



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Una Caracterización Combinatoria de las  
Triangulaciones del Disco.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A :**

**EDGAR MORALES AVALOS**

**DIRECTOR DE TESIS:  
Dra. Natalia García Colín**

**Ciudad Universitaria, Cd. Mx. septiembre, 2016**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Tesista: Morales Avalos Edgar  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera: Matemáticas  
Cuenta: 307209894

Asesora: Dra. Natalia García Colín

Sinodal: Dr. Javier Bracho Carpizo

Sinodal: Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Sinodal: Dr. Edgardo Roldán Pensado

Sinodal: Dr. José David Flores Peñaloza

Título: Una Caracterización Combinatoria de las Triangulaciones del Disco.  
Páginas: 71  
Año: 2016

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>3</b>
1.1. Motivación. . . . .	3
1.2. Preliminares. . . . .	4
1.3. Objetivo. . . . .	8
<b>2. Dos Lemas Técnicos.</b>	<b>11</b>
2.1. Moebious y Arracadas. . . . .	11
2.2. Lema de las Semirruedas. . . . .	12
2.2.1. La 2 - semirrueda, $S_2$ . . . . .	13
2.2.2. La 3 - semirrueda, $S_3$ . . . . .	14
2.2.3. La 4 - semirrueda, $S_4$ . . . . .	17
2.2.4. La 5 - semirrueda, $S_5$ . . . . .	21
2.2.5. La 6 - semirrueda, $S_6$ . . . . .	25
2.2.6. La 7 - semirrueda, $S_7$ . . . . .	29
2.2.7. Semirruedas con más de 7 triángulos. . . . .	32
2.3. Lema de las Ruedas. . . . .	34
2.3.1. La 3 - rueda, $R_3$ . . . . .	35
2.3.2. La 4 - rueda, $R_4$ . . . . .	38
2.3.3. La 5 - rueda, $R_5$ . . . . .	40
2.3.4. La 6 - rueda, $R_6$ . . . . .	45
2.3.5. La 7 - rueda, $R_7$ . . . . .	50
2.3.6. Ruedas con más de 7 triángulos. . . . .	54
<b>3. Caracterización Combinatoria del Disco.</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



# Capítulo 1

## Introducción.

### 1.1. Motivación.

Resulta sencillo dar una descripción intuitiva de las triangulaciones de superficies como una red de triángulos que recubren completamente a la superficie, donde dichos triángulos están acomodados de tal forma que no se enciman y por parejas su intersección puede ser vacía, un vértice o un lado completo.

Notemos que las triangulaciones de superficies de dimensión 2 parecen gráficas simples, donde cada vértice de los triángulos es un vértice de la gráfica, cada lado de los triángulos es una arista de la gráfica y cada región de la gráfica (sin contar a la región exterior) es un triángulo.

A cualquier triangulación de una superficie de dimensión 2 se le puede asignar su gráfica dual al considerar cada triángulo como una región de la triangulación. Es decir, la gráfica dual de la triangulación tendrá un vértice por cada triángulo que hay en triangulación y estos vértices serán adyacentes si sus respectivos triángulos comparten alguno de sus lados.

Un ejemplo son las siguientes triangulaciones que corresponden a un disco, una banda de Moebius y un anillo. Véase figura 1.1.

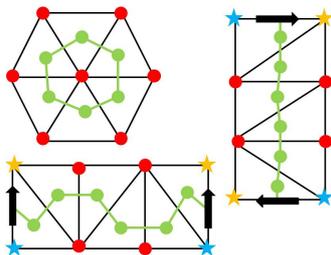


Figura 1.1: Triangulaciones de un disco (arriba), una banda de Moebius (derecha) y un anillo (abajo) y sus gráficas duales.

En el ejemplo anterior, las gráficas duales de las triangulaciones del disco, el anillo y la banda de Moebius son un 6 – ciclo, esto implica que la gráfica dual de una triangulación no caracteriza a la triangulación de una superficie, pues hay

distintas superficies trianguladas que tienen la misma gráfica dual, aunque dichos ejemplos de triangulaciones de superficies son escasos. Esto sugiere que con un poco de información adicional a la gráfica dual, las triangulaciones de superficies se pueden caracterizar, módulo isomorfismo.

Previo a este trabajo, ya se ha demostrado que una triangulación finita de una superficie conexa y sin frontera está completamente determinada por su matriz de intersección. [Arocha et al., 2015]

Motivados por el resultado anterior, el propósito de este trabajo es dar una caracterización combinatoria del disco finitamente triangulado a partir de su matriz de intersección y con este resultado motivar el estudio de generalizaciones para algunas otras superficies.

## 1.2. Preliminares.

En esta sección recordaremos algunos conceptos básicos de la geometría, la combinatoria y la topología. Podemos encontrar estos conceptos en [Matoušek, 2008] y [Gallier and Xu, 2013].

**Definición 1** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^d$  es **convexo** si para cualesquiera dos puntos  $x$  e  $y$  en  $A$ , todo el segmento de recta  $xy$  está completamente contenido en  $A$ .

Intuitivamente un conjunto convexo es un conjunto que no posee baches. Véase Figura 1.2.

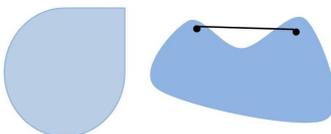


Figura 1.2: En  $\mathbb{R}^2$ , un conjunto convexo (izquierda) y uno no convexo (derecha).

De la definición anterior se sigue que la intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

**Definición 2** Llamamos **envolvente convexa** de un conjunto de puntos  $P \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\text{conv}(P)$ , a la intersección de todos los conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$  que contienen a  $P$ . Véase Figura 1.3.

**Definición 3** Supongamos que  $v_0, v_1, \dots, v_k$  son puntos en  $\mathbb{R}^d$ . Llamaremos a estos puntos **afinmente dependientes** si existen números reales  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ , no todos ellos cero, tales que  $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i = 0$  y  $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$ . De otra modo, los puntos son llamados **afinmente independientes**.

Para dos puntos la independencia afín significa que estos dos puntos son distintos, para tres puntos significa que no son colineales, para cuatro puntos significa que no se encuentran en un mismo plano, y así sucesivamente.

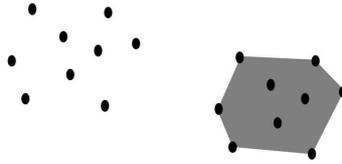


Figura 1.3: Un conjunto de puntos  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  y su conjunto convexo correspondiente,  $\text{conv}(P)$ .

**Definición 4** Un **simplejo**  $\sigma$  es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos afnmente independientes  $P \subset \mathbb{R}^d$ .

Los puntos en  $P$  son llamados **vértices** del simplejo  $\sigma$ . La dimensión del simplejo se define como  $\dim \sigma = |P| - 1$ , por lo tanto, cada  $k$ -simplejo (simplejo de dimensión  $k$ ) tiene  $k + 1$  vértices. Véase Figura 1.4.

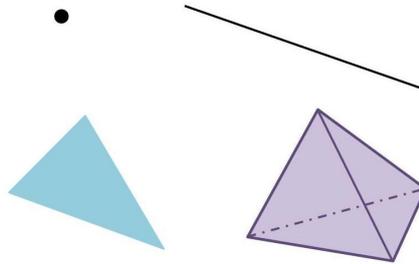


Figura 1.4: Ejemplos de simplejos; un punto, un segmento de recta, un triángulo y un tetraedro. Sus dimensiones son 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

**Definición 5** La envolvente convexa de un subconjunto de vértices de  $\sigma$  es una **cara** de  $\sigma$ , por lo tanto, cada cara de  $\sigma$  es por si misma un simplejo. Véase Figura 1.5.

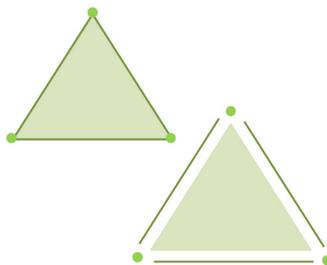


Figura 1.5: Las caras del simplejo de dimensión 2 (triángulo) son 8: tenemos 3 vértices, 3 lados, el triángulo y la cara vacía (aquella que no posee vértices).

**Definición 6** Una familia no vacía de simplejos  $\Delta$  es un **complejo simplicial** si cumple las siguientes condiciones:

- a) Cada cara de cada simplejo  $\sigma \in \Delta$  es también un simplejo de  $\Delta$ .
- b) La intersección  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  de cualesquiera dos simplejos  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$  es cara de ambos simplejos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Véase Figura 1.6.

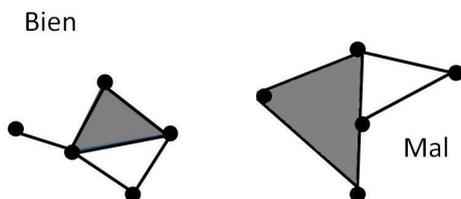


Figura 1.6: Un ejemplo de un complejo simplicial y una familia que no es complejo simplicial.

**Definición 7** La unión de todos los simplejos en un complejo simplicial  $\Delta$  es llamada el **poliedro** de  $\Delta$  y se denota  $||\Delta||$ .

**Definición 8** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $h$  una función tal que  $h : X \rightarrow Y$ , decimos que  $h$  es un **homeomorfismo** si  $h$  es biyectiva, es continua y la inversa de  $h$  es continua. Si existe tal función  $h$  se dice que  $X$  es homeomorfo a  $Y$  y se denota  $X \cong Y$ .

**Definición 9** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\Delta$  un complejo simplicial, entonces llamaremos a  $||\Delta||$  una **triangulación de  $X$**  si  $||\Delta|| \cong X$ .

La **dimensión de un complejo simplicial**  $\Delta$  es el máximo de las dimensiones de los simplejos en  $\Delta$ . El conjunto de vértices de  $\Delta$ ,  $V(\Delta)$ , es la unión de todos los vértices de los simplejos en  $\Delta$ .

En particular, hay que enfatizar que los complejos simpliciales siempre poseen al simplejo vacío (el simplejo que no posee vértices). El complejo simplicial que solo consta del simplejo vacío tiene dimensión -1. Los complejos simpliciales 0-dimensionales son configuraciones de puntos, mientras que los 1-dimensionales corresponden a gráficas representadas por vértices y aristas que no se cruzan entre si. Los complejos simpliciales 2-dimensionales también poseen aspecto de gráficas, pero en estas, sus regiones también pueden ser consideradas caras. Véase Figura 1.7.

**Definición 10** Una **variedad** de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable donde cada punto posee un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . El mismo  $\mathbb{R}^n$  es una variedad.

**Definición 11** Llamaremos **superficie** a una variedad de dimensión 2, es decir, cada punto posee un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . La esfera y el toro son ejemplos de superficies.

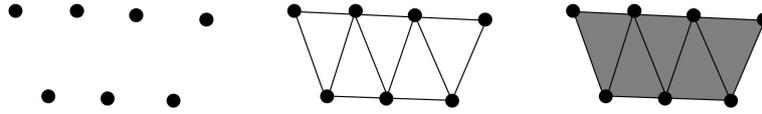


Figura 1.7: Complejos simpliciales de dimension 0, 1 y 2, respectivamente.

**Definición 12** Una **superficie con frontera** es una superficie en la que todo punto posee un entorno homeomorfo al semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ . El disco unitario  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  es un ejemplo de superficie con frontera.

En este trabajo solo consideraremos triangulaciones de superficies, por lo tanto, algunas de nuestras definiciones anteriores recibirán nombres más amigables.

Si  $T$  es la triangulación de una superficie,  $T$  tendrá triángulos como simplejos maximales, denotamos este conjunto como  $\Delta(T)$ , los simplejos de dimensión 1 los llamaremos lados o aristas, este conjunto lo denotaremos como  $E(T)$  y los simplejos de dimensión 0 conservaran el nombre de vértices, este conjunto lo denotaremos como  $V(T)$ .

De ahora en adelante supondremos que todas las triangulaciones con las que trabajemos son finitas de tamaño  $n$  y tienen sus triángulos etiquetados.

**Definición 13** Dada una triangulación etiquetada  $T$  de tamaño  $n$ ,  $M_T$  es su **matriz de intersección** si la entrada  $a_{i,j}$  de  $M_T$  es exactamente el número de vértices que comparten el triángulo  $t_i$  y el triángulo  $t_j$  en la triangulación  $T$ , es decir,  $|t_i \cap t_j| = a_{i,j}$ . El tamaño de  $M_T$  es  $n \times n$ .

Notemos que la matriz de intersección siempre es una matriz simétrica y además la entrada  $a_{i,i}$ ,  $1 \leq i \leq n$  son siempre el número 3. Véase Figura 1.8.

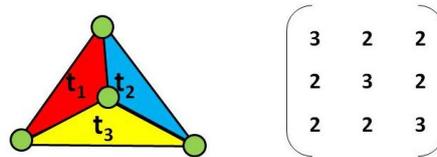


Figura 1.8: Una triangulación del disco y su matriz asociada.

**Definición 14** Sean  $T$  y  $T'$  dos triangulaciones. Un **mapeo simplicial** de  $T$  en  $T'$  es un mapeo  $f : V(T) \rightarrow V(T')$  que manda caras de  $T$  en caras  $T'$ . Es decir  $f(c)$  es cara de  $T'$  si y solo si  $c$  es cara de  $T$ .

Si además el mapeo simplicial  $f$  es biyectivo y su mapeo inverso es simplicial, entonces  $f$  es un **isomorfismo de triangulaciones**. Véase Figura 1.9.

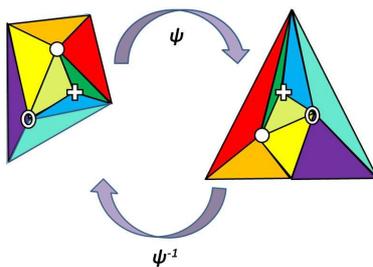


Figura 1.9: El mapeo asocia las caras que tienen el mismo color, vértices que poseen el mismo símbolo, etc.

### 1.3. Objetivo.

El objetivo de este trabajo es dar una caracterización combinatoria de las triangulaciones del disco a partir de la matriz de intersección asociada a ellas. La idea para llegar al objetivo es la siguiente, se supondrá que se tienen dos superficies  $D$  y  $D'$  homeomorfas a un disco, ambas finitamente trianguladas por  $T$  y  $T'$  tales que  $M_T = M_{T'}$ , entonces se buscará exhibir un isomorfismo entre  $T$  y  $T'$ . Es decir, queremos demostrar que si existen dos superficies finitamente trianguladas que poseen la misma matriz de intersección, entonces ambas triangulaciones son isomorfas.

En particular este trabajo pretende validar la siguiente afirmación:

**Afirmación 1** *Si  $D$  es una superficie homeomorfa a un disco, finitamente triangulada por la triangulación  $T$ , cuya matriz de intersección es  $M_T$ , entonces la matriz  $M_T$  caracteriza a la triangulación  $T$ , es decir, si existe otra superficie  $D'$  homeomorfa al disco triangulada por  $T'$ , tal que  $M_T = M_{T'}$  entonces  $T$  y  $T'$  son isomorfas.*

La idea propuesta puede parecer sencilla y rápida, pero no lo es del todo. Antes de proceder a probar la Afirmación 1, debemos hacer notar cómo están constituidas las triangulaciones de discos.

Observemos que si un vértice  $v$  en la triangulación está en el interior del disco, entonces todos los triángulos que tienen a  $v$  como uno de sus vértices constituyen una triangulación homeomorfa a la triangulación de un disco rebanado radialmente a la cual llamamos una  $n$  – *rueda* donde  $n$  es el número de triángulos que posee esa rueda. Por otra parte si  $v$  está en la frontera de la superficie, los triángulos que poseen a  $v$  como uno de sus vértices constituyen una triangulación homeomorfa a una triangulación en forma de abanico a la cual llamaremos  $n$  – *semirrueda*, con  $n$  el número de triángulos que posee esa semirrueda. Véase Figura 1.10.

Bajo estos argumentos podemos notar que las triangulaciones de superficies con frontera están constituidas por ruedas y semirruedas, por lo cual primero estudiaremos a las  $n$  – *ruedas* y a las  $n$  – *semirruedas* y a sus matrices de intersección. Este análisis constituye el contenido del capítulo Dos Lemas Técnicos en las secciones de Lema de las Semirruedas y Lema de las Ruedas.

El Lema de las Ruedas consiste en determinar si dada una  $n$  – *rueda* y su matriz de intersección  $M$  existe una triangulación no homeomorfa a una  $n$  – *rueda* que

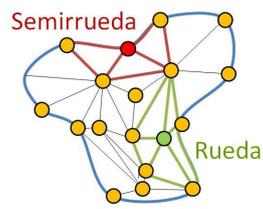


Figura 1.10: Ejemplos de una rueda y una semirrueda.

tenga por matriz de intersección a  $M$ . El Lema de las Semirruedas consiste en un análisis análogo para éstas.

La caracterización combinatoria del disco, es decir, la Afirmación 1, se obtendrá como consecuencia del Lema de las Ruedas y el Lema de las Semirruedas.



# Capítulo 2

## Dos Lemas Técnicos.

### 2.1. Moebius y Arracadas.

Antes de estudiar el Lema de las Semirruedas y el Lema de las Ruedas mostraremos algunas triangulaciones que aparecerán en sus enunciados y en sus pruebas.

Consideremos estas triangulaciones de cinco y seis triángulos de la banda de Moebius a las cuales nombraremos 5 – *Moebius* y 6 – *Moebius*. Véase Figura 2.1.

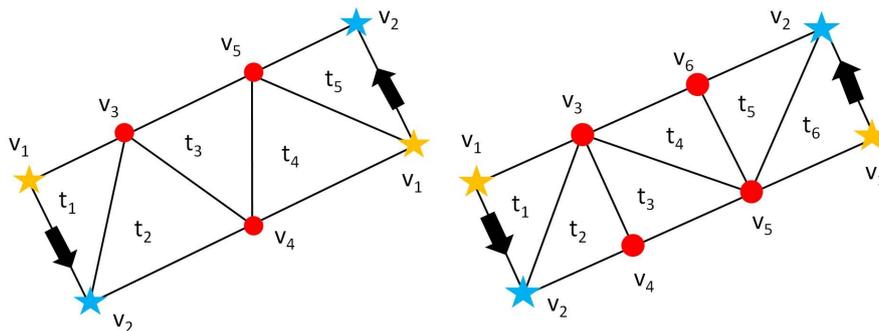


Figura 2.1: Las triangulaciones 5 – *Moebius* y 6 – *Moebius*.

Llamaremos 4 – *arracada* a la triangulación que resulta al eliminar a  $t_5$  de la triangulación 5 – *Moebius*. Véase Figura 2.2.

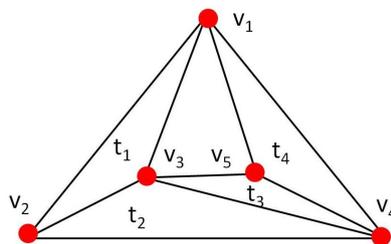


Figura 2.2: La 4 – *arracada*.

La 5 – *arracada* es la triangulación que resulta al eliminar a  $t_6$  de la triangulación 6 – *Moebius*. véase Figura 2.3.

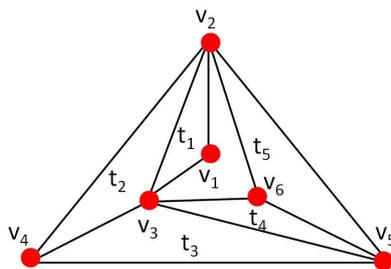


Figura 2.3: La 5 – arracada.

La 6 – *arracada* es la triangulación que resulta al forzar en la triangulación 6 – *Moebious* que  $t_1$  y  $t_6$  solo tengan en común al vértice  $v_2$ , es decir, añadiremos un nuevo vértice  $v_7$  para que  $V(t_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $V(t_6) = \{v_2, v_5, v_7\}$ . Véase Figura 2.4.

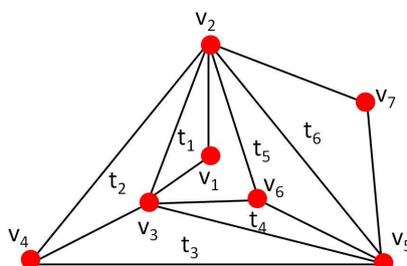


Figura 2.4: La 6 – arracada.

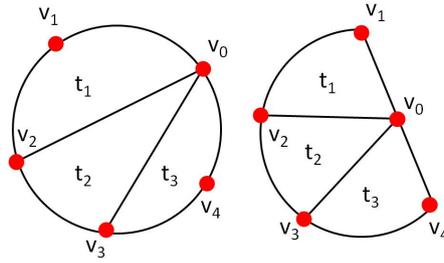
## 2.2. Lema de las Semirruedas.

**Definición 15** Llamaremos  $n$  - semirrueda a la triangulación  $S_n$  que consta de  $n$  triángulos y de  $n + 2$  vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ , donde  $n \geq 2$ , y cada triángulo  $t_i$  tiene por vértices  $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$  con  $1 \leq i \leq n$ .

Una realización geométrica de una  $n$  - semirrueda se logra de la siguiente manera: Tomamos un disco con frontera y colocamos  $n + 2$  vértices en su frontera, indexándolos de forma antihoraria desde 0 hasta  $n + 1$ , cada triángulo  $t_i$  tiene por vértices  $\{v_0, v_i, v_{n+1}\}$  y por lados  $\{v_0v_n, v_0v_{n+1}, v_nv_{n+1}\}$ . Si en un triángulo existen dos vértices cuyos índices sean consecutivos tomamos por lado del triángulo el segmento de arco del disco delimitado por dichos vértices que no contenga a ningún otro vértice. En el caso donde los índices no sean consecutivos, se dibuja el lado como el segmento rectilíneo entre esos dos vértices. En la Figura 2.1 vemos realizaciones geométricas de la 3 – *semirrueda*.

Observemos que las semirruedas se asemejan a mitades de ruedas de una bicicleta, de ahí el nombre que le damos a estas triangulaciones. Véase Figura 2.5.

En la triangulación  $S_3$ , el triángulo  $t_2$  tiene por vértices  $\{v_0, v_2, v_3\}$ , entonces sus lados son aquellos delimitados por los pares de vértices  $\{v_0v_2, v_2v_3, v_0v_3\}$ , los índices

Figura 2.5: La 3 - semirrueda,  $S_3$ .

de  $v_2$  y  $v_3$  son consecutivos, entonces se toma por lado el arco del disco delimitado por estos dos vértices. Por otra parte los índices de  $v_0$  y  $v_3$  no son consecutivos, entonces se dibuja el lado  $v_0v_3$  como el segmento rectilíneo que va de  $v_0$  a  $v_3$ . Del mismo modo el lado  $v_0v_2$  es el segmento rectilíneo cuyos extremos son  $v_0$  y  $v_2$  puesto que estos dos vértices no tienen índices consecutivos.

**Lema 1** Si  $T$  es una triangulación finita de una superficie, con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_n}$ , entonces, dependiendo de  $n$ ,  $T$  es alguna de las siguientes triangulaciones:

- a) Si  $n = 2$ , entonces  $T$  es una 2 - semirrueda.
- b) Si  $n = 3$ , entonces  $T$  es una 3 - semirrueda.
- c) Si  $n = 4$ , entonces  $T$  es una 4 - semirrueda o una 4 - arracada.
- d) Si  $n = 5$ , entonces  $T$  es una 5 - semirrueda o una 5 - arracada.
- e) Si  $n = 6$ , entonces  $T$  es una 6 - semirrueda o una 6 - arracada.
- d) Si  $n \geq 7$ , entonces  $T$  es una  $n$  - semirrueda.

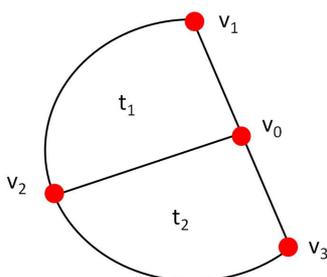
La prueba del Lema enunciado será hecha por partes, cada una de ellas corresponde a estudiar una semirrueda en particular. En concreto, supondremos que existe una triangulación  $T$  tal que su matriz de intersección  $M_T$  es igual a la matriz de intersección de  $S_n$ , por lo tanto, trataremos de averiguar cuál es la triangulación  $T$  reconstruyéndola según indique cada una de las entradas de la matriz  $M_T$ . La reconstrucción de  $T$  se hará de forma exhaustiva, para asegurar que se consideran todos los casos posibles de triangulaciones que puedan satisfacer a la matriz  $M_T$ .

### 2.2.1. La 2 - semirrueda, $S_2$ .

La primera triangulación a estudiar es  $S_2$ . Véase Figura 2.6.

La matriz de intersección de  $S_2$  es:

$$M_{S_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Figura 2.6: La 2 - semirrueda,  $S_2$ .

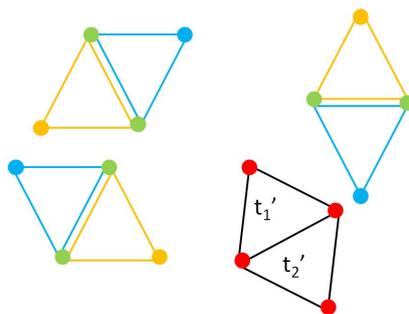
Recordemos que las matrices de intersección son simétricas y en la diagonal solo aparece el número 3, por lo tanto abreviaremos a las matrices de intersección solo escribiendo el triángulo inferior de la matriz de intersección.

La matriz de intersección (abreviada) de  $S_2$  es:

$$M_{S_2} = \begin{pmatrix} - & - \\ 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Supongamos que existe una triangulación  $T$ , con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_2}$ , es decir, la triangulación  $T$  posee solo dos triángulos y estos comparten uno de sus lados pues  $|t'_1 \cap t'_2| = 2$ .

Esto quiere decir que  $T$  es una 2 - semirrueda, pues no importa cual de los lados de  $t'_1$  y cual de los de  $t'_2$  se identifiquen, siempre el resultado será una 2 - semirrueda. Véase Figura 2.7.

Figura 2.7:  $T$  es una 2 - semirrueda sin importar cuál identificación se elija.

### 2.2.2. La 3 - semirrueda, $S_3$ .

La siguiente triangulación a estudiar será la semirrueda de tres triángulos,  $S_3$ . Véase Figura 2.5.

La matriz de intersección de  $S_3$  es:

$$M_{S_3} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 2 & - & - \\ 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_3}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales, entonces  $T$  consta de tres triángulos:  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$ .

La matriz  $M_T$  indica que  $|t'_1 \cap t'_2| = 2$ , es decir  $t'_1$  y  $t'_2$  comparten un lado y como argumentamos en la subsección anterior,  $t'_1$  y  $t'_2$  forman una 2 – *semirrueda* sin importar cual identificación de lados se elija.

Ahora solo basta analizar las posibilidades que tiene  $t'_3$  de compartir un lado con  $t'_2$ . Consideraremos la etiquetación de vértices de la 2 – *semirrueda* de la Figura 2.8.

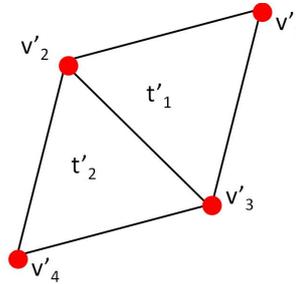


Figura 2.8: La 2 – *semirrueda* etiquetada.

1. Sabemos que  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$ , así  $t'_2$  y  $t'_3$  deben compartir alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_3) = \{v'_5, v'_6, v'_7\}$ .

### 1.1 CASO 1

Pegamos al triángulo  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_2v'_4$  con el lado  $v'_5v'_6$ . A consecuencia de este pegado se tiene que  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$ ,  $|t'_1 \cap t'_3| = 1$  y  $|t'_1 \cap t'_2|$  no se ha alterado. Esta nueva triangulación satisface a  $M_T$  y por tanto también satisface a  $M_{S_3}$ . De hecho la nueva triangulación  $T$  es una 3 – *semirrueda*. Véase Figura 2.9.

### 1.2 CASO 2

Pegamos al triángulo  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_3v'_4$  con el lado  $v'_5v'_6$ . Entonces se tienen las intersecciones  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$  y  $|t'_1 \cap t'_3| = 1$  y  $|t'_1 \cap t'_2|$  no se ha alterado. Esta nueva triangulación también satisface a  $M_T$  y a  $M_{S_3}$ . De hecho esta nueva triangulación  $T$  también es una 3 – *semirrueda* Véase Figura 2.10.

### 1.3 CASO 3

Peguemos al triángulo  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_2v'_3$  con el lado  $v'_5v'_6$ . Como consecuencia de la identificación en este caso tenemos

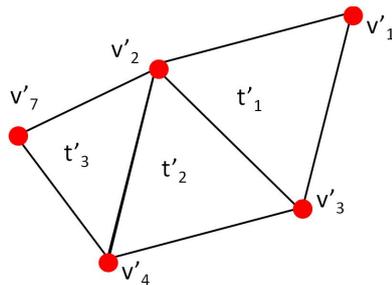


Figura 2.9: El lado  $v'_2v'_4$  se identifica con el lado  $v'_5v'_6$ .

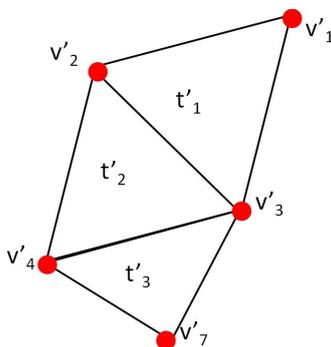


Figura 2.10: El lado  $v'_3v'_4$  se identifica con el lado  $v'_5v'_6$ .

que  $|t'_1 \cap t'_3| = 2$ , pues ambos triángulos comparten el lado  $v'_2v'_3$ . Esta triangulación no satisface a  $M_{S_3}$  pues en esta matriz la entrada  $a_{1\ 3}$  es 1. Véase Figura 2.11.

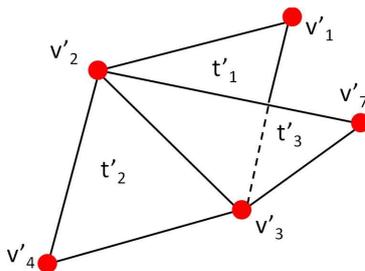


Figura 2.11: El lado  $v'_2v'_3$  se identifica con el lado  $v'_5v'_6$ .

Topológicamente tenemos que la triangulación  $T$  no es homeomorfa a una superficie, pues para cualquier punto en el lado  $v'_2v'_3$  su entorno no es homeomorfo a un plano.

No hay más opciones para pegar a  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda*. Las triangulaciones del caso 1 y del caso 2 de esta subsección resultan ser 3 – *semirruedas*, por tanto  $S_3$  es la única triangulación que satisface a  $M_{S_3}$ .

Destacamos la siguiente observación que emerge del análisis en el **CASO 3**.

**Observación 1** Sea  $P$  una triangulación de una superficie y  $t$  un nuevo triángulo que no está en  $P$ , el cual queremos añadir a  $P$  con la finalidad de obtener una nueva triangulación de superficie  $T$ . Entonces  $t$  se tiene que añadir identificando uno de sus lados a un lado de un triángulo  $p$  en  $P$  que no haya sido previamente identificado con un lado de otro triángulo.

La **Observación 1** señala que no se permitirán más de dos triángulos compartiendo un solo lado. Esta observación se usará varias veces en esta sección.

### 2.2.3. La 4 - semirrueda, $S_4$ .

La Figura 2.12 representa a la semirrueda de cuatro triángulos,  $S_4$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{S_4} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 2 & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

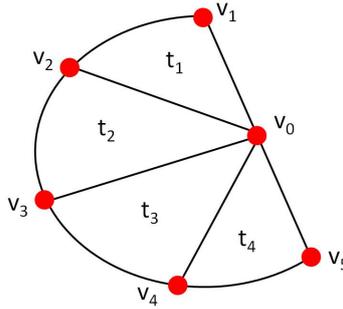


Figura 2.12: La 4 - semirrueda,  $S_4$

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_4}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales, entonces  $T$  consta de cuatro triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$ . Hagamos notar que la matriz de intersección de la 3 - semirrueda,  $M_{S_3}$  es submatriz de  $M_{S_4}$ , por lo tanto, también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1, t'_2$  y  $t'_3$ . En la subsección anterior mostramos que la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{S_3}$  es  $S_3$ , por consiguiente, en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1, t'_2$  y  $t'_3$  deben estar configurados como  $S_3$ . Consideraremos la etiquetación de vértices de la 3 - semirrueda de la Figura 2.13.

La matriz  $M_T$  indica que  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$ , por lo tanto,  $t'_3$  y  $t'_4$  deben compartir un lado. Usando la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades de pegar  $t'_4$  a la 3 - semirrueda preservando la propiedad de que  $T$  sea la triangulación de una variedad. Analizaremos dichos casos.

1. Consideremos  $V(t'_4) = \{v'_6, v'_7, v'_8\}$ .

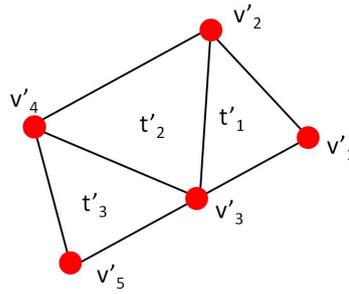


Figura 2.13: La 3 – *semirrueda* etiquetada.

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_4$  a la 3 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_3v'_5$  con el lado  $v'_6v'_7$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_2 \cap t'_4| = 1$  y  $|t'_1 \cap t'_4| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$  no se alteran. Esta nueva triangulación satisface a  $M_T$  y a  $M_{S_4}$ . De hecho,  $T$  es una 4 – *semirrueda*. Véase Figura 2.14.

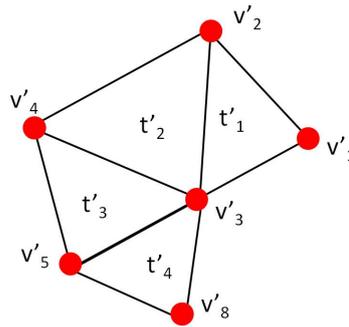


Figura 2.14: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_3v'_5$ .

### 1.2 CASO 2

Pegando  $t'_4$  a la 3 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_4v'_5$  con el lado  $v'_6v'_7$ . Entonces se obtienen las intersecciones  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$  y  $|t'_2 \cap t'_4| = 1$ . Para que esta triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_4| = 1$ , es decir  $t'_1$  y  $t'_4$  deben compartir un vértice común. Véase Figura 2.15.

La intersección que falta se logra al identificar  $v'_1$  con  $v'_8$ . Esta identificación no altera ninguna otra intersección pues el vértice  $v'_1$  únicamente pertenece a  $t'_1$  y el vértice  $v'_8$  únicamente pertenece a  $t'_4$ . A esta nueva triangulación  $T$  la llamaremos 4 – *arracada* y satisface a  $M_T$  y a  $M_{S_4}$ . La 4 – *arracada* consta de cuatro triángulos,  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$ . Los vértices  $v'_1$ ,  $v'_3$  y  $v'_5$  no son un triángulo, solo son un hueco en la triangulación. Véase Figura 2.16.

Recordemos que esta prueba es exhaustiva, aún no hemos agotado todas las posibilidades del **CASO 2**, es decir, ¿podríamos haber hecho otra

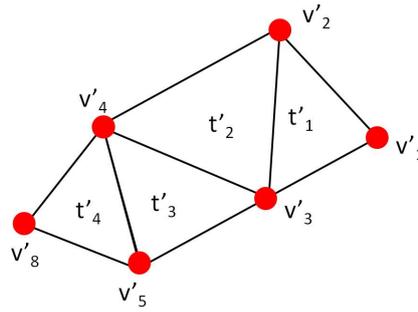


Figura 2.15: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_4v'_5$ .

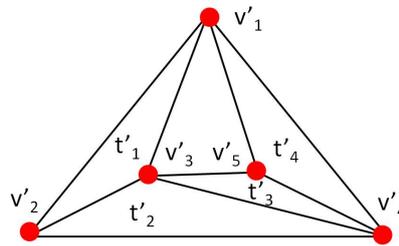
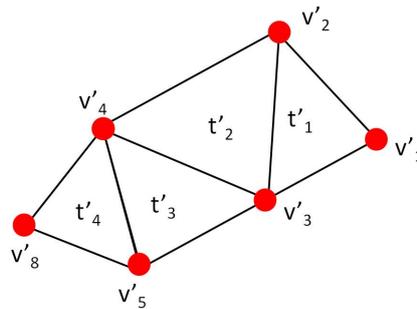


Figura 2.16: El vértice  $v'_1$  se identifica con el vértice  $v'_8$ .

elección de vértices de  $t'_1$  y  $t'_4$  para identificar y así lograr satisfacer  $M_T$ ?  
 Veamos otra vez la Figura 2.15.



Los vértices de  $t'_1$  son  $v'_1, v'_2$  y  $v'_3$ , alguno de ellos se debe identificar con  $v'_4$  o con  $v'_5$  o con  $v'_8$  que son los vértices de  $t'_4$ . Analicemos las posibles opciones.

- Si identificamos  $v'_1$  con  $v'_4$ , combinatoriamente,  $t'_1$  y  $t'_2$  son el mismo triángulo, pues tendrán los mismos vértices, entonces tendríamos una triangulación de solo tres triángulos, cuando  $M_T$  indica que  $T$  debe tener cuatro triángulos.
- Si identificamos  $v'_1$  con  $v'_5$  se obtiene la intersección  $|t'_1 \cap t'_3| = 2$ , esta

intersección está obligada a ser 1, según  $M_T$ .

- Si identificamos  $v'_2$  con  $v'_4$ , entonces  $t'_2$  desaparece y tendríamos solo tres triángulos en  $T$ .
- Si identificamos  $v'_2$  con  $v'_5$ , los triángulos  $t'_2$  y  $t'_3$  serán el mismo y tendríamos solo tres triángulos en  $T$ .
- Si identificamos  $v'_3$  con  $v'_4$  sucede que los triángulos  $t'_2$  y  $t'_3$  desaparecen y tendríamos solo dos triángulos en  $T$ .
- Si identificamos  $v'_3$  con  $v'_5$  el triángulo  $t'_3$  desaparece y tendríamos solo tres triángulos en  $T$ .

No hay más posibles parejas de vértices de  $t'_1$  y  $t'_4$  para identificar. Por lo tanto solo la identificación de  $v'_1$  con  $v'_8$  es decir, la 4 – *arracada* satisface en este caso a  $M_T$ .

Destacamos la siguiente observación que emerge del análisis en el **CASO 2**.

**Observación 2** *Sea  $T$  una triangulación de una superficie formada por  $k$  triángulos  $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_k\}$ , tal que  $M_T = M_{S_k}$  y  $T'$  una triangulación de  $k + 1$  triángulos tal que  $M_{T'} = M_{S_{k+1}}$  y  $M_T$  es igual a la submatriz de  $M_{T'}$  formada por los primeros  $k$  renglones y  $k$  columnas. Entonces  $T'$  se puede construir añadiendo a  $T$  un triángulo  $t'_{k+1}$  identificando un lado de éste con un lado de  $t'_k$ . Más aún, si se tienen que hacer identificaciones extra, como en el **CASO 2** anterior, estas pueden ser únicamente realizadas por el vértice de  $t'_{k+1}$  que no pertenece a  $t'_k$ , de lo contrario la matriz  $M_{T'}$  no puede ser igual a la matriz  $M_{S_{k+1}}$ .*

La triangulación  $T$  consta de  $k$  triángulos, cada triángulo  $t'_i$  tiene por vértices  $\{v_{3i-3}, v'_{3i-2}, v'_{3i-1}\}$ , con  $1 \leq i \leq k$ , donde no todos los vértices son diferentes. Entonces el triángulo  $t'_k$  tiene por vértices  $\{v'_{3k-3}, v'_{3k-2}, v'_{3k-1}\}$ . Etiquetemos los vértices del nuevo triángulo  $t'_{k+1}$  como  $\{v'_{3k}, v'_{3k+1}, v'_{3k+2}\}$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que al agregar a  $t'_{k+1}$  a  $T$  identificando uno de sus lados con uno de los lados de  $t'_k$  dichos lados fueron  $v'_{3k+2}v'_{3k+1}$  y  $v'_{3k-1}v'_{3k-2}$  respectivamente.

Sin embargo, para que se cumplan el resto de las reglas de intersección, es decir, que se satisfaga  $|t'_{k+1} \cap t'_i| = a_{k+1,i}$  para toda  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , posiblemente habrá que identificar vértices de  $t'_{k+1}$  con vértices de triángulos que ya estaban en  $T$ .

Debemos notar que los vértices  $v'_{3k+1}$  y  $v'_{3k+2}$  del triángulo  $t'_{k+1}$  no deben identificarse con otros vértices de triángulos en  $T$ , pues estos vértices fueron ya identificados con vértices que ya pertenecían en la triangulación  $T$  (se identificaron con  $v'_{3k-2}$  y  $v'_{3k-1}$ ). Si estos vértices se identifican con vértices de otros triángulos  $T$  se alterarán las intersecciones que el triángulo  $t_k$  ya cumplía con los triángulos  $t_i$  con  $1 \leq i \leq k - 1$ .

Por lo tanto el único vértice que se puede identificar con vértices de los triángulos de  $T$  es el vértice  $v_{3k}$ , es decir, el vértice que no fue empleado en el pegado de  $t'_{k+1}$  a la triangulación  $T$ .

Esta observación se usará varias veces en esta sección.

### 2.2.4. La 5 - semirrueda, $S_5$ .

La Figura 2.17 representa a la semirrueda de cinco triángulos,  $S_5$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{S_5} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

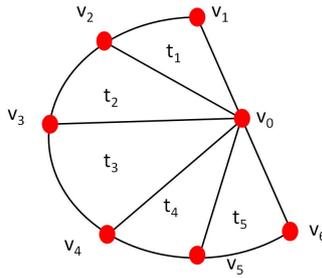


Figura 2.17: 5 - semirrueda,  $S_5$ .

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_5}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales,  $T$  consta de cinco triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$ . Hagamos notar que la matriz de intersección de la 4 - semirrueda,  $M_{S_4}$ , es submatriz de  $M_{S_5}$  y por lo tanto también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$ . En la subsección anterior mostramos que  $S_4$  y 4 - arracada son las únicas triangulaciones que tienen como matriz de intersección a  $M_{S_4}$ , así que en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$  deben tener la configuración de  $S_4$  o de la 4 - arracada. Trataremos de completar la triangulación  $T$  añadiendo un quinto triángulo  $t'_5$  tanto a  $S_4$  como a la 4 - arracada.

1. Considerando la etiquetación de vértices de la 4 - semirrueda en la Figura 2.18.

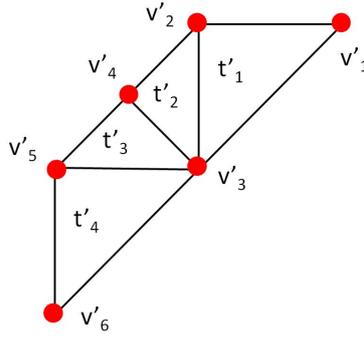
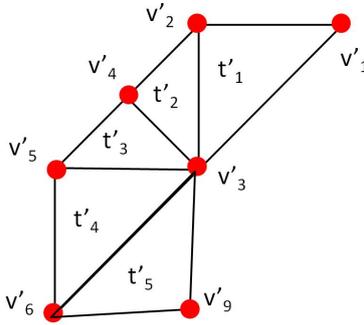
Sabemos  $|t'_4 \cap t'_5| = 2$ , entonces,  $t'_4$  y  $t'_5$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_5) = \{v'_7, v'_8, v'_9\}$ .

#### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_5$  a la 4 - semirrueda identificando el lado  $v'_3v'_6$  con el lado  $v'_7v'_8$  se obtienen las nuevas intersecciones  $|t'_4 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_3 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_2 \cap t'_5| = 1$  y  $|t'_1 \cap t'_5| = 1$ , además las intersecciones entre  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$  no se alteran. Esta nueva triangulación ya satisface a  $M_T$  y a  $M_{S'_5}$ . De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 5 - semirrueda. Véase Figura 2.19.

#### 1.2 CASO 2

Al pegar  $t'_5$  a la 4 - semirrueda identificando el lado  $v'_5v'_6$  con el lado  $v'_7v'_8$  se tienen las nuevas intersecciones  $|t'_4 \cap t'_5| = 2$  y  $|t'_3 \cap t'_5| = 1$ .

Figura 2.18: La 4 – *semirrueda* etiquetada.Figura 2.19: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica con el lado  $v'_3v'_6$ .

Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_5| = 1$  y  $|t'_2 \cap t'_5| = 1$ , es decir, el triángulo  $t'_5$  debe compartir un vértice con  $t'_1$  y a la vez un vértice con  $t'_2$ . Notemos que los vértices  $v'_2$  y  $v'_3$  son los vértices que comparten  $t'_1$  y  $t'_2$ , entonces hay que identificar alguno de dichos vértices con el vértice  $v'_9$  (**Observación 2**). Véase Figura 2.20.

Si se identifica  $v'_9$  con  $v'_3$  los triángulos  $t'_4$  y  $t'_5$  serían combinatoriamente el mismo triángulo, entonces tendríamos una triangulación de solo cuatro triángulos.

Si identificamos  $v'_9$  con  $v'_2$  se tienen las intersecciones  $|t'_1 \cap t'_5| = 1$  y  $|t'_2 \cap t'_5| = 1$ , además no se alteran las intersecciones entre los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$ . Esta nueva triangulación ya satisface a  $M_T$  y a  $M_{S_5}$ . A esta triangulación la llamaremos 5 – 1 – *arracada*. Véase Figura 2.21.

No hay otra forma de pegar  $t'_5$  a la 4 – *semirrueda*.

- Consideremos la etiquetación de vertices de la 4 – *arracada* en la Figura 2.22.

Sabemos  $|t'_4 \cap t'_5| = 2$ , entonces,  $t'_4$  y  $t'_5$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_5) = \{v'_6, v'_7, v'_8\}$ .

### 2.1 CASO 1

Pegando el triángulo  $t'_5$  a la 4 – *arracada* identificando el lado  $v'_1v'_5$  con el lado  $v'_6v'_7$  se obtienen las nuevas intersecciones:  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$

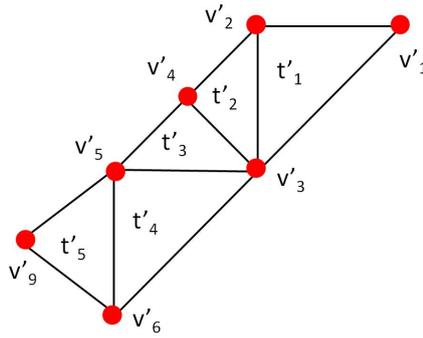


Figura 2.20: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica con el lado  $v'_5v'_6$ .

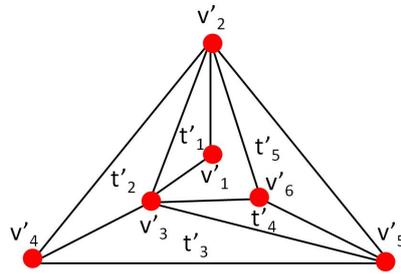


Figura 2.21: Se identifica el vértice  $v'_9$  con el vértice  $v'_2$ . La  $5 - 1 - arracada$ .

y  $|t'_5 \cap t'_1| = 1$ . Véase Figura 2.23.

Para que esta triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que se cumpla la intersección  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$ , es decir, solo hay que identificar un vértice de  $t'_5$  con un vértice de  $t'_2$ . Por la **Observación 2**, el vértice  $v'_8$  es el único vértice que podemos identificar de  $t'_5$  con algún vértice de  $t'_2$ .

Si identificamos el vértice  $v_8$  con  $v_4$ , los triángulos  $t'_4$  y  $t'_5$  son combinatoriamente el mismo.

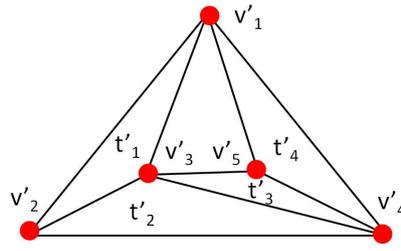
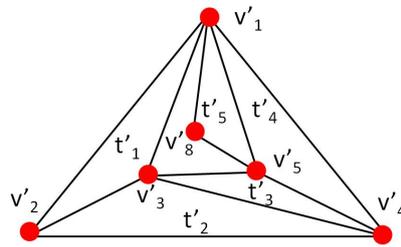
Si identificamos el vértice  $v_8$  con el vértice  $v'_3$  o con  $v'_2$  se obtiene la intersección  $|t'_5 \cap t'_1| = 2$ , pero  $M_T$  dice que esta intersección debe ser 1.

Por lo tanto, esta nueva triangulación no puede satisfacer a  $M_T$ .

## 2.2 CASO 2

Pegando el triángulo  $t'_5$  a la  $4 - arracada$  identificando el lado  $v'_1v'_4$  con el lado  $v'_6$  con  $v'_7$ , se tienen las nuevas intersecciones:  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_1| = 1$ , además, no se alteran las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$ . Esta nueva triangulación satisface a  $M_T$  y a  $M_{S_5}$ . A esta triangulación la llamaremos  $5 - 2 - arracada$ . Véase Figura 2.24.

En este punto queremos subrayar que las triangulaciones que hemos nombrado  $5 - 1 - arracada$  y  $5 - 2 - arracada$  son triangulaciones isomorfas. Consideremos

Figura 2.22: La 4 – *arracada* etiquetada.Figura 2.23: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_1v'_5$ .

las siguientes etiquetaciones de vértices para la 5 – 1 – *arracada* y la 5 – 2 – *arracada* de las Figura 2.25.

Con las etiquetaciones que hemos dado a cada triangulación, definimos una función  $\varphi$  que va de los vértices de la 5 – 1 – *arracada* a los vértices de la 5 – 2 – *arracada* como sigue:  $\varphi(v_1) = v'_8$ ,  $\varphi(v_2) = v'_1$ ,  $\varphi(v_3) = v'_4$ ,  $\varphi(v_4) = v'_5$ ,  $\varphi(v_5) = v'_3$  y  $\varphi(v_6) = v'_2$ . La función  $\varphi$  es biyectiva y mapea vértices en vértices, lados en lados y triángulos en triángulos (en la Figura 2.21 señalados por colores). Además podemos definir  $\varphi^{-1}$  como  $\varphi^{-1}(v'_8) = v_1$ ,  $\varphi^{-1}(v'_1) = v_2$ ,  $\varphi^{-1}(v'_4) = v_3$ ,  $\varphi^{-1}(v'_5) = v_4$ ,  $\varphi^{-1}(v'_3) = v_5$  y  $\varphi^{-1}(v'_2) = v_6$ . La función  $\varphi^{-1}$  también es biyectiva y mapeando caras de la 5 – 1 – *semirrueda* en caras de la misma dimensión en la 5 – 2 – *semirrueda* (los señalados por colores en la Figura 2.21 son las caras de dimensión 2). Por lo tanto la función  $\varphi$  es un isomorfismo entre la 5 – 1 – *arracada* y la 5 – 2 – *arracada*. Como ambas triangulaciones son isomorfas, no haremos distinción entre ellas y simplemente las llamaremos 5 – *arracada*.

Podemos concluir que las triangulaciones  $S_5$  y la 5 – *arracada* son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_T$  y por tanto satisfacen a  $M_{S_5}$ .

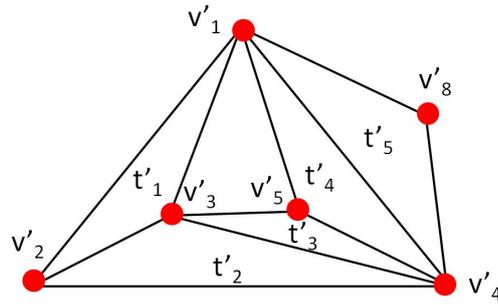


Figura 2.24: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_1v'_4$ . La 5 – 2 – *arracada*.

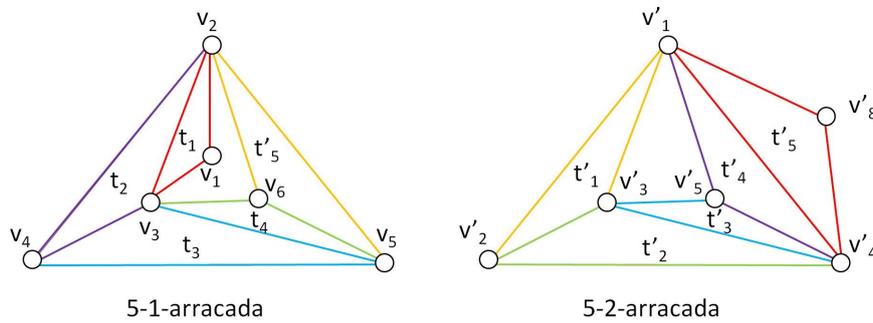


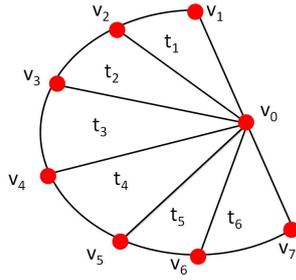
Figura 2.25: La 5 – 1 – *arracada* y la 5 – 2 – *semirrueda*.

### 2.2.5. La 6 - semirrueda, $S_6$ .

La Figura 2.26 representa a la semirrueda de seis triángulos,  $S_6$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

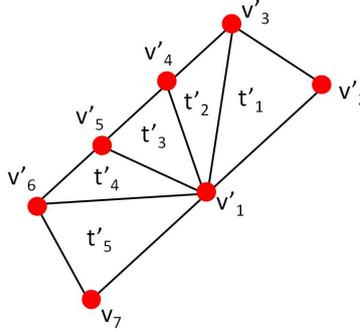
$$M_{S_6} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Supongamos que existe un triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_6}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales,  $T$  consta de seis triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$ . Notemos que la matriz de intersección de la 5 – *semirrueda*,  $M_{S_5}$ , es submatriz de  $M_{S_6}$  y por lo tanto también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz asociada a los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$ . En la subsección anterior mostramos que las triangulaciones  $S_5$  y la 5 – *arracada* son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_{S_5}$ , así que en la triangulación  $T$  los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  deberán tener la configuración de  $S_5$  o de la 5 – *arracada*. Trataremos de completar la triangulación  $T$  añadiendo un sexto triángulo,  $t'_6$ , tanto

Figura 2.26: La 6 - semirrueda,  $S_6$ .

a  $S_5$  como a la 5 - *arracada*.

1. Consideremos la etiquetación de vértices de la 5 - *semirrueda* en la Figura 2.27.

Figura 2.27: La 5 - *semirrueda* etiquetada.

Sabemos  $|t'_5 \cap t'_6| = 2$ , entonces,  $t'_5$  y  $t'_6$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_6) = \{v'_8, v'_9, v'_{10}\}$ .

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_6$  a la 5 - *semirrueda* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_1v'_7$  se obtiene la nuevas intersecciones  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_5$  y  $t'_5$  no se alteran. De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 6 - *semirrueda*. Véase Figura 2.28.

### 1.2 CASO 2

Pegando  $t'_6$  a  $S_5$  a la 5 - *semirrueda* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_6$  con  $v'_7$  se tienen las nuevas intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$  y  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ . Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ , es decir, el triángulo  $t'_6$  debe compartir un vértice con un vértice común de  $t'_1, t'_2$  y  $t'_3$ . El vértice  $v'_0$  es el único vértice que comparten los triángulos  $t'_1, t'_2$  y  $t'_3$ . Usando la **Observación 2**, el vértice  $v'_{10}$  es el único vértice de  $t'_6$  que se puede identificar con  $v'_0$ .

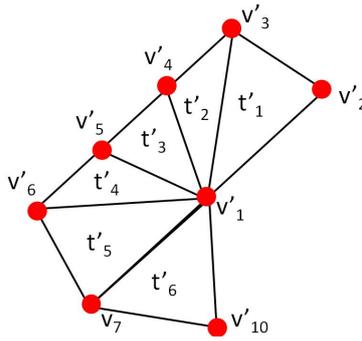


Figura 2.28: El lado  $v'_8v'_9$  se identifica con el lado  $v'_1v'_7$ .

Al identificar  $v'_0$  con  $v'_{10}$  el triángulo  $t'_5$  y el triángulo que  $t_6$  resultan ser combinatoriamente iguales. Es decir, no hay forma de que esta nueva triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.29.

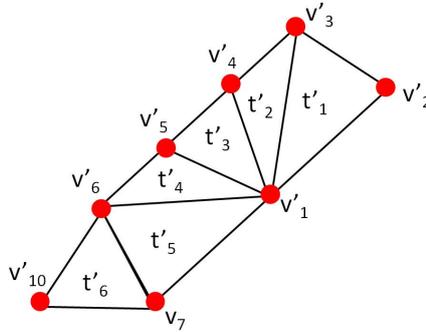


Figura 2.29: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_8v'_9$ .

No queda ninguna otra forma de pegar a  $t_6$  en la triangulación  $S_5$ .

2. Considerando la etiquetación de vértices de la 5 – *arracada* En la Figura 2.30. Sabemos  $|t'_5 \cap t'_6| = 2$ , entonces  $t'_6$  y  $t_5$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_6) = \{v'_7, v'_8, v'_9\}$ .

### 2.1 CASO 1

Pegando  $t'_6$  a la 5 – *arracada* identificando el lado  $v'_7v'_8$  con el lado  $v'_2v'_6$  se obtienen las nuevas intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ . Para que esta nueva triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ , es decir, el vértice del triángulo  $v'_9$  se debe identificar con un vértice del triángulo  $t'_3$  (**Observación 2**).

Al identificar  $v'_9$  con  $v'_3$ , la triangulación que resulta no puede ser la triangulación de una variedad pues  $|t'_6, t'_1| = 2$ , pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ .

Al identificar  $v'_9$  con  $v'_4$  se tiene  $|t'_6 \cap t'_2| = 2$ , pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ .

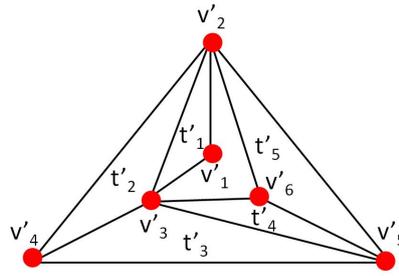


Figura 2.30: La 5 – *arracada* etiquetada.

Al identificar  $v'_9$  con  $v'_5$  los triángulos  $t'_6$  y  $t'_5$  son combinatoriamente iguales. Por lo tanto ninguna de las identificaciones logra satisfacer a  $M_T$ . Véase Figura 2.31.

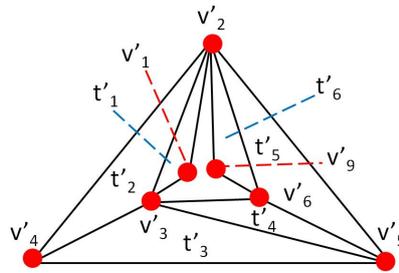


Figura 2.31: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica con  $v'_2v'_6$ .

## 2.2 CASO 2

Pegando  $t'_6$  a la 5 – *arracada* identificando el lado  $v'_7v'_8$  con el lado  $v'_2$  con  $v'_5$  obtenemos las intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ . Esta identificación ya satisface a la matriz  $M_T$  y a  $M_{S_6}$ . A esta nueva triangulación la llamaremos 6 – *arracada*. Véase Figura 2.32.

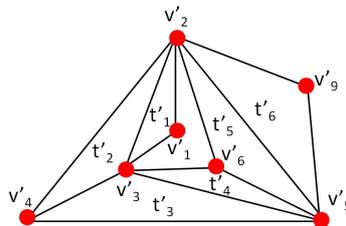


Figura 2.32: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica con el lado  $v'_2v'_5$ .

No hay otra forma de añadir el triángulo  $t_6$  a la 5 – *arracada*.

Podemos concluir que las triangulaciones  $S_6$  y la 6 – *arracada* son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_T$  y por tanto son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_{S_6}$ .

### 2.2.6. La 7 - semirrueda, $S_7$ .

La Figura 2.33 representa a la semirrueda de siete triángulos,  $S_7$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{S_7} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

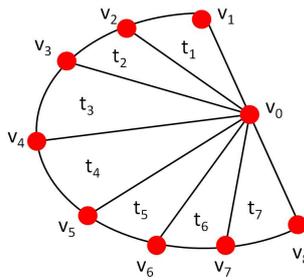


Figura 2.33: La 7 – *semirrueda*,  $S_7$ .

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_7}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales,  $T$  consta de siete triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5, t'_6$  y  $t'_7$ . Notemos que la matriz de intersección de la 6 – *semirrueda*,  $M_{S_6}$ , es submatriz de  $M_{S_7}$  y por lo tanto también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz asociada a los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$ . En la subsección anterior mostramos que las triangulaciones  $S_6$  y la 6 – *arracada* son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_{S_6}$ , así que en la triangulación  $T$  los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$  deberán tener la configuración de  $S_6$  o de la 6 – *arracada*. Trataremos de completar la triangulación  $T$  añadiendo un séptimo triángulo,  $t'_7$ , tanto a  $S_6$  como a la 6 – *arracada*.

1. Considerando la etiquetación de vértices de la 6 – *semirrueda* en la Figura 2.34.

Sabemos  $|t'_6 \cap t'_7| = 2$ , entonces,  $t'_6$  y  $t'_7$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_7) = \{v'_9, v'_{10}, v'_{11}\}$ .

#### 1.1 CASO 1

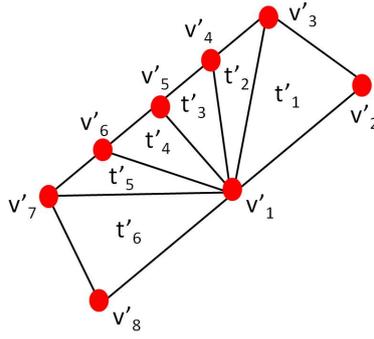


Figura 2.34: La 6 – *semirrueda* etiquetada.

Pegando  $t'_7$  a la 6 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_9v'_{10}$  con el lado  $v'_1v'_8$  se obtiene la nuevas intersecciones  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ ,  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_1| = 1$  además las intersecciones entre  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ ,  $t'_5$ ,  $t'_5$  y  $t'_6$  no se alteran. Esta nueva triangulación ya satisface a  $M_T$  y a  $M_{S'_7}$ . De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 7 – *semirrueda*. Véase Figura 2.35.

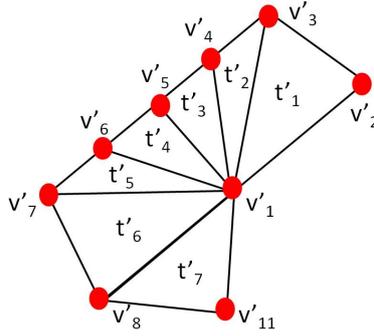


Figura 2.35: El lado  $v'_9v'_{10}$  se identifica con el lado con  $v'_1v'_8$ .

## 1.2 CASO 2

Pegando  $t'_7$  a la 6 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_9v'_{10}$  con el lado  $v'_7$  con  $v'_8$  se tienen las nuevas intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$  y  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ .

Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_1| = 1$ , es decir, el triángulo  $t'_7$  debe compartir un vértice con el único vértice común de  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$ , este vértice es  $v'_0$ . Usando la **Observación 2**, el vértice  $v'_{11}$  es el único vértice de  $t'_7$  que se puede identificar con  $v'_0$ . Al identificar  $v'_0$  con  $v'_{11}$  el triángulo  $t'_7$  y el triángulo  $t_6$  resultan ser combinatoriamente iguales, es decir, no hay forma de que esta nueva triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.36.

No queda ninguna otra forma de pegar a  $t_7$  en la triangulación  $S_6$ .

2. Considerando la etiquetación de vértices de la 6 – *arracada* En la Figura 2.37.

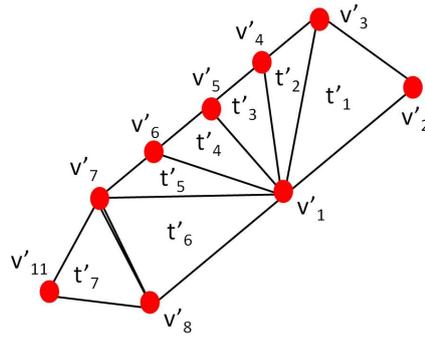


Figura 2.36: El lado  $v'_9v'_{10}$  se identifica con el lado  $v'_7v'_8$ .

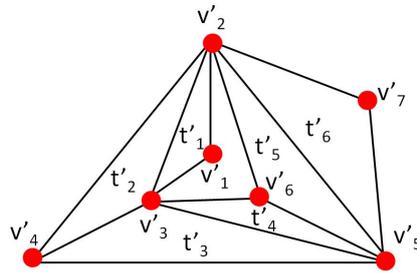


Figura 2.37: La 6 – *arracada* etiquetada.

Sabemos  $|t'_6 \cap t'_7| = 2$ , entonces  $t'_6$  y  $t'_7$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_6) = \{v'_8, v'_9, v'_{10}\}$ .

### 2.1 CASO 1

Pegando  $t'_7$  a la 6 – *arracada* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_2v'_7$  se tienen las nuevas intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ ,  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_1| = 1$ . Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$ . Por la **Observación 2**, el vértice  $v'_{10}$  del triángulo  $t'_7$  se debe identificar con  $v'_3$  o  $v'_5$ , ya que estos son los vértices comunes de  $t'_3$  y  $t'_4$ . Al identificar  $v'_{10}$  con  $v'_3$  se tiene que  $|t'_1 \cap t'_3| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Identificando  $v'_{10}$  con  $v'_5$  los triángulos  $t'_7$  y  $t'_6$  son combinatoriamente iguales.

No hay forma de que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.38.

### 2.2 CASO 2

Pegando  $t'_7$  a la 6 – *arracada* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_5v'_7$  se tienen las nuevas intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ ,  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$ . Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_7 \cap t'_1| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$ . Por la **Observación 2**, el vértice  $v'_{10}$  del triángulo  $t'_7$  se debe identificar con  $v'_2$  o  $v'_3$ , ya que estos son los vértices comunes de  $t'_1$  y  $t'_2$ . Al identificar  $v'_{10}$  con  $v'_3$  se tiene que  $t'_3, t'_4$  y

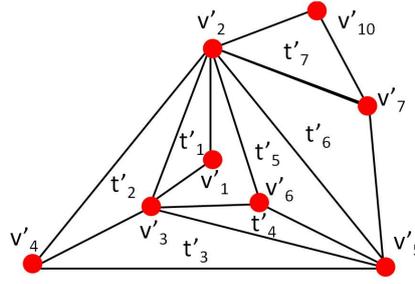


Figura 2.38: El lado  $v'_8v'_9$  se identifica con el lado  $v'_2v'_7$ .

$t'_7$  comparten al lado  $v'_3v'_5$ , por la **Observación 1** esta triangulación no corresponde a una variedad. Identificando  $v'_{10}$  con  $v'_2$  los triángulos  $t'_7$  y  $t'_6$  son combinatoriamente iguales.

No hay forma de que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.39.

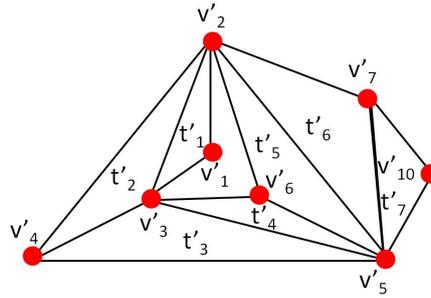


Figura 2.39: El lado  $v'_8v'_9$  se identifica con el lado  $v'_5v'_7$ .

No hay otra forma de añadir el triángulo  $t'_7$  a la 6 – *arracada*.

Podemos concluir que solo la triangulación  $S_7$  satisface a la matriz  $M_T$  y por tanto es la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{S_7}$ .

### 2.2.7. Semirruedas con más de 7 triángulos.

Para terminar de probar el **Lema 1**, falta mostrar que si  $T$  es una triangulación tal que  $M_T = M_{S_n}$  para  $n \geq 7$  entonces  $T$  es una  $n$  – *semirrueda*.

Esta prueba se realizará por inducción sobre el número de triángulos en  $T$ .

La base de la inducción ya está probada en la subsección anterior. La única triangulación que setisface a  $M_{S_7}$ , es  $S_7$ .

Sea  $k \geq 8 \in \mathbb{N}$  fijo y supongamos que el enunciado es cierto para  $k - 1$  triángulos. Esto es, si  $T$  es una triangulación con  $k - 1$  triángulos tal que  $M_T = M_{S_{k-1}}$ , entonces  $T$  es una  $(k - 1)$  – *semirrueda*. Probemos el enunciado para  $k$ . Supongamos

que existe un triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{S_k}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales,  $T$  consta de  $k$  triángulos. Al igual que en las subsecciones anteriores, la matriz de intersección de la  $(k - 1)$  - *semirrueda*,  $M_{S_{k-1}}$ , es submatriz de  $M_{S_k}$  y por lo tanto también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz asociada a los primeros  $k - 1$  triángulos de  $T$ . Por la hipótesis de inducción sabemos que  $S_{k-1}$  es la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{S_{k-1}}$ , así que en la triangulación  $T$  los primeros  $k - 1$  triángulos deberán tener la configuración de  $S_{k-1}$ .

Trataremos de completar la triangulación  $T$  añadiendo un nuevo triángulo,  $t'_k$  a  $S_{k-1}$ .

1. Consideraremos la etiquetación de la definición de  $(k - 1)$  - *semirrueda*, tal como aparece en la Figura 2.40.

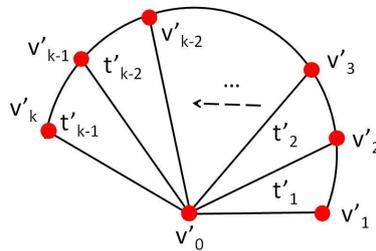


Figura 2.40: La  $(k - 1)$  - *semirrueda* etiquetada.

Sabemos que  $|t'_{k-1} \cap t'_k| = 2$ , pues en  $T$ ,  $t_{k-1}$  y  $t_k$  son triángulos contiguos, entonces  $t'_{k-1}$  y  $t'_k$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_k) = \{v'_{k+1}, v'_{k+2}, v'_{k+3}\}$ .

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_k$  a la  $(k - 1)$  - *semirrueda* identificando el lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  con el lado  $v'_0v'_k$  se obtienen todas las intersecciones que satisfacen a  $M_T$ , pues hemos construido una  $k$  - *semirrueda*. Véase Figura 2.41.

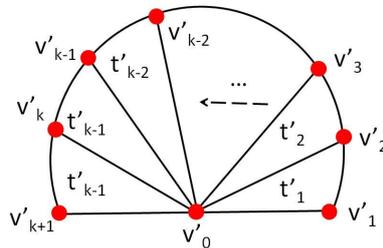


Figura 2.41: El lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  se identifica con el lado  $v'_0v'_k$ .

### 1.2 CASO 2

Pegando  $t'_k$  a la  $(k - 1)$  - *semirrueda* identificando el lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  con el lado  $v'_{k-1}v'_k$  se tienen las nuevas intersecciones:  $|t'_k \cap t'_{k-1}| = 2$  y  $|t'_k \cap t'_{k-2}| = 1$ .

Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $t_k$  comparta un vértice con los  $k-3$  primeros triángulos. El vértice  $v'_0$  es el único vértice que comparten los primeros  $k-3$  triángulos. Usando la **Observación 2**, el vértice  $v'_{k+1}$  es el único vértice de  $t'_k$  que se puede identificar con  $v'_0$ . Al identificar  $v'_0$  con  $v'_{k+1}$  el triángulo  $t'_k$  y el triángulo que  $t_{k-1}$  resultan ser combinatoriamente iguales. No hay forma de que esta nueva triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$ . Véase la Figura 2.42.

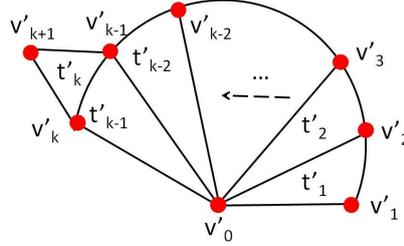


Figura 2.42: El lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  se identifica con el lado  $v'_{k-1}v'_k$

No hay otra manera de pegar  $t'_k$  a la  $(k-1)$ -semirrueda. Por lo tanto  $S_k$  es la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{S_k}$ .  $\square$

### 2.3. Lema de las Ruedas.

**Definición 16** Llamaremos  $n$ -rueda a la triangulación  $R_n$  que consta de  $n$  triángulos y de  $n+1$  vértices:  $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , donde  $n \geq 3$ . Cada triángulo  $t_i$  tiene por vértices  $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$  si  $1 \leq i \leq n-1$  y el triángulo  $t_n$  tiene por vértices  $\{v_0, v_n, v_1\}$ .

Una realización geométrica de una  $n$ -rueda se logra de la siguiente manera: Tomamos un disco con frontera y colocamos  $n$  vértices en la frontera indexándolos de forma antihoraria desde 1 hasta  $n$ , y colocamos un vértice en el interior del disco etiquetándolo como el vértice 0. Cada triángulo  $t_i$  tiene por vértices  $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$  y por lados  $\{v_0v_i, v_iv_{i+1}, v_{i+1}v_0\}$  si  $1 \leq i \leq n-1$ , por otro lado,  $t_n$  tiene por vértices  $\{v_0, v_n, v_1\}$  y por lados  $\{v_0v_n, v_nv_1, v_1v_0\}$ . Si los dos vértices de un triángulo que determinan un lado están en la frontera tomaremos por lado el segmento del arco del disco determinado por esos mismos vértices que no contiene ningún otro vértice, si uno de los vértices que forman un lado del triángulo es el vértice  $v_0$  entonces tomamos como lado el segmento de recta determinado por los vértices que forman ese lado. Véase Figura 2.43.

En la triangulación  $R_3$  el triángulo  $t_1$  tiene por vértices  $\{v_0, v_1, v_2\}$ , por lo tanto sus lados son  $\{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0\}$ , notemos que los vértices  $v_1$  y  $v_2$  están en la frontera del disco, entonces el lado  $v_1v_2$  es el arco del disco delimitado por esos dos vértices. Por otra parte, en el lado  $v_0v_1$ , el vértice  $v_0$  no está en la frontera del disco, entonces tomamos este lado como el segmento de recta delimitado por estos dos vértices. Del mismo modo el lado  $v_2v_0$  es el segmento de recta delimitado por estos dos vértices. En el triángulo  $t_3$ , los vértices  $v_3$  y  $v_1$  están en la frontera, entonces el lado  $v_3v_1$  es

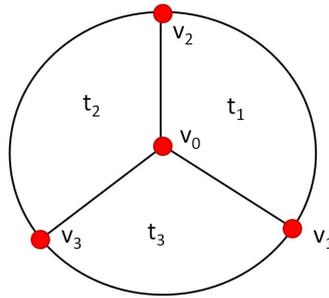


Figura 2.43: La 3-rueda.

el segmento de arco del disco delimitado por esos vértices. En el lado  $v_0v_1$ ,  $v_0$  no está en la frontera, entonces este lado será el segmento de recta delimitado por estos dos vértices. De igual forma el lado  $v_0v_3$  es el segmento de recta que une  $v_0$  y  $v_3$ .

**Lema 2** *Si  $T$  es una triangulación finita de una variedad con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_n}$ , entonces dependiendo de  $n$ ,  $T$  es alguna de las siguientes triangulaciones:*

- a) *Si  $n = 3$ , entonces  $T$  es una 3-rueda.*
- b) *Si  $n = 4$ , entonces  $T$  es una 4-rueda.*
- c) *Si  $n = 5$ , entonces  $T$  es una 5-rueda o una 5-Moebius.*
- d) *Si  $n = 6$ , entonces  $T$  es una 6-rueda o una 6-Moebius.*
- e) *Si  $n \geq 7$ , entonces  $T$  es una  $n$ -rueda.*

*Las triangulaciones 5-Moebius y 6-Moebius corresponden a triangulaciones de la Banda de Moebius con 5 y 6 mencionadas al inicio del capítulo.*

Para cualquier triangulación, en específico para cualquier  $R_n$  es posible obtener su matriz de intersección  $M_{R_n}$ . La prueba de este Lema procederá de forma similar a la prueba del lema anterior. Supondremos que existe una triangulación  $T$  tal que su matriz de intersección  $M_T$  es igual a la matriz de intersección de alguna  $R_n$ , trataremos de averiguar cuál es la triangulación  $T$  reconstruyendola según indique cada una de las entradas de la matriz  $M_T$ . La reconstrucción se hará de forma exhaustiva para asegurar que se consideran todos los posibles casos que puedan satisfacer a  $M_T$ , además esta prueba usará resultados del Lema anterior.

### 2.3.1. La 3-rueda, $R_3$ .

La primera triangulación a estudiar es la rueda de tres triángulos,  $R_3$ , representada en la Figura 2.43, cuya matriz de intersección es:

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ 2 & - & - \\ 2 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_3}$ , es decir, la triangulación  $T$  posee tres triángulos:  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$ . Hagamos notar que la matriz de intersección de la 2 – *semirrueda*,  $M_{S_2}$ , es submatriz de  $M_{R_3}$ , por lo tanto, también lo es de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1$  y  $t'_2$ . En la sección anterior mostramos que la única triangulación que tiene a  $M_{S_2}$  como matriz de intersección es  $S_2$ , por consiguiente, en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1$  y  $t'_2$  deben tener la configuración de  $S_2$ . Consideremos la etiquetación de vértices de la 2 – *semirrueda* de la Figura 2.44.

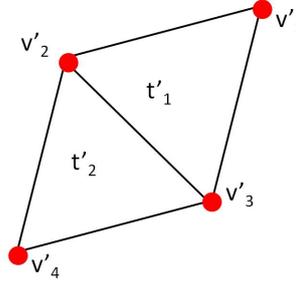


Figura 2.44: La 2 – *semirrueda* etiquetada.

La matriz  $M_T$  indica que  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$ , por lo tanto  $t'_2$  y  $t'_3$  deben compartir un lado. Usando la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades de pegar  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda*.

1. Sabemos que  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$ . Consideremos  $V(t'_3) = \{v'_5, v'_6, v'_7\}$ .

### 1.1 CASO 1

Pegamos al triángulo  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_5v'_6$  con el lado  $v'_3v'_4$ . Entonces se obtienen las siguientes intersecciones:  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$  y  $|t'_1 \cap t'_3| = 1$ , además las intersecciones entre  $t'_1$  y  $t'_2$  no se alteran.

Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_3| = 2$  es decir,  $t'_1$  y  $t'_3$  deben compartir un vértice más. Véase Figura 2.45.

Por la **Observación 2**, el vértice  $v'_7$  es el único vértice de  $t'_3$  que podemos tratar de identificar con los vértices de  $t'_1$ .

El vértice  $v'_7$  no se debe identificar con  $v'_3$  pues ambos pertenecen a  $t'_3$ , de ser identificados, este triángulo desaparece. El vértice  $v'_7$  no se debe identificar con el vértice  $v'_2$  pues al hacerlo, los triángulos  $t'_2$  y  $t'_3$  resultan ser combinatoriamente el mismo triángulo. Al identificar  $v'_7$  con  $v'_1$  se logra la intersección  $|t'_1 \cap t'_3| = 2$  sin alterar las intersecciones que ya se habían obtenido. Esta nueva triangulación satisface a  $M_T$  y a  $M_{R_3}$ . De hecho esta nueva triangulación  $T$  es una 3 – *rueda*. Véase Figura 2.46.

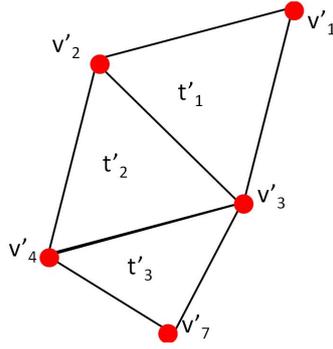


Figura 2.45: El lado  $v'_3v'_4$  se identifica con el lado  $v'_5v'_6$ .

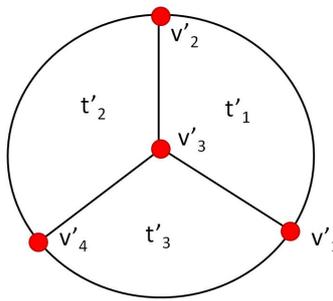


Figura 2.46: El vértice  $v'_7$  se identifica con el vértice  $v'_1$ .

### 1.2 CASO 2

Pegamos el triángulo  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_5v'_6$  con el lado  $v'_2v'_4$ . Notemos que este pegado es simétrico al pegado del caso anterior en la Figura 2.41. Tendremos las intersecciones:  $|t'_2 \cap t'_3| = 2$  y  $|t'_1 \cap t'_3| = 1$  y para que la triangulación satisfaga  $M_T$  al final se identifica el vértice  $v'_7$  con el vértice  $v'_1$  para satisfacer  $|t'_1 \cap t'_3| = 2$ . Esta nueva triangulación satisface a  $M_T$  y a  $M_{R_3}$ . De hecho esta nueva triangulación  $T$  es una 3 – *rueda*. Véase Figura 2.47.

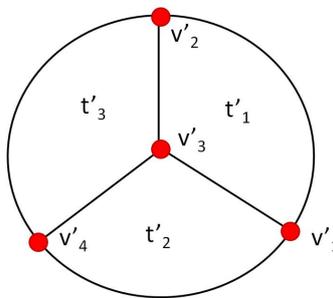


Figura 2.47: El vértice  $v'_7$  se identifica con el vértice  $v'_1$ .

No hay otra forma de añadir el triángulo  $t'_3$  a la 2 – *semirrueda*.

Podemos concluir que  $R_3$  es la única triangulación en satisfacer a la matriz  $M_{R_3}$  y por lo tanto en satisfacer a la matriz  $M_T$ .

### 2.3.2. La 4 - rueda, $R_4$ .

La Figura 2.48 representa a la rueda de cuatro triángulos,  $R_4$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{R_4} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 2 & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - \\ 2 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

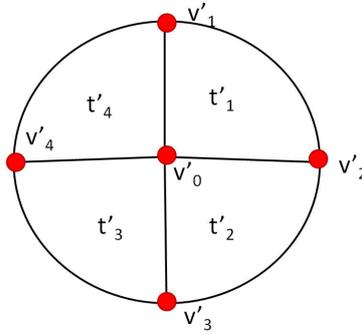


Figura 2.48: La 4 – *rueda*,  $R_4$ .

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_4}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales, entonces  $T$  consta de cuatro triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$ . Hagamos notar que la matriz de intersección de la 3 – *semirrueda*,  $M_{S_3}$  es submatriz de  $M_{R_4}$ , también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$ . En la sección anterior mostramos que la única triangulación que tiene a  $M_{S_3}$  como matriz de intersección es  $S_3$ , por consiguiente, en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$  deben estar configurados como  $S_3$ . Consideraremos la etiquetación de vértices de la 3 – *semirrueda* de la Figura 2.49.

La matriz  $M_T$  indica que  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$ , por lo tanto,  $t'_3$  y  $t'_4$  deben compartir un lado. Usando la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades de pegar  $t'_4$  a la 3 – *semirrueda*. Analizaremos dichos casos.

1. Sabemos  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$ , entonces  $t'_3$  y  $t'_4$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_4) = \{v'_6, v'_7, v'_8\}$ .

#### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_4$  a la 3 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_3v'_5$  con el lado  $v'_6v'_7$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_2 \cap t'_4| = 1$

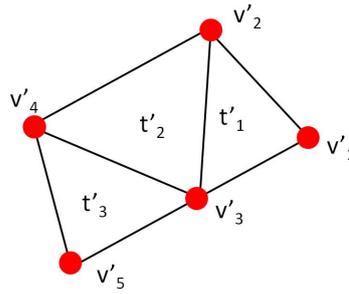


Figura 2.49: La 3 – *semirrueda* etiquetada.

y  $|t'_1 \cap t'_4| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_4| = 2$ , es decir, que  $t'_1$  comparta un vértice más con  $t'_4$ , por la **Observación 2**, el vértice  $v'_8$  es el único vértice que podrá ser identificado con algún vértice de  $t'_1$ . Véase Figura 2.50.

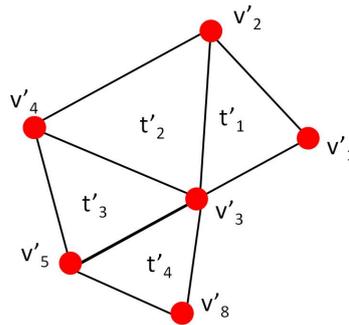


Figura 2.50: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_3v'_5$ .

El vértice  $v'_8$  no puede ser identificado con  $v'_3$  puesto que ambos vértices pertenecen a  $t'_4$ , esta identificación haría que este triángulo desapareciera. Tampoco se debe realizar la identificación de vértices  $v'_8$  con  $v'_2$  pues los triángulos  $|t'_4 \cap t'_2| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Por otro lado, la identificación de vértices  $v'_8$  con  $v'_1$  no afecta a ninguna intersección ya obtenida y además satisface  $|t'_4 \cap t'_1| = 2$ . Por lo tanto esta identificación logra que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  y a  $M_{R_4}$ . De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 4 – *rueda*. Véase Figura 2.51.

### 1.2 CASO 2

Pegando  $t'_4$  a la 3 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_4v'_5$  con el lado  $v'_6v'_7$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_3 \cap t'_4| = 2$  y  $|t'_2 \cap t'_4| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_4| = 2$ , es decir, los triángulos  $t'_1$  y  $t'_4$  deben compartir un lado.

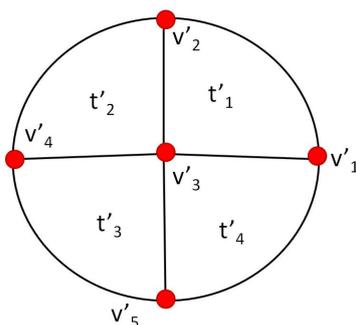


Figura 2.51: El vértice  $v'_8$  se identifica con el vértice  $v'_1$ .

Los lados de  $t'_4$  son  $v'_4v'_5$ ,  $v'_5v'_8$  y  $v'_4v'_8$ , notemos que en cada lado aparece el vértice  $v'_4$  o el vértice  $v'_5$  que también son vértices del triángulo  $t'_3$ . Por lo tanto, al tratar de identificar cualquiera de los lados de  $t'_1$  con algún lado de  $t'_4$ , las intersecciones entre  $t'_1$  y  $t'_3$  se alterarán, lo cual no es conveniente pues ya se satisfacía  $|t'_1 \cap t'_3| = 1$ . Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a  $M_T$ . Véase Figura 2.52.

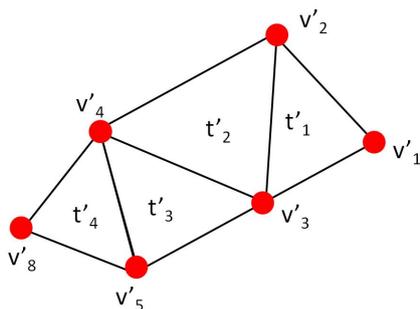


Figura 2.52: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_4v'_5$ .

No hay otra forma de pegar al triángulo  $t'_4$  a la 3 – *semirrueda*.

Podemos concluir que  $R_4$  es la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{R_4}$  y por lo tanto, la única en satisfacer a la matriz  $M_T$ .

### 2.3.3. La 5 - rueda, $R_5$ .

La Figura 2.53 representa a la rueda de cinco triángulos,  $R_5$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{S_5} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

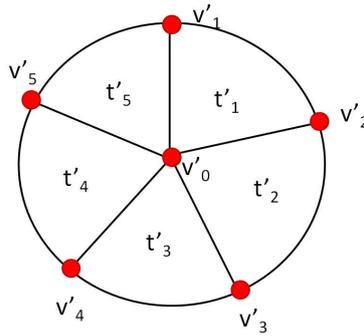


Figura 2.53: La 5 – rueda,  $R_5$ .

$$M_{S_5} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_5}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales, entonces  $T$  consta de cinco triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$ . Notemos que la matriz de intersección de la 4 – *semirrueda*,  $M_{S_4}$  es submatriz de  $M_{R_5}$  y también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$ . En la sección anterior mostramos que las triangulaciones  $S_4$  y la 4 – *arracada* son las únicas tienen por matriz de intersección a  $M_{S_4}$ , por consiguiente, en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$  deben estar configurados como  $S_4$  o como una 4 – *arracada*. Analizaremos cada una de estas configuraciones para tratar de reconstruir a la triangulación  $T$ .

1. Consideremos la etiquetación de vértices de la 4 – *semirrueda* de la Figura 2.54.

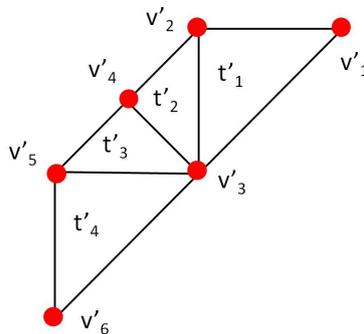


Figura 2.54: La 4 – *semirrueda* etiquetada.

Sabemos  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ , entonces  $t'_4$  y  $t'_5$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_5) = \{v'_7, v'_8, v'_9\}$ .

Debido a la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades de pegar  $t'_5$  a la 4 – *semirrueda*.

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_5$  a la 4 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_3v'_6$  con el lado  $v'_7v'_8$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_4 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_4 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_5| = 2$ , es decir, que  $t'_1$  comparta un vértice más con  $t'_5$ , por la **Observación 2**, el vértice  $v'_9$  es el único vértice que podrá ser identificado con algún vértice de  $t'_1$ . Véase Figura 2.55.

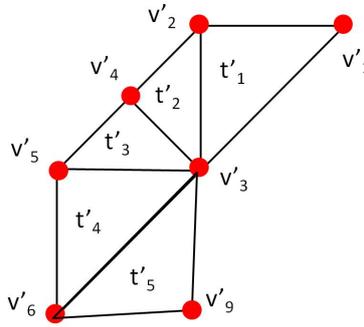


Figura 2.55: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica con el lado  $v'_3v'_6$ .

El vértice  $v'_9$  no se debe identificar con  $v'_3$  puesto que ambos vértices pertenecen a  $t'_5$ , esta identificación haría que este triángulo desapareciera. Tampoco se debe realizar la identificación de vértices  $v'_9$  con  $v'_2$  pues  $|t'_5 \cap t'_2| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Por otro lado, la identificación de vértices  $v'_9$  con  $v'_1$  no afecta a ninguna intersección ya obtenida y además satisface  $|t'_5 \cap t'_1| = 2$ . Por lo tanto esta identificación logra que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  y a  $M_{R_5}$ . De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 5 – *rueda*. Véase Figura 2.56.

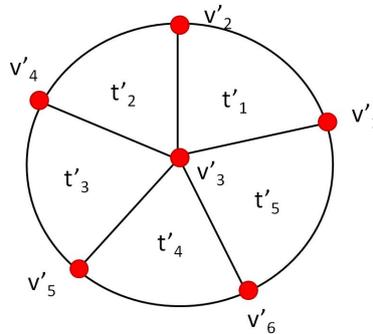


Figura 2.56: El vértice  $v'_9$  se identifica con el vértice  $v'_1$ .

1.2 CASO 2

Pegando  $t'_5$  a la 4 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_5v'_6$  con el lado  $v'_7v'_8$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$  y  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$  y  $t'_3$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_1| = 2$ , esta última nos dice que los triángulos  $t'_1$  y  $t'_5$  deben compartir un lado.

Los lados de  $t'_5$  son  $v'_5v'_6$ ,  $v'_5v'_9$  y  $v'_6v'_9$ , notemos que en cada lado aparece el vértice  $v'_5$  o el vértice  $v'_6$  que también son vértices del triángulo  $t'_4$ . Por lo tanto, al tratar de identificar cualquiera de los lados de  $t'_1$  con algún lado de  $t'_5$ , las intersecciones entre  $t'_1$  y  $t'_4$  se alterarán, lo cual no es conveniente pues ya se satisface  $|t'_1 \cap t'_4| = 1$ . Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a  $M_T$ . Véase Figura 2.57.

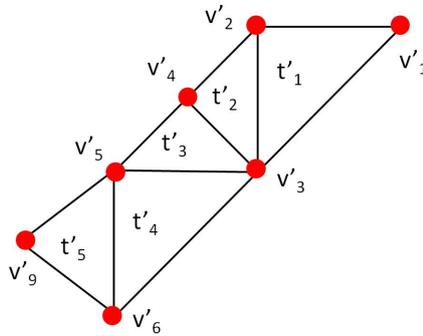


Figura 2.57: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica con el lado  $v'_5v'_6$ .

No hay otra forma de pegar el triángulo  $t'_5$  a la 4 – *semirrueda*.

- Consideremos la etiquetación de vértices de la 4 – *arracada* de la Figura 2.58.

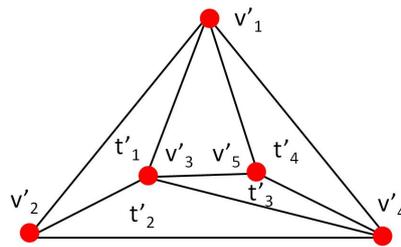


Figura 2.58: La 4 – *arracada* etiquetada.

Sabemos  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ , entonces  $t'_4$  y  $t'_5$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_5) = \{v'_6, v'_7, v'_8\}$ .

Con la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades de pegar  $t'_5$  a la 4 – *arracada*.

## 2.1 CASO 1

Pegando el triángulo  $t'_5$  a la 4-*arracada* identificando el lado  $v'_6v'_7$  con el lado  $v'_1v'_5$  se obtienen las siguientes intersecciones:  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que se cumpla  $|t'_5 \cap t'_1| = 2$  y  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$ , esta última nos dice que los triángulos  $t'_1$  y  $t'_5$  deben compartir un lado. Véase Figura 2.59.

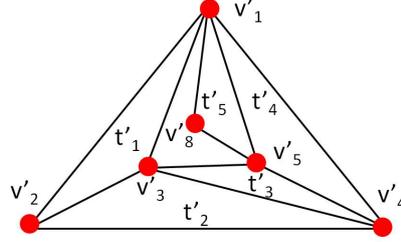


Figura 2.59: El lado  $v'_1v'_5$  se identifica con el lado  $v'_6v'_7$ .

Notemos que  $t'_1$  y  $t'_5$  ya comparten el vértice  $v'_1$ , entonces solo hay que lograr que  $t'_1$  y  $t'_5$  compartan un vértice más y además que  $t'_5$  comparta un vértice con  $t'_2$  para satisfacer a la matriz  $M_T$ .

Por la **Observación 1**,  $v'_8$  el único vértice de  $t'_5$  que podemos intentar identificar con los vértices de  $t'_1$ , además notemos que  $v'_2$  y  $v'_3$  son los únicos vértices que comparten  $t'_1$  y  $t'_2$ , por lo tanto solo intentaremos hacer identificar a  $v'_8$  con estos vértices. La identificación  $v'_8$  con  $v'_3$  no se debe realizar, pues de hacerse, se obtiene  $|t'_5 \cap t'_3| = 2$  pero la matriz  $M_T$  señala que esta intersección debe ser 1. Por otra parte, la identificación  $v'_8$  con  $v'_2$  logra satisfacer las intersecciones que faltaban sin alterar las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$ . Por lo tanto esta identificación logra que esta nueva triangulación  $T$  satisfaga a  $M_T$  y por lo tanto a  $M_{R_5}$ . Esta triangulación resulta ser la 5-*Moebius* mencionada al inicio de este capítulo. Véase Figura 2.60.

## 2.2 CASO 2

Pegando  $t'_5$  a la 4-*arracada* identificando el lado  $v'_6v'_7$  con el lado  $v'_1v'_4$ , se tienen las siguientes intersecciones:  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$  no se alteran.

Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $t'_1$  y  $t'_5$  compartan un vértice más, pues  $M_T$  indica  $|t'_5 \cap t'_1| = 2$ . Por la **Observación 1**,  $v'_8$  es el único vértice que podemos intentar identificar con los vértices de  $t'_1$ . La identificación  $v'_8$  con  $v'_1$  no se debe realizar puesto que el vértice  $v'_1$  también es vértice de  $t'_5$ . La identificación  $v'_8$  con  $v'_3$  tiene como consecuencia  $|t'_5 \cap t'_2| = 2$  y esta intersección debe ser 1. Por último la

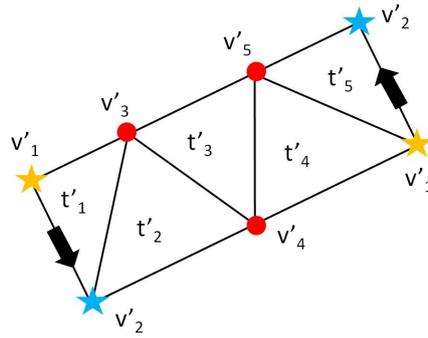


Figura 2.60: La 5 – *Moebius*.

identificación  $v'_8$  con  $v'_2$  tiene como consecuencia  $|t'_5 \cap t'_2| = 2$  y como ya señalamos, esta intersección debe ser 1. Por lo tanto no hay forma de que esta nueva triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.61.

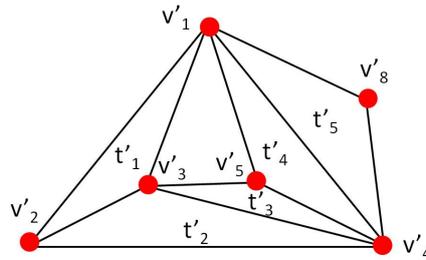


Figura 2.61: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_1v'_4$ .

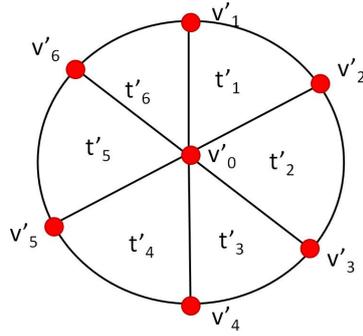
No hay otra forma de pegar  $t'_5$  a la 4 – *arracada*.

Podemos concluir que  $R_5$  y la 5 – *Moebius* son las únicas triangulaciones que satisfacen a la matriz  $M_{R_5}$  y por lo tanto son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_T$ .

### 2.3.4. La 6 - rueda, $R_6$ .

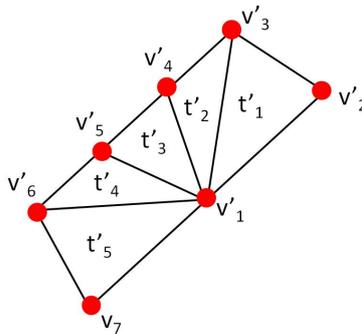
La Figura 2.62 representa a la rueda de seis triángulos,  $R_6$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{R_6} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - & - \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Figura 2.62: La 6 – rueda,  $R_6$ .

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_6}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales, entonces  $T$  consta de seis triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$ . Hagamos notar que la matriz de intersección de la 5 – *semirrueda*,  $M_{S_5}$  es submatriz de  $M_{R_6}$  y también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$ . En la sección anterior mostramos que las triangulaciones  $S_5$  y la 5 – *arracda* son las únicas que tienen a la matriz  $M_{S_5}$  como matriz de intersección, por consiguiente, en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  deben estar configurados como  $S_5$  o como una 5 – *arracda*. Analizaremos cada una de estas configuraciones para tratar de reconstruir a la triangulación  $T$ .

1. Consideremos la etiquetación de vértices de la 5 – *semirrueda* de la Figura 2.63.

Figura 2.63: La 5 – *semirrueda* etiquetada.

Sabemos  $|t'_5 \cap t'_6| = 2$ , entonces  $t'_5$  y  $t'_6$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_6) = \{v'_8, v'_9, v'_{10}\}$ . La **Observación 1** implica que solo hay dos posibilidades de pegado de  $t'_6$  a la 5 – *semirrueda*.

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_6$  a la 5 – *semirrueda* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_1v'_7$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$   $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,

$|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_6| = 2$ , es decir, que  $t'_1$  comparta un vértice más con  $t'_6$ , por la **Observación 2**, el vértice  $v'_{10}$  es el único vértice que podrá ser identificado con algún vértice de  $t'_1$ . Véase Figura 2.64.

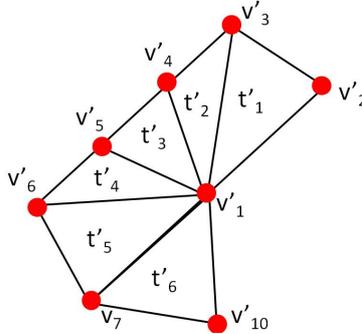


Figura 2.64: El lado  $v'_8v'_9$  se identifica con el lado  $v'_1v'_7$ .

El vértice  $v'_{10}$  no se debe identificar con  $v'_1$  puesto que ambos vértices pertenecen a  $t'_5$ , esta identificación provocaría que este triángulo desapareciera. Tampoco se debe realizar la identificación de vértices  $v'_{10}$  con  $v'_3$  pues los triángulos  $|t'_1 \cap t'_6| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Por otro lado, la identificación de vértices  $v'_{10}$  con  $v'_2$  no afecta a ninguna intersección ya obtenida y además satisface  $|t'_6 \cap t'_1| = 2$ . Por lo tanto esta identificación logra que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  y a  $M_{R_6}$ . De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 6 – rueda. Véase Figura 2.65.

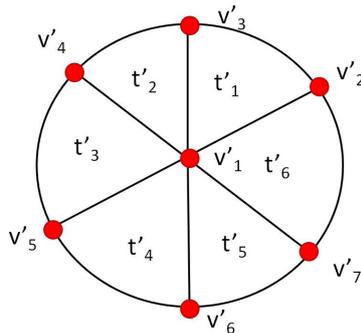


Figura 2.65: El vértice  $v'_{10}$  se identifica con el vértice  $v'_2$ .

### 1.2 CASO 2

Pegando  $t'_6$  a la 5 – semirrueda identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_6v'_7$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$  y  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,

$|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 2$ , esta última nos dice que los triángulos  $t'_1$  y  $t'_6$  deben compartir un lado.

Los lados de  $t'_6$  son  $v'_6v'_7$ ,  $v'_6v'_{10}$  y  $v'_7v'_{10}$ , notemos que en cada lado aparece el vértice  $v'_7$  o el vértice  $v'_6$  que también son vértices del triángulo  $t'_5$ . Por lo tanto, al tratar de identificar cualquiera de los lados de  $t'_1$  con algún lado de  $t'_6$ , las intersecciones entre  $t'_1$  y  $t'_5$  se alterarán, lo cual no es conveniente pues ya se satisface  $|t'_1 \cap t'_5| = 1$ . Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a  $M_T$ . Véase Figura 2.66.

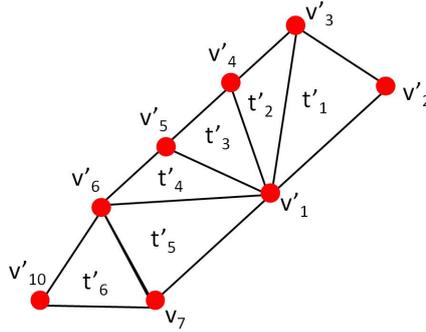


Figura 2.66: El lado  $v'_6v'_7$  se identifica con el lado  $v'_8v'_9$ .

No hay otra forma de pegar a  $t'_6$  a la 5 – *semirrueda*.

2. Consideremos la etiquetación de vértices de la 5 – *arracada* de la Figura 2.67.

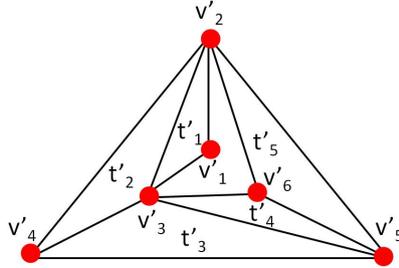


Figura 2.67: La 5 – *arracada* etiquetada.

Sabemos  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ , entonces  $t'_6$  y  $t'_5$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_6) = \{v'_7, v'_8, v'_9\}$ . A partir de la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades de pegar  $t'_6$  a la 5 – *arracada*.

### 2.1 CASO 1

Pegando  $t'_6$  a la 5 – *arracada* identificando el lado  $v'_7v'_8$  con el lado  $v'_2v'_6$ , se tienen las siguientes intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3$ ,

$t'_4$  y  $t'_5$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ . Notemos que  $v'_3$  es el único vértice que comparten  $t'_1$  y  $t'_3$ . Por la **Observación 1**,  $v'_9$  es el único vértice que podemos intentar identificar con  $v'_3$ . La identificación  $v'_9$  con  $v'_3$  no se debe realizar pues al hacerla, los triángulos  $|t'_6 \cap t'_2| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.68.

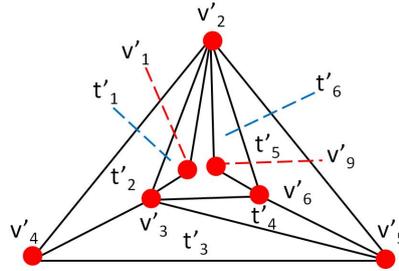


Figura 2.68: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica  $v'_2v'_4$ .

## 2.2 CASO 2

Pegando  $t'_6$  a la 5-*arracada* identificando el lado  $v'_7v'_8$  con el lado  $v'_2v'_5$ , se tienen las siguientes intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$  además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ ,  $t'_4$  y  $t'_5$  no se alteran. Véase Figura 2.69.

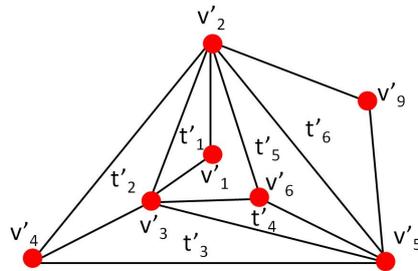


Figura 2.69: El lado  $v'_7v'_8$  se identifica  $v'_2v'_5$ .

Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que los triángulos  $t'_6$  y  $t'_1$  compartan un vértice más. Por la **Observación 1**,  $v'_9$  es el único vértice que podemos intentar identificar con los vértices de  $t'_1$ . La identificación de  $v'_9$  con  $v'_2$  no se debe realizar pues ambos vértices pertenecen a  $t'_6$ . La identificación  $v'_9$  con  $v'_3$  no se debe realizar pues  $|t'_2 \cap t'_6| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Por otro lado la identificación  $v'_9$  con  $v'_1$  logra cumplir la instrucción  $|t'_6 \cap t'_1| = 2$  sin alterar las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ ,  $t'_4$  y  $t'_5$ . Por lo tanto esta identificación

logra que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  y a  $M_{R_6}$ . Esta nueva triangulación es la 6 – *Moebius* mencionada en el inicio de este capítulo. Véase Figura 2.70.

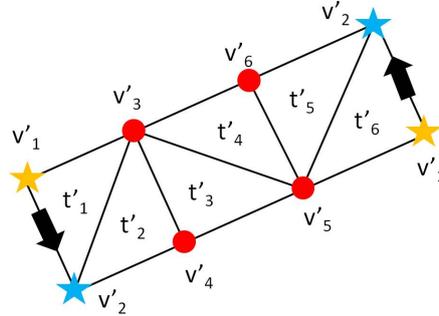


Figura 2.70: La 6 – *Moebius*.

No hay otra forma de pegar el triángulo  $t'_6$  a la 5 – *arracada*.

Podemos concluir que  $R_6$  y la 6 – *Moebius* son las únicas triangulaciones que satisfacen a la matriz  $M_{R_6}$  y por lo tanto las únicas que satisfacen a la matriz  $M_T$ .

### 2.3.5. La 7 - rueda, $R_7$ .

La Figura 2.71 representa a la rueda de siete triángulos  $S_7$ , que es la siguiente triangulación a estudiar y cuya matriz de intersección es:

$$M_{R_7} = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - \\ 2 & - & - & - & - & - & - \\ 1 & 2 & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 2 & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & - & - \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Supongamos que existe una triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_7}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales, entonces  $T$  consta de siete triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5, t'_6$  y  $t'_7$ . Hagamos notar que la matriz de intersección de la 6 – *semirrueda*,  $M_{S_6}$  es submatriz de  $M_{R_7}$ , y también es submatriz de  $M_T$ , de hecho es la submatriz que corresponde a los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$ . En la sección anterior mostramos que las triangulaciones  $S_6$  y la 6 – *arracada* son las únicas que satisfacen a la matriz  $M_{S_6}$ , por consiguiente, en la triangulación  $T$ , los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$  deben estar configurados como  $S_6$  o como una 6 – *arracada*. Analizaremos cada una de estas configuraciones para tratar de reconstruir a la triangulación  $T$ .

1. Consideremos la etiquetación de vértices de la 6 – *semirrueda* de la Figura 2.72.

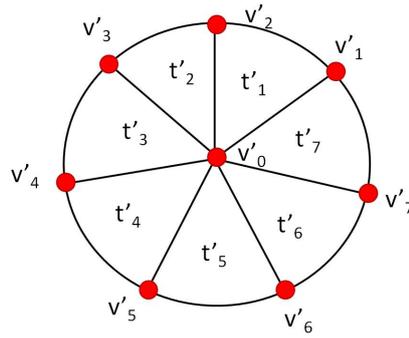


Figura 2.71: La 7 – rueda,  $R_7$ .

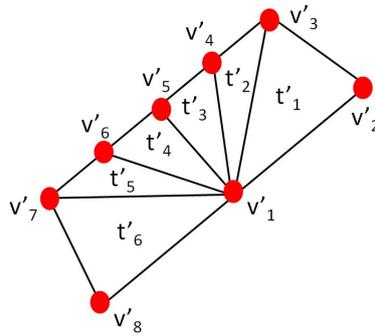


Figura 2.72: La 6 – semirrueda etiquetada.

Sabemos  $|t'_6 \cap t'_7| = 2$ , entonces  $t'_6$  y  $t'_7$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_7) = \{v'_9, v'_{10}, v'_{11}\}$ . A partir de la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades para pegar  $t'_7$  a la 6 – semirrueda.

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_7$  a la 6 – semirrueda identificando el lado  $v'_9v'_{10}$  con el lado  $v'_1v'_8$ . Entonces se obtienen las intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ ,  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ ,  $t'_4$ ,  $t'_5$  y  $t'_6$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga  $M_T$  falta que  $|t'_1 \cap t'_7| = 2$ , es decir, que  $t'_1$  comparta un vértice más con  $t'_7$ , por la **Observación 2**, el vértice  $v'_{11}$  es el único vértice que podrá ser identificado con algún vértice de  $t'_1$ . Véase Figura 2.73.

El vértice  $v'_{11}$  no se debe identificar con  $v'_1$  puesto que ambos vértices pertenecen a  $t'_7$ , esta identificación haría que este triángulo desapareciera. Tampoco se debe realizar la identificación de vértices  $v'_{11}$  con  $v'_3$  pues los triángulos  $|t'_2 \cap t'_7| = 2$  pero esta intersección debe ser 1, según  $M_T$ . Por otro lado, la identificación de vértices  $v'_{11}$  con  $v'_2$  no afecta a ninguna intersección ya obtenida y además satisface  $|t'_7 \cap t'_1| = 2$ . Por lo tanto esta identificación logra que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  y a  $M_{R_6}$ . De hecho, esta nueva triangulación  $T$  es una 7 – rueda. Véase Figura

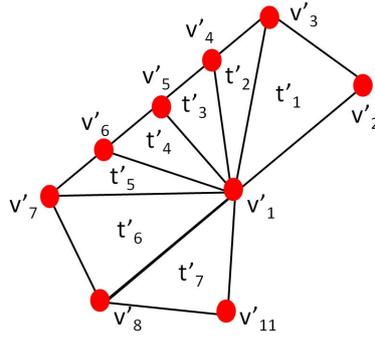


Figura 2.73: El lado  $v'_9v'_{10}$  se identifica con el lado  $v'_1v'_8$ .

2.74.

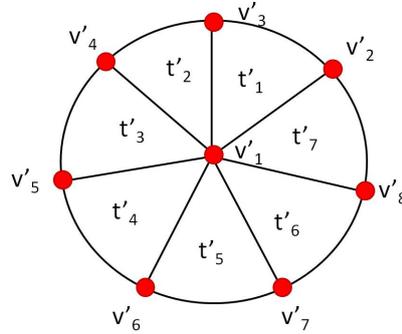


Figura 2.74: El vértice  $v'_{10}$  se identifica con el vértice  $v'_2$ .

## 1.2 CASO 2

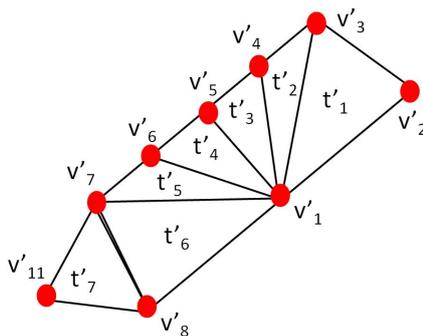
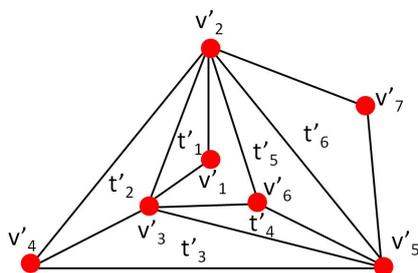
Pegando  $t'_7$  a la 6 – *semirrueda* por medio de la identificación del lado  $v'_{10}v'_{11}$  con el lado  $v'_7v'_8$ , se obtienen las intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$  y  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  no se alteran. Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_1| = 2$ , esta última nos dice que los triángulos  $t'_1$  y  $t'_7$  deben compartir un lado.

Los lados de  $t'_7$  son  $v'_7v'_8$ ,  $v'_7v'_{11}$  y  $v'_8v'_{11}$ , notemos que en cada lado aparece el vértice  $v'_7$  o el vértice  $v'_8$  que también son vértices del triángulo  $t'_6$ . Por lo tanto, al tratar de identificar cualquiera de los lados de  $t'_1$  con algún lado de  $t'_7$ , las intersecciones entre  $t'_1$  y  $t'_6$  se alterarán, lo cual no es conveniente pues ya se satisface  $|t'_1 \cap t'_6| = 1$ . Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a  $M_T$ . Véase Figura 2.75.

No hay otra forma de pegar a  $t'_7$  a la 6 – *semirrueda*.

2. Consideremos la etiquetación de vértices de la 6 – *arracada* de la Figura 2.76.

Sabemos  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ , entonces  $t'_7$  y  $t'_6$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_7) = \{v'_8, v'_9, v'_{10}\}$ . A partir de la **Observación 1** sabemos que solo hay dos posibilidades para pegar  $t'_7$  a la 6 – *arracada*.

Figura 2.75: El lado  $v'_9v'_{10}$  se identifica con el lado  $v'_7v'_8$ .Figura 2.76: La 6 – *arracada* etiquetada.

### 2.1 CASO 1

Pegando  $t'_7$  a la 6 – *arracada* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_2v'_7$ , se tienen las siguientes intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ ,  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_1| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ ,  $t'_4$ ,  $t'_5$  y  $t'_6$  no se alteran.

Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_1| = 2$ , esta última indica que  $t'_1$  y  $t'_7$  deben compartir un vértice más. Notemos que  $v'_3$  es el único vértice que comparten  $t'_1$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$ . Por la **Observación 1**,  $v'_{10}$  es el único vértice que podemos intentar identificar con  $v'_3$ . La identificación  $v'_{10}$  con  $v'_3$  no se debe realizar pues el vértice  $v'_3$  también es vértice de  $t'_2$  y al hacer esta identificación los triángulos  $t'_7$  y  $t'_2$  comparten el lado  $v'_2v'_3$ , entonces  $|t'_7 \cap t'_2| = 2$ , pero  $M_T$  señala que esta intersección debe ser 1. Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.77.

### 2.2 CASO 2

Pegando  $t'_7$  a la 6 – *arracada* identificando el lado  $v'_8v'_9$  con el lado  $v'_7v'_5$ , se tienen las siguientes intersecciones:  $|t'_7 \cap t'_6| = 2$ ,  $|t'_7 \cap t'_5| = 1$ ,  $|t'_7 \cap t'_4| = 1$  y  $|t'_7 \cap t'_3| = 1$ , además las intersecciones entre los triángulos  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ ,  $t'_4$ ,  $t'_5$  y  $t'_6$  no se alteran.

Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$  falta que  $|t'_7 \cap t'_2| = 1$

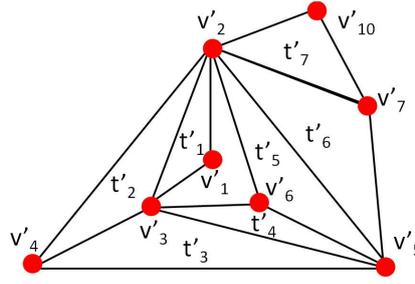


Figura 2.77: El lado  $v'_8v'_9$  se identifica  $v'_2v'_7$ .

y  $|t'_7 \cap t'_1| = 2$ , es decir,  $t'_1$  y  $t'_7$  deben compartir un lado y además  $t'_7$  y  $t'_2$  deben compartir un vértice. Cualquier identificación de lados de  $t'_1$  con cualquier lado de  $t'_7$  altera las intersecciones de la 6 – *arracada* que ya satisfacían a las señaladas en  $M_T$ . Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a la matriz  $M_T$ . Véase Figura 2.78.

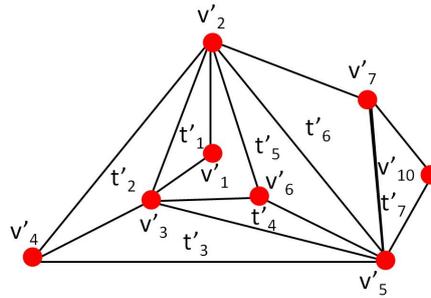


Figura 2.78: El lado  $v'_8v'_9$  se identifica  $v'_5v'_7$ .

No hay otra forma de pegar el triángulo  $t'_7$  a la 6 – *arracada*.

Podemos concluir que  $R_7$  es la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{R_7}$  y por lo tanto la única que satisface a la matriz  $M_T$ .

### 2.3.6. Ruedas con más de 7 triángulos.

Para terminar de probar el **Lema 2**, falta mostrar que si  $T$  es una triangulación tal que  $M_T = M_{R_n}$  para  $n \geq 7$  entonces  $T$  es una  $n$  – *semirrueda*.

A consecuencia de el Lema 1, para todo  $l \geq 7$ , la única triangulación que satisface tener como matriz de intersección a  $M_{S_l}$  es  $S_l$ .

Sea  $k \geq 8$ , supongamos que existe un triangulación  $T$  con matriz de intersección  $M_T$ , tal que  $M_T = M_{R_k}$ . Buscamos construir la triangulación  $T$ . Como ambas matrices son iguales,  $T$  consta  $k$  triángulos.

Al igual que en las subsecciones anteriores, la matriz de intersección de la  $(k - 1)$  – *semirrueda*,  $M_{S_{k-1}}$ , es submatriz de  $M_{R_k}$  y por lo tanto también es submatriz de

$M_T$ , de hecho es la submatriz asociada a los primeros  $k - 1$  triángulos de  $T$ , así que en la triangulación  $T$  los primeros  $k - 1$  triángulos deberán tener la configuración de  $S_{k-1}$ .

Trataremos de completar la triangulación  $T$  añadiendo un nuevo triángulo,  $t'_k$  a  $S_{k-1}$ .

1. Consideraremos la siguiente etiquetación de la  $(k - 1) - semirrueda$ , tal como aparece en la Figura 2.79.

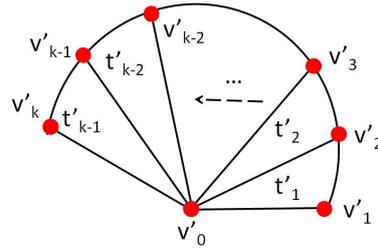


Figura 2.79: La  $(k - 1) - semirrueda$  etiquetada.

Sabemos que  $|t'_{k-1} \cap t'_k| = 2$ , pues en  $S_k$  los triángulos  $t_{k-1}$  y  $t_k$  son contiguos, entonces  $t'_{k-1}$  y  $t'_k$  comparten alguno de sus lados. Consideremos  $V(t'_k) = \{v'_{k+1}, v'_{k+2}, v'_{k+3}\}$ .

### 1.1 CASO 1

Pegando  $t'_k$  a la  $(k - 1) - semirrueda$  identificando el lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  con el lado  $v'_0v'_k$  se obtienen las intersecciones:  $|t'_k \cap t'_{k-1}| = 2$  y  $|t'_k \cap t'_m| = 1$  para  $m = 1, 2, \dots, k - 2$ . Véase Figura 2.80.

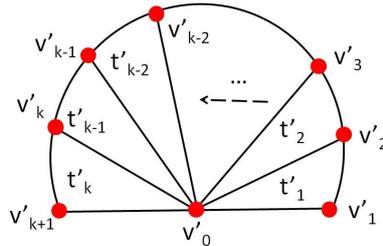


Figura 2.80: El lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  se identifica con el lado  $v'_0v'_k$ .

Para que esta nueva triangulación satisfaga a  $M_T$ , falta que  $|t'_k \cap t'_1| = 2$ , es decir, que  $t'_k$  y  $t'_1$  compartan un vértice más. A partir de la **Observación 1** sabemos que  $v'_{k+1}$  es el único vértice que podemos intentar identificar con los vértices de  $t'_1$ . La identificación del vértice  $v'_{k+1}$  con el vértice  $v'_0$  no debe suceder pues ambos vértices pertenecen a  $t'_k$ . La identificación del vértice  $v'_{k+1}$  con el vértice  $v'_2$  no se debe realizar, de lo contrario, los triángulos  $|t'_k \cap t'_2| = 2$  pero esta intersección debe ser 1. Por otra parte, la identificación del vértice  $t'_{k+1}$  con el vértice  $v'_1$  satisface la instrucción

$|t'_1 \cap t'_{7+k}| = 2$  y no altera ninguna intersección previamente obtenida. Al realizar esta identificación hemos construido una  $k - \text{semirrueda}$ . Véase la Figura 2.81.

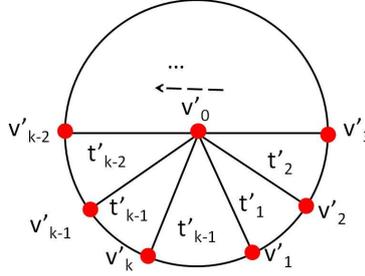


Figura 2.81: El vértice  $v'_{k+1}$  se identifica con el vértice  $v'_1$ .

1.2 CASO 2

Pegando  $t'_k$  a la  $k - 1 - \text{semirrueda}$  identificando los lados  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  y  $v'_k v'_{k-1}$  se tienen las intersecciones:  $|t'_k \cap t'_{k-1}| = 2$  y  $|t'_k \cap t'_{k-2}| = 1$ .

Para que esta triangulación satisfaga a la matriz  $M_T$  falta que  $|t'_k \cap t'_m| = 1$  si  $1 < m < k - 3$  y además que  $|t'_k \cap t'_1| = 2$ , esta última nos dice que  $t'_1$  y  $t'_k$  deben compartir un lado. Notemos que los lados de  $t'_k$  son  $v'_{k-1}v'_k$ ,  $v'_{k-1}v'_{k+1}$  y  $v'_k v'_{k+1}$ , entonces en cualquier lado de  $t'_k$  aparece  $v'_k$  o  $v'_{k-1}$ , que a su vez también son vértices de  $t'_{k-1}$ . Por lo tanto al tratar de identificar cualquier lado de  $t'_1$  con algún lado de  $t'_k$ , las intersecciones entre  $t'_1$  y  $t'_{k-1}$  se alterarán. Por lo tanto esta nueva triangulación no puede satisfacer a  $M_T$ . Véase Figura 2.82.

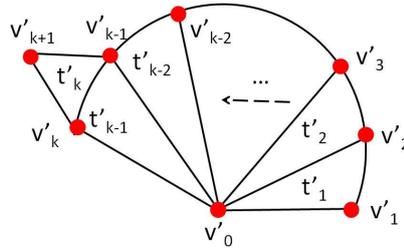


Figura 2.82: El lado  $v'_{k+2}v'_{k+3}$  se identifica con el lado  $v'_k v'_{k-1}$ .

No hay otra manera de pegar  $t'_k$  a la  $k - 1 - \text{semirrueda}$ . Por lo tanto  $R_k$  es la única triangulación que satisface a la matriz  $M_{R_k}$ , con  $k \geq 8$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Caracterización Combinatoria del Disco.

El objetivo de este capítulo es mostrar que las triangulaciones del disco están caracterizadas por sus matrices de intersección. Esto quiere decir que dada la triangulación  $T$  de un disco, no existe otra triangulación que tenga por matriz de intersección a  $M_T$ , salvo isomorfismos. La prueba para esta afirmación consiste en dar dos superficies homeomorfas al disco, ambas con triangulaciones finitas tales que sus matrices de intersección sean iguales, construir un isomorfismo entre ellas y mostrar que son triangulaciones combinatoriamente equivalentes.

**Notación 1** Sea  $T$  la triangulación de una superficie  $\mathbb{S}$ , denotaremos por  $\Delta(T)$  al conjunto de todos los triángulos que constituyen a  $T$  y como  $V(T)$  al conjunto de todos los vértices de los triángulos en  $\Delta(T)$ .

**Definición 17** Dada  $T$  una triangulación y  $v \in V(T)$ , llamaremos vecindad del vértice  $v$ ,  $N(v)$ , al conjunto de todos los triángulos en  $\Delta(T)$  que tengan al vértice  $v$  como alguno de sus vértices, además diremos que  $v$  es el centro de  $N(v)$  y lo denotaremos como  $\cap N(v)$ .

**Teorema 1** Sean  $D$  y  $D'$  superficies homeomorfas a un disco, ambas finitamente trianguladas por  $T$  y  $T'$  y con matrices de intersección  $M_T$  y  $M_{T'}$  respectivamente. Si  $M_T = M_{T'}$  entonces  $T$  y  $T'$  son triangulaciones isomorfas. Es decir, las triangulaciones del disco se caracterizan por su matriz de intersección.

**Demostración 1** Recordemos que para  $v \in V(T)$ ,  $N(v)$  es una rueda si  $v$  está en el interior de  $D$ , en cambio  $N(v)$  es una semirrueda si  $v$  está en la frontera de  $D$ . Al considerar un disco  $D$  con frontera y triangulado por una triangulación  $T$  debemos notar que la frontera de dicho disco es una curva cerrada, la cual por el Teorema de la Curva de Jordan, separa al plano en dos secciones, el interior y el exterior del disco [Dugundji, 1966], por lo tanto, cualquier vértice y arista solo puede estar en la parte interior o en la frontera del disco, jamás es la parte exterior de este, es decir, ningún triángulo puede estar en el exterior del disco, por consiguiente cualquier ciclo de aristas de la triangulación  $T$  está contenido en el interior del disco unión su frontera. Esto implica que ningún tramo de frontera del disco puede ser rodeada por un ciclo de aristas de  $T$ . Véase Figura 3.1.

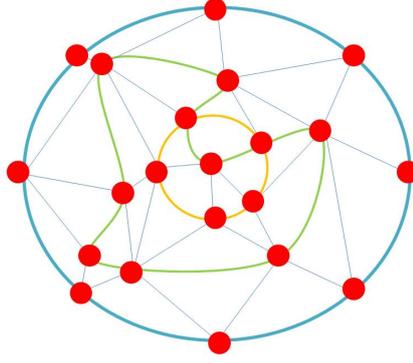


Figura 3.1: Triangulación de un disco y algunos ciclos en su interior.

Dada la hipótesis  $M_T = M_{T'}$ , tenemos una función biyectiva  $\varphi : \Delta(T) \rightarrow \Delta(T')$  dada por  $\varphi(t_i) = t'_i$ , para todo  $t_i \in \Delta(T)$ , tal que  $|t_i \cap t_j| = |\varphi(t_i) \cap \varphi(t_j)|$ , es decir,  $|t_i \cap t_j| = |t'_i \cap t'_j|$  para todo  $t_i, t_j \in \Delta(T)$ , además podemos definir  $\varphi^{-1}$ , la función inversa de  $\varphi$  como  $\varphi^{-1}(t'_i) = t_i$  ambas funciones se obtienen de la definición de  $M_T$  y  $M_{T'}$ .

Dado  $v \in V(T)$  y al ser  $\varphi$  una función de los triángulos de  $T$  a los triángulos de  $T'$ , entenderemos por  $\varphi[N(v)]$  al conjunto de todos los triángulos en  $T'$  que son imagen de los triángulos de  $N(v)$ . Es decir,  $\varphi[N(v)] := \{t'_i \in \Delta(T') \mid \varphi^{-1}(t'_i) \in N(v)\}$ .

Obsérvese que si  $v \in V(T)$  está en el interior de  $D$ ,  $N(v)$  es una rueda, usando el **Lema de las Ruedas**, sabemos que  $\varphi[N(v)]$  es también una rueda si el número de triángulos que conforman a  $N(v)$  son distintos de 5 o 6, pero si  $N(v)$  posee 5 o 6 triángulos,  $\varphi[N(v)]$  puede ser una  $n$ -rueda o una  $n$ -Moebius, según el caso.

De igual manera si es el caso que  $N(v)$  es una semirrueda, usando el **Lema de las Semirruedas**, sabemos que  $\varphi[N(v)]$  será una semirrueda si el número de triángulos que constituyen a  $N(v)$  es distinto de 4, 5 o 6. De otro modo  $\varphi[N(v)]$  puede ser una  $n$ -semirrueda o una  $n$ -arracada según sea el caso.

A partir de estas observaciones, la prueba del teorema consistirá en analizar los posibles casos que pueden aparecer en la triangulación  $T'$  de la superficie  $D'$ .

### 1. CASO 1

Supongamos que para todo vértice  $v \in V(T)$ ,  $\varphi[N(v)]$  es una rueda si  $N(v)$  es una rueda y  $\varphi[N(v)]$  es una semirrueda si  $N(v)$  es una semirrueda. Dado que para cualquier  $v \in V(T)$  se tiene que  $\cap N(v)$  es precisamente  $v$ , entonces podemos extender a la función  $\varphi$  como una nueva función  $\psi : V(T) \rightarrow V(T')$  con regla de correspondencia  $\psi(v) = \cap \varphi[N(v)]$ .

Veamos que la función  $\psi$  es biyectiva. Si  $u, v \in V(T)$  y son tales que  $\psi(u) = \psi(v)$  entonces,  $\cap \varphi[N(u)] = \cap \varphi[N(v)]$ , entonces si el centro de  $\varphi[N(u)]$  es el mismo que el centro de  $\varphi[N(v)]$  entonces  $\varphi[N(u)] = \varphi[N(v)]$  y como  $\varphi$  es biyectiva y manda ruedas en ruedas y semirruedas en semirruedas tenemos que  $N(u) = N(v)$ , por lo tanto  $u$  y  $v$  deben ser el mismo vértice, por lo tanto  $\psi$  es inyectiva. Por otro lado sea  $w' \in V(T')$ , consideremos  $t'_1, t'_2, \dots, t'_j$  todos los triángulos que conforman a  $N(w')$ , como la función  $\varphi$  es biyectiva y manda

ruedas en ruedas y semirruedas en semirruedas los triángulos  $t_1, t_2, \dots, t_j$  forman una rueda si  $N(w')$  es una rueda o forman una semirrueda si  $N(w')$  es una semirrueda, cual sea el caso, existe  $v \in V(T)$  tal que  $v$  es el centro de  $t_1, t_2, \dots, t_j$ , por lo tanto  $\psi(v) = \cap \varphi[N(v)] = \cap N(w') = w'$ , por lo tanto  $\psi$  es suprayectiva y por lo tanto es biyectiva. Definimos  $\psi^{-1}$ , la función inversa de  $\psi$  como  $\psi^{-1}(v') = \cap \varphi^{-1}[N(v')]$ .

Ahora, sea  $uv$  una arista de  $T$ , entonces existe  $t \in \Delta(T)$  tal que  $uv$  es un lado de  $t$ , así  $t \in N(u)$  y  $t \in N(v)$ , como  $\psi$  es inyectiva, tenemos que  $\psi(u) \neq \psi(v)$ , por lo cual  $N(\psi(u)) \neq N(\psi(v))$ , entonces  $t' \in N(\psi(u))$  y  $t' \in N(\psi(v))$ , por lo tanto  $\psi(u)\psi(v)$  es un lado de  $t'$  y por lo tanto  $\psi(u)\psi(v)$  es una arista de  $T'$ .

Después podemos considerar un triángulo  $t \in \Delta(T)$  cuyos vértices sean  $u, v$  y  $w$  y por lo tanto sus aristas  $uv, vw$  y  $wu$ , analizamos cada arista como en el párrafo anterior y obtenemos que  $\psi(u)\psi(v), \psi(v)\psi(w)$  y  $\psi(w)\psi(u)$  son los lados de  $t'$  y por lo tanto son aristas de  $T'$ .

Con los resultados obtenidos, podemos extender el dominio y contradominio de  $\psi$ , ahora la función  $\psi$  irá de las caras de  $T$  a las caras de  $T'$  con la siguiente regla de correspondencia:

$$\psi(c) = \begin{cases} \text{El vértice } \psi(c) \text{ si } c \text{ es un vértice} \\ \text{La arista } \psi(u)\psi(v) \text{ si } c \text{ es la arista } uv \\ \text{El triángulo de vértices } \psi(u)\psi(v)\psi(w) \text{ si } c \text{ es el triángulo } uvw \end{cases}$$

La función  $\psi$  redefinida sigue siendo biyectiva y posee función inversa  $\psi^{-1}$ . Lo que hemos logrado hacer con la función  $\psi$  no solo es dar una biyección entre las caras de ambas triangulaciones sino que la función  $\psi$  es un mapeo simplicial por lo tanto la función  $\psi$  es un isomorfismo entre  $T$  y  $T'$ , es decir, las triangulaciones son combinatoriamente equivalentes.

La Figura 3.2 representa dos triangulaciones de discos tales que  $\varphi[N(v)]$  es una rueda si  $N(v)$  es una rueda y  $\varphi[N(n)]$  es una semirrueda si  $N(v)$  es una semirrueda y muestra la acción de la función  $\psi$  mediante símbolos distintos.

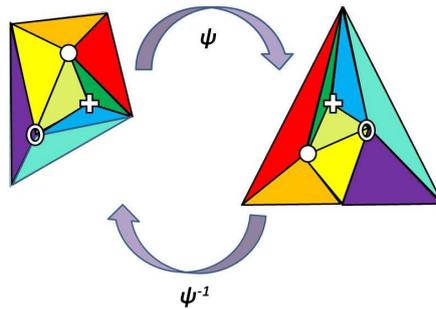


Figura 3.2: La función  $\psi$  mapea vértices en vértices, lados en lados y triángulos en triángulos.

Ahora procederemos a analizar los casos en los que exista un vértice en  $v \in T$  cuya vecindad sea una semirrueda pero  $\varphi[N(v)]$  sea una arracada y también los casos en que  $N(v)$  sea una rueda pero  $\varphi[N(v)]$  es una banda de Moebius.

## 2. CASO 2

Supongamos que existe  $v_0 \in V(T)$  tal que  $N(v_0)$  es una 4 – semirrueda pero  $\varphi[N(v_0)]$  corresponde a una 4 – arracada.

Digamos que  $N(v_0)$  está constituido por los triángulos:  $t_1, t_2, t_3$  y  $t_4$  con conjuntos de vértices  $V(t_1) = \{v_0, v_1, v_2\}$ ,  $V(t_2) = \{v_0, v_2, v_3\}$ ,  $V(t_3) = \{v_0, v_3, v_4\}$  y  $V(t_4) = \{v_0, v_4, v_5\}$ , y digamos que  $\varphi[N(v_0)]$  está conformado por los triángulos:  $t'_1, t'_2, t'_3$  y  $t'_4$  con conjuntos de vértices  $V(t'_1) = \{v'_0, v'_1, v'_2\}$ ,  $V(t'_2) = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ ,  $V(t'_3) = \{v'_2, v'_3, v'_4\}$  y  $V(t'_4) = \{v'_0, v'_3, v'_4\}$ .

Antes de continuar debemos señalar detalles importantes sobre el encaje de la 4 – arracada en el disco  $D'$ , pues esta puede ser encajada en el disco de dos formas distintas como muestra la Figura 3.3.

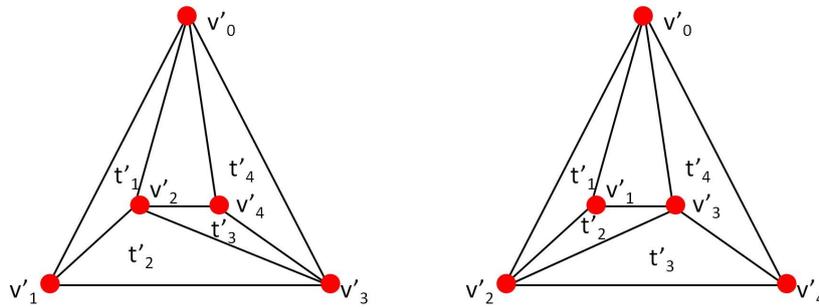


Figura 3.3: Primer encaje de la 4 – arracada (izquierda). Segundo encaje (derecha).

Uno de los teoremas de Whitney referente a gráficas planas nos dice que dos encajes planos de una gráfica 3 – conexa son equivalentes, esto es que ambas gráfica tienen las mismas regiones. La 4 – arracada vista como gráfica plana es 3 – conexa.

Dado que  $v_0$  está en la frontera de  $D$ , pues  $N(v_0)$  es una semirrueda, sucede que el triángulo  $t_1$  tiene el lado  $v_0v_1$  en la frontera de  $D$ , de mismo modo el triángulo  $t_4$  tiene el lado  $v_0v_5$  en la frontera de  $D$ , entonces en  $T'$  los triángulos  $t'_1$  y  $t'_4$  deben tener uno de sus lados en la frontera de  $D'$  puesto que  $M_T = M_{T'}$ . Véase Figura 3.4.

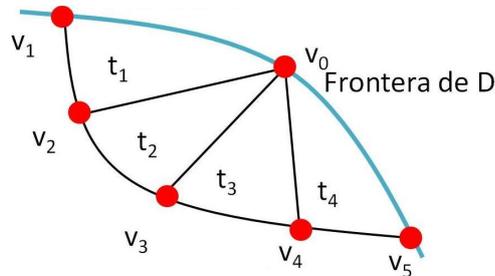


Figura 3.4:  $N(v_0)$  en  $D$ .

Notemos que en el triángulo  $t'_1$  el lado  $v'_1v'_2$  no puede estar en la frontera de  $D'$  pues también es lado de  $t'_2$ , de mismo modo para  $t'_4$  el lado  $v'_4v'_3$  no puede estar en la frontera de  $D'$  pues también es lado de  $t'_3$ , esto sucede en los dos encajes de la 4 – arracada. Véase Figura 3.3.

Tenemos cuatro distintas posibilidades de parejas de lados de  $t'_1$  y  $t'_4$  que pueden estar en la frontera de  $D'$ , estas son: los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_4$ , los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_3$ , los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_4$  y por último los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_3$ , si bien, ya hemos mencionado que cualesquiera dos encajes de la 4 – arracada son combinatoriamente equivalentes, topológicamente no sucede lo mismo, por ejemplo, en el primer encaje tiene sentido considerar como parte de la frontera a los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_3$  mientras que en el segundo encaje este par de lados no puede ser parte de la frontera pues el ciclo  $v'_0v'_2, v'_2v'_4, v'_4v'_0$  rodearía un pedazo de la frontera de  $D'$ . Analicemos las cuatro posibilidades de parejas de lados en ambos encajes.

#### Primer encaje de la 4-arracada.

- a) Los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.5.

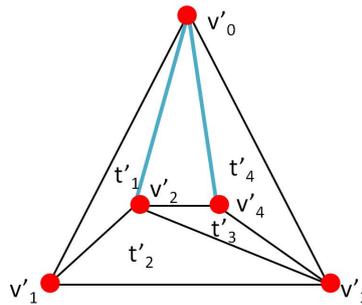


Figura 3.5: Los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$ .

Este caso no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_1, v'_1v'_3, v'_3v'_0$  rodea a los lados que están en la frontera.

- b) El caso donde los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_3$  están en la frontera de  $D'$ .

Como  $\varphi[N(v_0)]$  no es la triangulación de un disco, deben existir más triángulos en  $T'$ . Sabemos que el lado  $v'_0v'_2$  no puede ser frontera por el inciso anterior, entonces existe  $t'_5 \in \Delta(T')$  con vértices  $V(t'_5) = \{v'_0, v'_2v'_5\}$  con intersecciones  $|t'_5 \cap t'_1| = 2$ ,  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$ ,  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_4| = 1$ . Como las matrices de intersección deben ser iguales, en  $T$  debe existir  $t_5$  tal que  $|t_5 \cap t_1| = 2$ , por lo tanto  $t_5$  solo puede compartir el lado  $v_1v_2$  con  $t_1$ , entonces  $V(t_5) = \{v_1, v_2, v_6\}$ , además sucede que  $|t_5 \cap t_2| = 1$ . Véase figura 3.6.

Para que las matrices de intersección sean iguales falta que  $t_1$  comparta un vértice con  $t_3$  y  $t_4$ , esto se logra al identificar el vértice  $v_6$  con  $v_4$ . Como la triangulación  $T'$  aún no es triangulación de un disco entonces debe existir un triángulo  $t'_6 \in \Delta(T')$  adyacente a  $t'_3$  con conjunto de vértices

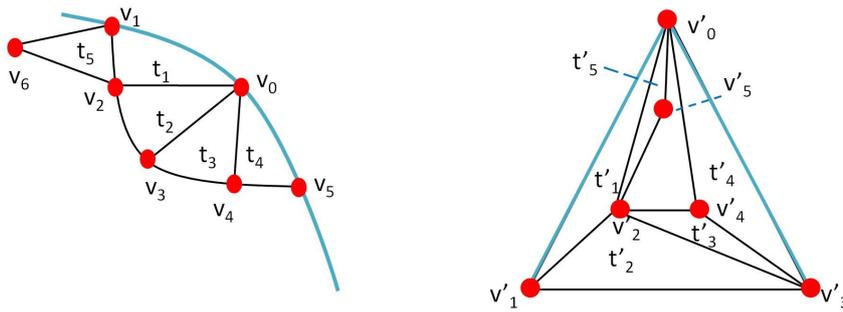


Figura 3.6: Los triángulos  $t_5$  y  $t'_5$  en  $T$  y  $T'$  respectivamente.

$V(t'_6) = \{v'_2, v'_4, v'_6\}$ , entonces en la triangulación  $T$  existe el triángulo  $t_6$  adyacente a  $t_3$  con vértices  $V(t_6) = \{v_3, v_4, v_7\}$ . El triángulo  $t_6$  tiene las intersecciones  $|t_6 \cap t_3| = 2$ ,  $|t_6 \cap t_2| = 1$ ,  $|t_6 \cap t_4| = 1$  y  $|t_6 \cap t_5| = 1$ , mientras que  $|t'_6 \cap t'_3| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_5| = 1$ . Véase Figura 3.7.

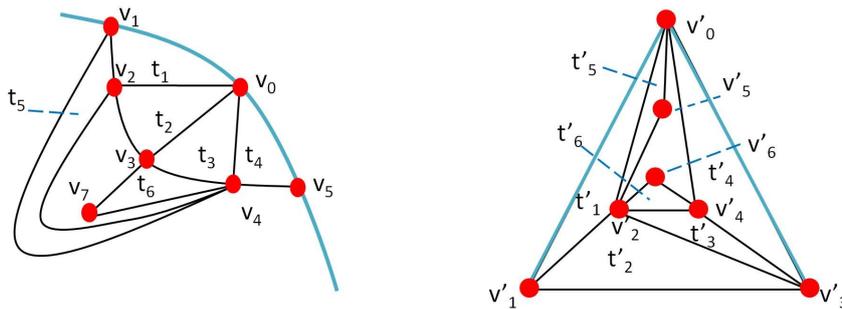


Figura 3.7: Los triángulos  $t_6$  y  $t'_6$  en  $T$  y  $T'$  respectivamente.

Para que ambas matrices de intersección sean iguales falta que en  $T$  los triángulos  $t_1$  y  $t_6$  compartan un vértice. Por el Lema 1  $v_7$  es el único vértice  $t_6$  que puede identificarse con  $v_1$  o con  $v_2$ . Si identificamos  $v_7$  con  $v_2$ , entonces  $|t_6 \cap t_2| = 2$ , pero en  $T'$  no puede suceder que  $|t'_6 \cap t'_2| = 2$ , pues al identificar  $v'_6$  con  $v'_1$  la triangulación ya no es variedad y si identificamos  $v'_6$  con  $v'_3$ , los triángulos  $t'_3$  y  $t'_6$  son uno mismo. Por otro lado, al identificar  $v_7$  con  $v_1$ , los triángulos  $t_1, t_2, t_3, t_5$  y  $t_6$  forman una banda de Moebius, esto no puede suceder pues  $T$  es la triangulación de un disco, es decir, tiene dimensión 2, mientras que la dimensión de encaje de una banda de Moebius es 3. Por lo tanto las triangulaciones  $T$  y  $T'$  no pueden tener la misma matriz de intersección. Por lo tanto no puede suceder el caso donde los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_3$  estén en la frontera de  $D'$ .

- c) El caso donde los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_3, v'_3v'_0$  rodean a la arista  $v'_0v'_4$  que es parte de la frontera. Véase Figura 3.8.

- d) El caso donde los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_3$  están en la frontera no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_1, v'_1v'_3, v'_3v'_4, v'_4v'_0$  rodean a la arista  $v'_0v'_2$  que es parte de la frontera. Véase Figura 3.8.

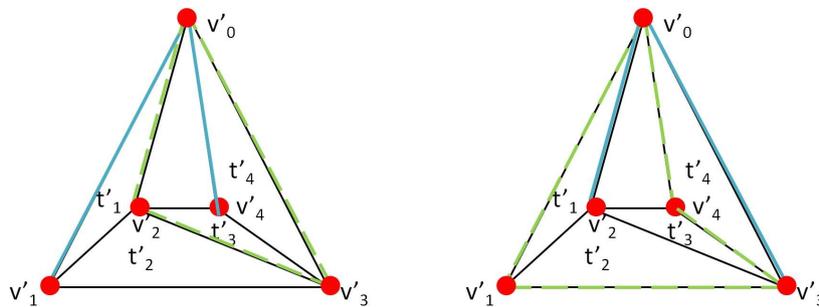


Figura 3.8: Casos c) y d).

Por lo tanto no puede suceder el caso en que una 4-semirrueda sea mapeada al primer encaje de la 4-arracada bajo la función  $\varphi$ . Ahora analicemos los cuatro casos para el segundo encaje de la 4-semirrueda.

**Segundo encaje de la 4-arracada.**

- a) Los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_3$  están en la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.9.

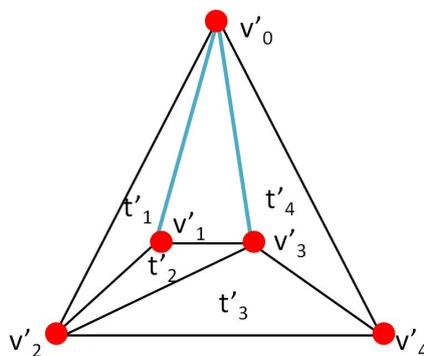


Figura 3.9: Los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_3$  en la frontera.

Este caso no se puede dar pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_4, v'_4v'_0$  rodean a los lados que están en la frontera.

- b) Los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.10.  
Como  $\varphi[N(v_0)]$  no es la triangulación de un disco deben existir más triángulos en  $T'$ . Por el inciso anterior sabemos que el lado  $v'_0v'_3$  no puede ser parte de la frontera de  $D'$ , entonces existe  $t'_5 \in \Delta(T')$  adyacente a  $t'_4$  compartiendo el lado mencionado, entonces en  $T$  existe  $t_5$  adyacente a  $t_4$  compartiendo el lado  $v_4v_5$ . En la triangulación  $T$  el triángulo  $t_5$  tiene el

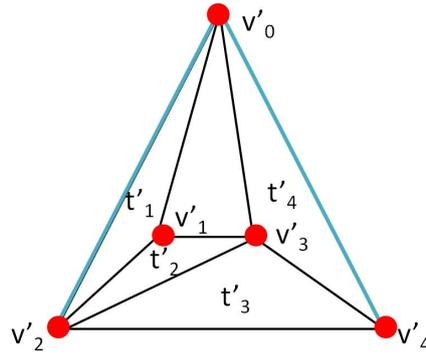


Figura 3.10: Los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_4$  en la frontera.

conjunto de vértices  $V(t_5) = \{v_4, v_5, v_6\}$  y tiene las siguientes intersecciones:  $|t_5 \cap t_4| = 2$  y  $|t_5 \cap t_3| = 1$ , y en  $T'$  el triángulo  $t'_5$  tiene conjunto de vértices  $V(t'_5) = \{v'_0, v'_3, v'_5\}$  y por lo tanto  $t'_5$  tiene las siguientes intersecciones:  $|t'_5 \cap t'_4| = 2$ ,  $|t'_5 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_5 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_5 \cap t'_1| = 1$ . Véase Figura 3.11.

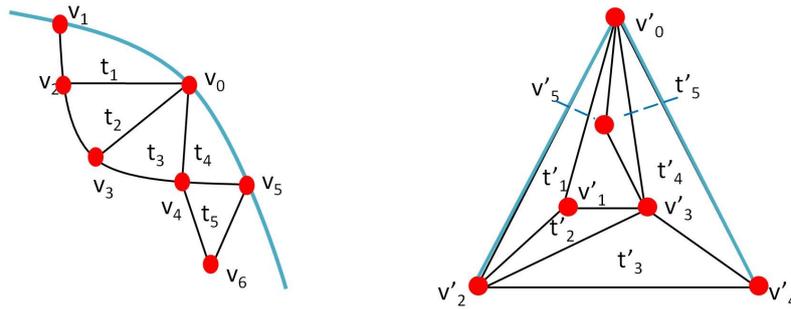


Figura 3.11: Los triángulos  $t_5$  y  $t'_5$  en  $T$  y  $T'$  respectivamente.

Como las matrices de intersección de ambas triangulaciones deben ser iguales, en  $T$  debe suceder que  $|t_5 \cap t_2| = 1$  y  $|t_5 \cap t_1| = 1$ , estas intersecciones solo se logran al identificar los vértices  $v_6$  con  $v_2$ , puesto que  $v_2$  es el único vértice que solamente pertenece a  $t_1$  y  $t_2$ , por el Lema 1, únicamente  $v_6$  puede ser utilizado para identificaciones. Al identificar los vértices  $v_6$  y  $v_2$  se tiene que ambas triangulaciones tienen por el momento matrices de intersección iguales. Como la triangulación  $T'$  aún no es triangulación de un disco entonces debe existir un triángulo  $t'_6 \in \Delta(T')$  adyacente a  $t'_2$ , por lo tanto debe existir  $t_6 \in \Delta(T)$  cuyo conjunto de vértices sea  $V(t_6) = \{v_2, v_3, v_7\}$ . El triángulo  $t_6$  tiene las intersecciones  $|t_6 \cap t_2| = 2$ ,  $|t_6 \cap t_1| = 1$ ,  $|t_6 \cap t_3| = 1$  y  $|t_6 \cap t_5| = 1$ . Por otra parte  $t'_6$  es tal que  $|t'_6 \cap t'_2| = 2$ , esto implica que  $t'_6$  debe compartir con  $t'_2$  el lado  $v'_1v'_3$ , pues si compartiera  $v'_1v'_2$  o  $v'_2v'_3$  con  $t'_6$ ,  $D'$  dejaría de ser variedad. El triángulo  $t'_6$  tiene conjunto de vértices  $V(t'_6) = \{v'_1, v'_3, v'_6\}$  y por lo

tanto  $t'_6$  tiene las siguientes intersecciones:  $|t'_6 \cap t'_2| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_5| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ . Véase Figura 3.12.

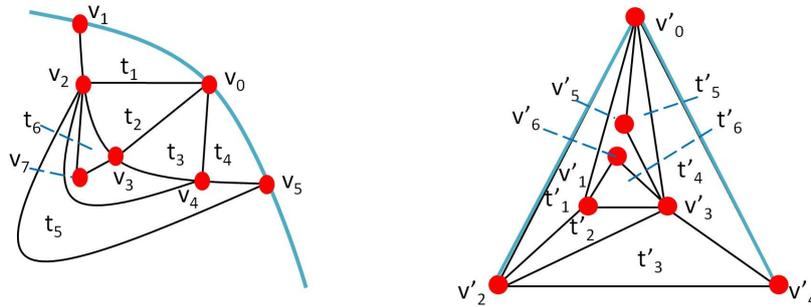


Figura 3.12: Los triángulos  $t_6$  y  $t'_6$  en  $T$  y  $T'$  respectivamente.

Debemos recordar que ambas matrices de intersección deben ser iguales, pero en la triangulación  $T$  no se cumple  $|t_6 \cap t_4| = 1$  a menos que se identifique  $v_7$  con  $v_4$  o se identifique  $v_7$  con  $v_5$ . Si identificamos  $v_7$  con  $v_4$  se tiene la intersección  $|t_6 \cap t_3| = 2$ , por lo tanto en  $T'$  debe suceder  $|t'_6 \cap t'_3| = 2$ , entonces  $v'_6$  se debe identificar con  $v'_2$  o con  $v'_4$ . Al identificar  $v'_6$  con  $v'_2$ ,  $t'_6$  y  $t'_2$  coinciden, por lo tanto esta identificación no puede suceder. Al identificar  $v'_6$  con  $v'_4$ ,  $D'$  deja de ser una variedad pues los triángulos  $t'_6$ ,  $t'_3$  y  $t'_4$  comparten el lado  $v'_3v'_4$ .

Si identificamos  $v_7$  con  $v_5$  los triángulos  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ ,  $t_5$  y  $t_6$  forman una banda de Moebius, lo cual no puede suceder, pues  $D$  es homeomorfa a un disco, por lo que no puede contener a una banda de Moebius.

Por lo tanto las triangulaciones  $T$  y  $T'$  no pueden tener la misma matriz de intersección, entonces no puede suceder el caso donde los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_4$  estén en la frontera de  $D'$ .

- c) El caso donde los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_3, v'_3v'_0$  rodean a la arista  $v'_0v'_1$  que es parte de la frontera. Véase Figura 3.13.
- d) El caso donde los lados  $v'_0v'_2$  y  $v'_0v'_3$  están en la frontera no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_1, v'_1v'_2, v'_2v'_4, v'_4v'_0$  rodean a la arista  $v'_0v'_3$  que es parte de la frontera. Véase Figura 3.13.

Por lo tanto no puede suceder el caso en que una 4-semirrueda sea mapeada al segundo encaje de la 4-arracada bajo la función  $\varphi$ , así jamás sucede que una 4-semirrueda sea mapeada a una 4-arracada.

### 3. CASO 3

Supongamos que existe  $v_0$  tal que  $N(v_0)$  es una 5-semirrueda tal que  $\varphi[N(v_0)]$  es una 5-arracada.

Digamos que  $N(v_0)$  consta de los triángulos:  $t_1, t_2, t_3, t_4$  y  $t_5$  con conjuntos de vértices  $V(t_1) = \{v_0, v_1, v_2\}$ ,  $V(t_2) = \{v_0, v_2, v_3\}$ ,  $V(t_3) = \{v_0, v_3, v_4\}$ ,

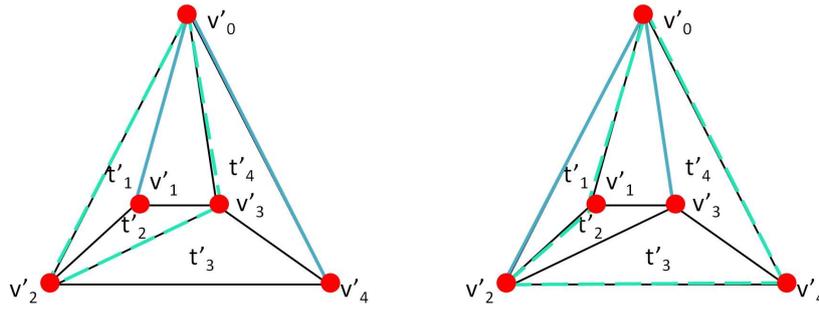


Figura 3.13: Los casos c) y d).

$V(t_4) = \{v_0, v_4, v_5\}$  y  $V(t_5) = \{v_0, v_5, v_6\}$ , y que  $\varphi[N(v_0)]$  está conformado por los triángulos:  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  con conjuntos de vértices  $V(t'_1) = \{v'_0, v'_1, v'_2\}$ ,  $V(t'_2) = \{v'_0, v'_2, v'_3\}$ ,  $V(t'_3) = \{v'_2, v'_3, v'_4\}$ ,  $V(t'_4) = \{v'_2, v'_4, v'_5\}$  y  $V(t'_5) = \{v'_0, v'_4, v'_5\}$ . Nuevamente existen dos encajes de la 5 – arracada en el disco Véase Figura 3.14.

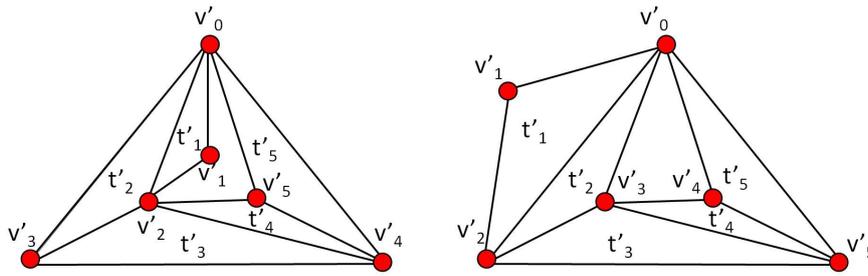


Figura 3.14: Primer encaje de la 5 – arracada (izquierda). Segundo encaje (derecha).

Ambos encajes son equivalentes pues sabemos por el Teorema de Whitney que las 4 – arracada formadas por  $t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  son equivalentes y para formar cualquiera de las dos 5 – arracadas solo debemos añadir a  $t'_1$  de tal forma que  $|t'_1 \cap t'_2| = 2$  y  $t'_1$  se interseque en un solo vértice con el resto de los triángulos. Las únicas configuraciones posibles son los dos encajes mostrados en la Figura 3.14.

Dado que  $v_0$  está en la frontera de  $D$ , pues  $N(v_0)$  es una semirrueda, sucede que el triángulo  $t_1$  tiene el lado  $v_0v_1$  en la frontera de  $D$ , de mismo modo, el triángulo  $t_5$  tiene el lado  $v_0v_6$  en la frontera de  $D$ , entonces en  $D'$  los triángulos  $t'_1$  y  $t'_5$  deben tener respectivamente uno de sus lados en la frontera de  $D'$  puesto que  $M_T = M_{T'}$ . Véase Figura 3.15.

Notemos que en el triángulo  $t'_1$  el lado  $v'_0v'_2$  es el único que no puede estar en la frontera, de mismo modo para  $t'_5$  el lado  $v'_4v'_5$  no puede estar en la frontera, en cualquiera de los dos encajes de la 5 – arracada.

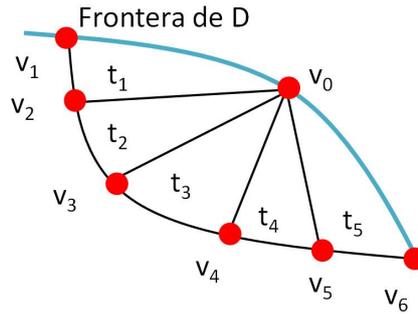


Figura 3.15:  $N(v_0)$  en  $D$ .

Tenemos cuatro distintas posibilidades de parejas de lados de  $t'_1$  y  $t'_5$  que pueden estar en la frontera de  $D'$ , esto son: los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_5$  están en la frontera de  $D'$ , los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_0v'_5$  están en la frontera de  $D'$ , los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$  y los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$ . Analizaremos cada una de las posibilidades de pares de lados en cada uno de los encajes de la 5 – arracada en el disco  $D'$ .

**Primer encaje de la 5-arracada.**

Este encaje no puede suceder pues el triángulo  $t'_1$  está rodeado por el ciclo de aristas  $v'_0v'_3$ ,  $v'_3v'_4$ ,  $v'_4v'_0$ , por lo tanto ningún lado de  $t'_1$  puede estar en la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.14.

**Segundo encaje de la 5-arracada.**

a) Los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_5$  están en la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.15.

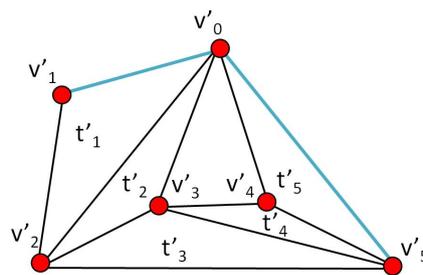


Figura 3.16: Los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_5$  están en la frontera de  $D'$ .

Como  $\varphi(N(v_0))$  no es un disco, entonces tanto  $T$  como  $T'$  deben constar de más de cinco triángulos, para que  $T'$  pueda ser la triangulación de un disco. Notemos que en  $T'$  el lado  $v'_0v'_4$  no puede estar en la frontera pues este lado es rodeado por el ciclo de aristas  $v'_0v'_3$ ,  $v'_3v'_5$ ,  $v'_5v'_0$ . Entonces existe un triángulo  $t'_6 \in \Delta$  tal que  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$  con conjunto de vértices

$V(t'_6) = \{v'_0, v'_4, v'_6\}$ . Tomando en cuenta que las matrices de intersección de  $T$  y  $T'$  son iguales, entonces debe existir el triángulo  $t_6 \in \Delta(T)$  tal que  $|t'_6 \cap t_5| = 2$ , el único lado disponible de  $t_5$  para que esta intersección suceda es  $v_5v_6$ , por lo tanto  $V(t_6) = \{v_5, v_6, v_7\}$ . Las intersecciones de  $t'_6$  en  $T'$  son:  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$ ,  $|t'_6 \cap t'_4| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_3| = 1$ ,  $|t'_6 \cap t'_2| = 1$  y  $|t'_6 \cap t'_1| = 1$ , mientras que las intersecciones de  $t_6$  en  $T$  son  $|t_6 \cap t_5| = 2$  y  $|t_6 \cap t_4| = 1$ . Véase Figura 3.17.

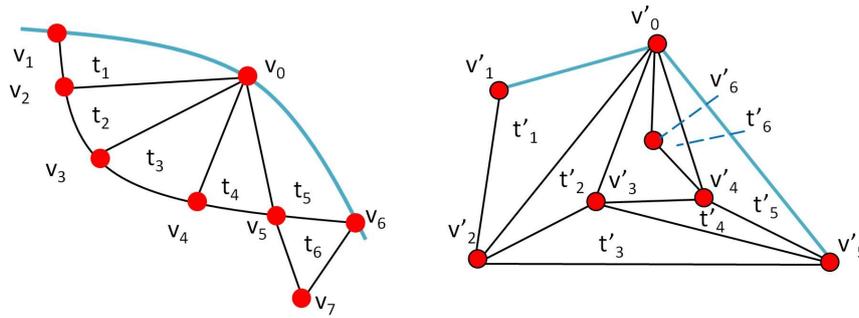


Figura 3.17: Los triángulos  $t_6$  y  $t'_6$  en  $T$  y  $T'$  respectivamente.

Recordemos que las matrices de intersección de ambas triangulaciones deben ser iguales, entonces en  $T$  debe suceder que  $|t_6 \cap t_3| = 1$ ,  $|t_6 \cap t_2| = 1$  y  $|t_6 \cap t_1| = 1$  simultáneamente, pero cumplir estas tres intersecciones no es posible, pues el único vértice que pertenece a  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  es  $v_0$ , entonces este vértice se tendría que identificar con  $v_7$ . Al realizar la identificación mencionada  $t_6$  y  $t_5$  resultan ser el mismo triángulo. Por lo tanto el lado  $v_5v_6$  no puede pertenecer a ningún otro triángulo excepto a  $t_5$ , entonces el lado  $v_5v_6$  está en la frontera de  $D$ , es decir  $t_5$  tiene dos de sus lados en la frontera de  $D$ .

Como  $M_T$  y  $M_{T'}$  deben ser iguales, en  $T'$  el triángulo  $t'_5$  debe tener dos lados en la frontera de  $D'$ , estos lados son  $v'_0v'_5$  y  $v'_0v'_4$ . Recordemos que el lado  $v'_0v'_4$  no puede ser parte de la frontera de  $D'$  pues existe un ciclo de aristas que lo rodea. Por lo tanto  $M_T$  no puede ser igual a  $M_{T'}$ . No puede suceder el caso en el que los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_5$  estén en la frontera de  $D'$ .

b) Los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_0v'_5$  están en la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.18.

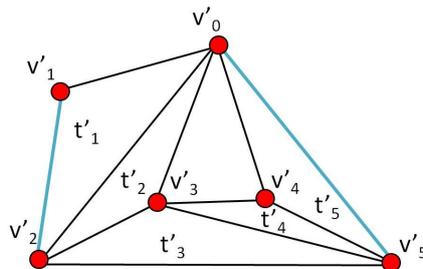


Figura 3.18: Los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_0v'_5$  están en la frontera de  $D'$ .

Notamos que el lado  $v'_0v'_4$  no puede ser parte de la frontera de  $D'$  pues es rodeado por el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_5, v'_5v'_0$ . Este caso no puede suceder, la justificación es completamente análoga al caso anterior.

- c) El caso donde los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$  no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_5$  y  $v'_5v'_0$  rodea a  $v'_0v'_1$  que es parte de la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.19.
- d) El caso donde los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_0v'_4$  están en la frontera de  $D'$  no puede suceder pues el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_5, v'_5v'_0$  rodea a  $v'_1v'_2$  que es parte de la frontera de  $D'$ . Véase Figura 3.19.

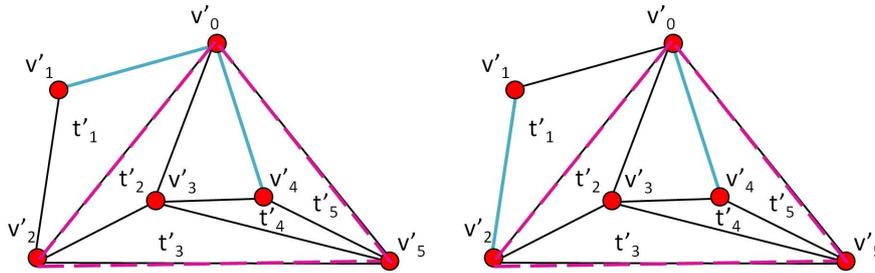


Figura 3.19: Los casos c) y d).

Por lo tanto no puede suceder el caso en que una 5 – semirrueda sea mapeada al segundo encaje de la 5 – arracada bajo la función  $\varphi$ .

Por lo tanto concluimos que no sucede el caso en que una 5 – semirrueda sea mapeada a una 5 – arracada bajo la función  $\varphi$ .

#### 4. CASO 4

Supongamos que existe  $v_0$  tal que  $N(v_0)$  es una 5 – rueda tal que  $\varphi[N(v_0)]$  es una Banda de Moebius de 5 triángulos.

La superficie  $D'$  es homeomorfa a un disco, la cual se supone que contiene a  $\varphi[N(v_0)]$  que es una Banda de Moebius, esto no puede suceder pues la dimensión de  $D'$  es 2, mientras que la dimensión de encaje de una Banda de Moebius es 3, es decir la Banda no puede estar contenida en  $D'$ .

Concluimos que no puede suceder el caso en el que una 5 – rueda sea mapeada a una Banda de Moebius de cinco triángulos. Y análogamente, no puede suceder que una 6 – rueda sea mapeada a una Banda de Moebius de seis triángulos.

#### 5. CASO 5

Supongamos que existe  $v_0$  tal que  $N(v_0)$  es una 6 – semirrueda tal que  $\varphi[N(v_0)]$  es una 6 – arracada.

Digamos que  $N(v_0)$  consta de los triángulos:  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  y  $t_6$  con conjuntos de vértices  $V(t_1) = \{v_0, v_1, v_2\}$ ,  $V(t_2) = \{v_0, v_2, v_3\}$ ,  $V(t_3) = \{v_0, v_3, v_4\}$ ,  $V(t_4) = \{v_0, v_4, v_5\}$ ,  $V(t_5) = \{v_0, v_5, v_6\}$  y  $V(t_6) = \{v_0, v_6, v_7\}$  y que  $\varphi[N(v_0)]$

consta de los triángulos:  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5$  y  $t'_6$  con conjuntos de vértices  $V(t'_1) = \{v'_0, v'_1, v'_2\}$ ,  $V(t'_2) = \{v'_0, v'_2, v'_3\}$ ,  $V(t'_3) = \{v'_2, v'_3, v'_4\}$ ,  $V(t'_4) = \{v'_2, v'_4, v'_5\}$ ,  $V(t'_5) = \{v'_0, v'_4, v'_5\}$  y  $V(t'_6) = \{v'_0, v'_4, v'_6\}$ . Nuevamente existen dos posibles encajes de la 6 – arracada en el disco  $D'$  y Véase Figura 3.20.

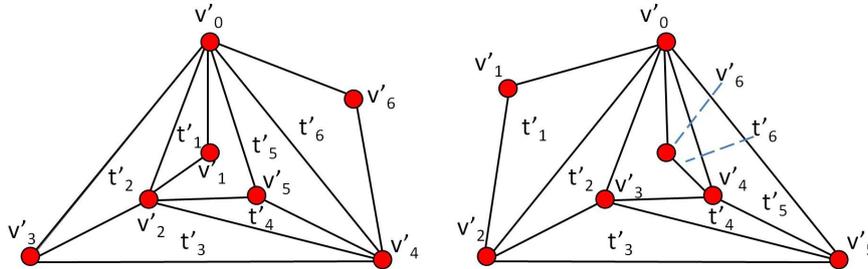


Figura 3.20: Primer encaje de la 6 – arracada (izquierda). Segundo encaje (derecha).

Ambos encajes son equivalentes pues en el caso anterior justificamos que los dos encajes de la 5 – arracada formada por los triángulos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  y  $t'_5$  son equivalentes, entonces para formar cualquiera de los dos encajes solo hay que añadir a  $t'_6$  de tal forma que  $|t'_6 \cap t'_5| = 2$  y que  $t'_6$  se interseccione en un solo vértice con el resto de los triángulos.

Dado que  $v_0$  está en la frontera de  $D$ , pues  $N(v_0)$  es una semirrueda, sucede que el triángulo  $t_1$  tiene el lado  $v_0v_1$  en la frontera de  $D$ , de mismo modo, el triángulo  $t_6$  tiene el lado  $v_0v_7$  en la frontera de  $D$ , entonces en  $T'$  los triángulos  $t'_1$  y  $t'_6$  deben tener respectivamente uno de sus lados en la frontera de  $D'$  puesto que  $M_T = M_{T'}$ . Notemos que en el triángulo  $t'_1$  el lado  $v'_0v'_2$  es el único que no puede estar en la frontera, de mismo modo para  $t'_6$  el lado  $v'_0v'_4$  no puede estar en la frontera, en cualquiera de los dos encajes de la 6 – arracada.

Tenemos cuatro distintas posibilidades de parejas de lados de  $t'_1$  y  $t'_5$  que pueden estar en la frontera de  $D'$  y estas son: los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_0v'_6$  en la frontera de  $D'$ , los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_4v'_6$  en la frontera de  $D'$ , los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_0v'_6$  en la frontera de  $D'$  y los lados  $v'_1v'_2$  y  $v'_4v'_6$  en la frontera de  $D'$ .

Notemos que en el primer encaje el triángulo  $t'_1$  está rodeado por el ciclo de aristas  $v'_0v'_3, v'_3v'_4, v'_4v'_0$  por lo tanto, los lados  $v'_0v'_1$  y  $v'_1v'_2$  no pueden ser parte de la frontera, por lo tanto ningún caso de parejas de lados de  $t'_1$  y  $t'_6$  pueden estar en la frontera del disco  $D'$ . Véase Figura 3.21.

De manera análoga en el segundo encaje el triángulo  $t'_6$  es rodeado por el ciclo de aristas  $v'_0v'_2, v'_2v'_5, v'_5v'_0$ , por lo tanto, los lados  $v'_0v'_6$  y  $v'_6v'_4$  no pueden ser parte de la frontera, por lo tanto ningún caso de parejas de lados de  $t'_1$  y  $t'_6$  pueden estar en la frontera del disco  $D'$ . Véase Figura 3.21.

Por lo tanto concluimos que no sucede el caso en que una 6 – semirrueda sea mapeada a una 6 – arracada bajo la función  $\varphi$ .

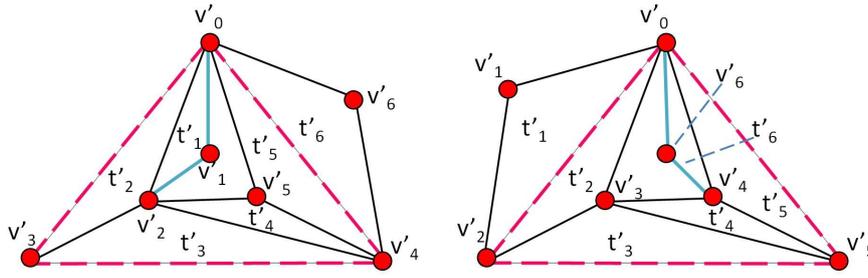


Figura 3.21: Los lados de  $t'_1$  no pueden ser parte de la frontera de  $D'$  en el primer encaje, mientras en el segundo encaje los lados de  $t'_6$  no pueden pertenecer a la frontera de  $D'$ .

Hemos considerado ya todos los posibles mapeos bajo  $\varphi$  de  $N(v_0)$  cuando es una rueda y también todos los posibles mapeos bajo  $\varphi$  cuando  $N(v_0)$  es una semirrueda, y mostramos que el único caso que puede suceder es cuando todas las ruedas en  $T$  son mapeadas a ruedas en  $T'$  y todas las semirruedas en  $T$  son mapeadas a semirruedas en  $T'$ .

Para este caso, extendimos a la función  $\varphi$  obtenida de la matriz de intersección y construimos una nueva función  $\psi$  que va de los vértices  $T$  a los vértices de  $T'$  que mapea caras de  $T$  en caras de  $T'$  y que además preserva intersecciones de triángulos, mostramos que esta función  $\psi$  mapea caras de  $T$  en caras de  $T'$ , es decir, que es un mapeo simplicial y además es biyectivo y por lo tanto las triangulaciones  $T$  y  $T'$  son isomorfas y combinatoriamente equivalentes.

El **Teorema 1** es válido, pues hemos probado que la matriz de intersección de una triangulación finita de un disco caracteriza a la triangulación salvo isomorfismos.  $\square$



# Bibliografía

- [Arocha et al., 2015] Arocha, J. L., Bracho, J., García-Colín, N., and Hubbard, I. (2015). Reconstructing surface triangulations by their intersection matrices 26 september 2014. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 35(3):483–491.
- [Dugundji, 1966] Dugundji, J. (1966). *Topology*. 1966. *Ally and Bacon, Boston*.
- [Gallier and Xu, 2013] Gallier, J. and Xu, D. (2013). *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Springer Science & Business Media.
- [Matoušek, 2002] Matoušek, J. (2002). *Lectures on discrete geometry*, volume 212. Springer New York.
- [Matoušek, 2008] Matoušek, J. (2008). *Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Springer Science & Business Media.