



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS HIDRODINÁMICO Y BIOMECÁNICO DE LA PATADA DE DELFÍN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:

REYNA GUADALUPE RAMÍREZ DE LA TORRE

TUTOR PRINCIPAL:

DRA. CATALINA ELIZABETH STERN FORGACH  
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. FRANCISCO JAVIER MANDUJANO SÁNCHEZ  
FACULTAD DE CIENCIAS

DR. JOSÉ ROBERTO ZENIT CAMACHO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. AGOSTO 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **Sistema de Velocimetría para Análisis de Nado.**

## **Resumen**

En este trabajo se implementó la técnica de PIV (Velocimetría por Imágenes de Partículas) usando microburbujas como trazadores de aire, para analizar el flujo que se genera alrededor de un nadador. Se calculan campos de velocidades, campos de presión y fuerzas del flujo a partir de varios videos. Se comparan estos resultados con los obtenidos del análisis biomecánico del nadador. Además, se comparan con los resultados obtenidos durante la tesis de licenciatura. Se encontró que la velocidad del fluido dentro del volumen de control es consistente con la velocidad promedio del nadador. También, se encontró consistencia entre los análisis realizados en ambas tesis con ligeras diferencias principalmente en la velocidad promedio del fluido y en las estructuras que intervienen en el arrastre del nadador. Se requieren mediciones con más nadadores para comprobar la utilidad de esta técnica.

## Dedicatoria

Mamá y Papá, otro logro más cumplido gracias a todo su cariño y apoyo. Gracias por estar ahí siempre.

César y Pepe, gané la carrera por el título de maestría, gracias por dejarme ganar.

Raúl Porta, hoy más que nunca agradezco todas tus enseñanzas y apoyo, tu también me enseñaste a confiar en mí y a perseverar sin importar las adversidades. Siempre estás en mi mente y en mi corazón.

## Agradecimientos

Quiero agradecer al PAPIIT IN117712 y al Laboratorio de Acústica del Departamento de Física, Facultad de Ciencias por el apoyo dado para la realización de este trabajo.

Agradezco también al CONACyT por proporcionar el apoyo económico durante la realización de mis estudios de posgrado y durante la realización de esta tesis.

Por otro lado, quiero agradecer a la Coordinación de la Alberca Olímpica de Ciudad Universitaria y a la Dirección General de Actividades Deportivas y Recreativas por permitirnos el uso de las instalaciones de dicha alberca para realizar los experimentos.

También quiero agradecer al Dr. Roberto Zenit y el Dr. Franciso Mandujano, miembros de mi comité tutor, por su apoyo y consejo durante mis estudios de posgrado y la realización de mi tesis.

Finalmente, quiero agradecer a la Dra. Catalina Stern, al Dr. Ricardo Méndez, a la M. en C. Mariana Centeno y la Fís. Carolina Vargas por su colaboración en la realización de todo el trabajo.

# Índice general

<b>1. Motivación y Antecedentes</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	3
<b>2. Conceptos Básicos</b>	<b>10</b>
2.1. Mecánica de Fluidos . . . . .	10
2.2. Velocimetría por imágenes de partículas (PIV) . . . . .	15
2.2.1. Cálculo del campo de Presión . . . . .	16
2.2.2. Análisis de un Volumen de control . . . . .	17
2.3. Biomecánica . . . . .	18
2.4. Biomecánica del nado . . . . .	22
<b>3. Metodología experimental</b>	<b>26</b>
3.1. Dispositivo experimental . . . . .	27
3.2. Análisis . . . . .	28
<b>4. Resultados</b>	<b>32</b>
4.1. Resultados del análisis biomecánico . . . . .	32
4.2. Resultados del análisis del flujo . . . . .	33
<b>5. Discusión</b>	<b>38</b>
5.1. Análisis del flujo . . . . .	38
5.2. Análisis conjunto . . . . .	40
<b>6. Conclusiones</b>	<b>44</b>

<b>Apéndices</b>	<b>47</b>
<b>A. Sensor de fuerza para natación</b>	<b>47</b>
<b>B. Programas utilizados para el análisis</b>	<b>53</b>
B.1. Programa para calcular la vorticidad . . . . .	53
B.2. Programa para graficar los campos de presión . . . . .	54
B.3. Programa para calcular las velocidades y fuerzas en el volumen de control . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# Motivación y Antecedentes

## 1.1. Motivación

La tecnología deportiva, basada en estudios científicos fundamentados, está cada vez más desarrollada y es solicitada por equipos de alto rendimiento y empresas internacionales. Aunque en algún momento estas tecnologías fueron utilizadas solamente por deportistas de alto rendimiento, actualmente son aprovechadas en la práctica cotidiana del deporte, en el diseño de ropa y zapatos para el uso diario y como apoyo a personas de la tercera edad o con alguna discapacidad.

Algunos resultados y herramientas se aprovechan también en otras ramas de la ciencia. El deporte puede producir actualmente ganancias millonarias, tanto a los deportistas como a los productores de eventos deportivos y, desde luego, a las compañías que venden equipo y ropa deportiva. La inversión para la investigación en el deporte es muy alta en los países que más se destacan en los récords deportivos. En particular, en el caso de la natación, el estudio del gesto motor del nadador y la creación de aditamentos que mejoran su desempeño han sido cómplices de la caída de los récords mundiales durante los últimos 20 años.



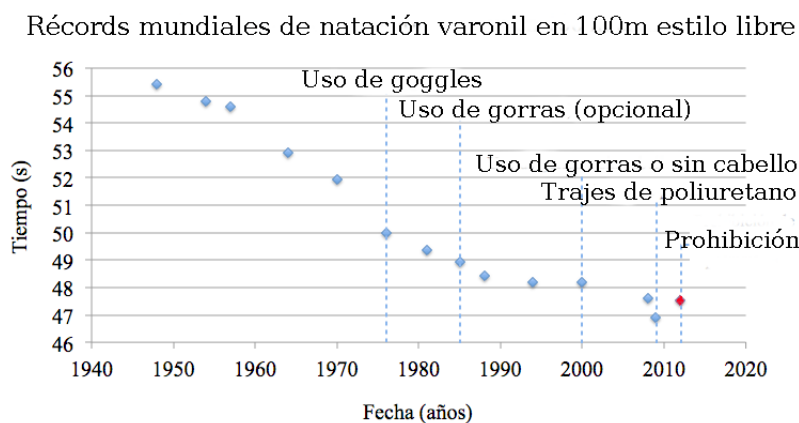


Figura 1.1: Se observa que los récords mundiales disminuyen significativamente con el uso de aditamentos. El caso más notorio fue el uso de los trajes de poliuretano en 2009 y su posterior prohibición. Datos obtenidos de los archivos de la FINA [1]

En la Figura 1.1, se puede ver una gráfica de los récords mundiales para la prueba de los 100 metros estilo libre varonil [1]. Se señalan los momentos en que se introdujeron nuevas tecnologías en el deporte. Según los expertos [2], la tendencia de los récords mundiales de natación es de disminuir en un 0.2% cada año y es muy interesante notar que en el año 2009, con la introducción de los trajes de poliuretano este récord cae 1% en un solo año. Después de este acontecimiento, la FINA (Federación Internacional de Natación, por sus siglas en francés) decidió vetar el uso de estos trajes, lo que tuvo como consecuencia que los tiempos de las Olimpiadas de Londres regresaran a la tendencia del 0.2% y no se impusiera una nueva marca en esta prueba. Cabe señalar que el último punto de la gráfica no es un récord mundial, ya que no es menor que el anterior, es el mejor tiempo impuesto en Londres 2012, de forma que se puede comparar el cambio en la tendencia de la gráfica.

En México, la infraestructura construida para el análisis del deporte es escasa y fuera de alcance para la mayoría de los deportistas nacionales. Esto hace que el uso de la tecnología deportiva se limite a quienes tienen la capacidad o el apoyo para solventar los gastos que implica. En el caso de la natación, los canales de agua para el análisis de nadadores son prácticamente inexistentes, los centros de análisis biomecánico son muy pocos y los análisis bioquímicos para las curvas de lactato y el monitoreo físico del deportista están sujetos a la existencia de quien los realice y al costo que puedan tener.

En este trabajo se desea continuar con la investigación realizada durante la tesis de licenciatura [3]. Ambas tesis tratan de crear un vínculo entre la ciencia y el

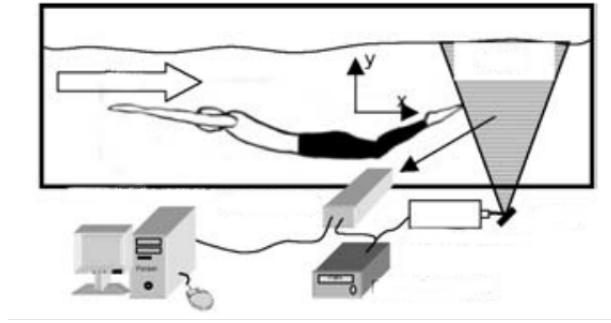


Figura 1.2: Diagrama experimental del trabajo realizado en la Universidad de Tsukuba [4].

deporte. Aunque la biomecánica del nado ha sido muy estudiada, los esfuerzos por comprender el flujo que se forma alrededor de los nadadores han sido menos atendidos debido a la dificultad que implica este tipo de estudios. Hasta el año 2014, sólo se han encontrado dos referencias donde se trata de visualizar, in situ, el flujo que se genera alrededor de un nadador al realizar algunos movimientos y ninguna de las dos referencias tiene resultados publicados en las revistas internacionales [4, 5].

## 1.2. Antecedentes

Aunque el estudio específico del flujo alrededor de un nadador ha sido poco atendido, hay algunos esfuerzos importantes en el estudio de la mecánica de fluidos aplicada a la natación [6]. Se pueden encontrar artículos en los que se desarrollan estudios puramente cualitativos sobre la forma de la estela del nadador [7, 8], hasta descripciones con simulaciones numéricas [9, 10]. Sin embargo, los más relevantes para este trabajo son las publicaciones que han presentado resultados cuantitativos utilizando la técnica PIV.

Uno de ellos es un trabajo presentado en el X Congreso Internacional de Biomecánica y Medicina en la Natación en el año 2006 [4]. Este trabajo fue desarrollado en Japón, en la Universidad de Tsukuba. El arreglo experimental consistía en un canal manufacturado en Japón que tiene medidas  $4.6 \times 2.0 \times 1.5m$ , en el cual se introduce al nadador. Para visualizar el flujo se utilizaron partículas de nylon y un láser Nd-YAG junto con un lente para generar la hoja de luz. Se muestra un diagrama de su dispositivo en la Figura 1.2.

En ese canal se generó un flujo de  $1m/s$  en el cual el nadador mantenía su posición dentro del canal al realizar patada de delfín subacuática. La toma de imágenes se realizó con una cámara CCD, esta cámara se encontraba acoplada con un generador de pulso que determinaba el tiempo en que se encendía el láser. El análisis de las imágenes se realizó con la plataforma MATLAB, donde se obtuvieron velocidades, dimensiones de los vórtices y su sentido de rotación.

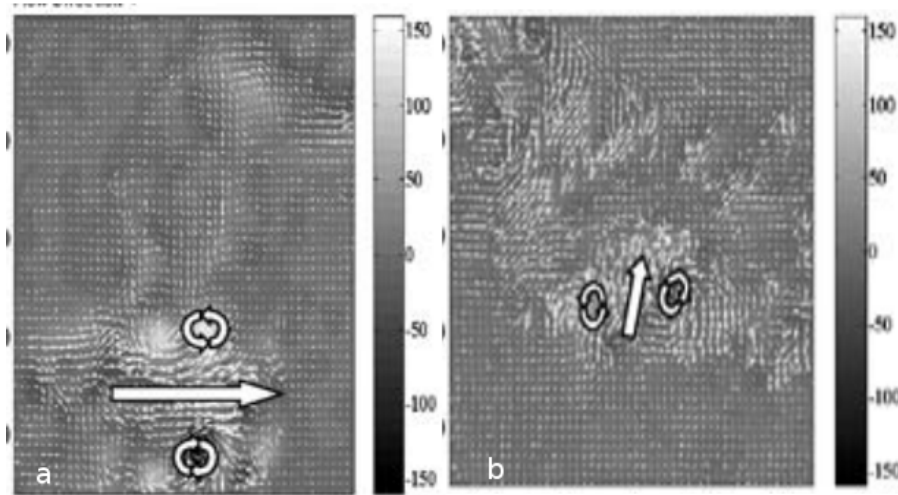


Figura 1.3: Imágenes obtenidas después del análisis en MATLAB en la Universidad de Tsukuba [4].

El resultado de esta investigación fue la obtención de los campos de velocidades y posteriormente los mapas de vorticidad generados detrás de la patada del nadador. En su análisis presentan la Figura 1.3, en donde se observa la presencia de dos vórtices, uno cuando el nadador llevaba los pies hacia arriba y otro cuando llevaba los pies hacia abajo, en medio de ambos vórtices se ve la presencia de un chorro. Estas imágenes sugieren que detrás del nadador se formaba un anillo vortical alrededor de sus pies, por lo que concluyen que este anillo es el que ayudó al nadador a propulsarse.

Se puede ver también una diferencia en el tamaño y dirección de los anillos vorticales, ya que el anillo generado al patear hacia abajo es notablemente más grande que el generado al patear hacia arriba. Además, el chorro generado por la patada hacia abajo tenía una dirección opuesta al movimiento del nadador, mientras que el chorro generado por la patada hacia arriba tenía una dirección que apunta en dirección casi vertical. Se comparó, además, la velocidad promedio del chorro  $V_J$

y la velocidad inducida del anillo vortical  $V_O$  (no se menciona el método con que se obtienen). En una de las pruebas se obtuvo que  $V_J = V_O = 1.3m/s$  y en otra se obtuvo que  $V_J = 2.0m/s$  y  $V_O = 1.8m/s$ , el flujo en el canal siempre se mantuvo a  $1m/s$ .

De estas observaciones, su investigación concluyó que el movimiento de patada hacia abajo ayuda al nadador a propulsarse, mientras que el movimiento de la patada hacia arriba lo ayuda a mantener por más tiempo su posición subacuática. Se compararon los resultados con los obtenidos por Arellano [8], en los que se coincide con el tamaño de los vórtices en cada fase de la patada. Sin embargo, el trabajo de Arellano estudia únicamente las estructuras a gran escala mientras que este estudio observa los campos instantáneos y regiones más pequeñas del flujo. Por lo que no se puede realizar una comparación entre ambos estudios, para esto se necesita más investigación. Finalmente, mencionan el interés por realizar posteriormente PIV en tres dimensiones.

En el segundo trabajo [5], un grupo de investigadores muestran dos imágenes de DPIV aplicado a nadadores olímpicos (Figura 1.4) y a delfines. Describen que los trazadores utilizados son microburbujas con diámetros menores a  $0.001$  m y que se utiliza luz solar y reflectores para visualizar las partículas. Mencionan que con esta técnica se puede hacer análisis del flujo alrededor de los nadadores, pero no presentan ningún resultado específico. Al parecer, de acuerdo con el Dr. Tim Wei, uno de los líderes de la investigación (en comunicación personal), esta investigación fue considerada como secreta y exclusiva para el uso de los atletas estadounidenses en su preparación para la Olimpiada de 2008 y estaba prohibida la publicación de los métodos utilizados y los resultados obtenidos.

En el año 2014, este grupo de investigación pudo publicar sus resultados, pero solamente aquellos relacionados con delfines [11]. En este artículo se presentan los resultados obtenidos al analizar el nado de dos delfines nariz de botella en una alberca a cielo abierto. El método utilizado fue el seguimiento de microburbujas. Éstas generan una cortina de  $2$  cm de espesor, a partir de una manguera porosa y una fuente de aire comprimido. Las burbujas fueron iluminadas por luz solar. Se utilizó una cámara de alta velocidad con resolución de  $1024 \times 1024$  pixeles y una velocidad de obturación de  $1000$  cuadros por segundo. El análisis se hizo con el software de DPIV presentado en el artículo de Hsu [12], para obtener los campos de velocidades. Como las burbujas tienen un movimiento ascendente, se restó la

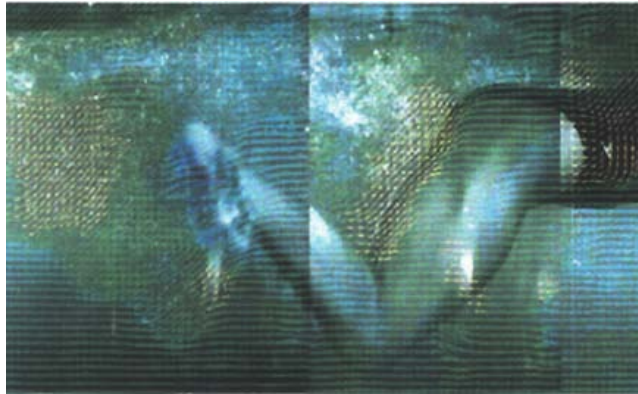


Figura 1.4: Mapa de velocidades obtenido después de un análisis de DPIV para una nadadora olímpica realizando patada de pecho [5].

velocidad promedio de subida a estos campos. Se usó el teorema de Kutta-Joukowski para calcular el arrastre a partir de la fuerza generada por los vórtices.

La velocidad de movimiento de los delfines fue entre 0.6 y 3.7 m/s y los números de Reynolds obtenidos fueron entre  $1.6 \times 10^6$  y  $7.7 \times 10^6$ . Los resultados del DPIV mostraron la formación de dos pares de vórtices durante cada ciclo propulsivo. En cada par, los vórtices giran en sentidos encontrados, esto indica la presencia de anillos vorticales que generan chorros propulsores. En la Figura 1.5 se puede ver un par de los vórtices formados detrás del delfín.



Figura 1.5: Se observa el anillo vortical que se forma debido al movimiento del delfin, visible gracias a la cortina de microburbujas. Obtenido de [11]

También, se obtuvo que el arrastre aumenta con la velocidad y coincide con modelos calculados en otros trabajos [13, 14]. El ajuste obtenido fue :

$$T = 112.33V^{1.26} \quad (1.1)$$

con un coeficiente de correlación  $R = 0.83$ . Este resultado no coincide con el predicho por Webb [15] donde el exponente era 2, pero puede deberse a que el intervalo de velocidades es corto.

El coeficiente de arrastre  $C_D$  fue calculado para el nado de baja amplitud. Se obtuvo un valor promedio de  $0.014 \pm 0.003$  y la relación entre el Reynolds y el coeficiente de arrastre se obtuvo como:

$$C_D = 16.99Re^{0.47}. \quad (1.2)$$

Se concluyó que el momento transmitido al fluido estaba concentrado en el chorro entre los vórtices. Este chorro tiene en promedio una dirección opuesta a la dirección del nado. El arrastre se genera como una reacción al momento en el chorro. La estela que se forma es un camino de Von Kármán invertido que genera propulsión.

Los antecedentes más importantes para el presente trabajo son los resultados encontrados durante la tesis de licenciatura [3], en la cual se desarrolló un método para determinar el flujo alrededor de los nadadores durante la patada subacuática de delfín. Ésta consiste en determinar el campo de velocidades del flujo generado por medio del análisis en PIV de una cortina de burbujas, y visualizar las estructuras que intervienen en la propulsión y en el arrastre. Este método tenía como ventaja su portabilidad para ser usado en las albercas.

En dicho trabajo, se presentó la construcción y calibración del dispositivo generador de burbujas que consistió en un tubo de acrílico con pequeñas perforaciones de diámetros menores a un milímetro. El tubo mide dos metros de largo y las perforaciones se realizaron cada centímetro. El tubo se conectó por una manguera a un compresor de aire. Con este dispositivo, se hicieron pruebas en el canal de olas del Instituto e Ingeniería. El arreglo experimental se muestra en la Figura 1.6. Durante los experimentos, se verificó que las burbujas siguen el movimiento del fluido al dar frecuencias y velocidades cercanas a las esperadas en las olas. Se muestra la tabla de resultados para las frecuencias en la Figura 1.7.

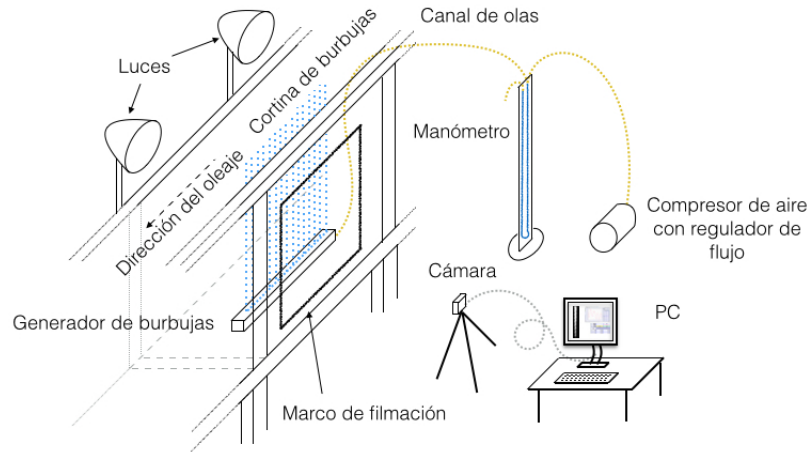


Figura 1.6: Diagrama del arreglo experimental en el canal de agua del Instituto de Ingeniería.

Periodo olas	Periodo burbujas
1.0s	1.00s±0.06s
1.5s	1.53s±0.06s
2.0s	2.06s±0.06s

Figura 1.7: Tabla de los periodos de las olas obtenidos con la cortina de burbujas comparados con los esperados

Luego, se hicieron pruebas en la Alberca Olímpica de Ciudad Universitaria con una nadadora, para filmar la patada de delfin subacuática. Se hizo una serie de videos a 120 cuadros por segundo y se analizaron con el paquete PIVLab de MATLAB, el cual mediante un algoritmo matemático calcula el campo de velocidades a partir de dos imágenes consecutivas. Además, obtiene la vorticidad y se pueden obtener imágenes como la presentada en la Figura 1.8. En esta figura se puede ver cómo se desprende el vórtice cuando los pies se desplazan hacia abajo, generando un chorro en el medio que ayuda a la propulsión del nadador. Además, se encontró consistentemente la presencia de un vórtice en el área de las rodillas; debido a su posición y dirección de giro parece generar arrastre sobre el nadador. También, se presentó un vórtice sobre los pies durante el movimiento descendente que después se convierte en el par mencionado anteriormente. Haciendo uso de estas tres estructuras se calculó un velocidad promedio del flujo.

Se obtuvo un número de Strouhal de  $St = 0.602 \pm 0.0091$  y un número de Reynolds de  $Re = 2.46 \pm 0.234 \times 10^6$ . Además, se hizo un análisis de la biomecánica de la

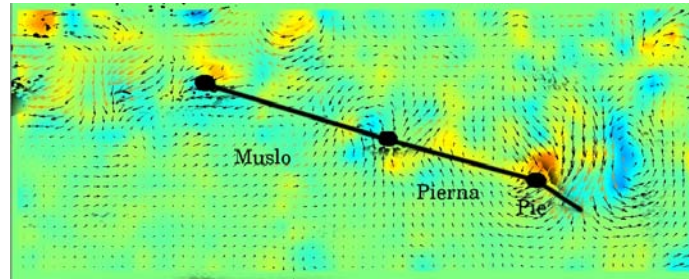


Figura 1.8: Campo de velocidades del fluido para un tiempo detrás del movimiento de los pies mientras se mueven hacia abajo. Como el nadador avanza hacia la izquierda, el desplazamiento a la derecha de la velocidad del fluido indica que se está generando propulsión.

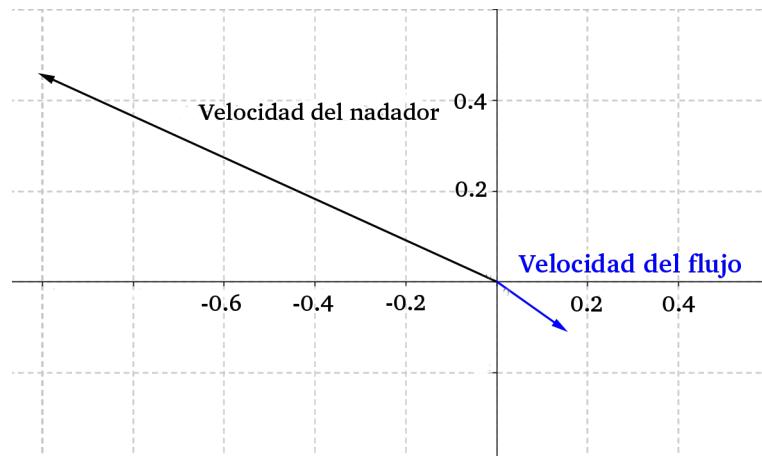


Figura 1.9: Vectores de velocidad resultantes tanto del análisis biomecánico como del análisis en PIV. Se puede ver que la velocidad encontrada del análisis biomecánico es mayor que la del análisis posterior al PIV.

nadadora para obtener la velocidad con la que se desplaza su centro de masa que se usó como la velocidad promedio de desplazamiento para compararla con la velocidad promedio del flujo. La velocidad promedio del nadador fue de  $1.36 \pm 0.25 m/s$ . La velocidad promedio del flujo se calculó promediando los campos de velocidades sobre las secciones donde se encontraban los vórtices. Se encontró que la ambas velocidades tiene una dirección opuesta entre si, pero la magnitud de la velocidad para el nadador es 5.5 veces mayor que la velocidad del fluido, como se puede ver en la Figura 1.9.



## Conceptos Básicos

Para entender el contenido de este trabajo, se necesita definir algunos conceptos de los distintos campos de estudio utilizados. En este capítulo, se hace una breve introducción a la mecánica de fluidos para entender cómo es que el desplazamiento del fluido influye en el arraste y la propulsión de los objetos que se mueven dentro de él. Además, se explica brevemente cómo se obtienen los campos de velocidad, vorticidad y presión con base en la técnica de Velocimetría. También se explica cómo se realiza el análisis biomecánico y en qué consiste la flecha de natación para entender cómo influye en el desempeño del nadador durante sus pruebas.

### 2.1. Mecánica de Fluidos

El parámetro adimensional más importante para caracterizar un flujo es el número de Reynolds ( $Re$ ). Este número puede indicar si el flujo es laminar o turbulento. Se define como:

$$Re = \frac{DV}{\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $D$  es una longitud característica,  $V$  es la velocidad característica del fluido y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. El número  $Re$  indica la razón entre las fuerzas viscosas y las inerciales. Las fuerzas viscosas se deben a la interacción de las partículas del fluido entre ellas y con la superficie del cuerpo, estas fuerzas dependen principalmente de la viscosidad del fluido. Las fuerzas inerciales son proporcionales al tamaño y velocidad del cuerpo [16].

Debido a la viscosidad del fluido, la velocidad del flujo se ve disminuida en una zona cercana al objeto. Esta zona se conoce como capa límite y se caracteriza por

los gradientes de velocidad en la dirección perpendicular a la superficie del objeto. Si la superficie es curva, se pueden presentar gradientes de presión en la dirección del flujo y dependiendo del número de Reynolds, la capa límite se puede separar como se muestra en la Figura 2.1. Cuando la capa límite se separa debido a un gradiente adverso de presión, la dirección del flujo se invierte, lo que da lugar a la formación de vórtices y, en algunos casos, a la creación de una estela que aumenta el arrastre total [16].

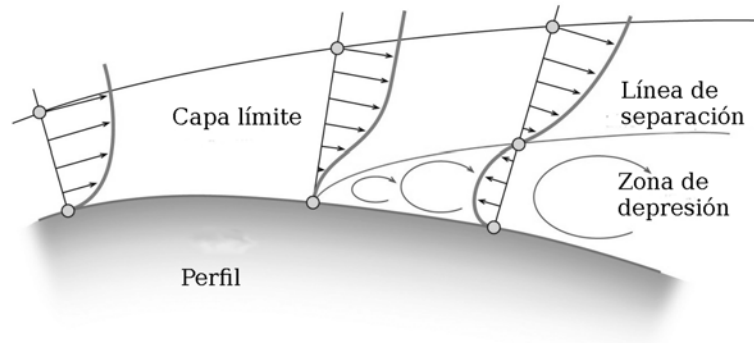


Figura 2.1: Representación esquemática del perfil de un cuerpo sumergido en un fluido. Se muestran las magnitudes y direcciones de flujo para algunas secciones y cómo éstas llegan a tener un cambio de dirección, debido a la forma del perfil, generando una zona de depresión que origina los vórtices.

Para entender el comportamiento de un fluido y las estructuras vorticales que se forman en él, se utiliza la ecuación de Navier-Stokes, para un flujo incompresible se escribe como:

$$\rho \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \rho \vec{f} - \nabla P - \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido y se considera constante,  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  es la derivada material de la velocidad del flujo,  $\vec{f}$  representa las fuerzas de cuerpo,  $P$  es la presión y  $\mu$  es la viscosidad dinámica [17].

Además, se puede suponer que las fuerzas de cuerpo se derivan de un potencial  $\vec{f} = \nabla\psi$ , y usar la identidad:

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, \quad (2.3)$$

donde se define la vorticidad  $\omega$  como:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}, \quad (2.4)$$

Esta definición indica que la presencia de vorticidad implica la rotación de las partículas del fluido sobre su propio eje, exista o no una rotación en el flujo [18].

Entonces, se puede reescribir la ecuación 2.2 como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{q^2}{2} + \psi \right) + \nu \nabla^2 \vec{v}; \quad (2.5)$$

donde  $q = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2}$  y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Si se calcula el rotacional de esta ecuación se obtiene:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.6)$$

Esta ecuación es conocida como la Ecuación de Vorticidad y representa el cambio de la vorticidad de un fluido debido a la viscosidad y a la elongación de vórtices. Para el caso de un fluido bidimensional se obtiene que  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$ , por lo que la ecuación de vorticidad es homogénea y por lo tanto la vorticidad es escalar [19]. Es importante notar que esta ecuación no contiene la presión ni la gravedad, ya que no generan torque.

Teóricamente se definen las líneas de vórtice y los tubos de vórtice como una manera de identificar los límites de los vórtices. Las líneas de vórtice son a la vorticidad como las líneas de corriente son a la velocidad del flujo. La tangente de una línea de vórtice en cualquier punto da la dirección local de la vorticidad. Un grupo de líneas de vórtice que forman cualquier curva cerrada limitan los que se conoce como tubo de vórtice que tiene como característica principal que la circulación alrededor de su límites es  $d\Gamma = \omega \cdot dA$ , donde  $A$  es el área transversal del tubo vórtice [17].

Para calcular el tamaño de un vórtice en este trabajo se utiliza el criterio de  $\Delta$ , el discriminante de la matriz asociada al campo de velocidades [20]. Este criterio define un vórtice como una región donde los autovalores de esta matriz tienen parte imaginaria. Ya que en un marco de referencia que no rota, las líneas de corriente en cada instante están definidas por el campo de velocidades. Estas líneas estarán girando o haciendo espirales si los autovalores de la matriz son complejos [21].

También se puede hacer una estimación de la energía disipada por los vórtices al calcular la circulación  $\Gamma$  [18], que se define en términos de la vorticidad como:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}. \quad (2.7)$$

Según el teorema de Kelvin, en un fluido no viscoso, barotrópico, con fuerzas de cuerpo conservativas, la circulación sobre una curva cerrada se mantiene constante

en en el tiempo, es decir:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (2.8)$$

Entonces, si hay acción de la fuerzas viscosas o fuerzas no conservativas, el teorema de Kelvin no se cumple y la energía debida a estos esfuerzos se disipa en los vórtices, por lo que la circulación sobre la curva deja de ser constante [17]

Al aumentar la rapidez relativa entre el flujo y el objeto, los vórtices comienzan a desprenderse con una frecuencia proporcional a la velocidad. Por ejemplo, cuando un cilindro se encuentra sumergido en un flujo con números de Reynolds del orden de 1000, se forma un patrón conocido como el camino de Von Kàrmàn. Éste se muestra en la Figura 2.2 (a), y se genera cuando los vórtices empiezan a desprenderse asimétricamente de la esfera con una cierta frecuencia. Este tipo de estelas es responsable del arrastre de forma que aumentan el arrastre total.

Por lo general, se desea disminuir el arrastre de un objeto de manera que el costo energético para propulsarlo también sea menor. Las estelas pueden ser manipuladas de manera activa o pasiva para disminuir el arrastre. Por ejemplo, los animales manipulan los vórtices con el movimiento de las alas o aletas, empujando los vórtices de lado a lado. Así modifican el camino de Von Kàrmàn y lo convierten en una estela propulsora [22] como se muestra en la Figura 2.2 (b).

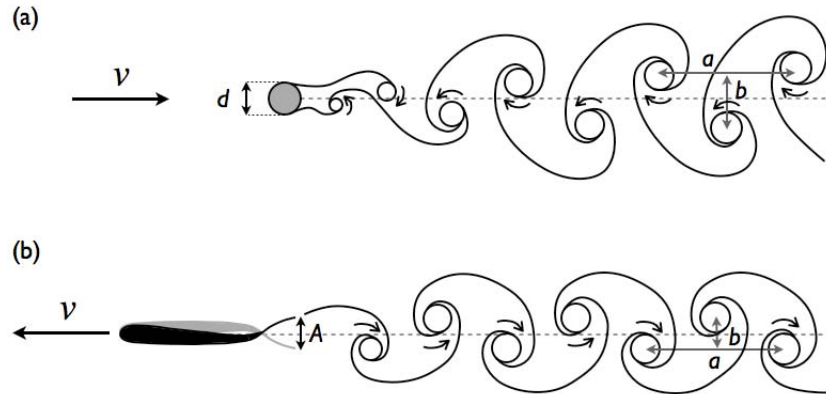


Figura 2.2: Comparación entre la estela que deja un cilindro (a), conocida como camino de von Kàrmàn, y la que deja un pez (b), conocida como camino de von Kàrmàn invertido [?].

Los humanos mediante la patada y la brazada imitan los movimientos de los animales para desplazarse, como muestran algunos nombres de los movimientos: nado de mariposa, patada de rana, patada de delfín, etcétera. En particular, en

la patada de delfín se generan estelas parecidas a las que producen los animales acuáticos como se muestra en la Figura 2.3.

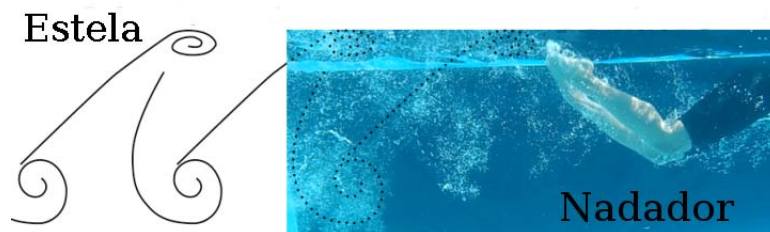


Figura 2.3: Representación de los vórtices que va dejando un nadador haciendo patada de delfín para su desplazamiento [?].

Se ha encontrado que existe una relación biunívoca entre la velocidad del flujo y la frecuencia de desprendimiento de los vórtices en las estelas [23], por lo que se define otro parámetro adimensional para cuantificar la razón entre las propiedades de la estela y la velocidad con que se desplaza el objeto. Este parámetro se conoce como el número de Strouhal ( $St$ ) y se define como:

$$St = \frac{fA}{V}, \quad (2.9)$$

donde  $f$  es la frecuencia de las oscilaciones,  $A$  es la amplitud máxima de la patada y  $V$  es la velocidad promedio del perfil.

Se ha observado que la propulsión óptima para insectos, aves y peces corresponde a valores del número de Strouhal entre 0.2 y 0.4 [24], y entre 0.8 y 1 para nadadores [25]. Esto se debe a que la frecuencia amplifica la inestabilidad de la estela, que a su vez causa fluctuaciones importantes en la fuerza alrededor del cuerpo lo que da lugar a variaciones en el arrastre y en la sustentación del objeto. En el caso de los animales y humanos, para los valores del número de Strouhal señalados, las fluctuaciones generadas en las fuerzas aumentan la sustentación y disminuyen el arrastre [25].

Así es que para analizar a un nadador se pueden usar técnicas similares a las que se han utilizado en el estudio del flujo alrededor de los animales y de las estructuras que forman al desplazarse. En este trabajo se implementó una técnica similar a la de PIV (Velocimetría por imágenes de partículas, por sus siglas en inglés). Después de obtener los campos de velocidad con dicha técnica, se pueden obtener también los campos de presión y de fuerza a través de algoritmos computacionales.

## 2.2. Velocimetría por imágenes de partículas (PIV)

La técnica PIV consiste en introducir pequeñas partículas en el fluido, las cuales funcionan como trazadores pasivos, neutros en flotación. Luego, una hoja de luz láser determina el plano de análisis. Las pulsaciones del láser se sincronizan con la velocidad de la cámara. A partir de una correlación cruzada de las distancias recorridas por las partículas al comparar dos imágenes consecutivas se determina el campo de velocidades.

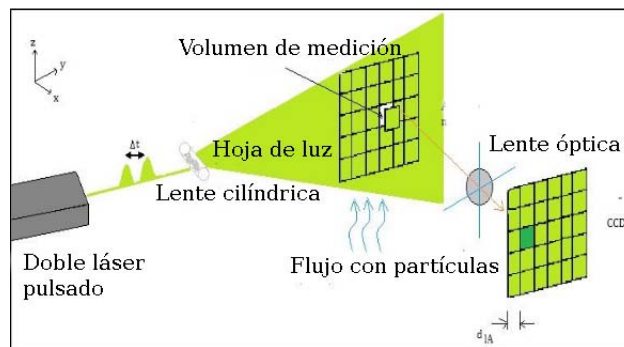


Figura 2.4: Representación del proceso que se utiliza para realizar el análisis de velocimetría por imágenes de partículas.

El programa de cómputo para el PIV divide cada imagen en pequeñas celdas de interrogación y calcula un vector velocidad en cada una. Para determinar este vector se usa un algoritmo que hace una correlación entre las posiciones de las partículas en la primera y la segunda fotografía. El tamaño mínimo de las celdas  $d$  se determina por

$$d = V_{max} \Delta t, \quad (2.10)$$

donde  $V_{max}$  es la velocidad máxima del flujo y  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo entre dos imágenes, es decir, la velocidad de la cámara [26].

Durante la tesis de licenciatura se desarrolló una técnica que en vez de usar partículas suspendidas en el fluido y una hoja de luz para determinar el plano de visualización, utiliza burbujas ascendentes generadas sobre un plano. Estas burbujas suben a la superficie formando una cortina plana visible a la cámara gracias a la luz solar o a lámparas muy potentes. Los videos que se obtienen al usar esta técnica también se pueden analizar con los algoritmos de PIV y así obtener los campos

de velocidades. A partir de estos campos se obtiene información adicional con las herramientas descritas a continuación.

### 2.2.1. Cálculo del campo de Presión

De acuerdo con las ecuaciones de Navier Stokes para un flujo incompresible, presentadas en la ecuación 2.2, si no hay fuerzas de cuerpo actuando,  $\rho$  y  $\mu$  son constantes y se tienen los campos de velocidad, se puede despejar la presión y la ecuación 2.2 queda:

$$\nabla P = -\rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt} - \mu\nabla^2\vec{v}\right) \quad (2.11)$$

Al integrar la ecuación anterior se obtiene el campo de presiones. Estas integraciones se deben realizar de manera numérica, los cálculos no son sencillos. Se han generado varios métodos para resolver este problema [27, 28]. En este trabajo se usa la aproximación hecha por Dabiri et al. [29]. En su artículo se presenta un método sencillo que se basa principalmente en considerar las propiedades escalares de la presión, es decir, que el valor de la presión en un punto es independiente de la trayectoria de integración.

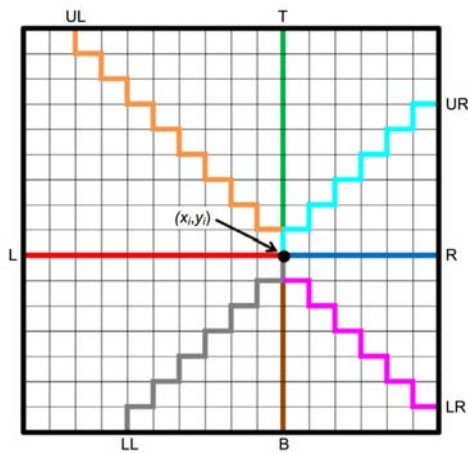


Figura 2.5: Diagrama del proceso de integración sobre ocho trayectorias distintas en la malla. Cada línea de color representa un trayectoria de integración alrededor del punto  $(x_i, y_i)$  [29]

Al calcular la presión en un punto del espacio se deben hacer las integrales por cada trayectoria posible, pero esto tiene un costo computacional muy alto. A grandes

rasgos, lo que propuso Dabiri et al. fue dividir la malla espacial en ocho secciones iguales al rededor de la posición en la que se quiere calcular la presión, como se muestra en la Figura 2.5. Se toma sólo una trayectoria en cada sección y se integra numéricamente esta trayectoria. Luego, se obtiene la mediana de estos ocho valores, ya que la mediana es menos sensible a valores muy alejados que puedan resultar del cálculo en algunas de las trayectorias.

Para la integración numérica, el programa propuesto por Dabiri et al. utiliza el método de Euler hacia adelante. Durante la integración de cada trayectoria, se asume que la presión en las orillas es la presión del fluido estático en esa posición. A este valor de la presión se le considera el valor de referencia  $P_{ref}$ , respecto al cual se comparan los demás valores. El algoritmo calcula en cada punto  $\Delta P = P_{ref} - P$ . Sin embargo, esto no quiere decir que la  $\Delta P$  en los puntos de las orillas será cero, ya que la presión calculada por las otras trayectorias será diferente de cero al usarse la mediana también. Otra fuente de error es la presencia de objetos sólidos que atraviesan las trayectorias de integración, pero es posible colocar una máscara del objeto dentro de la malla para excluir esos puntos de los cálculos.

### 2.2.2. Análisis de un Volumen de control

El análisis a través de un volumen de control [30] consiste en aplicar la segunda ley de Newton a un volumen inercial definido. Éste puede ser estacionario o moverse con una velocidad constante. La fuerza total es la suma de las fuerzas de cuerpo  $\vec{F}_B$  y las fuerzas de superficie  $\vec{F}_S$ . En términos de la velocidad del fluido:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{v} dV + \int_{CS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.12)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v}$  es la velocidad del flujo relativo al volumen de control,  $CV$  es el volumen de control y  $CS$  es la superficie del volumen de control.

Para realizar los cálculos, se hacen las siguientes suposiciones [30]:

- El flujo es estacionario respecto al volumen de control
- No hay fuerzas de cuerpo en la dirección  $x$
- El flujo es incompresible



De estas suposiciones, al calcular la fuerza resultante en la dirección  $x$  se sabe que  $F_{B_x} = 0$ . Además, como el flujo es estacionario, la primera integral en la ecuación 2.12 es cero. Entonces, si  $u$  es la componente de la velocidad en  $x$ , queda que:

$$F_{S_x} = \int_{CS} u \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.13)$$

Como la presión atmosférica actúa igual en todas las caras del volumen de control, la única diferencia será la producida por el cambio en la velocidad en las orillas del volumen en la dirección deseada. Para la dirección  $x$ ,  $F_x = F_v + F_p$  donde  $F_v$  es la fuerza que se genera por el cambio en la velocidad y  $F_p$  es la fuerza de presión. Además, en el caso de un nadador desplazándose en el agua, la velocidad con que se mueve el nadador en la dirección  $x$ , es también la velocidad del volumen de control  $u$ . Por lo que la ecuación se puede escribir como

$$F_x = \int_{S_1} u(-u\rho)dS + \int_{S_2} u(u\rho)dS - \int_0^{h_1} P dS_1 + \int_0^{h_2} P dS_2 \quad (2.14)$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son las orillas derecha e izquierda del volumen de control respectivamente y, por lo tanto,  $h_1$  y  $h_2$  son las alturas en  $y$  para ambos lados del volumen de control.

Si no hay cambios en la presión en las orillas del volumen de control, entonces la fuerza total queda:

$$F_x = \rho \left( - \int_0^{h_1} u^2 dS_1 + \int_0^{h_2} u^2 dS_2 \right) \quad (2.15)$$

Estas integrales se pueden calcular de manera numérica para darnos un aproximado de la fuerza aplicada en esta dirección.

De manera análoga, para la fuerza en la dirección  $y$  se obtiene la ecuación:

$$F_y = \int_{S_1} w(-w\rho)dS + \int_{S_2} w(w\rho)dS = \rho \left( - \int_0^{h_1} w^2 dS_1 + \int_0^{h_2} w^2 dS_2 \right) \quad (2.16)$$

donde  $w$  es la componente de la velocidad en la dirección  $y$ .

### 2.3. Biomecánica

Para realizar el análisis mecánico de un cuerpo humano se utilizan las ecuaciones de la mecánica clásica y dependiendo de lo que se quiera analizar se hace un estudio

de la estática o de la dinámica del gesto motor que se realiza. Por ejemplo, una persona que realiza levantamiento de pesas requiere de un análisis dinámico para la técnica con que se levanta la pesa, pero requiere de un análisis estático para la técnica con que se mantiene la pesa levantada (Figura 2.6). Durante el análisis se debe tomar en cuenta la posición de los músculos, ligamentos, tendones y huesos, para poder localizar la posición y dirección de los esfuerzos que se aplican en cada parte del cuerpo [31].

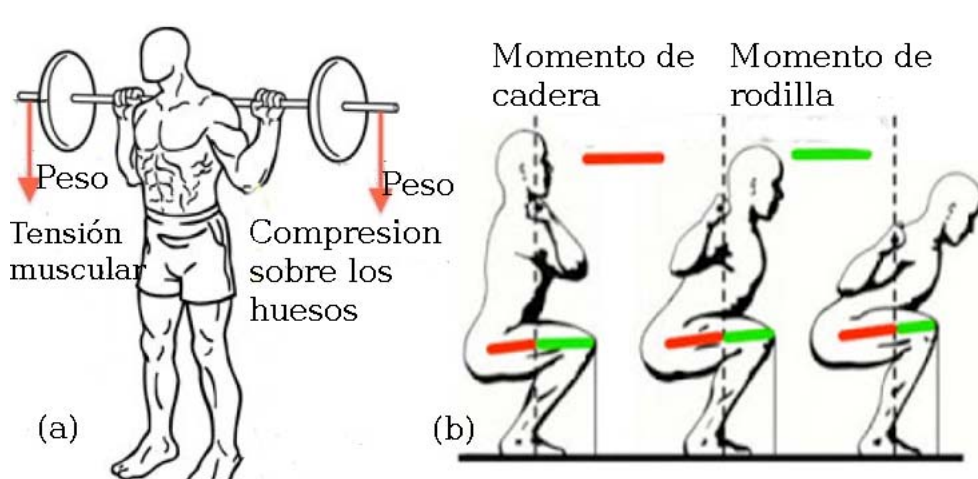


Figura 2.6: Comparación del análisis que se hace en la técnica de levantamiento de pesas, cuando se levanta la pesa (b) que requiere un análisis dinámico y cuando se mantiene la pesa (a) que requiere un análisis estático.

El análisis estático se realiza de la misma manera que se hace con cualquier objeto, mediante un diagrama de cuerpo libre. En él se hace una simplificación del miembro analizado, por ejemplo, el brazo (Figura 2.7) y se localizan las fuerzas que actúan sobre él. Como es una situación de equilibrio, la suma de las fuerzas ejercidas debe ser igual a cero:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad (2.17)$$

Así, si se conoce el peso de la carga aplicada y sobre qué partes del cuerpo se ejerce una fuerza, se pueden calcular los esfuerzos generados en las distintas direcciones y determinar el músculo o ligamento que recibe más carga.

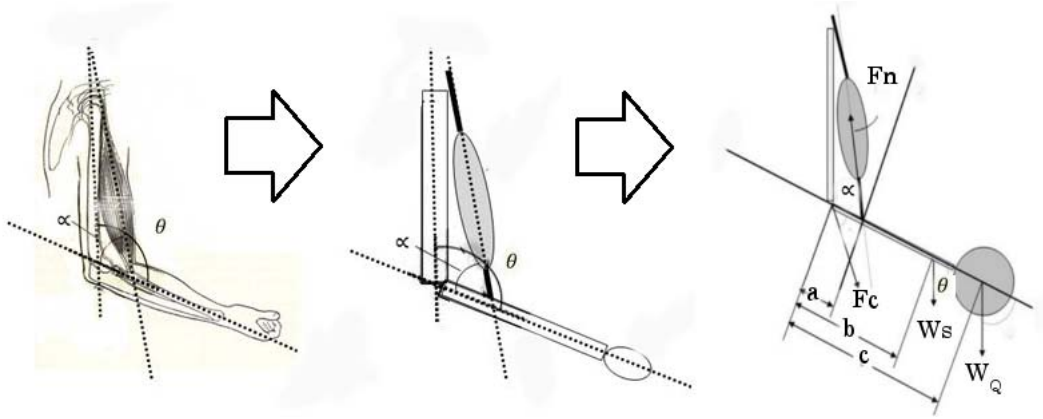


Figura 2.7: Proceso para obtener el diagrama de cuerpo libre para el brazo cargando un cierto peso  $W_Q$  donde la fuerza  $F_m$  actúa sobre el bíceps.

Cuando se requiere de un análisis dinámico, se debe tomar en cuenta la cinemática, es decir, los cambios de posición en el tiempo, y la dinámica, es decir, las fuerzas que generan el desplazamiento y su relación con las resultantes del movimiento.

Para realizar el análisis cinemático del cuerpo, se puede seguir la posición de las articulaciones a intervalos constantes de tiempo de donde se obtiene una gráfica de la posición  $D$  contra el tiempo  $t$ . A esta gráfica se le puede ajustar una función continua  $\vec{D}(t)$  y de ésta se obtienen la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{a}$  del movimiento:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{D}}{dt}, \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (2.18)$$

A partir de las velocidades relativas entre las articulaciones se puede determinar el ángulo  $\theta$  entre segmentos corporales y posteriormente su desplazamiento, como se muestra en la Figura 2.8. También se puede graficar  $\theta(t)$  y ajustar una gráfica con una función para determinar la velocidad angular  $\omega$  y la aceleración angular  $\alpha$ :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.19)$$

En caso de que la curva  $\theta$  vs  $t$  genere dificultades para el ajuste de alguna función se pueden calcular las variaciones en cada instante:

$$\omega = \frac{\theta}{t}, \quad (2.20)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t}, \quad (2.21)$$

donde  $\theta$  es el cambio en el ángulo que se forma entre dos posiciones del mismo segmento corporal con respecto a una articulación y  $r$  es la longitud de dicho segmento corporal.

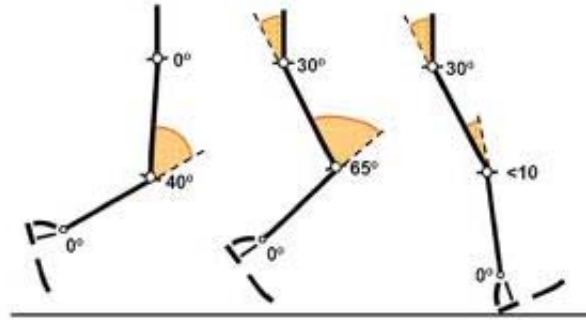


Figura 2.8: Cambio de los ángulos entre las secciones de la pierna al realizar el balanceo para caminar.

Para realizar el análisis dinámico del cuerpo se deben conocer la masa  $m$  del conjunto de segmentos considerados para obtener  $\theta$  y entonces se puede calcular el momento  $\vec{p}$  y la fuerza  $\vec{F}$  que se aplica en cada segmento y la fuerza total que genera el cuerpo en movimiento:

$$\vec{p} = m\vec{V}, \vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.22)$$

Después se puede calcular el trabajo  $W_t$  en cada momento utilizando:

$$W_t = Fd, d = \theta r, \quad (2.23)$$

donde  $d$  es el desplazamiento del segmento en movimiento y  $r$  la longitud del segmento. Este trabajo da una idea de la energía que aplicó el cuerpo para desplazarse durante el tiempo total:

$$E_{tot} = \sum_{t=1}^n W_t. \quad (2.24)$$

Cuando se quiere calcular el desplazamiento total del cuerpo es necesario determinar el centro de masa  $CM$  con los segmentos medidos y sus pesos:

$$CM = \frac{\sum_{i=1}^n m_i d_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2.25)$$

de esta manera se puede utilizar el movimiento del centro de masa como referencia del desplazamiento total (Figura 2.9).



Figura 2.9: Determinación gráfica del centro de masa del cuerpo humano, en este caso para un corredor en posición de salida.

Existen tablas donde se pueden encontrar los pesos de cada segmento corporal relativos al peso total del cuerpo humano. Estas tablas se hacen realizando mediciones de varios cuerpos y sus segmentos corporales, con lo que se calcula un promedio del peso para cada segmento [31].

Finalmente se puede obtener el trabajo realizado para mover al cuerpo con la ecuación 2.23, pero en este caso la fuerza será la fuerza ejercida por todo el cuerpo y el desplazamiento será el desplazamiento del centro de masa total.

## 2.4. Biomecánica del nado

La aplicación de los conceptos de mecánica al cuerpo humano es bastante antigua, pero fue después de los años 50 que surgió la preocupación por entender a fondo los esfuerzos mecánicos sobre cada parte del cuerpo, con el objetivo de evitar lesiones o mejorar el rendimiento de los atletas. A partir de entonces la biomecánica comienza a desarrollarse rápidamente siendo los campos de interés más importantes: la terapia física, la educación física, la medicina del deporte, la ortopedia y la industria [31].

A partir de la década de los 70, el interés por la biomecánica de los deportes empieza a crecer y es el comienzo del desarrollo de estudios centrados en el gesto motor de cada deporte, para mejorar el rendimiento de los atletas y minimizar la aparición de lesiones por sobreesfuerzo de los ligamentos y de los tendones (Figura 2.10).

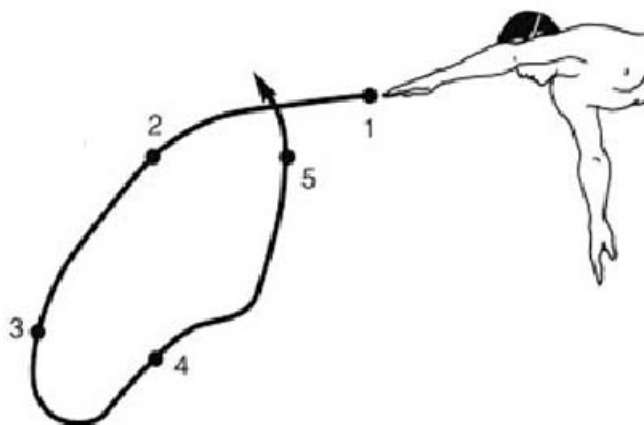


Figura 2.10: Trayectoria adecuada de la mano durante la brazada de crol [35].

En la natación existen muchos trabajos sobre el gesto motor de cada técnica, incluso de los errores más comunes que se cometen al realizar alguno de ellos y cómo evitarlos para disminuir la probabilidad de tener lesiones importantes [32]. También existen trabajos que analizan los momentos determinantes de una competencia para bajar los tiempos en cada prueba. En general, se ha encontrado que las vueltas eficientes y buenas flechas son factores importantes en la mayoría de las pruebas, principalmente en los 50 metros y en las pruebas de fondo.

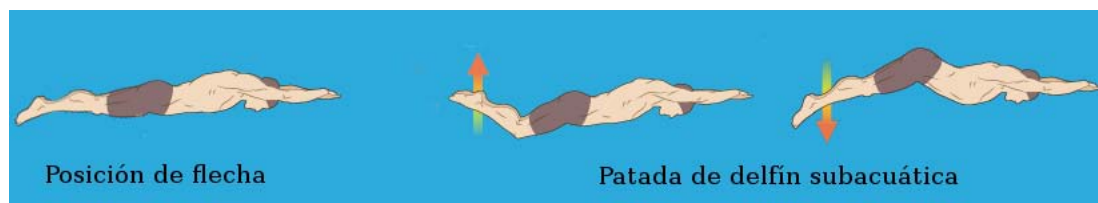


Figura 2.11: Algunas de las posiciones que se observan al realizar una flecha. Se puede ver en la primera imagen la posición de flecha sin movimiento y en la segunda y tercera imagen algunas posiciones durante el movimiento de patada de delfin subacuática.

La flecha es la parte de una competencia en la que el nadador permanece completamente sumergido, por ejemplo, después de la salida del banco o después de cada vuelta. Como el nadador se encuentra completamente rodeado de agua, este instante de la competencia ha sido motivo de muchos estudios biomecánicos que se han coordinado con experimentos para determinar la fricción que existe entre el nadador y el agua. Uno de estos estudios [33] indica que, en las pruebas de 50 metros,

el nadador puede estar abajo del agua entre un 40 % y un 60 % del tiempo total de la prueba. Esto significaría que un buen estudio respecto las fuerzas de arrastre y propulsión durante la flecha podrían ayudar a disminuir los tiempos en las competencias. Además existen algunos estudios aislados sobre la manera más eficiente de realizar una flecha [34].

Estudios recientes indican que la flecha debe tener dos componentes principales: la posición de flecha sin movimiento y la patada de delfín subacuática (Figura 2.11). En una de las fuentes se dice que la ondulación de la patada debe iniciarse desde la cabeza, luego el pecho, baja hacia el torso y las caderas y, finalmente, hacia las piernas donde se produce la patada de delfín [35].

Los pasos a considerar son:

- Empujar el pecho unos centímetros hacia abajo y liberar la tensión.
- Empujar la cadera hacia abajo y liberar la tensión.
- Dejar que los muslos sigan el movimiento de la cadera mientras ésta se mueve hacia abajo. Las piernas se doblan ligeramente en las rodillas.
- Mover las caderas hacia arriba y estirar las piernas para ejecutar un movimiento de látigo.
- Permitir que los muslos sigan el movimiento de las cadera hacia arriba.
- Empezar un nuevo ciclo.

En otra de las fuentes se considera que de cada nadador debe encontrar la cantidad, amplitud y fuerza óptimas para su patada dependiendo de la eficiencia en su desplazamiento y ahorro de energía [36].

Sin embargo, estos estudios están basados únicamente en atletas de alto rendimiento de los países en donde se realizan dichos estudios. En biomecánica se sabe que cuando se quiere adaptar algún aspecto, ya sea una prótesis o un ejercicio, a una población específica, se necesita que los estudios estén realizados con gente de esta misma población para generar lo que se conoce como una banda de normalidad que indique los rangos entre los que se encuentran los sujetos de la población. Por lo tanto, un estudio realizado con atletas de nivel internacional no puede ser aplicable a atletas de nivel nacional o amateurs, o un estudio realizado en atletas de alto rendimiento en Alemania no puede ser aplicado en atletas de alto rendimiento en México. Por ejemplo, existe un trabajo realizado con atletas juveniles de nivel nacional en Francia [37], en el que se indica que para los nadadores analizados es más eficiente realizar la patada subacuática únicamente con las piernas y con movimientos cortos y rápidos, lo que contradice la técnica de flecha descrita anteriormente.



## Metodología experimental

Durante la tesis de licenciatura [3], se construyó un dispositivo que genera burbujas y las libera en un plano, el cual es el plano de visualización utilizado para el análisis. Este diseño requirió que el generador de burbujas fuera de un material rígido y que los orificios no se pudieran deformar debido a la presión del aire al salir para conservar el tamaño de las burbujas.

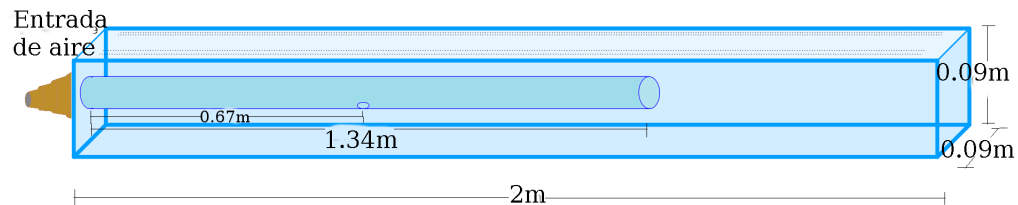


Figura 3.1: Diagrama del generador de burbujas construido.

El dispositivo se presenta en la Figura 3.1. Consiste en un tubo de sección transversal cuadrada de acrílico de 0.009m de grosor, con dimensiones de  $0.09m \times 0.09m \times 2m$ , la cara superior tiene un espesor de 0.003m y en ella se realizaron orificios con una máquina de corte láser que se encuentra en el Centro de Investigaciones de Diseño Industrial de la UNAM (CIDI).

Los orificios tienen un diámetro promedio de  $1.01 \times 10^{-4}m$ . Cabe mencionar que los diámetros de los orificios tienen una ligera variación de  $1 \times 10^{-5}m$ , ya que la máquina está diseñada para realizar cortes largos y no orificios, por lo que la

precisión de la perforación puede variar, pues para realizar el orificio el láser tiene un tiempo de exposición muy corto.

Un extremo del tubo se selló y el otro se conectó a un suministro continuo de aire. Finalmente, para uniformizar la presión de aire en todo el dispositivo, se introdujo un tubo circular de acrílico de 0.025m de diámetro y 1.34m de longitud, con un orificio de 0.01m a 0.67m de la entrada. Esto hace que el aire que entra a presión por un extremo se distribuya entre el primer orificio y el otro extremo del tubo de manera que el flujo de aire en ambos orificios es parecido. Con esto se logra equilibrar la presión a lo largo del tubo.

### 3.1. Dispositivo experimental

Los experimentos se realizaron en la Alberca Olímpica de Ciudad Universitaria, en la región donde la profundidad es de 1.98m. Se puede ver una imagen en la Figura 3.2. Se colocó el generador de burbujas en el fondo de la alberca a una distancia aproximada de cinco metros del banco de salida. Por medio de una manguera se conectó a la compresora de aire y al manómetro que se encontraban fuera de la alberca.

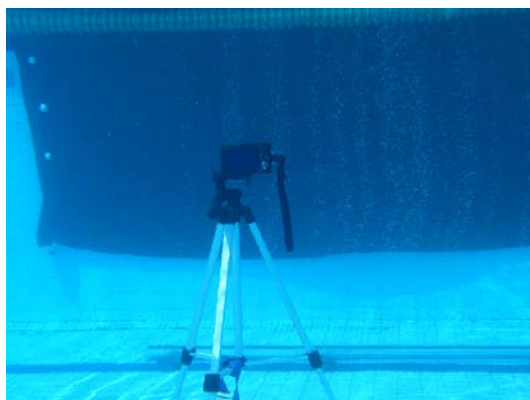


Figura 3.2: Fotografía del montaje experimental en la AlbercaOlímpica de Ciudad Universitaria.

En la pared de la alberca se colocó un fondo negro de  $4m \times 1.5m$  que sirve como medio de contraste, se utilizó únicamente la luz solar como fuente de iluminación. Entre el fondo negro y el generador de burbujas había aproximadamente 1m de distancia. La cámara se colocó en un tripié a 2m del generador a una altura aproximada de 1m.

Para realizar las mediciones biomecánicas se utilizaron marcadores sobre las articulaciones del nadador. Los marcadores eran esferas de unicel que se colocaron sobre un traje de baño completo por medio de velcro adherible. Se muestra una fotografía en la Figura 3.3. El traje de baño era de color negro y las esferas de color blanco para aumentar el contraste. Se midieron las distancias entre cada uno de los marcadores, para tener las características físicas del nadador.



Figura 3.3: Fotografía del traje de baño con los marcadores para el análisis biomecánico dispuestos sobre las principales articulaciones.

El nadador se impulsaba de la pared debajo del banco de salida, mantenía la posición de flecha y luego comenzaba la patada de delfín aproximadamente dos metros antes de pasar por la zona de grabación, continuaba realizando la patada de delfín hasta que emergía del agua. Los videos se grabaron a 120 cuadros por segundo con una resolución de  $640 \times 480px$ . Todos los experimentos se realizaron con un mismo nadador para mantener cierta consistencia en el gesto motor. Cabe destacar que en la mayoría de los videos se alcanzan a distinguir 2 ciclos de la patada aproximadamente.

## 3.2. Análisis

Cada video se separó en secuencias de imágenes y se cortó la secuencia que servía para el análisis. Cada grupo de imágenes llevó dos procesos: uno para la parte biomecánica y otra para el análisis del fluido. Para el análisis biomecánico se utilizó la plataforma de National Instruments, en ella se utilizó el programa Vision Builder donde se le aplicaron algunos filtros a las imágenes para mejorar el contraste y seguir los marcadores que se ven en cada video. Se hizo una escala pixeles:metros para obtener los desplazamientos y velocidades reales de los marcadores. Se hicieron

gráficas de los desplazamientos de cada marcador contra el tiempo y se determinó la posición del centro de masa para cada imagen. Luego se puede obtener la velocidad promedio del centro de masa para compararla con los resultados del flujo.

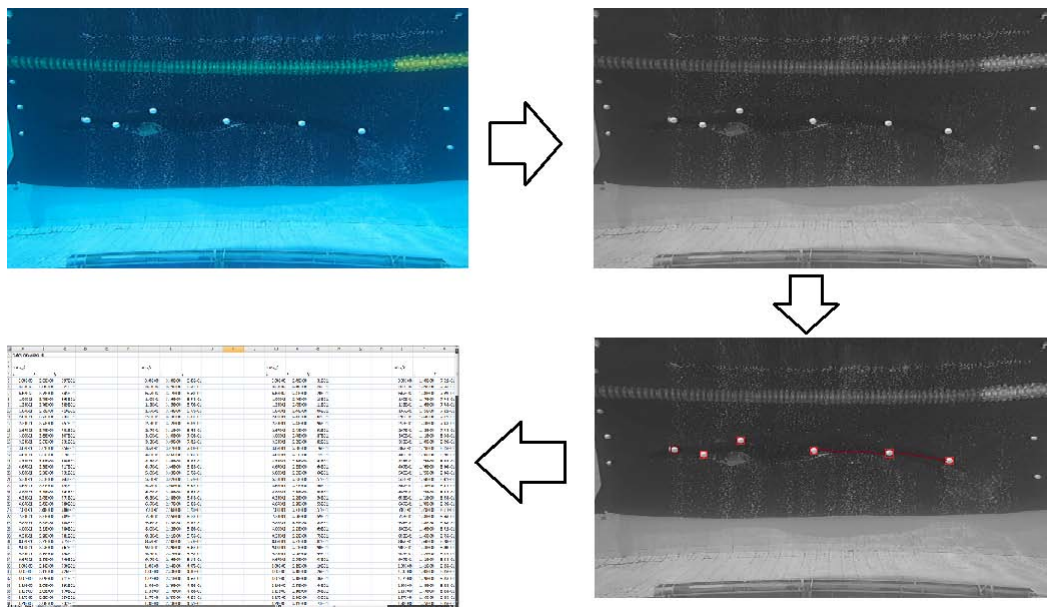


Figura 3.4: Proceso de análisis biomecánico

Para obtener los campos de velocidades del fluido se utilizó el software DynamicStudio de Dantec. Para obtener la vorticidad y el análisis del volumen de control, se hicieron códigos en MATLAB que se pueden ver en el apéndice B, y para el cálculo de los campos de presión se usó el software desarrollado por Dabiri, que también está desarrollado en MATLAB.

Las imágenes se introdujeron al DynamicStudio donde al usar una escala pixel:metros y la velocidad de la cámara se obtuvieron magnitudes en m/s para las velocidades. Este programa pasó las imágenes a escalas de grises y con un algoritmo distingue los tonos de grises que se consideraron partículas de los que eran sólo fondo. Después se utilizaron los algoritmos de PIV para obtener los campos de velocidades. Para evitar la influencia de la velocidad ascendente de las burbujas, se resta la velocidad promedio de ascenso a todos los campos de velocidades utilizados en el análisis. La velocidad promedio de ascenso se calculó usando un video de referencia que contiene únicamente las burbujas ascendentes, se calculan los campos de velocidad y se hace un promedio de todos los datos obtenidos.

Con los campos de velocidades se calcularon los campo de vorticidad usando la ecuación 2.4 en su forma discreta. Se hicieron gráficas donde se ven las secciones de la imagen con mayor o menor vorticidad. Es importante notar que este programa asigna un código de colores a la magnitud de la vorticidad. En este trabajo se utilizó el código en el que a la vorticidad positiva o rotación a la derecha se le asigna un color cálido y a la vorticidad negativa o rotación a la izquierda se le asigna un color frío. Se puede ver un diagrama del proceso en la Figura 3.5.

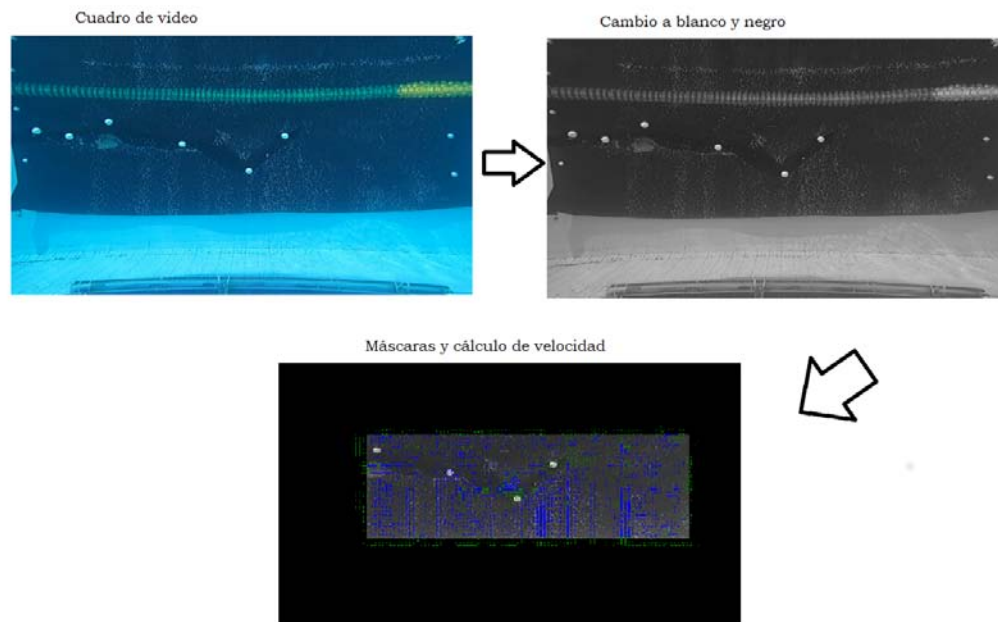


Figura 3.5: Proceso de análisis del flujo.

Con los campos de velocidades se hizo el análisis del volumen de control para obtener la velocidad promedio del flujo y cuantificar la fuerza en el fluido. Como se mencionó en la sección 2.2.2 para hacer este análisis se definió un volumen que se mueve a la velocidad del nadador. Este volumen de control era el que se encontraba desde la mitad del cuerpo del nadador hasta donde terminaban los pies. En cada imagen, este volumen se desplazaba hacia adelante, así que se ajustaba la posición del borde. Se hizo un código en MATLAB para obtener los perfiles de velocidades en las orillas del volumen de control. Para cada instante de tiempo, se siguen dos procedimientos, uno para obtener la velocidad promedio del flujo y otro para calcular la fuerza.

Para calcular la velocidad promedio, se restan los perfiles de las orillas opuestas en la misma dirección,  $x$  ó  $y$ . Luego se hace un promedio de por cada dirección y, al final del código, se vuelve a promediar sobre todos los cuadros analizados. Así, se obtiene la velocidad promedio del fluido en cada dirección y se puede calcular la magnitud.

Para calcular la fuerza, se usan los perfiles de velocidad de las orillas del volumen de control y utilizando la ecuación 2.15 se calculan las integrales, el código se puede ver en el apéndice B.3. Las integrales se hicieron numéricamente siguiendo el método de Simpson compuesto. También se usó el programa de Dabiri para calcular los campos de presión en cada imagen y se hizo un código en MATLAB para generar imágenes a partir de estos datos. Queda pendiente en este análisis agregar la contribución de la fuerza de presión, aprovechando los campos de presión obtenidos.

Finalmente se comparó el análisis biomecánico y el análisis del fluido para obtener una correlación entre la fuerza en el fluido y el desplazamiento del nadador. Se desea encontrar la relación entre el movimiento del nadador con su propulsión y arrastre de tal forma que se pueda dar información para mejorar la técnica.

Es importante mencionar que en el siguiente paso de esta investigación se desea combinar estos resultados con los datos extraídos de un dinamómetro. Este dinamómetro fue desarrollado durante una estancia en la Universidad de Gotemburgo, Suecia, y tiene como ventaja que está pensado para su uso en albercas, con la precisión requerida para nadadores y con el cálculo de la fuerza en tiempo real, más información respecto a esta investigación se puede encontrar en el Apéndice A. Será importante corroborar los datos de fuerza que se extraen del fluido con aquellos medidos por el dinamómetro. En esta ocasión, ambas mediciones no pudieron realizarse simultáneamente, pero se realizaron pruebas con el dinamómetro, descritas en el apéndice A. Con los datos obtenidos de esas pruebas se puede comparar la magnitud de las fuerzas obtenidas para el fluido analizado en este trabajo.

## Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el análisis biomecánico y el análisis del flujo. Se analizaron en total cinco patadas, ya que de los videos en los que se puede analizar el flujo, sólo en cinco de ellos se puede ver la totalidad del movimiento de la patada.

### 4.1. Resultados del análisis biomecánico

Del análisis de los marcadores biomecánicos se extrajo la posición y velocidad del centro de masa del nadador en cada instante. Después se obtuvo una velocidad promedio  $V_{nadador} = 1.19 \pm 0.06m/s$ . También se extrajo la banda de normalidad para la aceleración del movimiento de las piernas de donde se obtuvo un promedio de la fuerza en cada punto para todos los conjuntos de datos. Se muestra esta banda de normalidad en la Figura 4.1.

Se puede ver en la figura que en las zonas de mayor y menor ángulo, la variación de la aceleración es mayor que en las otras zonas, esta variación en la aceleración puede afectar el desempeño del nadador en la producción de vórtices.

De la función obtenida en la Figura 4.1 se puede obtener una estimación del número de Strouhal, como se presentó en la ecuación 2.9. Con la velocidad promedio de  $1.19 \pm 0.06m/s$ , la frecuencia promedio de patada de  $1.52 \pm 0.16Hz$  y la amplitud promedio del desplazamiento del tobillo de  $0.54 \pm 0.005m$  se obtuvo un número de Strouhal de:

$$St = 0.68 \pm 0.11. \quad (4.1)$$

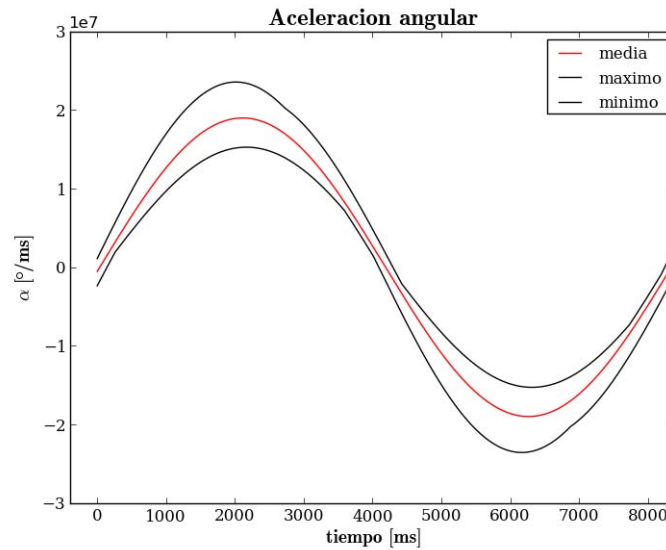


Figura 4.1: Gráfica de la aceleración angular entre la cadera, la rodilla y el tobillo como función del tiempo. Muestra el promedio de todos los eventos y su error, lo que nos da una idea de la consistencia del nadador al realizar el movimiento.

También con la velocidad promedio del nadador se puede obtener un estimado del número de Reynolds con la ecuación 2.1. Se tomó la viscosidad cinemática del agua a 25 grados y el resultado fue:

$$Re = 2.14 \pm 0.11 \times 10^6, \quad (4.2)$$

estos resultados coinciden con los reportados en la literatura [22, 24, 38] y en la tesis de licenciatura, lo cual implica que el nadador se encuentra dentro del intervalo óptimo para su desplazamiento.

## 4.2. Resultados del análisis del flujo

Se observó la formación de un vórtice en el área del pie mientras se desplaza hacia abajo y un par de vórtices con sentido opuesto entre ellos al realizar el cambio de dirección en el movimiento de los pies de abajo hacia arriba. Este fue el resultado obtenido también durante la tesis de licenciatura, lo cual indica que los resultados obtenidos con este método son reproducibles.

Además, se encontró un vórtice que se genera cerca de las rodillas, como sucedió también en el resultados reportados en la tesis de licenciatura. Sin embargo,



gracias a la precisión del software de Dantec se vió que este vórtice se encuentra sobre el marcador de la rodilla y no en el área superficial de ésta, lo que quiere decir que este vórtice no fue generado directamente por el nadador, si no por la presencia del marcador y su influencia en la velocidad final del nadador debería ser menor a la predicha en los resultados anteriores. En la Figura 4.2 se puede ver el vórtice sobre el marcador de la rodilla en el análisis de Dantec.

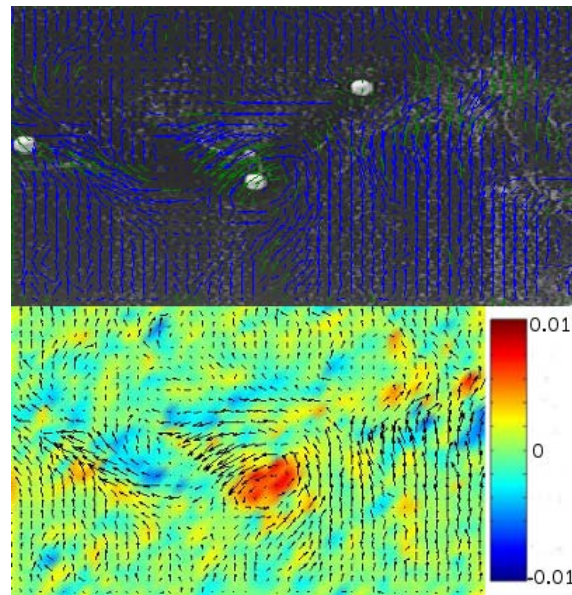


Figura 4.2: En la imagen de arriba, se muestra el campo de velocidades en un tiempo dado para el área alrededor de la rodilla y la pierna, los puntos blancos que se observan son los marcadores sobre el cuerpo del nadador. En la imagen de abajo, se muestra el campo de vorticidad en el mismo instante y se observa la formación de un vórtice cerca del área de la rodilla (color cálido). Al comparar la posición del vórtice en ambas imágenes, vemos que la rotación es generada por el marcador de la rodilla y las burbujas ascendentes.

En la Figura 4.3, se muestra el campo de velocidades en la zona detrás de los pies al instante del cambio de dirección cuando se forma un par de vórtices. Se muestran en color cálido o frío dependiendo del sentido de rotación. El vórtice de color cálido se generó en la zona del empeine del nadador y se desplazó hacia abajo. La presencia del marcador del tobillo generó errores en el seguimiento de este vórtice, debido a su cercanía. El vórtice de color frío coincidió con el que se aprecia sobre las plantas de los pies. Ambos se desplazaban hacia abajo y se desprendían cuando los pies cambiaban de dirección. En la figura, se puede ver como la velocidad del flujo entre ambos vórtices es mayor y en sentido opuesto al desplazamiento del nadador lo que

generó un chorro propulsor justo en el instante que los vórtices se desprendían del pie.

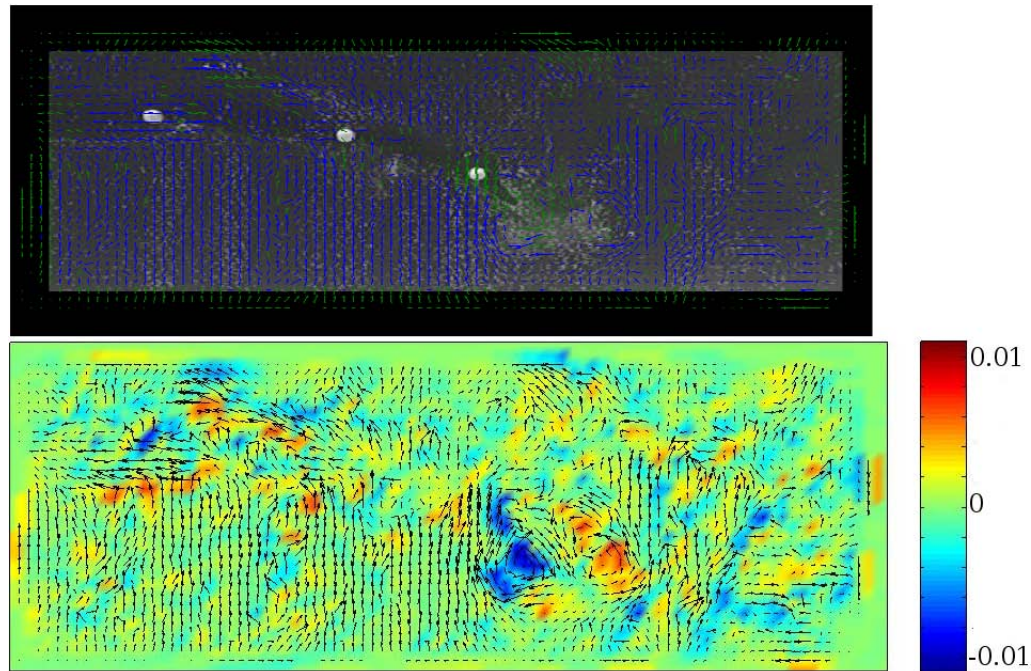


Figura 4.3: Campo de velocidades(imagen superior) y vorticidad (imagen inferior) del fluido para un tiempo detrás del movimiento de los pies mientras se mueven hacia abajo. Como el nadador avanza hacia la izquierda, el desplazamiento a la derecha de la velocidad y el cambio en la presión indican que se está generando propulsión.

Para los campos de presión, en la Figura 4.4 se encontró que en donde se generaban los vórtices detrás de los pies, se creaban dos zonas de baja presión y una zona de alta presión en el medio, como indica la teoría. Como se mencionó en la sección 2.2.1, lo que se ve como presión cero es la presión del fluido estático  $P_{ref}$ , por tanto puede haber presiones negativas, es decir, menores a la del fluido estático. Los centros de los vórtices tienen presión menor a  $P_{ref}$ .

Para el análisis del volumen de control se obtuvo la velocidad promedio de flujo  $V_{flujo} = 0.74 \pm 0.10 m/s$  y la fuerza en cada instante durante la patada que se puede ver en la Figura 4.5. Esta gráfica muestra la componente horizontal de la fuerza para medio ciclo de patada con un máximo de 100 N en la primera muestra y 60 N en la segunda. Éste es el momento en que el vórtice se desprende de los pies.

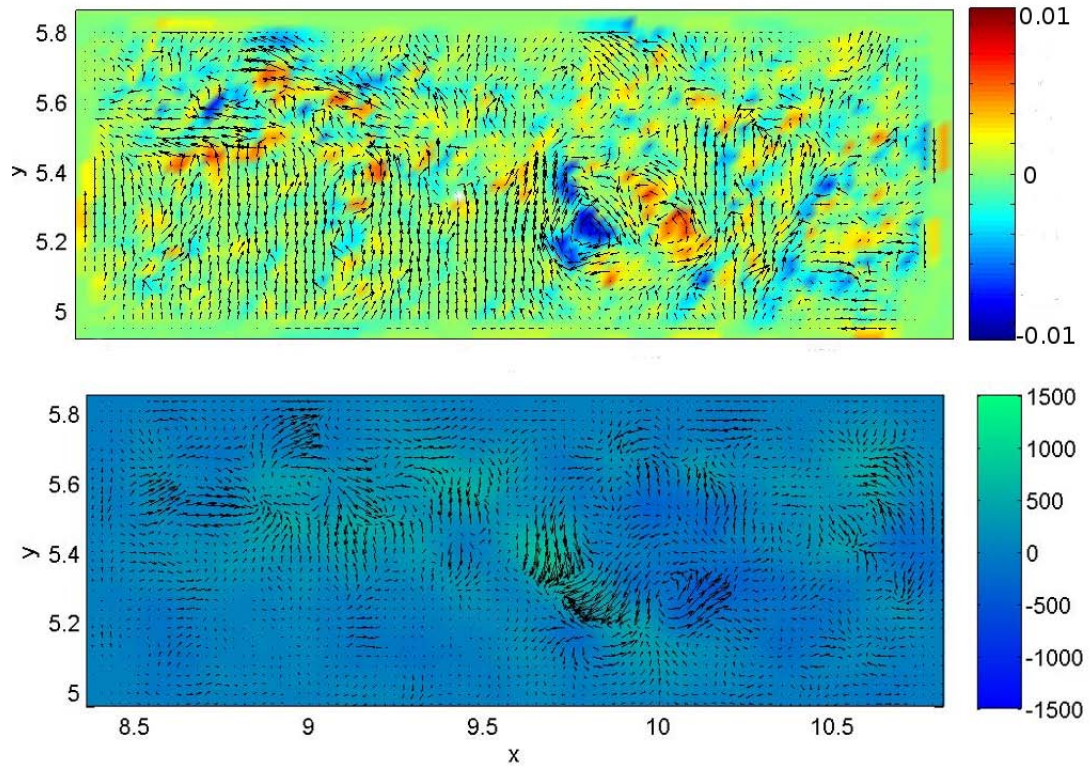


Figura 4.4: Campo de velocidades(imagen arriba) y presión (imagen abajo) del fluido para un tiempo detrás del movimiento de los pies mientras se mueven hacia abajo. Como el nadador avanza hacia la izquierda, el desplazamiento a la derecha de la velocidad y el cambio en la presión indican que se está generando propulsión.

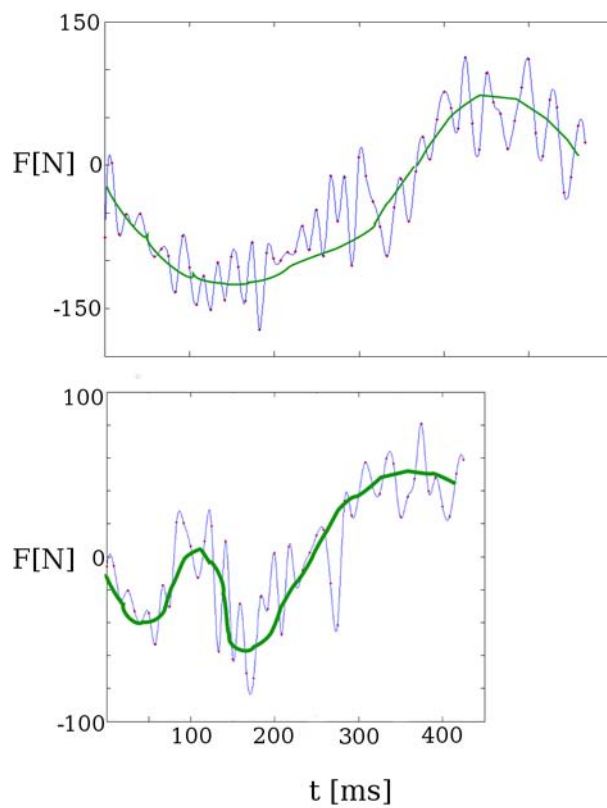


Figura 4.5: Gráficas de fuerza en el fluido para 2 medios ciclos de patada. En rojo los puntos extraídos de la integración numérica, en azul el ajuste por spline, en verde la trayectoria media.

## Discusión

En este capítulo se aborda la relevancia de los resultados encontrados en el movimiento del nadador y del flujo que produce. Además se analiza la relación que existe entre ambos análisis y cómo puede ayudar a mejorar el gesto motor del nadador. Para esto, se hará un recuento de los principales resultados expuestos en el capítulo anterior y se comentará su similitud y diferencia con otros resultados encontrados en la literatura.

También se presentan las ventajas y desventajas del método utilizado, y las modificaciones que se pueden realizar para mejorar la técnica desarrollada durante ambos trabajos de tesis. Se comenzará comentando los resultados encontrados para el flujo ya que son los de mayor importancia para el tema de esta tesis. Luego se mencionarán brevemente los resultados biomecánicos para compararlos con los encontrados para el flujo.

### 5.1. Análisis del flujo

En la tesis de licenciatura se encontró la formación de tres estructuras vorticales alrededor de las piernas. Estas estructuras mostraron ser las más relevantes para la propulsión y el arrastre. Dos de ellas se generaban en el área de los pies y la otra se generaba en el área cercana a la rodilla. En este trabajo se pueden encontrar las mismas tres estructuras en los campos de velocidad y vorticidad.

Sin embargo, con el programa de Dantec se puede ver que el vórtice en el área de las rodillas es generado en su mayor parte por el marcador de la rodilla y no por el nadador. Esta diferencia se debe a que el paquete PIVlab no tiene forma de sobre-



poner la imagen original con el campo de velocidades. Esta operación se realizó con la asistencia del programa GIMP para edición de imágenes, lo cual generó errores en la posición del nadador al colocarlo sobre el campo de velocidades. Este problema desaparece al utilizar el programa de Dantec, ya que la superposición de la imagen y el campo se hace automáticamente y con precisión.

Es importante destacar que las magnitudes de los campos de velocidades realizados con PIVlab son similares a los encontrados con Dantec. Las mayores variaciones de velocidad ocurren en las regiones en las que las partículas son menos nítidas, que desafortunadamente son las de mayor interés para el análisis. Esta diferencia puede atribuirse a que durante la tesis de licenciatura, el filtrado de las imágenes se realizó con el programa ImageJ, en el que se generó un umbral fijo en la escala de grises de toda la imagen para escoger entre partículas y fondo.

El programa DynamicStudio hace el filtrado con un algoritmo que cambia este umbral para distinguir partículas en cada sección de la imagen. Además, el post-procesamiento de los datos tiene mayores opciones para eliminar las inconsistencias encontradas.

Para las estructuras que se generan cerca de los pies, los resultados coinciden con la tesis de licenciatura y los artículos mencionados en los antecedentes. El par de vórtices que se presentan detrás de los pies al momento del cambio de dirección señalan la existencia de un anillo vortical y un chorro propulsor que se mueve en la dirección opuesta a la dirección del desplazamiento del nadador.

Al comparar los campos de velocidades y los campos de presiones calculados con el programa de Dabiri, vemos que los resultados coinciden con los esperados, ya que en la región de los vórtices se encuentra una zona de baja presión. En medio de los vórtices, hay un chorro que es una área de alta presión ocasionada por el empuje de los pies cuando se van moviendo. Estos cambios en la presión y en la velocidad son similares a los reportados en Japón [4], lo que parece indicar que la formación de estas estructuras vorticales influyen en la propulsión del nadador. Para corroborar estos resultados será necesario incluir la contribución de la presión al cálculo de la fuerza.

Para corroborar este resultado, se hizo un seguimiento de la presión en el tiempo para un punto del volumen en el que se presentan altas presiones al momento del cambio de dirección. En la Figura 5.1 se presenta una gráfica del cambio de la presión en el tiempo en un punto de la malla por donde pasa el chorro propulsor. Se puede

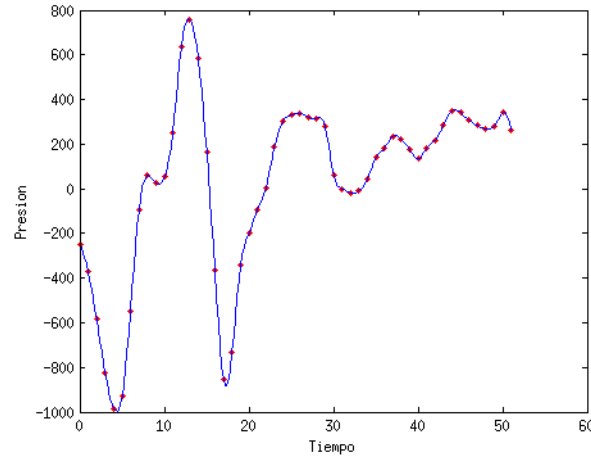


Figura 5.1: Gráficas la presión en el fluido para un punto de la malla por donde pasa el chorro propulsor, durante un ciclo de patada. En rojo los puntos extraídos del programa de Dabiri, en azul el ajuste por spline. La presión de referencia  $P_{ref} = 0$ .

ver que al inicio del movimiento la presión en este punto es cercana a  $P_{ref}$  y luego disminuye cuando uno de los vórtices atraviesa por esta zona. Cuando el chorro pasa por este punto la presión aumenta rápidamente y luego decrece con la misma rapidez. Cuando el vórtice se desprende se ve cómo la presión se va estabilizando lentamente a un valor cercano a  $P_{ref}$  otra vez. Este comportamiento es consistente en todo los puntos de la malla cercanos a esta zona y en los diferentes videos.

Una forma de cuantificar la propulsión en el nadador es calculando las velocidades y la fuerza en el volumen de control. En la Figura 5.2 se puede ver una gráfica de la diferencia de las velocidades en las orillas del volumen de control para un instante en donde se presenta el chorro propulsor. Aquí se ve cómo la velocidad en el área del nadador coincide con un perfil de velocidades propulsor. A partir de estos perfiles se puede cuantificar la fuerza en función del tiempo como muestran las gráficas de la Figura 4.5. Esta fuerza se debe comparar con aquella ejercida por el nadador. Este aspecto se comentará más adelante.

## 5.2. Análisis conjunto

De los datos reportados en la sección anterior, se pueden comparar las velocidades promedio del flujo  $V_{flujo}$  y del nadador  $V_{nadador}$ . Al relacionar la magnitud de ambas

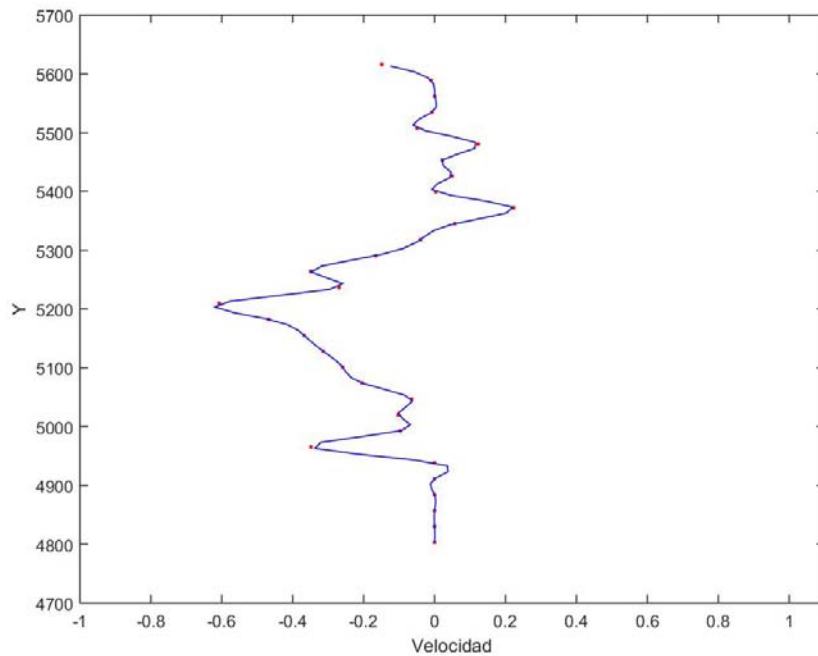


Figura 5.2: Gráfica de un perfil de velocidades en el fluido para un tiempo dado, el perfil que se presenta es la resta de las velocidades en las orillas del volumen del control. En rojo los puntos extraídos del campo de velocidades, en azul el ajuste por spline.

se obtiene que  $V_{nadador} = 1.6V_{flujo}$ . Esta proporción es menor que la obtenida durante la tesis de licenciatura, que fue de  $V_{nadador} = 5.5V_{flujo}$ . La diferencia en los valores puede deberse a que se cambió el método para calcular la velocidad promedio, ya que en este trabajo se utiliza la técnica del volumen de control. En la Figura 5.3 se presenta una gráfica de los vectores velocidad  $V_{nadador}$  y  $V_{flujo}$  obtenidos en este trabajo, se puede apreciar que la dirección de los vectores es opuesta, lo que indica que el nadador se mueve en dirección opuesta del flujo. Es importante destacar que la contribución de la fuerza de presión no ha sido cuantificada, por lo que es posible que el vector velocidad del flujo tenga un cambio considerable al incluir este parámetro.

Aunque no se tienen mediciones de la fuerza ejercida por el nadador en estos experimentos, se pueden comparar las gráficas de fuerza en el flujo  $F_{N1}$  con aquellas reportadas en el trabajo desarrollado en Suecia, en el cuál se construyó un dinamómetro para nadadores. La descripción de este trabajo se encuentra en el apéndice A. En la Figura 5.4 se muestra una gráfica de fuerza contra tiempo para



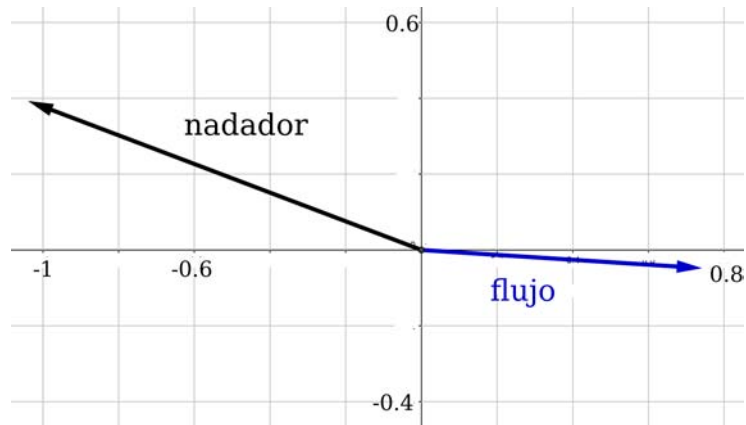


Figura 5.3: Representación vectorial de las velocidades obtenidas después del análisis para el nadador y el fluido

un nadador de alto rendimiento  $F_{N2}$ . De manera cualitativa, se nota que la forma de un ciclo es similar a la forma obtenida en la Figura 4.5. De manera cuantitativa, los valores máximos se encuentran en el mismo orden de magnitud y guardan una proporción de  $F_{N1} = 0.62F_{N2}$ . Este resultado parece lógico, porque un nadador hombre de alto rendimiento ( $F_{N2}$ ) pateará con mayor fuerza que una mujer de nivel medio ( $F_{N1}$ ).

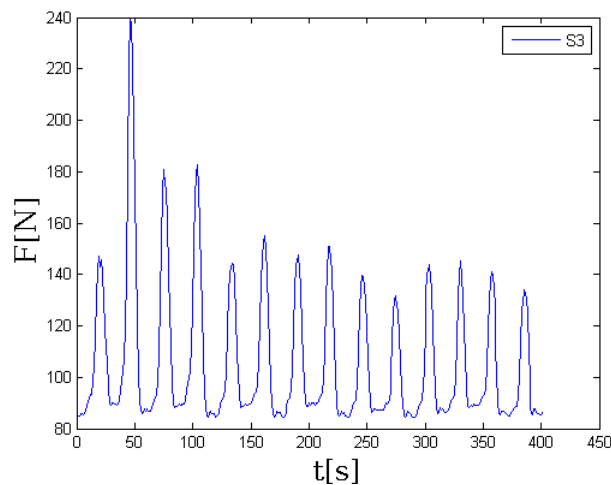


Figura 5.4: Gráficas de fuerza obtenidos con el dinamómetro en Suecia, para un nadador juvenil de alto rendimiento haciendo patada de mariposa.

Sería interesante que en la siguiente etapa de esta investigación se puedan realizar

ambas mediciones al mismo tiempo. Es decir, el uso del dinamómetro de natación estática al mismo tiempo que los videos de PIV, tendría las siguientes ventajas:

- Al mantener al nadador en una misma posición, el volumen del control también se encontrará fijo.
- El cálculo de la fuerza en el volumen podrá compararse directamente con la fuerza obtenida con el dinamómetro.
- Los videos visualizarán al nadador completo en todo momento y el análisis biomecánico podrá hacerse de forma más completa.
- La fuerza ejercida en cada segmento corporal podrá ser comparada con los cambios de presión y velocidad en todo tiempo.

Para garantizar resultados útiles en la siguiente etapa, se debe considerar la sincronización de la cámara de video y el dinamómetro. De esta forma, se podrán comparar uno a uno los resultados de los campos de velocidad y los del sensor. En caso de no ser posible, se deberá encontrar la manera de señalar los momentos de inicio y de término del análisis. Así, por medio de una interpolación de datos se podría obtener una relación uno a uno.

Para continuar con una mejora de la técnica desarrollada, se pueden tomar en cuenta los siguientes cambios:

- Uso de una cámara de mayor resolución para aumentar la precisión del análisis en PIV.
- Homogeneización del tamaño de las burbujas producidas, para reducir los errores presentados por cúmulos de burbujas.
- Disminución del tamaño de los marcadores biomecánicos para evitar su influencia en el análisis del fluido.

## Conclusiones

Se concluye que las estructuras vorticales que se encontraron de forma consistente ayudan a la propulsión del nadador. Estos resultados coinciden con los mencionados en los antecedentes. Se encontró que el vórtice que se presenta cerca de la rodilla del nadador es producido en su mayor parte por el marcador y no por el movimiento del nadador. Al descartar esta estructura como parte del análisis, se observa un cambio drástico en los valores de las velocidades promedio del flujo en comparación con la tesis de licenciatura. Se necesita hacer nuevos experimentos con marcadores más pequeños para corroborar que la estructura no interviene en el arrastre del nadador, ya que es posible que la estructura todavía se presente pero su tamaño sea menor.

El uso del programa propuesto por Dabiri ayuda a un mejor entendimiento de la propulsión del nadador, ya que los cambios en la posición de las zonas de alta y baja presión cerca del nadador en las distintas etapas de su movimiento dejan claro cómo el fluido ejerce una fuerza propulsora. Se necesita agregar la contribución de los campos de presión en el cálculo de la fuerza realizado en el volumen de control para cuantificar la influencia de los cambios de presión en la propulsión. También, se necesita realizar el cálculo de los campos de presión con las máscaras propuestas en el artículo de Dabiri para evitar que las trayectorias de integración crucen por donde se encuentra el cuerpo del nadador. Así, se mejorará la precisión de los datos en el área cercana a las superficie del nadador. Sin embargo, en las áreas con presencia de estructuras vorticales, los campos de presión que se presentan aquí coinciden con los obtenidos en otros experimentos [4, 5, 8].

El análisis en el volumen de control mejoró el cálculo de la velocidad promedio del flujo. Además, el cálculo de la fuerza en el flujo coincide cualitativamente con la

fuerza estimada en el análisis biomecánico y con los datos obtenidos del dinamómetro. Será importante realizar pruebas simultáneas con el PIV y el dinamómetro para confirmar la similitud de ambos análisis y, posteriormente relacionarlos con la propulsión y mejora de la técnica en los nadadores.

La consistencia de las estructuras encontradas y el uso de técnicas similares en otros grupos de investigación sugieren que los resultados obtenidos de este análisis pueden ser útiles para los atletas. Si se pueden realizar este tipo de pruebas de manera periódica, los nadadores podrían cuantificar su progreso técnico y su desarrollo de la fuerza. Esto junto con el consejo de los entrenadores y preparadores físicos podría ser un importante avance en el desarrollo de la natación. Resultados como los presentados en este trabajo han permitido que más entrenadores acepten que la técnica de natación no debe ser igual para todos los nadadores, sino que depende de varios factores (flexibilidad, fuerza, dimensiones, flotabilidad, etc.). Este tipo de estudios permitirán individualizar la técnica ya que para cada nadador se puede obtener un perfil de propulsión, arrastre y fuerza, que sería cuantificado y monitoreado en ciertas etapas del entrenamiento. La colaboración entre entrenadores y científicos es necesaria para dar mayor difusión a este tipo de técnicas.

# Apéndices

## Sensor de fuerza para natación

Como se ha mencionado anteriormente en este trabajo, la mejora del desempeño deportivo ha sido la finalidad de mucha investigación. Para ello se ha requerido de aplicar y desarrollar nuevas tecnologías. En el caso de la natación, además de aditamentos y prendas, se han desarrollado pruebas que cuantifican el avance de los nadadores, una de ellas es la natación estática. Las pruebas de natación estática (Figura A.1) se basan en detener al nadador a un punto fijo para aumentar la resistencia del nado. A esta idea se le añadió el uso de dinamómetros para medir la fuerza que aplica el nadador.

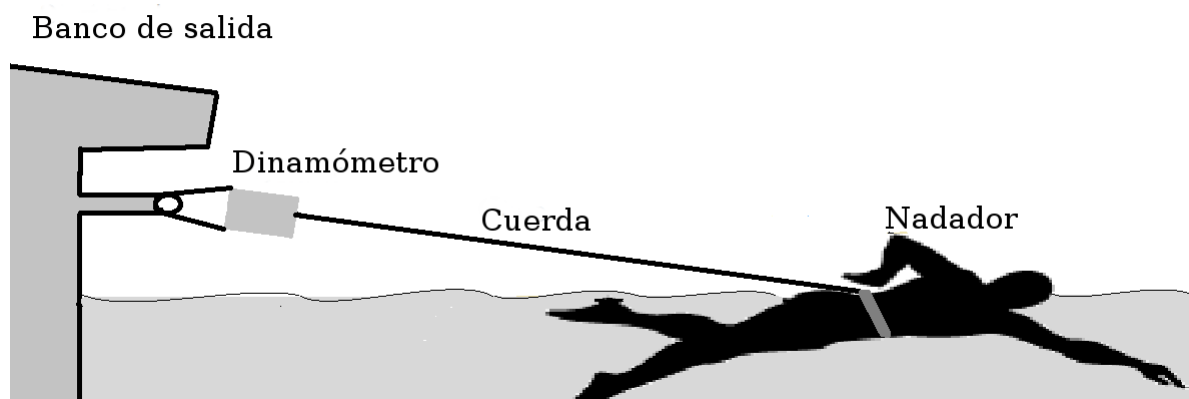


Figura A.1: Esquema representativo de las pruebas de natación estática. El nadador se sujeta a una referencia, para medir la fuerza aplicada por el nadador se puede introducir un dinamómetro entre el nadador y la referencia.

Las medidas de fuerza realizadas en estas pruebas han demostrado ser útiles en nadadores de distintas edades [39] y hasta en los distintos estilos [40, 41], existen

varios artículos donde se presentan los protocolos utilizados y sus resultados [42]. Estos y otros artículos han demostrado que la natación estática es un buen índice del progreso de los nadadores [43–45]. Hoy en día, estas pruebas se utilizan en el entrenamiento diario de los nadadores de alto rendimiento.

Sin embargo, para realizar este tipo de pruebas se necesita de cierto equipo que puede resultar caro, lo que limita la aplicación de las mismas a aquellos nadadores que las puedan pagar o a los grupos de investigación con suficientes fondos. Por esta razón, en la Universidad de Gotemburgo, con la asistencia de Johan Setteberg, consultor del Equipo Nacional de Natación Noruego, se decidió construir un dinamómetro basado en tecnología de bajo costo, de forma que el dispositivo desarrollado pueda ser accesible a una gama más amplia de personas.

Para tal fin, se decidió utilizar sensores piezoresistivos de marca FlexiForce debido a su resistencia y bajo costo, además de que ya ha sido utilizado en otras aplicaciones biomecánicas [46]. El modelo utilizado fue el A401, este sensor consiste en dos láminas de poliéster recubiertas de un material conductor; en medio de ambas, se encuentra una capa de tinta sensible a la presión. Cuando el sensor no está presionado la resistencia es muy alta y cuando se comienza a aplicar presión la resistencia va disminuyendo. Siguiendo la metodología que se presenta en el artículo de Vecchi [46], se utilizó un domo semicircular sobre el área sensible para mantener constante el área en que se aplica la presión. Si el área no varía, entonces la presión será proporcional a la fuerza aplicada sobre el sensor; sólo se requiere de una calibración previa.

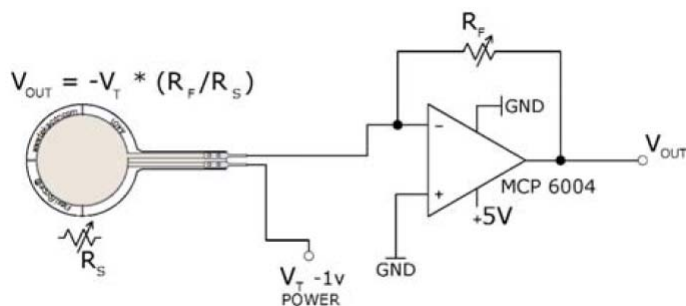


Figura A.2: Esquema de circuito sugerido por el proveedor de los sensores.

De acuerdo con la hoja de datos [47], el sensor puede medir hasta 30 kN de carga usando el circuito que se muestra en la Figura A.2. La respuesta del sensor a la

carga es lineal, pero la respuesta del voltaje con la resistencia sigue la ecuación:

$$V_{out} = -V_T * \frac{R_F}{R_S} \quad (A.1)$$

donde  $V_{out}$  es el voltaje de salida,  $V_T$  es el voltaje de entrada,  $R_F$  es la resistencia fija en el circuito y  $R_S$  es la resistencia en el sensor debido a la carga. Cuando no se aplica presión sobre el sensor, la resistencia es de 5 MΩ aproximadamente. Con esta relación se puede estimar la resistencia  $R_F$  necesaria para limitar el intervalo de medición a 500 N. En este caso  $R_F = 15k\Omega$ .

Se hizo una caja en impresora 3D con la finalidad de que pudiera ser resistente al agua. Se usaron algunos ganchos y cables para colocar esta caja en las agarraderas del banco de salida. El desarrollo electrónico se hizo bajo la plataforma LabView de National Instruments y con ella se generó un programa independiente para la toma de datos (Figura A.3).

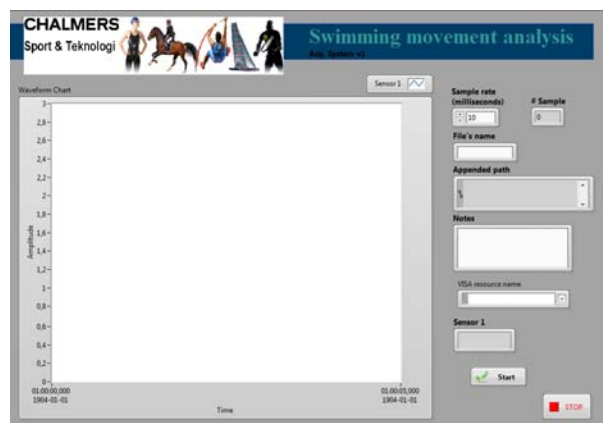


Figura A.3: Proceso de análisis biomecánico

Para calibrar el sensor, se usaron pesas de entre 1kg y 20 kg. La calibración se hizo en un gimnasio donde se pueden encontrar estos pesos y estructuras fuertes para detener el sensor. Se muestra el arreglo experimental en la Figura A.4. El protocolo consistió en colocar cierta masa y capturar 1000 lecturas aproximadamente, luego aumentar el peso y continuar con la captura de datos hasta los 50kg. Por cada masa, se hizo un promedio de las lecturas obtenidas y se comparó con la fuerza aplicada por la masa. Se estimó la fuerza usando que  $F = m \cdot g$  con  $g = 9.81ms^{-1}$ . Se hizo un



ajuste lineal entre la fuerza estimada y el inverso del voltaje obtenido en el sensor:

$$F = \frac{421.045}{V - 5.094} \quad (\text{A.2})$$

este ajuste tiene un coeficiente de correlación  $R^2 = 0.96$ . Con este ajuste y la ecuación A.1 se dedujo directamente que para medir pesos mayores a 50 kg se requería una resistencia menor a 17 k $\Omega$ , por lo que la elección de 15 k $\Omega$  fue acertada.

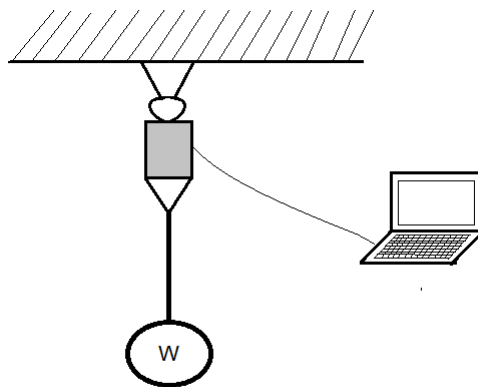


Figura A.4: Esquema del arreglo experimental para calibrar el sensor en el gimnasio

La desviación estándar del ajuste fue del 5 %, con lo que se obtuvo una resolución en el sensor de 1 N. Esta resolución es igual a la de algunos dispositivos, como el utilizado por el consultor del equipo actual de Noruega.

Luego de la calibración, se realizaron pruebas con 5 nadadores juveniles de nivel nacional en Suecia. Tres hombres y dos mujeres, entre los 18 y 20 años de edad, fueron medidos en su mejor estilo. Se realizaron pruebas de 15 segundos a máxima velocidad para el estilo completo y para la brazada y la patada por separado.

Los resultados obtenidos fueron consistentes con los publicados en otros artículos para los diferentes estilos [39, 40]. En la Figura A.5 se muestra una imagen de los datos obtenidos con nuestro dispositivo para el estilo de mariposa. Luego en la Tabla A.1 podemos ver una tabla de los fuerza mínima, máxima y promedio para cada nadador. Los promedios y valores máximos coincidieron con los resultados publicados en otros artículos [41]. Sin embargo, los valores mínimos tenían una

Tabla A.1: Resultados estadísticos de las pruebas con nadadores, 5 nadadores con su mejor estilo, realizando estilo completo y solo brazada

Nadador/ Estilo	Mínimo [N]	Medio [N]	Máximo [N]
S1/Estilo Libre			
Completo	100.14	107.29	115.28
Sólo brazos	93.92	100.59	107.79
S2/Mariposa			
Completo	86.55	95.32	118.45
Sólo brazos	84.35	90.43	104.51
S3/Mariposa			
Completo	84.27	107.74	239.13
Sólo brazos	82.73	90.42	107.65
S4/Pecho			
Completo	84.27	105.03	197.93
Sólo brazos	82.73	90.04	110.27
S5/Estilo Libre			
Completo	90.66	94.88	101.80
Sólo brazos	84.27	90.90	101.08

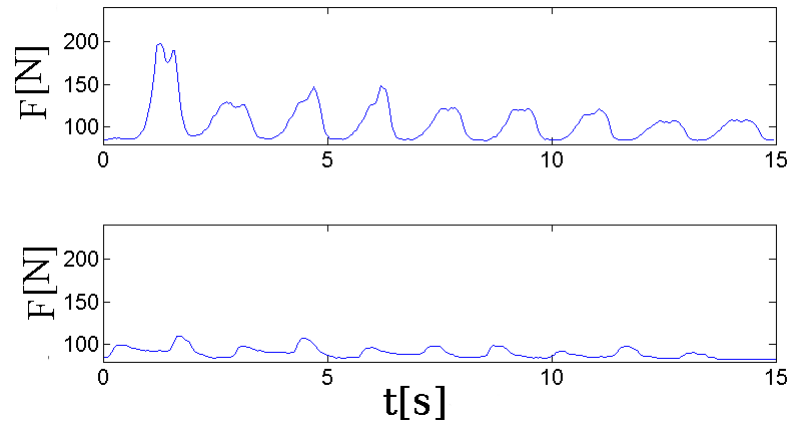


Figura A.5: Gráficas de fuerza en el tiempo para la técnica de mariposa. La primera gráfica presenta los resultados de la técnica completa y la segunda los resultados para la brazada únicamente

diferencia notable. Para entender qué es lo que sucede en este caso, se requiere de mayor investigación.

Se puede concluir que el dispositivo diseñado cumple con el objetivo de ser de bajo costo, funcionar en el intervalo necesario para los nadadores y ser de fácil uso para aquellos familiarizados con las pruebas de natación estática. Es necesario, una nueva calibración para mejorar la resolución del dispositivo e indagar en la razón por la que los valores mínimos no coinciden con los de otras investigaciones.

## Programas utilizados para el análisis

### B.1. Programa para calcular la vorticidad

```

1  %% Vorticidad para csv de Dantec. 04-Feb-16.
2  % Reyna Guadalupe Ramirez de la Torre.
3  % Programa para graficar campos de velocidades y vorticidad
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5
6  lista = dir('*.csv');    %Leer los nombres de los archivos csv
7
8  long = size(lista,1); % Total de nombres
9  a = 119;    % Longitud en x
10 b = 66;    % Longitud en y
11
12 % Cambio de escala
13 escala = 3197.1/1888; %Total en mm/real vs total en mm/imagen
14 % Limites para las graficas
15 x1 = escala*4948;
16 x2 = escala*6420;
17 y1 = escala*2916;
18 y2 = escala*3466;
19
20 % Archivo por archivo leer y calcular
21 for i = 1:long
22     M = csvread(lista(i).name,9,2); %Lee cada archivo
23     x = M(:,1);    %Separa X, Y y sus velocidades
24     y = M(:,2);
25     U = M(:,3);
26     V = M(:,4);
27     spdmax = max(max(U),max(V)); %Encuentra la velocidad maxima
28
29     % Dar forma de matriz
30     x = reshape(x,a,b)';
31     y = reshape(y,a,b)';
32     u(:,:,i) = reshape(U,a,b)';
33     v(:,:,i) = reshape(V,a,b)';
34     % Cambiar escala
35     x = x.*escala;
36     y = y.*escala;
37     u = u.*escala;
38     v = v.*escala;

```

```

39
40 [curlz,cav] = curl(x,y,u(:,:,i),v(:,:,i)); % Obtener la voriticidad y velocidad angular
41 %Producir mapa de colores
42 pcolor(x,y,cav);
43 axis equal % Mantiene escala en los ejes
44 xlim([x1 x2]) % Limita a donde hay informacion
45 ylim([y1 y2])
46 caxis([-11e-3,11e-3]) %Mantiene fija la escala de colores
47 shading interp
48 colorbar
49
50 hold on
51 fig=quiver(x,y,u(:,:,i)/spdmax,v(:,:,i)/spdmax,2,'k');
52 axis([x1 x2 y1 y2]);
53 xlabel('x'); ylabel('y');
54 hold off
55
56 saveas(fig,strcat(lista(i).name,'.jpg'),'jpg'); % Guarda la imagen
57 pause(0.5);
58
59 end

```

## B.2. Programa para graficar los campos de presión

```

1  %% Programa para imprimir mapas de presion 06-abril-16
2  % Reyna Guadalupe Ramirez de la Torre
3  % Utiliza los datos obtenidos con el programa de Dabiri
4  % para imprimir los campos de presion y sus gradientes
5  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6
7  lista = dir('datos60_presion*.dat'); %Leer los nombres de los archivos csv
8
9  long = size(lista,1); % Total de nombres
10 a = 119; % Longitud en x
11 b = 66; % Longitud en y
12 x1 = 8.36;
13 x2 = 10.82;
14 y1 = 4.96;
15 y2 = 5.85;
16
17 % Archivo por archivo leer y calcular
18 for i = 55:57
19
20     M = importdata(lista(i).name); %Lee cada archivo
21     x = M(:,1); %Separa X, Y y los gradientes de presion
22     y = M(:,2);
23     DPX = M(:,5);
24     DPY = M(:,6);
25     P = M(:,7); % El valor absoluto de la presion
26
27     % Dar forma de matriz
28     x = reshape(x,b,a)';
29     y = reshape(y,b,a)';
30     dpX(:,:,i) = reshape(DPX,b,a)';
31     dpY(:,:,i) = reshape(DPY,b,a)';
32     p(:,:,i) = reshape(P,b,a)';
33     presmax = max(max(max(max(dpX)),max(max(dpY))));
34

```

```

35 %Producir mapa de colores
36 pcolor(x,y,p(:,:,i));
37 axis equal % Mantiene escala en los ejes
38 colormap('winter')
39 xlim([x1 x2]) % Limita a donde hay informacion
40 ylim([y1 y2])
41 caxis([-1500,1500]) %Mantiene fija la escala de colores
42 shading interp
43 colorbar
44
45 hold on
46 fig=quiver(x,y,dpx(:,:,i)/presmax,dpy(:,:,i)/presmax,2,'k');
47 axis([x1 x2 y1 y2]);
48 xlabel('x'); ylabel('y');
49 hold off
50
51 saveas(fig,strcat(lista(i).name,'2','.jpg'),'jpg'); % Guarda la imagen
52 pause(0.5);
53
54 end

```

### B.3. Programa para calcular las velocidades y fuerzas en el volumen de control

```

1 %%%%% Analisis de Volumen de control %%%%%%%%%%%%%%
2 % Reyna Guadalupe Ramirez de la Torre
3 % Ultima modificacion: 09-Mayo-2016
4 %
5 % Programa para calcular el momento y la fuerza por
6 % el metodo de volumen de control usando los datos de
7 % campos de velocidad obtenidos con PIV
8 %%%%%%%%%%%%%%
9
10 % Parametros necesarios
11 rho = 1.0; % Densidad del agua
12 nx = 119; % Longitud en X
13 ny = 66; % Longitud en Y
14 pixdatx = 26.8664; %numero de mm en celda en x
15 pixdaty = 26.6826; %numero de mm en celda en y
16 %pos = load('v60-1.dat');
17
18 % Cambio de escala
19 escala = 3197.1/1888; %Total en mm/real vs total en mm/imagen
20 % Limites para las graficas
21 x1 = escala*4948;
22 x2 = escala*6420;
23 y1 = escala*2916;
24 y2 = escala*3466;
25
26 %Leer de cada archivo los datos y cortar el volumen de control
27 lista = dir('datos*.dat'); %Leer los nombres de los archivos csv
28 long = size(lista,1); % Total de nombres
29
30 for i = 1:long
31 M = csvread(lista(i).name,0,0); %Lee cada archivo
32 x = M(:,1); %Separa X, Y y sus velocidades
33 y = M(:,2);

```

```

34 U = M(:,3);
35 V = M(:,4);
36 spdmax = max(max(U),max(V));
37
38 % Dar forma de matriz
39 x = reshape(x,nx,ny)';
40 y = reshape(y,nx,ny)';
41 u(:,:,i) = reshape(U,nx,ny)';
42 v(:,:,i) = reshape(V,nx,ny)';
43
44 [curlz,cav] = curl(x,y,u(:,:,i),v(:,:,i)); % Obtener la vortitividad y velocidad angular
45 %Producir mapa de colores
46 fig = figure(1);
47 pcolor(x,y,cav);
48 axis equal % Mantiene escala en los ejes
49 xlim([x1 x2]) % Limita a donde hay informacion
50 ylim([y1 y2])
51 caxis([-11e-3,11e-3]) %Mantiene fija la escala de colores
52 shading interp
53 colorbar
54
55 hold on
56 fig=quiver(x,y,u(:,:,i)/spdmax,v(:,:,i)/spdmax,2,'k');
57 axis([x1 x2 y1 y2]);
58 xlabel('x'); ylabel('y');
59 %% Seleccionar en pantalla punto de integracion
60 down = 20;
61 up = 50;
62 [c,d] = ginput(1);
63 c = int16((c-min(min(x)))/pixdatx);
64 v2 = u(down:up,c,i);
65 rightlinex =x(down:up,c);
66 rightliney =y(down:up,c);
67 plot(rightlinex,rightliney,'m-');
68 hold off
69
70 %Calcular splines para las velocidades
71 yy = y(down,c):10:y(up,c);
72 v2s = spline(y(down:up,c),v2,yy);
73
74
75 fig2 = figure(2);
76 plot(-v2,y(down:up,c),'r.',-v2s,yy,'b-');
77 xlabel('Velocidad'); ylabel('Y');
78 axis([-1.0 1.1 4700 5700]);
79 saveas(fig2, strcat(lista(i).name, '_vel', '.jpg'), 'jpg'); % Guarda la imagen
80 pause(1);
81
82 %Obtener la velocidad
83 velup(i) = max(v2s);
84 veldn(i) = min(v2s);
85
86 %% Tomar sumas de orillas de volumen de control e integrar
87 n = size(v2s,2);
88 h = 10;
89
90 suma1 = sum(v2s(2:2:n-1));
91 suma2 = sum(v2s(3:3:n-2));
92 int_v2 = (h/3.0)*(v2s(1)+4.0*suma1+2.0*suma2 + v2s(n));
93
94 Fx(i) = -rho *(int_v2)
95
96 end
97 %Obtener velocidad promedio
98 velmax = mean(velup);

```

```
99 | velmin = mean(veldn);  
100 | prom = (velmax-velmin)/2
```



# Bibliografía

- [1] FINA. "Statistics. Swimming Records". Obtenido de: [http://www.fina.org/H20/index.php?option=com\\_content&view=article&id=1271&Itemid=633](http://www.fina.org/H20/index.php?option=com_content&view=article&id=1271&Itemid=633).
- [2] Sánchez, A. (2013). "El aporte de la Ciencia y la Tecnología al deporte". Primer Encuentro Transdisciplinario de Ciencia y Deporte. UNAM.
- [3] Ramírez de la Torre, R.G.(2014) "Sistema de Velocimetría para Análisis de Nado". Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM. Obtenido en: <http://bc.unam.mx/index-alterno.html>
- [4] Miwa, T., Matsuuchi, K., Shintani, H., Kamata, E. and Nomura, T. (2006). "Unsteady Flow Measurement of Dolphin Kicking Wake in Sagittal Plane Using 2C-PIV." Biomechanics and Medicine in Swimming X. Revista Portuguesa de Ciencias del Deporte, Volumen 6, Suplemento 2.
- [5] Legac, P., Wei, T., Fish, F., Williams, T., Mark, R. and Hutchison, S. (2008). "Digital Particle Image Velocimetry Of Mammalian Swimming." Physics Of Fluids 20.9 : 091105. Academic Search Complete. Web. 13 Mar. 2014.
- [6] Lyttle A., Blanksby B., Elliot B. and Lloyd D. (2000). "The effect of depth and velocity on drag during the streamlined glide". Journal of Sports Science, 18(10), 801-807.
- [7] Jiskoot, J. and Clarys, J.P. (1975). "Swimming II", 105-109. University Park Press, Baltimore.
- [8] Arellano, R. (1999). "Vortices and Propulsion". In R. Sanders & J. Linsten (Eds.), SWIMMING: Applied Proceedings of the XVII International Symposium on Biomechanics in Sports(1 ed., Vol. 1, pp. 53-66).

- 
- [9] Bixler, B. and Schloder, M. (1996). "Computational fluid dynamics: an analytical tool for the 21st century swimming scientist." *Journal of Swimming Research*. 11, 4-22.
- [10] Rouboa, A., Silva, A., Leal, L., Rocha, J. and Alves, F. (2006). "The effect of swimmer's hand/forearm acceleration on propulsive forces generation using Computational Fluid Dynamics." *Journal of Biomechanics*, 39(7), 1239- 1248.
- [11] Fish, F.E., Legac P., Williams T.M. and Wei, T (2014). "Measurement of hydrodynamic force generation by swimming dolphins using bubble DPIV." *The Journal of Experimental Biology* 217, pp. 252-260.
- [12] Hsu, T.Y.(2000) "Turbulent Secondary Flow in the Mixed Boundary Corner Formed by a Horizontal Free Surface and a Vertical Solid Wall." Tesis de Maestría, Rutgers, The State University, New Brunswick, NJ, USA.
- [13] Fish, F.E.(1993) "Power output and efficiency of swimming bottlenose dolphins." *Journal of Experimental Biology* 185, pp. 179-193.
- [14] Fish, F.E. (1998) "Comparative kinematics and hydrodynamics of odontocete cetaceans: morphological and ecological correlates with swimming performance." *Journal of Experimental Biology* 201, pp. 2867-2877.
- [15] Webb, P.W.(1975) "Hydrodynamics and Energetics of Fish Propulsion." Ottawa: Department of Environment, Fisheries and Marine Service.
- [16] Crowe, C., Elger, D., Williams, R., Roberson, J.(2009). "Engineering Fluid Mechanics." John Wiley & Sons.
- [17] Kundu, P.K., Cohen, I.M.(2002). "Fluid Mechanics". Second edition, Academic Press.
- [18] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1987). "Course of theoretical physics by L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 6." Butterworth-Heinemann. Pergamon Press.
- [19] Centeno, M. (2013). "Efecto del Desfase en la Eficiencia de Vuelo de un Insecto." Tesis de Maestría, IIM, UNAM. Obtenido de: <http://bc.unam.mx/index-alterno.html>
-

- 
- [20] Chong, M.S., Perry, A.E., Cantwell, B.J. (1990) "A general classification of three dimensional flow fields". *Phys. Fluids A* 2, 765-777.
- [21] Chakraborty, P., Balachandar, S., Adrian, R.J. (2005) "On the relationships between local vortex identification schemes". *Journal of Fluid Mechanics* 535, 189-224.
- [22] Triantafyllou, M. S., Triantafyllou, G. S. and Yue, D. K. P. (2012). "Hydrodynamics of fishlike swimming." *Annual Review of Fluids Dynamics*, vol. 32, no. 1, pp. 33-53.
- [23] Pier, B. (2002). "On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake." *Journal of Fluid Mechanics*. 458, 407–417.
- [24] Eloy, C. (2012). "Optimal Strouhal Number for Swimming Animals." *Journal of Fluids and Structures*, 205-218.
- [25] Arellano, R., Pardillo, S. and Gavilán, A. (2003). "Usefulness of the Strouhal Number in Evaluating Human Underwater Undulatory Swimming." *Biomechanics and Medicine in Swimming IX*, 33-38. Université de Saint Etienne.
- [26] Willert, C. E., Gharib, M.(1991). "Digital Particle Image Velocimetry." Springer-Verlag, Vol. 10, pp. 205-208.
- [27] Gurka, R., Liberzon, A., Hefetz, D., Rubinstein, D., Shavit, U. (2000) "Computation of pressure distribution using PIV velocity data" in *Proceedings of the third International Workshop on Particle Image Velocimetry*, Santa Barbara, California, September 1999, pp.671-676.
- [28] Liu, X., Katz, J. (2006) "Instantaneous pressure and material acceleration measurements using a four-exposure PIV system. *Experimental Fluids* 41, 227-240.
- [29] Dabiri, J.O., Bose, S., Gemmel, B.J., Coli, S.P. and Costello, J.H. (2014) "An algorithm to estimate unsteady and quasi-steady pressure fields from velocity field measurements." *The Journal of Experimental Biology* 217, pp. 331-336.
- [30] Fox, R.W., McDonald, A.T., Pritchard, P. J.(1973) "Introduction to Fluid Mechanics." John Wiley & Sons, Inc.
-

- 
- [31] Le Veau, Barney (2008). "Biomecánica del Movimiento Humano." Editorial Trillas. México.
- [32] Fujinawa, O., Kondo, Y., Tachikawa, K., Jigami, H. and Matsuga, H. (2010). "Athletic Rehabilitation of Platform Diver for Return to Competition after Shoulder Dislocation." Biomechanics and Medicine in Swimming XI. Proceedings of the International Symposium for Biomechanics and Medicine in Swimming.
- [33] Costa, L., Ribeiro, J., Figueredo, P., Fernandes, R., Marinho, D., Silva, A., Rouboa, A., Vilas-Boas, J. and Machado, L. (2010). "Hydrodynamic Characterization of the First and Second Glide Positions of the Underwater Stroke Technique in Breaststroke." Biomechanics and Medicine in Swimming XI. Proceedings of the International Symposium for Biomechanics and Medicine in Swimming.
- [34] Arellano, R. (2002). "Underwater Undulatory Swimming: Kinematics Characteristics, Vortex Generation and application During Start, Turn and Swimming Strokes." Universidad de Granada.
- [35] Maglischo, E.W. (2003). "Swimming Fastest." Champaign: Human Kinetics.
- [36] Cossor J. and Masson, B. (2001). "Swim Start Performance at the Sidney 2000 Olympic Games." Proceedings on Swim Sessions of the XIX Symposium on Biomechanics in Sports.
- [37] Hovel, N., Elpiot, M., Andréé, F. and Hellard, H. (2010). "Kinematics Analysis of Undulatory Underwater Swimming during Grab Start of National Level Swimmers." Biomechanics and Medicine in Swimming XI. Proceedings of the International Symposium for Biomechanics and Medicine in Swimming.
- [38] Biewener, A. (2003). "Animal Locomotion." Oxford University Press.
- [39] Dopsaj M, Matković I, Zdravković I, (2001) "The relationship between 50m-freestyle results and characteristics of tethered forces in male sprint swimmers: A new approach to tethered swimming test." In Facta Universitatis, Series: Physical Education and Sport
-

- [40] Morouço P, Keskinen KL, Vilas-Boas JP, Fernandes RJ (2011) "Relationship between tethered forces and the four swimming techniques performance." *J Appl Biomech* 27(2):161-169
- [41] Morouço PG, Marinho DA, Keskinen KL, Badillo JJ, Marques MC (2014) "Tethered swimming can be used to evaluate force contribution for short-distance swimming performance." *The Journal of Strength & Conditioning Research* 28(11):3093-3099
- [42] Magel JR (1970) "Propelling force measured during tethered swimming in the four competitive swimming styles." *Research Quarterly* 41(1):68-74
- [43] Yeater RA, Martin RB, White MK, Gilson KH (1981) "Tethered swimming forces in the crawl, breast and back strokes and their relationship to competitive performance." *Journal of Biomechanics* 14(8):527-537
- [44] Costill DL, Rayfield F, Kirwan J, Thomas R (1986) "A computer based system for the measurement of force and power during front crawl swimming." *J Swim Res* 2(1):16-9
- [45] Kjendlie PL, Thorsvald K (2006) "A tethered swimming power test is highly reliable." *Portuguese Journal of Sport Sciences* 6(2):231-233
- [46] Vecchi F, Freschi C, Micera S, Sabatini AM, Dario P, Sacchetti R (2000) "Experimental evaluation of two commercial force sensors for applications in biomechanics and motor control." In 5th Ann. Conf. of Int. FES.
- [47] Tekscan, Inc. FlexiForce. Standard Force & Load Sensors Model # A401 datasheet [Revised, March 2015]