UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TEOREMA ESPECTRAL Y REPRESENTACIONES INTEGRALES

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ASAF LEVI FRANCO ARELLANO

DIRECTOR DE LA TESINA O TESIS
RAFAEL RENÉ DEL RIO CASTILLO IIMAS

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2016

Índice

1. Introducción

El teorema espectral aparece en diferentes formas en la literatura y con diversas pruebas. En general existen dos enfoques de la prueba del teorema:

- Probando primero el caso de los operadores autoadjuntos acotados y finalmente obteniendo el resultado para operadores autoadjuntos no acotados. Von Neumann fue el pionero en este enfoque.
- Probando directamente para operadores autoadjuntos acotados y no acotados.

El teorema espectral para operadores acotados autoadjuntos es debido a Hilbert en 1906 [4]. Importantes reformulaciones y extensiones se han hecho debido a Schmitd, Weyl, Hellinger,todos ellos alumnos de Hilbert. El trabajo de Hilbert fue hecho usando la formulación por medio de resoluciones de la identidad, no con operadores, sino con formas cuadráticas. No fue hasta 1913 que Riesz nombró las cosas en el lenguaje de operadores que hoy utilzamos [9].

Por un lado, en el enfoque de prueba en el que se demuestra primero el caso para acotados y luego extenderlo a no acotados, destacan las siguientes ideas de la demostración:

- **Vía Descomposición Polar.** Esta prueba inicia mostrando que todo operador acotado autoadjunto positivo tiene una raíz cuadrada positiva, utilizando esto, se muestra que todo operador autoadjunto admite una descomposición polar luego se construye una familia de operadores que forman una resolución de la identidad.
  Sobresalen dos maneras de extenderlo a operadores no acotados: la primera usando la transformada de Cayley, la segunda construyendo una familia de subespacios mutuamente ortonormales que generan al espacio, tal que el operador restringido en cada uno de ellos sea acotado y autoadjunto.
- **Vía Cálculo Funcional.** Esta idea se basa principalmente en dos resultados, el desarrollo de un cálculo funcional mostrando un isomorfismo de la cerradura del conjunto de polinomios $P(A)$, A operador acotado y autoadjunto, con $\mathcal{C}(\sigma(A))$, el espacio de las funciones continuas sobre el espectro de A; esto combinado con el teorema de Riesz-Markov, teorema que proporciona medidas espectrales desde una

representación integral para cierto tipo de funciones. Esta forma de demostrarlo fue primero desarrollada por I.M Gelfand y M.A. Naimark en 1943[2].

- **Vía Teorema de Bochner.** El teorema de Bochner da una medida positiva pero sólo para operadores unitarios. Para probar el teorema en caso general es necesario el uso de la transformada de Cayley.
- **Prueba Geométrica de Leinfelder.** Aquí el punto principal es la consideración de subespacios invariantes apropiados, de ahí que se considere una prueba geométrica. Lengyel y Stone presentaron esta idea en 1936[6] para operadores autoadjuntos acotados utilizando solamente propiedades intrinsecas de los espacios de Hilbert.

Por otra parte, entre las pruebas que funcionan tanto para operadores acotados como no acotados destacan las siguientes:

- **Vía Operador Resolvente.** La idea principal de esta aproximación a la prueba del teorema espectral es utilizar el teorema de representación integral de Herglotz a el resolvente de un operador autoadjunto, y con ayuda de una fórmula de inversión obtener una medida única. Esta idea apareció por primera vez gracias a Doob y Koopman en 1934[1].
- **Vía Fórmula de Helffer-Sjöstrand.** A diferencia de las demás aproximaciones a la prueba que aquí se han mencionado, esta idea se basa en una fórmula relativamente nueva, la fórmula de Helffer-Sjöstrand, presentada en 1989[3], la cual da funciones suaves como integrales sobre resolventes, y puede ser extendido a una clase grande de funciones.

Debido a la importancia de los teoremas que ofrecen una representación integral para funciones, el objetivo de este trabajo es analizar, en particular, dos pruebas del teorema espectral que requieren este tipo de teoremas. Se revisarán las pruebas vía cálculo funcional y vía operador resolvente, que utilizan una modificación al teorema de Riesz y el teorema de Herglotz respectivamente.

Los teoremas de representación integral, especialmente si la representación es única, juegan un papel muy importante en muchas partes del análisis.

2. Teorema de Riesz

En esta sección se demostrará el teorema espectral utilizando una modificación del teorema de Riesz, el cual ofrece una representación integral para funcionales lineales y acotados.

Se inicia con el desarrollo de un cálculo funcional continuo para operadores acotados autoadjuntos, usando este cálculo funcional recuperamos la medida que utilizaremos para probar el teorema espectral con el cual entenderemos como el espectro y el cálculo funcional interactuan para dar una descripción completa de el operador autoadjunto en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, el cual se define como:

Definición 1. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, definimos $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ como el espacio de funciones de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$ lineales y acotadas.*

Sea A un operador acotado y autoadjunto. Sea P un polinomio, con

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

entonces definamos

$$P(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

Así, tenemos un mapeo $\phi : \mathcal{P}ol(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $\phi(P) = P(A)$. Donde $\mathcal{P}ol(\mathbb{C})$ Es el espacio de polinomios con coeficientes complejos.

Ésta ϕ satisface que $\phi(\overline{P}) = \phi(P)^*$. Más aún, si λ es un eigenvalor de A, entonces $P(\lambda)$ es un eigenvalor de $P(A)$.

Definamos ahora el conjunto resolvente de A como

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda I \text{ es biyectiva y } (A - \lambda I)^{-1} \text{ continua}\},$$

a $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ se le llama el resolvente de A. El espectro de A se define como

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$$

y el radio espectral como

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Lema 1 (Teorema del Mapeo Espectral)**.** *(Ref: [5]7.4-20)*

$$\sigma(P(A)) = \{P(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$$

Demostración.
Sea $\mu \in \{P(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$, es decir, existe $\beta \in \sigma(A)$ tal que $\mu = P(\beta)$.

Como β es raíz de $P(x) - \mu$, entonces existe $g(x)$ polinomio de grado $n-1$ tal que

$$P(x) - \mu = (x - \beta) g(x)$$

y

$$S_\mu := P(A) - \mu I = (A - \beta I)g(A)$$

Pueden ocurrir los siguientes dos casos:

a) $A - \beta I$ no es inyectiva.
Si S_μ^{-1} existiera,

$$I = S_\mu S_\mu^{-1} = (A - \beta I)g(A)S_\mu^{-1}$$

entonces, $A - \beta I$ inyectiva. Lo que es una contradiccíon. Por tanto S_μ no es inyectiva y entonces $\mu \in \sigma(P(A))$.

b) $A - \beta I$ no es sobreyectiva.
Como $A - \beta I$ no es sobre, $Rang(A - \beta I) \neq X$, y entonces $Rang(S_\mu) \neq X$. Por tanto $\mu \in \sigma(P(A))$.

Reciprocamente, sea $\mu \in \sigma(P(A))$, entonces factorizando obtenemos que

$$P(x) - \mu = \alpha(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

y

$$S_\mu := P(A) - \mu = \alpha(A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_n)$$

Supongamos que, para todo $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_i \in \rho(A)$, entonces para todo $i = 1, \ldots, n$ existe $(A - \lambda_i)^{-1}$.

Entonces existe S_μ^{-1}, la cual, por el teorema del mapeo abierto, es continua, lo que implica que $\mu \in \rho(P(A))$. Por tanto $\exists i_0$ tal que $\lambda_{i_0} \in \sigma(A)$ con $P(\lambda_{i_0}) = \mu$.

Por tanto $\mu \in \{P(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$.

□

Lema 2. *Sea A un operador acotado y autoadjunto. Entonces*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|,$$

con P polinomio.

Demostración.
Por el teorema que dice que si A es un operador autoadjunto en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces $r(A) = \|A\|$, ver [8] Teorema VI.6, se tiene que

$$\|P(A)\|^2 = \|P(A)^* P(A)\| = \|\overline{P}P(A)\| = r(\overline{P}P(A))$$

Ahora, por el lema anterior, tenemos que

$$r(\overline{P}P(A)) = \sup_{\mu \in \sigma(\overline{P}P(A))} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{P}P(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P^2(\lambda)|.$$

$\square$

El obejtivo del siguiente teorema es definir $f(A)$ para un operador autoadjunto $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, donde $\mathcal{C}(\sigma(A))$ denota el espacio de las funciones continuas sobre el espectro de A. La demostración utilizará los resultados que hemos obtenido hasta ahora para polinomios y, con ayuda del teorema de Stone-Weierstrass, generalizarlos a $\mathcal{C}(\sigma(A))$.

Teorema 1. *Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}$ el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$. Entonces la función $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definido por $\phi(P) = P(A)$, se extiende, de manera única a $\phi : \mathcal{C}(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Además, tal extensión tiene las siguientes propiedades:*

a) $\phi(f+g) = \phi(f)+\phi(g)$, $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$ *y* $\phi(\overline{f}) = \phi(f)^*$*, es decir,* ϕ *es un homomorfismo conjugado.*

b) ϕ *es continuo.*

c) Sea f la función f(x)=x; entonces $\phi(f) = A$.

d) Si $A\psi = \lambda\psi$*, entonces* $\phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$. $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$

e) $\sigma[\phi(f)] = \{f(\lambda)|\lambda \in \sigma(A)\}$*, [Teorema del mapeo espectral].*

f) Si $f \geq 0$*, entonces* $\phi(f) \geq 0$.

g) $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$

Demostración.
Sean A un operador autoadjunto en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y f continua sobre $\sigma(A)$. Por teorema de Stone-Weierstrass, existe sucesión de polinomios $\{P_n\}$ tal que $P_n(\lambda) \to f(\lambda)$ uniformemente sobre $\sigma(A)$. Correspondientemente tenemos una sucesión de operadores autoadjuntos en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\{P_n(A)\} = \{\phi(P_n)\}$, y por Lema 2 tenemos que

$$\|P_n(A) - P_m(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P_n(\lambda) - P_m(\lambda)|$$

Como $P_n(\lambda) \to f(\lambda)$, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que el lado derecho es menor que ε, $\forall m, n > N$. Por tanto $\{P_n(A)\}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que es completo. Definamos $f(A)$ como ese límite, así $P_n(A) \to f(A)$.

Por tanto la función ϕ puede ser extendida a $\mathcal{C}(\sigma(A))$.

Ahora, $f(A)$ depende solamente de f y no de la elección particular de una sucesión de polinomios que converja uniformemente a f, pues, sea $\{\widetilde{P}_n(\lambda)\} = \{\phi(\widetilde{P}_n)\}$ otra sucesión de polinomios tal que $\widetilde{P}_n(\lambda) \to f(\lambda)$ uniformemente sobre $\sigma(A)$. Entonces, por el argumento anterior, existe $\widetilde{f}(A)$ tal que $\widetilde{P}_n(A) \to \widetilde{f}(A)$, basta ver que $\widetilde{f}(A) = f(A)$. Claramente

$$\widetilde{P}_n(\lambda) - P_n(\lambda) \to 0 \qquad\qquad y \qquad\qquad \widetilde{P}_n(A) - P_n(A) \to 0$$

Consecuentemente, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que para $n > N$

$$\|\widetilde{f}(A) - \widetilde{P}(A)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \|\widetilde{P}_n(A) - P_n(A)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \|P_n(A) - f(A)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Así, se sigue que $\|\widetilde{f}(A) - f(A)\| < \varepsilon$, y como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, $\widetilde{f}(A) = f(A)$.

Por tanto, $\phi(f) = f(A)$ se extiende de manera única a $\mathcal{C}(\sigma(A))$.

Las propiedades a), b), c) y d) son válidas para polinomios y por construcción $\phi(f) = f(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, así, $\phi(f)$ es continuo, entonces estas propiedades siguen siendo válidas para funciones continuas.

La propiedad e) se cumple por continuidad aplicando el lema 1.

Para probar f), obsérvese que si $f \geq 0$, entonces $f = g^2$ con g real y $g \in C(\sigma(A))$.

Así, $\phi(f) = \phi(g^2)$ con $\phi(g)$ autoadjunto, entonces $\phi(f) \geq 0$.

Para g), sea $\{P_n(\lambda)\}$ tal que $P_n(\lambda) \to f(\lambda)$. Entonces,

$$\|\phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\lim_{n\to\infty} P_n(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{n\to\infty} \|P_n(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P_n(\lambda)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|P_n\|_\infty = \|\lim_{n\to\infty} P_n\|_\infty = \|f\|_\infty$$

$\square$

Estamos buscando asociar una medida a nuestro operador, la manera en la que se continua desarrollando ésta construcción en la literatura es utilizando el Teorema de Riez-Markov, la representación integral que éste ofrece funciona sobre cualquier espacio normal de Hausdorff, en este trabajo basta tener un resultado sobre conjuntos compactos en los reales.

Es por ello que aquí no se utilizará el teorema general, sino que se probará el teorema de Riesz para intervalos de $\mathbb{R}$ que nos dará una función de variación acotada, se mostrará que, si el operador es positivo, la función es además real y monótona, finalmente está función obtenida se extenderá a una medida de Borel sobre los compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 2 (Teorema de Riesz). *(Ref: [5]4.4-1)*
Sea l funcional lineal y acotado sobre $\mathcal{C}([a,b])$, entonces l puede ser representado por una integral de Riemann-Stieltjes

$$l(f) = \int_a^b f(x)d\mu(x),$$

con μ función de variación acotada sobre $[a,b]$.

Demostración.
Sabemos por el teorema de Hahn-Banach que l tiene una extensión $\tilde{l}$ de $\mathcal{C}([a,b])$ a $\mathcal{B}([a,b])$ el espacio de todas las funciones acotadas sobre $[a,b]$ con la norma del supremo, es decir

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Además, por este mismo teorema, sabemos que el funcional lineal $\tilde{l}$ es acotado y tiene la misma norma que l, $\|l\| = \|\tilde{l}\|$.

Definamos f_x como la función característica del intervalo $[a,x]$ es decir, $f_x = \chi_{[a,x]}$, obviamente $f_x \in \mathcal{B}([a,b])$. Sea la función μ definida como

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x = a \\ \tilde{l}(f_x) & \text{si } x \in (a,b] \end{array} \right. ,$$

Veamos que esta función cumple lo que queremos. Primero observemos que μ es de variación acotada.

Sea $z = |z|e(z)$ un número complejo en su forma polar, donde

$$e(z) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{si } z = 0 \\ e^{iArg(z)} & \text{si } z \neq 0 \end{array} \right. .$$

Si $z \neq 0$, entonces

$$|z| = \frac{z}{e^{iArg(z)}} = ze^{-iArg(z)},$$

por tanto, para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| = z\overline{e(z)}$. Definamos

$$e_j := \overline{e(\mu(x_j) - \mu(x_{j-1}))} \qquad y \qquad f_{x_j} := f_j,$$

entonces para cualquier partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de [a,b] se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(x_j) - \mu(x_{j-1})| = |\tilde{l}(f_1)| + \sum_{j=2}^{n} |\tilde{l}(f_j) - \tilde{l}(f_{j-1})| = e_1\tilde{l}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} e_j[\tilde{l}(f_j) - \tilde{l}(f_{j-1})] =$$

$$= \tilde{l}\left(e_1 f_1 + \sum_{j=2}^{n} e_j[f_j - f_{j-1}]\right) \leq \|\tilde{l}\|\|e_1 f_1 + \sum_{j=2}^{n} e_j[f_j - f_{j-1}]\|,$$

como $|e_j| = 1$, entonces

$$\|e_1 f_1 + \sum_{j=2}^{n} e_j[f_j - f_{j-1}]\| = 1,$$

y de la definición de las f_j se tiene que para cada $x \in [a,b]$ sólo los términos $f_1, f_2 - f_1, \ldots$ son no cero y su norma es uno.

Tomando supremo sobre toda partición de $[a,b]$, se tiene que

$$var(\mu) \leq \|\tilde{l}\| = \|l\|,$$

por tanto μ es de variación acotada sobre $[a,b]$. Para ver que μ cumple la representación integral de l, sea $P_n : a = x_o < x_1 < \cdots < x_n = b$ y definimos la función

$$z_n = f(x_0)f_1 + \sum_{j=2}^{n} f(x_{j-1})[f_j - f_{j-1}],$$

entonces $z_n \in \mathcal{B}([a,b])$ y

$$\tilde{l}(z_n) = f(x_0)\tilde{l}(f_1) + \sum_{j=2}^{n} f(x_{j-1})[\tilde{l}(f_j) - \tilde{l}(f_{j-1})] = f(x_0)\mu(x_1) + \sum_{j=2}^{n} f(x_{j-1})[\mu(x_j) - \mu(x_{j-1})] =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} f(x_{j-1})[\mu(x_j) - \mu(x_{j-1})].$$

Elijamos ahora cualquier sucesión $\{P_n\}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $\eta(P_n) \to 0$, donde

$$\eta(P_n) = max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Cuando $n \to \infty$ la suma de la derecha se aproxima a la integral

$$\int_a^b f(x)d\mu(x).$$

Basta ver que $\tilde{l}(z_n) \to l(f)$. Observemos de la definición de z_n y de f_x que $z_n(a) = f(z) \cdot 1$, ya que la suma en la definición de z_n es cero en $x = a$.
Por tanto $z_n - f(a) = 0$, más aún, si $x_{j-1} \leq x \leq x_j$, $z_n(x) = f(x_{j-1}) \cdot 1$. Esto implica que para esas x, se tiene que

$$|z_n(x) - f(x)| = |f(x_{j-1} - f(x)|.$$

Así, si $\eta(P_n) \to 0$, entonces $\|z_n - f\| \to 0$ pues f es continua en $[a,b]$; y uniformemente continua sobre $[a,b]$, pues $[a,b]$ compacto. Y por continuidad de $\tilde{l}$, $\tilde{l}(z_n) \to \tilde{l}(f)$ pero
$l(f) = \tilde{l}(f)$, pues $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Por tanto

$$l(f) = \int_a^b f(x)d\mu(x).$$

$\square$

Teorema 3. *Si el funcional l es real positivo en $\mathcal{C}[a,b]$, entonces μ es función real monótona.*

Demostración.
Sean $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$. Dado $\epsilon > 0$, definamos la función f_ϵ en $[a,b]$ como sigue

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq t_1 - \epsilon \quad \text{o} \quad t_2 + \epsilon \leq t \leq b \\ \frac{1}{\epsilon}(t - t_1) + 1 & \text{si } t_1 - \epsilon \leq t \leq t_1 \\ \frac{1}{\epsilon}(t_2 - t) + 1 & \text{si } t_2 \leq t \leq t_2 + \epsilon \end{cases}$$

Por definición, $f_\epsilon \in \mathcal{C}[a,b]$ y . Así como l positivo y por teorema de Riez

$$l(f_\epsilon) = \int_a^b f_\epsilon d\mu \geq 0,$$

además se cumple que

$$\int_a^b f_\epsilon d\mu = \int_a^{t_1-\epsilon} f_\epsilon d\mu + \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} f_\epsilon d\mu + \int_{t_1}^{t_2} f_\epsilon d\mu + \int_{t_2}^{t_2+\epsilon} f_\epsilon d\mu + \int_{t_2+\epsilon}^{b} f_\epsilon d\mu$$

como $f_\epsilon(t) = 0$ en $[a, t_1 - \epsilon]$ y $[t_2 + \epsilon, b]$ y $f_\epsilon(t) = 1$ en $[t_1, t_2]$,

$$\int_a^b f_\epsilon d\mu = \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} f_\epsilon d\mu + \int_{t_1}^{t_2} d\mu + \int_{t_2}^{t_2+\epsilon} f_\epsilon d\mu > 0.$$

Pero, $\forall \epsilon > 0$,

$$0 \leq \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} f_\epsilon d\mu \leq (\mu(t_1) - \mu(t_1 - \epsilon)) \max_{t_1-\epsilon \leq t \leq t_1} |f_\epsilon(t)| = \mu(t_1) - \mu(t_1 - \epsilon)$$

y

$$0 \leq \int_{t_2}^{t_2+\epsilon} f_\epsilon d\mu \leq (\mu(t_2 + \epsilon) - \mu(t_2)) \max_{t_2 \leq t \leq t_2+\epsilon} |f_\epsilon(t)| = \mu(t_2 + \epsilon) - \mu(t_2)$$

Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mu = \mu(t_1) - \mu(t_2) > 0$$

Por tanto, μ es monótona.

□

Se puede elegir una función μ que sea continua continua por la derecha, ver [11] Teo. 2.15 pp. 50, por tanto existe una medida de Borel μ_0 definida en $[a,b]$, ver [10] Proposición 12, pp 262,tal que

$$l(f) = \int_a^b f(x) d\mu_0(x).$$

Teorema 4. *Sea l funcional lineal, acotado y positivo sobre $\mathcal{C}(K)$, K compacto en $\mathbb{R}$, entonces existe μ, medida de Borel, tal que*

$$l(f) = \int_K f(x) d\mu$$

Demostración.
Sea $[a,b]$ tal que $K \subseteq [a,b]$. Definamos la funcíon $r : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}(K)$ tal que

$$r(f) = f|_K,$$

r es lineal y acotada pues si $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$r(\alpha f + g)(x) = (\alpha f + g)|_K(x) = \alpha f|_K(x) + g|_K(x) = (\alpha r(f) + r(g))(x)$$

y

$$\|r(f)\| = \|f|_K\| = \sup_{x\in K} |f(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|$$

Definamos ahora $L = l \circ r$, como l, r lineales y acotadas, entonces $L : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ es lineal y acotada. Por lo anterior existe una medidad de Borel μ tal que

$$(l \circ r)(f) = L(f) = \int_a^b f(x) d\mu.$$

Sea $f_1(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$L(f_1) = \int_a^b d\mu = \int_k d\mu + \int_{K^c} d\mu = \mu(K) + \mu(K^c).$$

Dado $H \subset K^c$ cerrado, por lema de Urysohn, ver [10] 8.3 Teorema 5, existe función $\tilde{f} \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $\tilde{f}(x) = 1 \, \forall x \in K$, $\tilde{f}(x) = 0 \, \forall x \in H$ y $0 \leq \tilde{f} \leq 1$. Así

$$L(\tilde{f}) = \int_a^b \tilde{f} d\mu = \int_K d\mu + \int_{K^c\setminus H} \tilde{f} d\mu.$$

Pero, $\|\tilde{f}\| \leq 1$, y como toda medida de Borel es regular, para cualquier ϵ podemos escoger H tal que

$$\left| \int_{K^c\setminus H} d\mu \right| \leq \mu(K^c\setminus H) < \epsilon,$$

Por tanto,

$$L(\tilde{f}) < \int_K d\mu + \epsilon = \mu(K) + \epsilon,$$

pero como $L(\tilde{f}) = L(f_1)$, entonces $\mu(K) + \mu(K^c) < \mu(K) + \epsilon$, es decir $\mu(K^c) < \epsilon$, esto para todo ϵ, así $\mu(K^c) = 0$.

Ahora, sea $f \in \mathcal{C}(K)$, por Teorema de Tietze, ver [10] 8.3 Teorema 6, existe $f_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $f = r(f_2)$. Por tanto

$$l(f) = (l \circ r)(f_2) = Lf_2 = \int_a^b f_2 d\mu = \int_K f_2 d\mu = \int_K f d\mu.$$

$\square$

Pasemos a aplicar estos resultados. Sea A un operador acotado y autoadjunto sobre $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sea $\psi \in \mathcal{H}$, entonces $f \to (\psi, f(A)\psi)$ es un funcional lineal positivo sobre $\mathcal{C}(\sigma(A))$. Es positiva por el inciso f) del teorema y es continua pues

$$|(\psi, f(A)\psi)|^2 \leq \|f(A)\|\|\psi\|^2 \leq \|f\|_\infty \|\psi\|^2$$

También por continuidad de f, $\sigma(f(A))$ es compacto.

Así, por el resultado anterior, existe una única medida μ_ψ sobre el conjunto compacto $\sigma(A)$ con

$$(\psi, f(A)\psi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi.$$

Obsérvese que el lado derecho de la igualdad tiene sentido incluso cuando f no es continua, solo medible. Entonces podemos extender nuestro funcional a una función medible arbitraria. Así, μ_ψ nos permitira extender el teorema 1 a $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, las funciones Borel medibles acotadas sobre $\mathbb{R}$.

Dado $g \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, definimos $g(A)$, de manera que

$$(\psi, g(A)\psi) = \int_{\sigma(A)} g(\lambda) d\mu_\psi(\lambda).$$

La identidad de polarización nos permite recuperar $(\varphi, g(A)\psi)$ desde la propuesta de $(\psi, g(A)\psi)$ de la siguiente manera, para cualquier $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ definimos

$$(\varphi, g(A)\psi) : \frac{1}{4}[(\varphi+\psi, g(A)(\varphi+\psi)) - (\varphi-\psi, g(A)(\varphi-\psi)) + i(\varphi+i\psi, g(A)(\varphi+i\psi)) - i(\psi-i\varphi, g(A)(\varphi-i\psi))]$$

Dado g y ψ, $\varphi \to (\varphi, g(A)\psi)$ es lineal y continuo, y luego, por Riesz, ésto define un único operador $g(A)$.

Ejemplo 1. Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ podemos definir $\chi_I(T)$ por

$$(\psi, \chi_I(T)\psi) = \int_{\sigma(T)} \chi_I(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) = \int_I d\mu_\psi(\lambda) = \mu_\psi(I).$$

Definición 2. *Un vector $\psi \in \mathcal{H}$ es llamado vector cíclico para A si combinaciones lineales finitas de $\{A^n\psi\}_{n=1}^{\infty}$ son densas en $\mathcal{H}$.*

Probaremos el siguiente lema que nos dirá que A es unitariamente equivalente al operador multiplicación por la identidad.

Lema 3. *Sea A un operador acotado y autoadjunto con vector cíclico ψ. Entonces, existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$ con*

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

La igualdad tomada en el sentido de los elementos de $L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$.

Demostración.
Por hipótesis, como ψ es cíclico para A, se tiene que $\overline{\{f(A)\psi | f \in \mathcal{C}(\sigma(A))\}} = \mathcal{H}$.

Definimos U sobre $\mathcal{H}$ por $Uf(A)\psi = f$, $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ y luego extendiendo a todo $\mathcal{H}$ por aproximación.

El mapeo es unitario pues

$$\|f(A)\psi\|^2 = (\psi, f(A)^* f(A)\psi) = (\psi, |f(A)|^2\psi) = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) = \|f\|_2^2.$$

Ahora, como $\mathcal{C}(\sigma(A))$ es denso en L^2, entonces $RanU = L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$, es decir, el mapeo es sobre.

Finalmente, si $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, entonces

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = (UAf(A)\psi)(\lambda)$$

Sea $g(x) = xf(x)$, entonces

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = (Ug(A)\psi)(\lambda) = g(\lambda) = \lambda f(\lambda),$$

y por continuidad, esto se extiende de $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ a $f \in L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$.

$\square$

El problema que se puede presentar es que A no tenga un vector ψ cíclico. Entonces para extender este lema tendríamos que saber que A tiene una familia de subespacios invariantes que generen a $\mathcal{H}$ tal que A es cíclico sobre cada subespacio. Eso es lo que dice el siguiente teorema. Definamos primero al subespacio $\mathcal{H}_\psi = \overline{\{f(A)\psi | f continua\}}$. Así, ψ es vector cíclico para A en $\mathcal{H}_\psi$. Tenemos el siguiente lema:

Lema 4. *Si $\phi \perp \mathcal{H}_\psi$, entonces $\mathcal{H}_\phi \perp \mathcal{H}_\psi$*

Demostración.
Si $\phi \in \mathcal{H}_\psi^\perp$ y $\zeta \in \mathcal{H}_\psi$, entonces

$$(f(A)\phi, \zeta) = (\phi, f(A)^*\zeta) = (\phi, \overline{f}(A)\zeta) = 0,$$

pues $\overline{f}(A)\zeta \in \mathcal{H}_\psi$, por tanto, $f(A)\phi \in (\mathcal{H}_\psi)^\perp$, por continuidad del producto interno,$\mathcal{H}_\phi \perp \mathcal{H}_\psi$.
□

Teorema 5. *Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. Entonces existe una familia $\{\psi_j\}_{j=1}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ o $N = \infty$ tal que para toda $j \neq k$, $\mathcal{H}_{\psi_j} \perp \mathcal{H}_{\psi_k}$ y*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^N \mathcal{H}_{\psi_j}$$

Demostración.
Como $\mathcal{H}$ es separable, existe $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ una base ortonormal para $\mathcal{H}$. Sean $\psi_1 = \eta_1$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{\psi_1}$ y P_1 la proyección sobre $\mathcal{H}_1^\perp$. Si para todo j, $P_1\eta_j$=0, entonces $N = 1$ y terminamos. Si no, sea k_1 el menor j tal que $P_1\eta_j \neq 0$ y sea

$$\psi_2 = \frac{P_1\eta_{k_1}}{\|P_1\eta_{k_1}\|}.$$

Por el lema, $\mathcal{H}_{\psi_2} \perp \mathcal{H}_{\psi_1}$, y , por construcción $\{\eta_j\}_{j=1}^{k_1} \subset \mathcal{H}_{\psi_1} \oplus \mathcal{H}_{\psi_2}$.

Procediendo inductivamente, esto es, dados $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-1}$, sea P_{m-1} la proyección sobre $[\bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathcal{H}_j]^\perp$. Si $P_{m-1} = 0$, tomamos $N = m-1$. Si no, sea k_{m-1} el primer j tal que $P_{m-1}\eta_j \neq 0$ y definimos

$$\psi_m = \frac{P_{m-1}\eta_{k_{m-1}}}{\|P_{m-1}\eta_{k_{m-1}}\|}.$$

Entonces por lema, $\mathcal{H}_{\psi_m} \subset (\mathcal{H}_{\psi_j})^\perp$, para $j = 1, \ldots, m-1$. Como $\{\eta_j\}_{j=1}^m \subset \bigoplus_{q=1}^m \mathcal{H}_{\psi_q}$, vemos que $\bigoplus_{q=1}^N \mathcal{H}_{\psi_q} = \mathcal{H}$.

□

Teorema 6. *[Teorema espectral] Sea A un operador acotado y autoadjunto sobre $\mathcal{H}$, un espacio de Hilbert separable. Entonces, existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ sobre $\sigma(A)$ y un operador unitario*

$$U : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

tal que

$$(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda)$$

donde escribimos un elemento $\psi \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ como una N-upla $< \psi_1(\lambda), \ldots, \psi_N(\lambda) >$. Esta realización de A es llamada una representación espectral.

Demostración.
La demostración es inmediata de los dos lemas anteriores.

□

Ejemplo 2[Caso de dimensión finita]
Sea $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, y sean

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j \qquad f(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) P_j.$$

Esto siempre puede hacerse pues todo operador autoadjunto sobre un espacio vectorial de dimensión finíta es necesariamente diagonalizable.

Fijemos $\psi \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int f d\mu_\psi = (\psi, f(A)\psi) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)(\psi, P_j\psi) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\|P_j\psi\|^2.$$

Así, para todo f se tiene que

$$\int f d\mu_\psi = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\|P_j\psi\|^2$$

Usando el Lema 3 podemos concluir que

$$\mu_\psi = \sum_{j=1}^{k} \|P_j\psi\|^2 \delta(\lambda - \lambda_j).$$

Es decir, la medida espectral es una medida de conteo, donde cada λ_j tiene peso de acuerdo a la norma de el vector $P_j\psi$ correspondiente.

□

Todo lo hecho anteriormente tiene la limitación de estar asociado a operadores acotados.

3. Representación Integral de Herglotz

El teorema de representación integral de Herglotz, al igual que el teorema de Riesz-Markov, es una herramienta muy útil para la construcción de medidas no negativas. Pero, a diferencia de la prueba del teorema espectral que construimos, en la prueba que a continuación se presentará el operador autoadjunto que se analiza no necesita ser acotado.

La idea principal será dado un operador A considerar su resolvente $R_z(A)$ y probar que la función $(R_z(A)\psi, \psi)$ cumple las condiciones del teorema de representación de Herglotz, y de esta manera obtener una medida espectral correspondiente a ψ, μ_ψ.

Empezaremos enunciando y probando el teorema de representación de Herglotz con herramientas básicas del análisis complejo. La demostración que aquí se presentará es un resultado clásico del siglo XIX.

Definición 3. *Una función f es llamada de Herglotz o de Nevanlinna si satisface las siguientes condiciones:*

i) *f es analítica en $\mathbb{C}_+$,*

ii) *si $Im(z) > 0$, entonces $Im(f(z)) \geq 0$.*

El siguiente teorema es una herramienta del análisis complejo, la cual nos da una correspondencia uno a uno entre las medidas finitas no negativas sobre $\mathbb{R}$ y ciertas funciones analíticas sobre el plano superior.

Teorema 7 (Representación de Herglotz)**.** *(Ref: [14] Teorema 3.20)*
Supongamos que f es una función de Herglotz que satisface

$$|f(z)| \leq \frac{M}{Im(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

Entonces existe una función μ, que satisface $\mu(\mathbb{R}) \leq M$, tal que

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu(\lambda).$$

Demostración.
Dados $0 < \epsilon < y$ y $z = x + iy$ fijo, definamos

$$\Gamma_1 = \{x+i\epsilon+\lambda | -r \leq \lambda \leq r\} \quad , \quad \Gamma_2 = \{x+i\epsilon+re^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq \pi\} \quad y \quad \Gamma = \Gamma_1+\Gamma_2$$

para algún $r > y$. Entonces z está dentro de Γ y $\overline{z} + 2i\epsilon$ esta fuera de Γ. Así por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \overline{z} - 2i\epsilon} \right] f(\zeta) d\zeta.$$

A lo largo de Γ_1 tenemos que

$$\zeta - z = x + i\epsilon + \lambda - x - iy = \lambda - i(y - \epsilon)$$

y

$$\zeta - \overline{z} - 2i\epsilon = x + i\epsilon + \lambda - x + iy - 2i\epsilon = \lambda + i(y - \epsilon),$$

entonces la integral a lo largo de Γ_1 es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} \left[\frac{1}{\lambda - i(y - \epsilon)} - \frac{1}{\lambda + i(y - \epsilon)} \right] f(x + i\epsilon + \lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} \frac{y - \epsilon}{\lambda^2 + (y - \epsilon)^2} f(x + i\epsilon + \lambda) d\lambda.$$

A lo largo de Γ_2 tenemos que

$$\zeta - z = re^{i\theta} - i(y-\epsilon) \qquad y \qquad \zeta - \overline{z} - 2i\epsilon = re^{i\theta} + y(y-\epsilon),$$

y, procediendo de manera análoga, la integral a lo largo de Γ_2 es

$$\frac{i}{\pi}\int_0^\pi \frac{y-\epsilon}{r^2e^{2i\theta}+(y-\epsilon)^2} f(x+i\epsilon+re^{i\theta})d\theta$$

Como

$$|f(x+i\epsilon+re^{i\theta})| \leq \frac{M}{\epsilon} \qquad y \qquad \frac{y-\epsilon}{r^2e^{2i\theta}+(y-\epsilon)^2} \leq \frac{c}{r^2-c^2},$$

para alguna constante c, entonces

$$\left|\frac{i}{\pi}\int_0^\pi \frac{y-\epsilon}{r^2e^{2i\theta}+(y-\epsilon)^2} f(x+i\epsilon+re^{i\theta})d\theta\right| \leq \left|\frac{i}{\pi}\frac{c}{r^2-c^2}\frac{M}{\epsilon}\int_0^\pi d\theta\right| = \frac{1}{\pi}\frac{c}{r^2-c^2}\frac{M}{\epsilon}\pi = \frac{cM}{\epsilon(r^2-c^2)}.$$

Así, la integral sobre Γ_2 tiende a cero cuando r tiende a ∞, obteniendo así que

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\epsilon}{(\lambda-x)^2+(y-\epsilon)^2} f(\lambda+i\epsilon)d\lambda.$$

Si definimos $w(z) = Im(f(z))$, entonces para $0 < \epsilon < y$ tenemos que

$$w(z) = \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(\lambda)w_\epsilon(\lambda)d\lambda,$$

con

$$\phi_\epsilon(\lambda) = \frac{y-\epsilon}{(\lambda-x)^2+(y-\epsilon)^2} \qquad y \qquad w_\epsilon = \frac{1}{\pi}w(\lambda+i\epsilon).$$

Usando la cota de nuestra hipótesis tenemos que $|yw(z)| \leq |Im(z)f(z)| \leq M$, esto implica que, para $0 < \epsilon < y$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{(y-\epsilon)^2}{(\lambda-x)^2+(y-\epsilon)^2} w_\epsilon(\lambda)d\lambda\right| = \left|(y-\epsilon)\int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(\lambda)w_\epsilon(\lambda)d\lambda\right| = |(y-\epsilon)w(z)| \leq M$$

Además, si y tiende a ∞, se tiene que

$$\frac{(y-\epsilon)^2}{(\lambda-x)^2+(y-\epsilon)^2} w_\epsilon(\lambda) \longrightarrow w_\epsilon(\lambda)$$

y como $w_\epsilon(\lambda)$ es no negativa, entonces $(y-\epsilon)\phi_\epsilon(\lambda)w_\epsilon(\lambda)$ es no negativa y por Lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} w_\epsilon(\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{y\to\infty}(y-\epsilon)\phi_\epsilon(\lambda)w_\epsilon(\lambda)d\lambda \leq \lim_{y\to\infty}\int (y-\epsilon)\psi_\epsilon(\lambda)w_\epsilon(\lambda)d\lambda \leq M,$$

Por tanto, para $0 < \epsilon < y$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} w_\epsilon(\lambda)d\lambda \leq M.$$

Para cada $y > 0$ fijo, tenemos que

$$|\phi_\epsilon(y) - \phi_0(y)| = \left| \frac{y-\epsilon}{(\lambda - x)^2 + (y-\epsilon)^2} - \frac{y}{(\lambda - x)^2 - y^2} \right| \leq \epsilon \left(\frac{1}{y(y-\epsilon)} + \frac{1}{y^2} \right),$$

además si $\epsilon \to 0$ se tiene que

$$\epsilon \left(\frac{1}{y(y-\epsilon)} + \frac{1}{y^2} \right) \longrightarrow 0$$

Así, por el teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} (\phi_\epsilon(\lambda) - \phi_0(\lambda)) w_\epsilon(\lambda) d\lambda = 0,$$

y entonces

$$\left| w(z) - \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) w_\epsilon(\lambda) d\lambda \right| \leq \left| w(z) - \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(\lambda) w_\epsilon(\lambda) d\lambda \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} (\phi_\epsilon(\lambda) - \phi_0(\lambda)) w_\epsilon(\lambda) d\lambda \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (\phi_\epsilon(\lambda) - \phi_0(\lambda)) w_\epsilon(\lambda) d\lambda \right| \longrightarrow 0 \qquad \text{si } \epsilon \to 0$$

Por tanto

$$w(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) w_\epsilon(\lambda) d\lambda$$

Definamos ahora

$$\mu_\epsilon(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} w_\epsilon(x) dx.$$

Observemos que las funciones μ_ϵ así definidas son no decrecientes y acotadas, $0 \leq \mu_\epsilon(\lambda) \leq M$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Construimos una sucesión no negativa $\{\epsilon_n\}$ de tal manera que $\{\mu_{\epsilon_n}(\lambda)\}$ es convergente para todo racional λ. Si fijamos

$$\mu(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \mu_{\epsilon_n}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Entonces μ es no decreciente. Extendemos ahora μ a una función $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiendo

$$\mu(\lambda) = inf\{\mu(s) | s > \lambda, \, s \in \mathbb{Q}\}, \qquad \lambda \in \mathbb{Q},$$

entonces μ es obviamente no decreciente y $\mu(\mathbb{R}) \leq M$ Nos enfocaremos ahora en ver que esta función μ cumple las condiciones del teorema.

Empezamos mostrando que

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\mu(\lambda), \qquad z \in \mathbb{C}_+$$

como una integral de Riemman-Stieltjes. Primero, notemos que

$$w(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) w_\epsilon(\lambda) d\lambda = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\mu_\epsilon(\lambda) d\lambda = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi_0 d\mu_\epsilon(\lambda).$$

Probaremos ahora que como $\mu_{\epsilon_n}(\lambda) \to \mu_\epsilon(\lambda)$ cuando $n\to\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) d\mu_{\epsilon_n}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) d\mu(\lambda).$$

se mostrará la igualdad aproximando esta integral de Riemman-Stieltjes por sumas de Riemman, para esto las particiones P de $\mathbb{R}$ será suficiente tomarlas con extremos en los racionales. Para cada partición P construida de ésta manera y para cada $z = x + iy$ fijo definamos U_P y L_P como las sumas superior e inferior correspondiente a la partición P de la integral

$$J = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) d\mu(\lambda)$$

y análogamente $U_{P,n}$ y $L_{P,n}$ las sumas superior e inferior respectivamente de la integral

$$J_n = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) d\mu_{\epsilon_n}(\lambda).$$

Para toda P partición se cumple que $U_{P,n} \to U_P$ y $L_{P,n} \to L_P$. Para todo $\delta > 0$, existe una partición P para la cual $U_p - L_p \leq \frac{\delta}{2}$. Para esta P existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$

$$|U_{P,n} - U_p| \leq \frac{\delta}{2} \qquad y \qquad |L_{P,n} - L_p| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Pero $L_{P,n} \leq J_n \leq U_{P,n}$ y $L_P \leq J \leq U_P$, entonces para $n \geq n_0$ se tiene que $|J - J_n| \leq \delta$ y por tanto $J_n \to J$ cuando $n\to\infty$.

Con esto queda probado que para todo $z \in \mathbb{C}_+$

$$Im(f) = v(z) = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) d\mu(\lambda).$$

Por otro lado,

$$Im\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} = Im\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda - \overline{z}}{|\lambda - z|^2} d\mu(\lambda) = Im\int_{\mathbb{R}} \frac{(\lambda - x) + iy}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\mu(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\lambda) d\mu(\lambda)$$

Como f y $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$ son analíticas en $\mathbb{C}_+$ y tienen la misma parte imaginaria se sigue que

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} + C$$

Para algún $C \in \mathbb{R}$, pero como $|f(z)| \leq M/|Im(z)|$ y

$$\left| Im(z)\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} \right| \leq \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda) \leq M$$

para $z \in \mathbb{C}_+$ tenemos que

$$|CIm(z)| = \left| \left(f(z) - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} \right) Im(z) \right| \leq |f(z)Im(z)| + \left| Im(z) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} \right|$$
$$\leq M + M = 2M$$

y así $C = 0$. Por tanto,

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$$

□

Obsérvese que, si $z = x + iy$, como $\mu(\lambda)$ toma valores reales

$$Im(f(z)) = \int_{\mathbb{R}} Im\left(\frac{1}{\lambda - z}\right) d\mu(\lambda) = y \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2} = y \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|^2}$$

Aplicando esto, obtenemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, Im(f(-i\lambda))) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \left[\lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda(-i-1)|^2} \right] = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{2|\lambda|^2} = \mu(\mathbb{R}).$$

Demostraremos el siguiente teorema con el cual veremos que no sólo sabemos que existe la función $\mu(\lambda)$ si no que además podemos construirla de manera única desde $f(z)$ usando la fórmula de inversión de Stieltjes.

Teorema 8. *La medida γ es única y puede ser reconstruida vía la fórmula de inversión de Stieltjes*

$$\gamma(t) = \lim_{\delta \to 0_+} \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} Im(f(s + i\epsilon))ds.$$

Demostración
Aplicando el teorema de Fubini y la observación anterior tenemos que

$$Imf(s + i\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{r} \frac{\epsilon}{(u - s)^2 + \epsilon^2} ds d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[Arctan \frac{u - r}{\epsilon} + \frac{\pi}{2} \right] d\mu(u)$$

Ahora, como $|Arctan\frac{u-r}{\epsilon} + \frac{\pi}{2}| \leq \pi$, $\forall r \in \mathbb{R}$, además, cuando $\epsilon \to 0$ tenemos que

$$Arctan\tfrac{u-r}{\epsilon} + \tfrac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \pi & \text{si } r < u \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } r = u \\ 0 & \text{si } r > u \end{cases}$$

Entonces, por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{-\infty}^{r} Imf(s + i\epsilon)ds = \int_{-\infty}^{r} 0 d\mu(u) + \int_{r}^{r} \frac{\pi}{2} d\mu(u) + \int_{r}^{\infty} \pi d\mu(u) =$$

$$= \pi\gamma(r+) + \frac{\pi}{2}[\gamma(r) - \gamma(r-)] = \frac{\pi}{2}[\gamma(r) - \gamma(r-)]$$

□

Con esta herramienta probada podemos continuar con nuestro problema, sean $A : D(A) \to \mathcal{H}$ un operador autoadjunto densamente definido y $R_z(A)$ el resolvente de A, es decir

$$R_z(A) = (A - zI)^{-1},$$

y consideraremos la función $(R_z(A)\psi, \psi)$, $\psi \in \mathcal{H}$. Veremos que esta, en efecto, es una función de Herglotz para $z \in \rho(A)$.

Lema 5. *$R_z(A)$ es analítica.*

Demostración.
Empecemos con el siguiente cálculo, sea $\lambda_0 \in \rho(A)$

$$\frac{1}{\lambda - A} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + (\lambda_0 - A)} = \left(\frac{1}{\lambda_0 - A}\right)\frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - A}} = \left(\frac{1}{\lambda_0 - T}\right)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - A}\right)^n\right]$$

esto sugiere que definamos

$$\tilde{R}_z(A) = R_{z_0}(A)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n[R_{z_0}(A)]^n\right\},$$

como $\|[R_{z_0}(A)]^n\| \le \|R_{z_0}(A)\|^n$, la serie converge en la topología uniforme de operadores si $|z - z_0| < \|R_{z_0}(A)\|^{-1}$.

Para tal z, $\tilde{R}_z(A)$ esta bien definida y se verifica que

$$(A - zI)\tilde{R}_z(A) = \tilde{R}_z(A)(A - zI).$$

Esto prueba que $z \in \rho(A)$ si $|z - z_0| < 1/\|R_{z_0}\|$ y que $\tilde{R}_z(A) = R_z(A)$. Así $\rho(A)$ es abierto. Como $R_z(A)$ tiene expansión en serie, es analítica.

□

Lema 6.

$$\|R_z\| \le \frac{1}{|Im(z)|}$$

Demostración.
Sea $z = x + iy$, como A es autoadjunto, tenemos que

$$\|(A - zI)\psi\|^2 = \|(A - xI)\psi\|^2 + y^2\|\psi\|^2 \ge y^2\|\psi\|^2,$$

entonces $z \in \rho(A)$, es decir, existe $(A-zI)^{-1}$, tomando $\psi = (A-zI)^{-1}\varphi$ con $y \neq 0$, obtenemos que

$$\|(A-zI)^{-1}\varphi\| \leq \frac{1}{|y|}\|\varphi\|$$

y tomando supremos sobre todo $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\varphi\| = 1$, se tiene que

$$\|R_z(A)\| \leq \frac{1}{y} = \frac{1}{Im(z)}.$$

□

Finalmente observemos que $(R_z(A)\psi, \psi)$ es una función de Herglotz.

Lema 7. *Si A es autoadjunto, entonces $(R_z(A)\psi, \psi)$ es de Herglotz.*

Demostración.
Claramente $(R_z(A)\psi, \psi)$ es holomorfa para $z \in \rho(A)$ por serlo $R_z(A)$. Por otro lado

$$R_z(A)^* = ((A-zI)^{-1})^* = ((A-zI)^*)^{-1} = (A^* - \overline{z}I)^{-1} = R_{\overline{z}}(A)$$

por lo que $R_{\overline{z}}(A)\psi, \psi) = \overline{(R_z(A)\psi, \psi)}$.

Ahora, usando el lema anterior y por desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$|(R_z(A)\psi, \psi)| \leq \|\psi\|\|R_z(A)\psi\| \leq \|\psi\|^2\|R_z(A)\| \leq \frac{\|\psi\|^2}{|Im(z)|}.$$

Por último, por la primera fórmula del resolvente llegamos al siguiente resultado

$$\begin{aligned}
Im((R_z(A)\psi, \psi)) &= -i((R_z(A)\psi, \psi) - \overline{(R_z(A)\psi, \psi)} \\
&= -i((R_z(A)\psi, \psi) - (R_{\overline{z}}(A)\psi, \psi)) \\
&= -i(R_z(A)\psi - R_{\overline{z}}(A)\psi, \psi) \\
&= -i(z-\overline{z})(R_z(A)R_{\overline{z}}(A)\psi, \psi) \\
&= Im(z)(R_z(A)\psi, R_z(A)\psi) = Im(z)\|R_z\psi\|^2.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $(R_z(A)\psi, \psi)$ lleva el semiplano superior en si mismo y por lo tanto es una función de Herglotz.

□

Entonces $(R_z(A)\psi, \psi)$ cumple las hipótesis del teorema de representación de Herglotz, por tanto existe una única medida correspondiente $\mu_\psi(\lambda)$ dada por la fórmula de inversión de

Stieltjes. Esta medida es la medida espectral correspondiente a ψ y satisface

$$(R_z(A)\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} d\mu_\psi(t).$$

Aplicando la identidad de polarización obtenemos para cualquier $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ una medida complejo valuada sobre $\mathbb{R}$, $\mu_{\psi,\phi}$ definida por

$$\mu_{\psi,\phi} = \frac{1}{4}(\mu_{\psi+\phi} - \mu_{\psi-\phi} + i\mu_{\psi+i\phi} - i\mu_{\psi-i\phi}),$$

tal que

$$(R_z(A)\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} d\mu_{\psi,\phi}(t).$$

Como μ_ψ es única para cada ψ, entonces $\mu_{\psi,\phi}$ es única. Además $\mu_{\psi,\phi}$ depende sesquilinealmente de ψ y ϕ y por definición $\mu_{\psi,\phi} = \overline{\mu_{\phi,\psi}}$. Como $\mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$, podemos recuperar de la medida espectral $\mu_{\psi,\phi}$:

$$(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\psi,\phi}(t)$$

Teorema 9 (Teorema Espectral)**.** *Sea $\psi, \phi \in \mathcal{H}$, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ operador autoadjunto densamente definido y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ función Borel medible acotada, entonces existe un operador $f(A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que*

$$(f(A)\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\psi,\phi}(t)$$

Demostración.
Definamos la siguiente forma

$$B(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\psi,\phi}(t).$$

Como f es acotada,

$$|B(\psi, \phi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\psi,\phi}(t) \right| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \left| \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\psi,\phi}(t) \right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)||(\psi, \phi)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\|\psi\|\|\phi\|,$$

y como $\mu_{\psi,\phi}$ depende sesquilinealmente de ψ y ϕ, $B(\psi, \phi)$ es lineal para ψ y conjugado lineal para ϕ, es decir, es una forma sesquilineal. Por tanto, por el teorema de representación de Riesz, existe un operador lineal y continuo, llamemoslo $f(A)$, tal que $B(\psi, \phi) = (f(A)\psi, \phi)$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\psi,\phi}(t) = (f(A)\psi, \phi)$$

□

Así, por ejemplo $f(A)$ es la identidad cuando $f(t) = 1$ y $f(A) = R_z(A)$ cuando $f(t) = 1/(z-t)$.

Hemos creado un mapeo $f \to f(A)$ de las funciones Borel medibles acotadas en $\mathbb{R}$ a $L(\mathcal{H})$. A diferencia de la forma en que se probó el teorema espectral en la primera parte, esta manera de probarlo fué posible sin haber desarrollado un cálculo funcional previo, sin embargo, es posible, a apartir de este teorema, desarrollar un cálculo funcional inclusive para operadores no necesariamente acotados [13].

Referencias

[1] J. L. Doob, B. O. Koopman, *On analytic functions with positive imaginary parts*, AMS, Vol. 40, Número 8: 601-605. 1934.

[2] I.M. Gelfand, M.A. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space*, Math. Sbornik 12(2): 192-217. 1943.

[3] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Quation de Schrdinger avec champ magntique et quation de Harper, Schrdinger operators*, Lecture notes in physics, Vol. 345,118-197. 1989.

[4] D. Hilbert, *Grundzüge einer allegeiminem Theorie der lenearen Intergralgleichungen*, Gött. Nachr, Vol. IV. 1906.

[5] E. Kreyszig, *Introductory funtional analysis with aplications*, Wiley Classics, Windsor, 1989.

[6] B. A. Lengyel, M. H. Stone, *Elementary proof of the spectral theorem*, Annals of Mathematics 37: 853-864. 1936.

[7] C. R. Oliveira, *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, Birkhauser, Alemania 2009

[8] M. Reed, B. Simon , *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, San Diego,CA, 1980.

[9] F. Riesz, *Les systemes d'equations a une infinite d'inconnues*, Gauther-Villars, Paris. 1913.

[10] H.L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan, Standford,Segunda edición.

[11] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, AMS, India, 2002.

[12] B. Simon, *A Comprehensive Course in Analysis, Part 4*, AMS,USA, 2015.

[13] T. Tao, *The spectral theorem and its converses for unbounded symmetric operators*, Recuperado de: **https://terrytao.wordpress.com/2011/12/20/**

[14] G. Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics*, AMS, 1970.

[15] F. William, J. Donoghue, *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.