se emplea el término “casi global” para esta condición. Este concepto aparece en el control de un péndulo simple: el ángulo de equilibrio elegido (con velocidad cero) es asintóticamente estable para cualquier condición inicial excepto para el ángulo 90° opuesto del elegido. Este concepto se formaliza a continuación.

Definición 3.1. *Punto de equilibrio asintótica y casi globalmente estable [15]:*

Un punto de equilibrio x^ de un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ (es decir, $f(x^*) = 0$) se dice asintótica y casi globalmente estable si es asintóticamente estable para cualquier condición inicial $x(0)$ excepto para un conjunto finito y conocido de condiciones iniciales.*

Profundizando el análisis, puede apreciarse que el primer equilibrio representa un mínimo en la función de Lyapunov, considerada como función de acumulación de energía, $V = 0$, mientras que el segundo equilibrio es un máximo, $V = 4$. Entonces $e_0 = 1$ es atractivo, mientras que $e_0 = -1$ es repulsivo. El punto de equilibrio con $e_0 = 1$ es asintótica y casi globalmente estable, ya que es asintóticamente estable para cualquier condición inicial excepto el equilibrio con $e_0 = -1$. El sistema tenderá al punto de equilibrio atractivo, lo cual puede no ser siempre el resultado más deseable: en ocasiones, pese a que alcanza la orientación deseada, la aeronave puede dar un giro de 180° primero. A este comportamiento se le conoce como el “fenómeno de desplegado.” Es un fenómeno análogo al problema de equilibrar un péndulo, el sistema puede

dar una vuelta de 360 grados cuando un movimiento menor en sentido contrario resultaría suficiente. La consecuencia de este fenómeno es un posible desperdicio de esfuerzo de control para ciertas maniobras. El problema se ataca en diversos trabajos [35, 38]. En general, la solución es usar una ley de control discontinua, por ejemplo, incluyendo el signo de e_0 .

Otro punto importante tiene que ver con la definición del error de orientación. En el trabajo previo [21], los autores eligen combinar la cinemática con la dinámica en una sola ecuación más compleja que tiene la ventaja de ser más parecida a la ecuación clásica de robots manipuladores. La ley de control usada es el algoritmo Slotine-Li estándar. Esta ley de control, sin embargo, es más compleja, crítica que es presentada en [19]. Además, es más restrictiva: no permite el uso de una parametrización cuyo Jacobiano no es invertible, como es el caso para el cuaternión.

De particular interés, aunque no se discute en ninguno de estos dos trabajos, es la elección de los errores de seguimiento y en consecuencia las variables compuestas. Slotine et. al. [21] operan con una definición del error de orientación más convencional:

$$q_e = q - q_d \quad (3.3)$$

La ventaja de esta representación es que su manejo es más simple. En particular si $q = q_d$, q_e tiende a cero mientras que el error e definido aquí no se hace cero. La desventaja es análoga al problema discutido en el apartado de error de orientación: la resta resultante no es un cuaternión de rotación, ya que su norma no es necesariamente unitaria.

Una propiedad importante es que introducir al Jacobiano $J(q)$ sirve para acoplar ambas representaciones de error de orientación en el caso de cuaterniones, como se muestra a continuación.

Si se decide emplear el error de orientación definido por (3.3), es claro que no puede definirse la variable compuesta como $\omega_r = \bar{\omega}_d - \lambda q_e$ debido a que las dimensiones no son compatibles. En vez de definir la variable compuesta como (3.1), uno puede utilizar el Jacobiano, $J(q)$ para acoplar las dimensiones de la siguiente manera:

$$\omega_r = \bar{\omega}_d - \lambda J(q)^T q_e$$

La importancia de usar el operador Jacobiano se hace evidente al analizar que ambas definiciones de ω_r son equivalentes. De manera más formal, analizando los términos diferentes en ambas definiciones, $e_v = J(q)^T q_e$ se tiene por un lado:

$$\begin{aligned} J(q)^T q_e &= J(q)^T (q - q_d) = J(q)^T q - J(q)^T q_d = -J(q)^T q_d \\ &= - \begin{bmatrix} -q_v^T \\ q_0 I - S(q_v) \end{bmatrix}^T q_d = [q_v \quad -q_0 I + S(q_v)^T] q_d \\ &= [q_v \quad -q_0 I - S(q_v)] \begin{bmatrix} q_{d0} \\ q_{dv} \end{bmatrix} = q_{d0} q_v - q_0 q_{dv} + S(q_{dv}) q_v \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la definición (2.46):

$$e_v = q_{d0}q_v - q_0q_{dv} + S(q_{dv})(q_v)$$

Ambas definiciones son iguales. De hecho, esta nueva definición representa una manera simple de calcular la parte vectorial del error de cuaternión definido por (2.46) y servirá también para desarrollar fácilmente su derivada. Formalizando esta propiedad:

$$e_v = -J^T(q)q_d \quad (3.4)$$

Se puede definir entonces:

$$\omega_r = \bar{\omega}_d + \lambda J^T(q)q_d = R^T(e)\omega_d + \lambda J^T(q)q_d \quad (3.5)$$

En conclusión, cuando la representación cinemática elegida es el cuaternión, si se desea emplear una definición convencional para el error de orientación para simplificar el análisis, introducir la matriz $J^T(q)$ (o $P(x)$ para el otro producto) permite recuperar las propiedades de definir el error de orientación con los operadores producto e inverso de cuaternión. Esto será de utilidad en el diseño de observadores, donde es más cómodo definir el error de estimación como una resta.

Finalmente, la cinemática de error en términos del cuaternión no es trivial, por lo que la derivada de ω_r no lo es tampoco. Como será usada más adelante, se presenta su derivada explícitamente, usando la definición (3.5).

Primero, despejando de (2.47) a ω_d :

$$\omega_d = 2J^T(q_d)\dot{q}_d \quad (3.6)$$

Su derivada es:

$$\dot{\omega}_d = 2J^T(q_d)\ddot{q}_d + 2J^T(\dot{q}_d)\dot{q}_d = 2J^T(q_d)\ddot{q}_d \quad (3.7)$$

Cuando la trayectoria deseada se prescribe con q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d , entonces ω_d y $\dot{\omega}_d$ pueden obtenerse fuera de línea con un cálculo algebraico. En adelante, se supone que la trayectoria deseada está acotada por:

$$\begin{aligned} \|q_d\| &= 1 \\ \|\dot{q}_d\| &\leq c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}^+ \\ \|\ddot{q}_d\| &\leq c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por supuesto, ω_d y $\dot{\omega}_d$ están acotados por estos valores:

$$\begin{aligned} \|\omega_d\| &\leq 2c_1 \\ \|\dot{\omega}_d\| &\leq 2c_2 \end{aligned}$$

Entonces se calcula $\dot{\omega}_r$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_r &= R^T(e)\dot{\omega}_d + \dot{R}_e^T \omega_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \lambda J(\dot{q})q_d \\
 &= R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d - \lambda J^T(q_d)\dot{q} - S(\omega - R^T(e)\omega_d)R^T(e)\omega_d \\
 &= R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d - \frac{\lambda}{2} J^T(q_d)J(q)\omega + S(R^T(e)\omega_d)(\omega - R^T(e)\omega_d) \\
 &= R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \left(S(R^T(e)\omega_d) - \frac{\lambda}{2} J^T(q_d)J(q) \right) \omega
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por simplicidad, se define:

$$\Delta = \Delta(q, q_d, \dot{q}_d) = S(R^T(e)\omega_d) - \frac{\lambda}{2} J^T(q_d)J(q) \tag{3.10}$$

Es importante notar que Δ está acotado, ya que depende únicamente de funciones acotadas:

$$\|\Delta\| \leq \frac{\lambda}{2} + 2c_1$$

Entonces (3.9) puede escribirse como:

$$\dot{\omega}_r = R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \Delta\omega \tag{3.11}$$

Con estas herramientas, es posible definir la ley de control para seguimiento de orientación mediante:

$$\tau = M\dot{\omega}_r - N(\cdot)\omega_r - K_c(\omega - \omega_r), \quad K_c = K_c^T > 0 \tag{3.12}$$

Teorema 3.1. *Convergencia asintótica del error de seguimiento a cero para el controlador de seguimiento:*

La ley de control definida por (3.12) y (3.1), en lazo cerrado con el sistema definido por (2.13) y (2.31) logra que el error de seguimiento definido por (2.44) y (2.46) tienda asintóticamente a $\omega_e = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $[e = \pm 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ respectivamente.

La demostración se presenta mediante un análisis de contracción, en contraste con la demostración presentada por pasividad en el trabajo original.

Demostración. La ley de control (3.12) puede escribirse como:

$$M\dot{\omega}_r = N(\cdot)\omega_r + K_c(\omega - \omega_r) + \tau$$

Se define el sistema virtual como:

$$M\dot{\xi} = N(\cdot)\xi + K_c(\omega - \xi) + \tau$$

Donde ξ tiene dos soluciones conocidas, ω y ω_r , la planta, (2.13) y el controlador, (3.12), respectivamente.

Su desplazamiento infinitesimal está dado por:

$$M\dot{\delta\xi} = N(\cdot)\delta\xi - K_c\delta\xi$$

La evolución de su distancia cuadrada, bajo la métrica M es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M \delta\xi) &= \delta\xi^T M \dot{\delta\xi} \\ &= \delta\xi^T N(\cdot)\delta\xi - \delta\xi^T K_c \delta\xi \\ &= -\delta\xi^T K_c \delta\xi \\ &\leq -\lambda_{\min}(K_c) \|\delta\xi\|^2 \end{aligned}$$

Por el **Teorema 2.5** de contracción parcial, el sistema virtual es contrayente, por lo que sus soluciones particulares convergen. Es concreto, $\omega \rightarrow \omega_r$ exponencialmente, con tasa de convergencia menor o igual a $\lambda_{\min}(K_c)$, el valor característico mínimo de la matriz K_c . Por construcción, el sistema tiende exponencialmente a la variedad $s = 0$ y permanece ahí. Dentro de esta variedad, con el **Lema 3.1** se concluye que $\omega_e \rightarrow 0$, $e_v \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow \pm 1$ asintóticamente. \triangle

Como análisis final de esta sección, el problema de desplegado se considera en otros trabajos [24, 35] introduciendo una función signo en la ley de control, específicamente, actuando sobre la parte vectorial del cuaternión de error. Dichos trabajos contemplan únicamente el problema de regulación, a continuación se presenta una alternativa para el problema de seguimiento.

Corolario 3.1. *Convergencia asintótica para variable auxiliar ω_r modificada:*
Considere la modificación a la variable auxiliar ω_r definida en (3.5):

$$\omega_r = \begin{cases} \bar{\omega} + \lambda J^T(q) q_d, & e_0 \geq 0 \\ \bar{\omega} - \lambda J^T(q) q_d, & e_0 < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

La variable auxiliar modificada, junto con la ley de control (3.12) logran que $\omega_e \rightarrow 0$ y $e_v \rightarrow 0$ asintóticamente, mientras que $e_0 \rightarrow 1$ en el primer caso y $e_0 \rightarrow -1$ en segundo.

Demostración. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = \begin{cases} (1 - e_0)^2 + e_v^T e_v, & e_0 \geq 0 \\ (1 + e_0)^2 + e_v^T e_v, & e_0 < 0 \end{cases}$$

El primer caso coincide con el *Lema 3.1*, donde se demostró que el punto de equilibrio $\omega_e = 0$, $e_v = 0$, $e_0 = 1$ atractivo. Para el segundo caso, se considera a

$$V = (1 + e_0)^2 + e_v^T e_v = 2(1 + e_0)$$

Tomando su derivada temporal:

$$\dot{V} = 2\dot{e}_0 = -e_v^T \omega_e$$

Previamente se demostró que la ley de control 3.12 logra que $\omega \rightarrow \omega_e$ exponencialmente. La cinemática del error, restringida a la superficie $s = \omega - \omega_r = 0$ es:

$$\omega_e = \lambda e_v$$

Sustituyendo en \dot{V} :

$$\dot{V} = -e_v^T \lambda e_v < 0$$

Por lo que se alcanza el mismo resultado previo de estabilidad asintótica. La diferencia es que en este segundo caso $e_0 = -1$ representa un mínimo de la función de almacenamiento de energía, por lo que es un punto de equilibrio atractivo. Por otro lado, $e_0 = 1$ es un máximo, por lo que es un punto de equilibrio repulsivo. Δ

Esta modificación a la ley de control permite evaluar cuál trayectoria es más cercana, q_d ó $-q_d$. Si $e_0 = 1$, entonces el sistema se encuentra más cercano a q_d y empleará menos esfuerzo de control en alcanzar esta trayectoria. Por otro lado, si $e_0 = -1$ entonces el sistema está más cerca de $-q_d$, no es conveniente desperdiciar energía tratando de alcanzar a q_d cuando su contrario representa la misma orientación requerida. Finalmente, si $e_0 = 0$, significa que q y q_d son ortogonales: el sistema está igualmente cerca de q_d y de $-q_d$. El signo puede elegirse arbitrariamente, en este trabajo se fija positivo.

Si el perfil de orientación prescrito es suave, la decisión entre ambas leyes de control se toma una única vez al principio del perfil. La suavidad de la trayectoria deseada impide que vuelva a suceder un cambio de signo para e_0 .

Es importante notar que las definiciones de $\dot{\omega}_r$ y Δ cambian también para ambos casos:

$$\Delta = \begin{cases} S(R^T(e)\omega_d) - \frac{\lambda}{2} J^T(q_d)J(q), & e_0 \geq 0 \\ S(R^T(e)\omega_d) + \frac{\lambda}{2} J^T(q_d)J(q), & e_0 < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\dot{\omega}_r = \begin{cases} R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \Delta\omega, & e_0 \geq 0 \\ R^T(e)\dot{\omega}_d - \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \Delta\omega, & e_0 < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

En ambos casos, la función Δ se mantiene acotada.

Capítulo 4

Diseño de observadores de orientación

Independientemente del tipo de satélite y su respectiva ley de control, es claro que se necesitan mediciones de posición (cuaternión) y de velocidad angular. El controlador no es realizable si no se dispone de mediciones de ω . En este capítulo se diseñan observadores que permitan estimar las velocidades angulares. Dichos estimados serán usados en el capítulo siguiente para obtener un control de orientación por retroalimentación de salidas.

El desarrollo de observadores para orientación no es un tema nuevo, a lo largo de las últimas décadas se han desarrollado exitosamente diferentes esquemas, con diferentes metodologías y resultados. Dado que los sensores de velocidad angular existen, pero los datos que entregan son poco confiables, trabajos iniciales se concentran en diseño de estimadores que incluyen este dato de velocidad angular [2, 26].

El desarrollo de observadores sin el dato de velocidad angular fue el siguiente paso. En [25] se presenta un resumen de diferentes esquemas desarrollados. Los observadores en general se desarrollan tomando en cuenta y explotando las características no lineales de la planta. El cuaternión de rotación es una parametrización popular pero no es la única estudiada [27]. Muchos de estos observadores tienen la característica de no ser exponencialmente convergentes a los estados reales y no son globales, solamente funcionan para maniobras reducidas.

En [28] se presenta un observador de velocidad angular globalmente convergente usando cuaterniones como representación. El observador eventualmente converge de forma exponencial pero es más débil al principio. Avanzando aún más la teoría, el problema de seguimiento mediante observador se desarrolla en [29] para orientación de vehículos submarinos. El resultado de convergencia, aunque exponencial, no es global. Es uno de los primeros trabajos que enfrenta el problema de retroalimentación de salidas basada en observador. Por ello, el diseño de este observador está íntimamente ligado al diseño del controlador para evitar el fenómeno pico.

La gran mayoría de los desarrollos de observadores emplean como herramienta de diseño y demostración a Lyapunov.

En este trabajo, el objetivo principal de los observadores es poder ser empleados en un esquema de control de seguimiento por retroalimentación de salidas. Se busca que el observador sea ex-

ponencial y global, pero sobre todo, que sea compatible con el esquema de control desarrollado en el capítulo anterior. Por estas razones se usará teoría de contracción como herramienta para los desarrollos. No es, sin embargo, la única herramienta posible.

A diferencia de los controladores presentados en el capítulo anterior, el desarrollo de observadores para cada caso de $N(\cdot)$ es diferente por lo que se presenta el diseño de observadores para cada caso por separado. Todos los observadores de este capítulo se diseñan con una misma metodología. Primero se analiza un observador similar en estructura a la planta con el objetivo de facilitar el análisis de convergencia por teoría de contracción. Sin embargo, este observador no puede ser implementado directamente ya que requiere conocimiento de ω . Para obtener un resultado útil, el análisis siguiente se centra en cómo lograr la implementación del observador contrayente.

4.1. Observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción

Para el problema de control nominal, cuando no se dispone de mediciones de velocidad angular, un observador de orden reducido es suficiente. El desarrollo a continuación se basa en el observador presentado en [30]. Se emplean propiedades de la cinemática del cuaternión para reducir el orden del observador, además de simplificar su análisis de convergencia y para su implementación.

Se define al error de estimación como:

$$\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega} \quad (4.1)$$

donde $\tilde{\omega}$ es el estimado de la velocidad angular. El objetivo del observador es lograr que el error de estimación tienda a cero.

Se propone un observador no implementable como:

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(R^T h^I)\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \tau, \quad K_o = K_o^T > 0 \quad (4.2)$$

donde:

$$\dot{q}_f = \Gamma(q - q_f), \quad q_f(0) = q_{f0}, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (4.3)$$

Por simplicidad, se considerará $\Gamma = \gamma I_4$, $\gamma > 0$ y $q_{f0} \in \mathbb{R}^4$ debe ser un cuaternión de rotación, es decir, $\|q_{f0}\| = 1$. Es claro que la dinámica de q_f es un filtro lineal estable cuya entrada es q . Si bien q_f tenderá exponencialmente a q , el siguiente lema muestra que la distancia entre q y q_f también puede hacerse arbitrariamente pequeña mediante la constante γ .

Lema 4.1. *Ganancia de filtro lineal:*

Consideremos la dinámica del cuaternión filtrado, (4.3). Entonces $q_f \rightarrow q$ a medida que $\gamma \rightarrow \infty$. Formalmente, $\forall \epsilon_q > 0, \exists \underline{\gamma}$ tal que si $\gamma \geq \underline{\gamma} \Rightarrow \|q_f - q\| \leq \epsilon_q, \forall t \geq t_0$. Para $t < t_0$ entonces $\|q(0) - \|q_f(0)\| \leq \|q_f - q\| < \epsilon_q$.

Demostración. La forma integral del filtro (4.3) es:

$$q_f = e^{-\gamma t} q_f(0) + \int_0^t \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} q(\tau) d\tau$$

De esta expresión, con el hecho de que las condiciones iniciales del filtro son las mismas que de la función de entrada, se puede concluir que $q_f \rightarrow q, \gamma \rightarrow \infty$. Δ

Se supone que el cuaternión real es conocido en todo momento. Por esta razón puede elegirse a $q_f(0) = q(0)$ para asegurar que $\|q_f - q\| \leq \epsilon_q$ para todo tiempo.

Ahora es posible enunciar el siguiente resultado:

Lema 4.2. *Análisis de contracción del observador de orden reducido (no implementable) para satélite con ruedas de reacción:*

El observador no implementable definido por (4.2) y (4.3) logra que $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente, siempre que $\lambda_1 \triangleq \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$ para algún $\epsilon_q > 0$ definido por el Lema 4.1.

Demostración. Sea el sistema virtual:

$$M\dot{\xi} = S(R^T h^I)\xi + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \xi) + \tau$$

El sistema virtual tiene dos soluciones particulares conocidas: $\xi = \omega$, la dinámica (2.11), y $\xi = \hat{\omega}$, el observador (4.2).

Su desplazamiento infinitesimal está dado por:

$$M\delta\dot{\xi} = S(R^T h^I)\delta\xi - \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\delta\xi$$

Analizando la evolución de su distancia cuadrática bajo la métrica M :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M \delta\xi) &= \delta\xi^T S(R^T h^I) \delta\xi - \frac{1}{2} \delta\xi^T K_o J^T(q_f) J(q) \delta\xi \\ &= -\frac{1}{2} \delta\xi^T K_o J^T(q_f) J(q) \delta\xi = -\frac{1}{2} \delta\xi^T K_o (J(q)^T J(q) - J(q)^T J(q) + J^T(q_f) J(q)) \delta\xi \\ &= -\frac{1}{2} \delta\xi^T K_o \delta\xi - \frac{1}{2} \delta\xi^T K_o J^T(q_f - q) J(q) \delta\xi \\ &\leq -\frac{1}{2} \left(\lambda_{\min}(K_o) - \lambda_{\max}(K_o) \|q_f - q\| \|q\| \right) \|\delta\xi\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \left(\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) \right) \|\delta\xi\|^2 \end{aligned}$$

Donde se usaron varias propiedades del operador Jacobiano (2.39).

El sistema virtual será contrayente siempre que $\lambda_1 > 0$. Entonces, las soluciones convergen entre sí exponencialmente, por lo que $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ con tasa de convergencia menor o igual a $\lambda_1/2$. Δ

Este resultado es global, ya que la región de contracción es todo el espacio de estados para cualquier ganancia K_o , eligiendo a γ arbitrariamente grande. Al ser (4.3) un filtro, el parámetro γ puede elegirse tomando en cuenta dos objetivos, atenuación de ruido y tamaño de la región de contracción. Una metodología común es elegir γ para filtrar frecuencias fuera de los rangos de operación del satélite. Esta elección determina un valor de ϵ_q . La matriz de ganancia del observador, K_o , se elige entonces en base a este valor.

El filtro lineal complica el análisis por contracción. Esto es debido a la implementación. Agregar el producto de $J(q_f)^T J(q)$ permite obtener una forma implementable como se detalla a continuación. Adicionalmente, pese a que se denomina observador de orden reducido, el filtro entrega un estimado del cuaternión por lo que podría llegar considerarse un observador de orden completo.

Teorema 4.1. *Convergencia exponencial y global del observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción:*

El observador en su forma de análisis (4.2) puede ser implementado indirectamente con la variable auxiliar $\bar{\omega}$ cuya dinámica está definida por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(R^T h^I) - \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \right) \hat{\omega} - \gamma K_o J^T(q) q_f + \tau \\ \hat{\omega} &= M^{-1} \left(\bar{\omega} + K_o J^T(q_f) q \right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Este observador, en su forma implementable, logra que la velocidad angular estimada converja global y exponencialmente a la velocidad angular del sistema.

Demostración. Despejando a $M\hat{\omega}$ de (4.4) y tomando su derivada temporal:

$$\begin{aligned}M\hat{\omega} &= \bar{\omega} + K_o J^T(q_f) q \\ M\dot{\hat{\omega}} &= \dot{\bar{\omega}} + K_o J^T(\dot{q}_f) q + K_o J^T(q_f) \dot{q} \\ &= \dot{\bar{\omega}} - K_o J^T(q) \gamma (q - q_f) + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \omega \\ &= \dot{\bar{\omega}} + \gamma K_o J^T(q) q_f + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \omega\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de $\bar{\omega}$ de (4.4):

$$\begin{aligned}M\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(R^T h^I) - \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \right) \hat{\omega} - \gamma K_o J^T(q) q_f + \tau + \gamma K_o J^T(q) q_f + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \omega \\ &= S(R^T h^I) \hat{\omega} + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) (\omega - \hat{\omega}) + \tau\end{aligned}$$

Se llega al observador en su forma de análisis. Utilizando el *Lema 4.2* se concluye la prueba. Δ

Esta metodología para implementar una dinámica no implementable con una variable auxiliar que “completa” al diferencial es una técnica usada con frecuencia en desarrollos de pasividad [35] y control adaptable [18].

4.2. Observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas

El caso de propulsor de gas es más complicado de analizar que el anterior, debido que $N(\cdot) = N(M\omega)$ contiene a ω , precisamente el elemento que se desea estimar. Se usa la misma estructura que el satélite actuado por ruedas de reacción, ajustado para esta clase de satélite.

El observador no implementable en su forma de análisis está dado por:

$$M\dot{\hat{\omega}} = S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \tau, \quad K_o = K_o^T > 0 \quad (4.5)$$

donde q_f se define de la misma forma que el caso previo:

$$\dot{q}_f = \gamma(q - q_f), \quad q_f(0) = q(0), \quad \gamma > 0$$

Lema 4.3. *Análisis de contracción de observador de orden reducido (no implementable) para satélite con propulsor de gas:*

El observador definido por (4.5) y (4.3) logra que $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente dentro de la región de contracción definida por $\|\hat{\omega}\| < (\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max})(K_o)/(2M_M)$ para algún $\epsilon_q > 0$ definido por el Lema 4.1.

Adicionalmente, si M es diagonal, la región de contracción queda definida por $\lambda_1 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$ lo que implica un resultado global.

Demostración. El observador (4.5) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} M\dot{\hat{\omega}} &= S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ &= S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + S(M\omega)\hat{\omega} - S(M\omega)\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ &= S(M\omega)\hat{\omega} - S(M(\omega - \hat{\omega}))\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ &= S(M\omega)\hat{\omega} + \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)(\omega - \hat{\omega}) + \tau \end{aligned}$$

donde se usaron varias propiedades de (2.9).

Se define un sistema virtual como:

$$M\dot{\xi} = S(M\omega)\xi + \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)(\omega - \xi) + \tau$$

El sistema virtual tiene dos soluciones conocidas, $\xi = \omega$, la dinámica y $\xi = \hat{\omega}$, el observador.

El desplazamiento infinitesimal del sistema virtual está dado por:

$$M\delta\dot{\xi} = S(M\omega)\delta\xi - \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)\delta\xi$$

La evolución de su distancia cuadrática bajo la métrica M es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T M \delta\xi) &= -\delta\xi^T \left(\frac{1}{2} (\xi^T K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M) \right) \delta\xi \\ &= -\frac{1}{2} \delta\xi^T K_o \delta\xi^T - \frac{1}{2} \delta\xi^T K_o J^T(q_f - q)J(q) \delta\xi - \delta\xi^T S(\hat{\omega})M \delta\xi \\ &\leq -\left(\frac{\lambda_{\min}(K_o)}{2} - \frac{\epsilon_q \lambda_{\max}(K_o)}{2} - M_M \|\hat{\omega}\| \right) \|\delta\xi\|^2 \end{aligned}$$

El sistema virtual será contrayente siempre que $\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) - 2M_M \|\hat{\omega}\| > 0$. El resultado es semiglobal ya que depende de $\hat{\omega}$. La constante K_o puede elegirse arbitrariamente, (aunque no cualquier valor arbitrariamente grande será el más adecuado para re-orientación de salidas) por lo que puede expandirse la región de contracción. Dentro de la región de contracción, el sistema converge exponencialmente con tasa menor o igual a $\lambda_2 \triangleq (\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) - 2M_M \|\hat{\omega}\|)/2 > 0$. Entonces, $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente.

Adicionalmente, si M es diagonal, objetivo en el diseño de satélites pequeños, entonces M conmuta, por lo que el término $S(\hat{\omega})M$ es antisimétrico:

$$(S(\hat{\omega})M)^T = M^T S^T(\hat{\omega}) = -MS(\hat{\omega}) = -S(\hat{\omega})M$$

En este caso, el término $\delta\xi^T S(\hat{\omega})M \delta\xi$ es cero y se recupera la región de contracción del satélite con ruedas de reacción como actuador. Δ

Para lograr implementar este observador se emplea un procedimiento análogo al del observador para satélites con ruedas de reacción.

Teorema 4.2. *Convergencia exponencial y semiglobal del observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas:*

El observador en su forma de análisis (4.5) puede ser implementado indirectamente con la variable auxiliar $\bar{\omega}$ cuya dinámica está definida por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(M\hat{\omega}) - \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) \right) \hat{\omega} - \gamma K_o J^T(q)q_f + \tau \\ \hat{\omega} &= M^{-1} \left(\bar{\omega} + K_o J^T(q_f)q \right)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Este observador, en su forma implementable, logra que la velocidad angular estimada converja exponencialmente a la velocidad angular del sistema dentro de la región definida por $\|\hat{\omega}\| < (\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max})(K_o)/(2M_M)$ para algún $\epsilon_q > 0$.

Demostración. Despejando a $M\hat{\omega}$ de (4.6) y tomando su derivada temporal:

$$\begin{aligned}M\hat{\omega} &= \bar{\omega} + K_o J^T(q_f)q \\ M\dot{\hat{\omega}} &= \dot{\bar{\omega}} + K_o J^T(\dot{q}_f)q + K_o J^T(q_f)\dot{q} \\ &= \dot{\bar{\omega}} - K_o J^T(q)\gamma(q - q_f) + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\omega \\ &= \dot{\bar{\omega}} + \gamma K_o J^T(q)q_f + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\omega\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de $\bar{\omega}$ de (4.4):

$$\begin{aligned}M\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(M\hat{\omega}) - \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) \right) \hat{\omega} - \gamma K_o J^T(q)q_f + \tau + \gamma K_o J^T(q)q_f + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\omega \\ &= S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \tau\end{aligned}$$

Se llega al observador en su forma de análisis. Al emplear el *Lema 4.4* se concluye la prueba. Δ

4.3. Observadores de orden completo

Los observadores de orden reducido desarrollados en la sección anterior son suficientes para seguir adelante con el objetivo principal del trabajo de control por retroalimentación de salidas.

Más adelante, se presentará una herramienta para tratar con mediciones contaminadas por ruido. Esta herramienta puede usarse directamente en el observador de orden reducido, pero únicamente se reducirá el efecto del ruido en la velocidad angular estimada. Si se desea reducir su efecto en el dato de posición, es necesario un observador de orden completo, que entregue un estimado también de la posición angular.

La estructura para el observador de orden completo es simplemente una extensión de los observadores de orden reducido desarrollados previamente.

Observador de orden completo para satélite con ruedas de reacción

Lema 4.4. *Análisis de contracción de observador de orden completo (no implementable) para satélite con ruedas de reacción:*

Para el sistema definido por (2.31) y (2.11) considere al observador de orden completo en su forma de análisis (no implementable):

$$\begin{aligned} M\dot{\hat{\omega}} &= S(R^T h^I)\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \hat{q}) + \tau \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}J(q)\hat{\omega} + K_{o2}(q - \hat{q}) \\ \dot{q}_f &= \gamma(q - q_f), \quad q_f(0) = q(0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para las ganancias $\gamma > 0$, $K_o = K_o^T > 0$ y $K_{o2} = K_{o2}^T > 0$. El observador logra que $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente, cumpliendo con el objetivo de estimación, siempre que $\lambda_1 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$ con ϵ_q definido por el Lema 4.1.

Demostración. Se define al sistema virtual como:

$$\begin{aligned} M\dot{\xi}_1 &= S(R^T h^I)\xi_1 + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \xi_1) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \xi_2) + \tau \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2}J(q)\xi_1 + K_{o2}(q - \xi_2) \end{aligned}$$

El sistema virtual tiene dos soluciones particulares: $\xi = [q \ \omega]^T$, la planta, y $\xi = [\hat{q} \ \hat{\omega}]^T$.

Analizando la evolución de la distancia cuadrática del desplazamiento infinitesimal bajo la métrica $\mathbb{H} = \text{diag}(M, I_4)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\xi^T \mathbb{H} \delta\xi &= \delta\xi_1^T S(R^T h^I)\delta\xi_1 - \frac{1}{2}\delta\xi_1 K_o J^T(q_f)J(q)\delta\xi_1 - \frac{1}{2}\delta\xi_1^T J^T(q)\delta\xi_2 + \delta\xi_2^T \frac{1}{2}J(q)\delta\xi_1 - \delta\xi_2^T K_{o2}\delta\xi_2 \\ &= -\frac{1}{2}\delta\xi_1 K_o J^T(q_f)J(q)\delta\xi_1 - \delta\xi_2^T K_{o2}\delta\xi_2 \\ &= -\delta\xi^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) & 0 \\ 0 & K_{o2} \end{bmatrix} \delta\xi \triangleq -\delta\xi^T \mathbb{J} \delta\xi \end{aligned}$$

El sistema virtual será contrayente siempre que \mathbb{J} sea positivo definido. Esto se cumplirá siempre que $\lambda_1 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$. Este resultado se obtiene de observar que el primer elemento en la diagonal de \mathbb{J} es el Jacobiano generalizado de observador de orden reducido. El análisis es el mismo, debido a que \mathbb{J} es diagonal. El observador de orden completo puede verse como una configuración en paralelo de dos sistemas contrayentes [9].

Dentro de la región de contracción, las soluciones particulares convergen entre sí con tasa de convergencia menor o igual a $\lambda_3 \triangleq \min\{\lambda_1/2, \lambda_{\min}(K_{o2})\}$. Entonces $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente. \triangle

De forma similar al observador de orden reducido, el observador se implementa a través de una variable auxiliar $\bar{\omega}$.

Teorema 4.3. *Convergencia exponencial y global del observador de orden completo para satélite con ruedas de reacción:*

El observador (4.7) puede implementarse indirectamente a través de la variable auxiliar $\bar{\omega}$ cuya dinámica es:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(R^T h^I) - \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \right) \hat{\omega} + \left(\gamma K_o J^T(q_f) + \frac{1}{2} J^T(\hat{q}) \right) q + \tau \\ \hat{\omega} &= M^{-1} \left(\bar{\omega} + K_o J^T(q_f) q \right) \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} J(q) \hat{\omega} + K_{o2} (q - \hat{q}) \\ \dot{q}_f &= \gamma (q - q_f), \quad q_f(0) = q(0)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Este observador, en su forma implementable, logra que el cuaternión estimado y la velocidad angular estimada converjan global y exponencialmente al cuaternión y velocidad angular del sistema.

Demostración. Despejando a $M\hat{\omega}$ de (4.8) y tomando su derivada temporal:

$$\begin{aligned}M\hat{\omega} &= \bar{\omega} + K_o J^T(q_f) q \\ M\dot{\hat{\omega}} &= \dot{\bar{\omega}} + K_o J^T(\dot{q}_f) q + K_o J^T(q_f) \dot{q} \\ &= \dot{\bar{\omega}} - K_o J^T(q) \gamma (q - q_f) + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \omega \\ &= \dot{\bar{\omega}} + \gamma K_o J^T(q) q_f + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \omega\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de $\bar{\omega}$ de (4.4):

$$\begin{aligned}M\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(R^T h^I) - \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \right) \hat{\omega} + \\ &+ \left(\gamma K_o J^T(q_f) + \frac{1}{2} J^T(\hat{q}) \right) q + \tau + \gamma K_o J^T(q) q_f + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) \omega \\ &= S(R^T h^I) \hat{\omega} + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) (\omega - \hat{\omega}) - \frac{1}{2} J^T(q) \hat{q} + \tau \\ &= S(R^T h^I) \hat{\omega} + \frac{1}{2} K_o J^T(q_f) J(q) (\omega - \hat{\omega}) + \frac{1}{2} J^T(q) (q - \hat{q}) + \tau\end{aligned}$$

Se llega al observador en su forma de análisis. Invocando al *Lema 4.4* se concluye la prueba. Δ

Como se mencionó en el análisis del observador de orden reducido el filtro q_f entrega también un estimado del cuaternión. El observador de orden completo es similar: de hecho, se obtienen dos estimados del cuaternión. Esta redundancia es resultado de dos necesidades: permitir la

implementación y facilitar el análisis por contracción. Usando el filtro, la región de contracción puede hacerse arbitrariamente grande.

Una alternativa para prescindir del filtro se presenta a continuación, pero el resultado de contracción es local.

Corolario 4.1. *Análisis de contracción local de observador de orden completo (no implementable) para satélite con ruedas de reacción:*

Considere el observador de orden completo sin filtro siguiente:

$$\begin{aligned} M\dot{\hat{\omega}} &= S(R^T h^I)\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(\hat{q})J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \hat{q}) + \tau \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}J(q)\hat{\omega} + K_{o2}(q - \hat{q}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

El observador logra que $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente, cumpliendo con el objetivo de estimación, siempre que $\|q - \hat{q}\| < \frac{\lambda_{\min}(K_o)}{\lambda_{\max}(K_o)}$.

Demostración. Se define el mismo sistema virtual del caso anterior:

$$\begin{aligned} M\dot{\xi}_1 &= S(R^T h^I)\xi_1 + \frac{1}{2}K_o J^T(\hat{q})J(q)(\omega - \xi_1) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \xi_2) + \tau \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2}J(q)\xi_1 + K_{o2}(q - \xi_2) \end{aligned}$$

El sistema virtual tiene dos soluciones particulares: $\xi = [q \ \omega]^T$, la planta, y $\xi = [\hat{q} \ \hat{\omega}]^T$. Analizando la evolución de la distancia cuadrática del desplazamiento infinitesimal bajo la métrica $\mathbb{H} = \text{diag}(M, I_4)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\xi^T \mathbb{H} \delta\xi &= \delta\xi_1^T S(R^T h^I)\delta\xi_1 - \frac{1}{2}\delta\xi_1^T K_o J^T(\hat{q})J(q)\delta\xi_1 - \frac{1}{2}\delta\xi_1^T J^T(q)\delta\xi_2 + \delta\xi_1^T \frac{1}{2}J(q)\delta\xi_2 - \delta\xi_2^T K_{o2}\delta\xi_2 \\ &= -\frac{1}{2}\delta\xi_1^T K_o J^T(\hat{q})J(q)\delta\xi_1 - \delta\xi_2^T K_{o2}\delta\xi_2 \\ &= -\delta\xi^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\xi_1^T K_o J^T(\hat{q})J(q) & 0 \\ 0 & K_{o2} \end{bmatrix} \delta\xi \triangleq -\delta\xi^T \mathbb{J} \delta\xi \end{aligned}$$

Analizando el primer término de \mathbb{J} :

$$\begin{aligned} -\delta\xi_1^T \frac{1}{2}K_o J^T(\hat{q})J(q)\delta\xi_1 &= -\frac{1}{2}\delta\xi_1^T K_o \left(J^T(\hat{q})J(q) + J^T(q)J(q) - J^T(q)J(q) \right) \delta\xi_1 \\ &= -\frac{1}{2}\delta\xi_1^T K_o \left(I + J^T(\hat{q} - q)J(q) \right) \delta\xi_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\lambda_{\min}(K_o) - \lambda_{\max}(K_o) \|\hat{q} - q\| \right) \|\delta\xi_1\|^2 \end{aligned}$$

La matriz \mathbb{J} será positiva definida siempre que $\lambda_{\min}(K_o) - \lambda_{\max}(K_o) \|\hat{q} - q\| > 0$. Δ

El resultado es local, para toda matriz de ganancia K_o existe una región de atracción bien definida que ya no puede ser extendida. El observador no es globalmente contrayente, pero esto no implica que un análisis diferente pueda establecer condiciones para convergencia asintótica o incluso exponencial. Sin embargo, como se supone siempre conocido a q , podrán elegirse las condiciones iniciales para garantizar que el observador converja.

La implementación de este observador es igual en estructura a su análogo con filtro:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(R^T h^I) - \frac{1}{2} K_o (J^T(\hat{q}) J(q) - I) \right) \hat{\omega} - \frac{1}{2} J^T(q) \hat{q} - K_o J^T(q) K_{o2} (q - \hat{q}) + \tau \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} J(q) \hat{\omega} + K_{o2} (q - \hat{q}) \\ \dot{q}_f &= \gamma (q - q_f), \quad q_f(0) = q(0)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Dado que:

$$\begin{aligned}M\hat{\omega} &= \bar{\omega} + K_o J^T(\hat{q}) q \\ M\dot{\hat{\omega}} &= \dot{\hat{\omega}} + K_o J^T(\hat{q}) \dot{q} + K_o J^T(\hat{q}) \dot{q} \\ &= \dot{\hat{\omega}} - K_o J^T(q) \left(\frac{1}{2} J(q) \hat{\omega} + K_{o2} (q - \hat{q}) \right) + \frac{1}{2} K_o J^T(\hat{q}) J(q) \omega \\ &= \dot{\hat{\omega}} - \frac{1}{2} K_o I \hat{\omega} + K_o J^T(q) K_{o2} (q - \hat{q}) + \frac{1}{2} K_o J^T(\hat{q}) J(q) \omega\end{aligned}$$

Sustituyendo a $\dot{\hat{\omega}}$:

$$\begin{aligned}M\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(R^T h^I) - \frac{1}{2} K_o (J^T(\hat{q}) J(q) - I) \right) \hat{\omega} - \frac{1}{2} J^T(q) \hat{q} - K_o J^T(q) K_{o2} (q - \hat{q}) + \tau \\ &\quad - \frac{1}{2} K_o I \hat{\omega} + K_o J^T(q) K_{o2} (q - \hat{q}) + \frac{1}{2} K_o J^T(\hat{q}) J(q) \omega \\ &= S(R^T h^I) \hat{\omega} + \frac{1}{2} K_o J^T(\hat{q}) J(q) (\omega - \hat{\omega}) + \frac{1}{2} J^T(q) (q - \hat{q}) + \tau\end{aligned}$$

Que es el observador en su forma no implementable.

Observador de orden completo para satélite con propulsor de gas

De igual manera que el observador anterior, el observador de orden completo para el satélite equipado con propulsor de gas es una extensión de su versión de orden reducido.

Lema 4.5. *Análisis de contracción de observador de orden completo (no implementable) para satélite con propulsor de gas:*

Para el sistema definido por (2.31) y (2.12) considere al observador de orden completo en su forma de análisis:

$$\begin{aligned} M\dot{\hat{\omega}} &= S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \hat{q}) + \tau \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}J(q)\hat{\omega} + K_{o2}(q - \hat{q}) \\ \dot{q}_f &= \gamma(q - q_f), \quad q_f(0) = q(0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para las ganancias $\gamma > 0$, $K_o = K_o^T > 0$ y $K_{o2} = K_{o2}^T > 0$. El observador logra que $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente, cumpliendo con el objetivo de estimación, siempre que $\|\hat{\omega}\| < (\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o))/(2M_M)$ para algún $\epsilon_q > 0$, definido por el Lema 4.1. Adicionalmente, si M es diagonal, la región de contracción queda definida por $\lambda_1 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$ lo que implica un resultado global.

Demostración. Se define al sistema virtual como:

$$\begin{aligned} M\dot{\xi}_1 &= S(M\omega)\xi_1 + \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)(\omega - \xi_1) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \xi_2) + \tau \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2}J(q)\xi_1 + K_{o2}(q - \xi_2) \end{aligned}$$

El sistema virtual tiene dos soluciones particulares: $\xi = [q \ \omega]^T$, la planta, y $\xi = [\hat{q} \ \hat{\omega}]^T$, el observador, una vez reescrito de la misma forma que en la Demostración del Teorema 4.2.

Analizando la evolución de la distancia cuadrática del desplazamiento infinitesimal bajo la métrica $\mathbb{H} = \text{diag}(M, I_4)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta\xi^T \mathbb{H} \delta\xi) &= \\ &= \delta\xi_1^T S(M\hat{\omega})\delta\xi_1 - \delta\xi_1^T \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)\delta\xi_1 - \frac{1}{2}\delta\xi_1^T J^T(q)\delta\xi_2 + \\ &\quad + \delta\xi_2^T \frac{1}{2}J(q)\delta\xi_1 - \delta\xi_2^T K_{o2}\delta\xi_2 \\ &= -\delta\xi_1^T \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)\delta\xi_1 - \delta\xi_2^T K_{o2}\delta\xi_2 \\ &= -\delta\xi^T \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right) & 0 \\ 0 & K_{o2} \end{bmatrix} \delta\xi \triangleq -\delta\xi^T \mathbb{J} \delta\xi \end{aligned}$$

El sistema virtual será contrayente siempre que \mathbb{J} sea positivo definido. Esto se cumplirá siempre que $\lambda_2 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) - 2M_M \|\hat{\omega}\| > 0$. Este resultado se obtiene de observar que el primer elemento en la diagonal de \mathbb{J} es el Jacobiano generalizado de observador de orden reducido. El análisis es el mismo, debido a que \mathbb{J} es diagonal.

Dentro de la región de contracción, las soluciones particulares convergen entre sí con tasa de convergencia menor o igual a $\lambda_4 \triangleq \min\{\lambda_2/2, \lambda_{\min}(K_{o2})\}$. Entonces $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente. Δ

Teorema 4.4. *Convergencia exponencial y semi-global de observador de orden completo para satélite con propulsor de gas:*

El observador (4.11) se implementa Mediante una variable auxiliar $\bar{\omega}$, cuya dinámica es:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(M\hat{\omega}) - \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\right)\hat{\omega} + \left(\gamma K_o J^T(q_f) + \frac{1}{2}J^T(\hat{q})\right)q + \tau \\ \hat{\omega} &= M^{-1}\left(\bar{\omega} + K_o J^T(q_f)q\right) \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}J(q)\hat{\omega} + K_{o2}(q - \hat{q}) \\ \dot{q}_f &= \gamma(q - q_f), \quad q_f(0) = q(0)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Este observador, en su forma implementable, logra que los estados del observador converjan exponencialmente a los estados de la planta dentro de la región definida por $\|\hat{\omega}\| < (\lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max})(K_o)/(2M_M)$ para algún $\epsilon_q > 0$.

Demostración. Despejando a $M\hat{\omega}$ de (4.15) y tomando su derivada temporal:

$$\begin{aligned}M\hat{\omega} &= \bar{\omega} + K_o J^T(q_f)q \\ M\dot{\hat{\omega}} &= \dot{\bar{\omega}} + K_o J^T(\dot{q}_f)q + K_o J^T(q_f)\dot{q} \\ &= \dot{\bar{\omega}} - K_o J^T(q)\gamma(q - q_f) + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\omega \\ &= \dot{\bar{\omega}} + \gamma K_o J^T(q)q_f + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\omega\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de $\bar{\omega}$ de (4.4):

$$\begin{aligned}M\dot{\hat{\omega}} &= \left(S(M\hat{\omega}) - \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\right)\hat{\omega} + \\ &+ \left(\gamma K_o J^T(q_f) + \frac{1}{2}J^T(\hat{q})\right)q + \tau + \gamma K_o J^T(q)q_f + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\omega \\ &= S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) - \frac{1}{2}J^T(q)\hat{q} + \tau \\ &= S(M\hat{\omega})\hat{\omega} + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \hat{\omega}) + \frac{1}{2}J^T(q)(q - \hat{q}) + \tau\end{aligned}$$

Se llega al observador en su forma de análisis. Invocando al *Lema 4.9* se concluye la prueba. Δ

4.4. Redundancia de sensores y sincronización de sistemas ante presencia de ruido

La redundancia de sistemas es un elemento siempre presente en satélites [2, 7, 39]. Se instalan sistemas redundantes con el objetivo principal de hacer al sistema robusto antes fallas. Los sistemas adicionales trabajan en paralelo al principal, sin embargo, sus salidas generalmente no reingresan al satélite hasta que el sistema principal falla y es sustituido por uno de los sistemas redundantes.

Si bien los instrumentos de medición adicionales se instalan con un objetivo diferente al objetivo de control, es posible emplear esta información adicional de manera inteligente para combatir problemas en los mismos sensores.

En particular, en [11] se sincroniza una clase de sistemas contaminados por ruido blanco para recuperar el comportamiento libre de ruido. Para esta clase de sistemas y esta clase de ruido, se demuestra que cuando el número de sistemas sincronizados tiende a infinito, el efecto del ruido en la trayectoria media de los sistemas tiende a ser nulo.

Este resultado se ha extendido a cierta clase de observadores y en este trabajo se utiliza para atacar el problema cuando varias mediciones redundantes de posición se encuentran contaminadas por ruido blanco.

Para el problema de orientación, se suponen N sensores independientes que miden el mismo dato de orientación. La i -ésima salida de cada sensor se encuentra contaminada aditivamente por un proceso de ruido blanco, de media $\mu_i = 0$ y e intensidad σ_i . Se considera entonces a las N mediciones como:

$$q_i = q + n_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

Donde n_i es el proceso de ruido blanco asociado a cada sensor.

Para reducir el efecto del ruido, se propone el siguiente sistema de N observadores de orden completo (no implementables) sincronizados:

$$\begin{aligned} M\dot{\hat{\omega}}_i &= N(\hat{\omega}_i, q_i)\hat{\omega}_i + \frac{1}{2}K_o J^T(q_{fi})J(q_i)(\omega_i - \hat{\omega}_i) + \frac{1}{2}J^T(q_i)(q_i - \hat{q}_i) + K_s \sum_{j=0}^N (\hat{\omega}_j - \hat{\omega}_i) + \tau \\ \dot{\hat{q}}_i &= \frac{1}{2}J(q_i)\hat{\omega}_i + K_{o2}(q_i - \hat{q}_i) + K_s \sum_{j=0}^N (\hat{q}_j - \hat{q}_i) \\ \dot{q}_{fi} &= \gamma(q_i - q_{fi}), \quad q_{fi}(0) = q_i(0) \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $K_s = K_s^T > 0$ y $N(\hat{\omega}_i, q_i) = S(R(q_i)^T h^I)$ para satélites con ruedas de reacción, o bien, $N(\hat{\omega}_i, q_i) = S(M\hat{\omega}_i)$ para satélites con propulsor de gas.

Lema 4.6. *Análisis de contracción del observador sincronizado:*

Considere el sistema de observadores de orden completo sincronizados (4.14). Cuando las N mediciones son libres de ruido ($\sigma_i = 0$), los N observadores sincronizan.

Demostración. Cuando no hay ruido, el sistema es una red simétrica todos con todos de observadores contrayentes. El Teorema 2.6 garantiza que los N elementos de la red sincronizan, ya que cada elemento es contrayente. Las trayectorias de todos los observadores convergen entre sí. Δ

Teorema 4.5. *Convergencia exponencial y global de observador sincronizado y límite de desempeño:*

El observador sincronizado puede implementarse mediante:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}}_i &= \left(N(\hat{\omega}_i, q_i) - \frac{1}{2}K_o J^T(q_{fi})J(q_i) \right) \hat{\omega}_i + \left(\gamma K_o J^T(q_{fi}) + \frac{1}{2}J^T(\hat{q}_i) \right) q_i + \tau \\ \hat{\omega}_i &= M^{-1} \left(\bar{\omega}_i + K_o J^T(q_{fi})q_i \right) \\ \dot{\hat{q}}_i &= \frac{1}{2}J(q_i)\hat{\omega}_i + K_{o2}(q_i - \hat{q}_i) \\ \dot{q}_{fi} &= \gamma(q_i - q_{fi}), \quad q_{fi}(0) = q_i(0)\end{aligned}\tag{4.15}$$

Demostración:

La forma implementable se demuestra de la misma forma que los Teoremas 4.8 y 4.10, donde el único término adicional son los pares de sincronización. Cuando hay ruido presente, la estructura es análoga a la presentada en [11, 31], demostrando que a medida que N tiende a infinito, el efecto del ruido en el observador sincronizado tiende a cero. Esto concluye la Demostración.

La salida del observador es el cuaternión estimado, q_i y el estimado de la velocidad angular, definida por:

$$\hat{\omega}_{li} = M^{-1} \left(\bar{\omega}_i + K_o J^T(q_{fi})\hat{q}_i \right)\tag{4.16}$$

La sincronización es un mecanismo útil para atenuar los efectos del ruido en sistemas con mediciones redundantes. Por los argumentos en [21, 31], bajo presencia de ruido, los estados de los N observadores sincronizados recuperan el comportamiento de la dinámica libre de ruido a medida que N tiende a infinito. La salida de los observadores sincronizados es un promedio de los estados estimados de cada observador individual:

$$\begin{aligned}q^\circ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i \\ \omega^\circ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_{li}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Capítulo 5

Control para seguimiento de orientación por retroalimentación de salida

Cuando no se dispone de mediciones de velocidad angular, ω , la ley de control para seguimiento definida por (3.12) y (3.1) no es implementable. Si bien ω_r está disponible, no es el caso para $\dot{\omega}_r$ ya que requiere a ω . La misma ley de control, (3.12) requiere explícitamente a ω en una o dos instancias, dependiendo del tipo de actuador. Una primera idea es usar al observador para estimar ω y sustituirlo al estimado en la ley de control. No es tan sencillo, sin embargo.

Un resultado conocido es que el principio de separación no se verifica necesariamente en sistemas no lineales. Diseñar independientemente controlador y observador no garantiza la estabilidad del sistema global cuando el observador se acopla al controlador, debido al fenómeno pico. Esto no quiere decir que no puedan diseñarse controladores basados en observador, pero se deben realizar un análisis más profundo. Una alternativa es diseñar ambos a la par para garantizar su estabilidad [33, 34].

Otra alternativa es diseñar independientemente ambos elementos y posteriormente derivar condiciones para garantizar la estabilidad del sistema completo. Una característica importante de la contracción es que se preserva bajo ciertas condiciones para ciertas combinaciones de sistemas [9]. Por esta razón, la contracción es una herramienta útil para el diseño “por bloques” de sistemas de control.

Este será el enfoque para diseñar controladores por retroalimentación de salida basados en observador. Diseñados por separado observador y controlador contrayentes, se analiza qué sucede con el sistema cuando se implanta el observador en la ley de control. Para ello es útil reescribir las ecuaciones en términos de aquellas variables que deberán estimarse.

La variable compuesta ω_r no cambia en su definición y puede calcularse con datos conocidos.

Su derivada, $\dot{\omega}_r$ requiere conocimiento de ω que no está disponible. Se define su estimado como:

$$\dot{\hat{\omega}}_r = R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \Delta\hat{\omega} \quad (5.1)$$

Con Δ definido en (3.10). Manipulando la definición anterior:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_r &= R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \Delta(\hat{\omega} + \omega - \omega) \\ &= R^T(e)\dot{\omega}_d + \lambda J^T(q)\dot{q}_d + \Delta\omega - \Delta(\omega - \hat{\omega}) \\ &= \dot{\omega}_r - \Delta(\omega - \hat{\omega}) \end{aligned}$$

El resto del análisis se realiza por separado para ambas clases de satélites, similar al desarrollo de sus observadores.

5.1. Retroalimentación de salidas para satélite con ruedas de reacción

Cuando se usan ruedas de reacción, la ley de control (3.12) es:

$$\tau = M\dot{\omega}_r - S(R^T h^I)\omega_r - K_c(\omega - \omega_r)$$

Sustituyendo los valores no disponibles por sus estimados se obtiene la ley de control modificada:

$$\tau = M\dot{\hat{\omega}}_r - S(R^T h^I)\omega_r - K_c(\hat{\omega} - \omega_r) \quad (5.2)$$

Teorema 5.1. *Convergencia exponencial y global de control por retroalimentación de salida para satélite con ruedas de reacción:*

La ley de control modificada (5.2) junto con el observador de orden reducido (4.2) logran que $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente siempre que $\lambda_1 \triangleq \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$ para algún $\epsilon_q > 0$. Entonces, $\omega_e \rightarrow 0$, $e_v \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow \pm 1$ asintóticamente, por lo que se cumplen los objetivos de estimación y seguimiento.

Demostración. La ley de control modificada (5.2) puede reescribirse usando el desarrollo de $\dot{\hat{\omega}}_r$ en (5.1).

$$\begin{aligned} M(\dot{\omega}_r - \Delta(\omega - \hat{\omega})) &= S(R^T h^I)\omega_r + K_c(\hat{\omega} - \omega_r) + \tau \\ &= S(R^T h^I)\omega_r + K_c(\hat{\omega} - \omega_r + \omega - \omega) + \tau \\ &= S(R^T h^I)\omega_r + K_c(\omega - \omega_r) - K_c(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ M\dot{\omega}_r &= S(R^T h^I)\omega_r + K_c(\omega - \omega_r) - (K_c - M\Delta)(\omega - \hat{\omega}) + \tau \end{aligned}$$

Se define un sistema virtual como:

$$\begin{aligned} M\dot{\xi}_1 &= S(R^T h^I)\xi_1 + K_c(\omega - \xi_1) - (K_c - M\Delta)(\omega - \xi_2) + \tau \\ M\dot{\xi}_2 &= S(R^T h^I)\xi_2 + \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)(\omega - \xi_2) + \tau \end{aligned}$$

El sistema virtual tiene dos soluciones particulares de interés: $\xi_1 = \omega$, $\xi_2 = \omega$, la dinámica, y $\xi_1 = \omega_r$, $\xi_2 = \hat{\omega}$, el controlador con el observador (4.2).

El desplazamiento infinitesimal está dado por:

$$\begin{aligned} M\delta\dot{\xi}_1 &= S(R^T h^I)\delta\xi_1 - K_c\delta\xi_1 + (K_c - M\Delta)\delta\xi_2 \\ M\delta\dot{\xi}_2 &= S(R^T h^I)\delta\xi_2 - \frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)\delta\xi_2 \end{aligned}$$

La evolución de su distancia cuadrática bajo la métrica $\mathbb{M} \triangleq \text{diag}(M, M)$ es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta\xi^T \mathbb{M} \delta\xi &= -\delta\xi_1^T K_c \delta x_{i_1} - \delta\xi_2^T \frac{1}{2} K_o J^T(q_f)J(q)\delta\xi_2 + \delta\xi_1^T (K_c - M\Delta)\delta\xi_2 \\ &= -\delta\xi^T \begin{bmatrix} K_c & -(K_c - M\Delta) \\ 0 & \frac{1}{2} K_o J^T(q_f)J(q) \end{bmatrix} \delta\xi \end{aligned}$$

Se trata de un sistema en configuración jerárquica. Puede emplearse el *Lema 2.5* de contracción de sistemas jerárquicos. El término $M\Delta - K_c$ es claramente acotado debido a que Δ lo es. Entonces, el sistema es contrayente en aquella región donde ambos K_c y $\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q)$ son uniformemente positivos definidos. Esta región está definida por $\lambda_1 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) > 0$.

En esta región, el sistema virtual es contrayente, lo que implica que sus soluciones particulares convergen exponencialmente, con tasa $\lambda_3 \triangleq \min\{\lambda_1/2, \lambda_{\min}(K_c)\}$. Entonces, $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$, por el *Lema 3.1* se demuestra que $\omega_e \rightarrow 0$, $e_v \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow \pm 1$ asintóticamente. Se cumplen los objetivos de estimación y de seguimiento. △

5.2. Retroalimentación de salidas para satélite con propulsor de gas

Cuando se usan propulsores de gas, la ley de control (3.12) es:

$$\tau = M\dot{\omega}_r - S(M\omega)\omega_r - K_c(\omega - \omega_r)$$

Sustituyendo los valores no disponibles por sus estimados se obtiene la ley de control modificada:

$$\tau = M\dot{\hat{\omega}}_r - S(M\hat{\omega})\omega_r - K_c(\hat{\omega} - \omega_r) \quad (5.3)$$

Teorema 5.2. *Convergencia exponencial y semiglobal de control por retroalimentación de salida para satélite con propulsor de gas:*

La ley de control modificada (5.3) junto con el observador de orden reducido (4.5) logran que $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente siempre que $\lambda_2 \triangleq \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) - 2M_M \|\hat{\omega}\| > 0$ para algún $\epsilon_q > 0$. Entonces, $\omega_e \rightarrow 0$, $e_v \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow \pm 1$ asintóticamente, por lo que se cumplen los objetivos de estimación y seguimiento. Adicionalmente, si M es diagonal, la región de contracción queda definida por $\lambda_1 > 0$.

Demostración. La ley de control modificada (5.3) puede reescribirse usando el desarrollo de $\dot{\hat{\omega}}_r$ en (5.1).

$$\begin{aligned} M(\dot{\hat{\omega}}_r - \Delta(\omega - \hat{\omega})) &= S(M\hat{\omega})\omega_r + K_c(\hat{\omega} - \omega_r) + \tau \\ &= S(M(\hat{\omega} + \omega - \omega))\omega_r + K_c(\omega - \omega_r) - K_c(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ &= S(M\omega)\omega_r - S(M(\omega - \hat{\omega}))\omega_r + K_c(\omega - \omega_r) - K_c(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ &= S(M\omega)\omega_r + S(\omega_r)M(\omega - \hat{\omega}) + K_c(\omega - \omega_r) - K_c(\omega - \hat{\omega}) + \tau \\ M\dot{\omega}_r &= S(M\omega)\omega_r + K_c(\omega - \omega_r) - \left(K_c - M\Delta - S(\omega_r)M\right)(\omega - \hat{\omega}) + \tau \end{aligned}$$

Se define un sistema virtual como:

$$\begin{aligned} M\dot{\xi}_1 &= S(M\omega)\xi_1 + K_c(\omega - \xi_1) - \left(K_c - M\Delta - S(\omega_r)M\right)(\omega - \xi_2) + \tau \\ M\dot{\xi}_2 &= S(M\omega)\xi_2 + \left(\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M\right)(\omega - \xi_2) + \tau \end{aligned}$$

El sistema virtual tiene dos soluciones particulares de interés: $\xi_1 = \omega$, $\xi_2 = \omega$, la dinámica, y $\xi_1 = \omega_r$, $\xi_2 = \hat{\omega}$, el controlador con el observador (4.5).

De forma análoga al análisis previo para el satélite con ruedas de reacción, se calcula su desplazamiento infinitesimal y la evolución de la distancia cuadrática de éste bajo la misma métrica \mathbb{M} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d} \delta \xi^T \mathbb{M} \delta \xi = -\delta \xi^T \begin{bmatrix} K_c & -(K_c - M\Delta - S(\omega_r)M) \\ 0 & \frac{1}{2} K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M \end{bmatrix} \delta \xi$$

Nuevamente, se trata de una configuración jerárquica. El término $K_c - M\Delta - S(\omega_r)M$ es acotado debido a que Δ y ω_r lo son. Empleando el *Lema 2.5*, el sistema virtual es contrayente en aquella región donde ambos K_c y $\frac{1}{2}K_o J^T(q_f)J(q) + S(\hat{\omega})M$ son uniformemente positivos definidos. Esta región está definida por $\lambda_2 = \lambda_{\min}(K_o) - \epsilon_q \lambda_{\max}(K_o) - 2M_M \|\hat{\omega}\| > 0$. El análisis cuando M es diagonal es el mismo que aquél para el observador para satélite con propulsor.

En esta región, el sistema virtual es contrayente con tasa $\lambda_4 \triangleq \min\{\lambda_2/2, \lambda_{\min}(K_c)\}$. Esto implica que sus soluciones particulares convergen exponencialmente. Entonces, $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$, por el *Lema 3.1* se demuestra que $\omega_e \rightarrow 0$, $e_v \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow \pm 1$ asintóticamente. Se cumplen los objetivos de estimación y de seguimiento. \triangle

5.3. Retroalimentación de salidas ante fenómeno de des-plegado

Finalmente, se presenta el controlador por retroalimentación de salidas con la ley de control modificada para el evitar esfuerzo de control innecesario.

Corolario 5.1. *Retroalimentación de salidas con ω_r modificado:*

El controlador definido por (5.2) con ω_r modificada (3.13) junto al observador (4.2), en lazo cerrado con la dinámica para un satélite con ruedas de reacción, logra que $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente siempre que $\lambda_1 > 0$.

También, el controlador definido por (5.3) con ω_r modificada (3.13), en lazo cerrado con la dinámica para un satélite con propulsor de gas, junto al observador (4.5) logra que $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente siempre que $\lambda_2 > 0$.

Para ambos casos, cuando $\omega \rightarrow \omega_r$ entonces $e_v \rightarrow 0$ y $e_0 \rightarrow 1$ si éste es el equilibrio más cercano o bien, $e_0 \rightarrow -1$ en caso contrario.

Demostración. Cuando $e_0 \geq 0$, la ley de control es igual a los casos analizados por los *Teoremas 5.1 y 5.2*. El sistema tiende al punto de equilibrio con $e_0 = 1$.

En el caso contrario, se usa el mismo virtual donde se aprecia que la contracción del sistema controlador-observador queda garantizada. Esto se debe a que el único cambio en el Jacobiano de la evolución del desplazamiento infinitesimal con respecto al caso previo es un signo dentro de Δ . Sin embargo, Δ se mantiene acotada, por lo que el *Teorema 2.5* de sistemas jerárquicos se mantiene. Entonces, $\omega \rightarrow \omega_r$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente. Por el *Corolario 3.3* el sistema tiende al punto de equilibrio con $e_0 = -1$.

△

Capítulo 6

Simulaciones y Resultados

En esta sección se presentan las simulaciones de los controladores y observadores diseñados en los capítulos anteriores. A menos que se indique lo contrario, se emplean las siguientes constantes [19, 21]:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix} \quad h^T = [1 \quad -1 \quad 0]^T$$

Las condiciones iniciales de la planta son:

$$q(0) = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^T \quad \omega(0) = [0.1 \quad 0 \quad 0]^T$$

El perfil de orientación se genera a partir de la representación eje/ángulo de Euler. Se fija el vector unitario de giro en:

$$\hat{k} = [0.8018 \quad 0.2673 \quad 0.5345]^T$$

Y se genera un perfil polinomial de orden cinco para el ángulo ϕ de tal forma que llegue a 90 grados en 18 segundos partiendo del reposo. Los perfiles de q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d se obtienen entonces de la definición (2.17) y sus derivadas.

El capítulo se divide en secciones correspondientes a los capítulos de control por retroalimentación de salidas, observadores, control por retroalimentación de estados y sincronización de observadores. Las simulaciones individuales se detallan en sus respectivas secciones, cuando se muestran trayectorias deseadas y del sistema, las deseadas con con línea sólida y las del sistema con línea punteada.

6.1. Control de seguimiento por retroalimentación de estados

Esta sección explora la ley de control por retroalimentación de estados presentada en el *Teorema 3.2* (3.12). Esta ley de control es igual para satélites con ruedas de reacción o con propulsor de

gas. Dado que la ley de control es igual en estructura y análisis para ambos tipos de actuador, se estudia únicamente el caso de ruedas de reacción.

Primero se evalúa con condiciones iniciales fijas para evaluar el efecto de la ganancia del controlador K_c . Después, se presenta el efecto de desplegado al modificar las condiciones iniciales y se muestra el comportamiento con la ley de control modificada por el el *Corolario 3.3*.

Primero se usan como parámetros del controlador a $\lambda = 2$ $K_c = 5 I$.

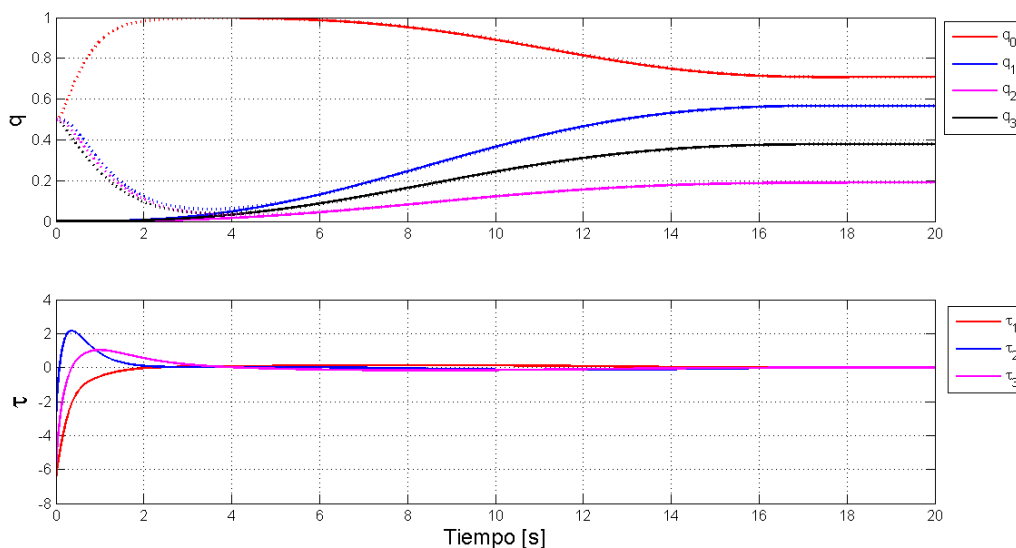


Figura 6.1: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 5 I$, $\lambda = 2$.

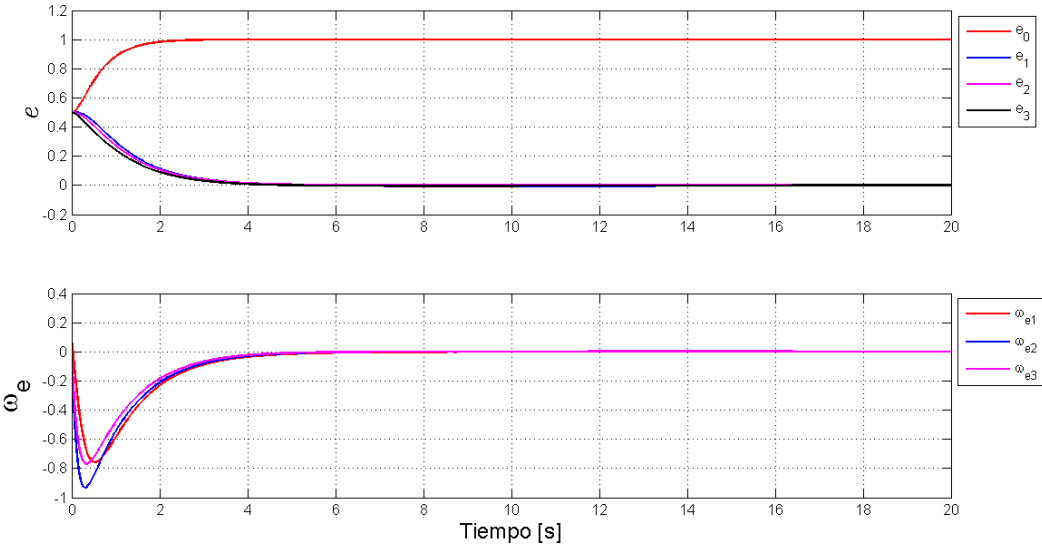


Figura 6.2: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 5$, I , $\lambda = 2$.

Después, se cambian parámetros a $\lambda = 2$ $K_c = 20 I$.

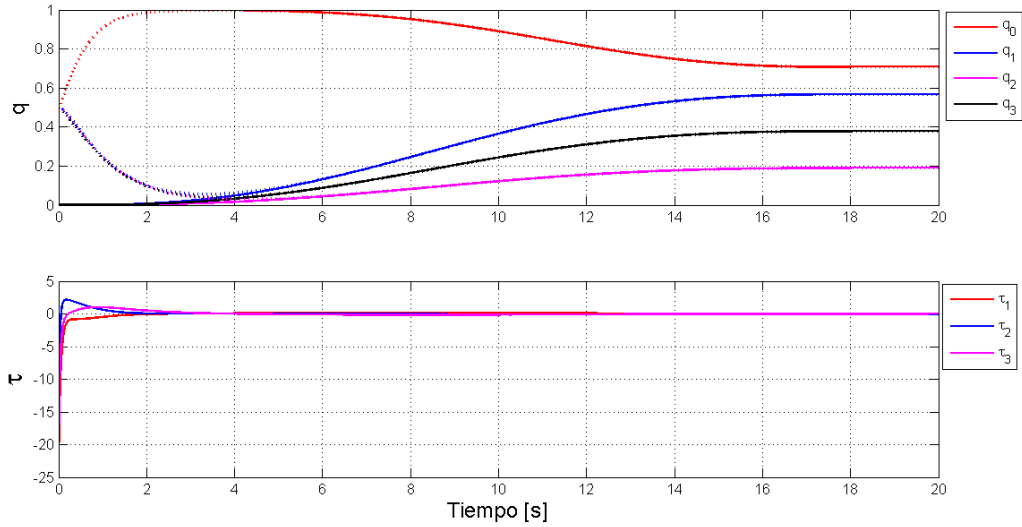


Figura 6.3: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$.

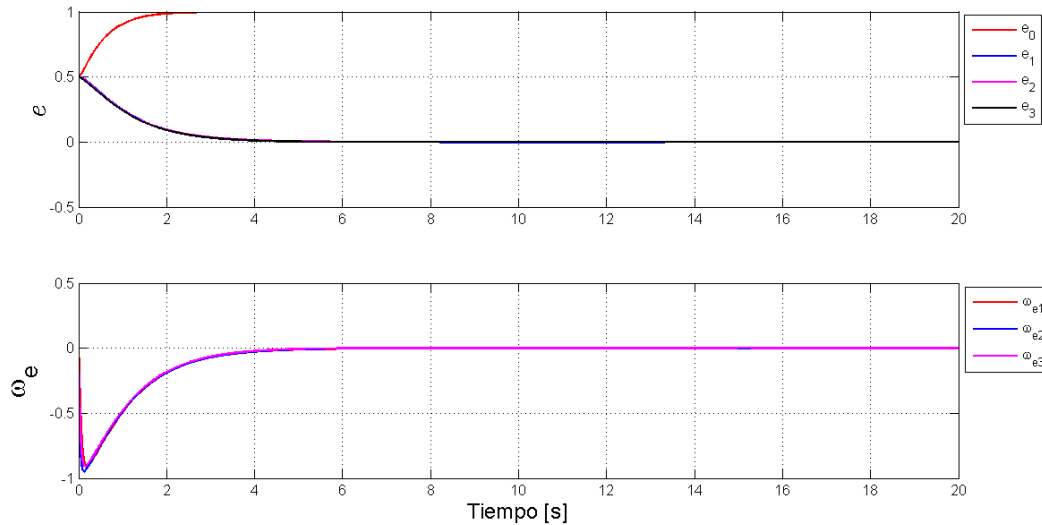


Figura 6.4: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción bajo ley de control por retroalimentación de estados (3.12), $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$.

Los resultados de la simulación muestran que el algoritmo de control (3.12) logra que $e_0 \rightarrow 1$, $e_v \rightarrow 0$ y $w_e \rightarrow 0$ asintóticamente. La ley de control planteada cumple con el objetivo de segui-

miento de orientación.

Se aprecia que modificar la ganancia K_c resulta en un intercambio entre el tiempo de convergencia y el esfuerzo de control, como es de esperar por la estructura del algoritmo. Si se desea menos esfuerzo de control debe elegirse K_c más pequeña, pero el sistema tardará más tiempo en alcanzar la trayectoria prescrita.

Ahora, se usan los mismos parámetros de la simulación previa, pero se inicia el sistema en $q(0) = -q_d(0)$ para ilustrar el fenómeno de desplegado (unwinding).

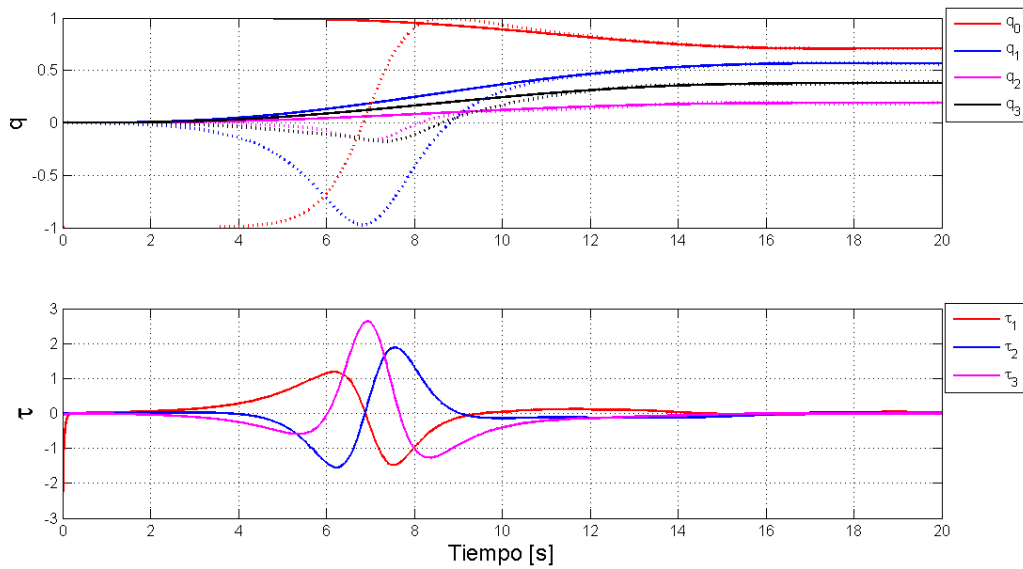


Figura 6.5: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] bajo fenómeno de desplegado con ley de control por retroalimentación de estados ($q(0) = -q_d(0)$). $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$.

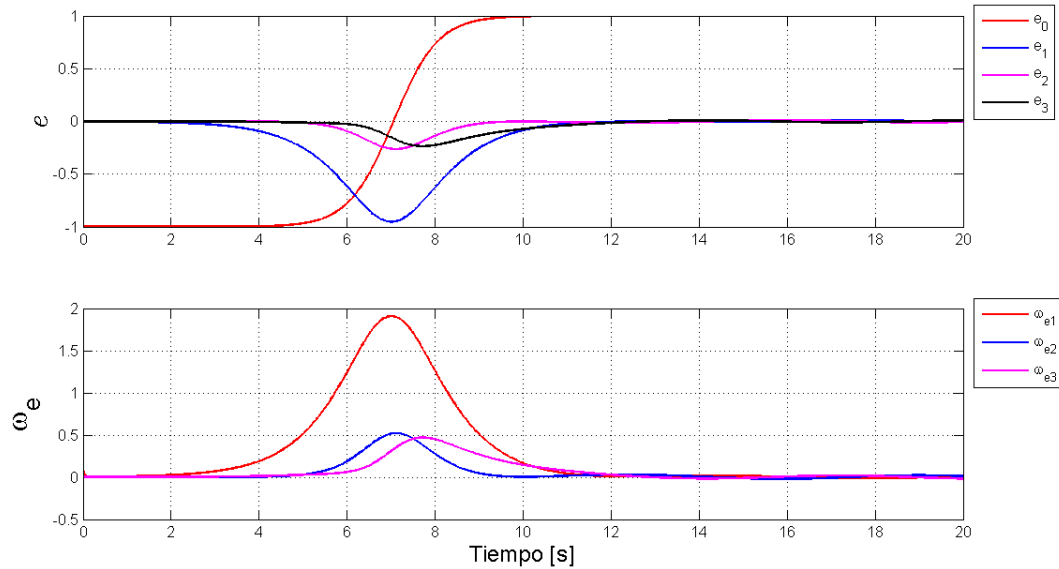


Figura 6.6: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] bajo fenómeno de desplegado con ley de control por retroalimentación de estados ($q(0) = -q_d(0)$). $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$.

Este último grupo de gráficas ilustra que el punto de equilibrio $e = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ es repulsivo, pese a representar la misma orientación. Puede suceder que el sistema desperdicie esfuerzo de control dando una vuelta completa cuando es suficiente un esfuerzo más pequeño en dirección contraria.

A continuación, se simula bajo las mismas condiciones de la simulación previa, pero se emplea la ley de control modificada por el *Corolario 3.3*.

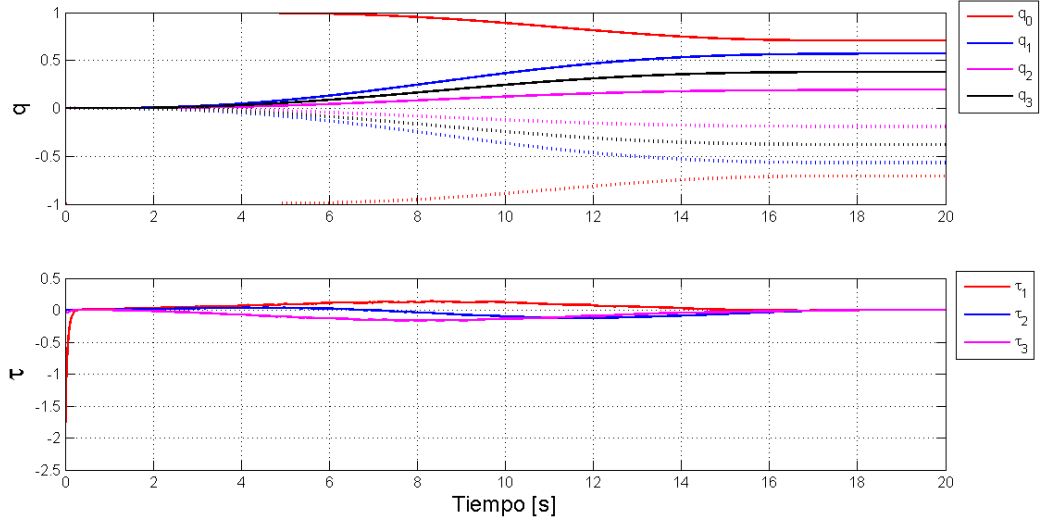


Figura 6.7: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] bajo fenómeno de desplegado ($q(0) = -q_d(0)$) con ley de control por retroalimentación de estados modificada. $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$.

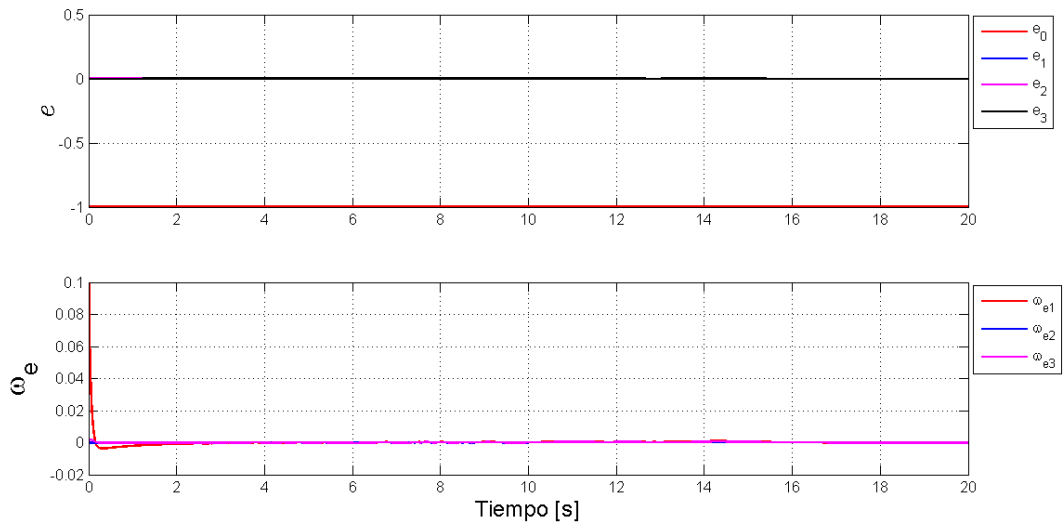


Figura 6.8: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] bajo fenómeno de desplegado ($q(0) = -q_d(0)$) con ley de control por retroalimentación de estados modificada. $K_c = 20 I$, $\lambda = 2$.

En esta última simulación, se aprecia que e_o tiene a -1, lo que implica que q tiende a $-q_d$. Esto se debe a que el sistema está más cerca de este punto de equilibrio. Dado que q_d y $-q_d$ representan la misma orientación, el objetivo de seguimiento se sigue cumpliendo pero se requiere un menor esfuerzo de control como se aprecia en la gráfica de par de control.

6.2. Observadores

Esta sección explora los observadores de orden reducido y completo desarrollados en el capítulo cuatro. Primero, se presenta el observador de orden reducido para el satélite con ruedas de reacción. Se simula para diferentes valores de la ganancia del observador para verificar las condiciones del *Teorema 4.2*.

Después, se simula el observador para satélites con propulsor de gas, nuevamente modificando la ganancia del observador K_o . También, se simula para una matriz de inercias M no diagonal, para verificar la condición de convergencia del *Teorema 4.4*.

Finalmente, se realiza una simulación de un observador de orden completo para cada tipo de satélite.

Observador para satélite con ruedas de reacción

Las siguientes simulaciones son para verificar el observador descrito por (4.2). Se simula al observador operando de manera paralela al sistema en lazo cerrado de las simulaciones del controlador de la sección previa: $q_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$, $K_c = 20I$, $\lambda = 2$.

Se toman como condiciones iniciales del observador a:

$$q_f(0) = q(0) \quad \bar{\omega}(0) = 0$$

Se simula para $\gamma = 5$ y diferentes valores de K_o .

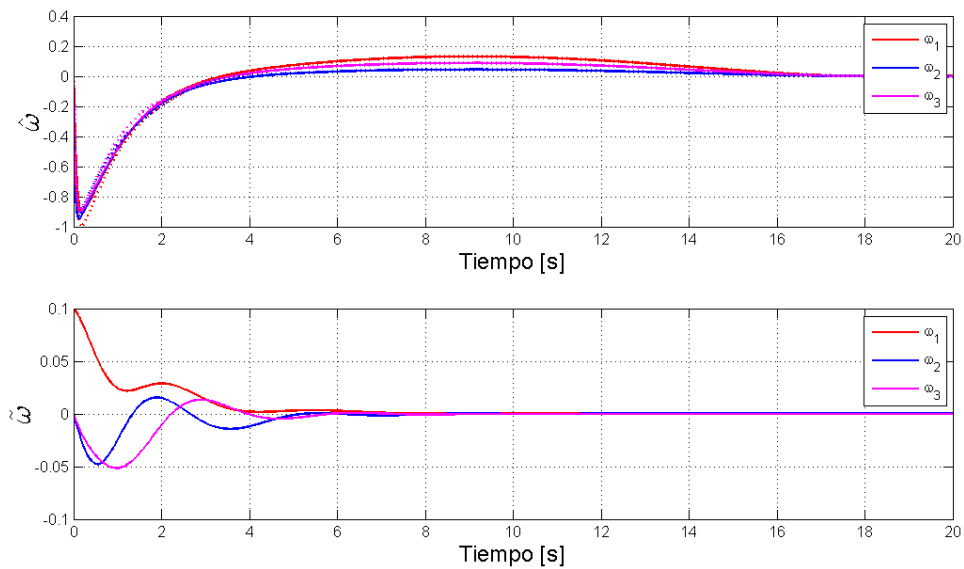


Figura 6.9: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$.

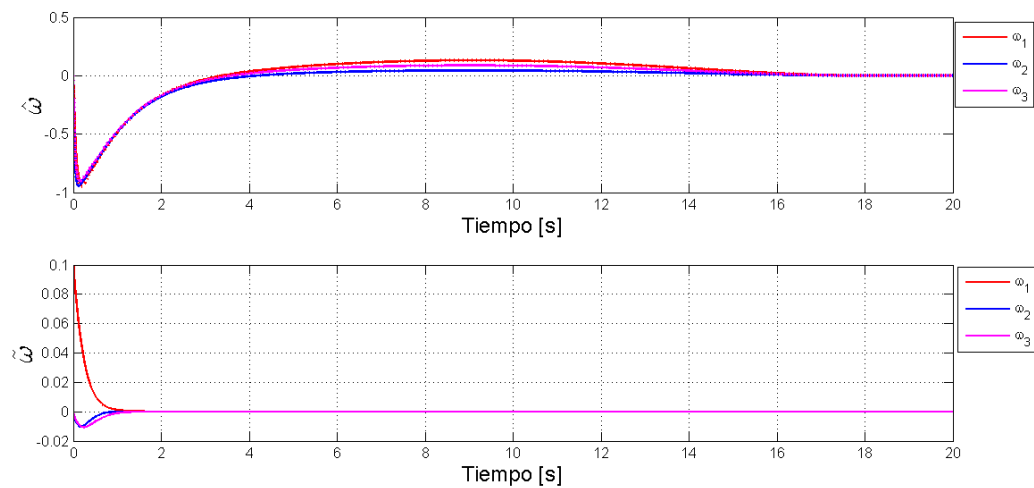


Figura 6.10: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = 8 I$, $\gamma = 5$.

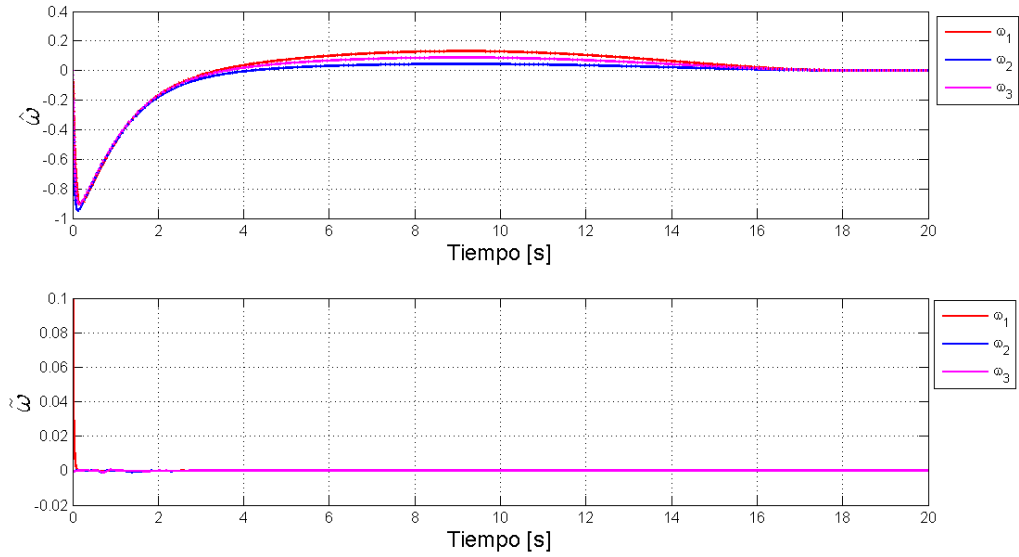


Figura 6.11: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = 100 I$, $\gamma = 5$.

Se verifica que el observador logra que la velocidad angular estimada converja a la actual exponencialmente. Se cumple el objetivo de observación.

La condición para estar dentro de la región de convergencia se cumple fácilmente para $K_o = k I$, ya que sus valores característicos son los mismos. Dado que $\|q_f - q\|$ es, debido a su condición de norma, menor o igual a dos, se puede elegir γ casi arbitrariamente. Una matriz de ganancias K_o menos trivial requiere mayor atención, como se muestra con la siguiente simulación:

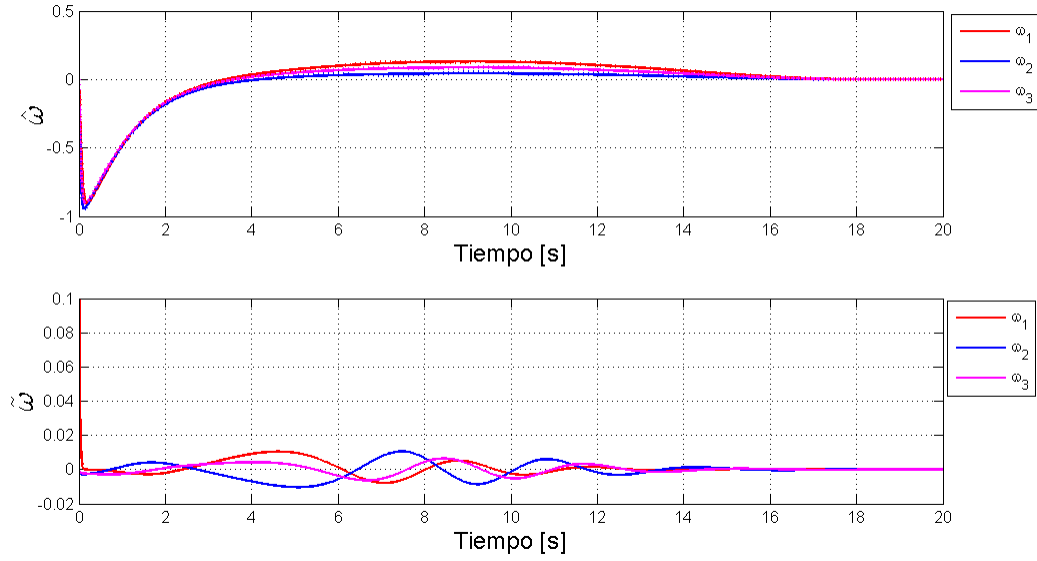


Figura 6.12: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con ruedas de reacción (4.2), $K_o = \text{diag}(100, 10, 0.1)$, $\gamma = 0.01$.

El error de observación aún converge a cero exponencialmente, pero el término $\epsilon_q \lambda_{max}(K_o)$ tiene un mayor efecto en el tiempo (y desempeño) de la convergencia.

Observador para satélite con propulsor de gas

Las siguientes simulaciones son para verificar el observador para satélites equipados con propulsor de gas (4.5). Se simula al observador operando paralelamente a un sistema con propulsores de gas y ley de control (3.12), parámetros: $q_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$, $K_c = 20$, $\lambda = 2$. Primero se simula usando la matriz de inercias diagonal original, con $\gamma = 5$ y diferentes valores de K_o .

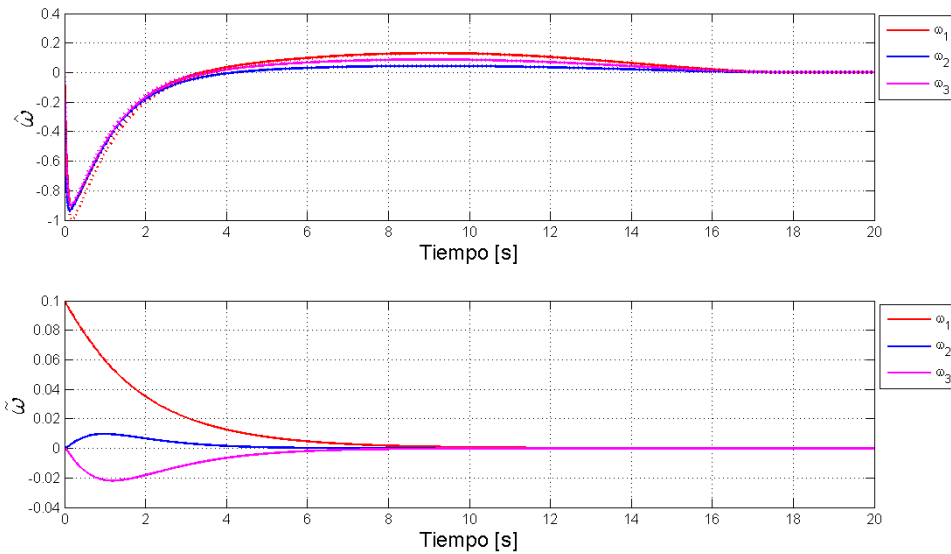


Figura 6.13: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.5), $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$.

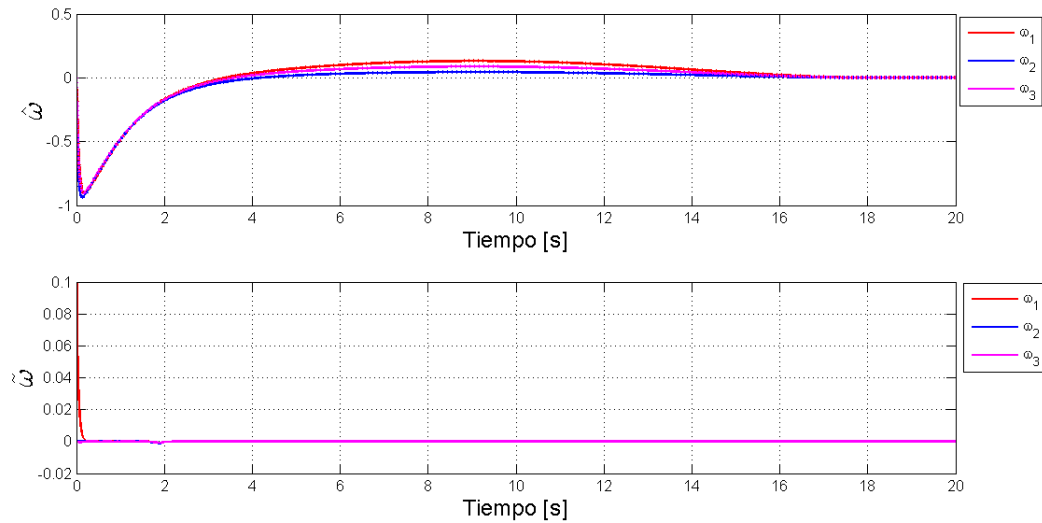


Figura 6.14: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.5), $K_o = 50 I$, $\gamma = 5$.

Se aprecia un comportamiento análogo al observador para satélites con ruedas de reacción como actuador. Ambas simulaciones indican que el error de estimación converge exponencialmente a

cero, el tiempo de convergencia puede modificarse mediante la matriz K_o .

La mayor diferencia entre ambos observadores es cuando la matriz M no es diagonal. A continuación se muestran los resultados de simulaciones empleando las mismas condiciones iniciales y parámetros, pero con:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.63 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$$

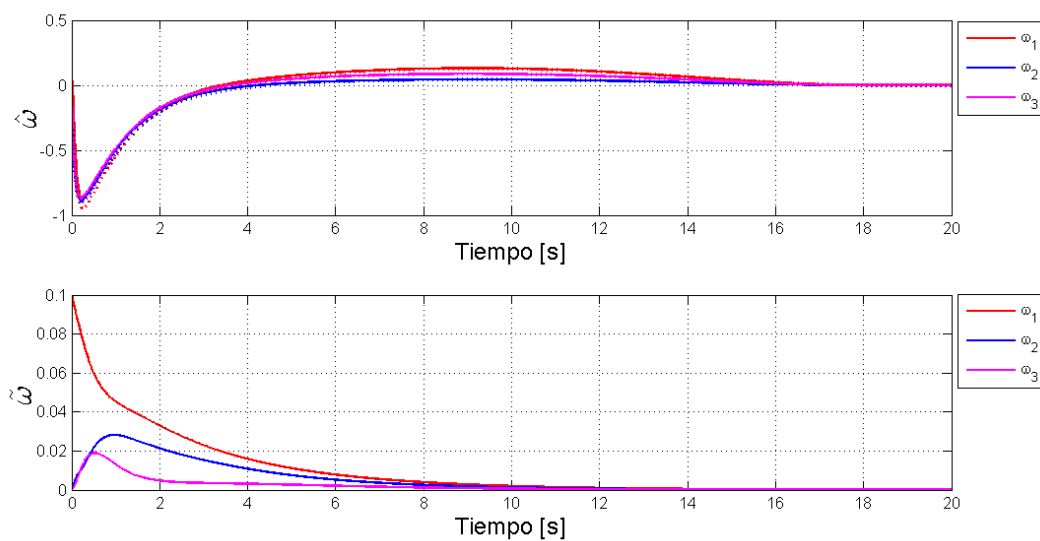


Figura 6.15: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.2) con M no diagonal, $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$.

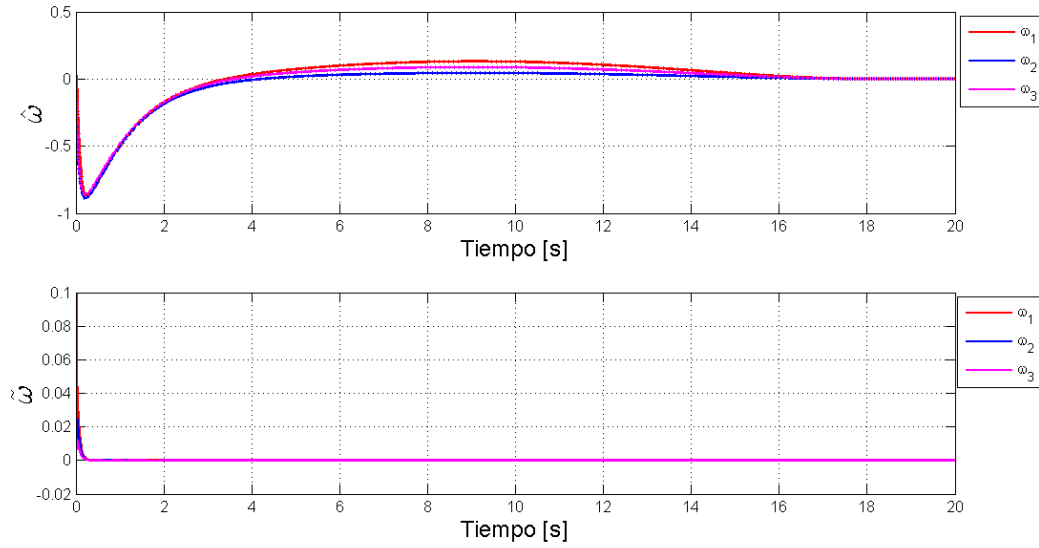


Figura 6.16: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden reducido para satélite con propulsor de gas (4.2) con M no diagonal, $K_o = 50 I$, $\gamma = 5$.

Cuando $K_o = 1$, la diferencia de desempeño del observador para ambos casos de la matriz de inercias es significativa. El término $M_M \|\hat{\omega}\|$ tiene un impacto mayor en la tasa de convergencia. Para $K_o = 50$, la diferencia entre ambos casos es mínima, en este caso, el término $\lambda_{max}(K_o)$ domina la tasa de convergencia.

Observadores de orden completo

Primero se presenta una simulación del observador de orden completo para un satélite con ruedas de reacción (4.7). El observador opera en paralelo a un controlador por retroalimentación de estados de la primera sección. Sus parámetros son: $K_c = 5 I$, $\lambda = 2$, las condiciones iniciales de la planta son: $q_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$, $\omega_0 = [0.1 \ 0 \ 0]^T$.

El observador tiene los siguientes parámetros: $K_o = 20 I$, $K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$. Las condiciones iniciales del observador son: $\hat{q}(0) = [0.7071 \ 0.7071 \ 0 \ 0]^T$, $\tilde{\omega}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$.

El error de estimación de cuaternión se calcula como:

$$\tilde{q} = \hat{q}^{-1} \otimes q$$

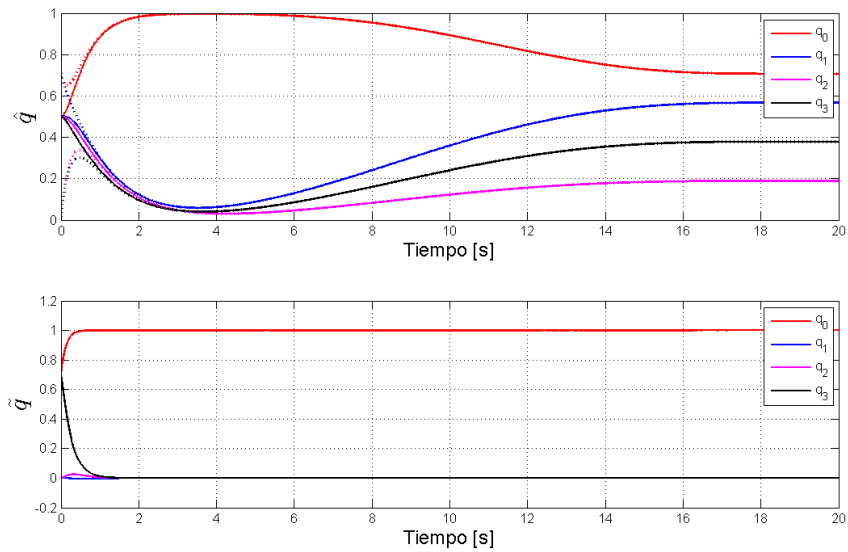


Figura 6.17: Cuaternión estimado \hat{q} y error de estimación de cuaternión \tilde{q} en [rad/s] para observador de orden completo para satélite con ruedas de reacción (4.7), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$.

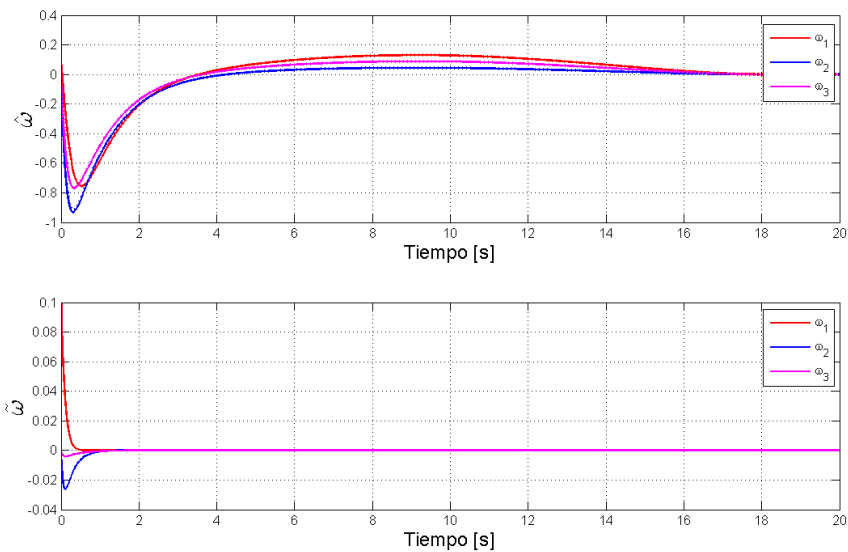


Figura 6.18: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden completo con ruedas de reacción (4.7), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$.

Finalmente, se simula para el observador de orden completo para satélites con propulsores de gas (4.11). Se usan los mismo parámetros de observador que la simulación previa.

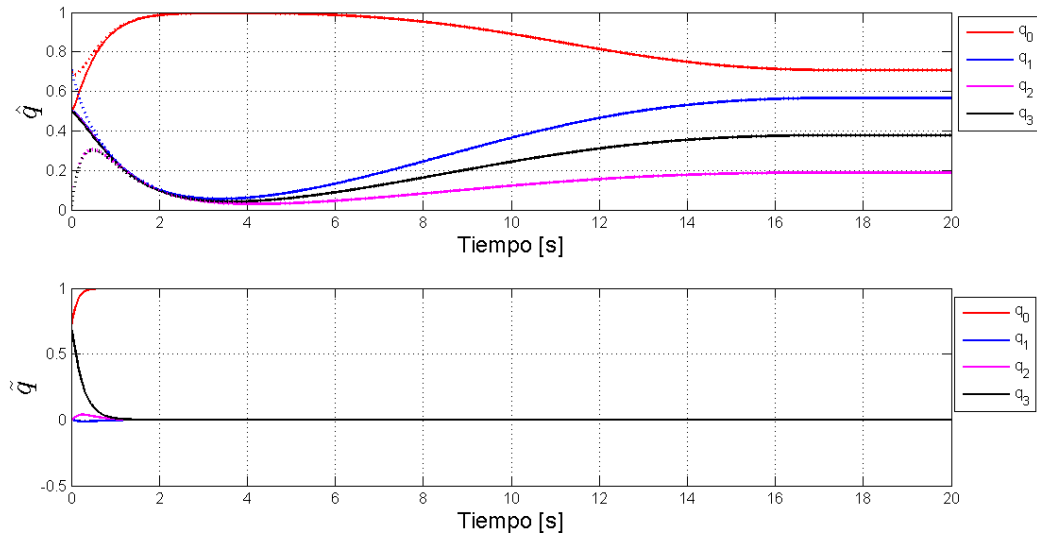


Figura 6.19: Cuaternión estimado \hat{q} y error de estimación de cuaternión \tilde{q} en [rad/s] para observador de orden completo para satélite con propulsor de gas (4.11), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I$, $\gamma = 5$.

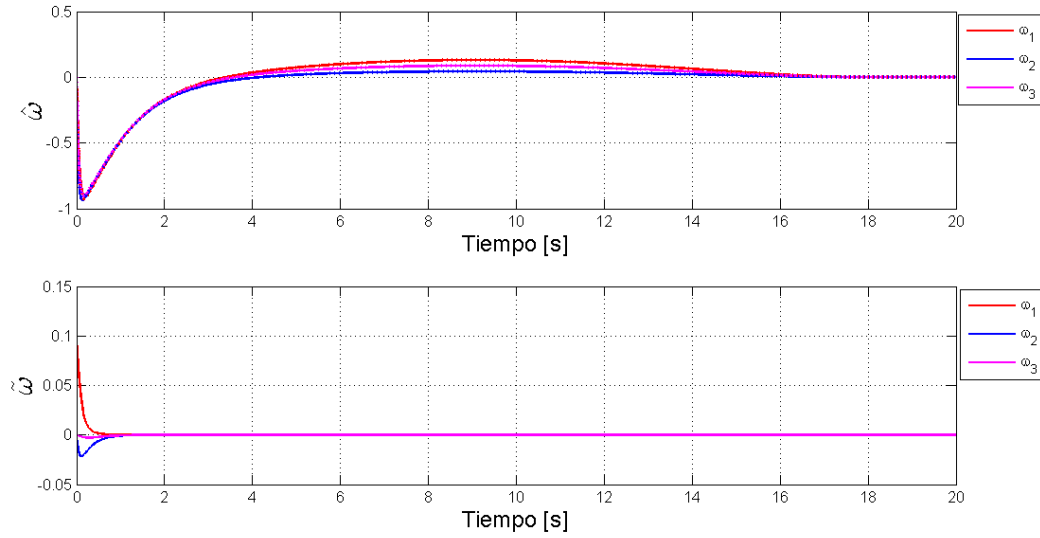


Figura 6.20: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para observador de orden completo para satélite con propulsor de gas (4.11), $K_o = 20 I, K_{o2} = 4 I, \gamma = 5$.

Se aprecia en ambas simulaciones que el objetivo de observación se cumple, en ambos casos, $\hat{q} \rightarrow q$ y $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ exponencialmente.

6.3. Control de seguimiento por retroalimentación de salidas

Primero, se realizan simulaciones de control por retroalimentación de salidas para el satélite con ruedas de reacción. Se manejan dos ganancias de observador diferentes. Después, se simula para la otra clase de satélite. Se simula también un caso donde la matriz de inercias M no es diagonal. Finalmente, se simula para verificar la convergencia para la ley de control modificada ante el fenómeno de desplegado.

Se usan los parámetros de la planta, condiciones iniciales y trayectoria deseada establecidos al inicio de esta sección.

En el caso del satélite con ruedas de reacción se simula para verificar el *Teorema 5.1*. Se fijan como condiciones iniciales del observador a:

$$q_f(0) = q(0) \quad \tilde{\omega}(0) = 0$$

Los parámetros del controlador y el observador se indican para cada figura.

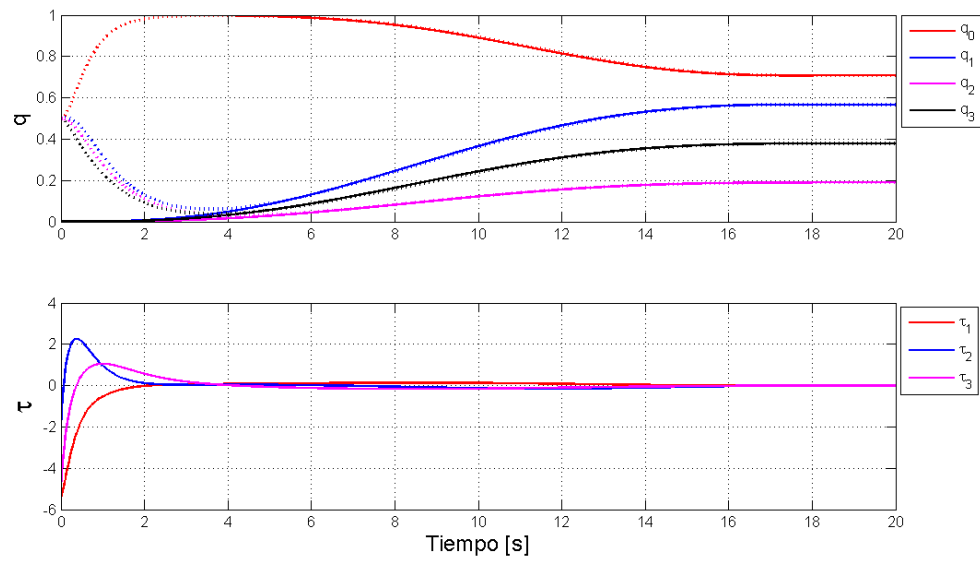


Figura 6.21: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$, $\gamma = 5$.

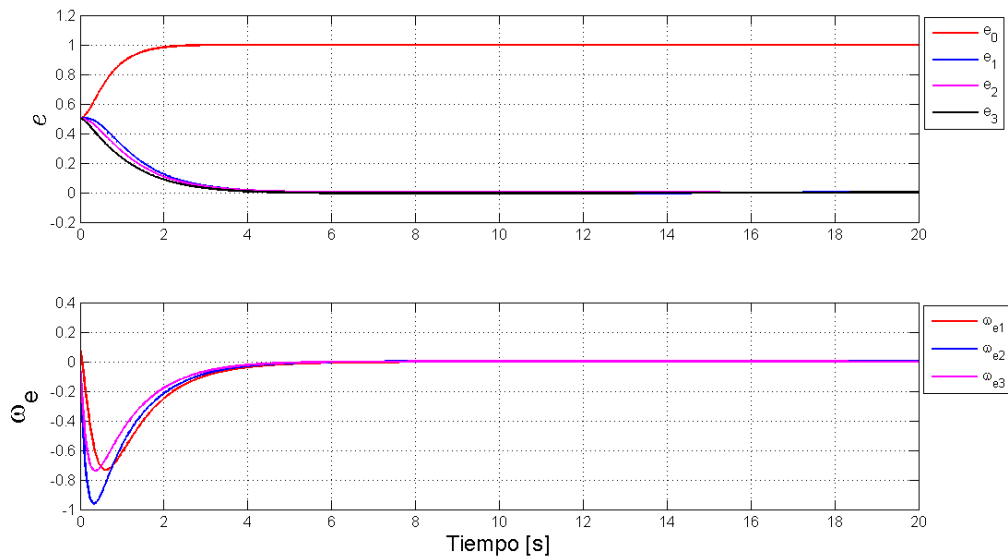


Figura 6.22: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$, $\gamma = 5$.

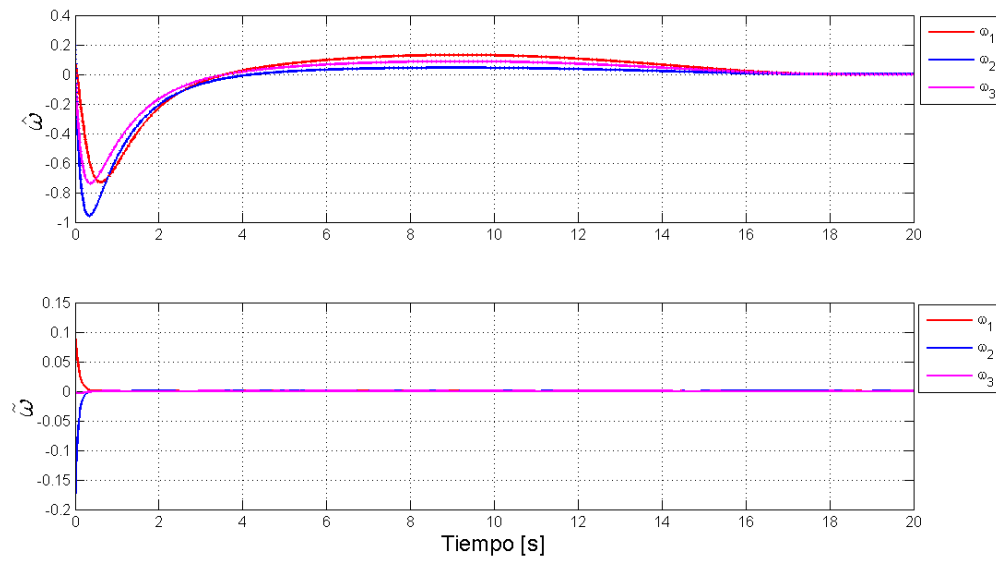


Figura 6.23: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$, $\gamma = 5$.

Para los parámetros elegidos, se verifica que tanto el error de estimación como los errores de seguimiento convergen a cero. Se reconstruye la velocidad angular del satélite y se logra alcanzar la trayectoria variante con el tiempo propuesta.

A continuación, se simula para un observador más lento, para evaluar su efecto en la convergencia del sistema global y en el objetivo de seguimiento.

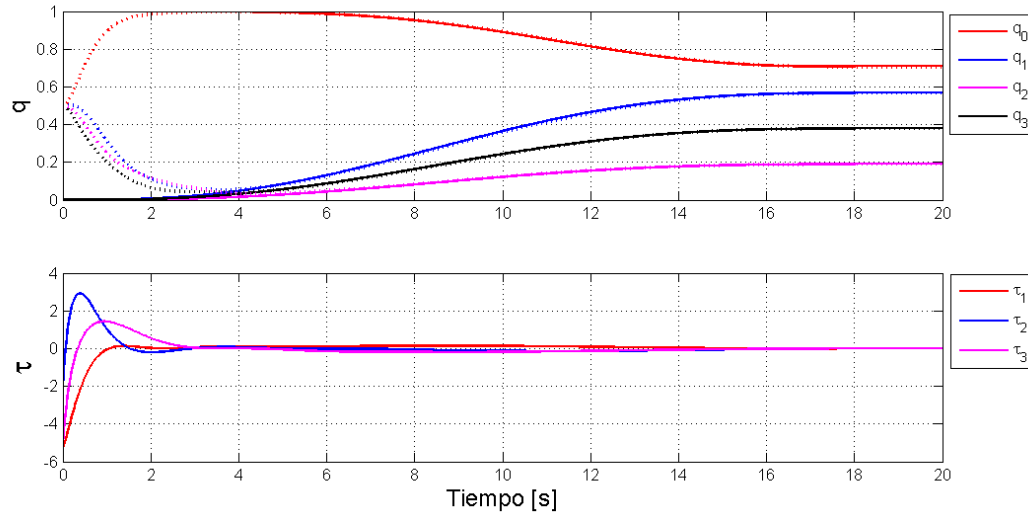


Figura 6.24: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2$, $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$.

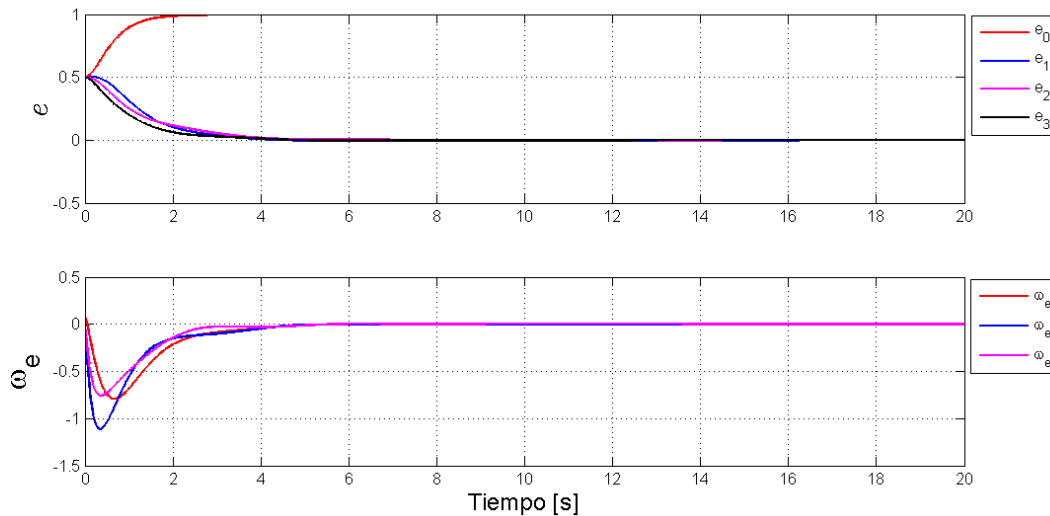


Figura 6.25: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2$, $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$.

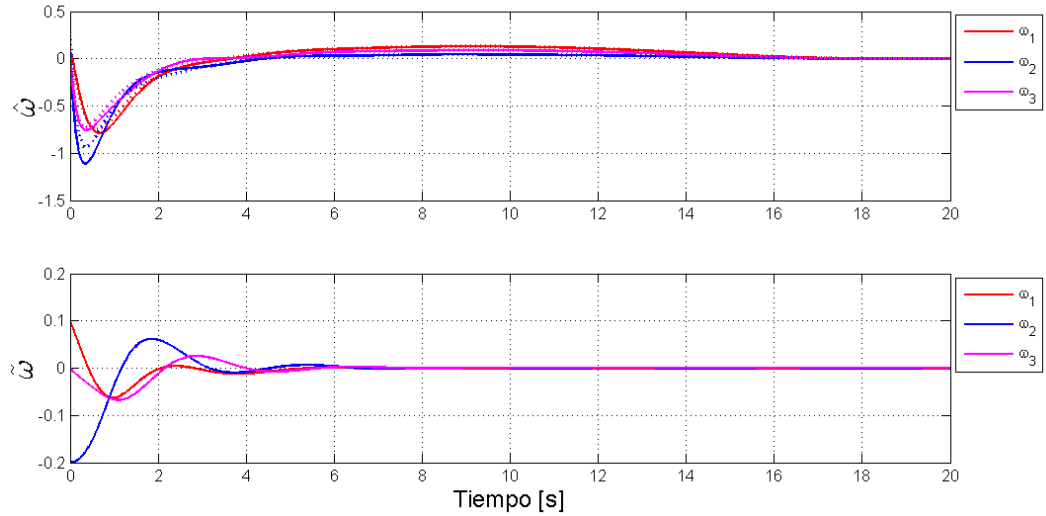


Figura 6.26: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con control por retroalimentación de salidas (5.2). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2$, $K_o = 1 I$, $\gamma = 5$.

Se aprecia que el error de estimación converge más lentamente a cero, sin embargo, el sistema sigue siendo contrayente, aunque los errores de seguimiento tienen valores máximos más grandes y convergen a cero en mayor tiempo.

Para el satélite con propulsor de gas se realizan simulaciones para verificar el *Teorema 5.2*. Se usan las mismas condiciones iniciales para el observador.

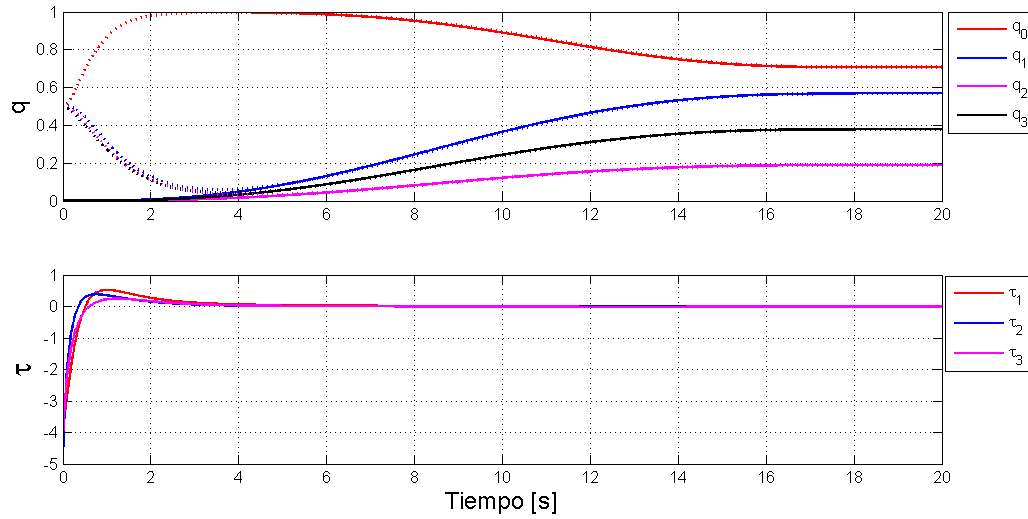


Figura 6.27: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3). $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$, $\gamma = 5$.

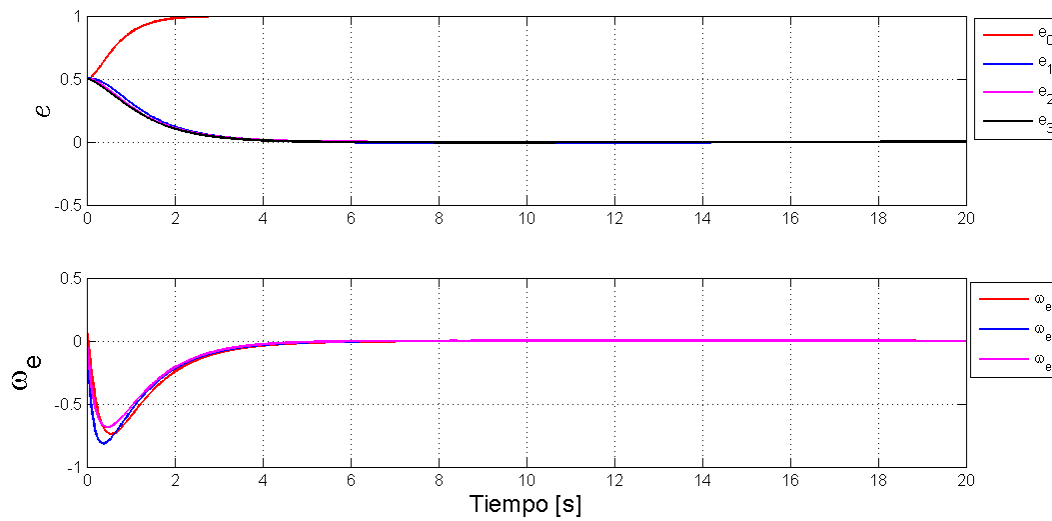


Figura 6.28: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3). $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$, $\gamma = 5$.

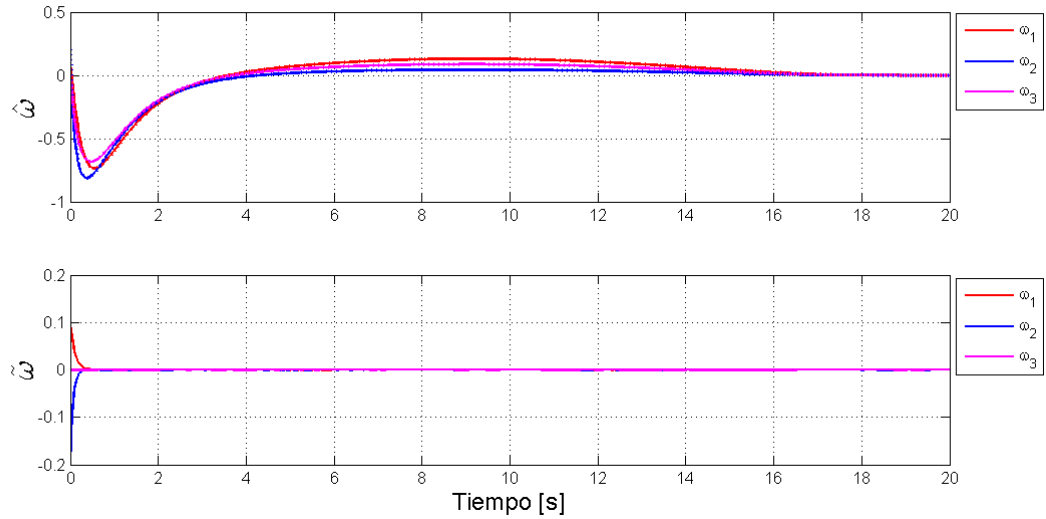


Figura 6.29: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3). $K_c = 4 I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20 I$, $\gamma = 5$.

Dado que la matriz M es diagonal, es de esperar que los resultados para ambos satélites sean muy similares. Para ilustrar el efecto de una matriz de inercias no diagonal, se usa nuevamente:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.63 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$$

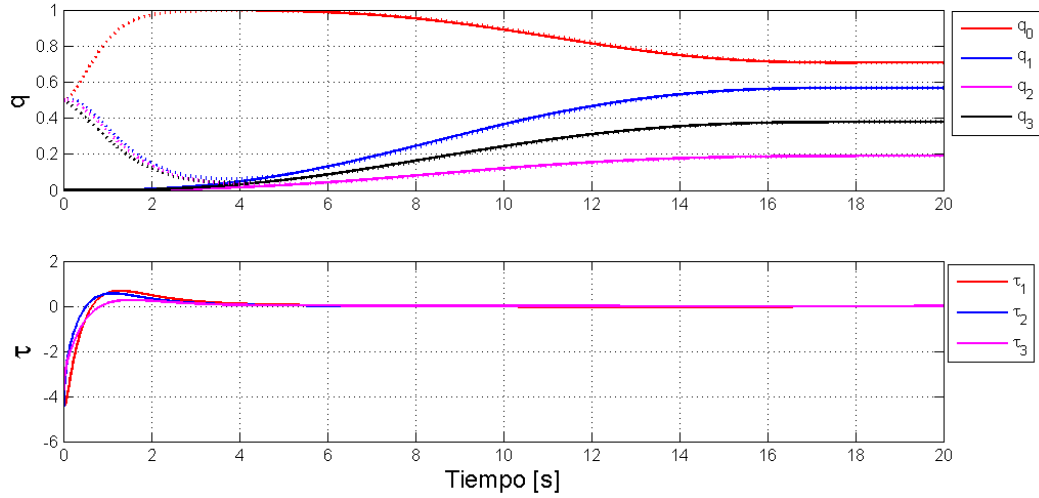


Figura 6.30: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con ley de control (3.12) y observador (4.5) para M no diagonal. $K_c = 4 I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20 I$, $\gamma = 5$.

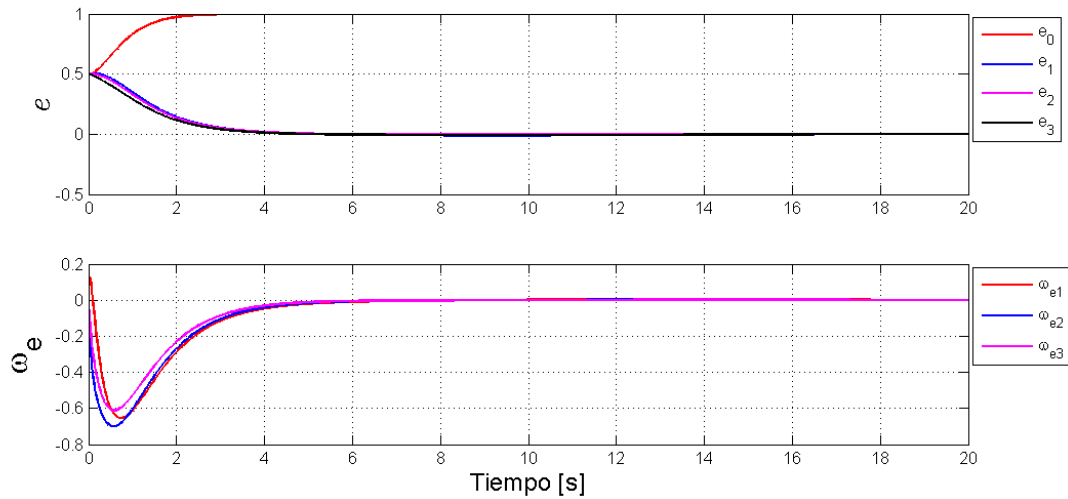


Figura 6.31: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con ley de control (3.12) y observador (4.5) para M no diagonal. $K_c = 4 I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20 I$, $\gamma = 5$.

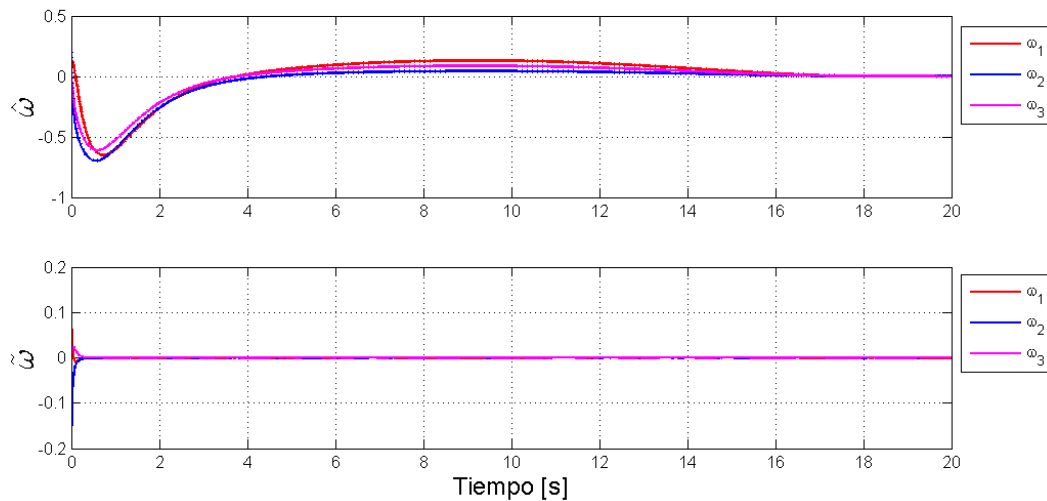


Figura 6.32: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con propulsor de gas con control por retroalimentación de salidas (5.3) para M no diagonal. $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$, $\gamma = 5$.

Comparando los resultados de las dos últimas simulaciones, se verifica que el efecto de una matriz de inercias no diagonal puede reducirse eligiendo la ganancia K_o suficientemente grande.

La siguiente simulación es para el satélite con ruedas de reacción y sirve únicamente para verificar que la representación en cuaterniones no tiene singularidades. Se manejan todos los parámetros iguales a las simulación de retroalimentación de salidas original pero se modifica la trayectoria deseada para ir de cero a 270 grados. Otros esquemas [5, 21] sólo permiten giros menores a a 90 ó 180 grados por la parametrización elegida o por restricciones en la ley de control.

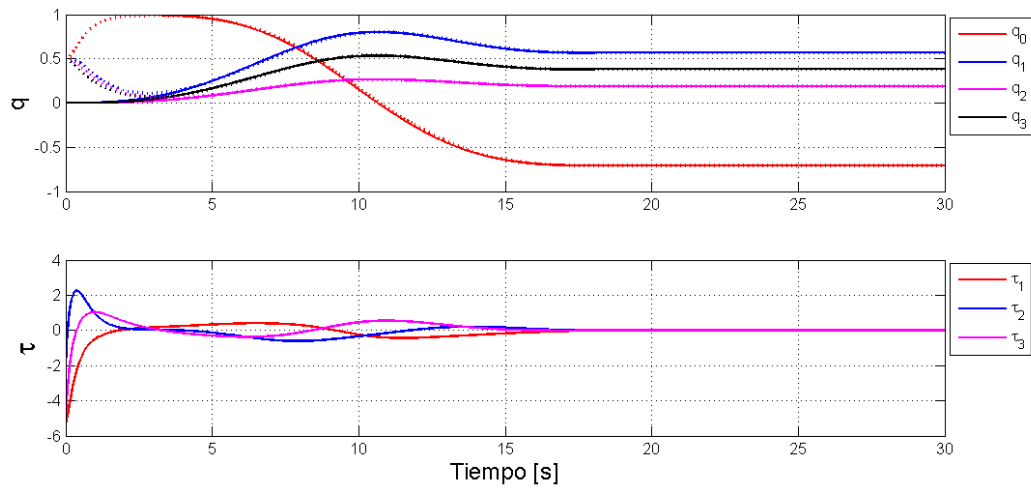


Figura 6.33: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para giro de 270° . $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 1I$, $\gamma = 5$.

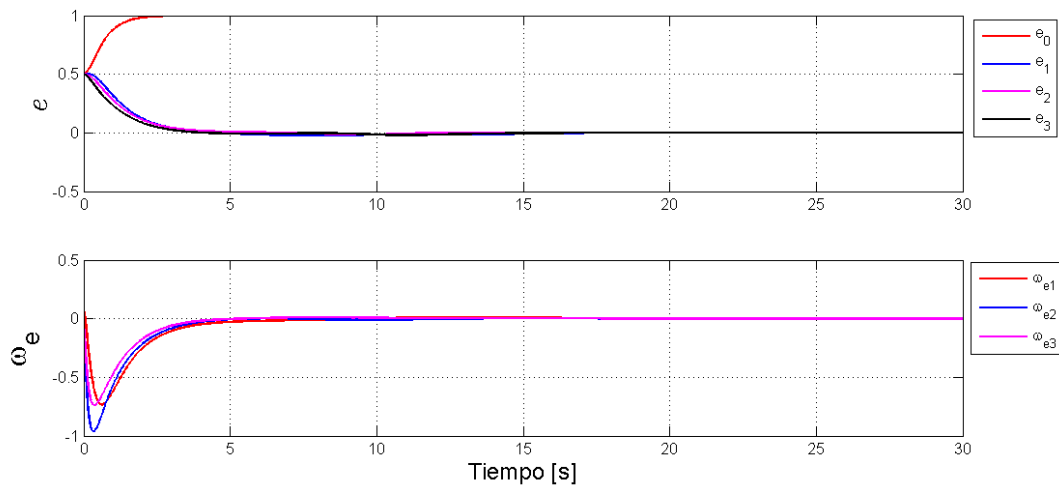


Figura 6.34: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para giro de 270° . $K_c = 4I$, $\lambda = 2, K_o = 1I$, $\gamma = 5$.

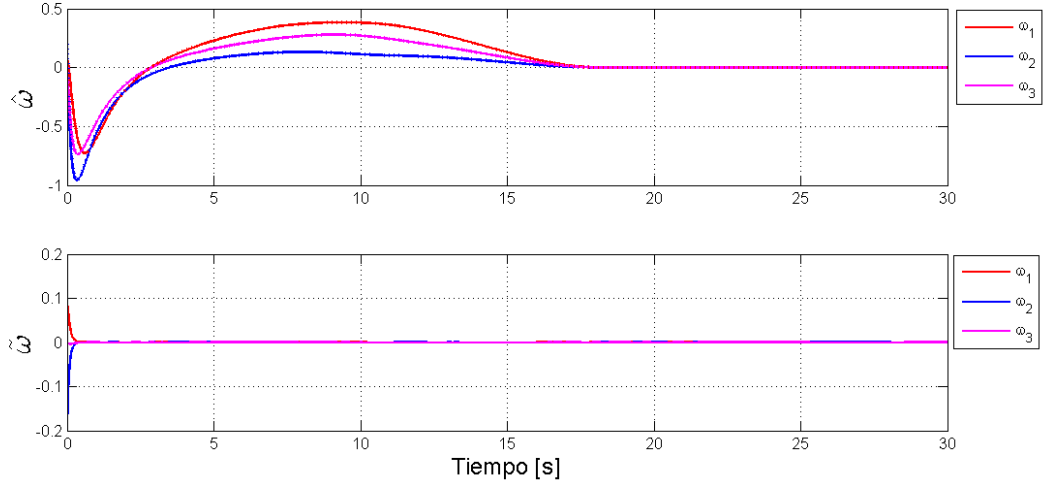


Figura 6.35: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para giro de 270° . $K_c = 4I$, $\lambda = 2$, $K_o = 1I$, $\gamma = 5$.

El giro superior a 90 grados se aprecia cuando la parte escalar del cuaternión cruza por cero. Este cruce por cero es donde otras parametrizaciones tienen una singularidad o donde leyes de control que emplean cuaterniones imponen una restricción para garantizar convergencia. Se aprecia que este esquema se mantiene válido incluso en este caso. Es válido para cualquier giro especificado.

Ley de control modificada ante fenómeno de desplegado

En esta sección se realizan simulaciones para verificar el *Corolario 5.3*. Se simula un satélite con constantes M y h^I originales, con condiciones iniciales:

$$q(0) = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \omega(0) = [0.1 \ 0 \ 0]^T$$

Se fijan parámetros de controlador y observador en $K_c = 5I$, $\lambda = 2$, $K_o = 20I$ y $\gamma = 5$. Se usa el perfil planteado al principio de las simulaciones. Es importante notar que $q(0) = -q_d(0)$, lo que garantiza que $e(0) = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]$.

Primero se simula para ω_r “estándar” definida en (3.5).

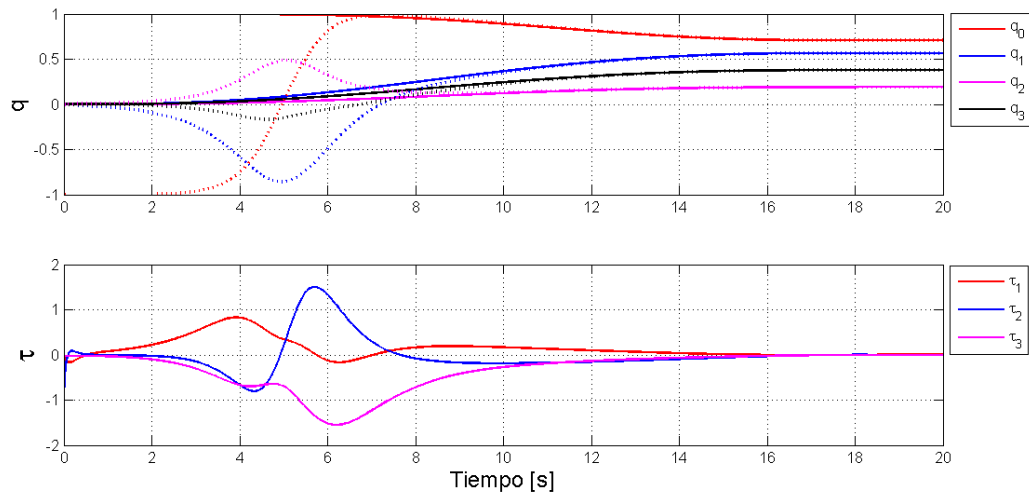


Figura 6.36: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r estándar (3.5).

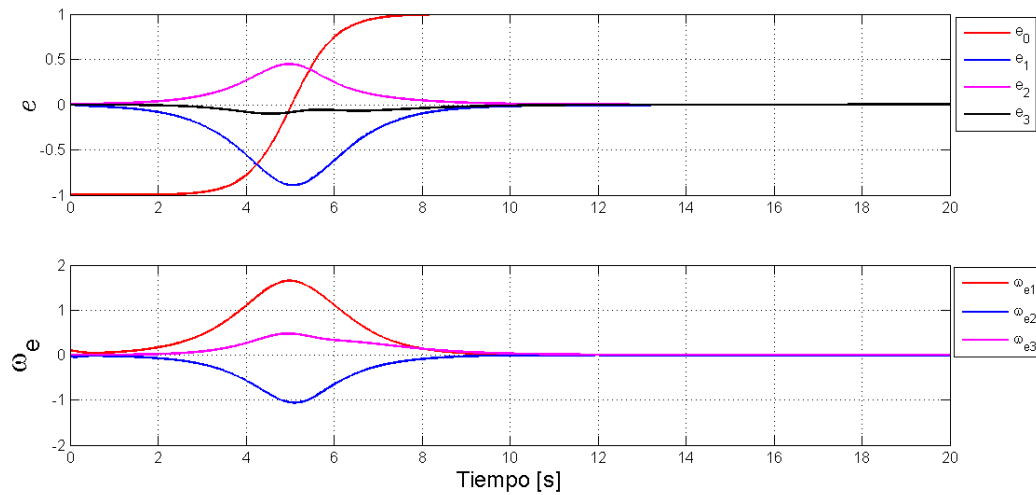


Figura 6.37: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r estándar (3.5).

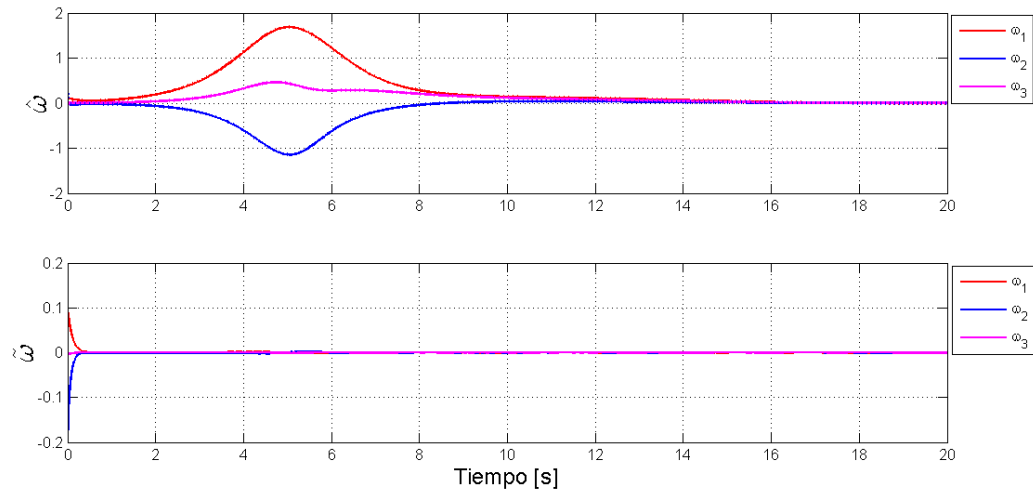


Figura 6.38: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r estándar (3.5).

Después, se simula para ω_r modificada, definida por (3.13):

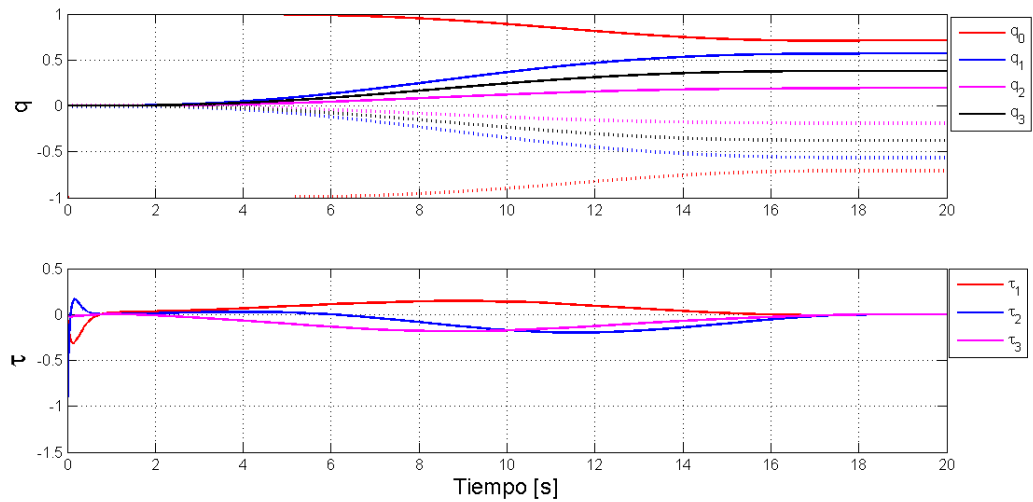


Figura 6.39: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r modificado (3.13).

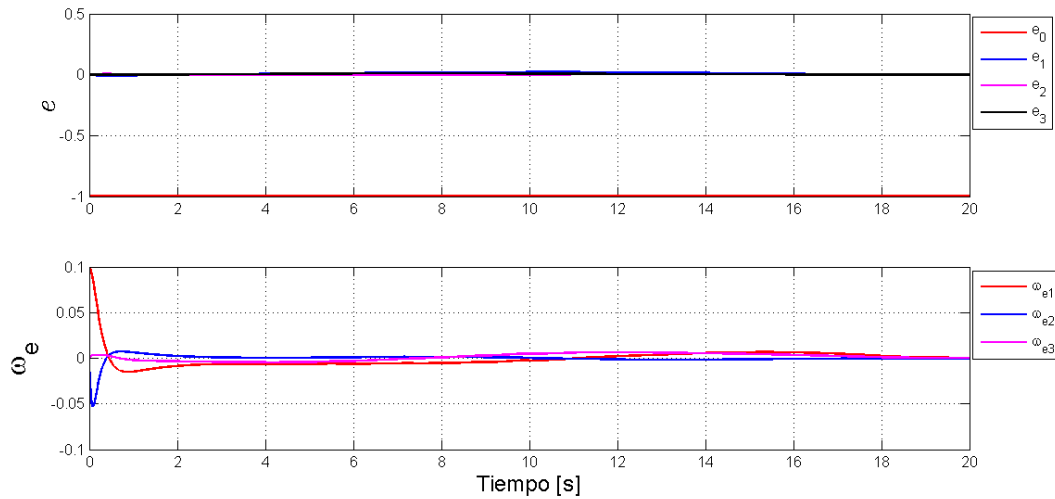


Figura 6.40: Errores de orientación y velocidad en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r modificado (3.13).

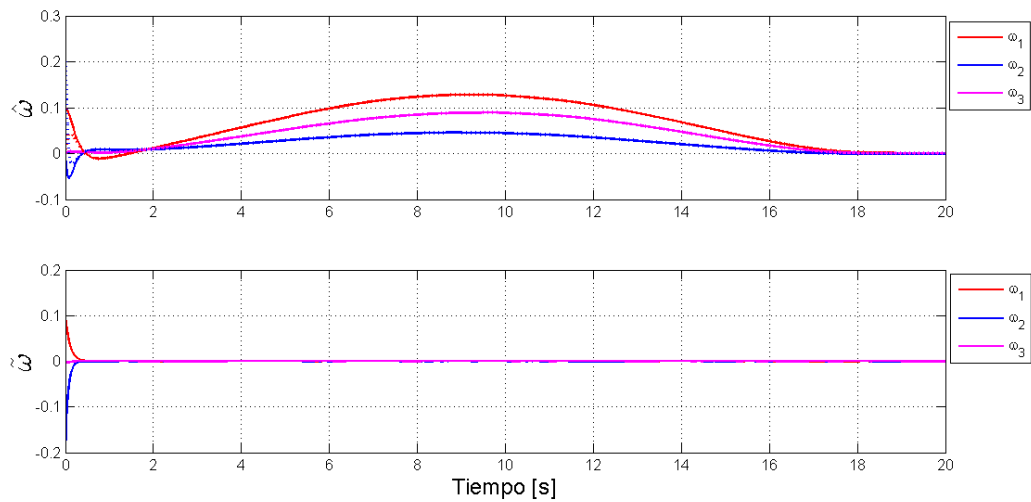


Figura 6.41: Velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ y error de estimación de velocidad angular $\tilde{\omega}$ en [rad/s] para satélite con ruedas de reacción con control por retroalimentación de salidas (5.2) para ω_r modificado (3.13).

Comparando los resultados de ambas simulaciones, se aprecia que cuando se modifica ω_r , el sistema tiende al punto de equilibrio más cercano. En el primer caso, es evidente que se cumple el objetivo de seguimiento, ya que $q \rightarrow q_d$.

Para ω_r modificada el sistema tiende a $e = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]$ lo que implica que $q \rightarrow -q_d$. Dado que ambos cuaterniones representan la misma orientación, el objetivo de control también se cumple pero con un esfuerzo de control varias veces menor. También, tanto los errores de posición como los de velocidad angular son menores en este segundo caso. Esto se debe a que no se obliga al sistema a alcanzar el mismo punto de equilibrio pese a ser más lejano que la alternativa.

6.4. Sincronización de observadores

El objetivo de esta sección es verificar los desarrollos del capítulo seis. Primero, se presenta una simulación comparativa entre los esquemas de observador de orden reducido, orden completo y sincronizado con $N = 5$ para ambos tipos de satélite.

No se trabaja en paralelo a un controlador, se emplea como entrada el perfil de par siguiente:

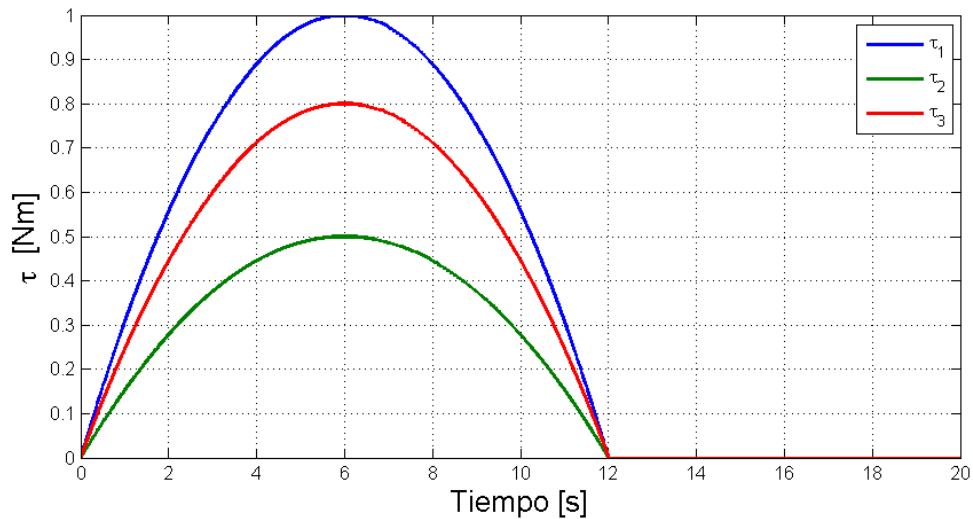


Figura 6.42: Perfiles de par en [Nm] empleados en sincronización de observadores

Se manejan los siguientes parámetros y condiciones para los observadores (K_{o2} y $\hat{q}(0)$ no aplican para el observador de orden reducido):

$K_o = K_{o2} = 10 I$, $\gamma = 5$ y $K_s = 100$. $q_f(0) = \hat{q}(0) = q(0)$ y $\bar{\omega}(0) = 0$.

Se maneja un intensidad de ruido de $\sigma_i = 0.1$.

Se presenta primero el observador para satélite con ruedas de reacción.

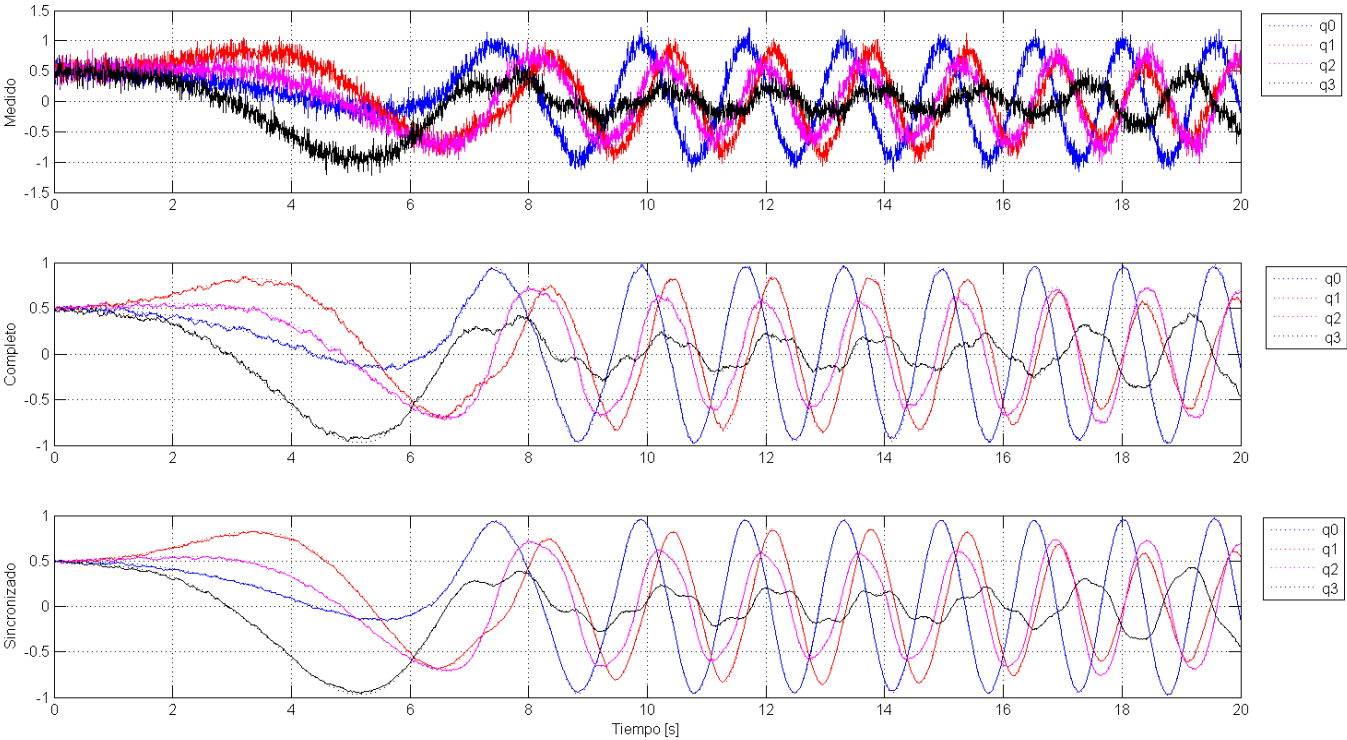


Figura 6.43: Cuaternión medido, estimado con observador de orden completo y con observadores sincronizados ($N=5$).

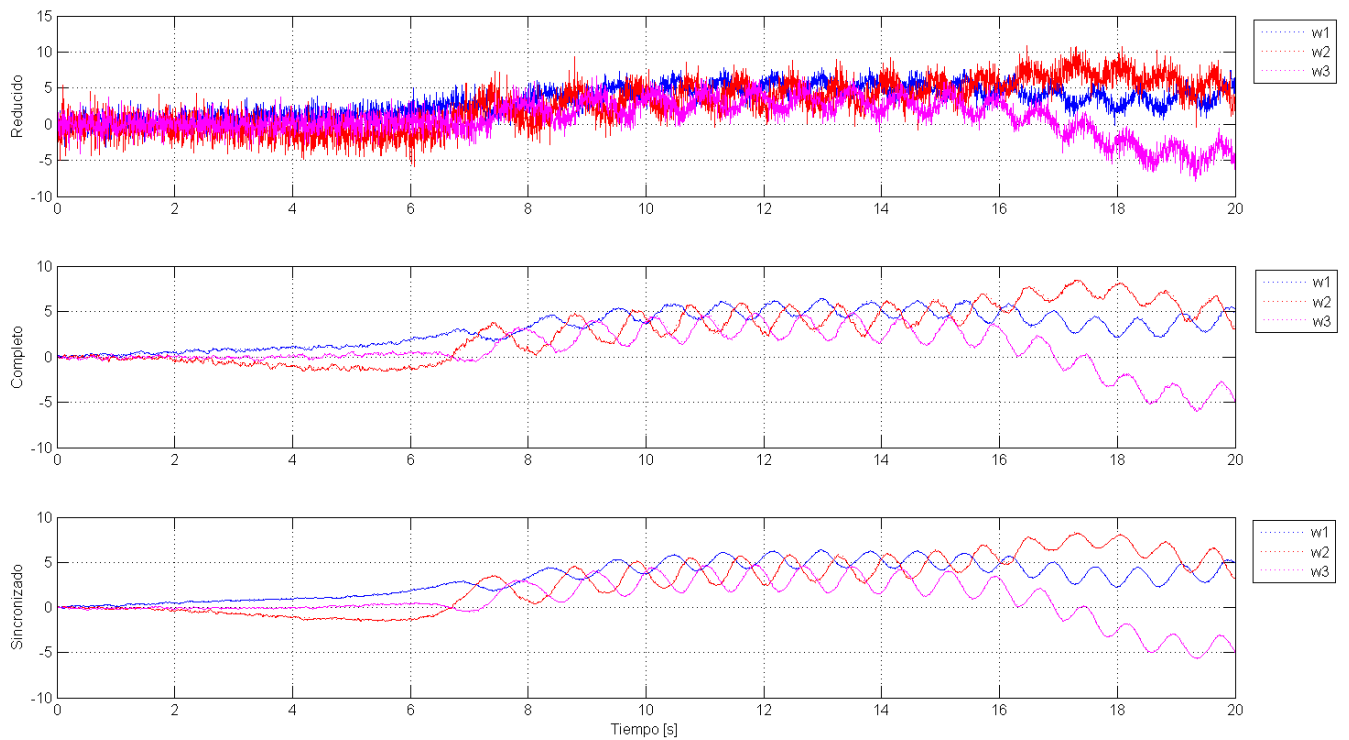


Figura 6.44: Velocidad angular en [rad/s] estimada con observador de orden reducido, observador de orden completo completo y con observadores sincronizados ($N=5$).

Se presentan también dos acercamiento en la simulación, únicamente para q_0 y ω_1 para apreciar mejor el efecto de la sincronización de observadores. Se comparan los diferentes casos, medición contra observador de orden completo y observador sincronizado para q_0 y estimación por observador de orden reducido, orden completo y sincronizado para la velocidad angular ω_1

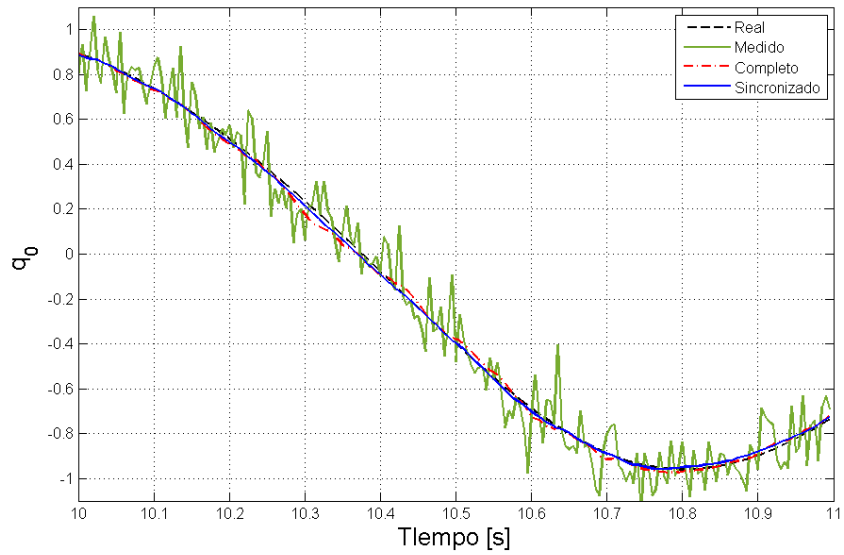


Figura 6.45: Acercamiento en segundo 10 para q_0 medido y estimados.

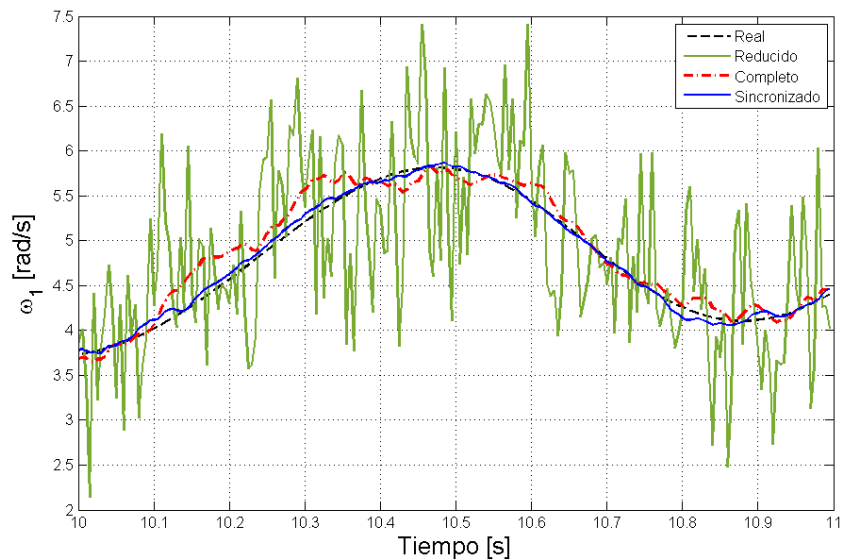


Figura 6.46: Acercamiento en segundo 10 para estimaciones de ω_1 en [rad/s]

Para el cuaternión, el observador de orden completo entrega un estimado cercano al valor real. La salida de los observadores sincronizados mejora la estimación pero no de manera significativa.

Observando a las estimaciones de la velocidad angular, es evidente que la medición ruidosa se

propaga a la estimación de la velocidad angular. nuevamente, el observador de orden completo mejora significativamente la calidad de la estimación. Sincronizar los observadores en este caso tiene un efecto mucho más apreciable en reducir el efecto del ruido sobre la reconstrucción de la señal.

Se presentan las mismas gráficas para la simulación de observadores para el satélite con propulsor de gas.

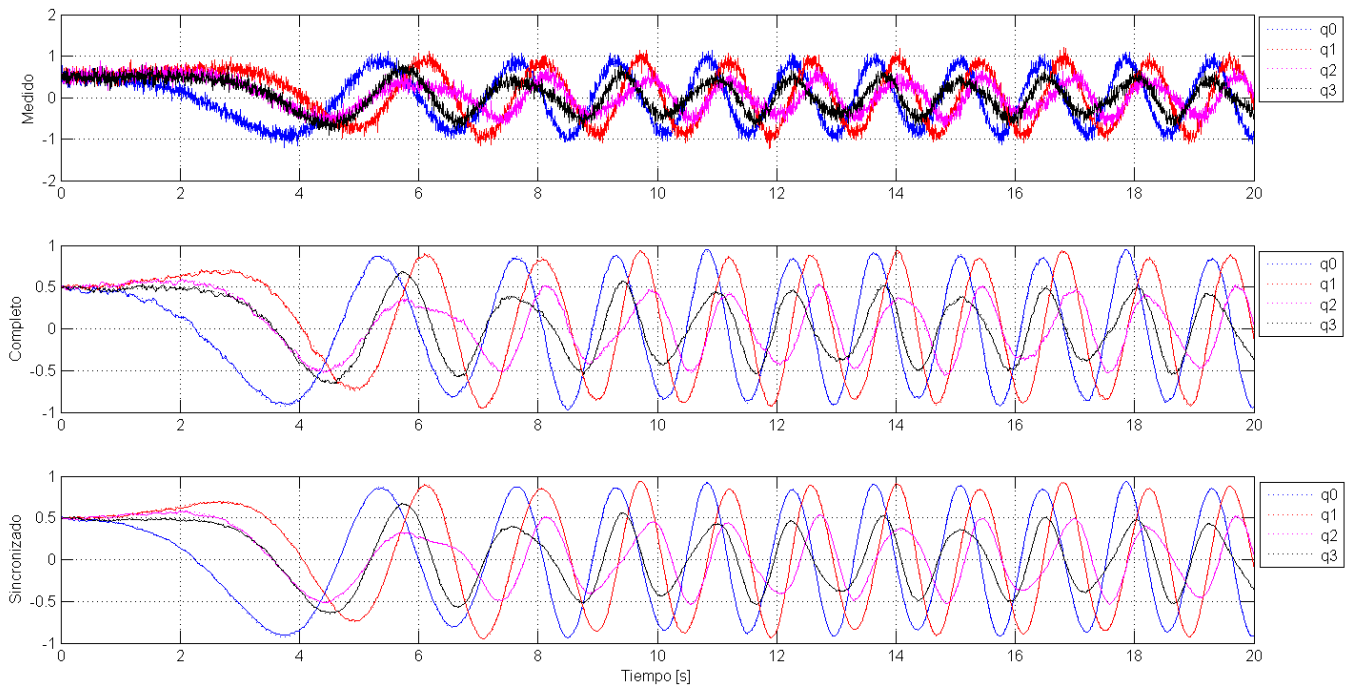


Figura 6.47: Cuaternión medido, estimado con observador de orden completo y con observadores sincronizados ($N=5$).

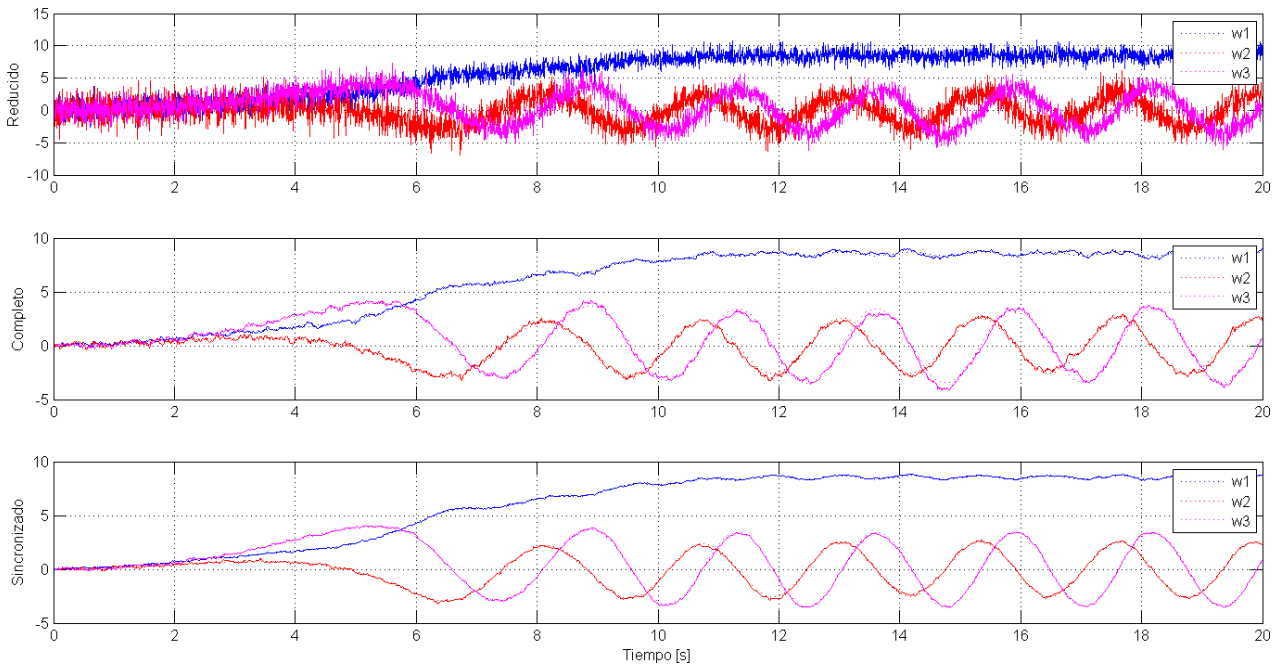


Figura 6.48: Velocidad angular en [rad/s] estimada con observador de orden reducido, observador de orden completo completo y con observadores sincronizados ($N=5$).

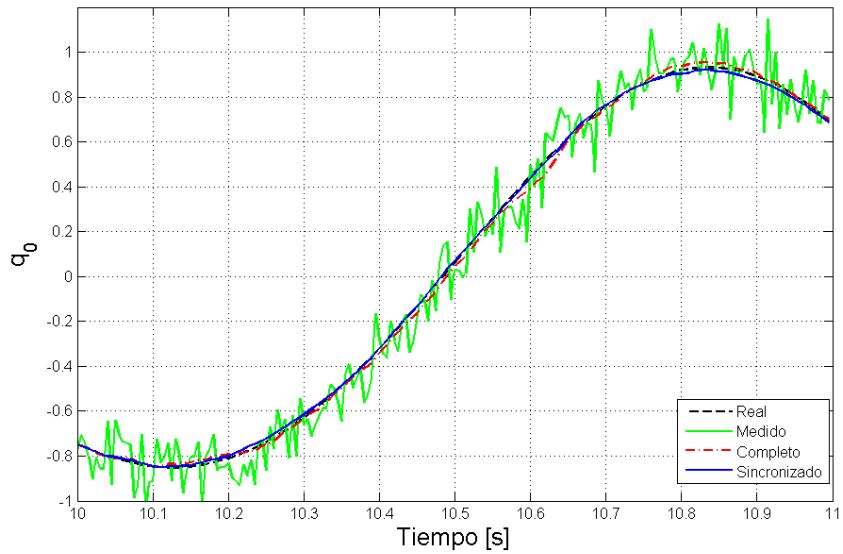


Figura 6.49: Acercamiento en segundo 10 para q_0 medido y estimados.

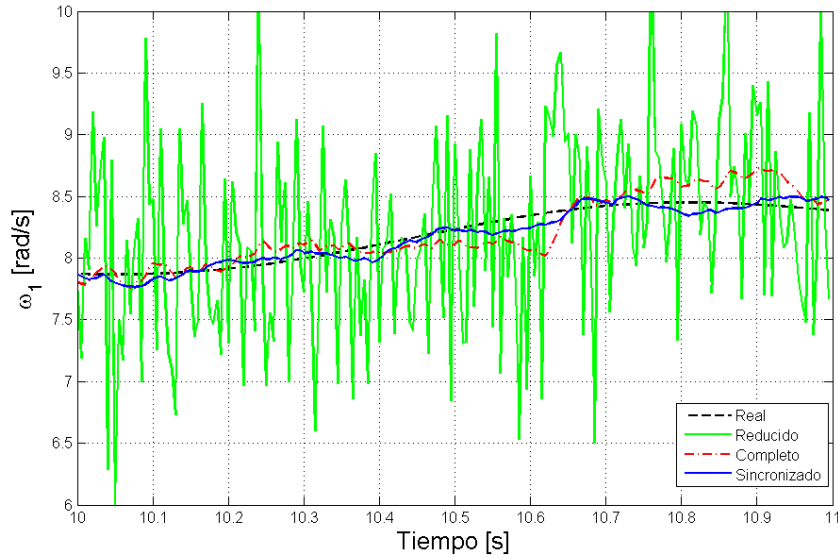


Figura 6.50: Acercamiento en segundo 10 para estimaciones de ω_1 en [rad/s]

En general, los resultados para este observador son similares al observador previo. El ruido en la medición tiene un efecto mayor en la estimación de la velocidad, lo que es razonable al considerar la estructura de $N(q, \omega)$. Sin embargo, el observador de orden completo y la sincronización mejoran nuevamente la calidad de la señal reconstruida, tanto para cuaternión como para velocidad angular.

Una forma de comparar la capacidad de reducción de ruido entre observadores es utilizar la raíz del error medio cuadrático (ERMS, conocido como error RMS) de las estimaciones de cuaternión y de velocidad angular. Se calculan mediante la fórmula:

$$ERMS_q = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \|q - \hat{q}\|^2}{n}}$$

$$ERMS_\omega = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \|\omega - \hat{\omega}\|^2}{n}}$$

La notación para el tiempo implica que es la suma de las muestras en cada instante dentro del intervalo determinado.

El ERMS se calcula en el intervalo de tiempo a partir de tres segundos, para considerar únicamente respuestas después del transitorio de los observadores. Los resultados se presentan en la siguientes tablas para los tres tipos de observadores.

Observador	$ERMS_q$	$ERMS_\omega$
O. Reducido	–	0.0479
O. Completo	7.85×10^{-4}	0.0093
Sincronizado	4.32×10^{-4}	0.0032

Tabla 6.1: ERMS comparativo para estimados de cuaternión y velocidad angular. Satélite con ruedas de reacción, N=5.

Observador	$ERMS_q$	$ERMS_\omega$
O. Reducido	–	0.0409
O. Completo	6.02×10^{-4}	0.0072
Sincronizado	3.56×10^{-4}	0.0037

Tabla 6.2: ERMS comparativo para estimados de cuaternión y velocidad angular. Satélite con propulsores de gas, N=5

Para la velocidad angular, el impacto del ruido en la estimación se reduce considerablemente entre el observador de orden reducido y el observador de orden completo. Este observador, además, entrega un estimado del cuaternión menos contaminado que la medición.

El efecto de la sincronización se hace más evidente en el estimado de la velocidad angular, pero también puede apreciarse en el ERMS del cuaternión. Sincronizar cinco observadores reduce entre dos y tres veces el impacto del ruido en la estimación.

Para evaluar el efecto de incrementar el número de observadores sincronizados, se simula para N=2, 5, 8 y 10 y se calcula el ERMS para el cuaternión y para la velocidad angular. Los resultados se muestran en las dos tablas siguientes.

N	$ERMS_q$	$ERMS_\omega$
2	7.3×10^{-4}	0.0080
5	4.32×10^{-4}	0.0032
8	2.72×10^{-4}	0.0026
10	2.16×10^{-4}	0.0024

Tabla 6.3: ERMS de observadores sincronizados para satélite con ruedas de reacción.

N	$ERMS_q$	$ERMS_\omega$
2	4.77×10^{-4}	0.0068
5	3.56×10^{-4}	0.0037
8	2.65×10^{-4}	0.0029
10	2.33×10^{-4}	0.0024

Tabla 6.4: ERMS de observadores sincronizados para satélite con propulsor de gas.

Se observa que a medida que se sincronizan más sistemas el impacto del ruido es cada vez menor. Incluso dos sistemas sincronizados entregan una mejor estimación que un único observador de orden completo. Sin embargo, el incremento en atenuación de ruido es cada vez menor a medida que se sincronizan más sistemas. En ambos casos, se aprecia que la diferencia entre 8 y 10 observadores es mucho menor que la diferencia entre 2 y 5 observadores. Por esta razón, no es recomendable acoplar sistemas arbitrariamente, para cada caso deberá analizarse el punto óptimo donde el incremento en costo, peso y poder computacional ya no justifica emplear más sensores redundantes.

Por último, se presenta una idea como trabajo a futuro. Dada la estructura contrayente de los observadores sincronizados, el esquema de retroalimentación de salidas se mantiene válido cuando se extiende al sustituir la velocidad anular en el control por retroalimentación de estados por el promedio de los estimados de velocidad angular de los observadores sincronizados.

Sin embargo, si se desea sustituir también la medición de cuaternión por su estimado, el cálculo ya no es válido. Para derivar condiciones será necesario analizar al sistema no como una jerarquía de sistemas contrayentes sino como una combinación en retroalimentación de sistemas contrayentes [9].

Se muestra no obstante una simulación donde se sustituyen q y ω por \hat{q} y $\hat{\omega}$ en la ley de control, en la presencia de mediciones contaminadas con ruido de intensidad $\sigma = 0.1$. Se simula para observadores de orden reducido (sólo se sustituye a ω), orden completo y sincronizados ($N=5$). Se manejan como parámetros y condiciones iniciales a $K_c = 5 I$, $\lambda = 2$, $K_o = K_{o2} = 10 I$, $\gamma = 5$ y $K_s = 100$. $q_f(0) = \hat{q}(0) = q(0)$ y $\bar{\omega}(0) = 0$.

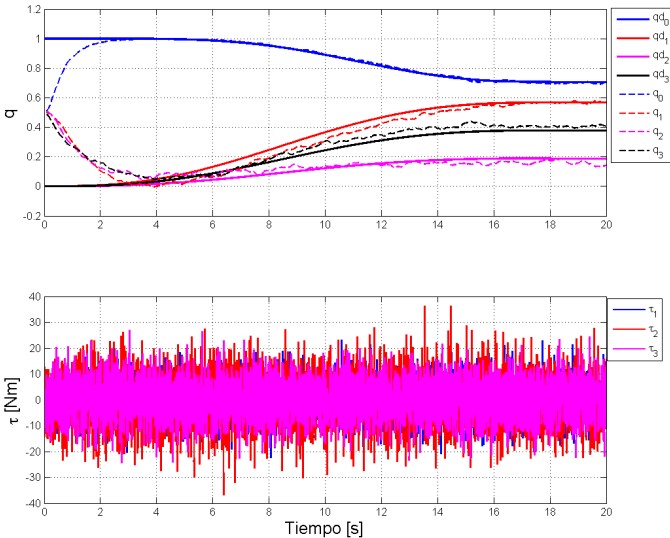


Figura 6.51: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden reducido.

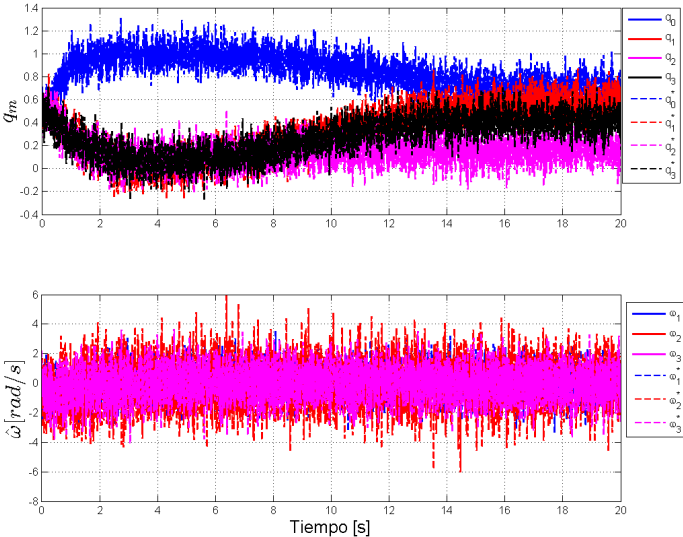


Figura 6.52: Medición de cuaternión y de velocidad angular en [rad/s] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden reducido.

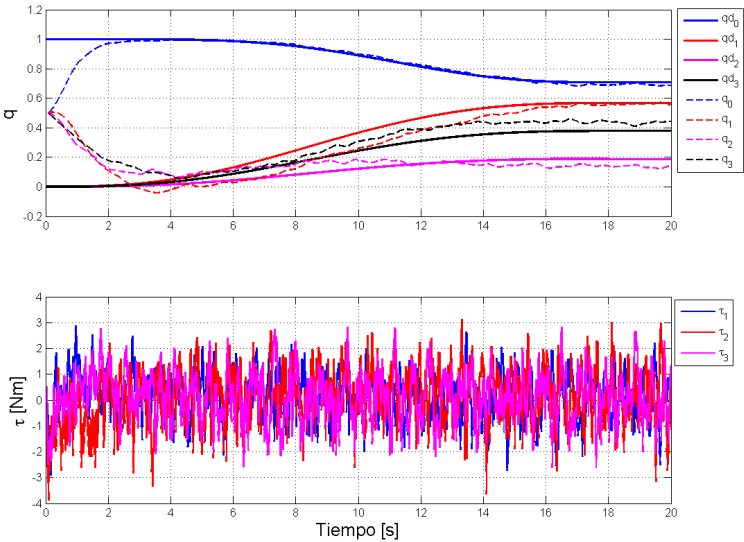


Figura 6.53: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden completo.

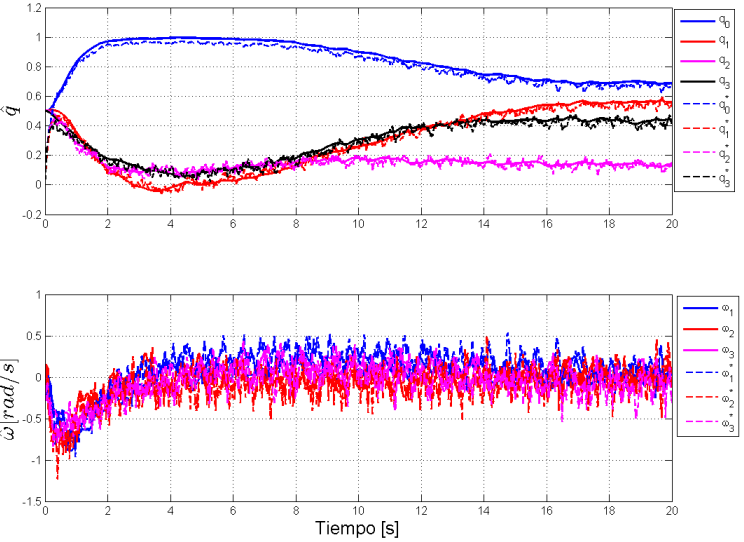


Figura 6.54: Estimación de cuaternión y de velocidad angular en [rad/s] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador de orden completo.

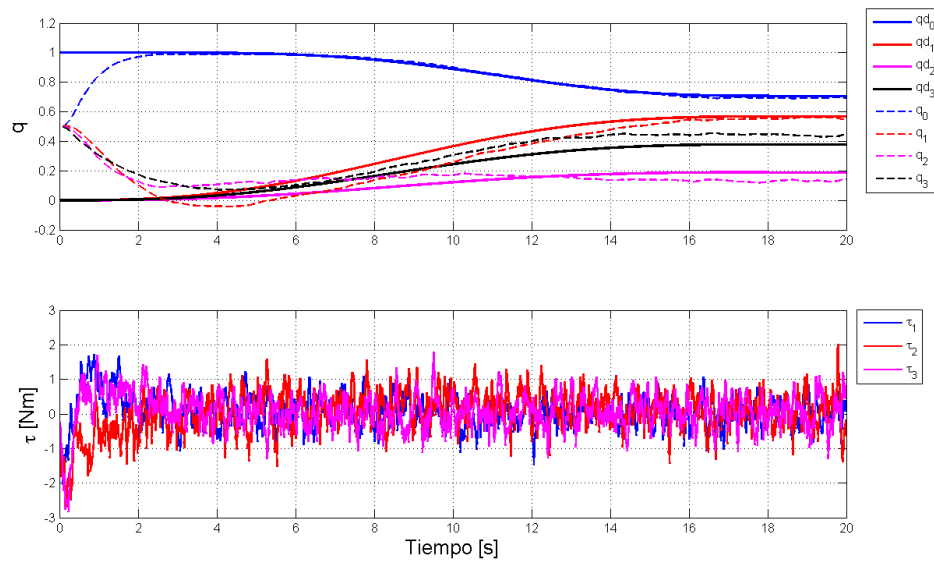


Figura 6.55: Seguimiento de orientación y par de control en [Nm] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador sincronizado.

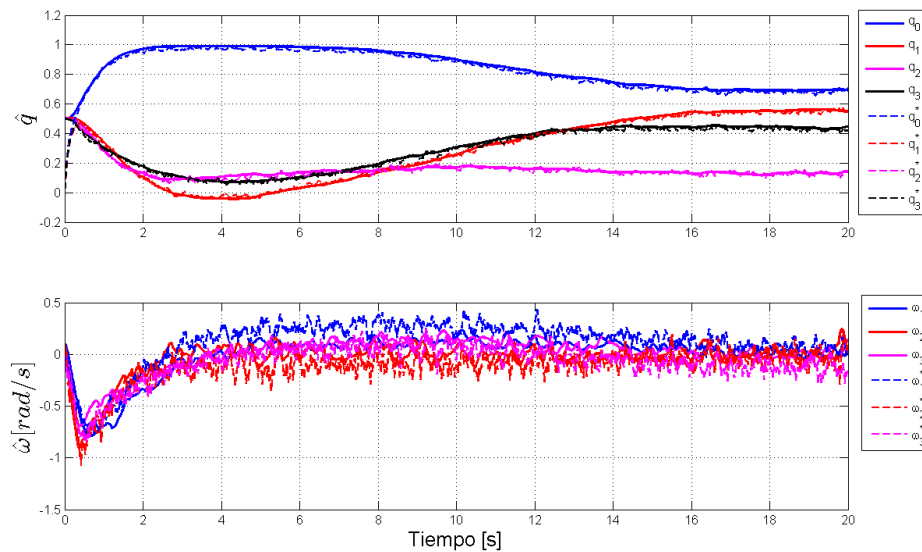


Figura 6.56: Estimación de cuaternión y de velocidad angular en [rad/s] para control por retroalimentación de salidas (5.2) con observador sincronizado.

El comportamiento de las variables estimadas es consistente con el análisis de atenuación de ruido. De mayor interés son las gráficas de posición y par de control.

En los tres casos, el cuaternión se mantiene en una bola alrededor del cuaternión deseado, una noción de estabilidad práctica, cuando el sistema se contamina con ruido. El control con observador de orden completo varía menos y el control con observadores sincronizados es el que presenta una bola de radio más pequeño. El efecto en el par de control, por otro lado, es mucho más significativo. Para rechazar el efecto de la perturbación, el par de control oscila entre valores muy elevados a alta frecuencia, lo que excede la capacidad del actuador real del satélite.

Cuando se usa un observador de orden completo, el efecto adverso en el par de control se reduce significativamente. Cuando se evalúa la simulación para un controlador usando observadores sincronizados, se aprecia de las mayores ventajas de este esquema. Si bien la mejora en estimación de velocidad angular y cuaternión pueda parecer menor comparada con el observador de orden completo, cuando se introducen los estimados al controlador, el par de control resultante tiene valores máximos y frecuencias menores.

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajo a Futuro

El problema principal desarrollado en este trabajo es el control de orientación de cuerpo rígido cuando el estado completo no es un dato disponible. La metodología presentada a lo del trabajo busca resolver este problema de manera secuencial, “por bloques”, de forma análoga a la metodología de control de sistemas lineales en espacio de estados. Primero, se resuelve el problema de seguimiento con una ley de control por retroalimentación de estados, después se resuelve el problema de estimación y finalmente se combinan ambos resultados. La herramienta principal empleada en el trabajo es la teoría de contracción y es ésta quien permite este diseño fragmentado.

Se eligió como parametrización de la orientación al cuaternión, ya que carece de singularidades y su restricción de norma es más simple que la restricción de ortonormalidad de la matriz de rotación. La validez de esta parametrización se verifica más adelante en simulaciones. Por otro lado, la ambigüedad de signo del cuaternión se enfrenta al operar con teoría de contracción a un nivel superior. Se demuestra la convergencia exponencial a este nivel de la velocidad angular a la variable auxiliar definida. La convergencia a nivel de cinemática se demuestra entonces con Lyapunov como herramienta auxiliar. Los resultados teóricos del análisis de este controlador se verifican mediante simulaciones.

Después, se establecieron condiciones para que los observadores de orden reducido y completo garanticen la convergencia exponencial de los estados estimados a los estados de la planta. La metodología empleada es desarrollar un observador contrayente y después buscar la manera de lograr su implementación. Estos resultados, válidos en ambientes libres de ruido, se verifican entonces mediante simulación.

El resultado principal del trabajo consiste en demostrar la convergencia de un controlador por retroalimentación de salidas basado en observador. Pese a que el principio de separación no se verifica para sistemas no lineales, se utilizan el control y observador diseñados individualmente.

Se empleó teoría de contracción para combinación de sistemas para sacar provecho de que ambos

diseños son contrayentes. El problema de retroalimentación de salida para sistemas de orientación se planteó como una demostración de que el observador implantado en el controlador por retroalimentación de estados representa una configuración jerárquica de sistemas contrayentes, donde el término de perturbación del sistema inferior sobre el superior es acotado y desvaneciente. Dado este resultado, se evita el fenómeno pico y se garantiza la convergencia exponencial del sistema completo. La teoría de este esquema se verifica mediante simulación, donde se muestra que en ambiente libre de ruido se cumplen los objetivos de observación y seguimiento.

Finalmente, se demostró con teoría de sincronización que N observadores de orden completo, cuya entrada proviene de sensores redundantes independientes, pueden ser forzados a converger entre sí al acoplarlos con una configuración todos con todos. Este resultado se usa entonces para tratar con el problema de mediciones contaminadas con ruido blanco. Se verifica mediante simulación que el efecto del ruido disminuye a medida que aumenta el número de observadores sincronizados.

La teoría de contracción demostró ser una herramienta útil para el diseño a bloques de sistemas de control complejos. Además, permite obtener resultados fuertes de estabilidad exponencial de manera transparente, comparando con otros métodos más complejos. La posibilidad de diseñar por separado controlador y observador y poder garantizar después la estabilidad cuando se combinan es un resultado importante y provee una alternativa al diseño en conjunto de ambos para sistemas no lineales.

Los resultados aquí presentados pueden profundizarse en futuras investigaciones en varios caminos. En primer lugar, pueden plantearse otras definiciones para la variable auxiliar ω_r . En este trabajo se opta por disminuir el resultado de estabilidad exponencial a estabilidad asintótica para mantener la casi globalidad del resultado. Si la orientación alcanzable por el satélite se restringe desde un principio, pueden encontrarse nuevas definiciones de ω_r que preserven la estabilidad exponencial a nivel de la cinemática dentro de un dominio establecido.

También, las simulaciones finales muestran que intuitivamente puede reemplazarse el estado completo por estados estimados en la ley de control sin perder estabilidad. Explorar este resultado permitirá formalizar un esquema de control basado en observador que atenúe los efectos del ruido en mediciones.

Por último, estos resultados pueden ser llevados a una clase más amplia de sistemas, en concreto, a la clase de sistemas Lagrangianos. La metodología de diseño separado de observador y controlador por teoría de contracción se mantiene válida para una clase más general de sistemas. Sin embargo, en general no se podrá estudiar al sistema global como una configuración jerárquica, será necesario estudiar la configuración más general de sistemas contrayentes en retroalimentación para derivar condiciones de estabilidad cuando se combinan el observador y el controlador.

Anexo

Propiedades $S(\cdot)$

En esta sección se desarrollan las propiedades de (2.9).

La primera propiedad es justamente la equivalencia que se busca, es cierta por construcción de $S(\cdot)$ y puede verificarse desarrollando ambos lados.

La propiedad dos es también útil para el álgebra de cuaterniones, mientras que las propiedades tres y cuatro son usadas repetidas veces en el desarrollo de la dinámica y en el análisis y diseño de controladores y observadores. Las tres son directamente heredadas de las propiedades del producto cruz, concretamente, anticonmutatividad, linealidad y la identidad de Jacobi.

La quinta propiedad es fundamental para el desarrollo de la cinemática de rotación y se demuestra de la siguiente manera [12]:

Sean \bar{x} y \bar{y} dos vectores arbitrarios con sus representaciones en la base \hat{I} : x^I y y^I y en la base \hat{b} : x^b y y^b .

$$\bar{z} = \bar{x} \times \bar{y}$$

En coordenadas \hat{I} y \hat{b} , se tiene que:

$$z^b = x^b \times y^b \quad z^I = x^I \times y^I$$

Entonces:

$$z^b = S(x^b)y^b, \quad z^I = S(x^I)y^I$$

Pero también es cierto que:

$$z^I = Rz^b$$

Entonces puede realizarse el siguiente desarrollo usando las propiedades (2.1):

$$\begin{aligned} z^I &= Rz^b \\ S(x^I)y^I &= RS(x^b)y^b \\ R^T S(x^I)y^I &= S(x^b)y^b \\ R^T S(Rx^b)Ry^b &= S(x^b)y^b \end{aligned}$$

Como es cierto para cualquier y^b , entonces:

$$R^T S(Rx^b)R = S(x^b)$$

La sexta propiedad es útil para el análisis de la cinemática de error de cuaternión y se deriva directamente de la identidad de Grassmann para el producto cruz [14]: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= b(a^T c) - (a^T b)c \\ S(a)S(b)c &= (ba^T - a^T bI_3)c \end{aligned}$$

Como es cierto para todo c :

$$S(a)S(b) = ba^T - a^T bI_3$$

La última propiedad indica que el operador antisimétrico está acotado directamente por su argumento. Se verifica notando que:

$$|\lambda I - S(u)^T S(u)| = \lambda(\lambda - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2))^2 = \lambda(\lambda - \|u\|_2^2)$$

Por lo que:

$$\|S(u)\|_2 = \|u\|_2$$

Dinámica

En esta sección se desarrollan las ecuaciones dinámicas para orientación de cuerpo rígido (2.12) y (2.11). Se empieza con las siguientes consideraciones [13]:

Se define a \bar{h}_v como el momentum angular del cuerpo principal alrededor de un punto fijo, el origen, y a \bar{h}_c como el momentum angular almacenado por el dispositivo. Sea $\bar{\tau}$ el par externo total actuando sobre el sistema. El momentum total es la suma del momentum principal y el almacenado:

$$\bar{h} = \bar{h}_v + \bar{h}_c$$

Su derivada, en coordenadas inerciales, de acuerdo a la segunda ley de Newton es:

$$\dot{h}^I = \tau^I = R\tau^b$$

Además, $h^b = R^T h^I$. Puede tomarse su derivada temporal y emplear la cinemática (2.10):

$$\begin{aligned}\dot{h}^b &= \dot{R}^T h^I + R^T \dot{h}_I \\ \dot{h}^b &= -S(\omega^b)R^T h^I + RR^T \tau_b\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $M^b = (M^b)^T > 0$ la matriz de momentos de inercia del cuerpo en coordenadas \hat{b} , entonces: $h^b = M^b \omega^b + h_c^b$. Derivando esta ecuación se obtiene:

$$\dot{h}^b = M^b \dot{\omega}^b + \dot{M}_b \omega^b + \dot{h}_c^b$$

Igualando estas dos ecuaciones y despejando se obtiene el modelo dinámico general:

$$M^b \dot{\omega}^b = \tau^b - S(\omega^b)R^T h^I - \dot{M}_b \omega^b - \dot{h}_c^b$$

Los términos del lado derecho son, respectivamente, los efectos debidos a pares externos, acoplamiento giroscópico, variación del momento de inercia y tasa de intercambio de momentum.

En el caso de ruedas de reacción, debe primero definirse adecuadamente el momento de inercia M^b :

$$M^b = M_V^b - M_W^b$$

El momento de inercia total es la suma del momento de inercia del cuerpo con las ruedas bloqueadas, M_V^b y el momento de inercia de las ruedas alrededor de sus propios ejes, M_W^b . Por otro lado, el par externo que actúa en el satélite es el par de los motores de las ruedas de reacción, al ser cuerpo rígido M^b es constante y al no haber mecanismos de almacenamiento, no existe almacenamiento de momentum.

Entonces:

$$M^b \dot{\omega}^b = -S(\omega^b)R^T h^I + \tau^b$$

Es más útil expresar la dinámica empleando la propiedad anticonmutativa de $S(\cdot)$:

$$M\dot{\omega} = S(R^T h^I)\omega + \tau$$

donde ω , τ y M son la velocidad angular del cuerpo, el par externo y la matriz de momentos de inercia, respectivametne todas en coordenadas del cuerpo (se omite el índice b).

Cuando se usan propulsores de gas como actuadores, M^b es constante y el momentum almacenado, h_c^b es cero para todo tiempo. Entonces $h^b = R^T h^I = M^b \omega^b$. Tomando la derivada:

$$\begin{aligned}M^b \dot{\omega}^b &= \dot{R}^T h^I + R^T \dot{h}^I \\ M^b \dot{\omega}^b &= -S(\omega_b)R^T h^I + R^T R\tau^b \\ M^b \dot{\omega}^b &= -S(\omega_b)M\omega^b + \tau^b\end{aligned}$$

Usando la propiedad anticonmutativa y omitiendo el índice b , se obtiene:

$$M\dot{\omega} = S(M\omega)\omega + \tau$$

Extracción de cuaternión de la matriz de rotación R

En esta sección se muestra el método desarrollado en [17] para obtener el cuaternión de rotación a partir de una matriz de rotación.

Desarrollando (2.18):

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 + q_0q_2) & 2(q_3q_2 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Un primer elemento puede despejarse inicialmente:

$$\begin{aligned} R_{11} + R_{22} + R_{33} &= 4q_0^2 - 1 \\ R_{11} - R_{22} - R_{33} &= 4q_1^2 - 1 \\ -R_{11} + R_{22} - R_{33} &= 4q_2^2 - 1 \\ -R_{11} - R_{22} + R_{33} &= 4q_3^2 - 1 \end{aligned}$$

Los elementos restantes pueden despejarse con los términos fuera de la diagonal principal y con el elemento calculado. Empezar por cualquiera de estas ecuaciones es teóricamente válido, el cuaternión obtenido (una vez elegido el signo) es siempre el mismo.

Extraer adecuadamente el cuaternión de una matriz de rotación fue sujeto de profunda discusión en el pasado. El procedimiento concluido como el mejor es evaluar el lado izquierdo de las cuatro ecuaciones y emplear aquélla con el valor más grande. Esto da una mayor precisión numérica (al evitar una división entre un número cercano a cero) y tiene una buena interpretación geométrica.

Las cuatro opciones para extraer al cuaternión son entonces:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}} \\
 q_1 &= \frac{1}{4q_0} (R_{23} - R_{32}) \\
 q_2 &= \frac{1}{4q_0} (R_{31} - R_{13}) \\
 q_3 &= \frac{1}{4q_0} (R_{12} - R_{21})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - R_{11} + R_{22} - R_{33}} \\
 q_1 &= \frac{1}{4q_2} (R_{21} + R_{12}) \\
 q_3 &= \frac{1}{4q_2} (R_{23} + R_{32}) \\
 q_0 &= \frac{1}{4q_2} (R_{31} - R_{13})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} - R_{22} - R_{33}} \\
 q_2 &= \frac{1}{4q_1} (R_{12} + R_{21}) \\
 q_3 &= \frac{1}{4q_1} (R_{13} + R_{31}) \\
 q_0 &= \frac{1}{4q_1} (R_{23} - R_{32})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_3 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - R_{11} - R_{22} + R_{33}} \\
 q_1 &= \frac{1}{4q_3} (R_{13} + R_{31}) \\
 q_2 &= \frac{1}{4q_3} (R_{23} + R_{32}) \\
 q_0 &= \frac{1}{4q_3} (R_{12} - R_{21})
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] M. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, Wiley, 2005.
- [2] R. Mahony, T. Hamel, and J. Pflimlin, “Nonlinear Complementary Filters on the Special Orthogonal Group,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 53, no. 5, pp. 1203-1218, 2008.
- [3] P. Batista, C. Silvestre, and P. Oliveira “A GES attitude observer with single vector observations,” *Automatica*, vol. 48, no. 2, pp. 388-395, 2012.
- [4] A. Tayebi, “Unit quaternion observer based attitude stabilization of a rigid spacecraft without velocity measurement,” in *IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 1557 - 1561, San Diego, 2006.
- [5] A. Tayebi, “Unit Quaternion-Based Output Feedback for the Attitude Tracking Problem,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1516-1520, 2008.
- [6] B.T. Costic, D.M. Dawson, M.S. de Queiroz, and V. Kapila, “A Quaternion-Based Adaptive Attitude Tracking Controller Without Velocity Measurements,” in *IEEE Int. Conf. on Decision and Control*, pp. 2424-2429, Sydney, 2000.
- [7] V. Kolic, X. Herrero, and L. Barolli, “Local Search and Genetic Algorithms for Satellite Scheduling Problems,” in *IEEE Int. Conf. on Broadband, Wireless Computing, Communication and Applications*, pp. 328-336, Compiegne, 2013.
- [8] G. Antonelli, F. Caccavale, S. Chiaverini, and L. Villani, “An Output Feedback Algorithm for Position and Attitude Tracking Control of Underwater Vehicles,” in *IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 4567-4572, Florida, 1998.
- [9] J. Slotine and W. Lohmiller, “On Contraction Analysis for Nonlinear Systems,” *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 683–696, 1998.
- [10] W. Wang and J. Slotine, “On Partial Contraction Analysis for Coupled Nonlinear Oscillators,” *Biological Cybernetics*, vol. 92, no. 1, pp. 38 - 52, 2005.
- [11] N. Tabareau, J. Slotine, and Q. Pham, “How Synchronization Protects from Noise,” *PLoS Computational Biology*, vol. 6, no. 1, pp. 1 - 9, 2010.

- [12] G. Meyer, *On The Use Of Euler's Theorem on Rotations for the Synthesis of Attitude Control Systems*, NASA Technical Note, 1966.
- [13] G. Meyer, *Design and Global Analysis of Spacecraft Attitude Control Systems*, NASA Technical Report, 1971.
- [14] M. Shuster "A Survey of Attitude Representations," *The Journal of Astronautical Sciences*, vol. 41, no. 4, pp. 439-517, 1993.
- [15] P. Crouch, "Spacecraft Attitude Control and Stabilization: Applications of Geometric Control Theory to Rigid Body Models," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-29, no. 4, pp. 312-323, 1984.
- [16] J. Wen and K. Kreutz-Delgado, "The Attitude Control Problem," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, no. 10, 1991.
- [17] A. R. Klumpp, "Singularity-free extraction of a quaternion from a directional cosine matrix," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 13, pp. 754-755, 1976.
- [18] R. Ortega and M. Spong, "Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial," in *Conf. on Decision and Control*, Austin, 1988.
- [19] O. Egeland and J. Godhavn, "Passivity-Based Adaptive Attitude Control of a Rigid Spacecraft," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 4, pp. 842-846, 1994.
- [20] J. Forbes, "Attitude Control with Active Actuator Saturation Prevention," *Acta Astronautica*, vol. 107, pp. 187-195, 2015.
- [21] J. Slotine and M. Di Benedetto, "Hamiltonian Adaptive Control of Spacecraft," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 107, no. 7, pp. 848-852, 1990.
- [22] Y. Zhao and J. Slotine, "Discrete Nonlinear Observers for Inertial Navigation," *Systems & Control Letters*, vol 54, no. 9, pp. 887-898, 2005.
- [23] M. Martin, *Manifold Theory. An Introduction for Mathematical Physicists*, Prentice-Hall, 1991.
- [24] J.F. Guerrero-Castellanos, N. Marchand, A. Hably, et. al., "Bounded Attitude Control of Rigid Bodies: Real-time Experimentation to a Quadrotor Mini-Helicopter," *Control Engineering Practice*, vol. 19, pp. 790 - 797, 2011.
- [25] J. Crassidis, F. Markley, and Y. Cheng, "Survey of nonlinear attitude estimation methods," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 30, no. 1, pp. 12-28, 2007.
- [26] P. Batista, C. Silvestre, and P. Oliveira, "Sensor-based complementary globally asymptotically stable filters for attitude estimation," *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 7563-7568, Shanghai, 2009.

- [27] R. Mahony, T. Hamel, J. Trumpf, and C. Lageman, “Nonlinear attitude observers on $SO(3)$ for complementary and compatible measurements: a theoretical study,” *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 6407–6412, Shanghai, 2009.
- [28] S. Salcudean, “A Globally Convergent Angular Velocity Observer for Rigid Body Motion” *IEEE Trans on Automatic Control*, vol. 36, no. 12, 1991.
- [29] G. Antonelli, F. Caccavale, S. Chiaverini, and L. Villani, “Tracking Control for Underwater Vehicle-Manipulator Systems with Velocity Estimation,” *IEEE Journal of Oceanic Eng.*, vol. 25, no. 3, 2000.
- [30] R. Chávez-Moreno, Y. Tang, S. Satillán-Gutiérrez and J. Haibo, “Contraction Based Angular Velocity Observer for Small Satellites,” *IEEE*, 2016
- [31] I. Grave and Y. Tang, “A New Observer for Perspective Vision Systems Under Noisy Measurements,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 60, no. 2, pp- 503-508, 2015
- [32] D. Carnevale, D. Karagiannis, and A. Astolfi, “A Condition for Certainty Equivalence Output Feedback Stabilization of Nonlinear Systems,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 55, no. 5, pp. 1180-1185, 2010.
- [33] H. Berghuis and H. Nijmeijer, “A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots,” *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 6, pp. 740-754, 1993.
- [34] C.C. Yih, “Extended Nicosia–Tomei Velocity Observer-based Robot-tracking Control,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 51-61, 2010.
- [35] F. Lizarralde and J. Wen, “Attitude Control Without Angular Velocity Measurement: A Passivity Approach,” in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA 1995)*, pp. 2071-2075, 1995.
- [36] M. Shuster and J. Van der Ha, “A Tutorial on Vectors and Attitude,” *Control Systems Magazine*, vol. 29, no. 2, pp. 94-107, 2009.
- [37] Y. Yung, S. Yang, M. Wang, et. al., “High Performance Full Attitude Control of a Quadrotor on $SO(3)$ ” in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA 2015)*, pp. 1698-1703, Seattle, 2009.
- [38] N. Chaturvedi, A. Sanyal, and N. McClamroch, “Rigid Body Attitude Control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol.31, no. 3, pp. 31 - 71, 2011.
- [39] F. Landis and J. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Control and Determination*, Spinger, 2014.
- [40] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, 1975.
- [41] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002.