UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE JORDAN-HÖLDER Y TEOREMA DE GABRIEL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JOSÉ JUAN LÓPEZ ALVARADO

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MEX., 2016

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
López
Alvarado
José Juan
595 101 85 38
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
412051083

2. Datos del tutor
Dra.
Edith Corina
Sáenz
Valadez

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Valente
Santiago
Vargas

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Clotilde
García
Villa

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Mindy Yaneli
Huerta
Pérez

7. Datos del trabajo escrito
Teorema de Jordan-Hölder y Teorema de Gabriel
61 p.
2016

Agradecimientos

Mis padres me enseñaron que el conocimiento y el trabajo duro son claves para vivir plenamente. Les doy las gracias por ser mis padres, por haberme apoyado en todas mis desiciones, por no dejarme caer en los momentos difíciles, por estar presentes en cada momento de mi vida y por todo el amor que me dan; su ejemplo lo llevo en todo momento. Agradezco también a mis hermanos, con quienes he compartido toda mi vida.

A mi asesora y profesora Edith Corina Sáenz Valadez, le agradezco profundamente el haber tenido la paciencia y el tiempo para enseñarme matemáticas, llevarme más allá de mi límite y por enseñarme que no hay conocimiento que no podamos aprender. También le doy las gracias a todos mis profesores de matemáticas, ellos me impulsaron a buscar nuevas cosas y me inspiraron a seguir en el mundo de la investigación.

A mi novia Adriana Lorena López Trejo, nadie más que ella vio el trabajo arduo y duro que costó el presente trabajo. No tengo palabras para expresar toda la gratitud que le tengo, por haberme animado en los momentos en que parecía que todo iba mal; le doy las gracias por todo el amor y cariño que me dio.

Finalmente, doy gracias a todos mis amigos de Texcoco, de la Facultad y del baile, por todo su apoyo incondicional y su tiempo conmigo. Si pudiera agradecerle a cada uno todo lo que ha hecho por mi, nunca acabaría.

Índice general

Introducción

La idea de representar un objeto matemático por uno más simple ha sido una de las tareas que ha ocupado a los matemáticos desde tiempos remotos. En particular, en el marco de la Teoría de Representaciones, Emily Noether (1930) introdujo un nuevo escenario interpretando las representaciones como módulos. Esto permitió que todas las técnicas desarrolladas para el estudio de módulos y categorías se pudieran estudiar en la Teoría de Representaciones.

Actualmente, cuando estudiamos las representaciones de un álgebra (la cual, en este trabajo, asumimos que es asociativa con uno y de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado) se hace uso de las álgebras de carcaj.

Ahora bien, en el inicio de la Teoría de Representaciones de álgebras, se introdujeron simultáneamente las técnicas de las álgebras de carcaj, desarrolladas por la escuela de Peter Gabriel y por otra parte, la teoría de las sucesiones que casi se dividen de Maurice Auslander y de Idun Reiten.

El propósito de esta tesis, por un lado, es dar una demostración detallada del Teorema de Jordan-Hölder, el cual es uno de los teoremas fundamentales en la Teoría de módulos. Dicho teorema establece que cualesquiera dos series de composición de un módulo M son equivalentes (ver el Teorema 1.2.6). Por otro lado, en este trabajo estudiamos toda la teoría necesaria para demostrar el Teorema de Peter Gabriel (ver el Teorema 4.1.7). Dicho teorema establece lo siguiente:

Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible, entonces existe un ideal admisible I de KQ_Λ tal que Λ es isomorfa a KQ_Λ/I donde Q_Λ es un carcaj (asociado a Λ) e I un ideal admisible de KQ.

Este trabajo se desarrollará de la siguiente manera: en el Capítulo 1 estudiamos los módulos de longitud finita y demostramos el Teorema de Jordan-Hölder. En el Capítulo 2 estudiamos las álgebras y todas las propiedades de éstas que serán necesarias para desarrollar el Capítulo 3. En el Capítulo 3 introducimos el concepto de álgebra de carcaj, ideal admisible y cociente de álgebra de carcaj. Finalmente en Capítulo 4, enunciamos y demostramos el Teorema de Gabriel.

Capítulo 1

Teorema de Jordan-Hölder

En este capítulo enunciaremos y demostraremos el Teorema de Jordan-Hölder. Lo que afirma este resultado es que si un Λ-módulo M tiene una serie de composición de longitud n, esto es, una cadena finita de $n+1$ submódulos de M:

$$M = M_0 > M_1 > ... > M_n = 0$$

tal que M_i/M_{i+1} es simple para $i = 0, ..., n-1$, entonces cualesquiera dos series de composición de M son equivalentes. Es decir, si $M = N_0 > N_1 > ... > N_p = 0$ es otra serie de composición de M, de longitud p. Entonces $n = p$ y existe una permutación $\sigma : \{0, 1, ..., n\} \to \{0, 1, ..., p\}$ tal que $M_i/M_{i+1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i+1)}$.

A lo largo de todo el trabajo nuestros anillos serán anillos asociativos con uno.

1.1. Módulos Artinianos y Neterianos

En esta sección daremos la definición de módulo artiniano y neteriano, así como sus principales propiedades.

Notación 1.1.1. *Sean M un Λ-módulo, $\mathcal{A} = \{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ un conjunto de submódulos de M y $X \subseteq M$. Denotamos por:*

- $\sum \mathcal{A} = \sum_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigcup \{M_{\alpha_1} + ... + M_{\alpha_n} \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in A \quad (n = 1, 2, ...)\}$.
- $\Lambda X = \sum_{x \in X} \Lambda x = \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \Lambda, x_i \in X \quad (n = 1, 2, ...)\}$.

Definición 1.1.2. *Sea M un Λ-módulo:*

1. *Decimos que M es finitamente generado si para todo conjunto $\mathcal{A}$ de submódulos de M*

$$\textstyle\sum \mathcal{A} = M \text{ implica } \sum \mathcal{F} = M, \text{ para algún } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{F} \text{ finito.}$$

2. *Decimos que M es finitamente cogenerado si para todo conjunto $\mathcal{A}$ de submódulos de M*

$$\bigcap \mathcal{A} = 0 \text{ implica } \bigcap \mathcal{F} = 0, \text{ para algún } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{F} \text{ finito.}$$

3. *Sea $\mathcal{U}$ una clase de Λ módulos.*

   (a) Decimos que $\mathcal{U}$ genera a M o que M está generado por $\mathcal{U}$, si hay un conjunto indexado $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ en $\mathcal{U}$ y un epimorfismo:

$$\bigoplus_A U_\alpha \to M \to 0.$$

   (b) Si $\mathcal{U} = \{U\}$ simplemente decimos que U genera a M. Es decir, si existe un epimorfismo:

$$U^{(A)} \to M \to 0$$

   para algún conjunto A.

   (c) Decimos que $\mathcal{U}$ genera finitamente a M, si hay un conjunto indexado finito $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ en $\mathcal{U}$ y un epimorfismo:

$$\bigoplus_A U_\alpha \to M \to 0.$$

   (d) Si $\mathcal{U} = \{U\}$ simplemente decimos que U genera finitamente a M. Es decir si existe un epimorfismo:

$$U^{(A)} \to M \to 0$$

   para algún conjunto finito A.

Ejemplos 1.1.3.

(a) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ *es finitamente generado.*

(b) ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x]$ *no es finitamente generado.*

(c) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *es finitamente cogenerado.*

(d) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ *no es finitamente cogenerado.*

Más adelante necesitaremos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.4. *Sean M un Λ-módulo y $X \subseteq M$ tal que $\Lambda X = M$. Entonces existe un epimorfismo:*

$$\Lambda^{(X)} \to M \to 0.$$

Más aún, Λ genera finitamente a M, si y sólo si, $\Lambda X = M$ para algún $X \subseteq M$ finito.

Demostración. Sea $X \subseteq M$ tal que $\Lambda X = M$. Para cada $x \in X$ consideremos la multiplicación a izquierda $\rho_x : \Lambda \to M$, dada por $\rho_x(\alpha) = \alpha x$. Claramente ρ_x es un Λ-morfismo; sea $\rho = \bigoplus_{x \in X} \rho_x$ la suma directa de estos morfismos, así $\rho : \Lambda^{(X)} \to M$ es epimorfismo ya que $Im\rho = \sum_{x \in X} Im\rho_x = \sum_{x \in X} \Lambda x = \Lambda X = M$.

Para la última afirmación, ya tenemos que si $M = \Lambda X$ para $X \subseteq M$, X finito, entonces Λ lo genera finitamente. Ahora bien, supongamos que Λ genera finitamente a M, esto es, existe un epimorfismo

$$\Lambda^{(A)} \xrightarrow{\phi} M \to 0$$

con A un conjunto finito y $\phi = \bigoplus_A \phi_i$. De esta manera, para todo $x \in M$ existe $(\alpha_i)_{i \in A} \in \Lambda^{(A)}$ tal que $x = \phi((\alpha_i)_{i \in A}) = \sum_{i \in A} \alpha_i \phi_i(1_\Lambda)$. Por lo tanto, el conjunto que buscamos es $X = \{\phi_i(1_\Lambda)\}_{i \in A}$. $\square$

Proposición 1.1.5. *Sea M un Λ-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) M es finitamente generado;

(b) Para cada conjunto $f_\alpha : U_\alpha \to M$ $(\alpha \in A)$ con $M = \sum_A Imf_\alpha$, existe $F \subseteq A$, F finito tal que $M = \sum_F Imf_\alpha$;

(c) Para cada conjunto indexado $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ y para cada epimorfismo $\bigoplus_A U_\alpha \to M \to 0$, existe $F \subseteq A$, F finito y un epimorfismo $\bigoplus_F U_\alpha \to M \to 0$;

(d) Cada módulo que genera a M, lo genera finitamente;

(e) Existe $X \subseteq M$, X finito, tal que $\Lambda X = M$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Consideremos un conjunto de morfismos $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $f_\alpha : U_\alpha \to M$ $\forall \alpha \in A$ y $M = \sum_A Imf_\alpha$. Notemos que $Imf_\alpha \leqslant M$ $\forall \alpha \in A$. De esta manera, dado que M es finitamente generado por hipótesis, existe $F \subseteq A$ finito tal que $\sum_F Imf_\alpha = M$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Como $f : \bigoplus_A U_\alpha \to M$ es un epimorfismo tenemos que:

$$M = Imf = \textstyle\sum_A Imf_\alpha.$$

Así, por hipótesis, tenemos que existe $F \subseteq A$, F finito tal que $\sum_F Imf_\alpha = M$. De esta manera $\bigoplus_F U_\alpha \to M$ es un epimorfismo.

$(c) \Rightarrow (d)$ Supongamos que U genera a M, por lo que existe un epimorfismo $U^{(A)} \to M \to 0$, para algún conjunto A. Y por hipótesis tenemos que existe $F \subseteq A$, F finito y un epimorfismo $U^{(F)} \to M \to 0$, lo que quiere decir que U genera finitamente a M.

$(d) \Rightarrow (e)$ Se sigue de la Proposición 1.1.4.

$(e) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\Lambda X = M$, para $X = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq M$ y supongamos que $\mathcal{A}$ es un conjunto de submódulos de M tales que $\sum \mathcal{A} = M$. Entonces, para cada x_i existe $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_i$ finito con $x_i \in \sum \mathcal{F}_i$, definamos

$\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i$, de esta manera $\mathcal{F}$ es finito y como $\sum \mathcal{F}$ es un submódulo de M que contiene a X, $\sum \mathcal{F} = M$. Por lo tanto, M es finitamente generado. $\square$

Definición 1.1.6. *Sea M un Λ-módulo:*

1. *Decimos que es M es neteriano si toda cadena de submódulos satisface la condición de cadena ascendente, es decir, si dada una cadena de submódulos*

$$M_0 \leqslant M_1 \leqslant ... \leqslant M_n \leqslant ...$$

existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_t; \forall t \geq n$.

2. *Decimos que M es artiniano si toda cadena de submódulos satisface la condición de cadena descendente, es decir, si dada una cadena de submódulos*

$$M_0 \geqslant M_1 \geqslant ... \geqslant M_n \geqslant ...$$

existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_t\ \forall t \geq n$

En seguida daremos unas equivalencias de estas definiciones. Para eso recordaremos algunos conceptos.

Definición 1.1.7. *Sea $(P, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. M un Λ-módulo y K es un submódulo de M:*

(a) Un elemento $m \in P$ es maximal si cada vez que $x \succeq m$, con $x \in P$, implica $x = m$.

(b) Un elemento $m \in P$ es minimal si cada vez que $x \preceq m$, con $x \in P$, implica $x = m$.

(c) K es un submódulo maximal de M si es elemento maximal del conjunto $\{M' < M\}$.

(d) K es un submódulo minimal de M si $K \neq 0$ y es elemento minimal del conjunto $\{M' \leqslant M\}$.

Proposición 1.1.8. *Sea M un Λ-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) M es artiniano;

b) Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento minimal;

c) Todo cociente de M es finitamente cogenerado.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío de submódulos de M y supongamos que $\mathcal{A}$ no tiene elemento minimal. Sea $M_0 \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ no tiene elemento minimal, el conjunto

$$\{M' \in \mathcal{A} \mid M' < M_0\} \neq \varnothing$$

y por lo tanto, existe $M_1 \in \mathcal{A}$ tal que $M_1 < M_0$. Procediendo recursivamente tenemos la siguiente cadena descendente:

$$M_0 > M_1 > M_2 > ...$$

que no se estaciona, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ tiene elemento minimal.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $K \leqslant M$. Sea $\mathcal{X}$ familia de submódulos de M/K tal que $\bigcap \mathcal{X} = K$. Por el Teorema de la Correspondencia tenemos que cada submódulo de M/K es de la forma M'/K donde $K \leqslant M' \leqslant M$. Por tanto sólo será necesario ver que si $K \leqslant M$ y si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de submódulos de M tales que $\bigcap \mathcal{A} = K$, entonces $\bigcap \mathcal{F} = K$ para algún $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ finito. En efecto, sea $\mathcal{P} = \{\bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{F}\ finito\}$, por hipótesis $\mathcal{P}$ tiene elemento minimal $V = \bigcap \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, es claro que $K = \bigcap \mathcal{A} \subseteq V$. Ahora supongamos que $V \supsetneq K$, entonces que existe $x \in V$ tal que $x \notin K = \bigcap \mathcal{A}$, de esta manera hay un $V' \in \mathcal{A}$ tal que $x \notin V'$. Tenemos que $V' \bigcap V \subsetneq V$, lo que es una contradicción ya que V era minimal, por lo tanto, $V = K$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Supongamos que M tiene una cadena descendente

$$M_0 \geqslant M_1 \geqslant ... \geqslant M_n \geqslant ...$$

de submódulos. Sea $K = \cap_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Consideremos M/K, como M está finitamente cogenerado y tenemos que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}}(M_i/K) = K$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=0}^{n}(M_i/K) = K$. Por lo tanto, $M_n = \bigcap_{i=0}^{n} M_i = K$ y de este modo $M_s = M_n \ \forall s \geqslant n$. □

Proposición 1.1.9. *Sea M un Λ-módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) M es neteriano;

b) Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento maximal;

c) Todo submódulo de M es finitamente generado.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío de submódulos de M y supongamos que $\mathcal{A}$ no tiene elemento maximal. Sea $M_0 \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ no tiene elemento maximal, el conjunto

$$\{M' \in \mathcal{A} \mid M' > M_0\} \neq \varnothing$$

y por lo tanto existe $M_1 \in \mathcal{A}$ tal que $M_1 > M_0$. Procediendo recursivamente tenemos la siguiente cadena ascendente:

$$M_0 < M_1 < M_2 < ....$$

que no se estaciona, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mathcal{A}$ tiene elemento maximal.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $N \leqslant M$ y $\mathcal{A}$ la familia de todos los submódulos de N que están finitamente generados, $\mathcal{A} \neq \varnothing$ pues $0 \in \mathcal{A}$. Por hipótesis $\mathcal{A}$ tiene elemento maximal $N^* \leqslant N$, para cada $x \in N$ consideremos el submódulo $\Lambda x + N^*$. Como N^* está finitamente generado $\Lambda x + N^* \in \mathcal{A}$, por lo tanto $\Lambda x + N^* \leqslant N^*$ $\forall x \in N$. Por tanto $N \leqslant N^*$ y $N = N^*$, de esta manera N es finitamente generado.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea

$$M_0 \leqslant M_1 \leqslant ... \leqslant M_n \leqslant ...$$

una cadena ascendente de submódulos de M y consideremos $M' = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ submódulo de M, por hipótesis tenemos que M' es finitamente generado. Supongamos que $\{x_1, ..., x_r\}$ es un conjunto generador de M', de esta manera $x_i \in M_{j_i}$ $\forall i = 1, ..., r$. Escojamos $n \geqslant j_i$ $\forall i = 1, ..., r$ de modo que $x_1, ..., x_r \in M_n$, por lo tanto:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i = \langle x_1, ..., x_r\rangle \subseteq M_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i.$$

Entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i = M_n$, así $\forall k \geqslant n$ tenemos $M_n \subseteq M_k \subseteq M_n$ y en consecuencia $M_n = M_k$. □

Ejemplos 1.1.10.

(a) $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ *es neteriano.*

(b) $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x]$ *no es neteriano.*

(c) Si M *es un* Λ*-módulo simple, entonces* M *es artiniano.*

(d) $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ *no es artiniano.*

(e) Un espacio vectorial V *de dimensión finita es neteriano y artiniano.*

Corolario 1.1.11. *Sea* M *un* Λ*-módulo distinto de cero.*

(a) Si M *es artiniano, entonces* M *tiene un submódulo simple.*

(b) Si M *es neteriano, entonces* M *tiene un submódulo maximal.*

Demostración. (a) Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{0 < M' \mid M' \leqslant M\}$. El conjunto es distinto del vacío ya que $M \in \mathcal{A}$ y como M es artiniano $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal $\bar{M}$. Afirmamos que $\bar{M}$ es simple. En efecto, sea $0 \neq K \leqslant \bar{M}$, como $\bar{M}$ es minimal $K = \bar{M}$. Por lo tanto, $\bar{M}$ es simple.

(b) Consideremos $\mathcal{A} = \{M' < M\}$, el conjunto de todos los submódulos propios de M. El conjunto $\mathcal{A} \neq \varnothing$, ya que el submódulo cero está en el conjunto. Como M es neteriano $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal y por lo tanto, M tiene un submódulo maximal. □

El siguiente resultado nos servirá para demostrar la relación de las sucesiones exactas con los módulos neterianos (artinianos).

Proposición 1.1.12. *Sea M un Λ-módulo y $H, K, L \leqslant M$. Si $K \leqslant H$, entonces:*

$$H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$$

Demostración. Sea $x \in H \cap (K + L)$, entonces $x \in H$ y $x = \kappa + l$ con $\kappa \in K$, $l \in L$. Así $l = x - \kappa \in H$, por lo tanto, $x = \kappa + l \in K + (H \cap L)$.

Para la otra contención sea $y \in K + (H \cap L)$, así $y = \kappa' + \alpha$ con $\kappa' \in K$, $\alpha \in H \cap L$. De esta manera $y \in H$ y $y \in K + L$, por lo tanto, $y \in H \cap (K + L)$. $\square$

Proposición 1.1.13. *Sea*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

una sucesión exacta de Λ-módulos. Entonces M es artiniano (neteriano), si y sólo si, K y N son artinianos (neterianos).

Demostración. Haremos la demostración sólo para el caso artiniano, ya que el caso neteriano se puede demostrar usando argumentos muy similares. Supongamos que M es artiniano, como K es isomorfo a un submódulo de M, entonces K es artiniano. Por otro lado, por el primer teorema de isomorfismo $N \cong M/K$. Consideremos $N' \leqslant N$, usando el segundo teorema de isomorfismo tenemos $N/N' \cong (M/K)/(M'/K) \cong M/M'$, con $K \leqslant M' \leqslant M$. Por lo tanto, como M es artiniano, entonces N/N' finitamente cogenerado $\forall N' \leqslant N$. De esta manera N es artiniano por la Proposición 1.1.8.

Ahora supongamos que K y N son artinianos, sin perdida de generalidad supondremos que $K \leqslant M$ y $M/K = N$. Sea:

$$L_0 \geqslant L_1 \geqslant L_2 \geqslant ...$$

una cadena descendente de submódulos de M. Dado que $M/K = N$, tenemos que M/K es artiniano, entonces tenemos la siguiente cadena descendente de submódulos de M/K:

$$(L_0 + K)/K \geqslant (L_1 + K)/K \geqslant (L_2 + K)/K \geqslant ...$$

que se estaciona, es decir existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(L_m + K)/K = (L_{m+i} + K)/K$ con $i \in \mathbb{N}$. Afirmamos que:

$$(1)\ L_m + K = L_{m+i} + K \ (\forall i \in \mathbb{N})$$

En efecto, es claro ver: $L_{m+i} + K \subseteq L_m + K$, por lo que resta demostrar la otra contención. Sea $x + \kappa \in L_m + K$, proyectando en el cociente tenemos que $(x + \kappa) + K = (y + \kappa') + K$ para algún $y \in L_{m+i}$ y $\kappa' \in K$, por lo tanto, $x + \kappa = y + \kappa'' \in L_{m+i} + K$ con $\kappa'' \in K$, de esta manera demostramos la afirmación (1). Por otro lado tenemos la siguiente cadena descendente de submódulos de K:

$$L_0 \cap K \geqslant L_1 \cap K \geqslant L_2 \cap K \geqslant ...,$$

como K es artiniano existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que $L_{m'} \cap K = L_{m'+i} \cap K \ \forall i \in \mathbb{N}$. Sea $n = min\{m, m'\}$ y usando la Proposición 1.1.12 tenemos:

$$L_n = L_n \cap (L_n + K) = L_n \cap (L_{n+i} + K) = L_{n+i} + (L_n \cap K) =$$
$$L_{n+i} + (L_{n+i} \cap K) = L_{n+i} \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, M es artiniano. □

Como resultado de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1.14. *Sea $M = M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus ... \bigoplus M_n$. Entonces M es artiniano (neteriano), si y sólo si, M_i es artiniano (neteriano) $\forall i$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Proposición 1.1.13 considerando las inclusiones y proyecciones en cada coordenada. □

Definición 1.1.15. *Diremos que un Λ-módulo M, no nulo, es inescindible si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir si $M = U \oplus V$, entonces U=0 ó bien V=0.*

Proposición 1.1.16. *Sea M un Λ-módulo artiniano o neteriano. Entonces M tiene una descomposición en módulos inescindibles:*

$$M = M_1 \bigoplus ... \bigoplus M_n.$$

Demostración. Si M es inescindible no hay nada que probar. Supongamos que M no es inescindible. Entonces $M = M_1 \bigoplus N_1$, de la misma manera, si ambos son inescindibles no hay nada que probar, por lo que suponemos que $M_1 = M_2 \bigoplus N_2$. Recursivamente tendríamos una descomposición de M en inescindibles que puede ser infinita o finita, si es infinita tendríamos que

$$... < M_n < ... < M_2 < M_1$$
$$N_1 < N_1 + N_2 < ... < N_1 + N_2 + ... + N_n < ...$$

son cadenas descendente y ascendente, respectivamente, que no se estacionan. De esta manera llegamos a una contradicción. Por lo tanto, este proceso debe terminar. □

1.2. Teorema de Jordan-Hölder

El objetivo de esta sección será demostrar el Teorema de Jordan-Hölder. Empezaremos dando la siguiente definición.

Definición 1.2.1. *Sea M un Λ-módulo distinto de cero. Una cadena finita de n+1 submódulos de M, tal que*

$$M = M_0 > M_1 > ... > M_n = 0 \ \text{y} \ M_{i-1}/M_i \ \text{simple} \ \forall i = 1, ..., n$$

se llama serie de composición de M, de longitud n.

La siguiente proposición da condiciones para que un Λ-módulo admita una serie de composición:

Proposición 1.2.2. *Sea M un Λ-módulo distinto de cero. Entonces M tiene una serie de composición, si y sólo si, M es neteriano y artiniano.*

Demostración. Supongamos que M tiene una serie de composición. La demostración se hará por inducción sobre la longitud de una serie de longitud mínima de M, la cual denotaremos por n. Si $n = 1$ M, es simple y en consecuencia neteriano y artiniano. Supongamos que $n > 1$ y sea

$$M = M_0 > M_1 > ... > M_n = 0$$

una serie de composición de longitud mínima. De esta manera tenemos que la serie de composición de longitud mínima de M_1 es igual a $n - 1$, y por hipótesis de inducción tenemos que M_1 es artinitano y neteriano. Además como M/M_1 es simple, tenemos que M/M_1 es artiniano y neteriano. Por la Proposición 1.1.13 concluimos que M es artiniano y neteriano.

Conversamente, supongamos que M es artiniano y neteriano. Por el Corolario 1.1.11(b) M tiene un submódulo maximal M_1. Si $M_1 = 0$ tendríamos la siguiente serie de descomposición $M = M_0 > 0$, si $M_1 \neq 0$ entonces M_1 es neteriano y tiene un submódulo maximal M_2. Así, aplicamos el mismo razonamiento que usamos para M_1. Recursivamente tendríamos alguna de los siguientes casos:

$$(a)\ M > M_1 > M_2 > ... > M_k = 0$$
$$(b)\ M > M_1 > M_2 > ... > M_k > ....$$

Donde M_{i-1}/M_i es simple $\forall i$. Como M es artiniano, es claro que sólo puede pasar (a), ya que las contenciones son propias y no podría existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_s$ $\forall s \geqslant n$. Por lo tanto, M tiene una serie de composición. $\square$

Corolario 1.2.3. *Sean K, M, N Λ-módulos distintos de cero. Consideremos la siguiente sucesión exacta:*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

Entonces M tiene serie de composición, si y sólo si, K y M la tienen.

Demostración. Se sigue inmediatamente de las Proposiciónes: 1.1.13 y 1.2.2. $\square$

Para demostrar el Teorema de Jordan-Hölder haremos uso del tercer teorema de isomorfismo, el cual demostraremos a continuación.

Proposición 1.2.4. *Sea M un Λ-módulo. Si $H \leq M$ y $K \leq M$, entonces $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente epimorfismo $f : H \to (H+K)/K$, dado por, $f(h) = h + K$. Afirmamos que $Kerf = H \cap K$. En efecto, sea $x \in Kerf$, de este modo $f(x) = x + K = K$, lo que implica $x \in K$. Por lo tanto, $x \in H \cap K$.

Por otro lado, sea $y \in H \cap K$, así $f(y) = y + K = K$. Con lo que conlcluimos que $y \in Kerf$ y como consecuencia $Kerf = H \cap K$. Por último, aplicando el primer teorema de isomorfismo obtenemos

$$H/(H \cap K) \cong (H + K)/K.$$

□

Definición 1.2.5. *Sea M un Λ-módulo con series de descomposición:*

$$M = M_0 > ... > M_n = 0 \text{ y } M = N_0 > ... > N_p = 0$$

Decimos que las series son equivalentes si:

a) p=n;

b) Existe una permutación $\sigma : \{0, 1, ..., n\} \to \{0, 1, ..., p\}$ tal que $M_i/M_{i+1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i+1)}$ $\forall i = 1, ..., n$.

Ahora tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema de Jordan-Hölder:

Teorema 1.2.6 (Jordan-Hölder)**.** *Sea M un Λ-módulo. Si M tiene una serie de composición, entonces cualesquier par de series son equivalentes.*

Demostración. Si M tiene una serie de composición, denotemos por $c(M)$ la longitud mínima de dichas series; realizaremos inducción sobre $c(M)$. Si $c(M) = 1$ el resultado es claro, así, tomaremos $c(M) = n > 1$ y supondremos que para cualquier módulo con serie de composición de longitud menor a n se cumple el teorema.

Sean:

$$(1)\ \ M = M_0 > M_1 > ... > M_n = 0$$

$$(2)\ \ M = N_0 > N_1 > ... > N_p = 0$$

dos series de composición de mínima longitud de M. Si $M_1 = N_1$, por hipótesis de inducción, dado que $c(M_1) = n - 1$, las dos series son equivalentes. Por lo que podemos suponer que $M_1 \neq N_1$, además como son series composición M_0/M_1 es simple y por lo tanto, M_1 es submódulo maximal de M, de esta manera $M_1 + N_1 = M$, ya que $M_1 + N_1 > M_1$, y aplicando la Proposición 1.2.4 tenemos

$$(3)\ \ M/M_1 = (M_1 + N_1)/M_1 \cong N_1/(M_1 \cap N_1)$$

$$(4)\ \ M/N_1 = (M_1 + N_1)/N_1 \cong M_1/(M_1 \cap N_1)$$

Por lo tanto, $M_1 \cap N_1$ es maximal en M_1 y N_1. Ahora, por el Corolario 1.2.3, $M_1 \cap N_1$ tiene serie de composición

$$(M_1 \cap N_1) = L_0 > L_1 > ... > L_k = 0$$

De esta manera

$$\begin{gathered} M_1 > L_0 > L_1 > ... > L_k = 0 \\ N_1 > L_0 > L_1 > ... > L_k = 0 \end{gathered}$$

son series de composición de M_1 y N_1. Dado que $c(M_1) < n$, cualesquiera dos series de composición de M_1 son equivalentes, por lo que:

$$\begin{gathered} M = M_0 > M_1 > M_2 > ... > M_n = 0 \\ M = M_0 > M_1 > L_0 > ... > L_k = 0 \end{gathered}$$

son equivalentes. Además tenemos que $k = n - 2$, de donde tenemos que $c(N_1) < n$. En consecuencia, por nuestra hipótesis de inducción, tenemos que cualesquiera dos series de composición de N_1 son equivalentes.

Por lo tanto, las siguientes series:

$$\begin{gathered} M = N_0 > N_1 > N_2 > ... > N_p = 0 \\ M = N_0 > N_1 > L_0 > L_1 > ... > L_k = 0 \end{gathered}$$

son equivalentes. Pero por (3) y (4) tenemos que:

$$M/M_1 \cong N_1/L_0 \text{ y } M/N_1 \cong M_1/L_0;$$

por lo tanto, las series (1) y (2) son equivalentes. □

Es inmediato del Teorema de Jordan-Hölder que para cualquier módulo que tiene una serie de composición, todas sus demás series tienen la misma longitud.

Definición 1.2.7. *Decimos que un Λ-módulo M es de longitud finita si es artiniano y neteriano. Para dicho módulo podemos definir, sin ambigüedad, su longitud $c(M)$:*

$$c(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M=0 \\ n & \text{si } M \text{ tiene una serie de composición de longitud } n. \end{cases}$$

Si el módulo M no tiene longitud finita, decimos que es de longitud infinita y escribimos

$$c(M) = \infty.$$

Capítulo 2

Álgebras

En este capítulo estudiaremos el concepto de álgebra y enunciaremos sus principales propiedades. Los resultados estudiados serán necesarios en el Capítulo 3.

2.1. Álgebras

En esta sección daremos la definición y los resultados básicos concernientes a las K-álgebras.

Definición 2.1.1. *1. Sea K un campo. Una K-álgebra es un anillo Λ con $1_\Lambda \neq 0_\Lambda$, que posee además estructura de K-espacio vectorial de tal forma que:*

$$\text{(1) } \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b) = (ab)\alpha, \ \forall \alpha \in K \ \forall a, b \in \Lambda.$$

2. Diremos que Λ es una K-álgebra de dimensión finita , si Λ es de dimensión finita como K-espacio vectorial.

Cuando se satisface la igualdad (1) se acostumbra decir que K tiene acción central en Λ o bien que K actúa centralmente en Λ.

Proposición 2.1.2. *Sea K un campo y Λ una K-álgebra. Entonces existe Λ' un subanillo de Λ tal que K es isomorfo a Λ'.*

Demostración. Consideremos la función $\phi : K \longrightarrow \Lambda$ dado por $\alpha \longrightarrow \alpha 1_\Lambda$. Veremos que ϕ es monomorfismo de anillos con uno. Sean $\alpha, \alpha' \in K$, usando las propiedades de K-álgebra de Λ se tiene que:

- $\phi(\alpha + \alpha') = (\alpha + \alpha')1_\Lambda = \alpha 1_\Lambda + \alpha' 1_\Lambda = \phi(\alpha) + \phi(\alpha')$;
- $\phi(\alpha\alpha') = (\alpha\alpha')1_\Lambda = (\alpha'\alpha)1_\Lambda = \alpha'(\alpha 1_\Lambda) = \alpha'(\alpha 1_\Lambda)1_\Lambda = (\alpha 1_\Lambda)(\alpha' 1_\Lambda) = \phi(\alpha)\phi(\alpha')$;
- $\phi(1_K) = 1_K 1_\Lambda = 1_\Lambda$.

Por lo tanto, ϕ es un morfismo de anillos con uno, resta ver que es monomorfismo: sea $0_K \neq \alpha \in Ker\phi$, entonces:

$$\phi(\alpha) = \alpha 1_\Lambda = 0_\Lambda$$

y como K es campo existe $\alpha^{-1} \in K$ tal que $\alpha^{-1}\alpha = 1_K$. Por lo tanto:

$$0_\Lambda = \alpha^{-1}0_\Lambda = \alpha^{-1}(\alpha 1_\Lambda) = (\alpha^{-1}\alpha)1_\Lambda = 1_K 1_\Lambda = 1_\Lambda.$$

Lo cual es una contradicción, de esta manera $\alpha = 0_K$, lo que implica que ϕ es monomorfismo. Con lo que concluimos que: $K \cong Im\phi$. □

Gracias al siguiente corolario se dice que el campo K actúa centralmente en Λ.

Corolario 2.1.3. *Sea Λ una K-álgebra. Se tiene que:*

$$(\alpha 1_\Lambda)a = a(\alpha 1_\Lambda)\ \forall a \in \Lambda,\ \forall \alpha \in K.$$

Demostración. Sean $\alpha \in K$ y $a \in \Lambda$. Por la Definición 2.1.1 se tiene:

$$(\alpha 1_\Lambda)a = \alpha(1_\Lambda a) = \alpha a = \alpha(a 1_\Lambda) = a(\alpha 1_\Lambda).$$

□

Ejemplos 2.1.4.

(a) *Sea $K[x_1, x_2, ..., x_r]$ el anillo de polinomios en r variables con coeficientes en K. Como sabemos, éste también es un K-espacio vectorial de dimensión infinita, con acción central en K. Tiene por tanto estructura de K-álgebra.*

(b) *Dada una K-álgebra Λ, podemos construir su K-álgebra de matrices $M_n(\Lambda)$. Es decir, $M_n(\Lambda)$ es el conjunto de todas las matrices de $n \times n$, con entradas en Λ, que tiene estructura de K-álgebra mediante la suma y multiplicación matriciales usuales, y con el producto por escalares definido entrada a entrada. Además si Λ es de dimensión finita t, entonces $M_n(\Lambda)$ tiene dimensión finita tn^2.*

(c) *Si G es un grupo finito, sea KG el K-espacio vectorial con base G. Se tiene que KG tiene una única estructura de K-álgebra de dimensión finita $\mid G \mid$, tal que la multiplicación de los básicos coincide con la multiplicación en G.*

Definición 2.1.5. *Sean Λ y Λ' dos K-álgebras. Un morfismo de K-álgebras $\phi : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo de K-espacios vectoriales y de anillos con uno simultáneamente.*

En este trabajo nos interesarán ciertas subcategorías de la categoría de los Λ-módulos izquierdos. Por ello introduciremos la siguiente notación.

Notación 2.1.6. *a) Λ-Mod denotará la categoría cuyos objetos son todos los módulos izquierdos sobre Λ.*

b) Λ-mod denotará la subcategoría plena de Λ-Mod constituída por los módulos izquierdos finitamente generados.

Proposición 2.1.7. *Todo Λ-módulo M es un K-espacio vectorial que satisface: $\alpha(\lambda m) = (\alpha\lambda)m = \lambda(\alpha m)$ $\forall\lambda \in \Lambda$, $\forall\alpha \in K$ y $\forall m \in M$.*

Demostración. Sea M un Λ-módulo. Sabemos que $(M, +)$ es un grupo abeliano, definamos $\alpha m := (\alpha 1_\Lambda)m$ $\forall\alpha \in K$. Y es fácil verificar que con esta operación M cumple con las propiedades de K-espacio vectorial y además cumple con la propiedad enunciada. $\square$

Proposición 2.1.8. *Si Λ es una K-álgebra de K-dimensión finita, Λ-mod coincide con la subcategoría plena de Λ-Mod cuyos objetos son los módulos que son K-espacios vectoriales de dimensión finita.*

Demostración. Sean Λ una K-álgebra de dimensión finita y M un Λ-módulo finitamente generado. Consideremos $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ base de Λ y $\{m_1, ..., m_s\}$ un conjunto generador de M.

Tomemos $m \in M$, así $m = \sum_{i=1}^{s} \beta_i m_i$, $\beta_i \in \Lambda$ $\forall i = 1, ..., s$. Como Λ es de K-dimensión finita $\beta_i = \sum_{j=1}^{k} t_{ij}\alpha_j$; $t_{ij} \in K$ $\forall i, j$. De donde $m = \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{k}(t_{ij}\alpha_j)m_i) = \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{k} t_{ij}(\alpha_j m_i))$. Por lo tanto, el conjunto:

$$S := \{\alpha_1 m_1, ..., \alpha_1 m_s, \alpha_2 m_1, ..., \alpha_2 m_s, ..., \alpha_k m_1, ..., \alpha_k m_s\}$$

es un conjunto que genera a M como K-espacio vectorial. Dado que S es finito, entonces M tiene una K-base finita y así M es un K-espacio vectorial de dimensión finita.

Conversamente, supongamos que M es un Λ-módulo de K dimensión finita. De esta manera, sea $\{m_1, ..., m_n\}$ una K-base de M, recordemos que por la Proposición 2.1.7: $\alpha m_i = \alpha(1_\Lambda m_i) = (\alpha 1_\Lambda)m_i$ $\forall\alpha \in K$ y $\forall i = 1, ..., n$. Por lo tanto, para cada $m \in M$ tenemos:

$$m = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1_\Lambda m_i) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i 1_\Lambda)m_i.$$

Así, $\{m_1, ..., m_n\}$ es un conjunto generador para el Λ-módulo M. $\square$

2.2. Descomposición en inescindibles

En esta sección veremos cómo podemos descomponer a un Λ-módulo en suma directa de Λ-módulos inescindibles gracias al Teorema de Krull-Schimdt, y cómo podemos descomponer a una K-álgebra en suma directa de K-álgebras inescindibles (conectadas).

Durante esta tesis trabajaremos únicamente con ***K*-*álgebras de dimensión finita*** y por comodidad, algunas veces, sólo diremos que Λ es una K-álgebra. Además, únicamente trabajaremos en la categoría Λ ***-mod***, es decir, nuestros módulos siempre serán módulos izquierdos finitamente generados. Recordamos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Diremos que un Λ-módulo M, no nulo, es inescindible si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir si $M = U \oplus V$, entonces U=0 ó bien V=0.*

Ejemplo 2.2.2.

Sea V un K-espacio vectorial (no nulo) de dimensión finita y $\beta = \{v_1, ..., v_k\}$ base de V. Consideremos $V' = \langle v_1 \rangle = \{\lambda v_1 \mid \lambda \in K\}$. Afirmamos que V' es inescindible.

En efecto, sea $\widehat{V} < V'$ y $v \in \widehat{V}$, supongamos que $v \neq 0$, por lo que $v = \lambda v_1$ con $\lambda \neq 0_K$. Como $\lambda \in K$, existe λ^{-1} tal que $\lambda^{-1}\lambda = 1_K$, así $\lambda^{-1}v = v_1$ y por tanto $v_1 \in \langle v \rangle$. Lo que implica $V' = \langle v \rangle \subseteq \widehat{V}$, de donde $V' = \widehat{V}$, que es una contradicción. De esta manera V' es simple, por tanto V' es inescindible.

El siguiente resultado lo necesitaremos en el Capítulo 4.

Proposición 2.2.3. *Sea Λ una K-álgebra, $e \in \Lambda$ un idempotente y M un Λ-módulo. Entonces el morfismo de K-espacios vectoriales*

$$\theta_M : Hom_\Lambda(\Lambda e, M) \to eM$$

definido por $\varphi \mapsto \varphi(e) = e\varphi(e)$ $\forall \varphi \in Hom_\Lambda(\Lambda e, M)$, es isomorfismo.

Demostración. Definamos $\theta'_M : eM \to Hom_\Lambda(\Lambda e, M)$, por la fórmula

$$\theta'_M(em)(\alpha e) = (\alpha e)m.$$

Afirmamos que $\theta'_M(em) : \Lambda e \to M$ está bien definida, es decir, que si $\alpha e = \beta e$ entonces $\theta'_M(em)(\alpha e) = \theta'(em)(\beta e)$. En efecto

$$\theta'_M(em)(\alpha e) = (\alpha e)m = (\beta e)m = \theta'_M(em)(\beta e),$$

por lo tanto, θ'_M está bien definida. Es sencillo verificar que θ'_M es un morfismo de K-espacios vectoriales, por lo que resta ver que θ_M y θ'_M son inversas. Tenemos lo siguiente:

(a) $\theta_M(\theta'_M(em)) = \theta'_M(em)(e) = em$.

(b) $\theta'_M(\theta_M(\varphi)) = \theta'_M(\varphi(e)) = \theta'_M(e\varphi(e))$, además $\theta'_M(e\varphi(e))(\alpha e) = (\alpha e)\varphi(e) = \varphi(\alpha e)$ $\forall \alpha e \in \Lambda e$. Por lo tanto, $\theta'_M(\theta_M(\varphi)) = \varphi$.

En consecuencia θ_M es un isomorfismo de K-espacios vectoriales. □

El Teorema de Krull-Schimidt es de gran importancia a lo largo de este trabajo, es por eso que lo demostraremos. Para ello necesitamos los siguientes resultados.

Proposición 2.2.4. *Sea Λ una K-álgebra y M un Λ-módulo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) M es inescindible;

(b) La K-álgebra $\bar{\Lambda} = EndM$ tiene como únicos idempotentes a $0_{\bar{\Lambda}}$ y $1_{\bar{\Lambda}}$;

(c) Todo endomorfismo de M es un isomorfismo o nilpotente.

Demostración. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Sea $e \in \bar{\Lambda}$ un idempotente, entonces

$$M = Ime \bigoplus Im(1_{\bar{\Lambda}} - e),$$

de donde $e = 0_{\bar{\Lambda}}$ ó $e = 1_{\bar{\Lambda}}$.

Conversamente, supongamos que $M = U \bigoplus V$. Definamos $e : U \bigoplus V \to M$ con $e(u+v) = u$, claramente e es idempotente. Entonces $e = 0_{\bar{\Lambda}}$ ó $e = 1_{\bar{\Lambda}}$ y por lo tanto, $U = 0$ ó $V = 0$.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ Supongamos que M no es inescindible, de esta manera $M = M_1 \bigoplus M_2$ con $M_1, M_2 \neq 0$. Consideremos u_1, p_1 la proyección e inclusión asociada a M_1, entonces $u_1 p_1 \in EndM$ pero no es nilpotene ni isomorfismo. De esta manera tenemos una contradicción, en consecuencia M es inescindible.

Conversamente, tomemos $f \in EndM$, de esta manera $Im(f^n) \subseteq Imf \subseteq M$ $\forall n \geqslant 1$. Como M es finitamente generado en una K-álgebra de dimensión finita, entonces es de K-dimensión finita. Por lo tanto, hay dos posibilidades:

(i) Debe de existir $n \geqslant 1$, tal que $Im(f^n) = 0$, en tal caso f es nilpotente.

(ii) Debe de existr $m \geqslant 1$, tal que $Im(f^m) = Im(f^{m+i})$ $i = 1, 2, ...$, en particular $Imf(f^m) = Im(f^{2m})$. Sea $x \in M$, entonces $f^m(x) = f^{2m}(y)$ para alguna $y \in M$, por lo tanto, $f^m(x - f^m(y)) = 0$ y en consecuencia $x - f^m(y) \in Ker(f^m)$. De esta manera $x \in Ker(f^m) + Im(f^m)$, así, $M = Ker(f^m) + Im(f^m)$. Veamos que la suma es directa, sea $x \in Ker(f^m) \bigcap Im(f^m)$, entonces $x = f^m(y)$ para alguna $y \in M$. Por lo tanto, $0 = f^m(x) = f^{2m}(y) = f^m(y) = x$, en consecuencia $M = Ker(f^m) \bigoplus Im(f^m)$, pero M es inescindible por lo que $Im(f^m) = 0$ ó $Im(f^m) = M$. Recordemos que f no es nilpotente, entonces $Im(f^m) = M$ y $Ker(f^m) = 0$, abusando de la notación tenemos $f^m(M) = f^{m+1}(M)$ y así $f^m(f(M) - M) = 0$, en consecuencia $f(M) = M$. Además, es claro que $Ker(f^m) = 0$ implica $Kerf = 0$, de esta manera f es isomorfismo. □

Corolario 2.2.5. *Sea Λ una K-álgebra y M un módulo inescindible. Si hay $f_1, ..., f_n \in EndM$ tales que $\sum_{i=1}^n f_i$ es invertible, entonces existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que f_j es invertible.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción, si $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que $n > 1$, tenemos que $h = \sum_{i=1}^n f_i$ es invertible, entonces $id_M = \sum_{i=1}^n h^{-1} f_i$, y así, $id_M - h^{-1} f_1 = \sum_{i=2}^n h^{-1} f_i$. Por la Proposición 2.2.4 $h^{-1} f_1$ es isomorfismo o nilpotente, si es isomorfismo terminamos, si es nilpotente tenemos que existe $m \geqslant 1$ tal que $(h^{-1} f_1)^m = 0$

y entonces $id_M - h^1 f_1$ es invertible. Por lo tanto, usando la hipótesis de inducción, queda demostrada la proposición. □

Ahora procederemos a la demostración del Teorema de Krull-Schmidt.

Teorema 2.2.6 (Krull-Schmidt)**.** *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y M un módulo en mod-Λ.*

(a) M tiene una descomposición $M = M_1 \bigoplus ... \bigoplus M_m$, donde $M_1, ..., M_m$ son módulos inescindibles en Λ-mod. Además, la K-álgebra de endomorfismos $\bar{\Lambda} = End(M_j)$ tiene como únicos idempotentes a $0_{\bar{\Lambda}}$ y $1_{\bar{\Lambda}}$, para cada $j = 1, .., m$.

(b) Si $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i = \bigoplus_{j=1}^n N_j$, donde M_i y N_j son inescindibles. Entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, .., n\}$, tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, ..., n$.

Demostración. (a) Dado que $dim_K M$ es finita, M tiene una descomposición en inescindibles, es decir, una descomposición en suma directa de módulos inescindibles. Por la Proposición 2.2.4, el álgebra de endomorfismos de cada sumando directo inescindible de M cumple con el resto del inciso.

(b) Procederemos por inducción. Si $m = 1$, entonces M es inescindible y no hay nada que probar. Asumiremos que $m > 1$ y sea $M_1' = \bigoplus_{i>1} M_i$. Denotemos a las inclusiones y proyecciones asociadas a la descomposición $M = M_1 \bigoplus M_1'$ por $u, u'p, p'$ y a las asociadas con la descomposición $M = \bigoplus_{j=1}^n N_j$ por u_j, p_j, donde $j = 1, ..., n$. Tenemos que $id_{M_1} = pu = p(\sum_{j=1}^n u_j p_j)u = \sum_{j=1}^n p u_j p_j u$. Por el Corolario 2.2.5 existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $v = p u_j p_j u$ es invertible. Reacomodando los índices, si es necesario, podemos suponer que $j = 1$. Entonces $w = v^{-1} p u_1 : N_1 \to M_1$ satisface $w p_1 u = id_{M_1}$, entonces $p_1 u$ es monomorfismo y $p_1 u w \in End N_1$ es idempotente. De esta manera, por la Proposición 2.2.4, $p_1 u w$ debe ser id_{N_1} ó 0_{N_1}. Si $p_1 u w = 0_{N_1}$, entonces $p_1 u = 0_{N_1}$ pues w es un epimorfismo, pero esto es una contradicción ya que $v = p u_j p_j u$ es invertible. Por lo tanto, $p_1 u w = id_{N_1}$ y $p_1 u \in Hom_\Lambda(M_1, N_1)$ es isomorfismo. En consecuencia, $M \cong M_1 \bigoplus_{j>1} N_j$ y por la Proposición 1.2.4 tenemos que $\bigoplus_{i>1} M_i \cong \bigoplus_{j>1} N_j$. De esta manera el resultado se sigue por la hipótesis de inducción. □

Notemos que el álgebra Λ puede ser vista como un objeto en Λ-mod gracias a la multiplicación del anillo. De esta manera, ${}_\Lambda\Lambda$ tiene una única descomposición en módulos inescindibles. Es decir:

$$(*)\ {}_\Lambda\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_n$$

Dado que ${}_\Lambda\Lambda$ es libre, los Λ-módulos P_i son proyectivos $\forall i = 1, ..., n$. De esta manera cada P_i es proyectivo e inescindible.

A la descomposición $(*)$ de ${}_\Lambda\Lambda$, se le conoce como la descomposición del Λ-módulo regular ${}_\Lambda\Lambda$ en suma directa de proyectivos inescindibles. Nos referiremos a dicha descomposición más adelante.

Proposición 2.2.7. *Todo módulo proyectivo inescindible P en Λ-mod es isomorfo a algún P_i.*

Demostración. Sea P un Λ-módulo proyectivo inescindible. Como P es proyectivo, existe un Λ-módulo S y un Λ-módulo libre M, tal que $M = P \bigoplus S$. Además, dado que M es libre, tenemos $M = \bigoplus_{i=1}^{s} {}_\Lambda\Lambda$, y aplicando el Teorema 2.2.6 para Λ, obtenemos:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} P_i^s = M = P \oplus S$$

Aplicando el Teorema 2.2.6 a S, tenemos $S = \bigoplus_{j=1}^{m} Q_j$, con Q_j proyectivo inescindible $\forall j$. Entonces:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} P_i^t = P \bigoplus (\bigoplus_{j=1}^{m} Q_j)$$

Y por unicidad de la descomposición $P \cong P_i$, para algún $i = 1, ..., n$. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y*

$${}_\Lambda\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_n$$

su descomposición en proyectivos inescindibles y sea $1_\Lambda = e_1 + e_2 + ... + e_n$ la descomposición del 1_Λ en esta suma directa.
Entonces el conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ satisface las sigueintes propiedades:

(a) *$\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$; es decir completo.*

(b) *$e_i^2 = e_i$ $\forall i = 1, ...n$; es decir cada e_i es un idempotente.*

(c) *$e_ie_j = 0_\Lambda$ si $i \neq j$; es decir los e_i's son ortogonales.*

(d) *$\forall i = 1, ..., n$, $e_i \neq 0$ y si $e_i = f + g$ con f y g idempotentes ortogonales, entonces $f = 0_\Lambda$ ó $g = 0_\Lambda$; es decir, cada e_i es primitivo.*

Demostración. (a) Queda claro por la manera de escoger a los e_i.

(b) Tenemos que $e_i = e_i 1_\Lambda = e_ie_1 + ... + e_ie_i + ... + e_ie_n$. Como e_i se escribe de manera única como $e_i = 0_\Lambda + ... + e_i + ... + 0_\Lambda$, tenemos:

$$e_i^2 = e_i \text{ y } e_ie_j = 0_\Lambda \ \forall i \neq j.$$

(c) Se demostró en el inciso anterior.

(d) Afirmamos que $\Lambda e_i = P_i$. En efecto, ya sabemos que $\Lambda e_i \subseteq P_i$. Sea $x \in P_i$, tenemos que $x = x1_\Lambda = xe_1 + ... + xe_n$ y por la descomposición en suma directa, tenemos que $xe_j = 0_\Lambda$ $\forall i \neq j$. Por tanto, $x = xe_i \in \Lambda e_i$; de esta manera $\Lambda e_i \supseteq P_i$, por tanto $\Lambda e_i = P_i$, más aún $e_i \neq 0$ ya que $P_i \neq 0$.

Supongamos que $e_i = f + g$ con f y g idempotentes ortogonales, veremos que

$$\Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$$

Tenemos $\alpha e_i \in \Lambda e_i$, de donde $\alpha e_i = \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g \in \Lambda f + \Lambda g$, con lo que $\Lambda e_i \subseteq \Lambda f + \Lambda g$. Para la otra contención tomemos $\gamma f + \beta g \in \Lambda f + \Lambda g$; de donde, $(\gamma f+\beta g)e_i = \gamma f e_i + \beta g e_i = \gamma f^2 + \gamma f g + \beta g f + \beta g^2 = \gamma f + \beta g$ y como $\gamma f + \beta g \in \Lambda$ tenemos $(\gamma f + \beta g) \in \Lambda e_i \in \Lambda e_i$. Por lo tanto, $\Lambda e_i \supseteq \Lambda f + \Lambda g$.

Resta ver que la suma sea directa. Sea $x \in \Lambda f \cap \Lambda g$ de esta manera $x = \alpha f = \beta g$ con $\alpha, \beta \in \Lambda$. Esto implica $x = \alpha f = \alpha f^2 = \beta g f = 0_\Lambda$. Con lo que concluimos que:

$$P_i = \Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$$

Y como P_i es inescindible $\Lambda f = 0$ ó $\Lambda g = 0$, con esto $f = 0_\Lambda$ ó $g = 0_\Lambda$. □

A un conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ que satisface las cuatro propiedades de la proposición anterior se le conoce como un ***sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos*** .

El resultado siguiente muestra que la recíproca también es cierta.

Proposición 2.2.9. *Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Entonces*

$${}_\Lambda\Lambda = \Lambda e_1 \oplus ... \oplus \Lambda e_n$$

es una descomposición en proyectivos inescindibles de ${}_\Lambda\Lambda$.

Demostración. Tenemos que $\Lambda = \Lambda e_1 + ... + \Lambda e_n$ por tratarse de un sistema completo. Sea $x \in \Lambda e_j \cap \sum_{i\neq j}^n \Lambda e_i$, así $x = a e_j = \sum_{i\neq j}^n a_i e_i$. Por lo tanto,

$$x e_j = a e_j^2 = a e_j = x = \textstyle\sum_{i\neq j}^n a_i e_i e_j = 0_\Lambda.$$

De donde ${}_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i$. Además, cada sumando es inescindible ya que cada e_i es primitivo. □

Ahora enunciaremos una forma de establecer si un idempotente es primitivo.

Proposición 2.2.10. *Sea Λ una K-álgebra y $e \in \Lambda$ un idempotente. Entonces e es primitivo, si y sólo si, la K-álgebra $e\Lambda e$ sólo tiene a e y 0_Λ como idempotentes.*

Demostración. Sea $e \in \Lambda$ idempotente primitivo y $\alpha \in e\Lambda e$ idempotente. Tenemos que $e - \alpha$ es idempotente y $e - \alpha$, α son ortogonales. Además $e = \alpha + (e - \alpha)$, por lo tanto, $\alpha = e$ ó $\alpha = 0_\Lambda$, ya que e es idempotente primitivo.

Conversamente, si $e = f + g$ con f y g idempotentes ortogonales en Λ. Afirmamos que $f, g \in e\Lambda e$. En efecto, si $e = f + g$ entonces $fe = f^2 + fg = f = f^2 + gf = ef$, así $f = fe = fe^2 = efe \in e\Lambda e$. Análogamente $g = ege \in e\Lambda e$. Por lo tanto, $f = 0_\Lambda$ ó $g = 0_\Lambda$, de donde e es idempotente primitivo. □

Sea Λ una K-álgebra. Sabemos que el módulo regular izquierdo ${}_\Lambda\Lambda$ tiene una descomposición

$${}_\Lambda\Lambda = P_1 \bigoplus ... \bigoplus P_n$$

en Λ-módulos inescindibles. En dicha descomposición algunos módulos pueden ser isomorfos, así introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2.11. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Λ es básica si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición no son isomorfos. Es decir, $P_i \ncong P_j$ $\forall i \neq j$.*

Ejemplos 2.2.12.

(a) $\mathbb{R}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra básica, ya que sus únicos idempotentes son el 0 y 1.

(b) Afirmamos que $M_2(\mathbb{C})$ no es una $\mathbb{C}$-álgebra básica. En efecto, tenemos:

$$M_2(\mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bigoplus M_2(\mathbb{C})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1 \bigoplus P_2.$$

Y se verifica fácilmente que P_1 y P_2 son $M_2(\mathbb{C})$-módulos isomorfos.

Gracias a la siguiente proposición podemos restringir nuestro estudio sólo a K-álgebras básicas.

Proposición 2.2.13. *Para toda K-álgebra Λ de dimensión finita existe una K-álgebra Λ' de dimensión finita y básica tal que, Λ-mod y Λ'-mod son categorías equivalentes.*

Demostración. Ver Corolario 6.10, [ASS]. □

A continuación daremos la definición de una K-álgebra inescindible (o conectada).

Definición 2.2.14. *Sean Λ_1 y Λ_2 K-álgebras:*

(1) Dadas dos K-álgebras Λ_1 y Λ_2, la suma directa externa denotada por $\Lambda_1 \bigoplus \Lambda_2$ es la K-álgebra obtenida mediante la suma directa externa de los espacios vectoriales, con la multiplicación componente a componente. Es decir:

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_1', \lambda_2') = (\lambda_1\lambda_1', \lambda_2\lambda_2').$$

(2) Una K-álgebra Λ es inescindible (o conectada) como K-álgebra si no es suma directa de dos K-álgebras.

El siguiente resultado caracteriza a las K-álgebras inescindibles.

Proposición 2.2.15. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces Λ es inescindible como K-álgebra, si y sólo si, sus únicos idempotentes centrales son 0_Λ y 1_Λ.*

Demostración. Sea $e \in \Lambda$ un idempotente central, de esta manera:

$$\alpha = \alpha e + \alpha(1_\Lambda - e)\ \forall \alpha \in \Lambda$$

por lo tanto, $\Lambda = \Lambda e + \Lambda(1_\Lambda - e)$. Veremos que la suma es directa, sea $x \in \Lambda e \cap \Lambda(1_\Lambda - e)$, entonces:

$$x = \alpha(1_\Lambda - e) = \beta e \text{ para algún } \beta, \alpha \in \Lambda$$

de esta manera tenemos $\beta e = \beta e^2 = \alpha(1_\Lambda - e)e = 0_\Lambda$, pues e es idempotente y ortogonal a $(1_\Lambda - e)$. Así $\Lambda = \Lambda e \bigoplus \Lambda(1_\Lambda - e)$, y dado que e es central, es claro que Λe y $(1_\Lambda - e)$ son K-álgebras. Por lo tanto, $\Lambda(1_\Lambda - e) = 0$ ó $\Lambda e = 0$, lo que implica que $e = 1_\Lambda$ ó $e = 0_\Lambda$.

Conversamente, si $\Lambda = \Lambda_1 \bigoplus \Lambda_2$ tenemos que $1_\Lambda = (1_{\Lambda_1}, 1_{\Lambda_2})$. Claramente $(1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})$,$(0_{\Lambda_1}, 1_{\Lambda_2})$ son idempotentes centrales, así $\Lambda_1 = 0$ ó $\Lambda_2 = 0$. □

Ejemplos 2.2.16.

(a) *$\mathbb{R}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra inescindible ya que sus únicos idempotentes son 0 y 1.*

(b) *Sea ${}_{\mathbb{R}}\Lambda = \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{C}$, donde $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son $\mathbb{R}$-álgebras no triviales. Claramente Λ no es inescindible.*

Proposición 2.2.17. *Toda K-álgebra de dimensión finita es igual a una suma directa de un número finito de K-álgebras inescindibles de dimensión finita.*

Demostración. Si Λ es inescindible no hay nada que demostrar. Supongamos que Λ no es inescindible. Entonces $\Lambda = \Lambda_1 \bigoplus \Lambda_2$ donde Λ_1, Λ_2 son K-álgebras de dimensión finita, ya que Λ es de dimensión finita. Si Λ_1 y Λ_2 son inescindibles terminamos. Si alguna de ellas no es inescindible, digamos Λ_1, entonces $\Lambda_1 = \Lambda_3 \bigoplus \Lambda_4$. De la misma manera, si son inescindibles terminamos, sino, podemos aplicar el proceso nuevamente. Es claro que el proceso termina, ya que $dim_K \Lambda < \infty$, y de esta manera tenemos una descomposición de Λ en K-álgebras inescindibles de dimensión finita:

$$\Lambda = \Lambda_1 \bigoplus \Lambda_2 \bigoplus ... \bigoplus \Lambda_n$$

□

Del mismo modo que nos podemos restringir sólo a K-álgebras básicas, se tiene en virtud de la siguiente observación, que podemos restringirnos a K-álgebras inescindibles.

Observación 2.2.18. *Si $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda_i$, con Λ_i K-álgebras inescindibles de dimensión finita, entonces Λ-mod $\cong \times_{i=1}^{n} \Lambda_i$-mod.*

2.3. Radical de álgebras y módulos

En esta sección definiremos el radical de un álgebra y el radical de un módulo, así como algunas propiedades de éstos. De aquí en adelante supondremos que nuestros ***campos son algebráicamente cerrados***.

Definición 2.3.1. *El radical (de Jacobson) de una K-álgebra Λ es la intersección de todos los ideales maximales izquierdos de Λ, lo denotaremos por $rad\Lambda$.*

El siguiente resultado nos proporcionará una caracterización del radical de una K-álgebra Λ.

Proposición 2.3.2. *Sea Λ una K-álgebra y $a \in \Lambda$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $a \in rad\Lambda$;

(b) a está en la intersección de todos los ideales maximales derechos de Λ;

(c) Para cualquier $b \in \Lambda$, el elemento $1_\Lambda - ab$ tiene inverso multiplicativo;

(d) Para cualquier $b \in \Lambda$, el elemento $1_\Lambda - ab$ tiene inverso multiplicativo derecho;

(e) Para cualquier $b \in \Lambda$, el elemento $1_\Lambda - ba$ tiene inverso multiplicativo;

(f) Para cualquier $b \in \Lambda$, el elemento $1_\Lambda - ba$ tiene inverso multiplicativo izquierdo.

Demostración. $(a) \Rightarrow (f)$ Sea $b \in \Lambda$ y supongamos que $1_\Lambda - ba$ no tiene inverso izquierdo. Entonces existe un ideal maximal izquierdo I de Λ tal que $1_\Lambda - ba \in \Lambda$. Además, dado que $a \in rad\Lambda \subseteq I$, tenemos: $ba \in I$ y $1_\Lambda \in I$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto, $1_\Lambda - ba$ tiene inverso.

$(f) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $a \notin rad\Lambda$, sea I el ideal maximal izquierdo de Λ tal que $a \notin I$. Entonces $\Lambda = I + \Lambda a$ y por lo tanto, existen $x \in I$, $b \in \Lambda$ tal que $1_\Lambda = x + ba$, de esta manera $1_\Lambda - ba = x \in I$. En consecuencia, $1_\Lambda - ba$ no tiene inverso, lo que es una contradicción, de esta manera $a \in rad\Lambda$.

$(b) \Leftrightarrow (d)$ Se prueba de manera análoga a los anteriores incisos.

$(c) \Leftrightarrow (e)$ Se sigue de las siguientes igualdades, $\forall c, d, x, y \in \Lambda$:

- Si $(1_\Lambda - cd)x = 1_\Lambda$, entonces $(1_\Lambda - dc)(1_\Lambda + dxc) = 1_\Lambda$.
- Si $y(1_\Lambda - cd) = 1_\Lambda$, entonces $(1_\Lambda + dyc)(1_\Lambda - dc) = 1_\Lambda$.

$(d) \Rightarrow (c)$ Fijemos $b \in \Lambda$, por (d) existe $c \in \Lambda$ tal que $(1_\Lambda - ab)c = 1_\Lambda$. Por lo tanto, $c = 1_\Lambda - a(-bc)$ y usando de nuevo (d) tenemos que existe $c' \in \Lambda$ tal que $1_\Lambda = cc' = c' + abcc' = c' + ab$, de donde se sigue que $c' = 1_\Lambda - ab$ y entonces c es el inverso izquierdo de $1_\Lambda - ab$.

$(f) \Rightarrow (e)$ Es ánalogo a $(d) \Rightarrow (c)$.

Dado que $(c) \Rightarrow (d)$ y $(e) \Rightarrow (f)$ son claras, la proposición está demostrada. □

Corolario 2.3.3. *Sea $rad\Lambda$ el radical de la K-álgebra Λ. Entonces:*

(a) $rad\Lambda$ es la intersección de todos los ideales maximales derechos de Λ.

(b) $rad\Lambda$ es un ideal bilateral de Λ y $rad(\Lambda/rad\Lambda) = 0$.

(c) Si I es un ideal bilateral nilpotente de Λ, entonces $I \subseteq rad\Lambda$. Además si el álgebra Λ/I es isomorfa a la suma directa externa $K \bigoplus ... \bigoplus K$ de copias de K, entonces $I = rad\Lambda$.

Demostración. (a) Se sigue de la Proposición 2.3.2.

(b) Se sigue de (a) y del teorema de la correspondencia.

(c) Supongamos que $I^r = 0$ para alguna $r > 0$. Sea $x \in I$ y a un elemento de Λ. Entonces $ax \in I$ y $(ax)^r = 0$. De donde la siguiente igualdad se cumple $\forall a \in \Lambda$:

$$(1_\Lambda + ax + (ax)^2 + ... + (ax)^{r-1})(1_\Lambda - ax) = 1_\Lambda.$$

Y usando la Proposición 2.3.2 concluimos que $x \in rad\Lambda$. De esta manera, $I \subseteq rad\Lambda$. Para probar la otra contención, supongamos que $\Lambda/I \cong K \bigoplus ... \bigoplus K$, de donde claramente $rad(\Lambda/I) = 0$. Consideremos la proyección canónica $\pi : \Lambda \longrightarrow \Lambda/I$ y sea $a \in rad\Lambda$ y $\pi(b) = b+I \in \Lambda/I$ con $b \in \Lambda$, por la Proposición 2.3.2 $1_\Lambda - ba$ es invertible en Λ y por lo tanto, $\pi(1_\Lambda - ba) = 1_{\Lambda/I} - \pi(b)\pi(a)$ es invertible en Λ/I. De igual manera por la Proposición 2.3.2 nos da:

$$\pi(a) \in rad(\Lambda/I) = 0$$

Con lo cual $rad\Lambda \subseteq Ker\pi = I$.

□

Lema 2.3.4. *[Lema de Nakayama] Sea Λ una K-álgebra y J un ideal bilateral contenido en $rad\Lambda$. Sea N un Λ-módulo finitamente generado y supongamos que $JN = N$. Entonces $N = 0$.*

Demostración. Supongamos que $N \neq 0$. Consideremos entonces un sistema de generadores $\{w_1, ..., w_n\}$ del Λ-módulo N, de cardinalidad mínima. Como $JN = N$, podemos escribir: $w_1 = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ con $a_i \in J$, de donde $(1_\Lambda - a_1)w_1 = a_2w_2 + ... + a_nw_n$.

Si $1_\Lambda - a_1$ no es invertible, siempre existe un ideal maximal M que lo contiene, pero siendo a_1 elemento de J, está en todos los ideales maximales, en particular en M. Entonces $1_\Lambda \in M$, lo cual es una contradicción. Por tanto $1_\Lambda - a_1$ es invertible y w_1 se expresa como combinación lineal de $\{w_2, ..., w_n\}$, lo que es absurdo ya que es un sistema generadores de cardinalidad más pequeña que el conjunto que habíamos dado. $\square$

Corolario 2.3.5. *Sea Λ una K-álgebra (de dimensión finita). Entonces $rad\Lambda$ es nilpotente.*

Demostración. Dado que $dim_K\Lambda < \infty$, la cadena

$$\Lambda \geqslant rad\Lambda \geqslant (rad\Lambda)^2 \geqslant ... \geqslant (rad\Lambda)^m \geqslant (rad\Lambda)^{m+1} \geqslant ...$$

de K-espacios vectoriales se estaciona. Entonces $(rad\Lambda)^n = (rad\Lambda)^n rad\Lambda$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y usando el Lema 2.3.4 tenemos $(rad\Lambda)^n = 0$. $\square$

A continuación estudiaremos el radical de un módulo. Iniciaremos dando la definición del radical de un módulo y recordaremos la definición de módulo simple.

Definición 2.3.6. *Sea $M \neq 0$ un Λ-módulo izquierdo.*

(1) El radical de M, denotado $radM$, es el submódulo de M obtenido al intersecar todos los submódulos maximales izquierdos de M.

(2) M es simple si no tiene submódulos distintos de 0 y M.

(3) M es semisimple si es suma directa de módulos simples.

Ejemplos 2.3.7.

(a) Todo campo K es un K-módulo simple.

(b) Todo espacio vectorial V de dimensión uno es simple.

(c) El $\mathbb{R}$-módulo $M_2(\mathbb{R})$ no es simple.

Proposición 2.3.8. *Sean S, S' Λ-módulos y $f : S \to S'$ un Λ-morfismo distinto de cero. Se tiene:*

(a) Si S es simple, entonces f es monomorfismo.

(b) Si S' es simple, entonces f es epimorfismo.

(c) Si S y S' son simples, entonces f es isomorfismo.

Demostración. Dado que $f : S \to S'$ es un morfismo de Λ-módulos, $Kerf$ e Imf son Λ-submódulos de S y S' respectivamente. Sea $f : S \to S'$ distinto de cero, de esta manera:

(a) Si S es simple, entonces $Kerf = 0$ y por lo tanto, f es monomorfismo.

(b) Si S' es simple, enonces $Imf = S'$ y por lo tanto, f es epimorfismo.

(c) Se sigue directamente de (a) y (b). $\square$

Corolario 2.3.9. *Sea Λ una K-álgebra. Si S es un Λ-módulo simple, entonces hay un isomorfismo de K-álgebras $EndS \cong K$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.3.8 (c) que todo elemento distinto de cero en $EndS$ es invertible y por lo tanto, $EndS$ es un anillo con división. Dado que S es simple, S es un Λ-módulo cíclico y por lo tanto, $dim_K S < \infty$. Se sigue que $dim_K EndS < \infty$, por lo tanto, para cualquier $\varphi \neq 0 \in EndS$, existe un polinimio irreducible $f \in K[t]$ tal que $f(\varphi) = 0$. Dado que K es algebráicamente cerrado, f es de grado uno y así φ actúa sobre S como la multiplicación por un escalar $\lambda_\varphi \in K$. De este modo la correspondencia $\varphi \mapsto \lambda_\varphi$ establece un isomorfismo de K-álgebras. □

El siguiente teorema será necesario para resultados posteriores.

Teorema 2.3.10 (Wedderburn-Artin)**.** *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, con K algebráicamente cerrado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El Λ-módulo derecho Λ_Λ es semisimple;

(b) Todo Λ-módulo derecho es semisimple;

(c) El Λ-módulo izquierdo ${}_\Lambda\Lambda$ es semisimple;

(d) Todo Λ-módulo izquierdo es semisimple;

(e) $rad\Lambda = 0$

(f) Existen enteros positivos $m_1, ..., m_s$ y un isomorfismo de K-álgebras, tales que:

$$\Lambda \cong \mathbb{M}_{m_1}(K) \dot{+} ... \dot{+} \mathbb{M}_{m_s}(K).$$

Demostración. Ver el Teorema 3.4, [ASS]. □

Definición 2.3.11. *Sea Λ una K-álegbra. Decimos que Λ es semisimple si se cumple cualquiera de las condiciones del Teorema 2.3.10.*

Proposición 2.3.12. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Si Λ es semisimple, entonces todo Λ-módulo izquierdo (derecho) es proyectivo.*

Demostración. Ver la Proposición 4.5, [R]. □

Proposición 2.3.13. *Sea I un ideal bilateral de Λ y M un Λ-módulo tal que $IM = 0$. Entonces M tiene estructura de Λ/I-módulo y todos los Λ-submódulos de M son Λ/I-submódulos de M.*

Demostración. Consideremos la operación binaria $\Lambda/I \times M \to M$, donde $(\alpha + I, m) \mapsto \alpha m$. Veamos que es una función, si $\alpha - \alpha' \in I$ entonces $\alpha m - \alpha' m = (\alpha - \alpha')m = 0$ y por lo tanto, la operación binaria esta bien definida. Es claro que con esta operación M tiene estructura de $\Lambda/rad\Lambda$-módulo. Y el enunciado de la proposición se sigue. $\square$

El siguiente resultado nos será de utilidad.

Proposición 2.3.14. *Sean L, M y N Λ-módulos finitamente generados, con M y N distintos de cero.*

(a) Sea $m \in M$, $m \in radM$, si y sólo si, $f(m) = 0$ para cualquier $f \in Hom_\Lambda(M, S)$ con S un Λ-módulo simple.

(b) $rad(M \bigoplus N) = radM \bigoplus radN$.

(c) Si $f \in Hom_\Lambda(M, N)$, entonces $f(radM) \leqslant radN$.

(d) $(rad\Lambda)M = radM$.

(e) Si L, M son Λ-submódulos de N tales que, $L \subseteq radN$ y $L + M = N$, entonces $M = N$.

Demostración. (a) Tenemos que $f(M) \leqslant S$, pero S es simple por lo que $f(M) = 0$ ó $f(M) = S$. Si $f(M) = 0$ entonces no hay nada que probar; por otro lado si $f(M) = S$ tenemos que f es epimorfismo, de este modo usando el primer teorema de isomorfismo tenemos $M/Kerf \cong S$.Y como S es simple también lo es $M/Kerf$, así $Kerf$ es maximal en M, por lo tanto, todo $m \in radM$ pertenece a $Kerf$, de modo que $f(m) = 0$ $\forall m \in radM$. Conversamente, consideremos $\pi : M \to M/M'$ con $M' \leqslant M$ maximal y sea $m \in M$. Por hipótesis $\pi(m) = 0$ y entonces $m \in M'$ $\forall M'$ maximal, por lo tanto, $m \in radM$.

(b) Primero demostraremos que $radM \bigoplus radN \subseteq rad(M \bigoplus N)$. Sea A submódulo maximal de $M \bigoplus N$, consideremos:

$$M \xrightarrow{i} M \bigoplus N \xrightarrow{\pi} (M \bigoplus N)/A,$$

por (a) tenemos que $\pi i(m) = 0$ $\forall m \in radM$, por lo tanto, $radM \bigoplus 0 \subseteq A$, así $radM \bigoplus 0 \subseteq rad(M \bigoplus N)$. De manera análoga tenemos $0 \bigoplus radN \subseteq rad(M \bigoplus N)$ y en consecuencia $radM \bigoplus radN \subseteq rad(M \bigoplus N)$. Para la otra contención, sea $M' \leqslant M$ maximal. Consideremos:

$$M \bigoplus N \xrightarrow{\rho} M \xrightarrow{\pi} M/M',$$

por (a) tenemos que $\pi\rho(m, n) = 0$ $\forall (m, n) \in rad(M \bigoplus N)$, por lo tanto, $m \in M'$, así $m \in radM$. De manera análoga se tiene que $n \in radN$ y en consecuencia $rad(M \bigoplus N) \subseteq radM \bigoplus radN$.

(c) Sea $N' \leqslant N$ maximal, entonces N/N' es simple. Consideremos la proyección canónica $\pi : N \to N/N'$ y $\pi f : M \to N/N'$, por (a) tenemos que:

$$\pi f(x) = f(x) + N' = N' \ \forall x \in radM \text{ y } \forall N' \leqslant N \text{ maximal},$$

de esta manera $f(x) \in radN$ $\forall x \in radM$. Por lo tanto, $f(radM) \subseteq radN$ y entonces $f(radM) \leqslant radN$.

(d) Sea $m \in M$ y definamos un morfismo de Λ-módulos izquierdos como sigue, $f_m : \Lambda \to M$ tal que $f_m(a) = am$ con $a \in \Lambda$. Por (c) tenemos que $am = f_m(a) \in f_m(\Lambda) \subseteq radM$, $\forall a \in rad_\Lambda \Lambda$ y por lo tanto, $(rad\Lambda)M \subseteq radM$. Para la otra contención notemos que $rad\Lambda(M/(rad\Lambda)M) = 0$ y por la Proposición 2.3.13: $M/(rad\Lambda)M$ tiene estructura de $\Lambda/rad\Lambda$-módulo. Además, por el Teorema 2.3.10 el $\Lambda/rad\Lambda$-módulo $M/(rad\Lambda)M$ es semisimple y por lo tanto, es suma directa de $\Lambda/rad\Lambda$-módulos simples, además dado que el radical de todo módulo simple es cero, tenemos por (b) que $rad(M/(rad\Lambda)M) = 0$. Considerando la proyección canónica $\pi : M \to M/(rad\Lambda)M$ tenemos, como consecuencia de (c), que $\pi(radM) \subseteq rad(M/(rad\Lambda)M) = 0$ y de esta manera $radM \subseteq Ker\pi = (rad\Lambda)M$.

(e) Supongamos que $L \subseteq radN$ y $L + M = N$, haremos la demostración por contradicción, supongamos que $M \neq N$. Dado que N es de K-dimensión finita M está contenido en $X \subsetneq N$ maximal, por lo tanto, $L \subseteq radN \subseteq X$ y de este modo:

$$N = L + M \subseteq X + M = X,$$

lo cual es una contradicción ya que X es maximal en N. □

Proposición 2.3.15. *Sea $M \neq 0$ un Λ-módulo finitamente generado.*

(a) $rad(M/radM) = 0$.

(b) Si M es simple, entonces $(rad\Lambda)M = 0$.

(c) El Λ-módulo $M/radM$ es semisimple y es un módulo sobre la K-álgebra $\Lambda/rad\Lambda$.

Demostración. (a) Se sigue del teorema de la correspondencia.

(b) Se sigue inmediatamente del Lema 2.3.4.

(c) Por la Proposición 2.3.14 (d) tenemos $radM = (rad\Lambda)M$, así

$$rad\Lambda(M/radM) = 0$$

y por la Proposición 2.3.13 el Λ-módulo $M/radM$ tiene estructura de $\Lambda/rad\Lambda$-módulo. Ahora, por el Teorema 2.3.10 tenemos que el álgebra $\Lambda/rad\Lambda$ es semisimple y el módulo $M/radM$ es semisimple. □

Corolario 2.3.16. *Sea $M \neq 0$ un Λ-módulo finitamente generado.*

(b) *M es simple como Λ-módulo, si y sólo si, lo es como $\Lambda/rad\Lambda$-módulo.*

(a) *$radM = 0$, si y sólo si, M es semisimple.*

Demostración. (a) Se sigue de las Proposiciones: 2.3.13 y 2.3.15 (b).

(b) Si $radM = 0$, tenemos por la Proposición 2.3.15 (c) que $M = M/radM$ es semisimple como $\Lambda/rad\Lambda$-módulo, de esta manera $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i $\Lambda/rad\Lambda$-módulos simples $\forall i$ y así M es un $\Lambda/rad\Lambda$-módulo semisimple. En consecuencia, por (a), M es un Λ-módulo semisimple.

Conversamente, supongamos que M es semisimple, de esta manera tenemos que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, con M_i simples $\forall i = 1, ..., n$. Por la Proposición 2.3.14 (d) tenemos, $radM_i = (rad\Lambda)M_i = 0$ $\forall i = 1, ..., n$ y por la Proposición 2.3.15 (b) $rad(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) = 0$. Así, $radM = 0$. □

Recordemos que toda K-álgebra (de dimensión finita) Λ se puede descomponer como

$$_{\Lambda}\Lambda = \textstyle\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e_i.$$

Con $P_i := \Lambda e_i$ proyectivo inescindible. Por la Proposición 2.2.7 tenemos que todo Λ-módulo proyectivo inescindible P es isomorfo a algún P_i, de esta manera $\{\Lambda e_1, ..., \Lambda e_n\}$ es una lista completa de las clases de isomorfía de módulos proyectivos inescindibles.

De manera similar, el siguiente resultado nos dará las clases de isomorfía de los módulos simples en Λ-mod.

Proposición 2.3.17. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita y $\{e_1, ..., e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Entonces*

$$\{\Lambda e_1/rad\Lambda e_1, \Lambda e_2/rad\Lambda e_2, ..., \Lambda e_n/rad\Lambda e_n\}$$

es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los módulos simples en Λ-mod.

Además $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$ si y sólo si $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$.

Para su demostración necesitaremos algunas definiciones y resultados.

Definición 2.3.18. *Sea M y N en Λ-Mod. Un epimorfismo $f : M \longrightarrow N$ es superfluo si, cada vez que fg sea epimorfismo para algún $g : X \longrightarrow M$, g es epimorfismo.*

Ejemplos 2.3.19.

(a) *Todo isomorfismo de Λ-módulos es superfluo.*

(b) *Sean M, N Λ-módulos, consideremos su suma directa externa $M \bigoplus N$. Tenemos que la proyección en la primera coordenada $\rho : M \bigoplus N \to M$ no es superflua.*

Proposición 2.3.20. *Sean M un Λ-módulo finitamente generado e $I \subseteq rad\Lambda$ ideal bilateral de Λ. Entonces $\pi : M \twoheadrightarrow M/IM$ es un morfismo superfluo (donde π es la proyección canónica).*

Demostración. Sea $g : X \longrightarrow M$ morfismo de Λ-módulos y supongamos que fg es epimorfismo. Para mostrar que f es superfluo, debemos mostrar que g es epimorfismo, es decir, $Img = M$.

Consideremos M/Img, probaremos que $I(M/Img) = M/Img$, de donde tendremos que $M/Img = 0$ por el Lema 2.3.4.

Sabemos que $I(M/Img) = (IM + Img)/Img$, afirmamos que $Img + IM = M$. En efecto, sea $m \in M$, tenemos que $f(m) = m + IM$ y como fg es epimorfismo, esto implica que existe $x \in X$ tal que:

$$m + IM = fg(x) = f(g(x)) = g(x) + IM.$$

Por lo tanto, $m - g(x) = \alpha m'$ con $\alpha \in I$ y $m' \in M$, en consecuencia $m = g(x) + \alpha m' \in Img + M$. De esta manera tenemos que $M = Img + IM$, con lo que queda probada la proposición. □

Definición 2.3.21. *Sea M en Λ-mod. Entonces $\phi : P \twoheadrightarrow M$ en Λ-mod es una cubierta proyectiva si P es proyectivo y ϕ es superfluo.*

Se sabe que para los Λ-módulos finitamente generados la cubierta proyectiva existe. En este caso se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3.22. *Sea M en Λ-mod y $\phi : P \twoheadrightarrow M$ una cubierta proyectiva. Entonces $\phi : P \twoheadrightarrow M$ es única.*

Demostración. Sea M en Λ-mod, y $\phi : P \twoheadrightarrow M$ su cubierta proyectiva. Supongamos que existe $\psi : Q \twoheadrightarrow M$ otra cubierta proyectiva. Por ser Q proyectivo, existe $\alpha : Q \longrightarrow P$ tal que:

$$\phi\alpha = \psi.$$

Por lo tanto, α es epimorfismo. De manera similar, como P es proyectivo, existe $\beta : P \longrightarrow Q$ tal que:

$$\psi\beta = \phi,$$

de donde β es epimorfismo. Además consideremos que $\phi\alpha\beta = \phi$, de donde $\alpha\beta : P \to P$ es epimorfismo, y como P es proyectivo, existe $\gamma : P \to P$ tal que $\alpha\beta\gamma = 1_P$ y por lo tanto, γ es monomorfismo, para ver que es epimorfismo temos que:

$$\phi\gamma = \phi\alpha\beta\gamma = \phi 1_P = \phi,$$

de manera que γ es epimorfismo. Así, $\alpha\beta$ es isomorfismo y entonces β es isomorfismo. □

Ahora enunciaremos un resultado que nos será de utilidad.

Proposición 2.3.23. *Sea Λ una K-álgebra. Los idempotentes de la K-álgebra $\Lambda/rad\Lambda$ se pueden levantar módulo $rad\Lambda$, es decir, para cualquier idempotente $\eta = g + rad\Lambda \in \Lambda/rad\Lambda$ $(g \in \Lambda)$, existe un idempotente $e \in \Lambda$ tal que $g - e \in rad\Lambda$. Es decir, $\eta = e + rad\Lambda$.*

Demostración. Se sigue del Corolario 2.3.5 que $(rad\Lambda)^m = 0$ para alguna $m > 1$. Dado que $\eta^2 = \eta$, $g - g^2 \in rad\Lambda$ y por lo tanto, $(g - g^2)^m = 0$. De esta manera, por la fórmula del binomio de Newton, tenemos $0 = (g - g^2)^m = g^m - g^{m+1}t$, donde $t = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} g^{j-1}$. Se sigue

(i) $g^m = g^{m+1}t$

(ii) $gt = tg$

Afirmamos $e = (gt)^m \in \Lambda$ es el idempotente que levanta a η. Primero, notemos que $e = g^m t^m = g^{m+1}t^{m+1} = ... = g^{2m}t^{2m} = ((gt)^m)^2 = e^2$ y por lo tanto, e es un idempotente. Además tenemos

(iii) $g - g^m \in rad\Lambda$,

dado que $g - g^2 \in rad\Lambda$ implica las siguientes igualdades $g - g^m = (1_\Lambda - g^{m-1})g = (1_\Lambda + g + ... + g^{m-2})(1_\Lambda - g)g = (1_\Lambda + g + ... + g^{m-2})(g - g^2) \in rad\Lambda$, más aún

(iv) $g - gt \in rad\Lambda$.

Lo último se sigue porque de las igualdades (i)-(iii) tenemos

$$g + rad\Lambda = g^m + rad\Lambda = g^{m+1}t + rad\Lambda = (g^{m+1} + rad\Lambda)(t + rad\Lambda) =$$
$$(g^m + rad\Lambda)(g + rad\Lambda)(t + rad\Lambda) = (g + rad\Lambda)(g + rad\Lambda)(t + rad\Lambda) =$$
$$(g^2 + rad\Lambda)(t + rad\Lambda) = (g + rad\Lambda)(t + rad\Lambda) = gt + rad\Lambda.$$

En consecuencia, $e + rad\Lambda = (gt)^m + rad\Lambda = (gt + rad\Lambda)^m = (g + rad\Lambda)^m = g^m + rad\Lambda = g + rad\Lambda = \eta$ y por lo tanto, $e + rad\Lambda = \eta$. □

Ahora podemos proceder a la demostración de la Proposición 2.3.17.

Demostración. Haremos la demostración por partes:

(1) Cada $\Lambda e_i / rad\Lambda e_i$ es simple.

Tenemos que ${}_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e_i$, de esta manera podemos descomponer:

$$(*)\ \Lambda/rad\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e_i/rad\Lambda e_i.$$

Además por la Proposición 2.3.15 (c) $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i$ tiene estructura de $\Lambda/rad\Lambda$-módulo y dado que $\Lambda/rad\Lambda$ es semisimple, entonces $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i$ es semisimple. De esta manera, si algún sumando en la descomposición $(*)$ no fuera simple, obtendríamos un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos con más de n elementos, que podríamos levantar por la Proposición 2.3.23. Lo cual es una contradicción. De esta manera $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i$ es un Λ-módulo simple $\forall i = 1, ..., n$.

(2) Todo Λ-módulo simple es isomorfo a algún $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i$.

En efecto, tenemos la descomposición $(*)$. Sabemos que allí aparecen todos los proyectivos inescindibles de $\Lambda/rad\Lambda$. Pero $\Lambda/rad\Lambda$ es semisimple y se sigue del Teorema 2.3.10 y la Proposición 2.3.12 que todos sus módulos son semisimples y proyectivos, de donde se deduce que sobre $\Lambda/rad\Lambda$, los proyectivos inescindibles coinciden con los simples. Pero por el Corolario 2.3.16 (a), éstos son los Λ-módulos simples.

(3) $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$, si y sólo si, $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$.

Si $\phi : \Lambda e_i \to \Lambda e_j$ es isomorfismo de Λ-módulos, es claro que:

$$\Lambda e_i/rad\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$$

vía $\theta(ae_i + rad\Lambda e_i) = \phi(ae_i) + rad\Lambda e_j \ \forall a \in \Lambda$.

Por otro lado, si $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$, consideremos las proyecciones canónicas: $\pi : \Lambda e_i \to \Lambda e_i/(rad\Lambda e_i)\Lambda e_i$ y $\pi' : \Lambda e_j \to \Lambda e_j/(rad\Lambda e_j)\Lambda e_j$. Por la Proposición 2.3.20 tenemos que π y π' son superfluos, por lo tanto, son cubiertas proyectivas. La Proposición 2.3.22 concluye la desmostración. □

Corolario 2.3.24. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces*

(a) *Λ es básica, si y sólo si, el álgebra $\Lambda/rad\Lambda$ es isomorfa a una suma directa externa de copias de K.*

(b) *Todo módulo simple sobre una K-álgebra básica es de dimensión uno.*

Demostración. (a) Sea $\Lambda = \Lambda e_1 \bigoplus ... \Lambda e_n$ una descomposición en inescindibles. Entonces $\{e_1, ..., e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ. De esta manera, por la Proposición 2.3.17, $\Lambda/rad\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda e_i/rad\lambda e_i$ es una descomposición en inescindibles, más aún, simples. También por la Proposición 2.3.17 tenemos que $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$, si y sólo si, $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$, por lo tanto, si Λ es básica, entonces $\Lambda/rad\Lambda$ también lo es. Resta ver que es isomorfo a una suma directa de copias de K, para eso usemos la Proposición 2.3.8 y el Corolario 2.3.9, lo que nos da que: $Hom_{\Lambda/rad\Lambda}(\Lambda e_i/rad\Lambda e_i, \Lambda e_j/rad\Lambda e_j) = 0$ si $i \neq j$ y $End(\Lambda e_j/rad\Lambda e_j) \cong K \ \forall j = 1, .., n$. Por lo tanto, dado un elemento $\bar{\alpha} = \alpha + rad\Lambda$ (con $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, $\mu_i \in \Lambda \ \forall i = 1, ..., n$) y $j \leqslant n$, definimos:

$$\bar{\alpha_j} : \Lambda e_j/rad\Lambda e_j \to \Lambda e_j/rad\Lambda e_j; \ \bar{\alpha_j}(\bar{\beta e_j}) = \mu_j \beta e_j + rad\Lambda e_j,$$

donde y $\bar{\beta e_j} = \beta e_j + rad\Lambda e_j$. Claramente $\bar{\alpha_j}$ es un morfismo de $\Lambda/rad\Lambda$-módulos, además este morfismo induce un morfismo de K-álgebras: $\sigma_j : \Lambda/rad\Lambda \to End(\Lambda e_j/rad\Lambda e_j) \cong K$; $\sigma_j(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha_j}$. De esta manera podemos contruir otro morfismo de K-álgebras:

$$\sigma : \Lambda/rad\Lambda \to End(\Lambda e_1/rad\Lambda e_1) \bigoplus ... \bigoplus End(\Lambda e_n/rad\Lambda e_n) \cong K \bigoplus ... \bigoplus K$$

definido por $\sigma(\bar{\alpha}) = (\sigma_1(\bar{\alpha}), ..., \sigma_n(\bar{\alpha}))$, $\bar{\alpha} \in \Lambda/rad\Lambda$. Veremos que σ es inyectiva, sea $\bar{\alpha} \in \Lambda/rad\Lambda$ tal que $\sigma(\bar{\alpha}) = (\sigma_1(\bar{\alpha}), ..., \sigma_n(\bar{\alpha})) = 0$. Entonces $\sigma_j(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha_j} = 0 \ \forall j = 1, ..., n$, de esta manera $\bar{\alpha_j}(\bar{\beta e_j}) = \mu_j \beta e_j + rad\Lambda e_j = 0 + rad\Lambda e_j \ \forall \beta \in \Lambda$, $\forall j = 1, ..., n$. En particular, si $\beta = 1_\Lambda$, tenemos que $\mu_j e_j \in rad\Lambda e_j \ \forall j = 1, ..., n$, en consecuencia $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \in \bigoplus_{j=1}^{n} rad\Lambda e_j = rad\Lambda$ y por lo tanto, $\bar{\alpha} = 0_\Lambda + rad\Lambda$. Así σ es inyectiva, para la suprayectividad basta ver que las dimensiones de las K-álgebras son iguales y por lo tanto, σ es isomorfismo.

Conversamente, supongamos que $\Lambda/rad\Lambda \cong K \bigoplus ... \bigoplus K$, de esta manera $\Lambda/rad\Lambda$ es conmutativa y entonces las clases residuales de los e_i son idempotentes centrales $\forall i = 1, ..., n$. Afirmamos que $\Lambda e_i/rad\Lambda e_i \ncong \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$, para $i \neq j$. En efecto, supongamos por contradicción que existe un isomorfismo de Λ-módulos $\varphi : \Lambda e_i/rad\Lambda e_i \to \Lambda e_j/rad\Lambda e_j$. Así tenemos lo siguiente

$$\varphi(e_i + rad\Lambda e_i) = e_i(\alpha e_j + rad\Lambda e_j) = e_i\alpha e_j + rad\Lambda e_j = 0 + rad\Lambda e_j.$$

Por lo tanto, φ manda todo a cero. Lo cual es una contradicción ya que φ es un isomorfismo. De esta manera, por la Proposición 2.3.17, $\Lambda e_i \ncong \Lambda e_j$ $\forall i \neq j$. En consecuencia Λ es básica.

(b) Sea M un Λ-módulo simple, por el Corolario 2.3.16 (a) M es un $\Lambda/rad\Lambda$-módulo simple. Por hipótesis Λ es básica, de esta manera, debido al inciso anterior, $\Lambda/rad\Lambda \cong K \bigoplus ... \bigoplus K$. Por lo tanto, M es un $K \bigoplus ... \bigoplus K$-módulo simple y en consecuencia M es un K-módulo simple y en consecuencia $dim_K M = 1$. $\square$

Capítulo 3

Álgebras de carcaj

En este capítulo estudiaremos las álgebras de carcaj. Dichas álgebras juegan un papel importante en la Teoría de Representaciones debido a que se tiene el Teorema de Gabriel, el cual enunciaremos en el Capítulo 4.

3.1. Conceptos básicos

En esta sección enunciaremos y demostraremos los conceptos básicos relativos a las álgebras de carcaj.

Definición 3.1.1. *Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuádrupla que consiste de dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos son llamados puntos o vértices) y Q_1 (cuyos elementos se llaman flechas), y dos funciones $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su vértice inicial $s(\alpha) \in Q_0$ y su vértice final $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente.*

Ejemplos 3.1.2. *Los siguientes son ejemplos carcajes:*

(a)
$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[r, "\alpha"] & 2\circ \arrow[r, "\beta"] & 3\circ \\ 4\circ \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

(b)
$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[loop below, "\beta"] & 2\circ \arrow[dl, "\gamma"] \\ 3\circ \arrow[r, "\eta"'] & 4\circ \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

(c)
$$\begin{tikzcd} 1\circ & 2\circ \\ 3\circ & \end{tikzcd}$$

Notación 3.1.3. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj.*

- *Por simplicidad se denotará por $Q = (Q_0, Q_1)$ y más aún, cuando los vértices y flechas sean claros lo denotaremos simplemente por Q.*
- *Una flecha $\alpha \in Q_1$ con inicio $a = s(\alpha)$ y final $b = t(\alpha)$ se denotará por $a \xrightarrow{\alpha} b$.*

Notemos que un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, no es más que una gráfica dirigida.

Definición 3.1.4. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj.*

(a) Un subcarcaj de Q es una cuádrupla $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$, donde $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ y las restricciones $s\mid_{Q'_1}, t\mid_{Q'_1}$ de s,t a Q'_1, son iguales a s', t' respectivamente. Es decir, si $\alpha : a \to b \in Q_1$ es tal que $\alpha \in Q'_1$ y $a, b \in Q'_0$, entonces $s'(\alpha) = a$ y $t'(\alpha) = b$.

(b) Un subcarcaj es pleno si $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in Q'_0 \;\; y \;\; t(\alpha) \in Q'_0\}$.

(c) El carcaj es finito si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

(d) La gráfica subyacente $\bar{Q}$ del carcaj Q se obtiene olvidando la dirección de las flechas.

(e) El carcaj es conexo si $\bar{Q}$ es una gráfica conexa.

(f) Un camino de longitud $l \geqslant 1$ con inicio a y final b, es una sucesión

$$(b \mid \alpha_l, ..., \alpha_2, \alpha_1 \mid a),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$ para toda $1 \leqslant k \leqslant l$ y además $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para toda $1 \leqslant k < l$, y finalmente $t(\alpha_l) = b$.

(g) A cada $a \in Q_0$ le asociamos su camino de longitud cero y le llamamos camino trivial ó camino estacionario en el vértice a. Lo denotamos por: $\varepsilon_a = (a \mid\mid a)$.

(h) Un camino de longitud $l \geqslant 1$ es un ciclo cuando el vértice inicial y final coinciden. Un ciclo de longitud uno, se llama lazo.

(i) Un carcaj se dice acíclico si no tiene ciclos.

(j) Sean $a, b \in Q_0$, si existe un camino de a hacia b, decimos que a es predecesor de b y b es sucesor de a. En particular si existe $a \xrightarrow{\alpha} b$, se dice que a es predecesor inmediato de b y b es sucesor inmediato de a.

Ejemplos 3.1.5. *Consideremos los carcajes de 3.1.2.*

(1) En el carcaj (a) tenemos el siguiente subcarcaj: $Q'_0 = \{1, 2, 4\}$, $Q'_1 = \{\alpha, \gamma\}$, $s'(\alpha) = 1$, $s'(\gamma) = 4$ y $t'(\alpha) = t'(\gamma) = 2$. Además este subcarcaj es pleno.

(2) Consideremos el subcarcaj (Q'_0, Q'_1) del inciso anterior y sea (Q''_0, Q''_1) el carcaj donde $Q''_0 = Q'_0 \cup \{3\}$ y $Q''_1 = Q'_1$. Entonces (Q''_0, Q''_1) no es pleno pues $2 \xrightarrow{\beta} 3 \notin Q'_1$.

(3) Los carcajes dados en los incisos (a), (b) y (c) son finitos.

(4) La gráfica subyacente del carcaj (a) es:

$$
\begin{tikzcd}
1\circ \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2\circ \arrow[r, dash, "\beta"] & 3\circ \\
4\circ \arrow[ur, dash, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(5) El carcaj (a) es un carcaj conexo y los carcajes (b),(c) no son conexos.
(6) Los carcajes (a) y (c) son acíclicos.

Notación 3.1.6. *Sea Q un carcaj:*

- *Para cada $l \geqslant 0$ denotaremos por Q_l al conjunto de todos los caminos de longitud l.*
- *Para cada $a \in Q_0$ denotamos por a^+, a^-, al conjunto de todos los sucesores y predecesores directos de a respectivamente. De esta manera decimos que el conjunto $a^+ \bigcup a^-$ son los vecinos de a.*

Definición 3.1.7. *Sea Q un carcaj. El álgebra de caminos KQ de Q es la K-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base al conjunto de todos los caminos de longitud $l \geqslant 0$ en Q y tal que el producto de dos vectores de la base $(b \mid \alpha_l, ..., \alpha_1 \mid a)$ y $(d \mid \beta_k, ..., \beta_1 \mid c)$ de KQ, es definido por:*

$$(d \mid \beta_k, ..., \beta_1 \mid c) \cdot (b \mid \alpha_l, ..., \alpha_1 \mid a) = \delta_{bc}(d \mid \beta_k, ..., \beta_1, \alpha_l, ..., \alpha_1 \mid a),$$

donde δ_{bc} denota la delta de Kronecker. El producto de los vectores de la base se extiende K-bilinealmente a cualquier elemento de KQ.

Por comodidad escribiremos $\alpha_l ... \alpha_1$ en lugar de $(b \mid \alpha_l, ..., \alpha_1 \mid a)$. De la definición anterior podemos ver que hay una descomposición de KQ como K-espacio vectorial:

$$KQ = KQ_0 \bigoplus_K KQ_1 \bigoplus_K ... \bigoplus_K KQ_l \bigoplus_K ...,$$

donde para cada $l \geqslant 0$ KQ_l es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_l. Es fácil notar que $(KQ_n) \cdot (KQ_m) \subseteq KQ_{n+m}$ $\forall n, m \geqslant 0$, ya que el producto en KQ de caminos de longitud n y m es cero, ó un camino de longitud $n+m$. Esto se expresa algunas veces diciendo que la descomposición define una graduación en KQ o que KQ es un K-álgebra graduada.

Ejemplos 3.1.8.
(a) Sea Q el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
1\circ \arrow[loop right, "\alpha"]
\end{tikzcd} .
$$

Una base para el álgebra de caminos KQ es $\{\varepsilon_1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^l, ...\}$ y la multiplicación de los vectores de la base está dada por

$$
\begin{array}{ll}
\varepsilon_1 \alpha^l = \alpha^l \varepsilon_1 = \alpha^l & \textit{para toda } l \geqslant 1, \textit{ y} \\
\alpha^l \alpha^k = \alpha^{l+k} & \textit{para toda } l, k \geqslant 1.
\end{array}
$$

Por lo tanto, KQ es isomorfo al álgebra de polinomios $K[t]$. El isomorfismo está dado por el morfismo:

$$\varepsilon_1 \mapsto 1_K \quad y \quad \alpha \mapsto t.$$

(b) Sea Q el carcaj

$$1\circ \xleftarrow{\alpha} 2\circ \ .$$

Una base para el álgebra de caminos KQ es $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha\}$, con la siguiente tabla de multiplicación para los vectores de la base

	ε_1	ε_2	α
ε_1	ε_1	0	α
ε_2	0	ε_2	0
α	0	α	0

Claramente KQ es isomorfo al álgebra de matrices triangulares de 2×2

$$\mathbb{T}_2(K) = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & K \end{bmatrix} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in K\}$$

donde el isomorfismo está inducido por el morfismo de K-espacios vectoriales

$$\varepsilon_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposición 3.1.9. *Sea Q un carcaj y KQ su álgebra de caminos. Entonces:*

(a) KQ es un álgebra asociativa.

(b) KQ tiene uno, si y sólo si, Q_0 es finito.

(c) KQ es de K-dimensión finita, si y sólo si, Q es finito y acíclico.

Demostración. (a) Se sigue directamente de la definición de multiplicación.

(b) Claramente cada camino estacionario $\varepsilon_a = (a \mid\mid a)$ es un idempotente de KQ. Por lo tanto, si Q_0 es finito, $\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ está bien definida, además es fácil ver que es el uno de KQ. Conversamente, sea $1_{KQ} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ (donde λ_i son escalares distintos de cero y w_i son caminos de Q), y supongamos que Q_0 es infinito. El conjunto Q_0' de inicios de los caminos w_i tiene a lo más m elementos, por lo que es finito. De esta manera sea $a \in Q_0 \setminus Q_0'$, entonces $\varepsilon_a \cdot 1_{KQ} = 0_{KQ}$, lo cual es una contradicción, en consecuencia $Q_0 \subseteq Q_0' \subseteq Q_0$ y entonces Q_0 es finito.

(c) Si Q es infinito, también lo es la base de KQ y por lo tanto, KQ es de K-dimensión infinita. Si $w = \alpha_l ... \alpha_1$ es un ciclo en Q, entonces para cada $t \geqslant 0$ tenemos un vector base $w^t = (\alpha_l ... \alpha_1)^t$, por lo que de nuevo KQ

es de K-dimensión infinita. Por lo tanto, si KQ es de K-dimensión finita, entonces Q es finito y acíclico.

Conversamente, si Q es finito y acíclico, entonces todo camino es de longitud $l \leqslant\mid Q_0 \mid= n_0$. Por lo tanto, $Q_n = \varnothing\ \forall n > n_0$, de esta manera Q contiene un número finito de caminos y en consecuencia KQ es de K-dimensión finita. □

Ejemplo 3.1.10. *El álgebra del carcaj KQ, donde Q es el carcaj del Ejemplo 3.1.2 (a) es una álgebra de K-dimensión finita, ya que Q es finito y acíclico.*

Corolario 3.1.11. *Sea Q un carcaj finito. El elemento $1_{KQ} = \sum_{a\in Q_0} \varepsilon_a$ es el uno de KQ y el conjunto $\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$ de todos los caminos estacionarios $\varepsilon_a = (a \mid\mid a)$, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos para KQ.*

Demostración. Se sigue de la definición de multiplicación que $\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$ son idempotentes ortogonales, y como Q es finito $1_{KQ} = \sum_{a\in Q_0} \varepsilon_a$ es el uno de KQ. Por lo que resta demostrar que son primitivos, es decir, por la Proposición 2.2.10 tenemos que demostrar que los únicos idempotentes de $\varepsilon_a KQ \varepsilon_a$ son ε_a y 0_{KQ}, $\forall a \in Q_0$. Sea $\varepsilon \in \varepsilon_a KQ \varepsilon_a$ idempotente, sabemos que $\varepsilon = \lambda\varepsilon_a + w$, donde $\lambda \in K$ y w es una combinación lineal de ciclos que pasan por a de longitud $l \geqslant 1$. De esta manera la igualdad:

$$0 = \varepsilon^2 - \varepsilon = (\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1_K)w + w^2$$

nos da $w = 0$ y $\lambda^2 = \lambda$, por lo tanto, $\lambda = 0_K$ ó $\lambda = 1_K$. De donde $\varepsilon = 0_{KQ}$ ó $\varepsilon = \varepsilon_a$. □

Necesitaremos la siguiente proposición para un posterior resultado.

Proposición 3.1.12. *Sean Λ una K-álgebra y $\{e_1, ..., e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Entonces Λ es inescindible, si y sólo si, no existe una partición $I \bigsqcup J$ no trivial del conjunto $\{1, 2, .., n\}$, tal que si $i \in I$ y $j \in J$ entonces $e_i\Lambda e_j = 0_\Lambda = e_j\Lambda e_i$.*

Demostración. Supongamos que existe una partición que cumple las hipótesis de la proposición. Consideremos $c = \sum_{j\in J} e_j$, dado que la partición es no trivial tenemos que $c \neq 0_\Lambda, 1_\Lambda$. Además e_j es un idempotente ortogonal $\forall j \in J$, de esta manera c es un idempotente, más aún $ce_i = e_ic = 0_\Lambda$ $\forall i \in I$ y $ce_j = e_jc = e_j$ $\forall j \in J$. Tomemos $\alpha \in \Lambda$, por hipótesis tenemos $e_i\alpha e_j = 0_\Lambda = e_j\alpha e_i$ siempre que $i \in I$ y $j \in J$. En consecuencia:

$$c\alpha = (\textstyle\sum_{j\in J} e_j)\alpha = (\sum_{j\in J} e_j\alpha) \cdot 1_\Lambda = (\sum_{j\in J} e_j\alpha)(\sum_{i\in I} e_i + \sum_{k\in J} e_k) = \sum_{j,k\in J} e_j\alpha e_k = (\sum_{j\in J} e_j + \sum_{i\in I} e_i)\alpha \sum_{k\in K} e_k = \alpha c$$

Por lo tanto, c es un idempotente central y así $c = 0_\Lambda$ ó $c = 1_\Lambda$ y por la Proposición 2.2.15 tendríamos que Λ no es inescindible, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe dicha partición. Ahora supongamos que Λ no es inescindible, por lo que existe $c \in \Lambda$ idempotente central tal que $c \neq 0_\Lambda, 1_\Lambda$. Tenemos:

$$c = 1_\Lambda c 1_\Lambda = (\textstyle\sum_{i=1}^n e_i)c(\sum_{j=1}^n e_j) = \sum_{i,j=1}^n e_i c e_j = \sum_i^n e_i c e_i,$$

dado que c es central. Sea $c_i = e_i c e_i \in e_i \Lambda e_i$, entonces ${c_i}^2 = (e_i c e_i)(e_i c e_i) = e_i c^2 e_i = c_i$, de esta manera c_i es idempotente de $e_i \Lambda e_i$. Como e_i es primitivo, por la Proposición 2.2.10 tenemos que $c_i = 0_\Lambda$ ó $c_i = e_i$, por lo tanto, podemos considerar los siguientes conjuntos: $I = \{i \mid c_i = 0_\Lambda\}$ y $J = \{j \mid c_j = e_j\}$. Dado que $c \neq 0_\Lambda, 1_\Lambda$, tenemos una partición no trivial de $\{1, ..., n\}$, más aún, si $i \in I$ tenemos $e_i c = c e_i = 0_\Lambda$ y, si $j \in J$, tenemos $e_j c = c e_j = e_j$. Por lo tanto, si $i \in I$ y $j \in J$, $e_i \Lambda e_j = e_i \Lambda c e_j = e_i c \Lambda e_j = 0_\Lambda$ y lo mismo para $e_j \Lambda e_i$. Con lo que llegamos a una contradicción, en consecuencia Λ es inescindible. $\square$

Corolario 3.1.13. *Sea Q un carcaj finito. El álgebra de caminos KQ es inescindible, si y sólo si, Q es un carcaj conexo.*

Demostración. Supongamos que Q no es conexo, y sea Q' una componente conexa de Q. Denotemos por Q'' al subcarcaj pleno de Q, tal que $Q_0'' = Q \setminus Q_0'$. Por hipótesis Q', Q'' son no-vacíos, sean $a \in Q_0'$ y $b \in Q_0''$, dado que Q no es conexo cualquier camino w en Q está totalmente contenido en Q' o (en una componente conexa de) Q''. En el primer caso $w\varepsilon_b = 0_{KQ}$ y por lo tanto, $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0_{KQ}$, en el segundo caso tenemos $\varepsilon_a w = 0_{KQ}$ y de la misma manera $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0_{KQ}$. Esto muestra que $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b = 0_{KQ}$, y de manera análoga se muestra que $\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a = 0_{KQ}$. Además tenemos la siguiente partición $Q_0 = Q_0' \sqcup Q_0''$ y en consecuencia, por la Proposición 3.1.12, tenemos que KQ no es inescindible, lo cual es una contradicción. Así, Q es conexo.

Conversamente, supongamos que KQ no es inescindible. Por la Proposición 3.1.12 existe una partición $Q_0 = Q_0' \bigsqcup Q_0''$, tal que si $x \in Q_0'$ y $y \in Q_0''$, entonces $\varepsilon_x(KQ)\varepsilon_y = 0_{KQ} = \varepsilon_y(KQ)\varepsilon_x$. Dado que Q es conexo existen $a \in Q_0'$ y $b \in Q_0''$, tales que son vecinos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $a \xrightarrow{\alpha} b \in Q_1$. De esta manera tenemos:

$$\alpha = \varepsilon_b \alpha \varepsilon_a \in \varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a = 0_{KQ}.$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto, KQ es inescindible. $\square$

Ejemplo 3.1.14. *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[loop left, "\alpha"] & & 2\circ \arrow[r, "\beta"] & 3\circ \end{tikzcd}$$

Como Q no es conexo, KQ no es inescindible y por lo tanto, tenemos una partición $Q = Q' \sqcup Q''$, donde $Q' = \{1\}$ y $Q'' = \{2, 3\}$. Además $\varepsilon_1(KQ)\varepsilon_j = \varepsilon_j(KQ)\varepsilon_1 = 0_{KQ}$ con $j = 2, 3$.

Hasta ahora sabemos que si Q es un carcaj finito y conexo, entonces el álgebra de caminos KQ de Q, es una K-álgebra asociativa inescindible con uno, que admite $\{\varepsilon_a = (a \mid\mid a) \mid a \in Q_0\}$ como sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Ahora lo caracterizaremos por una propiedad universal.

Teorema 3.1.15. *Sea Q un carcaj finito y Λ una K-álgebra. Para cualquier par de funciones $\varphi_0 : Q_0 \to \Lambda$ y $\varphi_1 : Q_1 \to \Lambda$ que satisfagan las siguientes condiciones:*

(i) $1_\Lambda = \sum_{a\in Q_0} \varphi_0(a)$, $\varphi_0(a)^2 = \varphi_0(a)$, y $\varphi_0(a) \cdot \varphi_0(b) = 0_\Lambda$ $\forall a \neq b$,

(ii) Si $\alpha : a \to b$, entonces $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(b)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(a)$,

entonces existe un único morfismo de K-álgebras $\varphi : KQ \to \Lambda$, tal que $\varphi(\varepsilon_a) = \varphi_0(a)$ $\forall a \in Q_0$ y $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ $\forall \alpha \in Q_1$.

Demostración. Primero demostraremos la existencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos un morfismo de K-espacios vectoriales $\bar{\varphi_n} : KQ_n \to \Lambda$ como sigue:

- $n = 0$, $\bar{\varphi_0} : KQ_0 \to \Lambda$ es la extensión K-lineal de φ_0.
- $n = 1$, $\bar{\varphi_1} : KQ_1 \to \Lambda$ es la extensión K-lineal de φ_1.
- $n \geqslant 2$, consideremos $w = \alpha_n ... \alpha_1 \in Q_n$ con $\alpha_i \in Q_1$ $\forall i = 1, ..., n$. Definimos $\bar{\varphi_n}(w) := \varphi_1(\alpha_n)...\varphi_1(\alpha_1)$ y extendemos K-linealmente a KQ_n.

Afirmamos que pasa lo siguiente:

$$(*)\ \forall w \in Q_n, \forall \gamma \in Q_m\ \bar{\varphi}_{n+m}(\gamma w) = \bar{\varphi_m}(\gamma)\bar{\varphi_n}(w).$$

En efecto, las condiciones (i), (ii) que satisfacen φ_0 y φ_1, nos permiten probar $(*)$ para los casos $(n, m) = \{(i, j) \mid i, j = 0, 1\}$. Supongamos que $n, m \geqslant 1$, sean $w = \alpha_n ... \alpha_1$ y $\gamma = \beta_m ... \beta_1$, donde $\alpha_i, \beta_j \in Q_1$ $\forall i, j$. Tenemos dos casos:

(1) $t(\alpha_n) \neq s(\beta_1)$, luego $\gamma w = 0_{KQ}$ y entonces $\bar{\varphi}_{n+m}(\gamma w) = 0_\Lambda$. Por otro lado se tiene que:

$$\bar{\varphi_m}(\gamma)\bar{\varphi_n}(w) = \varphi_1(\beta_m)...\varphi_1(\beta_1)\varphi_0(s(\beta_1))\varphi_0(t(\alpha_n))\varphi_1(\alpha_n)...\varphi_1(\alpha_1) = 0_\Lambda.$$

(2) $t(\alpha_n) = s(\beta_1)$, luego $\gamma w = \beta_m ... \beta_1 \alpha_n ... \alpha_1$. Por lo tanto:

$$\bar{\varphi}_{n+m}(\gamma w) = \varphi_1(\beta_m)...\varphi_1(\beta_1)\varphi_1(\alpha_n)...\varphi_1(\alpha_1) = \bar{\varphi_m}(\gamma)\bar{\varphi_n}(\alpha).$$

Por lo tanto, $(*)$ es válida. Además, dado que $KQ = \bigoplus_{l\geqslant 0} KQ_l$ y por la propiedad universal del co-producto, existe una única $\varphi : KQ \to \Lambda$ que es K-lineal y $\varphi\mid_{KQ_n} = \bar{\varphi_n}$ $\forall n$. Más aún,

$$\varphi(1_{KQ}) = \varphi(\textstyle\sum_{a\in Q_0} \varepsilon_a) = \sum_{a\in Q_0} \varphi(\varepsilon_a) = \sum_{a\in Q_0} \bar{\varphi_0}(\varepsilon_a) = 1_\Lambda,$$

además por $(*)$ φ preserva prodtuctos. De esta manera $\varphi : KQ \to \Lambda$ es un morfismo de K-álgebras que extiende a φ_0 y φ_1. Resta mostrar que es el único morfismo que satisface (i) y (ii), supongamos que $\phi : KQ \to \Lambda$ es un morfismo de K-álgebras que extiende a φ_0,φ_1 y satisface las propiedades (i),(ii). Entonces $\phi(\alpha_n...\alpha_1) = \phi(\alpha_n)...\phi(\alpha_1) = \varphi_1(\alpha_n)...\varphi_1(\alpha_1) = \varphi(\alpha_n...\alpha_1)$, por lo tanto, $\phi = \varphi$ y así queda demostrada la proposición. $\square$

Quisieramos calcular el radical del álgebra de caminos KQ, donde Q es un carcaj finito, conexo y acíclico. Para eso necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.1.16. *Sea Q un carcaj finito. El ideal bilateral del álgebra de caminos KQ generado (como ideal) por las flechas de Q es llamado ideal de flechas de KQ, y es denotado por R_Q.*

Notemos que hay una descomposición de R_Q como K-espacio vectorial:

$$R_Q = KQ_1 \bigoplus\nolimits_K ... \bigoplus\nolimits_K KQ_l \bigoplus\nolimits_K ...$$

del K-espacio vectorial R_Q, donde KQ_l es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_l de todos los caminos de longitud l. De esta manera tenemos que el K-espacio vectorial subyacente de R_Q es generado por todos los caminos de Q de longitud $l \geqslant 1$. Esto implica que, para cada $l \geqslant 1$,

$$R_Q^l = \bigoplus\nolimits_{m \geqslant l} KQ_m$$

y por lo tanto, R_Q^l es el ideal de KQ generado por todos los caminos de longitud mayor o igual a l. En consecuencia, el K-espacio vectorial R_Q^l/R_Q^{l+1} es generado por todas las clases residuales de todos los caminos en Q de longitud (exactamente) igual a l. De esta manera podemos definir el siguiente morfismo de K-espacios vectoriales

$$\varphi : KQ_l \to R_Q^l/R_Q^{l+1} \text{ con } \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i) + R_Q^{l+1},$$

donde $\lambda_i \in K$ y w_i es un camino de longitud l $\forall i = 1, ..., n$ y $n \in \mathbb{N}$. Claramente φ es un isomorfismo de K-espacios vectoriales y en consecuencia $KQ_l \cong R_Q^l/R_Q^{l+1}$.

Ejemplo 3.1.17. *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[r, "\alpha"] & 2\circ \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"] & 3\circ \\ & & 4\circ \end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos $R_Q = \{\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \lambda_3\gamma + \lambda_4\beta\alpha + \lambda_5\gamma\alpha \mid \lambda_i \in K, i = 1, ..., 5\}$. Además:

- *$KQ_1 = \{\eta_1\alpha + \eta_2\beta + \eta_3\gamma \mid \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in K\}$;*

- $KQ_2 = \{\eta_4\beta\alpha + \eta_5\gamma\alpha \mid \eta_4, \eta_5 \in K\}$;
- $KQ_n = 0\ \forall n \geqslant 3$.

Proposición 3.1.18. *Sea Q un carcaj finito, R_Q el ideal de flechas de KQ y $\varepsilon_a = (a \mid\mid a)$ para $a \in Q_0$. El conjunto $\{\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R_Q \mid a \in Q_0\}$, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos para KQ/R_Q, y éste último es isomorfo a la suma directa externa de copias de K. Además, si Q es acíclico, entonces $radKQ = R_Q$ y KQ es una K-álgebra básica de K-dimensión finita.*

Demostración. Claramente hay una descomposición:

$$KQ/R_Q = \bigoplus\nolimits_{a,b \in Q_0} \bar{\varepsilon}_b (KQ/R_Q) \bar{\varepsilon}_a$$

como K-espacio vectorial. Pero como R_Q contiene a todos los caminos de longitud $l \geqslant 1$, entonces:

$$KQ/R_Q = \bigoplus\nolimits_{a \in Q_0} \bar{\varepsilon}_a (KQ/R_Q) \bar{\varepsilon}_a.$$

Por lo tanto, KQ/R_Q es generado, como K-espacio vectorial, por todas las clases residuales de caminos de longitud cero, es decir, por el conjunto $\{\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R_Q \mid a \in Q_0\}$. Por el Corolario 3.1.11 el conjunto es un sistema completo de idempotentes ortogonales, resta ver que son primitivos, para eso tenemos que demostrar que los únicos idempotentes de $\bar{\varepsilon}_a(KQ/R_Q)\bar{\varepsilon}_a$ son $\bar{0}_{KQ}$ y $\bar{\varepsilon}_a$, $\forall a \in Q_0$, esto por la Proposición 2.2.10. Sea $\bar{\varepsilon} \in \bar{\varepsilon}_a(KQ/R_Q)\bar{\varepsilon}_a$ idempotente, sabemos que $\bar{\varepsilon} = (\lambda\varepsilon_a + w) + R_Q$, donde $\lambda \in K$ y w es una combinación lineal de ciclos que pasan por a de longitud $l \geqslant 1$. De esta manera la igualdad

$$\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon} = (\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1_K)w + w^2 \in R_Q$$

nos da $\lambda^2 = \lambda$, por lo tanto, $\lambda = 0_K$ ó $\lambda = 1_K$. De donde $\bar{\varepsilon} = w + R_Q$ ó $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_a$ y en consecuencia $\bar{\varepsilon}_a$ es primitivo $\forall a \in Q_0$. Más aún, para cada $a \in Q_0$, el álgebra $\bar{\varepsilon}_a(KQ/R_Q)\bar{\varepsilon}_a$ es generada, como K-espacio vectorial, por $\bar{\varepsilon}_a$ y en consecuencia es isomorfa a K como K-álgebra. Esto muestra que el álgebra cociente KQ/R_Q es isomorfa al producto de $\mid Q_0 \mid$ copias de K.

Supongamos ahora que Q es acíclico, por la Proposición 3.1.9 (c) KQ es de K-dimensión finita. De esta manera existe un camino de longitud máxima, sea $l \geqslant 0$ dicha longitud. Esto implica que cualquier producto de $l+1$ flechas es cero, por lo tanto, $R_Q^{l+1} = 0$. En consecuencia R_Q es nilpotente, y además KQ/R_Q es isomorfo a la suma directa de copias de K, así $R_Q = radKQ$ por el Corolario 2.3.3 (c) y además KQ es básica por el Corolario 2.3.24 (a). □

Si Q no es acíclico, en general no es verdad que $radKQ = R_Q$. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.19. *Sea Q el carcaj:*

$$1\circ \circlearrowright \alpha$$

Recordemos que $KQ \cong K[t]$. *Por lo tanto,* $radKQ = 0_{KQ}$, *esto se debe a que el campo* K *es algebraicamente cerrado (por lo tanto, infinito) y el conjunto* $\{t-\lambda \mid \lambda \in K\}$ *es un conjunto infinito de polinomios irreducibles, que generan un número infinito de ideales maximales de* $K[t]$. *Afirmamos que su intersección es cero. En efecto, sea* $x \in \bigcap_{\lambda\in K} \langle t-\lambda\rangle$, *de esta manera* $x(\lambda) = 0_K$ $\forall\lambda \in K$, *lo que implica que* x *tiene como factor a* $(t-\lambda)$ $\forall\lambda \in K$ *y de esta manera, si* $x \neq 0$, *entonces tendría grado infinito, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,* $x = 0$.

Por otro lado, $R_Q = \bigoplus_{l>0} K\alpha^l$ *como* K*-espacio vectorial y por lo tanto, distinto de cero. En consecuencia tenemos que* $radKQ \neq R_Q$.

Resumiremos nuestros resultados en el siguiente corolario.

Corolario 3.1.20. *Sea* Q *un carcaj finito, conexo y acíclico. El álgebra de caminos* KQ *es una* K*-álgebra asociativa, básica, inescindible y de* K*-dimensión finita con uno; teniendo al ideal de flechas como radical y al conjunto* $\{\varepsilon_a = (a \mid\mid a) \mid a \in Q_0\}$ *como sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones: (3.1.9), (3.1.18) y los Corolarios: (3.1.13), (3.1.11). $\square$

Ahora daremos una construcción para demostrar que una K-álgebra KQ, donde Q satisface las condiciones del Corolario 3.1.20, se puede ver como una K-álgebra de matrices triangulares inferiores. Empezaremos recordando una contrucción clásica para álgebras de matrices. Sea $(\Lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ una familia de K-álgebras y $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ una familia de Λ_i-Λ_j-bimódulos tal que $M_{ii} = \Lambda_i$ para cada i. Supongamos que para cada terna (i,j,k) tenemos un morfismo de Λ_i-Λ_k-bimódulos

$$\varphi^j_{ik} : M_{ij} \otimes M_{jk} \to M_{ik},$$

que satisface, para cada cuádrupla (i,j,k,l), la siguiente condición

$$(*) \quad \varphi^k_{il}(\varphi^j_{ik} \otimes id_{M_{kl}}) = \varphi^j_{il}(id_{M_{ij}} \otimes \varphi^k_{jl}),$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_{ij} \otimes M_{jk} \otimes M_{kl} \arrow[r, "id_{M_{ij}}\otimes\varphi_{jl}"] \arrow[d, "\varphi^j_{ik}\otimes id_{M_{kl}}"] & M_{ij} \otimes M_{jl} \arrow[d, "\varphi^j_{il}"'] \\
M_{ik} \otimes M_{kl} \arrow[r, "\varphi^k_{il}"'] & M_{il}
\end{tikzcd}$$

Como cada M_{ij} es un K-espacio vectorial, el espacio $n \times n$ matrices

$$A = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} = \{[x_{ij}] \mid x_{ij} \in M_{ij}, \text{ para toda } 1 \leqslant i, j \leqslant 0\}$$

es un K-espacio vectorial. Para ver que A es una K-álgebra, resta definir un producto y ver que cumpla con las propiedades deseadas. Así, defniniremos la multiplicación por la fórmula

$$[x_{ij}] \cdot [y_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj})\right].$$

Usando las propiedades del producto tensorial y como φ_{ik}^{j} satisface $(*)$ $(\forall i, j, k)$, A es un anillo. Por último veremos que cumple con la propiedad (1) de la definición 2.1.1. Tenemos las siguientes igualdades:

(*a*) $\alpha([x_{ij}] \cdot [y_{ij}]) = \alpha[\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n} \alpha\varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n}(\alpha 1_{\Lambda_i})\varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(\alpha x_{ik} \otimes y_{kj})] = [\alpha x_{ij}] \cdot [y_{ij}]$.

(*b*) $[\alpha x_{ij}] \cdot [y_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(\alpha x_{ik} \otimes y_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik}\alpha \otimes y_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes \alpha y_{kj})] = [x_{ij}] \cdot [\alpha y_{ij}]$.

(*c*) $[x_{ij}] \cdot [\alpha y_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes \alpha y_{kj})] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj}\alpha)] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj})\alpha] = [\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ij}^{k}(x_{ik} \otimes y_{kj})]\alpha = ([x_{ij}] \cdot [y_{ij}])\alpha$.

En consecuencia

$$\alpha([x_{ij}] \cdot [y_{ij}]) = [\alpha x_{ij}] \cdot [y_{ij}] = [x_{ij}] \cdot [\alpha y_{ij}] = ([x_{ij}] \cdot [y_{ij}])\alpha,$$

$\forall [x_{ij}], [y_{ij}] \in A$ y $\forall \alpha \in K$. Por lo tanto, A es una K-álgebra.

Observación 3.1.21. *Sea Q un carcaj finito y acíclico. Supongamos que $n =\mid Q_0 \mid$ es el número de vértices en Q. Entonces podemos enumerar los vértices de Q, de 1 a n, de tal manera que si existe un camino de i a j, entonces $i \leqslant j$.*

Demostración. Si $i = j$ la observación se cumple, por lo que supongamos que $i \neq j$. Como Q es finito y acíclico, el siguiente conjunto es finito $\{w \in Q \mid w \text{ es camino de } Q\}$. Enumeramos los vértices inciales de los caminos de longitud máxima (supongamos que la longitud máxima es l), empezando desde 1. Después enumeramos los caminos de longitud $l-1$ siguiendo la numeración que dejamos en los vértices inciales de los caminos de longitud l, si algún vértice se repite, dejamos el menor número. Recursivamente enumeramos los demás vértices iniciales. Afirmamos que este proceso demuestra la observación, en efecto, sea w un camino de i a j y consideremos

k, s los máximos de las longitudes de caminos que inician en i y en j (respectivamente). Como todo camino que inician en j es parte de un camino que inicia en i, tenemos que $s < k$ y por lo tanto (usando el procedimiento antes mencionado) $i < j$. □

Proposición 3.1.22. *Sea Q un carcaj finito y acíclico, con $Q_0 = \{1, 2, ..., n\}$ tal que, para cada $i, j \in Q_0$, si existe un camino de i a j, tenemos que $i \leqslant j$. Entonces el álgebra de caminos KQ es isomorfo al álgebra de matrices triangulares*

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(KQ)\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_2(KQ)\varepsilon_1 & \varepsilon_2(KQ)\varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n(KQ)\varepsilon_1 & \varepsilon_n(KQ)\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n(KQ)\varepsilon_n \end{bmatrix},$$

donde $\varepsilon_a = (a \mid\mid a)$ para cualquier $a \in Q_0$.

Demostración. Dado que $\{\varepsilon_a = (a \mid\mid a) \mid a \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos para KQ, tenemos una descomposición del K-espacio vectorial KQ

$$KQ = \bigoplus_{a,b \in Q_0} \varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a.$$

Se sigue de la hipótesis que si $\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_i \neq 0$ entonces $i \leqslant j$. Para cada $i \in Q_0$ la ausencia de ciclos a través de i implica que la K-álgebra $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i$ es isomorfa a K. La definición de multiplicación en KQ implica que, para cada par (i, j) tal que $i \leqslant j$, $\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_i$ es un $\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_j$-$\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i$-bimódulo y, para cada triplete (k, i, j) tal que $k \leqslant i \leqslant j$, existe una función K-lineal

$$\varphi^i_{jk} : \varepsilon_j(KQ)\varepsilon_i \otimes \varepsilon_i(KQ)\varepsilon_k \to \varepsilon_j(KQ)\varepsilon_k,$$

donde el producto tensorial se tomó sobre $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i$. Es fácil ver que los φ^i_{jk} son morfismos de $\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_j$-$\varepsilon_k(KQ)\varepsilon_k$-bimódulos, que satisface la condición $\varphi^k_{jl}(\varphi^i_{jk} \otimes id_{kl}) = \varphi^i_{jl}(id_{ji} \otimes \varphi^k_{il})$ cuando $l \leqslant k \leqslant i \leqslant j$, donde $id_{kl} = id_{\varepsilon_k(KQ)\varepsilon_l}$ e $id_{ji} = id_{\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_i}$. Ahora, asociando a cada camino de i a j en KQ, el correspondiente elemento en A (es decir, elemento de la base del bimódulo $\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_i$), tendríamos un isomorfismo de K-álgebras $KQ \cong A$. En efecto, las álgebras A y KQ son claramente isomorfas como K-espacios vectoriales y la biyección entre sus bases es compatible con la multiplicación en las álgebras (esto por la definición de φ^i_{jk}), por lo tanto, el isomorfismo de K-espacios vectoriales es un isomorfismo de K-álgebras. □

En particular, si Q no tiene flechas múltiples y su gráfica subyacente es un árbol (es decir conexa y acíclica), entonces sólo hay un camino entre dos puntos de Q. De esta manera para todo $i \leqslant j$ tenemos $dim(\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_i) \leqslant 1$. En consecuencia, KQ es isomorfa al álgebra

$$\mathbb{T}_n(K) = \begin{bmatrix} K & 0 & \cdots & 0 \\ K & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \cdots & K \end{bmatrix}.$$

Ejemplos 3.1.23.

(a) *Sea Q el carcaj*

$$1\circ \longrightarrow 2\circ \longrightarrow \cdots \longrightarrow (n-1)\circ \longrightarrow n\circ$$

La construcción dada en la Proposición 3.1.22 da un isomorfismo de K-álgebras $KQ \cong \mathbb{T}_n(K)$.

(b) *Sea Q el carcaj*

$$1\circ \rightrightarrows 2\circ$$

Entonces hay un isomorfismo de K-álgebras

$$KQ \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix},$$

donde K^2 es considerado como K-K-bimódulo de la siguiente manera

$$a \cdot (x, y) = (ax, ay), \quad (x, y) \cdot b = (xb, yb)$$

para toda $a, b, x, y \in K$.

(c) *Sea Q el carcaj* $3\circ \longleftarrow 2\circ \Lleftarrow 1\circ \longrightarrow 4\circ$. *Entonces*

$$KQ \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K^3 & K & 0 & 0 \\ K^3 & K & K & 0 \\ K & 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

donde la multiplicación se define de manera análoga al que usamos en (b).

3.2. Ideales admisibles y cociente de álgebra de caminos

Sea Q un carcaj finito, por la Proposición 3.1.9 el álgebra de caminos KQ de Q es un álgebra asociativa con uno, de K-dimensión finita, si y sólo si, Q acíclico. Nuestro objetivo en esta sección es estudiar los cocientes de álgebras de caminos KQ que son de K-dimensión finita. Veremos que dichos cocientes corresponden a ciertos ideales que llamaremos admisibles.

Definición 3.2.1. *Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal (bilateral) de flechas del álgebra de caminos KQ. Un ideal bilateral $\mathcal{I}$ de KQ se dice admisible si existe $m \geqslant 2$ tal que:*

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Si $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, a la pareja $(Q, \mathcal{I})$ se le conoce como el carcaj acotado. Al álgebra cociente $KQ/\mathcal{I}$ se le conoce como el álgebra del carcaj acotado $(Q, \mathcal{I})$, o simplemente como álgebra de carcaj acotado.

Se sigue de la definición anterior que un ideal $\mathcal{I}$ de KQ contenido en R_Q^2 es admisible, si y sólo si, contiene todos los caminos cuya longitud es suficientemente grande.

Proposición 3.2.2. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal bilateral de KQ, tal que $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$. Entonces $\mathcal{I}$ es admisible, si y sólo si, para cada ciclo $\sigma \in Q$ existe $s \geqslant 1$ tal que $\sigma^s \in \mathcal{I}$.*

Demostración. Sea σ un ciclo en Q. Como $\mathcal{I}$ es admisible, existe $m \geqslant 2$ tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$. De esta manera $\sigma^m \in R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$, pues la longitud de σ es $\geqslant 1$.

Conversamente, sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los caminos en Q que no contienen ciclos. Como Q es finito, entonces $\mathcal{A}$ es finito. Sea n la longitud máxima de los caminos en $\mathcal{A}$. Para cada ciclo $\sigma \in Q$ sea $s_\sigma \geqslant 1$ el menor entero tal que $\sigma^{s_\sigma} \in \mathcal{I}$ y definamos $m = n + k$, con $k = \text{máx}\{s_\sigma \mid \sigma \in Q\}$. Es claro que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$. $\square$

Proposición 3.2.3. *Sea Q un carcaj finito y acíclico. Entonces todo ideal bilateral $\mathcal{I}$ de KQ tal que $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$, es admisible.*

Demostración. Basta tomar $m = l + 1$, donde l es la longitud máxima de los caminos en Q. $\square$

Ejemplos 3.2.4.

(a) *Para cualquier carcaj Q y $m \geqslant 2$, el ideal R_Q^m es admisible.*

(b) *El ideal cero es admisible en KQ, si y sólo si, Q es acíclico.*

(c) *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1\circ & 2\circ \arrow[l, "\beta"'] \\ 3\circ \arrow[u, "\delta"] & 4\circ \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[ul, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

El ideal $\mathcal{I}_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ de la K-álgebra KQ es admisible dado que $0 = R_Q^3 \subseteq \mathcal{I}$, pero $\mathcal{I}_2 = \langle \beta\alpha - \lambda \rangle$ no lo es, ya que $\beta\alpha - \lambda \notin R_Q^2$.

(d) *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[loop left, "\lambda"] & 2\circ \arrow[l, "\beta"'] \\ 3\circ \arrow[u, "\delta"] & 4\circ \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

El ideal $\mathcal{I} = \langle \delta\gamma - \beta\alpha, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$ es admisible. En efecto, es claro que $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$, demostraremos que $R_Q^4 \subseteq \mathcal{I}$. Cada camino de longitud $\geqslant 4$ con vérticie incial 1, 2 ó 3 contienen a λ^3 y por lo tanto, está en $\mathcal{I}$. Los caminos de longitud $\geqslant 4$ y vértice inicial 4, contiene a un camino de la forma $\lambda^2\beta\alpha$ ó $\lambda^2\delta\gamma$, por lo tanto, están en $\mathcal{I}$. En el primer caso porque $\lambda\beta \in \mathcal{I}$ y en el segundo porque $\lambda^2\delta\gamma = \lambda^2(\delta\gamma - \beta\alpha) + \lambda^2\beta\alpha \in \mathcal{I}$. Esto completa la prueba de que $\mathcal{I} = \langle \delta\gamma - \beta\alpha, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$ es admisible. Por la Proposición 3.2.2 el ideal $\langle \lambda^5 \rangle$ es admisible y el ideal $\langle \lambda\beta, \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ no es admisible.

De los ejemplos anteriores vemos que es conveniente definir ideales admisibles a partir de sus generadores. Estos los llamaremos relaciones.

Definición 3.2.5. *Sea Q un carcaj. Una relación en Q con coeficientes en K, es una combinación K-lineal de caminos de longitud (al menos) dos, que tienen el mismo inicio y final. Por lo tanto, una relación ρ es un elemento de KQ tal que*

$$\rho = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i,$$

donde λ_i son escalares (no todos cero) y los w_i son caminos en Q de longitud (al menos) dos, tales que el inicio (y el final, respectivamente) de w_i coincide con el inicio (y el final, respectivamente) de w_j.

Si $m = 1$, la relación es llamada relación cero o relación monomial. Si es de la forma $w_1 - w_2$ (donde w_1, w_2 son dos caminos), es llamada relación conmutativa.

Si $(\rho_j)_{j\in J}$ es un conjunto de relaciones de un carcaj Q, tal que el ideal que ellas generan $\langle \rho_j \mid j \in J \rangle$ es admisible, decimos que el carcaj Q está acotado por las relaciones $(\rho_j)_{j\in J}$.

Proposición 3.2.6. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos del álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$.*

Demostración. Dado que e_a es la imagen de ε_a bajo el morfismo canónico $KQ \to KQ/\mathcal{I}$, se sigue del Corolario 3.1.11 que el conjunto dado es un sistema completo de idempotentes ortogonales. Por lo que resta revisar es que cada e_a es primitivo, es decir, que los únicos idempotentes de $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ son e_a y $0_{KQ/\mathcal{I}}$, esto por la Proposición 2.2.10. En efecto, sea $e \in e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ idempotente, sabemos que $e = (\lambda\varepsilon_a + w) + \mathcal{I}$, donde $\lambda \in K$ y w es una combinación lineal de ciclos que pasan por a de longitud $\geqslant 1$. De esta manera la igualdad $e^2 = e$, nos da:

$$(\lambda^2-\lambda)\varepsilon_a+(2\lambda-1)w+w^2\in\mathcal{I}.$$

Sea R_Q el ideal de flechas de KQ. Dado que $\mathcal{I}\subseteq R_Q^2$, tenemos que $\lambda^2-\lambda=0_K$, por lo tanto, $\lambda=0_K$ ó $\lambda=1_K$. Supongamos que $\lambda=0_K$, entonces $e=w+\mathcal{I}$, de donde w es un idempotente módulo $\mathcal{I}$. Por otro lado, dado que $R_Q^m\subseteq\mathcal{I}$ para alguna $m\geqslant 2$, tenemos $w^m\in\mathcal{I}$, es decir, w es nilpotente módulo $\mathcal{I}$. Por lo tanto, $w\in\mathcal{I}$, y así $e=0_{KQ/\mathcal{I}}$. Ahora supongamos que $\lambda=1_K$, entonces $e-e_a=w+\mathcal{I}$ es también un idempotente de $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$, así w es nuevamente un idempotente módulo $\mathcal{I}$. Además como w es un nilpotente módulo $\mathcal{I}$, tenemos que $w\in\mathcal{I}$ y por lo tanto, $e=e_a$. □

Proposición 3.2.7. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$ es inescindible, si y sólo si, Q es un carcaj conexo.*

Demostración. Si Q no es un carcaj conexo, entonces por la Proposición 3.1.13 KQ no es una álgebra inescindible. De esta manera KQ tiene un idempotente central $\gamma\neq 0_{KQ},1_{KQ}$ que podemos escoger, gracias a la construcción dada en la Proposición 3.1.12, como la suma de caminos de longitud cero, es decir, puntos. Por lo tanto, $c=\gamma+\mathcal{I}\notin\mathcal{I}$, por otro lado, si $c=1_{KQ}+\mathcal{I}$, tendríamos que $1_{KQ}-\gamma\in\mathcal{I}$, lo cual es una contradicción dado que $\mathcal{I}\subseteq R_Q^2$. Igualmente por la Proposición 3.1.12, c es central, por lo tanto, es un idempotente central distinto de $0_{KQ}+\mathcal{I}$ y $1_{KQ}+\mathcal{I}$, lo que implicaría que $KQ/\mathcal{I}$ no es inescindible.

Conversamente, supongamos que $KQ/\mathcal{I}$ no es inescindible, por las Proposiciones 3.1.12 y 3.2.6 tenemos que existe una partición $Q_0=Q_0'\bigsqcup Q_0''$ tal que $x\in Q_0'$ e $y\in Q_0''$, implica $e_x(KQ/\mathcal{I})e_y=0_{KQ}+\mathcal{I}=e_y(KQ/\mathcal{I})e_x$. Dado que Q es conexo, existen $a\in Q_0'$ y $b\in Q_0''$, tales que son vecinos. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe una flecha $\alpha:a\to b$, de esta manera $\alpha=\varepsilon_b\alpha\varepsilon_a$ implica que $\bar{\alpha}=\alpha+\mathcal{I}$ satisface $\bar{\alpha}=e_b\bar{\alpha}e_a\in e_b(KQ/\mathcal{I})e_a=0_{KQ}+\mathcal{I}$. Por lo tanto, $\alpha\in\mathcal{I}$, lo que es una contradicción ya que $\mathcal{I}\subseteq R_Q^2$, en consecuencia $KQ/\mathcal{I}$ es inescindible. □

Proposición 3.2.8. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$ es de K-dimensión finita.*

Demostración. Dado que $\mathcal{I}$ es admisible, existe $m\geqslant 2$ tal que $R_Q^m\subseteq\mathcal{I}$. Así, por el teorema del factor, tenemos la existencia de un único epimorfismo de K-álgebras $KQ/R_Q^m\to KQ/\mathcal{I}$, por lo tanto, es suficiente probar que KQ/R_Q^m es de K-dimensión finita. Notemos que las clases residuales de caminos con longitud menor a m forman una base para el K-espacio vectorial KQ/R_Q^m. Dado que éste es un número finito, $KQ/\mathcal{I}$ es de K-dimensión finita. □

Si $\mathcal{I}$ no es admisible, la K-álgebra $KQ/\mathcal{I}$ no necesariamente es de K-dimensión finita. El siguiente ejemplo nos muestra lo anterior.

Ejemplo 3.2.9. *Sea Q el carcaj*

$$\alpha \circlearrowleft 1\circ \circlearrowright \beta$$

e $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta, \beta^2 \rangle$. $\mathcal{I}$ no es admisible, ya que $\alpha^m \notin \mathcal{I}$ $\forall m \geqslant 1$. Sea $A = KQ/\mathcal{I}$ y J el subespacio de A (considerado como K-espacio vectorial) generado por los elementos de la forma $\bar{\beta}\bar{\alpha}^n$, $\forall n \geqslant 1$ (donde $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ y $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$). Afirmamos que J es un ideal izquierdo de A. En efecto, tenemos que

$$KQ/\mathcal{I} = \{(\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\alpha^n + \lambda_3\beta + \lambda_4\beta\alpha^m) + \mathcal{I} \mid \lambda_i \in K(i, 1..., 4); n, m \in \mathbb{N}\}$$

y de esta manera tenemos lo siguiente: $\alpha^n\beta\alpha^m \in \mathcal{I}$, $\beta^2\alpha^m \in \mathcal{I}$ y $\beta\alpha^m\beta\alpha^n \in \mathcal{I}$ ($\forall, n, m \in \mathbb{N}$). Por lo tanto, J es un ideal izquierdo de A, más aún, ${}_AJ$ es un submódulo del módulo cíclico ${}_AA$. Afirmamos que ${}_AJ$ no es finitamente generado (como K-espacio vectorial). En efecto, supongamos que $\mathcal{J} = \{\alpha^{t_1}\beta, ..., \alpha^{t_s}\beta \mid t_i \in \mathbb{N}, (i = 1, ..., s)\}$ es una K-base de ${}_AJ$. Sea $l = max\{t_i \mid i = 1, ..., s\}$, de esta manera $\alpha^{l+1}\beta \in_A J$ no puede ser una K-combinación lineal de elementos de $\mathcal{J}$. Por lo tanto, ${}_AJ$ no es de K-dimensión finita.

Proposición 3.2.10. *Sea Q un carcaj finito. Entonces cada ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ es finitamente generado.*

Demostración. Sea R_Q el ideal de flechas de KQ y $m \geqslant 2$, tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$. Tenemos la siguiente sucesión exacta $0 \to R_Q^m \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}/R_Q^m \to 0$ de KQ-módulos, por lo tanto, sólo es necesario ver que R_Q^m e $\mathcal{I}/R_Q^m$ son finitamente generados como KQ-módulos. Es claro que R_Q^m es generado como KQ-módulo por los caminos de longitd m y dado que sólo hay un número finito, tenemos la primera parte. Para la otra parte, notemos que $\mathcal{I}/R_Q^m$ es un ideal de KQ/R_Q^m, que es un K-espacio vectorial de dimensión finita por la Proposición 3.2.8. De esta manera $\mathcal{I}/R_Q^m$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita, y por lo tanto, es finitamente generado como KQ-módulo por la Proposición 2.1.8. $\square$

Corolario 3.2.11. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Entonces existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, ..., \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, ..., \rho_m \rangle$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.10, un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ siempre tiene un conjunto finito generador $\{\sigma_1, ..., \sigma_t\}$. Los elementos σ_i del conjunto generador no son en general relaciones, dado que la composición de los caminos σ_i no tienen necesariamente los mismos vértices iniciales y finales. Por otro lado, para cualquier i tal que $1 \leqslant i \leqslant t$ y $a, b \in Q_0$, el camino $\varepsilon_b\sigma_i\varepsilon_a$ es cero o una relación. Dado que $\sigma_i = \sum_{a,b\in Q_0} \varepsilon_b\sigma_i\varepsilon_a$, para $i \leqslant t$, los elementos distintos de cero del conjunto $\{\varepsilon_b\sigma_i\varepsilon_a \mid 1 \leqslant i \leqslant t; a, b \in Q_0\}$ forman un conjunto finito de relaciones que generan a $\mathcal{I}$. $\square$

Proposición 3.2.12. *Sea Q un carcaj finito, R_Q el ideal de flechas de KQ e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Entonces $rad(KQ/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$, más aún, el álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$ es básica.*

Demostración. Dado que $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, existe $m \geqslant 2$ tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$. En consecuencia, $(R_Q/\mathcal{I})^m = 0$ y $R_Q/\mathcal{I}$ es un ideal nilpotente de $KQ/\mathcal{I}$. Por otro lado, el álgebra $(KQ/\mathcal{I})/(R_Q/\mathcal{I}) \cong (KQ/R_Q)$ es isomorfo a la suma directa externa de copias de K por la Proposición 3.1.18. Así, usando el Corolario 2.3.3 (c), $rad(KQ/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$. Para ver que $KQ/\mathcal{I}$ es básica, basta aplicar el Corolario 2.3.24 (a). □

Corolario 3.2.13. *Para cada $l \geqslant 1$ tenemos $rad^l(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})^l$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de las Proposiciones 3.2.12 y 2.3.14 (d). □

La observación que se presenta a continuación es importante para el capítulo siguiente.

Observación 3.2.14. *Es consecuencia de la Proposición 3.2.12 y el Corolario 3.2.13 que el K-espacio vectorial*

$$rad(KQ/\mathcal{I})/rad^2(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})/(R_Q/\mathcal{I})^2 \cong R_Q/R_Q^2$$

admite como base al conjunto $\{\bar{\alpha}+rad^2(KQ/\mathcal{I}) \mid \bar{\alpha} = \alpha+KQ/\mathcal{I}$ y $\alpha \in Q_1\}$.

Resumiremos nuestros resultados en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.15. *Sea Q un carcaj finito y conexo, R_Q el ideal de flechas de KQ e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$ es una K-álgebra básica, inescindible y de K-dimensión finita con uno, teniendo a $R_Q/\mathcal{I}$ como radical y al conjunto $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ como sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones: (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) y (3.2.10). □

Proposición 3.2.16. *Sea Q un carcaj finito y acíclico, con $Q_0 = \{1, 2, ..., n\}$ tal que, para cada $i, j \in Q_0$, si existe un camino de i a j, tenemos que $i \leqslant j$. Entonces el álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$ es isomorfo al álgebra de matrices triangulares*

$$A = \begin{bmatrix} e_1(KQ/\mathcal{I})e_1 & \bar{0} & \cdots & \bar{0} \\ e_2(KQ/\mathcal{I})e_1 & e_2(KQ/\mathcal{I})e_2 & \cdots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n(KQ/\mathcal{I})e_1 & e_n(KQ/\mathcal{I})e_2 & \cdots & e_n(KQ/\mathcal{I})e_n \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ y $e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I}$ para cualquier $a \in Q_0$.

Demostración. La demostración es análoga a la Proposición 3.1.22. □

Ejemplos 3.2.17.

(a) *Sea Q el carcaj*

$$1\circ \xrightarrow{\alpha} 2\circ \xrightarrow{\beta} 3\circ\ .$$

Consideremos el ideal bilateral $\mathcal{I} = \langle \beta\alpha \rangle$, dado que $\mathcal{I} = R_Q^2$, entonces es admisible. De esta manera tenemos que $\{e_1, e_2, e_3, \bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ es una K-base de $KQ/\mathcal{I}$. Por lo tanto,

$$KQ/\mathcal{I} \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & K & K \end{bmatrix}$$

(b) *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & 2\circ \arrow[d, "\beta"] \\ 3\circ \arrow[r, "\gamma"'] & 4\circ \end{tikzcd}$$

El ideal $\mathcal{I}$ generado por la relación conmutativa $\alpha\beta - \delta\gamma$ es admisible. Por lo tanto, $KQ/\mathcal{I}$ es una K-álgebra de dimensión finita. De esta manera $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\beta\alpha}\}$ es una K-base de $KQ/\mathcal{I}$. Así, por la Proposición 3.2.16 tenemos

$$KQ/\mathcal{I} \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$$

(c) *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Recordemos que $KQ \cong K[t]$, por lo que, es de K-dimensión infinita. Para cada $m \geqslant 2$, el ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha^m \rangle$ es admisible. Por lo tanto, $KQ/\mathcal{I} \cong K[t]/\langle t^m \rangle$ tiene dimensión m.

Capítulo 4

Teorema de Gabriel

4.1. Demostración del Teorema de Gabriel

Sea Λ un álgebra de dimensión finita, sobre un campo K algebráicamente cerrado, por la Proposición 2.2.13 y la Observación 2.2.18 podemos suponer que Λ es inescindible y básica. En este capítulo veremos que, bajo estas hipótesis, Λ es isomorfa a un álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj finito y conexo e $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ. Empezaremos asociando, de una manera natural, un carcaj finito a cada K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible.

Definición 4.1.1. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finitca, básica e inescindible, y $\{e_1, ..., e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ. El carcaj ordinario de Λ, denotado por Q_Λ, se define como sigue:*

(a) *Los vértices de Q_Λ están en correspondencia biyectiva con los idempotentes $e_1, e_2, ..., e_n$.*

(b) *Dados dos vértices $a, b \in (Q_\Lambda)_0$, las flechas $a \xrightarrow{\alpha} b$ están en correspondencia biyectiva con los vectores de la base del K-espacio vectorial $e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$.*

Dado que Λ es de K-dimensión finita, entonces todo espacio vectorial de la forma $e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$ (con $a, b \in (Q_\Lambda)_0$) es de K-dimensión finita, de esta manera Q_Λ es finito.

Tenemos que Q_Λ es construido a partir de un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos, debemos demostrar que el carcaj ordinario de Λ, Q_Λ, no depende del sistema que hayamos elegido.

Proposición 4.1.2. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible.*

(a) *El carcaj Q_Λ no depende del sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de Λ.*

(b) *Para cualquier par* e_a, e_b *de idempotentes ortogonales y primitivos de* Λ, *el morfismo de* K*-espacios vectoriales* $\psi : e_b(rad\Lambda)e_a/e_b(rad^2\Lambda)e_a \to e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$, *dado por* $e_bxe_a + e_b(rad^2\Lambda)e_a \mapsto e_b(x + rad^2\Lambda)e_a$, *es un isomorfismo.*

Demostración. (a) Por el Teorema 2.2.6 sabemos que si

$$_\Lambda\Lambda = \bigoplus_{a=1}^{n} \Lambda e_a = \bigoplus_{b=1}^{m} \Lambda e'_b$$

son descomposiciones de $_\Lambda\Lambda$ en sumandos directos inescindibles, entonces $n = m$ y existe una permutación σ de $\{1, ..., n\}$ de tal forma que $\Lambda e_{\sigma(a)} \cong \Lambda e' a$ para cada $a = 1, ..., n$. Esto demuestra que los vértices no dependen del sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Para ver que las flechas tampoco dependen, consideremos el siguiente epimorfismo de Λ-módulos $\varphi : (rad\Lambda)e_a \to (rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$, con $xe_a \mapsto (x + rad^2\Lambda)e_a$. Es fácil demostrar que $Ker\varphi = (rad^2\Lambda)e_a$, por lo tanto,

$$(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a \cong (rad\Lambda)e_a/(rad^2\Lambda)e_a.$$

Además, dado que $rad\Lambda$ es un ideal bilateral y por la Proposición 2.3.14 (d) tenemos que

$$(rad\Lambda)e_a/(rad^2\Lambda)e_a = (rad\Lambda)\Lambda e_a/(rad^2\Lambda)\Lambda e_a = rad(\Lambda e_a)/rad^2(\Lambda e_a).$$

Por lo tanto, $(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a \cong (rad\Lambda e_a)/(rad^2\Lambda e_a)$. Usando la Proposición 2.2.3 tenemos los siguientes isomorfismos de K-espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a &\cong e_b[rad(\Lambda e_a)/rad^2(\Lambda e_a)] \\ &\cong Hom_\Lambda(\Lambda e_b, rad\Lambda(e_a)/rad^2(\Lambda e_a)) \\ &\cong Hom_\Lambda(\Lambda e'_b, rad\Lambda(e'_a)/rad^2(\Lambda e'_a)) \\ &\cong e'_b[rad(\Lambda e'_a)/rad^2(\Lambda e'_a)] \\ &\cong e'_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e'_a. \end{aligned}$$

(b) Consideremos el morfismo K-lineal $e_b(rad\Lambda)e_a \to e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$ definido por $e_bxe_a \mapsto e_b(x + rad^2\Lambda)e_a$. Es fácil ver que el morfismo admite como núcleo a $e_b(rad^2\Lambda)e_a$ y por lo tanto, $\psi : e_b(rad\Lambda)e_a/e_b(rad^2\Lambda)e_a \to e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$ definido por la fórmula $e_bxe_a + e_b(rad^2\Lambda)e_a \mapsto e_b(x + rad^2\Lambda)e_a$, es isomorfismo de K-espacios vectoriales. $\square$

Ahora queremos demostrar que si Λ es inescindible, entonces Q_Λ es conexo. Para eso necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.3. *Para cada flecha* $a \xrightarrow{\alpha} b \in (Q_\Lambda)_1$, *sea* $x_\alpha \in e_b(rad\Lambda)e_a$ *tal que* $\{\bar{x}_\alpha = x_\alpha + rad^2\Lambda \mid a \xrightarrow{\alpha} b\}$ *es una* K*-base de* $e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$. *Entonces, para cualquier par de puntos* $a, b \in (Q_\Lambda)_0$, *cualquier elemento* $x \in e_b(rad\Lambda)e_a$ *puede ser escrito de la forma:* $x = \sum \lambda_{\alpha_l\alpha_{l-1}...\alpha_1} x_{\alpha_l} x_{\alpha_{l-1}} ... x_{\alpha_1}$, *donde* $\lambda_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_l} \in K$ *y la suma se toma sobre todos los caminos* $\alpha_l\alpha_{l-1}...\alpha_1$ *en* Q_Λ *con vértice inicial* a *y vértice final* b.

Demostración. Sea $x \in e_b(rad\Lambda)e_a$, tenemos que

$$x + e_b(rad^2\Lambda)e_a = \sum \lambda_\alpha \bar{x}_\alpha,$$

donde la suma corre sobre todas las flechas $a \xrightarrow{\alpha} b$ y $\lambda_\alpha \in K$. De esta manera $x - \sum \lambda_\alpha x_\alpha = x' \in e_b(rad^2\Lambda)e_a$. Como $rad\Lambda = \bigoplus_{i,j} e_j(rad\Lambda)e_i$, tenemos que:

$$e_b(rad^2\Lambda)e_a = \textstyle\sum_{c\in(Q_\Lambda)_0}[e_b(rad\Lambda)e_c][e_c(rad\Lambda)e_a],$$

así, $x' = \sum_{c\in(Q_\Lambda)_0} x'_c y'_c$ con $x'_c \in e_b(rad\Lambda)e_c$ y $y'_c \in e_c(rad\Lambda)e_a$. Además $x'_c + e_b(rad^2\Lambda)e_a = \sum \lambda_\beta \bar{x}_\beta$ y $y'_c + e_b(rad^2\Lambda)e_a = \sum \lambda_\gamma \bar{x}_\gamma$, donde las sumas corren sobre todas las felchas $b \xrightarrow{\beta} c$, $c \xrightarrow{\gamma} a$ respectivamente y $\lambda_\beta, \lambda_\gamma \in K$. En consecuencia

$$x + e_b(rad^3\Lambda)e_a = (\textstyle\sum \lambda_\alpha x_\alpha + \sum\sum \lambda_\beta\lambda_\gamma x_\beta x_\gamma) + e_b(rad^3\Lambda)e_a.$$

Usando que $rad\Lambda$ es nilpotente y por inducción, completamos la demostración. □

Corolario 4.1.4. *Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible, entonces su carcaj ordinario Q_Λ es conexo.*

Demostración. Supongamos que Q_Λ no es conexo. Por lo tanto, $(Q_\Lambda)_0 = Q'_0 \sqcup Q''_0$, donde ningún vértice de Q'_0 es vecino de uno de Q''_0. Afirmamos que si $i \in Q'_0$ y $j \in Q''_0$, entonces $e_i\Lambda e_j = 0 = e_j\Lambda e_i$. En efecto, por la Proposición 2.2.3 y usando que Λe_i es inescindible tenemos:

$$\begin{aligned} e_i\Lambda e_j &\cong Hom_\Lambda(\Lambda e_i, \Lambda e_j) &&\cong Hom_\Lambda(\Lambda e_i, rad\Lambda e_j) \\ &\cong e_i rad(\Lambda e_j) &&\cong e_i(rad\Lambda)e_j. \end{aligned}$$

En consecuencia $e_i\Lambda e_j \cong e_i(rad\Lambda)e_j$, y por la Proposición 4.1.3 tenemos $e_i(rad\Lambda)e_j = 0$. Por lo tanto, $e_i\Lambda e_j = 0$ y de manera análoga se demuestra $e_j\Lambda e_i = 0$, así, la Proposición 3.1.12 implica que Λ no es inescindible, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Q_Λ es conexo. □

Ejemplos 4.1.5.

(*a*) *Sea $\Lambda = K[t]/\langle t^m\rangle$, con $m \geqslant 1$. Como el único idempotente distinto de cero de Λ es el uno, entonces Q_Λ tiene un sólo vértice. Consideremos el ideal bilateral de Λ, $\mathcal{I} = \langle \bar{t}\rangle$, donde $\bar{t} = t + \langle t^m\rangle$, tenemos que $\langle \bar{t}\rangle^m = 0$ y $\Lambda/\langle \bar{t}\rangle \cong K$. Por lo tanto, por el Corolario 2.3.3 (c), $rad\Lambda = \langle \bar{t}\rangle$. En consecuencia $rad^2\Lambda = \langle \bar{t}^2\rangle$ y así $dim_K(rad\Lambda/rad^2\Lambda) = 1$. De esta manera Q_Λ es el carcaj*

$$1 \circ \circlearrowright \alpha$$

(b) Sea

$$\Lambda = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$$

el álgebra de matrices triangulares inferiores $[\lambda_{ij}] \in \mathbb{M}_3(K)$*, con* $\lambda_{32} = 0$ *y* $\lambda_{pq} = 0$ *para* $p < q$*. Las siguientes matrices forman un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de* Λ*:*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos el siguiente ideal bilateral $\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in K \right\}$. *Tenemos que* $\mathcal{I}^2 = 0$ *y además* $\Lambda/\mathcal{I} \cong K \bigoplus K \bigoplus K$*. De esta manera, usando el Corolario 2.3.3 (c),* $rad\Lambda = \mathcal{I}$ *y* $rad\Lambda^2 = 0$*. En consecuencia,* $dim_k(rad\Lambda/rad^2\Lambda) = 2$ *y un cálculo sencillo nos da* $dim_K(e_2(rad\Lambda)e_1) = 1 = dim_k(e_3(rad\Lambda)e_1)$*. Así,* Q_Λ *es el carcaj*

$$\begin{tikzcd} & 1\circ \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2\circ & & 3\circ \end{tikzcd} .$$

(c) Sea Λ *el álgebra de matrices triangulares inferiores de* 3×3

$$\Lambda = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ e & d & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in K \right\}$$

y sea $\mathcal{I}$ *el ideal*

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid e \in K \right\}.$$

Las siguientes matrices forman un sistema completo de idempotentetes ortogonales, para el álgebra $B = \Lambda/\mathcal{I}$*:*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{I} \quad y \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}$$

Para ver que son primitivos basta usar la Proposición 2.2.10. Ahora consideremos el ideal bilateral $\mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I} \mid c, d \in K \right\}$ *de* B*. Tenemos que* $\mathcal{J}^2 = 0$ *y además* $B/\mathcal{J} \cong K \bigoplus K$*. De esta manera, usando el Corolario 2.3.3 (c),* $radB = \mathcal{J}$ *y* $rad^2B = 0$*. En consecuencia,*

$dim_K(radB/rad^2B) = 2$ y un calculo sencillo nos da $dim_K(e_2(radB)e_1) = 1 = dim_K(e_1(radB)e_2)$. Así, Q_B es el carcaj

$$1\circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2\circ$$

Proposición 4.1.6. *Sea Q un carcaj finito y conexo, $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ y $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$. Entonces $Q_\Lambda = Q$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.6 el conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$. Por lo tanto, $(Q_\Lambda)_0 = Q_0$. Por otro lado, por la Observación 3.2.14, los elementos de la base de R_Q/R_Q^2 están en correspondencia biyectiva con los elementos de la base de $rad\Lambda/rad^2\Lambda$. Además, como $\alpha - \alpha' \notin R_Q^2$ $\forall \alpha, \alpha' \in R_Q$, tenemos que la base de R_Q/R_Q^2 está en correspondecia biyectiva con la base de R_Q. Por lo tanto, tenemos una biyección entre las bases de R_Q y $rad\Lambda/rad^2\Lambda$. De esta manera, para cada $a, b \in Q_0$, hay una biyección entre $\{a \xrightarrow{\alpha} b \mid \alpha \in Q_1\}$ y la base de $e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$. En consecuencia $(Q_\Lambda)_1 = Q_1$ y así $Q_\Lambda = Q$. □

A continuación enunciaremos y demostraremos el resultado principal de esta Tesis, conocido como el ***Teorema de Gabriel***.

Teorema 4.1.7. *[**Teorema de Gabriel**] Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible. Entonces existe un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_Λ tal que*

$$\Lambda \cong KQ_\Lambda/\mathcal{I}$$

.

Demostración. Usaremos la notación de la definición 4.1.1 y construiremos un morfismo de K-álgebras $\varphi : KQ_\Lambda \to \Lambda$, después demostraremos que φ es epimorfismo y que $Ker\varphi = \mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ_Λ.

Para cada flecha $a \xrightarrow{\alpha} b \in (Q_\Lambda)_1$, sea $x_\alpha \in e_b(rad\Lambda)e_a$ donde $\{x_\alpha + rad^2\Lambda \mid \ a \xrightarrow{\alpha} b\}$ es una K-base de $e_b(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_a$. Definamos $\varphi_0 : (Q_\Lambda)_0 \to \Lambda$ por la fórmula $\varphi_0(a) = e_a$, y $\varphi_1 : (Q_\Lambda)_1 \to \Lambda$ por la fórmula $\varphi_1(\alpha) = x_\alpha$ para $\alpha \in (Q_\Lambda)_1$. De esta manera $\{\varphi_0(a) \mid a \in (Q_\Lambda)_0\}$ forma un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos para Λ, además, $\varphi_0(b)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(a) = e_b x_\alpha e_a = x_\alpha = \varphi_1(\alpha)$. De esta manera, por el Teorema 3.1.15, existe un único morfismo de K-álgebras $\varphi : KQ_\Lambda \to \Lambda$ que extiende a φ_0 y φ_1.

Afirmamos que φ es epimorfismo. En efecto, dado que su imagen es generada por e_a ($a \in (Q_\Lambda)_0$) y x_α ($\alpha \in (Q_\Lambda)_1$), es suficiente ver que estos elementos generan a Λ. Dado que Λ, $rad\Lambda$ y $\Lambda/rad\Lambda$ son K-espacios vectoriales de dimensión finita, la siguiente sucesión se escinde:

$$0 \to rad\Lambda \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda/rad\Lambda \to 0.$$

Donde i, π son la inclusión y proyección canónica respectivamente. De esta manera $\Lambda \cong rad\Lambda \bigoplus \Lambda/rad\Lambda$. Por el Corolario 2.3.24 (b) $\Lambda/rad\Lambda$ es generado como K-espacio vectorial por $\{e_a + rad\Lambda \mid a \in (Q_\Lambda)_0\}$, falta ver que $rad\Lambda$ es generado como K-espacio vectorial por los x_α, pero esto es consecuencia de la Proposición 4.1.3. Por lo tanto, φ es epimorfismo de K-álgebras.

Resta ver que $\mathcal{I} = Ker\varphi$ es admisible. Denotemos por $R = R_{Q_\Lambda}$ al ideal de flechas de KQ_Λ. Por definición de φ tenemos $\varphi(R) \subseteq rad\Lambda$ y por lo tanto, $\varphi(R^l) \subseteq rad^l\Lambda$ para cada $l \geqslant 1$. Como $rad\Lambda$ es nilpotente, existe $m \geqslant 1$ tal que $rad^m\Lambda = 0$, por lo tanto, $R^m \subseteq Ker\varphi = \mathcal{I}$. Por último demostraremos que $\mathcal{I} \subseteq R^2$. Sea $x \in \mathcal{I}$, tenemos

$$x = \textstyle\sum_{a\in(Q_\Lambda)_0} \lambda_a \varepsilon_a + \sum_{\alpha\in(Q_\Lambda)_1} \mu_\alpha \alpha + y,$$

donde $\lambda_a, \mu_\alpha \in K$ y $y \in R^2$. Como $\varphi(x) = 0$,

$$0 = \textstyle\sum_{a\in(Q_\Lambda)_0} \lambda_a e_a + \sum_{\alpha\in(Q_\Lambda)_1} \mu_\alpha x_\alpha + \varphi(y).$$

Así, $\sum_{a\in(Q_\Lambda)_0} \lambda_a e_a = -\sum_{\alpha\in(Q_\Lambda)_1} \mu_\alpha x_\alpha - \varphi(y) \in rad\Lambda$. Dado que $rad\Lambda$ es nilpotente y los e_a son idempotentes ortogonales tenemos que $\lambda_a = 0$ $\forall a \in (Q_\Lambda)_0$. De esta manera $\sum_{\alpha\in(Q_\Lambda)_1} \mu_\alpha x_\alpha = -\varphi(y) \in rad^2\Lambda$ y en consecuencia $\sum_{\alpha\in(Q_\Lambda)_1} \mu_\alpha(x_\alpha + rad^2\Lambda) = 0$. Pero el conjunto $\{x_\alpha + rad^2\Lambda \mid \alpha \in (Q_\Lambda)_1\}$ es por construción una K-base de $rad\Lambda/rad^2\Lambda$, por lo tanto, $\mu_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in (Q_\Lambda)_1$. En consecuencia $x = y \in R^2$ y entonces $Ker\varphi = \mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ_Λ. □

Definición 4.1.8. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, básica e inescindible. Un isomorfismo $\Lambda \cong KQ_\Lambda/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ_Λ, es conocido como una* ***presentación*** *de la K-álgebra Λ (como un álgebra de carcaj acotado).*

Ejemplos 4.1.9.

(a) *En el Ejemplo 4.1.22 (a), tenemos el morfismo de K-álgebras $\varphi : KQ_\Lambda \to \Lambda$ definido por $\varphi(\varepsilon_1) = 1_\Lambda$, $\varphi(\alpha) = \bar{t}$. Claramente, φ es epimorfismo y $Ker\varphi = \langle\alpha^m\rangle$. Por lo tanto, $KQ_\Lambda/\langle\alpha^m\rangle \cong \Lambda$.*

(b) *En el Ejemplo 4.1.22 (b), tenemos el morfismo de K-álgebras $\varphi : KQ_\Lambda \to \Lambda$ definido por*

$$\varphi(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente φ *es epimorfismo y en particular veremos que es monomorfismo. En efecto, sea* $x = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \lambda_4\alpha + \lambda_5\beta \in KQ_\Lambda$ *tal que* $\varphi(x) = 0_\Lambda$*. Como* φ *es* K*-lineal*

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\lambda_i = 0_K$ $\forall i = 1, ..., 5$*. De esta manera* $\Lambda \cong KQ_\Lambda$*.*

(*c*) *En el Ejemplo 4.1.22* (*c*)*, tenemos el morfismo de* K*-álgebras* $\varphi : KQ_B \to B$ *definido por*

$$\varphi(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{I}, \quad \varphi(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I},$$

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}, \quad \varphi(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}.$$

Un cálculo sencillo nos da $Ker\varphi = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle = R_Q^2$ *y por lo tanto,* $B \cong KQ_B/R_Q^2$*, donde* $Q = Q_B$*.*

Bibliografía

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras I.* London Mathematical Society, Student Text 65, 2006.

[2] F. W. Anderson, K.R. Fuller. *Ring and Categories of Modules.* Springer-Verlag, 1974.

[3] C. Cibils, F. Larrion, L. Salmeron. *Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones.* Monografía 11 del Instituto de Matemáticas, UNAM, 1982.

[4] M. Flores. *Una Introducción a la Teoría de Representaciones.* Tesis de la Facultad de Ciencias, UNAM, 2010.

[5] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press, 1979.

Índice alfabético