



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Del movimiento browniano clásico al  
relativista

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

HUGO ALEJANDRO TORRES GALVÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno  
Torres  
Galván  
Hugo Alejandro  
58 52 71 31  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
405032206
2. Datos del tutor  
Dr  
Pablo  
Padilla  
Longoria
3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Víctor Manuel  
Romero  
Rochín
4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Gerardo  
Carmona  
Ruíz
5. Datos del sinodal 3  
Dr  
José Julio Emilio  
Herrera  
Velázquez
6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Juan Manuel  
García  
Islas
7. Datos del trabajo escrito  
Del movimiento browniano clásico al relativista  
74 p  
2016

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Movimiento browniano</b>	<b>5</b>
2.1	El modelo de Einstein . . . . .	5
2.2	La ecuación de Langevin . . . . .	9
2.3	La ecuación de Fokker-Planck . . . . .	13
2.4	El proceso de Wiener . . . . .	19
2.5	El proceso de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Funciones de distribución</b>	<b>23</b>
3.1	La distribución de Maxwell-Boltzmann . . . . .	23
3.2	La distribución de Maxwell-Jüttner . . . . .	24
3.3	Densidades de probabilidad . . . . .	30
<b>4</b>	<b>El movimiento browniano relativista</b>	<b>33</b>
4.1	El movimiento browniano relativista . . . . .	33
4.1.1	Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck relativistas . . .	34
4.1.2	Solución estacionaria de las ecuaciones de Fokker-Planck relativistas . . . . .	39
4.1.3	Momentos de orden superior . . . . .	41
4.2	Proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista . . . . .	42
4.2.1	Límite hidrodinámico . . . . .	44
4.3	Relación entre el MBR y el ROUP . . . . .	45
4.4	Sistema inercial en movimiento . . . . .	46
4.5	Otros procesos relativistas . . . . .	48
4.5.1	Movimiento browniano intrínseco . . . . .	48
4.5.2	La teoría de Oron y Horwitz . . . . .	48
4.6	Difusión relativista . . . . .	48
4.6.1	Difusiones en el espacio de Minkowski . . . . .	49
	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>

<b>A</b>	<b>Procesos estocásticos</b>	<b>53</b>
A.1	Conceptos básicos de probabilidad . . . . .	53
A.2	Procesos estocásticos . . . . .	55
A.2.1	Procesos de Markov . . . . .	55
<b>B</b>	<b>Cálculo estocástico</b>	<b>57</b>
B.1	Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	57
B.2	Integración estocástica . . . . .	58
B.2.1	Integral estocástica de Itô . . . . .	58
B.2.2	Integral estocástica de Stratonovich-Fisk . . . . .	59
B.2.3	La integral de Itô retrasada . . . . .	59
<b>C</b>	<b>Función de Bessel modificada de segunda clase</b>	<b>61</b>
<b>D</b>	<b>Algunas Aplicaciones</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los trabajos pioneros de Einstein sobre el movimiento browniano jugaron un papel importante en la teoría cinética de los gases, pues confirmaron la existencia de átomos y moléculas y con ello ayudaron a terminar con la resistencia que existía a la teoría atomista.

La teoría del movimiento browniano se ha convertido en una importante herramienta para el entendimiento de fenómenos microscópicos. Tiene un amplio rango de aplicaciones en disciplinas como física, biología, química, astronomía y finanzas.

Así como la teoría del movimiento browniano, la teoría de la relatividad ha brindado ayuda para el entendimiento de muchos procesos físicos. La combinación de ambas teorías ha permitido encontrar otras importantes aplicaciones en astrofísica, física de altas energías, en física de plasmas, entre otros. Tal combinación resulta en la teoría del *movimiento browniano relativista*.

El tratamiento clásico del movimiento browniano tiene una característica que lo hace incompatible con la relatividad especial. Los incrementos de velocidades  $\Delta v$  para una partícula browniana tienen una distribución gaussiana, por lo que los eventos  $\Delta v > c$  tienen asignada una probabilidad no nula, permitiendo así incrementos de velocidades que superan la velocidad de la luz  $c$ .

El movimiento browniano no relativista, ha sido extensamente estudiado, tanto desde el punto de vista físico como matemático. Aunque en 1827, Robert Brown [1] hizo el primer análisis del movimiento browniano no fue sino hasta 1905 que se pudo explicar de manera teórica este fenómeno con el trabajo de Einstein [4]. Sutherland [5], Smoluchowski [6] y Langevin [8] también trabajaron en la explicación del movimiento browniano. Otros reconocidos físicos de la época también contribuyeron a la teoría: Fokker [9], Planck [10], Klein [11], Uhlenbeck y Ornstein [12] y Kramers [14].

Las bases matemáticas de la teoría del movimiento browniano fueron dadas por Wiener [15], Kolmogorov [16], Feller [17] y Lévy [18, 19] contribuyendo a la teoría de procesos estocásticos. Además sus trabajos sirvieron al desarrollo del cálculo estocástico junto con los estudios de Itô [20], Fisk [21] y Stratonovich [22] quienes desarrollaron diferentes tipos de integrales estocásticas [23].

En cuanto al movimiento browniano relativista, los primeros trabajos se deben a Schay [24], Dudley [25] y Hakim [26] quienes estudiaron procesos estocásticos relativistas. Estos fueron seguidos por Caubet [27], Guerra y Ruggiero [28], Boyer [29, 30], Roy [31], Ben-Yaacov [32], y Morato y Viola [33]. Otras aproximaciones al movimiento browniano relativista se han hecho por Oron y Horwitz [34] y Franchi y Le Jan [87].

Desde un punto de vista más fenomenológico, el movimiento browniano relativista puede ser abordado usando la versión relativista de la ecuación de Fokker-Planck así como de la ecuación de Langevin. En esta línea se han hecho recientemente varias aproximaciones. Debbasch y otros [76, 77, 78, 79, 80, 81] han extendido el estudio del proceso de Ornstein-Uhlenbeck a la relatividad especial dando como resultado lo que se conoce como el *proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista* (ROUP por sus siglas en inglés). Por otro lado, Dunkel y Hänggi han estudiado lo que ellos llaman *movimiento browniano relativista* [93, 94, 96, 97, 75] que es un modelo que utiliza la ecuación de Langevin relativista con un coeficiente de fricción constante.

A pesar de las distintos enfoques que se le han dado a la teoría del movimiento browniano relativista, aún no hay un tratamiento claro y definitivo. Sin embargo, los avances que se han dado en el movimiento browniano relativista y los procesos de difusión ya han sido aplicados en física de altas energías [35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47] y en astrofísica [48, 49, 50, 51] y más recientemente en física de materia condensada [52] y puede haber futuras aplicaciones en economía [53] como su contraparte clásica.

El objetivo central de la tesis es presentar la generalización relativista del movimiento browniano. Para ello, el trabajo se divide en dos partes. En la primera de ellas, sólo se considera al movimiento browniano clásico (en el sentido de que es no relativista). En la segunda parte se discute en detalle su generalización relativista.

Para el movimiento browniano clásico, se presenta el análisis de Einstein y se analiza la aproximación de Langevin. Se deduce la ecuación de Fokker-Planck y se encuentran los coeficientes correspondientes a la ecuación de Langevin. Después se introduce el proceso de Wiener para poder dar una formulación matemática del movimiento browniano.

Enseguida se tratan las distribuciones de velocidades clásica y relativista. Se analiza la distribución de Maxwell-Jüttner y se calcula el correspondiente factor de normalización. Se presenta la distribución de Jüttner y la versión manifiestamente covariante de la distribución de Jüttner.

Como un paso natural, se procede a construir la teoría de Langevin del movimiento browniano en el contexto de la relatividad especial.

Se discute con detalle las ecuaciones de Fokker-Planck relativistas y sus soluciones así como también las ecuaciones de Langevin relativistas en el espacio fase. Se muestra cómo se puede construir ecuaciones de Langevin para movimientos brownianos relativistas (1+1)-dimensional. Además se extiende el análisis al caso (1+3)-dimensional.

Se analiza el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista y algunas de sus propiedades más importantes y se hace un estudio para relacionar los procesos expuestos.

El trabajo concluye con la presentación de aplicaciones importantes de la teoría expuesta.



## Capítulo 2

# Movimiento browniano

Cuando se observan a través de un microscopio partículas suficientemente pequeñas, del orden de unas micras, inmersas en un fluido, se nota que éstas se mueven rápidamente en todas direcciones y de manera irregular. En 1827, el botánico escocés Robert Brown reportó este fenómeno cuando investigaba acerca del comportamiento del polen en agua [1]. Desde entonces a este fenómeno se le conoce como *movimiento browniano*, aunque ya en 1785, el físico Jan Ingenhousz había descrito el mismo comportamiento en partículas de carbón en alcohol [2].

Brown especuló mucho acerca de este hecho y dio muchas explicaciones aunque todas ellas equivocadas. Puesto que estudió células sexuales masculinas del polen de plantas, el movimiento que observó lo atribuyó a la vitalidad de estas células. Al observar lo mismo en otras partes de la planta, pensó entonces que el movimiento estaba presente en todo organismo vivo. Abandonó esta idea después de repetir su experimento con partículas inorgánicas y darse cuenta que presentaban también un movimiento errático.

Aunque no pudo explicar el movimiento que observó, Brown pudo establecer que éste no podía deberse a la evaporación o la presencia de flujos en el líquido. En los años posteriores, muchas personas trataron de resolver el problema, sin embargo, los únicos avances que se consiguieron fueron, por confirmación experimental, la eliminación de algunas posibles causas del movimiento browniano, como por ejemplo, las ya descartadas por Brown, la forma del contenedor, la composición química del solvente o del soluto, acciones capilares, fuerzas de atracción y repulsión entre las partículas y muchas otras posibilidades de influencias externas.

### 2.1 El modelo de Einstein

Las primeras aproximaciones a la modelización del movimiento browniano fueron hechas en 1900 por L. Bachelier [3], cuando hizo un modelo para describir las fluctuaciones de los precios en la bolsa de Francia basado en la idea de que las fluctuaciones seguían el mismo proceso que una partícula browniana moviéndose dentro de un fluido.

Sin embargo fue hasta 1905, casi 80 años después del trabajo de Brown, cuando Einstein, en un trabajo sobre el movimiento atómico, dio la primera explicación satisfactoria del movimiento browniano [4]. Smoluchowski llegó también a las mismas conclusiones independientemente de Einstein en 1906 [6].

La explicación física que se dio es que el movimiento caótico de partículas suficientemente pequeñas en fluidos es debida a un gran número de colisiones con las moléculas circundantes, en pequeños intervalos de tiempo. Esto es posible porque, a pesar de que el fluido se encuentra en equilibrio térmico, a temperatura ambiente sus moléculas se mueven a velocidades muy altas, manifestando su energía térmica. El efecto individual del choque de las moléculas causa un efecto despreciable sobre la partícula (que es muy grande en comparación con el tamaño de las moléculas), pero la superposición de estas colisiones contiene suficiente energía para provocar un movimiento en la partícula.

La importancia del trabajo de Einstein radica, en parte, en explicar el proceso de difusión microscópicamente, pues entendió que las moléculas de la substancia que se difunde son desplazadas a causa de las colisiones con las moléculas del solvente. Consideremos un número de partículas brownianas que sufre un proceso de difusión, y que éstas están bajo la acción del campo gravitatorio  $F = -mg$ . Supongamos además que las partículas brownianas están lo suficientemente separadas como para no considerar interacciones entre ellas. Einstein consideró que estas partículas se dispersan por lo que ejercen presión osmótica, la cual está dada por la ley de van Hoff:  $\Pi = nk_B T$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura del solvente y  $n = n(x)$  es la densidad de partículas como una función de la altura  $x$  de las partículas sobre una columna vertical. En el estado de equilibrio, el efecto de esta difusión está compensado por el arrastre que sufren las partículas debido al campo gravitacional, es decir, la fuerza osmótica por unidad de volumen

$$F_{\Pi} = -k_B T \frac{dn(x)}{dx} \quad (2.1)$$

es balanceada por la fuerza gravitacional por unidad de volumen  $n(x)F$ . Utilizando este hecho podemos encontrar una expresión para la condición de equilibrio:

$$Fn(x) - k_B T \frac{dn(x)}{dx} = 0, \quad (2.2)$$

de donde se llega a la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$n(x) = n(0)e^{Fx/(k_B T)}. \quad (2.3)$$

Respecto al proceso de difusión, la segunda ley de Fick (que ya era bien conocida en 1905) nos dice que el número de partículas que atraviesan una unidad de volumen por unidad de tiempo es

$$J = -D \frac{dn}{dx}, \quad (2.4)$$

que es el flujo provocado por la difusión.  $D$  es llamado el coeficiente de difusión. Este flujo es compensado por el flujo de partículas provocado por la fuerza viscosa

que surge por el arrastre en las partículas debido a la fuerza gravitacional que está actuando sobre ellas. La fuerza de fricción está dada por  $F_{fr} = -m\zeta v$ , donde  $\zeta$  es el coeficiente de fricción y  $v$  la velocidad de las partículas brownianas. Si suponemos que las partículas son esféricas de radio  $a$ , que son mucho más grandes que las moléculas del fluido, la fórmula de Stokes nos da  $\zeta = 6\pi a\mu/m$  donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido también llamada viscosidad dinámica. La velocidad de una partícula que está en equilibrio bajo la acción de la fuerza gravitacional y la fuerza de fricción es  $v = F/(6\pi a\mu)$ , por lo que el flujo de partículas, es decir, el número de partículas por unidad de área y por unidad de tiempo está dado por

$$J = vn = \frac{F}{6\pi a\mu} n. \quad (2.5)$$

Los flujos dados por (2.4) y (2.5) se deben de cancelar en el equilibrio, lo que resulta en

$$\frac{F}{6\pi a\mu} n - D \frac{dn}{dx} = 0. \quad (2.6)$$

Con esta expresión y utilizando la ecuación (2.2) se encuentra el valor para el coeficiente de difusión

$$D = \frac{k_B T}{\zeta m} = \frac{k_B T}{6\pi a\mu}. \quad (2.7)$$

Esta ecuación es llamada la ecuación de Einstein-Stokes<sup>1</sup> y es un resultado muy importante, pues muestra que la viscosidad y otras formas de disipación son, a un nivel molecular, causadas por el movimiento térmico de las partículas, lo que se conoce ahora como *teorema de fluctuación-disipación*. El coeficiente de difusión tiene una relación con el desplazamiento cuadrático medio de una partícula browniana. Einstein derivó la ecuación de difusión y con ello encontró que el desplazamiento cuadrático medio es proporcional al tiempo de observación, lo que proporciona una herramienta cuantitativa para el movimiento browniano<sup>2</sup>. El análisis de Einstein está basado en las siguientes suposiciones: el movimiento de una partícula es independiente del movimiento de las demás partículas, además, el movimiento de una partícula en un determinado intervalo de tiempo es independiente del movimiento de la misma partícula en otro intervalo de tiempo, donde estos intervalos no se toman muy pequeños. Sea  $\tau$  la longitud de un intervalo de tiempo que satisface las suposiciones anteriores,  $N$  el número de partículas que están inmersas en un fluido y  $f$  el número de partículas por unidad de volumen entre  $x$  y  $x + dx$  en el tiempo  $t$ . Se tiene que en un intervalo  $\tau$ , las coordenadas de las partículas se incrementarán una cantidad  $\varepsilon$ , que puede ser negativa o positiva de acuerdo con cada partícula. Supongamos que la probabilidad de que la partícula se encuentre en  $x + \varepsilon$  es  $\phi(\varepsilon)$ . Los desplazamientos positivos y negativos tienen la misma probabilidad,

<sup>1</sup>También es llamada ecuación de Einstein-Stokes-Sutherland ya que William Sutherland derivó la misma ecuación en 1904 [5].

<sup>2</sup>En 1908, el físico francés Jean-Baptiste Perrin [7] pudo determinar experimentalmente, a partir de la fórmula de Einstein, el valor del número de Avogadro, demostrando así la validez de la teoría del movimiento browniano, y convirtiéndose en una prueba de la existencia de los átomos.

esto se traduce en  $\phi(\varepsilon) = \phi(-\varepsilon)$ . Dado que  $\phi(\varepsilon)$  es una función de densidad de probabilidad, debe cumplir con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\varepsilon) d\varepsilon = 1. \quad (2.8)$$

La cantidad de partículas que en el instante  $t + \tau$  se encontrarán entre los puntos  $x$  y  $x + dx$  es

$$f(x, t + \tau) dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \varepsilon, t) \phi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.9)$$

Dado que el intervalo  $\tau$  es muy pequeño podemos expandir  $f(x, t + \tau)$  en potencias de  $\tau$

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}(x, t), \quad (2.10)$$

desarrollando a  $f(x + \varepsilon, t)$  en potencias de  $\varepsilon$  (pues son pequeños desplazamientos) se tiene

$$f(x + \varepsilon, t) = f(x, t) + \varepsilon \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots \quad (2.11)$$

Ahora podemos escribir la ecuación (2.9) como

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = f \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \phi(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2} \phi(\varepsilon) d\varepsilon + \dots \quad (2.12)$$

Todos los términos impares del lado derecho de (2.12) se cancelan debido a la simetría de la función  $\phi$ . De los términos restantes, sólo conservaremos el primero y tercero, ya que los demás son muy pequeños. Hacemos que

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2} \phi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2\tau} \langle \varepsilon^2 \rangle \quad (2.13)$$

y entonces (2.12) se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.14)$$

que es la ecuación de difusión. La constante  $D$  es el coeficiente de difusión. La solución de (2.14) es, suponiendo difusión de  $N$  partículas a partir del origen,  $x = 0$  en  $t = 0$

$$f(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}, \quad (2.15)$$

es decir, la probabilidad de encontrar a una partícula en  $L$  es

$$\int_L \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} dx. \quad (2.16)$$

A partir de la ecuación (2.15) podemos obtener el desplazamiento cuadrático medio de la partícula en la dirección  $x$

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (2.17)$$

que podemos escribir utilizando (2.7) como

$$\overline{x^2} = \frac{k_B T}{3\pi\mu a} t. \quad (2.18)$$

Para las direcciones  $y$  y  $z$  se tiene

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}, \text{ entonces } \overline{r^2} = 3\overline{x^2}, \quad (2.19)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  es el desplazamiento total de la partícula. Por tanto, el desplazamiento total de la partícula browniana es obtenida con cualquiera de los desplazamientos unidimensionales.

En este modelo, sin embargo, existen algunos inconvenientes. Además de ignorar las posiciones y momentos de todas las partículas del fluido, también se ignora el momento de la partícula misma. Esto nos lleva a que la velocidad promedio para tiempos cortos no está acotada. En la siguiente sección se considera el caso donde la velocidad es una variable adicional, por tanto ya no se tiene este inconveniente.

## 2.2 La ecuación de Langevin

Una manera efectiva de describir a una partícula browniana es a través de una ecuación de movimiento. Esta ecuación fue dada por Langevin en 1908 [8] y se ha convertido en una de las principales herramientas en el tratamiento del movimiento browniano. A partir de esta ecuación, Langevin derivó la misma expresión para el desplazamiento cuadrático medio de una partícula browniana que encontró Einstein.

Consideremos una partícula de masa  $m$ , cuyo centro de masa está en la posición  $x(t)$ , inmersa en un fluido a temperatura absoluta  $T$ . Definimos a  $v$  como la rapidez instantánea de la partícula en la dirección  $x$ ,  $v = dx/dt$  y su momento asociado  $p = mv$ . Esta partícula, que es mucho más grande que la distancia promedio entre las moléculas del líquido y que se está moviendo respecto a éstas a una velocidad  $v$ , experimenta una fuerza de fricción igual a

$$F_{fr} = -m\zeta v. \quad (2.20)$$

Suponemos como antes que la partícula es esférica de radio  $a$ , por lo que se tiene  $m\zeta = 6\pi a\mu$ . Dado que describir al movimiento browniano con sólo la fuerza de fricción no es suficiente, Langevin introdujo una fuerza adicional  $F(t)$  que considera las colisiones moleculares irregulares. Entonces la ecuación para la dinámica de las partículas es, de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$m \frac{dv}{dt} = -m\zeta v + f(x) + F(t) \quad (2.21)$$

donde  $f(x) = -\nabla V(x)$  es una fuerza externa (como la fuerza gravitacional). La fuerza complementaria  $F(t)$  es una función aleatoria instantánea, indiferentemente positiva o negativa, debida a los impactos de las moléculas del líquido sobre la partícula y su magnitud es tal que mantiene la agitación de las partículas.

La ecuación (2.21) es llamada ecuación de Langevin y es un ejemplo de una ecuación diferencial estocástica debido a que contiene el término  $F(t)$  que es una fuerza estocástica. Debido a la naturaleza de esta fuerza, sólo se considera su promedio sobre un ensamble de sistemas idénticos compuestos por la partícula browniana y el fluido que la contiene, pues no es la misma fuerza para todos los sistemas del ensamble.

Si suponemos que las colisiones que sufre la partícula durante un intervalo de tiempo dado no guardan relación con las colisiones en intervalos anteriores, es decir son independientes y que el medio en que se mueve la partícula es isótropo entonces podemos suponer que la fuerza  $F(t)$  satisface las siguientes condiciones

$$\langle F \rangle = \langle Fx \rangle = \langle Fv \rangle = 0, \quad (2.22)$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (2.23)$$

donde  $\delta(t-t')$  es la función delta de Dirac,  $t$  y  $t'$  son tiempos distintos y la constante  $2D$  es la intensidad del ruido. La condición (2.22) significa que la fuerza  $F$  es independiente de la posición y la velocidad de la partícula y debido a su irregularidad, su promedio de ensamble es cero. Todas las colisiones que sufre la partícula browniana son prácticamente instantáneas, esto es, el tiempo de colisión es muy pequeño macroscópicamente (del orden de la separación intermolecular media dividida por la velocidad molecular media). Esto está expresado por la condición (2.23).

Si consideramos que no hay ninguna fuerza externa actuando sobre la partícula browniana, entonces la ecuación (2.21) se simplifica a

$$\frac{dv}{dt} + \zeta v = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.24)$$

A pesar de la naturaleza de la fuerza  $F(t)$  podemos resolver la ecuación anterior con los métodos elementales de ecuaciones diferenciales ordinarias y obtener

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\zeta(t-t')} F(t') dt'. \quad (2.25)$$

La media de la velocidad se obtiene tomando el promedio sobre el ensamble inicial, todas las  $v$  que comienzan con un valor  $v(t=0) = v_0$ . Considerando las condiciones (2.22) y (2.23)

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\zeta t}. \quad (2.26)$$

De igual forma, de la ecuación (2.25) se tiene que la velocidad cuadrática media está dada por

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\zeta t} + \frac{2D}{m^2} e^{-2\zeta t} \int_0^t \int_0^t e^{\zeta(t-t'')} \delta(t'-t'') dt' dt''; \quad (2.27)$$

resolviendo la doble integral se simplifica a

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\zeta t} + \frac{D}{\zeta m^2} (1 - e^{-2\zeta t}). \quad (2.28)$$

Sabemos del teorema de equipartición de la energía que en el estado estacionario la velocidad cuadrática media esta dada por

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{m}, \quad (2.29)$$

tomando el límite para tiempos grandes en la expresión (2.28)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle = \frac{\mathcal{D}}{\zeta m^2}, \quad (2.30)$$

encontramos la también llamada *relación de Einstein*, el valor de la intensidad del ruido  $\mathcal{D}$ ,

$$\mathcal{D} = m\zeta k_B T. \quad (2.31)$$

De la ecuación (2.7) para la constante de difusión se llega a la relación clásica

$$D = \frac{\mathcal{D}}{(m\zeta)^2}. \quad (2.32)$$

### Desplazamiento cuadrático medio

El principal resultado del trabajo de Langevin fue derivar la misma expresión de Einstein para el desplazamiento cuadrático medio de una partícula browniana por medio de un enfoque *dinámico* basado en la segunda ley de Newton, en contraste con el enfoque *cinemático* de Einstein basado en la ecuación de evolución para la distribución de probabilidad. En su análisis, Langevin también supuso que no hay ninguna fuerza externa. Multiplicando la ecuación (2.21) por  $x$

$$mx \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi\mu a x \frac{dx}{dt} + Fx, \quad (2.33)$$

dado que

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 x^2}{dt^2} = 2x \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2,$$

la ecuación (2.33) se puede escribir como

$$\frac{1}{2}m \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\mu a \frac{dx^2}{dt} + Fx. \quad (2.34)$$

Si consideramos un gran número de partículas y tomamos el promedio de la ecuación (2.34) para cada una de ellas, el término  $Fx$  se cancela debido a la irregularidad de  $F$ , condición (2.22). Dado que la energía cinética promedio en una dirección  $x$  de una partícula de masa  $m$  es  $\frac{1}{2}k_B T$ , obtenemos, haciendo  $z = \langle \frac{dx^2}{dt} \rangle$

$$\frac{m}{2} \frac{dz}{dt} + 3\pi\mu a z = k_B T, \quad (2.35)$$

cuya solución es

$$z = k_B T \frac{1}{3\pi\mu a} + C e^{-\frac{6\pi\mu a}{m} t}. \quad (2.36)$$

Al final de un tiempo del orden de  $m/(6\pi\mu a) \approx 10^{-8}\text{s}$  se llega a una razón constante de agitación

$$\frac{\overline{dx^2}}{dt} = k_B T \frac{1}{3\pi\mu a}, \quad (2.37)$$

lo que nos da que para un intervalo de tiempo  $t$

$$\overline{x^2} - x_0^2 = k_B T \frac{1}{3\pi\mu a} t; \quad (2.38)$$

el desplazamiento  $\Delta x$  de la partícula está dado por  $x = x_0 + \Delta x$  y esos desplazamientos son indiferentemente positivos y negativos, por lo que tenemos, haciendo  $x_0 = 0$  y escribiendo  $(\Delta x)^2$  en lugar de  $x^2$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{k_B T}{3\pi\mu a} t, \quad (2.39)$$

que es la misma fórmula que encontró Einstein.

### El modelo de Ornstein-Uhlenbeck

Tanto en el trabajo de Einstein como en el de Langevin se supone una escala de tiempo  $\Delta t \gg 1/\zeta$ , dejando de lado el caso para escalas de tiempo cortas. Un tratamiento más general fue dado por Ornstein y Uhlenbeck en 1930, en donde no sólo se consideran ambas escalas de tiempo, sino también el caso con un campo de fuerzas externa.

Partimos de la ecuación de Langevin (2.24) con las propiedades (2.22) y (2.23) cuya solución está dada por la ecuación (2.25).

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\zeta(t-t')} F(t') dt'.$$

Si integramos la ecuación anterior podemos obtener la función de posición de la partícula browniana

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\zeta} (1 - e^{-\zeta t}) + \frac{1}{m\zeta} \int_0^t (1 - e^{-\zeta(t-t')}) F(t') dt', \quad (2.40)$$

donde hemos considerado que la partícula parte de  $x_0$  y  $v_0$ . Los procesos  $\{x(t), t \geq 0\}$  y  $\{v(t), t \geq 0\}$  se llaman proceso de posición y proceso de velocidad de Ornstein-Uhlenbeck, respectivamente. La ecuación (2.26) da la media de la velocidad. De igual manera se encuentra que  $x(t)$  es un proceso gaussiano<sup>3</sup> con

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\zeta} (1 - e^{-\zeta t}). \quad (2.41)$$

Si  $\Delta x = x(t) - x_0$ , entonces, de la ecuación (2.40)

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{v_0}{\zeta} (1 - e^{-\zeta t}). \quad (2.42)$$

<sup>3</sup>Ver sección A.2 del apéndice A

Cálculos similares nos llevan a

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{v_0^2}{\zeta^2}(1 - e^{-\zeta t})^2 + \frac{2\mathcal{D}t}{m^2\zeta^2} + \frac{\mathcal{D}}{m^2\zeta^3}[-3 + 4e^{-\zeta t} - e^{-2\zeta t}]. \quad (2.43)$$

Para tiempos grandes, sólo el segundo término de la ecuación (2.43) tendrá una contribución considerable, por lo que se recupera la ecuación para el desplazamiento cuadrático medio encontrada por Einstein y por Langevin:

$$\langle(\Delta x)^2\rangle \approx \frac{2\mathcal{D}t}{m^2\zeta^2} = 2Dt, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Si las velocidades iniciales  $v_0$  obedecen una distribución de Maxwell-Boltzmann, se tiene a partir de (2.43)

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{2k_B T t}{m\zeta^2}(\zeta t - 1 + e^{-\zeta t}), \quad t > 0. \quad (2.45)$$

Esta expresión es conocida como la fórmula de Ornstein-Fürth, ya que ellos la derivaron con el propósito de incluir la inercia de las partículas. La expresión de Einstein no considera la inercia y por lo tanto presenta el problema de que no es de raíz cuadrática media diferenciable en  $t = 0$ . Para tiempos cortos la ecuación (2.45) se convierte en

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{k_B T}{m} t^2 \quad (2.46)$$

la cual es de cuadrado medio diferenciable.

## 2.3 La ecuación de Fokker-Planck

Puesto que la fuerza de Langevin  $F(t)$  varía de un sistema a otro en el ensemble, la velocidad también varía de sistema a sistema. Por lo tanto, es de interés conocer la probabilidad de tener una velocidad en el intervalo  $(v, v + dv)$ . Esta probabilidad es  $P(v)dv$ , donde  $P(v)$  es la densidad de probabilidad pues  $v$  es una variable continua. Dada una ecuación de Langevin para el movimiento browniano podemos obtener una ecuación para la evolución en el tiempo de la distribución de probabilidad en el espacio fase de una partícula browniana. Esta ecuación es conocida como *ecuación de Fokker-Planck* [9, 10]. Como ya vimos en la sección 2.1, Einstein obtuvo una ecuación diferencial parcial para la distribución de la densidad de probabilidad del desplazamiento en una dimensión. (2.14) es una ecuación de difusión similar a la ecuación para la conducción de calor inestable. Ésta es el caso más simple de la ecuación de Fokker-Planck. La función de distribución  $P(v, t)$  obedece la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial v}(vP) + \zeta \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}. \quad (2.47)$$

Esta es la ecuación de Fokker-Planck asociada a la ecuación de Langevin (2.24). Si se tiene la condición inicial  $P(v, 0)$  para  $t = 0$  y condiciones a la frontera adecuadas, se obtiene entonces la función de distribución  $P(v, t)$  para todo tiempo.

A continuación se muestra la derivación de la ecuación de Fokker-Planck general para una variable  $x$ , a partir de la cual se deduce (2.47) como un caso particular. Consideremos una función arbitraria  $f(x)$  con la propiedad

$$f(x) \rightarrow 0, \quad f'(x) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty \quad (2.48)$$

y su valor esperado:

$$\langle f \rangle = \int f(x)P(x, t|x_0)dx, \quad (2.49)$$

donde  $P(x, t|x_0)$  es la probabilidad de ir de  $x_0$  a  $x$  en el tiempo  $t$ . Suponemos que se cumple la ecuación de Chapman-Kolmogorov<sup>4</sup>, es decir, que es un proceso markoviano:

$$P(x, t + \Delta t|x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t|x_0)P(x, t + \Delta t|z, t)dz. \quad (2.50)$$

Tomando la evolución en el tiempo del valor esperado de  $f(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x)P(x, t|x_0)dx = \int f(x) \frac{\partial}{\partial t} P(x, t|x_0)dx, \quad (2.51)$$

y notando que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t|x_0) \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [P(x, t + \Delta t|x_0) - P(x, t|x_0)], \quad (2.52)$$

entonces podemos escribir la ecuación (2.51) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle &= \int f(x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [P(x, t + \Delta t|x_0) - P(x, t|x_0)] dx \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int f(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t|x_0)P(x, t + \Delta t|z, t)dz \right] dx \\ &\quad - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int f(x)P(x, t|x_0)dx. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Utilizando la condición de normalización

$$\int P(x, t + \Delta t|z, t)dx = 1, \quad (2.54)$$

e intercambiando el orden de integración del primer término del lado derecho de la ecuación (2.53) y considerando que se puede expandir la función  $f(x)$  en series de Taylor se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t|x_0) \left[ f'(z)A(z) + \frac{f''(z)}{2}B(z) \right] dz, \quad (2.55)$$

<sup>4</sup>Ver sección A.2.1 del apéndice A

donde se han definido las cantidades

$$A(z) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x - z) P(x, t + \Delta t | z, t) dx, \quad (2.56)$$

$$B(z) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x - z)^2 P(x, t + \Delta t | z, t) dx. \quad (2.57)$$

La ecuación (2.55) se puede reescribir, después de integrar por partes, como

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} [A(x)P(x, t|x_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x)P(x, t|x_0)] \right] f(x) dx, \quad (2.58)$$

donde hemos cambiado a la variable muda  $z$  por  $x$ . Comparando ésta ecuación con (2.51)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial t} P(x, t|x_0) + \frac{\partial}{\partial x} [A(x)P(x, t|x_0)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x)P(x, t|x_0)] \right] f(x) dx = 0. \quad (2.59)$$

Dado que la función  $f(x)$  es arbitraria, el término entre paréntesis debe ser cero, entonces se obtiene como resultado una ecuación de movimiento para la función de distribución  $P(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t|x_0) = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x)P(x, t|x_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x)P(x, t|x_0)]. \quad (2.60)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Fokker-Planck para una variable  $x$  aunque también se le suele llamar, dependiendo del contexto en el que se derive, *2da ecuación de Kolmogorov* o *ecuación de Kolmogorov hacia adelante* [16]. Esta ecuación es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico, o más concretamente, es una ecuación de difusión con una derivada adicional de primer orden respecto a  $x$ . La ecuación (2.60) nos dice que, dado un ensamble de partículas que emergen del punto  $x_0$  en el tiempo  $t_0$ , moviéndose independientemente,  $P(x, t|x_0, t_0)$  es la concentración en el punto  $x$  en el tiempo  $t$ . Su solución debe ser no negativa y satisfacer las condiciones iniciales  $P(x, t_0|x_0) = \delta(x - x_0)$ . Los coeficientes  $A(x)$  y  $B(x)$  reciben el nombre de coeficiente de arrastre y coeficiente de difusión respectivamente. Notemos que la ecuación de difusión (2.14) es una ecuación de Fokker-Planck con coeficientes  $A$  y  $B$  constantes.

Para el caso multidimensional, el coeficiente de arrastre está dado por el vector  $\mathbf{A} = A_i(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, \dots, N$  y el coeficiente de difusión por la matriz  $B = b_{ij}(\mathbf{r})$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . La ecuación de Fokker-Planck multidimensional puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = -\sum_{i=1}^N \nabla_i [A_i(\mathbf{r})P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j} [b_{ij}(\mathbf{r})P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)]. \quad (2.61)$$

A continuación determinaremos los valores de los coeficientes de arrastre y difusión para la ecuación de Langevin (2.24) sujeta a las condiciones (2.22) y (2.23)

$$\dot{v} = -\zeta v + \frac{F(t)}{m}; \quad \langle F(t) \rangle = 0; \quad \langle F(t)F(t') \rangle = 2m\zeta k_B T \delta(t - t').$$

De acuerdo a la ecuación (2.56) se tiene

$$\begin{aligned} A(v) &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (u - v) P(u, t + \Delta t | v, t) du \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle (u - v) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle \Delta v \rangle. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Integrando la ecuación de Langevin sobre un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  se obtiene que el cambio en la velocidad es

$$\Delta v \approx -\zeta v \Delta t + \frac{1}{m} \int_t^{t+\Delta t} F(t') dt' \quad (2.63)$$

y su promedio es

$$\langle \Delta v \rangle = -\zeta v \Delta t. \quad (2.64)$$

El coeficiente de arrastre  $A(v)$  es por tanto

$$A(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (-\zeta v \Delta t) = -\zeta v. \quad (2.65)$$

Procedemos de igual manera para encontrar el coeficiente de difusión  $B(v)$

$$B(v) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (u - v)^2 P(u, t + \Delta t | v, t) du = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle (\Delta v)^2 \rangle. \quad (2.66)$$

De (2.63) se sigue que

$$\begin{aligned} (\Delta v)^2 &= \zeta^2 v^2 (\Delta t)^2 - \frac{2\zeta v \Delta t}{m} \int_t^{t+\Delta t} F(t') dt' + \\ &\quad \frac{1}{m^2} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F(t') F(t'') dt' dt''. \end{aligned} \quad (2.67)$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación es del orden de  $(\Delta t)^2$  y lo podemos ignorar, el segundo término será cero al promediarlo, por lo que sólo nos resta el último término

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle F(t') F(t'') \rangle dt' dt'' &= 2m\zeta k_B T \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t' - t'') dt' dt'' \\ &= 2m\zeta k_B T \Delta t. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Entonces el coeficiente de difusión tiene el valor

$$B(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{2\zeta k_B T}{m}. \quad (2.69)$$

Ahora, sustituyendo (2.64) y (2.68) en (2.60) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = \zeta \frac{\partial}{\partial v} (v P(v, t)) + \zeta \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2 P(v, t)}{\partial v^2}, \quad (2.70)$$

que es justamente la ecuación (2.47). Además ésta se puede reescribir como una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = -\zeta \frac{\partial}{\partial v} \left( -vP(v, t) - \frac{k_B T}{m} \frac{\partial}{\partial v} P(v, t) \right), \quad (2.71)$$

donde la expresión entre paréntesis es la corriente de probabilidad, la cual se anula si la densidad de probabilidad tiene la forma  $P(v, t) \propto e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$ . Por lo que la distribución de Maxwell es entonces la distribución de equilibrio de la ecuación de Fokker-Planck. Para ver esto resolvamos la ecuación introduciendo la variable  $h = ve^{\zeta t}$  en lugar de  $v$ , y tenemos

$$P(v, t) = P(he^{\zeta t}, t) \equiv G(h, t), \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial h} e^{\zeta t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial h^2} e^{2\zeta t}, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial h} \zeta h + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (2.74)$$

Entonces la ecuación (2.71) toma la forma

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \zeta G + \zeta \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2 G}{\partial h^2} e^{2\zeta t}. \quad (2.75)$$

Hacemos la sustitución  $G = Ze^{\zeta t}$ , de donde

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} e^{\zeta t} + \zeta G, \quad (2.76)$$

debido a esto tenemos

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \zeta \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} e^{2\zeta t}. \quad (2.77)$$

Introduciendo una nueva variable para el tiempo  $\varrho$ , por medio de

$$d\varrho = e^{2\zeta t} dt, \quad (2.78)$$

$$\varrho = \frac{1}{2\zeta} (e^{2\zeta t} - 1), \quad (2.79)$$

con  $\varrho(t=0) = 0$ , la ecuación (2.77) se transforma en una ecuación de difusión

$$\frac{\partial Z}{\partial \varrho} = \zeta \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2}, \quad (2.80)$$

cuya solución es

$$Z(h, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varphi\varrho}} e^{-\frac{(h-h_0)^2}{4\varphi\varrho}}; \quad \varphi = \zeta \frac{k_B T}{m}. \quad (2.81)$$

Regresando a las variables originales  $v$  y  $t$ , encontramos

$$P(v, t) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T (1 - e^{-2\zeta t})} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m(v-v_0 e^{-\zeta t})^2}{2k_B T (1 - e^{-2\zeta t})}}, \quad (2.82)$$

que es la solución de la ecuación de Fokker-Planck (2.71). Para el caso límite donde  $t \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(v, t) = e^{-mv^2/2k_B T} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.83)$$

por lo que  $P(v)$  se relaja a través de la distribución de Maxwell.

Dos casos especiales de la ecuación de Fokker-Planck son la ecuación de Smoluchowski y la ecuación de Klein-Kramers. La ecuación de Klein-Kramers [11, 14] es una ecuación de movimiento para la densidad de probabilidad  $P(x, v, t)$  que describe a partículas brownianas en un campo de fuerzas externo.

Consideremos el caso del movimiento browniano en presencia de un campo de fuerzas externo  $f(x) = -\nabla V(x)$ . La ecuación de Langevin considerando esta fuerza adicional es la ecuación (2.21)

$$m \frac{dv}{dt} = -m\zeta v + f(x) + F(t).$$

Esta fuerza no altera las colisiones de la partícula y el efecto de fricción que experimenta, por tanto, la fuerza  $F(t)$  sigue cumpliendo con las condiciones (2.22) y (2.23). Para la ecuación (2.21), la correspondiente ecuación de Fokker-Planck, es decir, la ecuación de movimiento para la densidad de probabilidad  $P(x, v, t)$  está dada por

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{f(x)}{m} \frac{\partial P}{\partial v} + \zeta \frac{\partial}{\partial v} v P + \frac{\zeta k_B T}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad (2.84)$$

que es la ecuación de Klein-Kramers cuya solución es, en estado estacionario, la distribución de Boltzmann

$$P(x, v) = N e^{[-E/(k_B T)]}, \quad (2.85)$$

donde  $N$  es la constante de normalización y  $E = mv^2/2 + V$  es la energía total. Un caso especial de la ecuación (2.21) es cuando se tiene una fricción muy grande. Cuando se cumple la desigualdad  $m\zeta v \gg m\dot{v}$ , (2.21) se reduce a

$$v = \dot{x} = \frac{f(x)}{m\zeta} + \frac{F(t)}{m\zeta}. \quad (2.86)$$

Entonces, para la densidad de probabilidad  $P(x, t)$ , su ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{1}{\zeta m} \frac{\partial}{\partial x} (P(x, t) f(x)) + \frac{k_B T}{\zeta m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (2.87)$$

Esta es la ecuación de Smoluchowski con solución estacionaria

$$P = N e^{-V(x)/(k_B T)}. \quad (2.88)$$

## 2.4 El proceso de Wiener

En 1923, N. Wiener presentó un tratamiento matemático general del movimiento browniano [15]. Él definió y analizó un proceso estocástico que ha servido para describir las propiedades de la trayectoria de una partícula browniana. Éste es conocido como *proceso de Wiener*. Si  $W(t)$  da la posición de la partícula, el proceso estocástico queda entonces determinado por la colección de todas las posibles trayectorias junto con la probabilidad de cada trayectoria. Una realización del proceso es simplemente la posición  $W(t)$ , tomando a  $t$  como un parámetro continuo. La figura 2.1 muestra tres realizaciones del proceso de Wiener.

Las consideraciones físicas para el movimiento browniano son las siguientes:

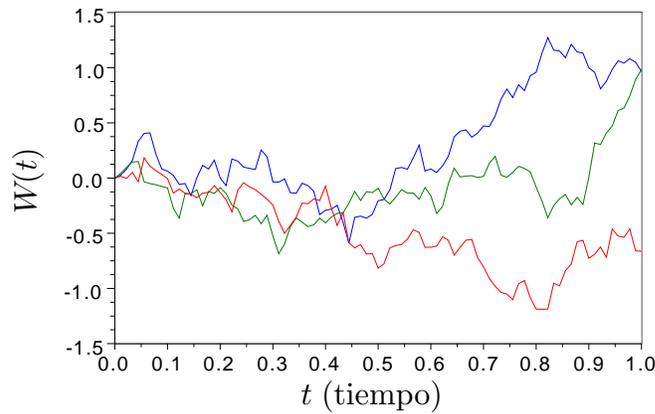


Figura 2.1: Tres realizaciones del proceso de Wiener.

- las condiciones del entorno son constantes
- el medio es isótropo, es decir, no hay una dirección privilegiada

**Definición 2.1 (Proceso de Wiener)** *El proceso unidimensional  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener (o movimiento browniano) si tiene las siguientes propiedades:*

- (1) *Con probabilidad 1, la trayectoria  $t \mapsto W(t)$  es continua y  $W(0) = 0$ ;*
- (2) *si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , entonces los incrementos*

$$W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_N) - W(t_{N-1})$$

*son independientes;*

(3) el incremento  $W(t+s) - W(t)$  no depende de  $t$  y

(4)  $W(t)$  tiene una distribución normal con

$$\langle W(t) \rangle = 0 \text{ y } \text{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

donde el parámetro  $\sigma$  tiene que ser determinado.

Aquí interpretamos a  $W(t)$  como el desplazamiento de una partícula browniana después de un tiempo  $t$  con  $W(0) = 0$ . La condición  $W(0) = 0$  no es realmente necesaria. Hay casos en donde el movimiento browniano requiere comenzar en  $W(0) = u \neq 0$ , en donde se tiene que  $\langle W(t) \rangle = u$ .

Debido a las propiedades 2 y 3, para toda  $t > s$ , el incremento  $W(t) - W(s)$  tiene una distribución normal, con  $\langle W(t) - W(s) \rangle = 0$  y  $\text{Var}[W(t) - W(s)] = \sigma^2 |t - s|$ .

El parámetro  $\sigma$ , en aplicaciones del movimiento browniano a finanzas, recibe el nombre de *volatilidad*.

**Definición 2.2** El proceso  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un movimiento browniano estándar si  $\sigma^2 = 1$ .

De las propiedades del proceso de Wiener se puede deducir fácilmente que es un proceso de Markov.

Una conexión entre un proceso de Wiener  $W(t)$  y la fuerza estocástica de Langevin  $L(t)$  está dada por

$$dW(t) = L(t)dt. \quad (2.89)$$

Notemos que la ecuación de Langevin (2.21), en ausencia de una fuerza externa, la podemos reescribir de la siguiente forma

$$d[mv(t)] = -\zeta mv(t)dt + L(t)dt. \quad (2.90)$$

Si consideramos un proceso de Wiener unidimensional  $W(t)$ , la ecuación (2.77) se puede expresar como

$$d[mv(t)] = -\zeta mv(t)dt + dW(t) \quad (2.91)$$

con

$$\langle dW(t) \rangle = 0, \quad \langle dW(t)dW(t') \rangle = 2m\zeta k_B T \delta(t - t'). \quad (2.92)$$

El proceso de Wiener es también un proceso de difusión. En el contexto de la ecuación de Fokker-Planck, el proceso de Wiener satisface la ecuación de difusión

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (2.93)$$

que no es más que la ecuación de Fokker-Planck (2.60) con coeficiente de deriva nulo y coeficiente de difusión constante  $B(x) = 2D$ .

## 2.5 El proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Una propiedad de las trayectorias del proceso de Wiener que es de gran importancia es que son no-diferenciables en ningún punto casi seguro, es decir, la derivada en cualquier punto es infinita. Si interpretamos a  $W(t)$  como la posición de la partícula browniana, entonces la velocidad tiende a infinito.

El modelo de Ornstein-Uhlenbeck [12, 13] es un modelo del movimiento browniano más realista, no cuenta con el inconveniente de velocidades infinitas, son las aceleraciones las que pasan a tener un valor infinito.

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\{X(t), t \geq 0\}$  puede ser definido como la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = -\gamma X(t)dt + \sigma dW(t), \quad (2.94)$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante que mide la razón de decaimiento determinista, la constante  $\sigma > 0$  el nivel del forzamiento estocástico y  $W(t)$  es un proceso de Wiener estandar. El proceso  $\{X(t), t \geq 0\}$  puede ser definido mediante la integral estocástica

$$X(t) = X(0)e^{-\gamma t} + \sigma e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} dW(s). \quad (2.95)$$

El valor inicial del proceso,  $X(0)$ , es una variable aleatoria que puede ser una constante y es independiente de  $W(t)$ . Se puede verificar por sustitución que  $X(t)$  definida como (2.82) satisface (2.81); esta es la única solución.



## Capítulo 3

# Funciones de distribución

Para presentar la teoría del movimiento browniano relativista es necesario primero establecer una generalización de la distribución de velocidades de Maxwell, pues está claro que la función de distribución clásica, al permitir valores de la velocidad mayores a los de la luz, no es compatible con la relatividad especial. En este capítulo se presentan de manera breve la función de distribución de velocidades clásica y su más aceptada generalización relativista, la función de distribución de Jüttner.

### 3.1 La distribución de Maxwell-Boltzmann

Una de las ecuaciones más importantes en teoría cinética es la ecuación de Boltzmann. Esta es una ecuación de movimiento para la función de distribución de una partícula,  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , donde el vector  $\mathbf{x}$ , con componentes  $x_1, x_2, x_3$ , es el vector de posición,  $\mathbf{p}$ , con componentes  $p_1, p_2, p_3$ , es el vector de velocidad y  $t$  es el tiempo. En 1872, Ludwig Boltzmann derivó esta ecuación en el contexto de sistemas de gases diluídos y tiene aplicaciones en otras áreas de la física estadística como el transporte de electrones en semiconductores o el transporte de neutrones.

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann es la solución de equilibrio de la ecuación de Boltzmann. Consideremos la función de distribución  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , la cual especifica el número de partículas por unidad de volumen de espacio fase a un tiempo  $t$  dado. Una perturbación a la función de distribución puede ser expresada como

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.1)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton,  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ , las derivadas parciales pueden ser escritas como

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.2)$$

o bien, utilizando los paréntesis de Poisson,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (3.3)$$

Si en el sistema no hay colisiones, la función de distribución se mantiene sin cambios, por lo que se obtiene la ecuación de Boltzmann sin colisiones

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \quad (3.4)$$

La función de distribución, en el estado estacionario, debe ser constante, por lo que se tiene  $\{f, H\} = 0$ , lo cual indica que  $f$  conmuta con el hamiltoniano, es decir, es una cantidad conservada. Si el hamiltoniano es sólo una función del momento, entonces la función de distribución es también una función del momento. Si consideramos que el hamiltoniano está dado por  $H = H(p) = \frac{p^2}{2m}$ , entonces la función de distribución es

$$f = f(p) = Ae^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} \quad (3.5)$$

la cual es la distribución de Maxwell-Boltzmann, con  $T$  la temperatura del gas,  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m$  la masa de cada partícula. Con  $d$  el número de dimensiones espaciales del sistema, la constante de normalización es  $A = (2\pi mk_B T)^{-d/2}$ . Esta distribución está en conflicto con la relatividad especial, ya que permite valores para la velocidad superiores a la de la luz. Dado que ésta describe adecuadamente la distribución de momentos de una partícula de un sistema no relativista en equilibrio termodinámico, cualquier distribución de momentos relativista que describa un gas en equilibrio debe reducirse asintóticamente a esta distribución en el límite de bajas velocidades, es decir, a baja temperatura.

## 3.2 La distribución de Maxwell-Jüttner

La generalización relativista de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann fue derivada por primera vez en 1911 por Jüttner [54], quien la obtuvo a partir de un principio de máxima entropía [55]. En 1928, Jüttner [56] derivó también la función de distribución de equilibrio para bosones y fermiones.

La versión relativista de la función de distribución de velocidades es de gran importancia en experimentos en altas energías y astrofísica [38, 39, 40, 51]. Por ejemplo, Chandrasekhar utilizó la distribución de Jüttner en un modelo para las enanas blancas [41], considerándolas como un gas de electrones relativistas fuertemente degenerado empeando entonces la versión cuántica para fermiones de la distribución de Jüttner, encontrando un límite para la masa de las enanas blancas, conocido como límite de Chandrasekhar, que es igual a 1.4 masas solares. Otros ejemplos incluyen la aplicación de ecuaciones de Langevin relativistas a experimentos de iones pesados [40, 51], procesos de termalización en plasmas ultra-relativistas [39], o el efecto relativista Sunyaev-Zel'dovich [38], que

describe la distorsión del espectro de la Radiación Cósmica de Fondo RCF (ó CMB por sus siglas en inglés *Cosmic Microwave Background*), producida por la dispersión de Compton de los fotones de la RCF por electrones calientes en cúmulos de galaxias [42, 43, 44]. La intensidad predicha de las distorsiones espectrales y los parámetros cosmológicos inferidos del efecto Sunyaev-Zel'dovich dependen sensiblemente de la distribución de velocidades de los electrones supuesta [40].

La función de distribución de Maxwell-Jüttner tiene la forma general

$$f_J = A \exp(-U_\alpha p^\alpha / k_B T) \quad (3.6)$$

con  $U_\alpha$  el vector 4-velocidad,  $A$  una constante de normalización. La distribución de Maxwell-Jüttner también es la solución de equilibrio de la ecuación de Boltzmann relativista [57, 59], es decir, es la única en la cual la integral de colisión es cero. La ecuación de Boltzmann relativista, que es la ecuación que describe la evolución de la función de distribución relativista  $f(x, p)$  es, en el caso de existir colisiones y fuerzas externas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(fF^i)}{\partial p^i} = C_{12} = \int (f' f'_1 - f f_1) v_\sigma \sigma d\Omega d^3 p_1, \quad (3.7)$$

y el estado de equilibrio es aquel donde el término de colisión  $C_{12}$  se anula. Otras maneras de derivar la función de distribución de Maxwell-Jüttner es usando una formulación covariante para el paso de un ensamble microcanónico al canónico, ver [58], por maximización de la energía libre del sistema o simplemente sustituyendo la energía relativista en el factor de Boltzmann  $\exp(-\beta E)$ , el cual puede ser obtenido de consideraciones termodinámicas sin necesidad de la teoría de la relatividad, y normalizar el resultado. Esta última manera es la que desarrollaremos a continuación. Introduciendo la energía de una partícula relativista con masa en reposo  $m$ , la función de distribución de Maxwell-Jüttner se reescribe como

$$f_J(p) = A e^{-E(p)/k_B T} \quad (3.8)$$

Dado que la energía está dada por  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ , donde el momento relativista es  $p = m\gamma v$ ,  $\gamma$  es el factor de Lorentz y  $c$  la velocidad de la luz se tiene

$$f_J = A \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) \quad (3.9)$$

La condición de normalización de  $f_J$  está dada por

$$\int f_J(p) d^3 p = 1 \quad (3.10)$$

o bien, sustituyendo el valor de  $f_J$

$$4\pi A \int_0^\infty p^2 \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) dp = 1 \quad (3.11)$$

Para obtener la expresión de la distribución completa falta evaluar el parámetro de normalización  $A$ . Hacemos el siguiente cambio de variable

$$s^2 = 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} s ds = \frac{p}{m^2 c^2} dp \quad (3.12)$$

en términos de  $s$ , la ecuación (3.11) toma la forma

$$4\pi m^3 c^3 A \int_1^\infty \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T} s\right) s(s^2 - 1)^{1/2} ds = 1 \quad (3.13)$$

Haciendo integración por partes, la ecuación anterior resulta

$$\frac{4\pi m^4 c^5 A}{3k_B T} \int_1^\infty (s^2 - 1)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T} s\right) ds = 1 \quad (3.14)$$

en donde se ha utilizado la integral

$$\int (s^2 - 1)^{1/2} ds = \frac{1}{3} (s^2 - 1)^{3/2} \quad (3.15)$$

Utilizando la expresión integral de la función de Hankel modificada<sup>1</sup>  $K_\nu(z)$ ,

$$K_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - (1/2)} dt \quad (3.16)$$

hacemos  $\nu = 2$ ,  $t = s$  y  $z = \frac{mc^2}{k_B T}$ , y dado que

$$\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

la integral de la ecuación (3.14) queda como

$$\int_1^\infty \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T} s\right) (s^2 - 1)^{3/2} ds = \frac{3}{4} \left(\frac{2k_B T}{mc^2}\right)^2 K_2\left(\frac{mc^2}{k_B T}\right) \quad (3.18)$$

sustituyendo este valor en (3.14), el valor del parámetro de normalización  $A$  es

$$A = \frac{1}{4\pi m^2 c k_B T K_2\left(\frac{mc^2}{k_B T}\right)} \quad (3.19)$$

es decir, la forma final de la función de distribución (3.9) es

$$f_J = \frac{1}{4\pi m^2 c k_B T K_2\left(\frac{mc^2}{k_B T}\right)} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\right) \quad (3.20)$$

La expresión anterior recibe el nombre de función de distribución de Maxwell-Jüttner. Hay que tener en cuenta que la temperatura  $T$  y el momento  $p$  están

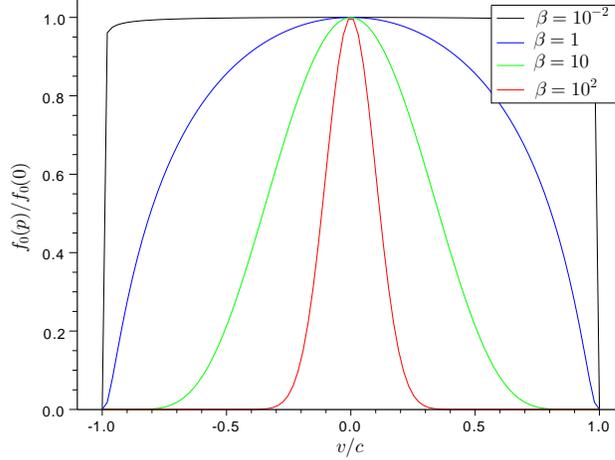


Figura 3.1: Función de distribución de Maxwell-Jüttner.

determinados por un observador comóvil con el gas. La distribución de Jüttner (3.20) o (3.8) es una distribución de momentos que traducida a velocidades tiene la forma

$$\psi_{\text{J}}(\mathbf{v}; m, \beta_{\text{J}}, d) = \frac{m^d}{A_{\text{J}}} \gamma(\mathbf{v})^{2+d} \exp[-\beta_{\text{J}} m \gamma(\mathbf{v})], \quad |\mathbf{v}| < 1, \quad (3.21)$$

con  $\psi_{\text{J}} \equiv 0$  si  $|\mathbf{v}| \geq 1$  y  $A_{\text{J}} = A_{\text{J}}(m, \beta_{\text{J}}, d)$  es la constante de normalización dada por

$$A_{\text{J}} = 2m^d \left( \frac{2\pi}{\beta_{\text{J}} m} \right)^{(d-1)/2} K_{(d-1)/2}(\beta_{\text{J}} m). \quad (3.22)$$

La distribución de velocidad de equilibrio vista por otro marco de referencia  $\Sigma'$  que se mueve con una velocidad  $u$  relativa al marco en reposo con el gas  $\Sigma_0$  es

$$\psi'_{\text{J}}(v; m, \beta_{\text{J}}, u) = \frac{m \gamma(v')^3}{A_{\text{J}} \gamma(u)} \exp[-\beta_{\text{J}} \gamma(u) m \gamma(v') (1 + uv')], \quad (3.23)$$

con  $v'$  la velocidad de la partícula en el marco en movimiento  $\Sigma'$ . Esta distribución de velocidades se reduce a la distribución de Jüttner para  $u = 0$ .

La distribución de Jüttner juega un papel muy importante en la física estadística relativista, y aunque es aceptada en la actualidad no ha estado exenta de algunos cuestionamientos sobre si es o no la correcta generalización de la distribución de velocidades de Maxwell. A partir de los años 80 algunos resultados

<sup>1</sup>La función de Hankel modificada, es algunas veces llamada función de Macdonald o función de Bessel modificada de segunda clase. Ver apéndice D.

pusieron en duda la distribución de Jüttner. Horwitz y colaboradores [63, 64] propusieron una ecuación de Boltzmann relativista que describieron como manifiestamente covariante cuya solución estacionaria difiere de la ecuación (3.21) [65]. Otros resultados y propuestas [61, 62, 69, 71, 97] aumentaron la confusión sobre la correcta generalización de la distribución de Boltzmann.

Una distribución que fue propuesta como una alternativa a la de Jüttner es la llamada *distribución de Jüttner modificada* [69, 70, 71],

$$f_{\text{JM}}(p) = \frac{A_{\text{JM}}}{E(p)} e^{-E(p)/k_B T}, \quad (3.24)$$

donde  $A_{\text{JM}}$  es la constante de normalización. Esta función también se reduce a la distribución de Maxwell-Boltzmann en el caso límite no relativista. En términos de las velocidades, queda como

$$\psi_{\text{JM}}(\mathbf{v}; m, \beta_{\text{JM}}, d) = \frac{m^d}{A_{\text{JM}}} \frac{\gamma(\mathbf{v})^{2+d}}{m\gamma(\mathbf{v})} \exp[-\beta_{\text{JM}} m \gamma(\mathbf{v})], \quad |\mathbf{v}| < 1. \quad (3.25)$$

La constante de normalización está dada por

$$A_{\text{JM}} = 2m^{d-1} \left( \frac{2\pi}{\beta_{\text{JM}} m} \right)^{(d-1)/2} K_{(d-1)/2}(\beta_{\text{JM}} m). \quad (3.26)$$

A los mismos valores de los parámetros  $\beta_{\text{J}} = \beta_{\text{JM}} \lesssim 1/m$ , la función de Jüttner modificada exhibe una población de partículas considerablemente menor comparada con la de Jüttner en la cola de alta energía debido al prefactor adicional  $1/E$ . Otro aspecto importante a resaltar es que la distribución modificada de Jüttner es justo la distribución de velocidades de un gas en equilibrio cuando se utiliza una parametrización basada del tiempo propio de las partículas [60].

En [79] se hace una revisión crítica acerca de las diferentes aproximaciones a la distribución de Maxwell-Jüttner.

Una forma manifiestamente covariante de la distribución de Maxwell-Jüttner fue dada en [74]. La ventaja de tener la distribución en esta forma es que, al estar escrita con tensores de Lorentz permite investigar el comportamiento bajo transformaciones de Lorentz mostrando así su comportamiento para sistemas en movimiento relativo. La distribución de Jüttner manifiestamente covariante tiene la forma:

$$f_{\text{J}} = \frac{n}{2c(mc)^d K_{\frac{d+2}{2}}(mc\Theta)} \left( \frac{mc\Theta}{2\pi} \right)^{\frac{d-2}{2}} \exp(-\Theta_\mu p^\mu), \quad (3.27)$$

donde  $n$  es la densidad de partículas vista en el marco de referencia comóvil en el cual el gas está en reposo y  $\Theta$  es la magnitud del 4-vector  $\Theta_\mu$  y se relaciona con la temperatura en el marco comóvil por medio de

$$\Theta^2 = \Theta_\mu \Theta^\mu = \frac{c^2}{k_B^2 T^2}, \quad (3.28)$$

por lo que la temperatura es entonces un invariante. De hecho la termodinámica relativista es un campo que sigue teniendo mucha actividad, pues continuamente surgen nuevas teorías y todas ellas difieren principalmente en la manera en que se transforma la temperatura bajo transformaciones de Lorentz.

Consideremos dos sistemas de referencia inercial  $O$  y  $O'$  que se mueven uno respecto al otro con velocidad constante  $v$ . Sea  $T_0$  la temperatura de un sistema termodinámico en  $O$  que mide un observador co-móvil con el sistema  $O$  y  $T$  la temperatura del sistema termodinámico medida en el sistema  $O'$ . La primera forma de transformación de la temperatura bajo transformaciones de Lorentz fue propuesta por Einstein [108] y Planck [109], ellos encontraron que

$$T = T_0 \gamma^{-1} \quad (3.29)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$  es el factor de Lorentz. Este hecho está basado en la suposición de la invariancia relativista de la entropía, es decir,  $S = S'$  donde  $S$  es la entropía del sistema termodinámico medido en el sistema  $O$  y  $S'$  es la entropía del mismo sistema medido en el sistema  $O'$ . Tolman [110] establece que esta invarianza es debida a que en un cambio adiabático reversible sin absorción de calor, la entropía no cambia. La transformación de la temperatura anterior fue una consecuencia de como se propusieron que se transformarían las demás cantidades termodinámicas. Se propuso que el calor se transformara como  $Q' = Q/\gamma$ , es decir, tanto la temperatura como el calor tiene una corrección del inverso del factor de Lorentz. De hecho la principal diferencia entre las teorías existentes es la definición de calor que tratan. Otra transformación fue desarrollada en los años 60's por Ott [111] y Arzelies [112] y tiene la forma

$$T = T_0 \gamma, \quad (3.30)$$

mientras que Landsberg [113] propuso que la temperatura es un invariante de Lorentz, esto es

$$T = T_0. \quad (3.31)$$

En 1968 van Kampen [114] realizó un análisis en el cual concluyó que las cantidades termodinámicas pueden ser definidas en diferentes maneras igualmente consistentes.

Se han hecho simulaciones numéricas de dinámica molecular completamente relativista en una dimensión, en las cuales se confirma a la distribución de Jüttner como la correcta distribución de velocidades relativista [60, 68, 67, 72] cuando se utiliza la parametrización temporal natural del marco de referencia en el que se miden las velocidades. Con tales simulaciones y haciendo uso de una versión no manifiestamente covariante del teorema de equipartición se determinó que la temperatura de un objeto en movimiento no cambia en el marco comóvil, es decir, la temperatura es un invariante, lo cual concuerda con los resultados obtenidos del análisis covariante de la función de distribución.

### 3.3 Densidades de probabilidad

Además de conocer la función de distribución de equilibrio relativista, es importante tener una definición de la función de densidad de probabilidad en relatividad especial y saber como se transforman.

Consideremos coordenadas  $(t, x, p)$  del sistema de laboratorio  $\Sigma$  y la función de densidad de probabilidad FDP del espacio fase de una partícula  $f(t, x, p) \geq 0$ , con momento relativista  $p = m\gamma(v)v$ . Para definir la función  $f$  consideremos un sistema de muchas partículas relativistas con número de partículas conservado  $N \gg 1$ , entonces  $Nf(t, x, p)dx dp$  es el número de partículas en el intervalo de espacio fase  $[x, x + dx] \times [p, p + dp]$  que un observador  $O$ , en reposo en  $\Sigma$  ve al  $\Sigma$ -tiempo  $t$ . Para el caso de una partícula browniana en un medio fluctuante,  $f(t, x, p)dx dp$  da la probabilidad de encontrar la partícula browniana al tiempo de laboratorio  $t$  en  $[x, x + dx] \times [p, p + dp]$ . La condición de normalización

$$\int f(t, x, p)dx dp = 1, \quad (3.32)$$

para  $f$  es aplicable en ambos casos. Para la transformación de  $f(t, x, p)$  consideremos un segundo observador  $O'$  moviéndose con velocidad  $w \neq 0$  relativo a  $\Sigma$ . El observador medirá una distribución  $f'(t', x', p')$ . La densidad  $f$  se transforma como un escalar de Lorentz [73], es decir, la función  $f$  en un marco de referencia arbitrario  $\Sigma'$  viene dada por

$$f(t, x, p) = f'(t', x', p'), \quad (3.33)$$

con  $(t, x, p)$  y  $(t', x', p')$  conectados por una transformación de Lorentz con parámetro de velocidad  $w$ . La prueba de este resultado se puede realizar considerando que las trayectorias de cada partícula son únicas, después de una reparametrización en términos de sus tiempos propios no importando la naturaleza de las interacciones entre las partículas [73]. La función  $f'(t', x', p')$  satisface la condición de normalización  $t'$  simultánea

$$\int f'(t', x', p')dx' dp' = 1. \quad (3.34)$$

La distribución marginal de momentos la definimos como

$$\phi(t, p) = \int dx f(t, x, p), \quad (3.35)$$

y como  $f$  está normalizada a la unidad,  $\phi$  también lo está

$$\int dp \phi(t, p) = 1. \quad (3.36)$$

No se puede escribir una ley de transformación para la distribución de momentos similar a (3.33), pues en general, si no se conoce  $f$  con detalle no es posible obtener la distribución de momentos  $\phi'(t', p')$  en un marco de referencia arbitrario  $\Sigma'$  a partir del conocimiento de  $\phi(t, p)$  en  $\Sigma$ .

Un caso especial es la distribución estacionaria de momentos de un sistema espacialmente homogéneo. Consideremos un gas espacialmente homogéneo encerrado en un recipiente en reposo en el marco de referencia  $\Sigma_0$ . Suponemos que el gas está en equilibrio, por lo que la función de distribución en  $\Sigma_0$  se puede escribir como

$$f(x, p) = \frac{\phi(p)}{V} \theta(x), \quad (3.37)$$

con  $V$  el volumen del recipiente en  $\Sigma_0$  y  $\theta(x)$  es una función que es 1 si  $x$  está dentro del recipiente y 0 en caso contrario. En este caso (3.33) implica la ley de transformación para sistemas confinados espacialmente homogéneos

$$\frac{\phi(p)}{V} = \frac{\phi'(p')}{V'}, \quad (3.38)$$

donde  $\phi'$  es la distribución de momentos en un marco en movimiento  $\Sigma'$  y  $V' = V/\gamma(w)$  es el volumen contraído en  $\Sigma'$ . De aquí podemos notar que la presencia del recipiente altera las propiedades de transformación de la distribución de momentos. Esto es porque las observaciones entre  $O$  y  $O'$  no se pueden sincronizar y en el intervalo de tiempo entre sus observaciones algunas partículas colisionan con las paredes del recipiente.

Definimos la distribución de velocidades de una partícula  $\psi$  a partir de la distribución de momentos  $\phi$ , en cualquier marco de referencia  $\Sigma$ , con un cambio de variable, puesto que

$$d^d p \phi(t, p) = d^d v \psi(t, v). \quad (3.39)$$

Dado que  $d^d p = m^d \gamma(v)^{d+2} d^d v$ , obtenemos

$$\psi(v) = m^d \gamma(v)^{d+2} \phi(t, v). \quad (3.40)$$



## Capítulo 4

# El movimiento browniano relativista

En los últimos años se ha visto un creciente interés en el movimiento browniano relativista dado que ha mostrado tener aplicaciones potenciales en varios campos. Sin embargo, aún no se ha establecido una teoría que sea totalmente aceptada debido a que los trabajos existentes, o bien no son manifiestamente covariantes o contienen algunos inconvenientes que están ocultos en sus bases. Por ejemplo, cuando se están estudiando procesos estocásticos relativistas en el espacio fase covariante  $\mu$ , no está del todo claro si los procesos  $[X^\mu(\tau), P^\mu(\tau)]$  siguen siendo procesos markovianos.

En esta sección presentaremos algunas aproximaciones al modelo del movimiento browniano relativista que se han hecho recientemente. Podemos distinguir principalmente dos maneras de abordar al movimiento browniano. La primera es considerar un proceso estocástico y llevarlo al contexto de la relatividad [84, 85]. La otra manera es tratar el problema desde un punto de vista más físico, considerando a una partícula pesada inmersa en un baño térmico, el cual está compuesto por partículas ligeras. Esta es la forma en la que se abordará al movimiento browniano en la sección 4.1 y 4.2. En la sección 4.5 se tratarán otras aproximaciones, las cuales presentan dificultades al darle una interpretación física.

### 4.1 El movimiento browniano relativista

Una manera de tratar la generalización relativista del movimiento browniano es a través de la ecuación de Langevin. Al igual que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista (ROUP), revisado en la sección 4.2, la teoría del movimiento browniano relativista (MBR) desarrollada por Dunkel y Hänggi [93, 94] también está basada en la ecuación de Langevin, la cual describe a una partícula browniana inmersa en un baño térmico (o dicho de otra manera, un ruido blanco gaussiano). Ellos construyen una versión relativista de la ecuación de Langevin que se re-

duce al caso límite newtoniano como también se logra en el ROUP. La principal diferencia con respecto a éste, es que la teoría de Dunkel y Hänggi considera un ruido blanco gaussiano en el marco de la partícula browniana, mientras que el ROUP trata con un ruido en el marco del fluido donde la partícula se difunde. Como en el caso clásico, a partir de la ecuación de Langevin relativista se puede obtener la ecuación de Fokker-Planck correspondiente, sin embargo, se encuentra que en este caso relativista no existe una relación única con la ecuación de Langevin, puesto que ésta cuenta con un término de ruido multiplicativo que debe ser tratado de acuerdo con la teoría de integración estocástica.

#### 4.1.1 Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck relativistas

Los principales resultados de la teoría propuesta por Dunkel y Hänggi [93, 94] son ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck relativistas. En la sección 4.3 se muestra que esta aproximación por medio de una dinámica de Langevin no es más que un caso particular de una clase de procesos estocásticos [75], de los cuales también el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista (ROUP por sus siglas en inglés) forma parte.

Existen dos sistemas de referencia inerciales que son de interés en el análisis del movimiento browniano relativista. El sistema de referencia inercial en reposo  $\Sigma$  del baño térmico y el sistema de referencia inercial  $\Sigma_*$  que es comóvil con la partícula browniana en un instante de tiempo dado. Primero se abordará el caso para un sistema  $\Sigma_*$ , después las ecuaciones de Langevin relativistas serán formuladas en el sistema de laboratorio  $\Sigma$ . Consideremos entonces procesos estocásticos  $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)\}$  con respecto al sistema  $\Sigma$ , donde las coordenadas de la posición  $\mathbf{x} = (x^i)$  y las coordenadas del momento  $\mathbf{p} = (p^i)$  están relacionadas por medio de

$$dx^i(t) = v^i dt = (p^i/p^0)dt, \quad i = 1, \dots, d, \quad (4.1)$$

donde  $p^0(t) = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$  es la energía relativista. En el sistema  $\Sigma_*$ , comóvil con la partícula al tiempo de laboratorio  $t$  la ecuación de Langevin tiene que ser

$$dp_*(t) = -\nu[p_*(t) - mV_*]dt_* + dW_*(t), \quad (4.2)$$

donde  $V_*$  es la velocidad promedio del baño térmico con respecto al sistema  $\Sigma_*$ , el momento es  $p_* = mv_*$  y  $dW_*(t)$  son los incrementos del momento que representa un proceso de Wiener con parámetro  $\mathcal{D}$ . Introducimos el vector de momento  $(p_*^\alpha)$  y definimos el *tensor de fricción*

$$\nu_\beta^\alpha = \nu \left( \eta_\beta^\alpha + \frac{u^\alpha u_\beta}{c^2} \right), \quad (4.3)$$

con  $\nu$  el coeficiente de fricción viscosa escalar medido en el marco de reposo de la partícula. Sea  $(u_*^\alpha)$  y  $(U_*^\alpha)$  las componentes de la velocidad de la partícula browniana y el baño térmico respectivamente, la ecuación (4.2) queda entonces como

$$\frac{dp_*^\alpha}{d\tau} = -m\nu_*^\alpha (u_*^\beta - U_*^\beta) + dW_*^\alpha(\tau), \quad (4.4)$$

con  $\tau$  el tiempo propio dado por

$$d\tau \equiv dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.5)$$

Podemos ahora omitir el símbolo  $*$  que caracteriza al sistema comóvil dado que la forma diagonal del tensor de fricción está asociada al sistema en reposo  $\Sigma_*$  de la partícula browniana, es decir, en cada marco de referencia en reposo instantáneo  $\Sigma_*$  de la partícula donde se cumple que  $(u_*^\alpha) = (c, 0)$ , el tensor de fricción se reduce a la forma diagonal

$$(\nu_{*\beta}^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

En sistemas inerciales arbitrarios definimos los incrementos estocásticos  $dW^\alpha(\tau)$ , que representan un proceso de Wiener con parámetro de amplitud de ruido escalar  $\mathcal{D}$  (medido en el sistema en reposo de la partícula), como

$$\langle dW^\alpha \rangle = 0, \quad \langle dW^\alpha(\tau) dW^\beta(\tau') \rangle = \begin{cases} 0, & \tau \neq \tau'; \\ \mathcal{D}^{\alpha\beta}, & \tau = \tau'; \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $\mathcal{D}^{\alpha\beta}$  es el *tensor de correlación* definido como

$$\mathcal{D}_\beta^\alpha = 2\mathcal{D}d\tau \left( \eta_\beta^\alpha + \frac{u^\alpha u_\beta}{c^2} \right). \quad (4.8)$$

Para una partícula browniana con masa en reposo  $m$ , tiempo propio  $\tau$  y 4-velocidad  $u^\beta(\tau)$ , que está inmersa en un baño térmico homogéneo e isotrópico con 4-velocidad constante  $U^\beta$  y adicionalmente sujeto a una 4-fuerza externa  $K^\alpha(x^\nu, p^\mu)$ , las ecuaciones de Langevin relativistas covariantes para sistemas inerciales arbitrarios son [93]

$$dx^\alpha(\tau) = \frac{p^\alpha}{m} d\tau, \quad (4.9)$$

$$dp^\alpha(\tau) = \{K^\alpha - \nu_\beta^\alpha [p^\beta - mU^\beta]\} d\tau + dW^\alpha(\tau). \quad (4.10)$$

La distribución de los incrementos  $dW^\alpha(\tau)$  en un marco de Lorentz arbitrario está dada por

$$\mathcal{P}[dW^\alpha(\tau)] = \frac{c}{(4\pi\mathcal{D}d\tau)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{dW_\alpha(\tau) dW^\alpha(\tau)}{4\mathcal{D}d\tau} \right] \delta(u_\alpha dW^\alpha(\tau)). \quad (4.11)$$

Ahora, para el sistema de laboratorio  $\Sigma$ , el sistema inercial donde el baño térmico está en reposo, las ecuaciones de Langevin covariantes son, utilizando (4.9) y (4.10)

$$dx^i(t) = v^i dt, \quad (4.12)$$

$$dp^i = (\gamma^{-1}K^i - \nu p^i)dt + dW^i \quad (4.13)$$

$$dE = (\gamma^{-1}K^i - \nu p^i)v_i dt + cdW^0 = v_i dp^i, \quad (4.14)$$

donde  $E = cp^0$ ,  $p^i = \gamma m v^i$ ,  $v^i$  y  $\gamma$  dados por

$$v^i = \frac{cp^i}{\sqrt{m^2 c^2 + p_i p^i}}, \quad (4.15)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_i v^i}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{1/2}. \quad (4.16)$$

La densidad de probabilidad para  $dW^\alpha$  en el sistema de laboratorio  $\Sigma$  es

$$\mathcal{P}[dW^\alpha] = c \left(\frac{\gamma}{4\pi \mathcal{D}dt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{dW_i dW^i - (dW^0)^2}{4\mathcal{D}dt/\gamma}\right] \delta(c\gamma dW^0 - \gamma v_i dW^i). \quad (4.17)$$

La distribución marginal de los incrementos de momento espacial

$$\mathcal{P}^3[d\mathbf{W}] = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{4\pi \mathcal{D}dt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\gamma}{4\mathcal{D}dt} \left(\delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{c^2}\right) dW^i dW^j\right], \quad (4.18)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, se reduce a una distribución gaussiana en el caso límite  $\mathbf{v}^2 \ll c^2$ .

A partir de las ecuaciones de Langevin relativistas (4.13) y (4.18) podemos formular ecuaciones de Fokker-Planck para la densidad del momento  $f(\mathbf{p}, t)$  en el marco de laboratorio  $\Sigma$ . Para el caso de sólo una dimensión espacial, sin fuerzas externas, obtenemos de (4.13) y (4.18)

$$dp = -\nu p dt + dW(t), \quad (4.19)$$

$$\mathcal{P}^1[dW(t)] = \left(\frac{1}{4\pi \mathcal{D}\gamma dt}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{dW(t)^2}{4\mathcal{D}\gamma dt}\right], \quad (4.20)$$

con

$$\gamma = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2} = \left[1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}\right]^{1/2}. \quad (4.21)$$

Dado que los incrementos  $dW(t)$  dependen implícitamente de  $p$ , es conveniente utilizar un proceso que sea independiente del momento  $p$ . Para esto hacemos que  $dW(t) = \sqrt{\gamma} dy(t)$ . Ahora la ecuación (4.19) se transforma en

$$dp = -\nu p dt + \sqrt{\gamma} dy(t), \quad (4.22)$$

con  $dy(t)$  distribuida de acuerdo a la densidad independiente del momento

$$\mathcal{P}^1[dy(t)] = \left(\frac{1}{4\pi \mathcal{D}dt}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{dy(t)^2}{4\mathcal{D}dt}\right]. \quad (4.23)$$

Debido al término  $\sqrt{\gamma}$  en la ecuación (4.22), el proceso estocástico  $dy(t)$  es ahora considerado un ruido multiplicativo y por tanto se tiene que especificar el

esquema de integración o la regla de multiplicación con el ruido blanco gaussiano. Consideraremos sólo tres esquemas de integración: el esquema de Itô [20], el de Stratonovich [21, 22] y el esquema de Hänggi-Klimontovich. Para cada esquema obtendremos una ecuación de Fokker-Planck diferente.

De igual manera, para las ecuaciones 1+3 dimensionales (4.13) y (4.18) vamos a establecer las ecuaciones de Langevin de tal forma que se exhiba el mismo comportamiento multiplicativo. Si no consideramos fuerzas externas, la ecuación (4.13) se reduce a

$$dp^i = -\nu p^i dt + dW^i. \quad (4.24)$$

Introduciendo una matriz simétrica  $\mathbf{A}(p) = (A_j^i)$  dada por

$$A_j^i = \left( \delta_j^i - \frac{v^i v_j}{c^2} \right) \gamma = \left( \delta_j^i - \frac{p^i p_j}{\gamma^2 m^2 c^2} \right) \gamma, \quad (4.25)$$

escribimos los incrementos (4.18) en la forma

$$\mathcal{P}^3[dW] = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{4\pi \mathcal{D} dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{dW_i A_j^i dW^j}{4\mathcal{D} dt} \right]. \quad (4.26)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  tiene determinante y valores propios dados por  $\det(\mathbf{A}) = \gamma$ , y  $\text{spect}(\mathbf{A}) = \{\gamma, \gamma, \gamma^{-1}\}$ , por lo tanto es una matriz definida positiva para velocidades  $v^2 < c^2$ . Entonces, por sus propiedades,  $\mathbf{A}$  tiene una única descomposición de Choleski,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L} \begin{pmatrix} L^1_1 & 0 & 0 \\ L^2_1 & L^2_2 & 0 \\ L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^1_1 & L^2_1 & L^3_1 \\ 0 & L^2_2 & L^3_2 \\ 0 & 0 & L^3_3 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

donde la matriz  $\mathbf{L}(\mathbf{p})$  es no singular y sus elementos están dados por:  $L^1_1 = \sqrt{A^1_1}$ ,  $L^2_1 = A^2_1/L^1_1$ ,  $L^2_2 = \sqrt{A^2_2 - (L^2_1)^2}$ ,  $L^3_1 = A^3_1/L^1_1$ ,  $L^3_2 = (A^3_2 - L^3_1 L^2_1)/L^2_2$ ,  $L^3_3 = \sqrt{A^3_3 - (L^3_1)^2 - (L^3_2)^2}$ . La matriz inversa  $\mathbf{L}(\mathbf{p})^{-1}$  es

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{L})} \begin{pmatrix} L^2_2 L^3_3 & -L^2_1 L^3_3 & L^2_1 L^3_2 - L^3_1 L^2_2 \\ 0 & L^3_3 L^1_1 & -L^3_2 L^1_1 \\ 0 & 0 & L^1_1 L^2_2 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

con el determinante dado por  $\det(\mathbf{L}) = L^1_1 L^2_2 L^3_3$ . Al igual que en el caso 1+1 dimensional, definimos una variable vector estocástico  $d\mathbf{y}(t) = dy^i(t)$

$$dy^i \equiv L^i_j dW^j, \quad (4.29)$$

por lo tanto podemos escribir la ecuación (4.24) como

$$d\mathbf{p} = -\nu \mathbf{p} dt + \mathbf{L}(\mathbf{p})^{-1} d\mathbf{y}, \quad (4.30)$$

donde, análogamente a (4.18) la densidad de probabilidad gaussiana independiente del momento por medio de la cual está distribuida  $d\mathbf{y}(t)$  es

$$\mathcal{P}^3[d\mathbf{y}] = \left( \frac{1}{4\pi \mathcal{D} dt} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{dy_i dy^j}{4\mathcal{D} dt} \right]. \quad (4.31)$$

El proceso  $d\mathbf{y}(t)$  es entonces un ruido blanco gaussiano multiplicativo puesto que la matriz  $\mathbf{L}(\mathbf{p})^{-1}$  depende del momento  $\mathbf{p}$ . Las ecuaciones de Fokker-Planck resultantes de los distintos esquemas de integración se pueden escribir como una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial j_{I,S,HK}^i(\mathbf{p}, t)}{\partial p^i} \quad (4.32)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $p^i$  es el momento relativista,  $j^i(\mathbf{p}, t)$  son las corrientes de probabilidad y los índices son las abreviaciones de Itô, Stratonovich y Hänggi-Klimontovich respectivamente. Estas corrientes están dadas, para el caso unidimensional por

$$j_I = - \left[ \nu p f(p, t) + \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial p} (\gamma(p) f(p, t)) \right], \quad (4.33)$$

con el coeficiente  $\gamma$  evaluado en  $\gamma(p(t))$  en el caso de Itô,

$$j_S = - \left[ \nu p f(p, t) + \mathcal{D} \sqrt{\gamma(p)} \frac{\partial}{\partial p} \left( \sqrt{\gamma(p)} f(p, t) \right) \right], \quad (4.34)$$

con  $\gamma = \gamma \left( \frac{p(t) + p(t+dt)}{2} \right)$  para el esquema de Stratonovich y

$$j_{HK} = - \left[ \nu p f(p, t) + \mathcal{D} \gamma(p) \frac{\partial}{\partial p} (f(p, t)) \right], \quad (4.35)$$

con  $\gamma = \gamma(p(t + dt))$  en el esquema de Hänggi-Klimontovich, y el coeficiente  $\gamma(p) = (1 + p^2/(mc)^2)^{1/2}$ . Para el caso tridimensional las corrientes de probabilidad están dadas por

$$j_I^i = - \left[ \nu p^i f(p, t) + D \frac{\partial}{\partial p_j} \left( (A^{-1})^i_j f(p, t) \right) \right], \quad (4.36)$$

en el caso de Itô, donde la matriz coeficiente es evaluada en el límite inferior del intervalo  $[t, t + dt]$ ,  $\mathbf{L}(\mathbf{p})^{-1} = \mathbf{L}(\mathbf{p}(t))^{-1}$ ,

$$j_S^i = - \left[ \nu p^i f(p, t) + D (L^{-1})^i_k \frac{\partial}{\partial p_j} \left( [(L^{-1})^k_j] f(p, t) \right) \right] \quad (4.37)$$

para el caso de Stratonovich, donde se evalúa a la matriz en el punto medio,  $\mathbf{L}(\mathbf{p})^{-1} = \mathbf{L} \left( \frac{\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t+dt)}{2} \right)^{-1}$ , y

$$j_{HK}^i = - \left[ \nu p^i f(p, t) + D (A^{-1})^i_j \frac{\partial}{\partial p_j} f(p, t) \right] \quad (4.38)$$

con  $\mathbf{L}(\mathbf{p})^{-1} = \mathbf{L}(\mathbf{p}(t + dt))^{-1}$  en el esquema de Hänggi-Klimontovich.

### 4.1.2 Solución estacionaria de las ecuaciones de Fokker-Planck relativistas

Las soluciones estacionarias de la ecuación (4.32) se obtienen haciendo  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  y  $j^i = 0$ . Esto es equivalente a

$$\nu p f_{\text{I}}(p) + \mathcal{D} \frac{d}{dp} \gamma(p) f_{\text{I}}(p) = 0,$$

o bien

$$\frac{d}{dp} \gamma(p) f_{\text{I}}(p) = -\frac{\nu p}{\mathcal{D} \gamma(p)} \gamma(p) f_{\text{I}}(p),$$

hacemos  $g(p) = \gamma(p) f_{\text{I}}(p)$ ,  $h(p) = -\frac{\nu p}{\mathcal{D} \gamma(p)}$ , obtenemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dg}{dp} = h(p)g(p)$$

cuya solución formal es  $g = e^{\int h(p) dp}$ , es decir

$$f_{\text{I}}(p) = \frac{C_{\text{I}_1} \exp \left[ -\frac{\nu}{\mathcal{D}} \int \frac{p}{\gamma(p)} dp \right]}{\gamma(p)}.$$

Considerando que la integral de la ecuación anterior es

$$\int \frac{p}{\gamma(p)} dp = c^2 m^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2 m^2}},$$

donde hemos usado  $\beta = \frac{\nu m^2 c^2}{\mathcal{D}}$ , la solución para el caso unidimensional en el esquema de Itô es

$$f_{\text{I}}(p) = \frac{C_{\text{I}_1} \exp \left( -\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right)}{\left( 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2}} \quad (4.39)$$

con  $\beta = mc^2/(k_B T)$  y  $C_{\text{I}_1}$  la constante de normalización la cual está dada por [99].

$$C_{\text{I}_1} = \frac{1}{2mcK_0(\beta)}, \quad (4.40)$$

donde  $K_\nu(z)$  denota la función de Hankel modificada.

En el caso tridimensional la solución es

$$f_{\text{I}}(\mathbf{p}) = \frac{C_{\text{I}_3} \exp \left( -\beta \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}} \right)}{\left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2} \right)^{3/2}}. \quad (4.41)$$

La constante de normalización  $C_{I_3}$  puede ser obtenida analíticamente [99] y está dada por

$$C_{I_3}^{-1} = 2\pi(mc)^3 \left\{ \beta\pi - 2 {}_2F_3 \left[ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{\beta^2}{4} \right] + \ln \left( \frac{4}{\beta^2} \right) {}_1F_2 \left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 1; \frac{\beta^2}{4} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{1-2n} \beta^{2n} \Psi(1+n)}{(-1+2n)(\Gamma[1+n])^2} \right\} \quad (4.42)$$

donde  ${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z]$  es la función hipergeométrica generalizada,  $\Gamma[z]$  es la función gamma y  $\Psi(z)$  es la función digamma<sup>1</sup>.

En el esquema de Stratonovich-Fisk se tiene

$$f_S(p) = \frac{C_{S_1} \exp \left( -\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right)}{\left( 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{1/4}}, \quad (4.43)$$

donde

$$C_{S_1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2mc\sqrt{\beta} K_{\frac{3}{4}} \left( \frac{\beta}{2} \right) K_{\frac{1}{4}} \left( \frac{\beta}{2} \right)} \quad (4.44)$$

es la constante de normalización y para el caso tridimensional

$$f_S(\mathbf{p}) = \frac{C_{S_3} \exp \left( -\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right)}{\left( 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} \right)^{3/4}}, \quad (4.45)$$

con una constante de normalización

$$C_{S_3}^{-1} = (mc)^3 \sqrt{2\pi\beta} \left[ K_{\frac{5}{4}} \left( \frac{\beta}{2} \right) K_{\frac{3}{4}} \left( \frac{\beta}{2} \right) - K_{\frac{1}{4}} \left( \frac{\beta}{2} \right) K_{-\frac{1}{4}} \left( \frac{\beta}{2} \right) \right] \quad (4.46)$$

y en el esquema de Hänggi-Klimontovich

$$f_{HK}(p) = C_{HK_1} \exp \left( -\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right), \quad (4.47)$$

<sup>1</sup>La función gamma está definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}_>$$

donde  $\mathbb{C}_> = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$

La derivada logarítmica de la función gamma es frecuentemente llamada función Psi o función digamma, se denota por  $\Psi(z)$  y está dada por

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad z \in \mathbb{U}$$

con  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, -1, -2, \dots\}$

donde

$$C_{\text{HK}_1} = \frac{1}{2mcK_1(\beta)} \quad (4.48)$$

es la constante de normalización y para el caso tridimensional se tiene

$$f_{\text{HK}}(\mathbf{p}) = C_{\text{HK}_3} \exp\left(-\beta\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}\right), \quad (4.49)$$

con una constante de normalización dada por

$$C_{\text{HK}_3}^{-1} = \frac{4\pi(mc)^3 K_2(\beta)}{\beta}. \quad (4.50)$$

### 4.1.3 Momentos de orden superior

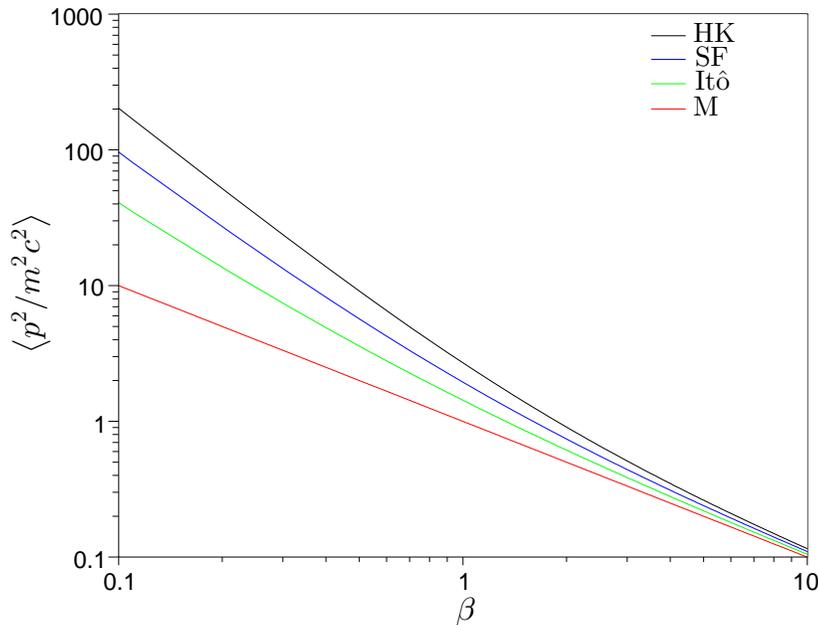


Figura 4.1: Segundos momentos en función de  $\beta$

Obtener las soluciones estacionarias debidamente normalizadas permite analizar el comportamiento de los segundos momentos en términos de la temperatura [99]. Para el caso unidimensional se tiene, en el esquema de Itô:

$$\left\langle \frac{p^2}{m^2 c^2} \right\rangle_{\text{I}} = \frac{K_1(\beta)}{\beta K_0(\beta)}, \quad (4.51)$$

en el esquema de Stratonovich

$$\left\langle \frac{p^2}{m^2 c^2} \right\rangle_S = \frac{1}{2\sqrt{\beta} K_{\frac{3}{4}}(\frac{\beta}{2}) K_{\frac{1}{4}}(\frac{\beta}{2})} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \sqrt{\beta} \left[ K_{\frac{5}{4}}(\frac{\beta}{2}) K_{\frac{3}{4}}(\frac{\beta}{2}) - K_{\frac{1}{4}}(\frac{\beta}{2}) K_{-\frac{1}{4}}(\frac{\beta}{2}) \right] \right\} \quad (4.52)$$

y en el esquema de Hänggi-Klimontovich

$$\left\langle \frac{p^2}{m^2 c^2} \right\rangle_{HK} = \frac{K_2(\beta)}{\beta K_1(\beta)}. \quad (4.53)$$

Los momentos se muestran en la figura 4.1 para el caso unidimensional [99]. A valores de  $\beta$  grandes, los segundos momentos en los tres esquemas analizados tienden al segundo momento clásico de acuerdo con la distribución de Maxwell.

## 4.2 Proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista

El proceso desarrollado por F. Debbasch, K. Mallick and J.P. Rivet, conocido como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista (ROUP) [76] pertenece a una pequeña familia de procesos estocásticos relativistas, los cuales son revisados en [80]. En la sección siguiente se dan las principales características de este proceso y es comparado con otros procesos relativistas.

Al considerar el proceso de Ornstein-Uhlenbeck clásico, se tiene la posibilidad de una versión relativista del movimiento browniano. En un enfoque de Langevin, se necesita una expresión para la fuerza determinista la cual describe el forzamiento de la partícula con el baño térmico. Sea  $u$  y  $U$  las 4-velocidades de la partícula browniana y del baño térmico respectivamente. Como en la sección anterior, definimos un tensor  $\lambda_\nu^\mu$  para el baño térmico en reposo como

$$\lambda_\nu^\mu = \chi U^\mu U_\nu + \alpha (\delta_\nu^\mu - U^\mu U_\nu), \quad (4.54)$$

donde  $\chi$  y  $\alpha$  son escalares.  $\lambda$  es análogo al tensor de fricción  $\nu_\beta^\alpha$  presentado en la sección anterior en el modelo de Dunkel y Hänggi. Entonces, el marco en reposo del fluido donde  $U = (1, 0)$  se tiene

$$\lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

análogamente a (4.6). En este nivel de análisis, el término  $\chi$  ciertamente no tiene ninguna contribución, sin embargo un estudio más detallado puede revelar su influencia en la difusión relativista.

El 4-vector de fuerza  $f^\mu$  está definido por

$$f^\mu = -m \lambda_\nu^\mu (u^\nu - U^\nu) + m \lambda_\beta^\alpha u_\alpha (u^\beta - U^\beta) u^\mu, \quad (4.56)$$

donde el segundo término del lado derecho asegura que  $f$  es ortogonal a  $u$ . Dado que  $f$  es el forzamiento sufrido por la partícula, se supone que la energía y la

velocidad de la partícula tienden a decrecer en el tiempo a la energía de la masa en reposo y a una velocidad cero para el sistema de referencia en reposo del baño térmico. De aquí que se tiene que  $\alpha$  sea estrictamente positiva. Introduciendo el otro término importante en la descripción de Langevin, la fuerza estocástica  $F = (F_0, \gamma \mathbf{F}/c^2)$  y sumándolo a la fuerza de fricción  $f$  se tienen las siguientes ecuaciones estocásticas

$$\frac{d}{d\tau} x^\mu = u^\mu \quad (4.57)$$

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = -m\lambda_\nu^\mu(u^\nu - U^\nu) + m\lambda_\beta^\alpha u_\alpha(u^\beta - U^\beta)u^\mu + F^\mu, \quad (4.58)$$

con  $\tau$  el tiempo propio. Como antes, la fuerza estocástica  $F$ , que se requiere que sea un ruido blanco gaussiano, está determinada por las condiciones

$$\langle \mathbf{F}(t) \rangle = 0, \quad (4.59)$$

$$\langle F^i(t_1)F_j(t_2) \rangle = -2D\delta(t_2 - t_1)\delta_j^i, \quad D > 0. \quad (4.60)$$

Las ecuaciones (4.57) y (4.58) nos dan las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

$$d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})}dt \quad (4.61)$$

$$d\mathbf{p} = -\alpha\gamma(\mathbf{p})\mathbf{p}dt + \sqrt{2D}dW, \quad (4.62)$$

donde  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  son la posición y el momento de una partícula bajo difusión,  $\alpha$  es una constante positiva que determina la fuerza de fricción experimentada por la partícula,  $D$  es una constante que fija la amplitud del término de ruido,  $\gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/m^2c^2}$  es el factor de Lorentz y  $W$  es el movimiento browniano usual. Este proceso describe la difusión relativista de una partícula puntual de masa  $m$  en un fluido caracterizado por un campo de 4-velocidad  $U$ . El marco de referencia seleccionado es el marco en reposo global  $R$  del fluido en el cual las partículas se difunden.

La ecuación de Fokker-Planck para la densidad del espacio fase dependiente del tiempo  $\Pi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  de la difusión de partículas asociada a las ecuaciones (4.61) y (4.62) es

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \Pi \right) + \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (-\alpha\gamma\mathbf{p}\Pi) = D\Delta_{\mathbf{p}}\Pi, \quad (4.63)$$

Integrando (4.63) obtenemos una ecuación para la distribución marginal  $\tilde{\Pi}(t, \mathbf{p})$  de  $\Pi$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (-\alpha\gamma\mathbf{p}\tilde{\Pi}) = D\Delta_{\mathbf{p}}\tilde{\Pi}. \quad (4.64)$$

Buscamos una solución isotrópica, espacialmente uniforme y estacionaria  $\Pi_{eq}$  de la ecuación (4.63), por lo que se obtiene para un campo  $A(\mathbf{p})$ ,

$$\nabla_{\mathbf{p}} \times A = -\alpha\gamma\mathbf{p}\Pi_{eq} - D\nabla_{\mathbf{p}}\Pi_0.$$

Suponiendo que  $A$  no depende del tiempo entonces tenemos la siguiente ecuación

$$D\nabla_{\mathbf{p}}\Pi_{eq} = -\alpha\gamma\mathbf{p}\Pi_{eq} \quad (4.65)$$

Si resolvemos esta ecuación para  $\alpha = \alpha_0$ , una constante, entonces la solución es

$$\Pi_{eq}(\mathbf{p}) = \Pi_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0 m^2 c^2}{3D} \gamma^3\right), \quad (4.66)$$

con  $\Pi_0$  determinada por la condición de normalización

$$\int_{\mathcal{R}^3} \Pi_{eq}(\mathbf{p}) d^3p = 1 \quad (4.67)$$

y si resolvemos (4.65) requiriendo que tenga como solución de equilibrio a la función de distribución de Jüttner, se obtiene

$$\alpha = \frac{D}{mk_B T} \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\alpha_1}{\gamma^2}, \quad (4.68)$$

que es el equivalente relativista del teorema de fluctuación-disipación.

### 4.2.1 Límite hidrodinámico

Para investigar el límite hidrodinámico de este proceso, recordemos que por definición el límite hidrodinámico de un fenómeno de transporte arbitrario corresponde a situaciones donde todas las cantidades caracterizando al sistema varían sobre una escala grande solamente, tanto en tiempo como en el espacio. Situaciones en las cuales las escalas de variación del tiempo y el espacio de la función de distribución  $f$  en  $R$  son mucho más grandes que el tiempo característico  $\tau = 1/\alpha$  y la trayectoria libre media  $\lambda = \tau\sqrt{k_B T/m}$  se encuentran cuando se aplica el límite hidrodinámico al proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista. Para estudiar el límite hidrodinámico es necesario realizar una expansión de Chapman-Enskog alrededor de la distribución de equilibrio local

$$f_0 = (mc^2/4\pi k_B T K_2(mc^2/k_B T)) \times n(t, \mathbf{r}) \exp(-mc^2\gamma(\mathbf{p})/k_B T),$$

donde  $n(t, \mathbf{r})$  es la densidad espacial de la partícula difundiendo en  $R$ . Realizando una expansión de Chapman-Enskog sobre el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista se llega en todos los órdenes a

$$\partial_t n = \frac{\lambda^2}{\tau} \Delta n = \xi \Delta n, \quad (4.69)$$

la cual es una ecuación de difusión. Esta ecuación de difusión describe correctamente la evolución en el tiempo de la densidad  $n$  asociada con el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista sólo en puntos del espacio-tiempo donde esto no contradice la causalidad de Einstein.

### 4.3 Relación entre el MBR y el ROUP

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista así como el movimiento browniano relativista de Dunkel y Hänggi son casos especiales de una gran familia de procesos estocásticos relativistas. Estos procesos están gobernados por las ecuaciones de Langevin relativistas

$$dX^i(t) = V^i dt = (P^i/P^0)dt, \quad i = 1, \dots, d, \quad (4.70)$$

$$dP(t) = -\alpha_{\otimes}(P)Pdt + [2\mathcal{D}(P)]^{1/2} \otimes dW(t), \quad (4.71)$$

en donde ahora  $dW$  es un proceso de Wiener estándar,  $\alpha$  es el coeficiente de fricción,  $\mathcal{D}$  la amplitud del ruido y el símbolo  $\otimes$  denota los distintos esquemas de integración; sólo consideraremos como antes, los tres esquemas más comunes: el esquema de Itô (\*), el de Stratonovich (o) y el de Hänggi-Klimontovich (•). Los coeficientes de fricción en los distintos esquemas de integración están relacionados por

$$\alpha_*(p)p = \alpha_{\bullet}(p)p - \mathcal{D}'(p), \quad (4.72)$$

$$\alpha_o(p)p = \alpha_{\bullet}(p)p - \mathcal{D}'(p)/2, \quad (4.73)$$

donde  $\mathcal{D}'(p) = d\mathcal{D}(p)/dp$ .

En el esquema de Hänggi-Klimontovich, la ecuación de Fokker-Planck para la función de densidad del espacio fase  $f(t, x, p)$  de una partícula browniana relativista cuya dinámica está dada por las ecuaciones (4.70) y (4.71) es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \alpha_{\bullet}(p)p f + \mathcal{D}(p) \frac{\partial f}{\partial p} \right], \quad (4.74)$$

con una distribución estacionaria dada por

$$f_0(x, p) = \mathcal{N} \exp \left[ - \int_{p_*}^p dp' \frac{\alpha_{\bullet}(p')}{\mathcal{D}(p')} p' \right]. \quad (4.75)$$

Si se impone la condición de que la distribución de momento marginal sea la distribución de Maxwell-Jüttner, se obtiene que la versión relativista de la relación de fluctuación-disipación es

$$\alpha_{\bullet}(p) \equiv \frac{\mathcal{D}(p)}{E(p)k_B T} \quad (4.76)$$

o bien, en el esquema de Stratonovich, (4.76) toma la forma

$$\alpha_o(p) \equiv \frac{\mathcal{D}(p)}{E(p)k_B T} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}'(p)}{p}. \quad (4.77)$$

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista corresponde al caso de amplitud de ruido constante, es decir, se tiene que el coeficiente de fricción está definido por

$$\alpha_{\bullet}(p) = \alpha_c m / E(p); \quad (4.78)$$

aquí,  $\alpha_c$  es un parámetro de fricción constante positivo. Sustituyendo esta expresión en (4.76) se obtiene

$$\mathcal{D}(p) = \alpha_c m k_B T = \mathcal{D}_c, \quad (4.79)$$

que no es más que (4.68), es decir, la amplitud del ruido es constante. Para este caso, la ecuación de Langevin es

$$dP(t) = -\alpha_c \frac{m}{P^0} P dt + (2\alpha_c m k_B T)^{1/2} dW(t). \quad (4.80)$$

Dado que la amplitud del ruido no depende del momento, no es necesario especificar una regla de multiplicación para el término estocástico.

El movimiento browniano relativista, MBR, corresponde al caso en el que se tiene un coeficiente de fricción constante en el esquema de Hänggi-Klimontovich. La relación de fluctuación-disipación relativista (4.76) queda como

$$\mathcal{D}(p) = \alpha_{\dagger} E(p) k_B T, \quad (4.81)$$

con  $\alpha_{\dagger}$  una constante. La ecuación de Langevin para este caso es

$$dP(t) = -\alpha_{\dagger} P dt + (2\alpha_{\dagger} P^0 k_B T)^{1/2} \bullet dW(t). \quad (4.82)$$

Otro modelo surge cuando se considera un coeficiente de fricción constante ahora en el esquema de Itô. A este modelo se le conoce como MBR(1). La ecuación de Langevin es

$$dP(t) = -\alpha_* P dt + \left[ 2\alpha_* (k_B T)^2 \left( 1 + \frac{P^0}{k_B T} \right) \right]^{1/2} * dW(t). \quad (4.83)$$

La función de distribución de probabilidad es la misma para los tres procesos anteriores, ROUP, MBR y MBR(1), sin embargo presentan un comportamiento de relajación diferente. Esto se muestra en la figura 4.1, la cual presenta la evolución temporal del desplazamiento cuadrático medio dividido por el tiempo para los tres procesos

$$D_t = \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle / (2t). \quad (4.84)$$

Se muestran los resultados correspondientes a las ecuaciones (4.80), (4.82) y (4.83).

## 4.4 Sistema inercial en movimiento

Para obtener las ecuaciones de Fokker-Planck y de Langevin para un observador en movimiento recordemos que la función de densidad de probabilidad se transforma como un escalar de Lorentz,

$$f'(t', x', p') = f(t(t', x'), x(t', x'), p(p')) \quad (4.85)$$

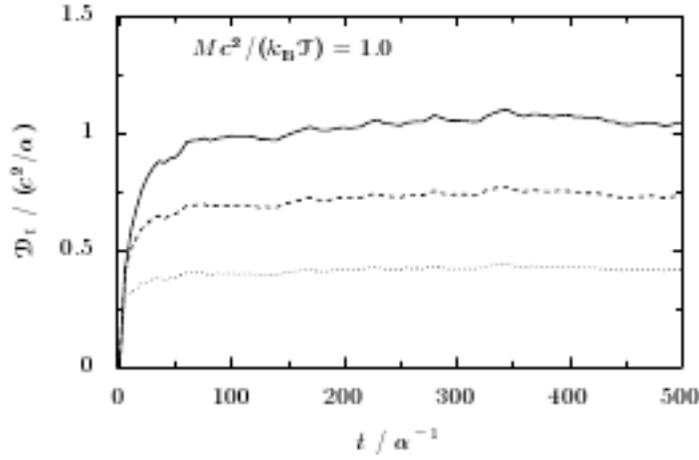


Figura 4.2: Evolución temporal del desplazamiento cuadrático medio para el proceso ROUP (línea continua), para el MBR (línea punteada) y para el proceso MBR(1) (línea discontinua). Tomado de [75]

para un sistema de referencia inercial en movimiento  $\Sigma'$ . Por lo tanto si se desea obtener  $f'$  sólo se tiene que resolver la ecuación de Fokker-Planck para  $f$ ,

$$\left( p^0 \frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} \right) f = p^0 \frac{\partial}{\partial p} \left[ \alpha(p) p f + D(p) \frac{\partial}{\partial p} f \right] \quad (4.86)$$

y sustituirse en (4.85). La correspondiente ecuación de Fokker-Planck para  $f'(t', x', p')$  para el observador en movimiento es

$$p'^{\beta} \partial'_{\beta} f' = p^0 \frac{\partial}{\partial p'} \left[ \alpha'(p') \gamma(w) (w p^0 + p') f' + \frac{D'(p') p^0}{\gamma(w) (p^0 + w p')} \frac{\partial}{\partial p'} f' \right], \quad (4.87)$$

la cual puede tomar la siguiente forma, después de dividir por  $p^0$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{p'}{p^0} \frac{\partial}{\partial x'} \right) f' = \frac{\partial}{\partial p'} \left[ \alpha'(p') \gamma(w) (w p^0 + p') f' + \frac{D'(p') p^0}{\gamma(w) (p^0 + w p')} \frac{\partial}{\partial p'} f' \right] \quad (4.88)$$

Las ecuaciones de Langevin asociadas a la ecuación anterior en el esquema discretización de Hänggi-Klimontovich son

$$dX'(t') = (P'/P^0) dt' \quad (4.89)$$

$$dP'(t') = A(P'; w) dt' + C(P'; w) \bullet dB'(t'), \quad (4.90)$$

con  $B'(t')$  un proceso de Wiener estándar con parámetro del tiempo  $t'$  y  $A(P'; w)$  y  $C(P'; w)$  definidos como

$$A(P'; w) \equiv -\alpha'(p') \gamma(w) (w p^0 + p'), \quad (4.91)$$

$$C(P'; w) \equiv \left[ 2 \frac{D'(p')p'^0}{\gamma(w)(p'^0 + wp')} \right]^{1/2}. \quad (4.92)$$

La ecuación (4.87) en una forma manifiestamente covariante se puede escribir como

$$p^\beta \partial_\beta f = \varepsilon^{\alpha\beta} p_\alpha \frac{\partial}{\partial p^\beta} \left[ \alpha(p^\nu; w) U^\eta p_\eta f + \frac{D(p^\mu; w)}{-U^\kappa p_\kappa} \varepsilon^{\gamma\delta} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p^\delta} f \right], \quad (4.93)$$

con  $U^\alpha = \gamma(w)(1, -w)$  el cuadrivector de velocidad del baño térmico y  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita.

## 4.5 Otros procesos relativistas

### 4.5.1 Movimiento browniano intrínseco

El término *intrínseco* fue puesto por Debbasch y Chavelier para caracterizar el modelo propuesto por J. Franchi y Y le Jan en el 2004. Su trabajo está basado en las ideas desarrolladas por R. M. Dudley en 1965. La definición de este proceso está dada por la siguiente ecuación

$$d\mathbf{p}_* = \sqrt{2D} d\mathbf{B}_s, \quad (4.94)$$

donde  $s$  es el sinónimo para el tiempo propio a lo largo de una curva tipo tiempo estocástica y  $d\mathbf{p}_*/ds$  es la aceleración propia a lo largo de la curva.

Este modelo no contiene ninguna información acerca del medio circundante de la partícula difusa. Es difícil entonces encontrar una interpretación física de este modelo.

### 4.5.2 La teoría de Oron y Horwitz

Por medio de una generalización de la ecuación de Smoluchowski, O. Oron y L. P. Horwitz describen la difusión de una masa puntual relativista bajo la acción de una fuerza externa  $\beta(x)$ . Tal ecuación tiene la siguiente forma

$$\partial_\tau \rho = -\partial_\mu (\beta^\mu \rho) + D \partial_\mu \partial^\mu \rho, \quad (4.95)$$

donde  $D$  es un coeficiente positivo y  $\rho$  es una función de  $x$  y de un tiempo universal  $\tau$ .

Uno de los problemas de la ecuación anterior es que no está del todo claro el significado de  $\tau$ , además de que no está clara la medida con respecto a la cual  $\rho$  podría ser integrada. La ecuación no contiene ninguna referencia explícita a un medio circundante de la partícula que se difunde. Por lo tanto, esta es una aproximación que trae muchas dificultades.

## 4.6 Difusión relativista

En esta sección daremos una pequeña revisión sobre la difusión relativista relacionando los modelos vistos en las secciones anteriores.

### 4.6.1 Difusiones en el espacio de Minkowski

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista (ROUP) [76] y el movimiento browniano relativista [93, 94] pertenecen a una clase de difusiones en el espacio de Minkowski que se estudian en [82]. Con esta clase de difusiones se resuelven algunas cuestiones planteadas en [76] y [93, 94] acerca del "límite hidrodinámico" del ROUP y el comportamiento asintótico del desplazamiento cuadrático medio del movimiento browniano relativista, respectivamente. Consideremos el espacio de Minkowski  $\mathfrak{R}^{1,d}$  usual con  $d \geq 1$  un entero. Denotemos las coordenadas de un punto genérico en su base canónica  $x = (x^\mu) = (x^0, x^i) = (x^0, \mathbf{x})$  con los índices griegos corriendo de  $0, \dots, d$  y los índices latinos corriendo de  $1, \dots, d$ . La pseudométrica de Minkowski está dada por  $ds^2 = |dx^0|^2 - \sum_{i=1}^d |dx^i|^2$ . El movimiento de una partícula de masa  $m$  está descrito por una trayectoria  $s \rightarrow (x_s^\mu)$ , teniendo momento  $p = (p_s)$  dado por

$$p = (p^\mu) = (p^0, p^i) = (p^0, \mathbf{p}), \quad (4.96)$$

donde  $p_s^\mu = m \frac{dx^\mu}{ds}$  y satisface

$$|p^0|^2 - \sum_{i=1}^d |p^i|^2 = m^2. \quad (4.97)$$

El tiempo propio es  $s$ . Hacemos  $m = 1$  e introducimos la velocidad

$$\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^d)$$

y las coordenadas polares

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad r = |p| = \left( \sum_{i=1}^d |p^i|^2 \right)^{1/2} \quad y \quad \Theta = \frac{\mathbf{p}}{r}. \quad (4.98)$$

Vamos a considerar difusiones en el espacio de Minkowski las cuales son soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dx_t^i = f(r_t) p_t^i dt \quad (4.99)$$

$$dp_t^i = -b(r_t) p_t^i dt + \sigma(r_t) (\beta [1 + \eta(r_t)^2])^{1/2} [dW_t^i + \eta(r_t) \theta_t^i dw_t], \quad (4.100)$$

donde  $\mathbf{W}$  es un movimiento browniano euclidiano  $d$ -dimensional estándar,  $w$  es un movimiento browniano estándar,  $\beta > 0$  es un ruido inverso y las funciones  $f$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  son funciones continuas.

Se tienen como casos particulares el ROUP, el cual corresponde a

$$f(r) = b(r) = (1 + r^2)^{-1/2}, \quad \sigma(r) = \sqrt{2}, \quad \eta = 0, \quad g(r) = r(1 + r^2)^{-1/2}, \quad (4.101)$$

y para el proceso de Dunkel y Hänggi se tiene

$$f(r) = (1 + r^2)^{-1/2}, \quad b(r) = 1, \quad \sigma(r) = \sqrt{2\sqrt{1 + r^2}}, \quad \eta = r, \quad g(r) = r(1 + r^2)^{-1/2}. \quad (4.102)$$



# Conclusiones

En este trabajo, se presentó como se puede contruir una teoría del movimiento browniano relativista. La teoría de procesos estocásticos relativistas presentó una considerable actividad [76, 77, 78, 101, 102, 34, 87, 83, 93, 94, 80, 81, 96, 97, 98, 79, 82] comenzando con el desarrollo de un modelo relativista para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Mostrar parte de los principales resultados es el objetivo de este trabajo.

Podemos mencionar dos principales procesos estocásticos relativistas, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista (ROUP), desarrollado por Debbasch, Mallick y Rivet [76, 77], y el proceso de *movimiento browniano relativista* estudiado por Dunkel y Hänggi [93, 94].

Se mostró que el proceso de Dunkel y Hänggi y el ROUP pertenecen a una gran familia de procesos estocásticos relativistas, de donde el ROUP corresponde al caso de amplitud de ruido constante y el proceso de Dunkel al caso de coeficiente de fricción constante en el esquema de Hänggi-Klimontovich. La construcción de ambos procesos parte de establecer ecuaciones de Langevin relativistas. A partir de estas ecuaciones, como se vió en el capítulo 2, es posible obtener ecuaciones de Fokker-Planck relativistas.

En la teoría de Dunkel y Hänggi, se mostró que debido al carácter multiplicativo del ruido en la ecuación de Langevin se tiene que especificar el esquema de integración. Se encontró que cuando se estudia la distribución de equilibrio sólo en el esquema de Hänggi-Klimontovich se obtiene la distribución de Maxwell relativista de velocidades. En el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista, ROUP, la distribución de equilibrio también es la distribución de Maxwell relativista. Respecto a esto, se han desarrollado simulaciones numéricas de dinámica molecular y Monte Carlo para el gas relativista que muestran que efectivamente la distribución de Jüttner es la correcta generalización relativista de la distribución de equilibrio. A partir del estudio de las propiedades de transformación de la distribución en una forma manifiestamente covariante también se ha corroborado a la distribución de Jüttner, además de que esta forma implica la introducción de un vector cuya norma está asociada con la temperatura invariante del gas en el marco en reposo. La versión manifiestamente covariante también refuerza el hecho conocido de que la función de distribución de Jüttner es un invariante [73], pues aunque se pueda calcular desde distintos marcos de referencia su valor numérico es el mismo.

Los avances en la teoría de procesos de difusión relativistas y el movimiento

browniano relativista se han aplicado en diversas áreas como física de altas energías [35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 103, 104], donde las propiedades del plasma de quarks y gluones están siendo verificadas a partir del estudio de las colisiones entre iones pesados a altas energías, es decir, colisiones entre iones relativistas, y en astrofísica [48, 49, 50, 51] y más recientemente en física de materia condensada [52] y puede haber futuras aplicaciones en economía [53].

# Apéndice A

## Procesos estocásticos

Como se menciona en la sección 2.4, la modelización matemática del movimiento browniano está basada en el proceso de Wiener. Este es el concepto central de este trabajo, por lo tanto, es importante dar algunas definiciones y notaciones sobre la teoría de procesos estocásticos. A continuación se presentan, de manera muy resumida, algunos conceptos relacionados a probabilidad y procesos estocásticos.

### A.1 Conceptos básicos de probabilidad

Consideremos un conjunto dado no vacío,  $\Omega$ , al que llamaremos *espacio muestral*. A los elementos del conjunto  $\Omega$  se le llaman *eventos* y se denotan por  $\omega$ . Los subconjuntos del espacio muestral que contienen más de un elemento reciben el nombre de *eventos compuestos*. Cada uno de los subconjuntos  $A$  de  $\Omega$  tiene asignado un número  $P(A)$  al que se le llama *probabilidad* de  $A$ , que representa la frecuencia relativa de ocurrencia de obtener un resultado en un subconjunto específico  $A$ . Entonces una *función de probabilidad* es una función  $P$ , definida sobre los subconjuntos  $A$  de  $\Omega$ ,  $A \subseteq \Omega$ , que asigna un número  $P(A)$  a cada  $A$  con las siguientes propiedades:  $0 \leq P(A) \leq 1$  para cada  $A$  en  $\Omega$ ,  $P(\Omega) = 1$  y si  $A_1, A_2, \dots \in \Omega$  son conjuntos disjuntos entonces se tiene  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

Un concepto central en el cálculo estocástico es el de *variable aleatoria*. Una variable aleatoria  $X$  es una función con dominio en  $\Omega$ , es decir, para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) = x \in \mathfrak{R}$ . Si  $\mathbf{X} = (X, \dots)$  es una variable aleatoria  $n$ -dimensional, entonces  $\mathbf{X}(x) \in \mathfrak{R}^n$ . Hay que notar que, mientras una probabilidad es una función cuyo argumento es un conjunto de puntos en el espacio, una variable aleatoria es una función que tiene como argumento puntos simples en el espacio. Una manera de caracterizar variables aleatorias es a través de la *función de distribución*, que está definida, para una variable aleatoria  $X$  como  $F_X(x) = P(X \leq x)$ , con  $P(X \leq x)$  la probabilidad que  $X$  tenga un valor menor o igual a  $x$ . La función  $F$  tiene la propiedad que  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(\infty) = 1$  y además  $F$  es

una función no decreciente de  $x$ . El subíndice de  $F$  denota la variable aleatoria en consideración y puede omitirse si no hay lugar a confusiones.

Las variables aleatorias pueden ser de dos clases. Una variable aleatoria  $X$  es *discreta* si existe una función  $p_X(x)$ , llamada *función de masa de probabilidad* de  $X$ , tal que la función de probabilidad  $P_X$  respecto a la variable  $X$  se puede expresar como

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} p_X(x).$$

Una variable aleatoria  $X$  es *continua* si existe una función  $f_X(x)$ , tal que la función de probabilidad  $P_X$  respecto a la variable  $X$  se puede expresar como

$$P_X(A) = \int_A f_X(x) dx.$$

A la función  $f_X(x)$  se le llama *función de densidad de probabilidad* de  $X$ . Con esta definición, podemos expresar la función de distribución como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x') dx',$$

lo que significa que la probabilidad de que un valor observado de  $X$  se encuentre en el intervalo  $(x, x + dx)$  es  $f_X dx$ .

El valor medio de una variable aleatoria continua  $X$ , denotado por  $\langle X \rangle$  estado dado por

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

y para una variable aleatoria discreta  $X$  por

$$\langle X \rangle = \sum_i x_i p_X(x_i).$$

Un punto importante de señalar es que  $\langle X \rangle$  existe si  $\langle |X| \rangle < \infty$ . De la definición anterior es fácil ver que  $\langle cX \rangle = c\langle X \rangle$ , con  $c$  una constante y  $\langle X_1 + X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle$ .

La varianza de  $X$ ,  $Var[X]$ , está dada por  $Var[X] = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  y la desviación estándar de  $X$ ,  $\sigma(X)$ , por  $\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$ . Para dos variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$ , la covarianza de  $X_1$  y  $X_2$ ,  $Cov(X_1, X_2)$ , se define como  $Cov(X_1, X_2) = \langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle$ . La varianza es una medida de la dispersión de los valores que  $X$  puede tomar alrededor de la media, la covarianza es una medida de cómo las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  están interrelacionadas. Si las variables  $X_1$  y  $X_2$  son independientes se tiene  $Cov(X_1, X_2) = 0$ . La densidad de probabilidad de una variable aleatoria distribuida normalmente con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  está dada por

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.1})$$

Se dice que una variable aleatoria es gaussiana si está distribuida normalmente.

## A.2 Procesos estocásticos

Consideremos un conjunto ordenado  $T$ . Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $\{X(t), t \in T\}$ , definidas todas ellas sobre un mismo espacio de probabilidad. Al conjunto  $T$  se le llama conjunto índice del proceso y no hay ninguna restricción acerca de la naturaleza de este conjunto. Existen dos ejemplos importantes de  $T$ , el primero es cuando  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  o bien sólo  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ , en donde se dice que el proceso estocástico es un proceso en modo discreto y el segundo ejemplo es con  $T = \{t : -\infty < t < \infty\}$  ó  $T = \{t : \geq 0\}$  en donde el proceso es en modo continuo. En ambos casos, el conjunto  $T$  se interpreta como el tiempo. Ahora sólo consideraremos procesos en modo continuo con  $T = [0, \infty]$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$  fijado, a la función  $t \rightarrow X(t)$  se le llama trayectoria de un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$ . Un proceso estocástico es continuo si la trayectoria  $t \rightarrow X(t)$  es una función continua.

Un proceso estocástico de modo continuo  $\{X(t), t \in T\}$  tiene incrementos independientes si  $X(0) = 0$  y, para todas las elecciones de índices  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las  $n$  variables aleatorias  $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  son independientes. Se dice que este proceso tiene incrementos independientes estacionarios si, además,  $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$  tiene la misma distribución que  $X(t_2) - X(t_1)$  para todos los índices  $t_1$  y  $t_2$  y cada  $h > 0$ . Un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  es gaussiano si todas las variables aleatorias  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  tienen una distribución normal o gaussiana.

### A.2.1 Procesos de Markov

Muchos procesos estocásticos pertenecen a una clase especial llamada procesos de Markov. Estos procesos son muy importantes en física, pues caracterizan a sistemas físicos que obedecen leyes probabilísticas en lugar de leyes deterministas, es decir, sistemas para los cuales su probabilidad de encontrarse en un estado dado en un tiempo dado  $t_2$ , puede deducirse de un conocimiento de su estado previo en un tiempo anterior  $t_1$ , y no depende de la historia del sistema antes del tiempo  $t_1$ . Sea  $X(t)$  una función aleatoria del tiempo, la cual es conocida en  $n$  instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Consideremos la probabilidad condicional  $P_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) dx_n$  que  $x$  esté en el intervalo  $(x_n, x_n + dx_n)$  al tiempo  $t_n$ , dado que  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  han ocurrido en los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ . Se dice que un proceso es de Markov si la probabilidad condicional depende sólo del valor  $x_{n-1}$  en el último instante  $t_{n-1}$  el cual precede a  $t_n$ ,

$$P_n(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = P_2(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \equiv P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}).$$

Esto significa que el sistema *olvida* todos los valores excepto el último valor previo del proceso estocástico. Consideremos ahora la probabilidad de que  $X(t_2)$  esté en el intervalo  $(x_2, x_2 + dx_2)$  dado que  $X(t_1)$  tiene un valor  $x_1$  al tiempo  $t_1$ , que es la probabilidad condicional,  $P_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2$ , y a la probabilidad de que  $X(t_3)$  se encuentre en el intervalo  $(x_3, x_3 + dx_3)$  dado que  $X(t_2)$  tiene

un valor  $x_2$  al tiempo  $t_2$  y  $X(t_1)$  tiene un valor  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ , que es  $P_3(x_3, t_3|x_2, t_2; x_1, t_1)dx_3$ . Si multiplicamos  $P_2$  y  $P_3$  e integramos respecto a  $x_2$ , se obtiene una función de densidad de probabilidad que sólo dependerá de  $x_1$  y de  $t_1$

$$P_3(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_2(x_2, t_2|x_1, t_1)P_3(x_3, t_3|x_2, t_2; x_1, t_1)dx_2. \quad (\text{A.2})$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Chapman-Kolmogorov*. Cuando se está tratando con procesos de Markov, se tiene que

$$P_3(x_3, t_3|x_2, t_2; x_1, t_1) = P_2(x_3, t_3|x_2, t_2) = P(x_3, t_3|x_2, t_2),$$

y entonces

$$P(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2, t_2|x_1, t_1)P(x_3, t_3|x_2, t_2)dx_2. \quad (\text{A.3})$$

A esta ecuación se le llama *ecuación integral de Smoluchowski*. El significado de esta ecuación es que la probabilidad condicional de tener  $x_3$  en  $t_3$  a partir de  $x_1$  en  $t_1$  es igual al producto de la probabilidad condicional de obtener  $x_2$  en  $t_2$  a partir de  $x_1$  en  $t_1$  por la probabilidad condicional de tener  $x_3$  en  $t_3$  a partir de  $x_2$  en  $t_2$  para todos los posibles  $x_2$ .

# Apéndice B

## Cálculo estocástico

### B.1 Ecuaciones diferenciales estocásticas

Para el mejor entendimiento de las ecuaciones diferenciales estocásticas (SDEs) usadas anteriormente, se presenta una pequeña revisión a la teoría de SDEs. En comparación con las ecuaciones diferenciales, que son usadas para describir la evolución de un sistema, las ecuaciones diferenciales estocásticas surgen cuando se introduce un ruido aleatorio en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \quad (\text{B.1})$$

donde  $B(t), t \geq 0$  un proceso de movimiento browniano,  $\mu(x, t)$  y  $\sigma(x, t)$  son funciones dadas,  $X(t)$  es un proceso desconocido y  $t \in [0, T]$ .

**Definición B.1** *Un proceso  $X(t)$  es llamado una solución fuerte de (B.1) si para todo  $t > 0$  las integrales  $\int_0^t \mu(X(s), s)ds$  y  $\int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s)$  existen, donde esta segunda integral es una integral de Itô, y*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s).$$

Es importante señalar que una solución fuerte es alguna función  $F(t, (B(s), s \leq t))$  del movimiento browniano  $B(t)$  dado. Cuando  $\sigma = 0$ , la ecuación diferencial estocástica se convierte en una ecuación diferencial ordinaria. Un punto importante que es necesario presentar es el teorema de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial estocástica. Sea  $X(t)$  que satisface la ecuación (B.1)

**Teorema B.1** *Si se satisfacen las siguientes condiciones*

1. *Los coeficientes cumplen con la condición de Lipschitz local, es decir, para cada  $N > 0$ , existe una constante  $K > 0$  tal que para todo  $|x|, |y| \leq N$  y todo  $0 \leq t \leq T$*

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K |x - y|,$$

2. Los coeficientes cumplen la condición de crecimiento lineal, es decir, existe una constante  $K > 0$  tal que para todo  $x \in \mathfrak{R}$

$$|\mu(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq K(1 + |x|),$$

3.  $X(0)$  es independiente de  $(B(t), 0 \leq t \leq T)$ ,

entonces existe una única solución fuerte  $X(t)$  de la ecuación diferencial estocástica (B.1).

## B.2 Integración estocástica

### B.2.1 Integral estocástica de Itô

Un proceso estocástico de la forma

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(X(s), s)ds + \int_0^t A(X(s), s) * dB(s) \quad (\text{B.2})$$

se le llama proceso de Itô, donde  $X_0$  es una variable aleatoria independiente de  $B(t)$ ,  $a$  y  $A$  son procesos que cumplen  $\int_0^T |a(t)|dt < \infty$  y  $\int_0^T A^2(t)dt < \infty$ . La ecuación diferencial asociada a (B.2) es

$$dX(t) = a(X)dt + A(X) * dB(t). \quad (\text{B.3})$$

Para una función  $F(X)$  y para un proceso  $X(t)$  que tiene por diferencial estocástica la ecuación anterior, la diferencial estocástica del proceso  $F(X(t))$  está dada por

$$\begin{aligned} dF(X(t)) &= F'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}F''(X(t))A^2(t)dt \\ &= \left( F'(X(t))a(t) + \frac{1}{2}F''(X(t))A^2(t) \right) dt \\ &\quad + F'(X(t))A(t)dB(t). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A esta expresión se le conoce como *fórmula de Itô*. Otra manera de escribir esto es

$$F(X(t)) = F(X(0)) + \int_0^t F'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X(s))A^2 ds, \quad (\text{B.5})$$

donde la primera integral es una integral de Itô con respecto a la diferencial estocástica.

Para una función arbitraria  $F(X)$ , donde  $X(t)$  satisface la ecuación estocástica de Itô (B3), obtenemos, usando la fórmula de Itô:

$$\langle dF(X(t)) \rangle = (a(X)F'(X) + \frac{1}{2}A^2(X)F''(X))dt, \quad (\text{B.6})$$

donde se ha usado el hecho que  $\langle dB(t) \rangle = 0$  y suponemos que

$$\langle A(X(t))F'(X(t))dB(t) \rangle = 0. \quad (\text{B.7})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\langle dF(X(t)) \rangle}{dt} &= \left\langle \frac{dF(X(t))}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle F(X(t)) \rangle \\ &= \int dX F(X) \frac{\partial}{\partial t} f(X, t|X_0, t_0) \\ &= \int dX [a(X) \frac{\partial}{\partial X} F + \frac{1}{2} A^2(X) \frac{\partial^2}{\partial X^2} F] f(X, t|X_0, t), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde  $f(X, t|X_0, t)$  es la probabilidad condicional. Usando integración por partes y condiciones de frontera en  $\pm\infty$ , resulta

$$\int dX F(X) \frac{\partial f}{\partial t} = dX F(X) \left[ -\frac{\partial}{\partial X} (a(X)f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (A^2(X)f) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Dado que  $F(X)$  es arbitrario, nos queda la ecuación para  $f(X, t|X_0, t)$  que es la ecuación de Fokker-Planck correspondiente a la ecuación diferencial estocástica de Itô (B3)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} [a(X)f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} (A^2(X)f)] = -\frac{\partial}{\partial X} J(X), \quad (\text{B.10})$$

donde  $J(X)$  es la corriente de probabilidad.

### B.2.2 Integral estocástica de Stratonovich-Fisk

Un proceso de Stratonovich-Fisk es un proceso de la forma

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(X(s), s) ds + \int_0^t A(X(s), s) \circ dB(s) \quad (\text{B.11})$$

el último término debe ser interpretado como una integral de Stratonovich-Fisk. Similarmente al proceso de Itô, la ecuación diferencial asociada a (B.11) es

$$dX(t) = a(X)dt + A(X) \circ dB(t) \quad (\text{B.12})$$

La ecuación de Fokker-Planck para la FDP  $f(t, x)$  del proceso estocástico (B.6) es

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -af + \frac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial x} (Af) \right] \quad (\text{B.13})$$

### B.2.3 La integral de Itô retrasada

Un proceso de Itô retrasado es un proceso de la forma

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(X(s), s) ds + \int_0^t A(X(s), s) \bullet dB(s) \quad (\text{B.14})$$

donde el último término es una integral de Itô retrasada. Su ecuación diferencial estocástica asociada es

$$dX(t) = a(X)dt + A(X) \bullet dB(t) \quad (\text{B.15})$$

y la correspondiente ecuación de Fokker-Planck para la FDP  $f(t, x)$  es

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -af + \frac{1}{2}A^2 \frac{\partial}{\partial x}(Af) \right] \quad (\text{B.16})$$

## Apéndice C

# Función de Bessel modificada de segunda clase

Una solución de la ecuación de Bessel modificada

$$z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + z \frac{\partial w}{\partial z} - (z^2 + \nu^2)w = 0 \quad (\text{C.1})$$

es la función  $K_\nu(z)$  conocida como la función de Bessel modificada de segunda clase. A esta función también se le suele llamar la función de Hankel modificada, función de Basset, función de Macdonald o funciones de Bessel modificadas de tercera clase. Para valores de  $z$  negativos,  $z < 0$  la función  $K_\nu(z)$  es compleja y para  $z = 0$  la función tiende a infinito. Las siguientes integrales son representaciones de  $K_\nu(z)$ :

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh \theta} \cosh(\nu \theta) d\theta \quad (\text{C.2})$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \sinh^{2\nu} t dt \quad (\text{C.3})$$

La función  $K_\nu$  satisface la relación de recurrencia

$$K_{\nu+1}(z) = K_{\nu-1}(z) + \frac{2\nu}{z} K_\nu(z). \quad (\text{C.4})$$

La expansión asintótica de  $K_\nu(z)$  para valores grandes de  $z$ ,  $z \gg 1$ , es

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\}. \quad (\text{C.5})$$

La expansión para valores pequeños de  $z$ ,  $z \ll 1$ , es

$$\begin{aligned}
 K_\nu(z) &= (-1)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!(\nu+k)!} \times \left\{ \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\psi(k+1) - \frac{1}{2}\psi(\nu+k+1) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{(\nu-k-1)!}{k! \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-2k}}.
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

La función  $\psi(\nu)$  está definida como

$$\psi(\nu+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}, \quad \psi(1) = -\gamma \tag{C.7}$$

donde  $\gamma = 0.577215664\dots$  es la constante de Euler.

## Apéndice D

# Algunas Aplicaciones

### El grafeno

El grafeno es un material novedoso que por sus características tiene aplicaciones potenciales. Es un material bidimensional, ya que se compone de solo una capa de átomos de carbono en un arreglo hexagonal. El cociente entre su viscosidad y la densidad de entropía es menor que en el plasma de quarks y gluones, por lo tanto puede servir para observar las propiedades de transporte de un plasma de partículas ultra-relativistas a temperaturas moderadamente altas.

También sus propiedades eléctricas son muy interesantes. Los electrones en el grafeno obedecen una relación de dispersión lineal y se comportan como partículas relativistas sin masa y por tanto obedecen una ecuación relativista de Dirac en dos dimensiones con la velocidad de Fermi,  $v_F = 10^8$  cm/s en lugar de la velocidad de la luz. A temperaturas suficientemente altas o en presencia de campos eléctricos fuertes se pueden suprimir los efectos de transporte cuánticos por lo que los portadores de carga pueden ser descritos por medio de ecuaciones relativistas clásicas. En [52] se propone un modelo que involucra ecuaciones de Langevin relativistas. Una temperatura finita supone una fuente de efectos estocásticos para los electrones. Estos portadores de carga están siendo dispersados por fotones y por otras causas como defectos en el arreglo de la malla del grafeno y por las mismas fronteras que provocan una redistribución de equilibrio de sus energías.

Para modelar la dinámica aleatoria de los electrones en una hoja de grafeno se puede recurrir a un conjunto de ecuaciones de Langevin para las componentes del momento  $\vec{p} = (p_x, p_y)$  sujetas a una relación de dispersión  $\epsilon = v_F p_0$ , con  $p_0 = (p_x^2 + p_y^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\epsilon$  la energía de la partícula y  $v_F$  la velocidad de Fermi. Requiriendo que se cumpla la distribución de equilibrio de Jüttner en 2D, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de Langevin

$$\dot{p}_x = -\gamma v_F p_x / p_0 - dU(x)/dx + E_x(t) + \sqrt{2\gamma k_B T} \xi_x(t), \quad (\text{D.1})$$

$$\dot{p}_y = -\gamma v_F p_y / p_0 + E_y(t) + \sqrt{2\gamma k_B T} \xi_y(t), \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{V} \equiv (\dot{x}, \dot{y}) = \partial\epsilon / \partial\vec{p} = v_F \vec{p} / p_0, \quad (\text{D.3})$$

donde  $\gamma$  es un coeficiente de amortiguamiento constante,  $U(x)$  es un potencial eléctrico,  $E_x$  y  $E_y$  son las componentes de un campo eléctrico  $\vec{E}(t)$  que actúan a lo largo del eje  $x$  y  $y$  respectivamente y  $\xi_x(t)$  y  $\xi_y(t)$  son dos ruidos blancos gaussianos. Dado que estas ecuaciones describen una dinámica browniana relativista, son un punto de partida para investigaciones experimentales y teóricas del movimiento browniano relativista.

## Mercados financieros

El movimiento browniano relativista, así como su análogo clásico, puede ayudar a modelar los mercados financieros como se ha planteado en [105]. Dado que una de las partes importantes en el análisis del movimiento browniano es el desplazamiento cuadrático medio, en su versión relativista también nos puede dar información acerca del comportamiento del proceso estocástico que representa. Para una partícula *clásica* inmersa en un gas relativista, el desplazamiento cuadrático medio está dado por [106]

$$\langle \mathcal{D}_t \rangle = \frac{2}{\nu} \left[ 3KT + mc^2 \frac{K_1(z)}{K_2(z)} \right] t, \quad (\text{D.4})$$

con  $\nu$  el coeficiente de fricción y  $z = mc^2/k_B T$ .

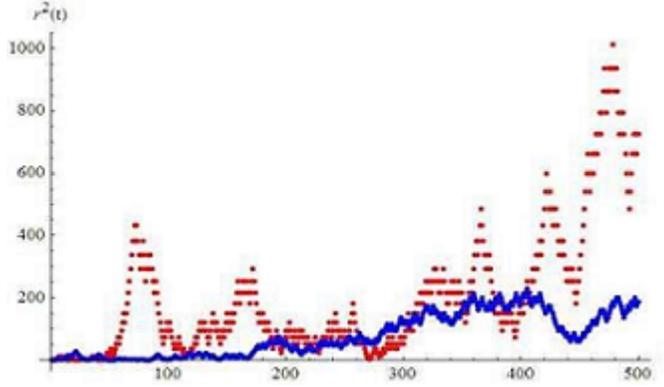


Figura D.1: Evolución del desplazamiento cuadrático medio para una partícula clásica en un gas clásico (línea punteada) y relativista (línea continua). Tomado de [105]

El comportamiento del movimiento browniano clásico y el relativista puede apreciarse en la figura D.1 en donde se ha simulado el desplazamiento cuadrático medio notando que en el caso clásico hay grandes fluctuaciones comparadas con el relativista. Dado que se observa menos fluctuaciones en el caso relativista, debido a la restricción de la velocidad de la partícula, en una comparación con los mercados financieros nos lleva a deducir que puede ser un mejor modelo ya

que los mercados no fluctúan infinitamente.

Este no es el primer intento por introducir conceptos relativistas en mercados financieros, existe ya una conexión entre las finanzas y la relatividad propuesta por Haug [107]. Recientemente, Wissner-Gross y Freer [53] realizaron un estudio sobre la ubicación óptima de un equipo comercial sobre el globo terráqueo para obtener mejores transacciones sobre los principales mercados del mundo. En el ámbito financiero, la velocidad a la que viaja la información puede resultar un factor determinante si se quiere sacar ventaja sobre la competencia. La información generada en una casa de bolsa es tomada por comerciantes en todo el mundo para hacer transacciones donde se involucra grandes cantidades de dinero. Si se es el primero en recibir la información se obtendrá ventaja sobre los demás comerciantes para vender y/o comprar activos. Utilizando el hecho que la velocidad limitante para la información es la velocidad de la luz, Wissner-Gross y Freer desarrollaron un modelo que predice cuales son los lugares óptimos para hacer operaciones tomando en cuenta los principales mercados.

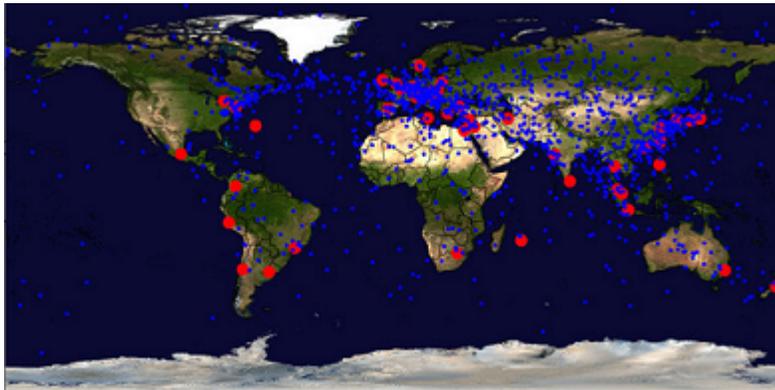


Figura D.2: Puntos óptimos de comercio (puntos en azul) para los principales mercados (puntos en rojo). Tomado de [53]



# Bibliografía

- [1] R. Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particle contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Phil. Mag.*, 4:161-173, 1828.
- [2] J. Ingenhousz. Bemerkungen über den Gebrauch des Vergrößerungsglases. In N. C. Molitor, editor, *Vermischte Schriften physisch-medicinischen Inhalts*. Christian Friderich Wappler, Wien, 1784.
- [3] L. Bachelier. Théorie de la spéculation, *Annales de l'École Normale Supérieure*, 17:21-86, 1900.
- [4] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* 17:549-560, 1905.
- [5] W. Sutherland. A dynamical theory of diffusion for non-electrolytes and the molecular mass of albumin. *Philos. Mag.*, 9:781-785, 1905.
- [6] M. von Smoluchowski. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen, *Ann. Phys.* 21:756-780, 1906.
- [7] J. Perrin. Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Ann. Chim. Phys.*, 18:5-114, 1909.
- [8] P. Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *Comptes rendus Acad. Sci. (Paris)*, 146:530-533, 1908
- [9] A. Fokker. Die Mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld. *Ann. Phys.*, 43(4):810-820, 1914.
- [10] M. Planck. Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1917.
- [11] O. Klein. *Zur statistischen Theorie der Suspensionen und Lösungen*. PhD thesis, Stockholm Höögskola, 1921. Publicado en *Ark. Mat. Astron. Fys.* 16(5):1-51, 1922. Almqvist & Wiksell, Uppsala.

- 
- [12] G. E. Uhlenbeck y L. S. Ornstein. On the Theory of the Brownian Motion. *Phys. Rev.*, 36:823841, 1930.
- [13] M. C. Wang y G. E. Uhlenbeck. On the Theory of the Brownian Motion II. *Rev. Mod. Phys.*, 17:323342, 1945.
- [14] H. A. Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7(4):284-304, 1940.
- [15] N. Wiener. Differential space. *J. Math. Phys.*, 2:131-174,1923.
- [16] A. Kolmogorov. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Annalen*, 104(4):415-458, 1931.
- [17] W. Feller. Zur Theorie der stochastischen Prozesse. (Existenz- und Eindeutigkeitsätze). *Ann. Math.*, 113(1):113-160, 1936.
- [18] P. Lévy. Sur certains processus stochastique homoènes. *Compositio Math.*, 7:283-339, 1939.
- [19] P. Lévy. *Processus Stochastique et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [20] K. Itô. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20:519-524, 1944.
- [21] D. Fisk. Quasimartingales. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1920:369-389, 1965.
- [22] R. L. Stratonovich. A New Representation for Stochastic Integrals and Equations. *SIAM J. Control*, 4:362-371, 1966.
- [23] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, fifth edition, Springer-Verlag, 1998
- [24] G. Schay. *The equations of diffusion in the special theory of relativity*. PhD thesis, Princeton University, 1961.
- [25] R. M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 6:241268, 1965.
- [26] R. Hakim. A covariant theory of relativistic Brownian Motion. I. Local Equilibrium. *J. Math. Phys.*, 6(10):14821495, 1965.
- [27] J. P. Caubet. Relativistic Brownian motion. *Adv. Appl. Prob.*, 8(2):230231, 1976.
- [28] F. Guerra y P. Ruggiero. A note on relativistic Markov processes. *Lett. Nuovo Cimento*, 23:529534, 1978.
- [29] T. H. Boyer. Inconsistency between the Boltzmann distribution for relativistic free particles and the Rayleigh-Jeans law for thermal radiation within classical electro-dynamics. *Phys. Rev. D*, 19:11121115, 1979.

- [30] T. H. Boyer. Inconsistency between the Boltzmann distribution for relativistic free particles and the Planck spectrum for thermal radiation in quantum theory. *Phys. Rev. D*, 19:36353640, 1979.
- [31] S. Roy. Relativistic Brownian motion and the spacetime approach to quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 21:7176, 1980.
- [32] U. Ben-Yaacov. Relativistic Brownian motion and the spectrum of thermal radiation. *Phys. Rev. D*, 23(6):14411450, 1981.
- [33] L. M. Morato y L. Viola. Markov diffusions in comoving coordinates and stochastic quantization of the free relativistic particle. *J. Math. Phys.*, 36:46914710, 1995. Erratum, *ibid.* 37, 4769 (1996).
- [34] O. Oron y L. P. Horwitz. Relativistic Brownian Motion and Gravity as an Eikonal Approximation to a Quantum Evolution Equation. *Found. Phys.*, 35(7):1181–1203, 2005.
- [35] B. Svetitsky. Diffusion of charmed quarks in the quark-gluon plasma. *Phys. Rev. D*, 37(9):24842491, 1988.
- [36] G. Wolschin. Diffusion and local deconfinement in relativistic systems. *Phys. Rev. C*, 69(2):024906, February 2004.
- [37] H. van Hees y R. Rapp. Thermalization of heavy quarks in the quark-gluon plasma. *Phys. Rev. C*, 71(3):034907, 2005.
- [38] H. van Hees, V. Greco, y R. Rapp. Heavy-quark probes of the quark-gluon plasma and interpretation of recent data taken at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider. *Phys. Rev. C*, 73:034913, 2006.
- [39] R. Rapp, V. Greco, y H. van Hees. Heavy-Quark Spectra at RHIC and Resonances in the QGP. *Nucl. Phys. A*, 774:685688, 2006.
- [40] N. Itoh, Y. Kohyama, y S. Nozawa. Relativistic corrections to the Sunyaev-Zeldovich effect for clusters of galaxies. *Astrophys. J.*, 502:7-15, 1998.
- [41] S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago, 1939, Dover, New York, 1957.
- [42] R. A. Sunyaev y Y. B. Zeldovich. The observations of relic radiation as a test of the nature of x-ray radiation from the clusters of galaxies. *Comm. Astrophys. Space Phys.*, 4:173, 1972.
- [43] M. Birkinshaw, s. F. Gull, y H. Hardebeck. The Sunyaev-Zeldovich effect towards three clusters of galaxies. *Nature*, 309:34-35, 1984.
- [44] M. Jones *et al.* An image of the Sunyaev-Zel'dovich effect. *Nature*, 365:320-323, 1993.
- [45] G. Wolschin, M. Biyajima, T. Mizoguchi, y N. Suzuki. Time evolution of relativistic d+au and au+au collisions. *Ann. Phys.*, 15(6):369378, 2006.

- [46] M. Abdel-Aziz y S. Gavin. Causal diffusion and the survival of charge fluctuations in nuclear collisions. *Phys. Rev. C*, 70(3):034905, 2004.
- [47] M. Abdel-Aziz y S. Gavin. Causal diffusion at RHIC. *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, 31:S77S84, 2005.
- [48] C. D. Dermer. The production spectrum of a relativistic Maxwell-Boltzmann gas. *Astrophys. J.*, 280:328333, 1984.
- [49] B. Wolfe y F. Melia. Covariant kinetic theory with an application to the coma cluster. *Astrophys. J.*, 638, 2006.
- [50] E. Bertschinger. Brownian Motion of Stars, Dust, and Invisible Matter. *AIP Conf. Proc.*, 861(1):97105, 2006.
- [51] M. E. Dieckmann, L. OC. Drury, y P. K. Shukla. On the ultrarelativistic two-stream instability, electrostatic turbulence and Brownian motion. *New J. Phys.*, 8:40, 2006.
- [52] A. Pototsky, F. Marchesoni, F. V. Kusmartsev, P. Hnggi y S. E. Savel'ev. Relativistic brownian motion on a graphene chip. *arXiv:1103.0945*, 2011.
- [53] A. D. Wissner-Gross y C. E. Freer. Relativistic statistical arbitrage. *Phys. Rev. E*, 82:056104, 2010.
- [54] F. Jüttner. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie. *Ann. Physik und Chemie*, 34:856-882, 1911.
- [55] J. L. Synge. *The Relativistic Gas*. North-Holland, Amsterdam 1957.
- [56] F. Jüttner. Die Relativistische Quantentheorie des idealen Gases. *Zeitschr. Phys.*, 47:542-566, 1928.
- [57] S. R. de Groot, W. A. van Leewen y Ch. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [58] R. Hakim. The applications of relativistic kinetic theory to cosmological models - Some observational consequences *Astron. & Astrophys.*, 25:211-217, 1973.
- [59] C. Cercignani y G. M. Kremer. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Progress in Mathematical Physics vol. 22 Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 2002.
- [60] D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner y P. Hnggi. Thermal Equilibrium and Statistical Thermometers in Special Relativity. *Phys Rev Lett*, 99:170601, 2007.
- [61] G. Kaniadakis. Statistical mechanics in the context of special relativity. *Phys. Rev. E*, 66:056125, 2002.

- [62] R. Silva y J. A. S. Lima. Relativity, nonextensivity and extended power law distributions. *Phys. Rev. E*, 72:057101, 2005.
- [63] L. P. Horwitz, W. C. Schieve, y C. Piron. Gibbs Ensembles in Relativistic Classical and Quantum Mechanics. *Ann. Phys.*, 137:306-340, 1981.
- [64] L. P. Horwitz, S. Shashoua, y W. C. Schieve. A manifestly covariant relativistic Boltzmann equation for the evolution of a system of events. *Physica A*, 161:300-338, 1989.
- [65] W. C. Schieve. Covariant Relativistic Statistical Mechanics of Many Particles. *Found. of Physics*, 35:1359-1381, 2005.
- [66] G. Chacón-Acosta. *Sobre la termodinámica estadística de algunos sistemas relativistas y modelos cuánticos simples*. Tesis PhD. UAM-I, 2011.
- [67] A. Montakhab, M. Ghodrat, y M. Barati. Statistical thermodynamics of a two-dimensional relativistic gas. *Phys. Rev. E*, 79:031124, 2009.
- [68] J. Dunkel, P. Hänggi y S. Hilbert. Non-local observables and lightcone-averaging in relativistic thermodynamics. *Nature Phys.*, 5:741-747, 2009.
- [69] J. Dunkel, P. Talkner y P. Hänggi. Relative entropy, Haar measures and relativistic canonical velocity distributions. *New J. Phys.* 9:144, 2007.
- [70] J. Dunkel y D. Cubero. Stationarity, ergodicity, and entropy in relativistic systems *EuroPhys. Lett.*, 87:30005, 2009.
- [71] E. Lehmann. Covariant Equilibrium Statistical Mechanics. *J. Math. Phys.*, 47:023303, 2006.
- [72] F. Peano, M. Marti, L. O. Silva y G. Coppa. Statistical kinetic treatment of relativistic binary collisions. *Phys. Rev. E* 79:025701, 2009.
- [73] N. G. van Kampen. Lorentz-invariance of the distribution in phase space. *Physica*, 43:244-262, 1969
- [74] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug y H. A. Morales-Técotl. Manifestly covariant Jüttner distribution and equipartition theorem. *Phys. Rev. E*, 81:021126, 2010.
- [75] J. Dunkel y P. Hänggi. Relativistic Brownian motion. *Phys. Rep.*, 471:1, 2009.
- [76] F. Debbasch, K. Mallick y J. Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *J. Stat. Phys.* 88, 945 1997.
- [77] F. Debbasch y J. P. Rivet. A diffusion equation from the relativistic Ornstein-Uhlenbeck processes. *J. Stat. Phys.*, 90:1179-1199, 1998.
- [78] F. Debbasch. A diffusion process in curved space-time. *J. Math. Phys.* 45, 27442760, 2004

- [79] F. Debbasch. Equilibrium distribution function of a relativistic dilute perfect gas. *Physica A*, 387:2443-2454, 2008.
- [80] C. Chevalier y F. Debbasch. Relativistic diffusions: A unifying approach. *J. Math. Phys.*, 49:043303, 2008.
- [81] C. Chevalier y F. Debbasch. A unifying approach to relativistic diffusions and H-theorems. *Mod.Phys. Lett. B*, 22:383-392, 2008.
- [82] J. Angst y J. Franchi. Central limit theorem for a class of relativistic diffusions. *J. Math. Phys.*, 48:083101, 2007.
- [83] M. Rigotti y F. Debbasch. An  $H$ -Theorem for the general relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Math. Phys.*, 46:103303, 2005.
- [84] R. M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Ark. Mat.* 6, 241268, 1966.
- [85] R. M. Dudley. A note on Lorentz-invariant Markov processes. *Ark. Mat.* 6, 575581, 1967
- [86] T. Koide. Microscopic derivation of causal diffusion equation using the projection operator method. *Phys. Rev. E*, 72:026135, 2005.
- [87] J. Franchi y Y. Le Jan. Relativistic diffusions and Schwarzschild geometry. *Comm. Pure Appl. Math.* 60, 187251, 2006.
- [88] J. Franchi y Y. Le Jan. Curvature diffusions in general relativity. *Comm Math. Physics* 2011.
- [89] Z. Haba. Relativistic diffusion. *Physical Review*, E79, 021128, 2009.
- [90] Z. Haba. Relativistic diffusion with friction on a pseudoriemannian manifold. *Class. Quant. Grav.* 27, 095021, 2010.
- [91] J. Herrmann. Diffusion in the special theory of relativity. *Phys. Rev. E* 80, 051110, 2009.
- [92] J. Herrmann. Diffusion in the general theory of relativity. *Phys. Rev. D* 82, 024026, 2010.
- [93] J. Dunkel y P. Hänggi. Theory of the relativistic Brownian motion: The (1+1)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 71:016124, 2005.
- [94] J. Dunkel y P. Hänggi. Theory of the relativistic Brownian motion: The (1+3)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 72:036106, 2005.
- [95] R. Zigadlo. Free Brownian motion approach to the ideal gas of relativistic particles. *Phys. Lett. A*, 345:323-329, 2005.
- [96] J. Dunkel y P. Hänggi. Relativistic Brownian motion: From a microscopic binary collision model to the Langevin equation. *Phys. Rev. E*, 74:051106, 2006. *Erratum*, *Phys. Rev. E* 74:069902(E), 2006.

- [97] J. Dunkel y P. Hänggi. One-dimensional nonrelativistic and relativistic Brownian motions: A microscopic collision model. *Physica A*, 374(2):559-572, 2007.
- [98] J. Dunkel, P. Talkner y P. Hänggi. Relativistic diffusion processes and random walk models. *Phys. Rev. D*, 75:043001, 2007.
- [99] K. S. Fa. Analysis of the relativistic Brownian motion in momentum space. *Braz. J. Phys.*, 36(3A):777-782, 2006.
- [100] J. Dunkel, P. Hänggi y S. Weber. Times parameters and Lorentz transformations of relativistic stochastic processes. *arXiv:0812.0466v1*, 2008.
- [101] C. Barbachoux, F. Debbasch y J. P. Rivet. The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck processes in an arbitrary inertial frame. *Eur. Phys. J. B*, 19:37-47, 2001.
- [102] C. Barbachoux, F. Debbasch y J. P. Rivet. Covariant Kolmogorov equation and entropy current for the relativistic Ornstein-Uhlenbeck processes. *Eur. Phys. J. B*, 23:487-496, 2001.
- [103] Y. Akamatsu, T. Hatsuda y T. Hirano. Heavy Quark Diffusion with Relativistic Langevin Dynamics in the Quark-Gluon Fluid, *arXiv:0809.1499*, 2008.
- [104] U. Gursoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti y F. Nitti. Langevin diffusion of heavy quarks in non-conformal holographic backgrounds, *JHEP*, 1012:088, 2010.
- [105] A. Aragon-Muoz y A. Sandoval-Villalazo. The relativistic Brownian motion: Interdisciplinary applications. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 229:012075, 2010.
- [106] A. Sandoval-Villalazo, A. Aragon-Muoz y A. L. Garca-Perciante. *Int. J. Mod. Phys. B*, 24:6043-6048, 2010.
- [107] E. G. Haug. Space-time Finance, The Relativity Theory's Implications for Mathematical Finance. *Wilmott Magazine*, 2004.
- [108] A. Einstein. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, *Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik* 4:411, 1907.
- [109] M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme, *Ann. Phys.* 76:1, 1908
- [110] R. C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Clarendon Press, Oxford, 1934.
- [111] H. Ott. Lorentz-Transformation der W rme und der Temperatur. *Z. Phys.*, 175:70104, 1963.
- [112] H. Arzelies. Transformation relativiste de la temperature et de quelques autres grandeurs thermodynamiques. *Nuovo Cimento*, 35:792804, 1965.

- [113] P. T. Landsberg. Does a moving body appear cool? *Nature*, 214:903904, 1967.
- [114] N. G. van Kampen. Relativistic thermodynamics of moving systems. *Phys. Rev.*, 173:295301, 1968.