



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**DIFUSIONES: EL PROCESO DE COX-INGERSOLL-
ROSS Y MODELOS DE TASAS DE INTERÉS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

DANTE MATA LÓPEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA
CODIRECTOR DE TESIS:
ACT. ALEJANDRO SANTOYO CANO
2016**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	5
1.1. Existencia y unicidad de soluciones	5
1.2. Difusiones como Procesos de Markov	27
1.3. El Teorema de Feynman-Kac	37
2. Modelos de tasas de interés	47
2.1. Valuación de un bono cupón cero	47
2.2. El modelo de Cox-Ingersoll-Ross	54
2.3. Calibración del modelo CIR	63
2.4. Conclusiones	74
Anexo: Códigos para la simulación de trayectorias de EDEs	76
Trayectoria del puente browniano	77
Trayectoria del proceso de Ornstein-Uhlenbeck	79
Trayectoria del proceso de Vasicek	80
Trayectoria del proceso Cox-Ingersoll-Ross utilizando el método Milstein	81
Trayectoria del proceso Cox-Ingersoll-Ross utilizando el método Runge-Kutta	83
Bibliografía	85

Introducción

En el mundo observamos muchos fenómenos para los que nos interesa capturar su comportamiento a través de modelos matemáticos con la finalidad de poder deducir características importantes del fenómeno, predecir comportamientos futuros y aplicar estos modelos para resolver problemas que dependan o que estén relacionados con dicho fenómeno.

El recurso más común, una vez que se ha estudiado a fondo de forma empírica el fenómeno observado, es planteando una ecuación diferencial ordinaria (EDO) o una ecuación diferencial parcial (EDP) que nos muestre el cambio instantáneo del fenómeno y que, al resolverla, nos presente la evolución temporal del fenómeno como una función diferenciable con respecto al parámetro temporal y con respecto a otros parámetros que influyan en el comportamiento. Gracias a esto, el estudio de los fenómenos observados se puede realizar de una forma relativamente sencilla y también se desarrolla un importante estudio teórico sobre las ecuaciones diferenciales que se plantean. Sin embargo, al tomar observaciones reales del fenómeno, nos damos cuenta que estos datos no encajan a la perfección con los valores que predicen los modelos. Es decir, que la información observada presenta una perturbación con respecto al modelo.

El supuesto más común para lidiar con estas perturbaciones, que también se utilizará en este trabajo, es suponer que cada dato presenta una perturbación aleatoria. Partiendo de este supuesto surge la pregunta: ¿cómo se incorpora al modelo esta perturbación aleatoria? Una respuesta sencilla es asumir que cada dato se ve afectado por una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y varianza σ^2 constante. Esta afirmación es un primer paso para modelar la forma en que las perturbaciones aleatorias afectan a los modelos, sin embargo sólo es adecuada para observaciones a tiempo discreto y presenta dificultades al tratar de incorporarla en modelos a tiempo continuo.

El siguiente paso es suponer que nuestro modelo a tiempo continuo está perturbado por un Movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$. Este nuevo supuesto incorpora perturbaciones continuas al modelo y, para cada instante t , la variable aleatoria que representa a la perturbación tiene distribución normal con media 0 y varianza $\sigma^2 t$, con σ constante. Este supuesto presenta una restricción en cuanto al comportamiento de la varianza a largo plazo, pues ésta crece de forma lineal con respecto al tiempo y es posible que para algunos modelos este comportamiento a largo plazo de la varianza no sea el más adecuado.

Este último supuesto no será descartado por completo, sino que nos servirá como base para un desarrollo más completo de la forma en que modelaremos las perturbaciones continuas al modelo. La forma en que se utiliza es gracias al Cálculo Estocástico con respecto al Movimiento Browniano, el cual nos permite expresar distintos tipos de perturbación en términos de una variable aleatoria llamada Integral Estocástica y que además permite determinar un proceso estocástico a tiempo continuo $(I_t)_{t \geq 0}$ donde cada variable del proceso es una integral estocástica. A partir de esto, es posible incorporar la información del modelo descrito por la EDO (o EDP) y la modelación de las perturbaciones aleatorias por medio de integrales estocásticas en una sola expresión denominada ecuación diferencial estocástica (EDE).

El propósito de este trabajo es estudiar las EDEs, varias condiciones bajo las cuales tendrán solución (donde la solución estará dada como un proceso estocástico, no como una función diferenciable a diferencia de EDOs y EDPs), propiedades que adquieren estas soluciones y su aplicación en problemas relacionados con el fenómeno que intentamos modelar.

En la segunda parte de este trabajo se presentará una aplicación al área de Finanzas, donde propondremos una EDE para modelar el comportamiento de las tasas de interés de mercado y aplicaremos los resultados teóricos desarrollados en la primera parte para determinar si la EDE que proponemos es consistente y, si lo es, la forma en que podemos utilizar este modelo para construir curvas de tasas de interés de mercado y valorar instrumentos financieros que dependan de las tasas de interés. Además, se presentarán ejercicios donde se intenta 'ajustar' esta EDE a la información de tasas de interés del mercado mexicano, con la finalidad de determinar si es adecuado el supuesto de la existencia de una EDE que pueda modelar el comportamiento de las tasas de mercado.

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En este capítulo se abordará el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), su definición, las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de las soluciones a EDEs y ciertas propiedades que satisfacen las soluciones de estas ecuaciones, una vez que determinamos que satisfacen las condiciones de existencia y unicidad.

1.1. Existencia y unicidad de soluciones

En el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias, nos interesa describir el movimiento de una partícula en \mathbb{R}^n dado un punto de partida inicial, o condición inicial. Esta descripción está dada por la siguiente relación:

$$\begin{cases} y'(t) = a(y(t))dt, & t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Donde al valor y_0 se le conoce como condición inicial al tiempo t_0 y $a(x)$ es una función continua. Para garantizar que existe una función $y(t)$ que satisface la ecuación diferencial anterior, existe el teorema de existencia y unicidad para EDOs, el cual establece que bajo ciertas condiciones que debe satisfacer la función $a(x)$, existirá la función continuamente diferenciable $y(t)$ que resuelve el problema y esta función será única.

Ahora, volvamos a considerar que queremos modelar el movimiento de una partícula dada una condición inicial a través de una ecuación diferencial, pero queremos incluir el efecto de perturbaciones aleatorias en la trayectoria. En el caso de nuestro análisis, esta perturbación aleatoria estará dada en función de un movimiento Browniano.

Nota 1.1. *En este trabajo sólo abordaremos el caso de dimensión 1, sin embargo los resultados que se presentan a continuación también son válidos para EDEs n -dimensionales.*

Nota 1.2. *En este trabajo partiremos del supuesto que la integral estocástica de Itô con respecto al movimiento Browniano $\int_0^t Y_s dW_s$ se conoce, así como sus propiedades.*

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el cual está definido $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Consideremos también a $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$ la filtración generada por $(W_t)_{t \geq 0}$, es decir, $\mathfrak{F}_t^W = \sigma(W_r : 0 \leq r \leq t)$ para cada $t \geq 0$. Sean $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y Y_0 una variable aleatoria independiente de \mathfrak{F}_0 , que será la condición inicial de la ecuación. Definimos a una ecuación diferencial estocástica (EDE) como la siguiente relación:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 = Y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

A las funciones $b(x)$ y $\sigma(x)$ se les llama coeficientes de deriva y de difusión, respectivamente. Es importante mencionar que Y_0 puede ser una variable aleatoria que tome el valor constante x , $x \in \mathbb{R}$, \mathbb{P} -c.s. También es importante mencionar que, debido a la no diferenciabilidad de las trayectorias del movimiento Browniano, la relación anterior debe considerarse como una ecuación integral de la forma:

$$X_t = Y_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

Donde la segunda integral es una integral estocástica de Itô. Entonces, de esta ecuación integral, obtenemos la EDE al considerar que $dX_t := b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con $X_0 = Y_0$. El objeto de estudiar las EDEs es determinar los casos en los que existe un proceso estocástico que satisfaga la relación (1.1) y, en caso de que exista, estudiar sus propiedades.

En algunos casos, es posible determinar de forma directa la solución a una EDE. La verificación de que este tipo de procesos son soluciones se lleva a cabo mediante una aplicación de la fórmula de Itô al proceso que resuelve la EDE. A continuación presentamos dos formas de construir la solución explícita de algunos tipos de EDEs y además presentaremos ejemplos donde aplicamos estos métodos para construir soluciones, así como algunas propiedades que presentan las soluciones de estos ejemplos.

Supongamos que las funciones $c, d, e, f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen la siguiente condición:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} [|c(t)| + |d(t)| + |e(t)| + |f(t)|] < \infty$$

Primero, consideremos la EDE:

$$\begin{cases} dX_t = d(t)X_tdt + f(t)X_tdW_t, & t \in [0, T] \\ X_0 = Y_0 \end{cases}$$

Veamos que es posible hallar una solución explícita de esta EDE.

Supongamos que la solución es un proceso estocástico de la forma $X(t) = X_1(t)X_2(t)$ donde $(X_1(t))_{t \in [0, T]}$ satisface la EDE:

$$\begin{cases} dX_1(t) = f(t)X_1(t)dW_t, & t \in [0, T] \\ X_1(0) = Y_0 \end{cases}$$

Una aplicación de la fórmula de Itô con el proceso de Itô $\left(Y_t = \int_0^t f(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s)ds \right)_{t \geq 0}$

y la función $g(x) = e^x$ nos muestra que el proceso $(X_1(t) := Y_0 \exp\{Y_t\})_{t \in [0, T]}$ es la solución a esta EDE, pues:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= df(Y_t) \\ &= g'(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}g''(Y_t)dY_t dY_t \\ &= g(Y_t)(f(t)dW_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt) + \frac{1}{2}g(Y_t)f^2(t)dt \\ &= X_1(t)f(t)dW_t \end{aligned}$$

El proceso $(X_2(t))_{t \in [0, T]}$ se obtiene como la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\begin{cases} dX_2(t) = d(t)X_2(t)dt, & t \in [0, T] \\ X_2(0) = 1 \end{cases}$$

Entonces, la solución a esta EDO es $X_2(t) = \exp\left\{\int_0^t d(s)ds\right\}$. Al combinar ambas soluciones y utilizar la regla del producto de cálculo estocástico, obtenemos:

$$\begin{aligned} dX &= X_1dX_2 + X_2dX_1 + dX_2dX_1 \\ &= X_1(d(t)X_2dt) + X_2(f(t)X_1dW_t) + (d(t)X_2dt)(f(t)X_1dW_t) \\ &= d(t)Xdt + f(t)XdW_t \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución existe y es de la forma:

$$X(t) = Y_0 \exp\left\{\int_0^t f(s)dW_s + \int_0^t \left(d(s) - \frac{1}{2}f(s)\right) ds\right\}$$

Utilizaremos el caso anterior para dar un resultado más general. Ahora consideremos la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + d(t)X_t)dt + (e(t) + f(t)X_t)dW_t, & t \in [0, T] \\ X_0 = Y_0 \end{cases}$$

Al igual que en el caso anterior, la solución a esta EDE existe y supondremos que es de la forma:

$$X(t) = X_1(t)X_2(t)$$

Donde el proceso $(X_1(t))_{t \in [0, T]}$ satisface la EDE:

$$\begin{cases} dX_1(t) = d(t)X_1(t)dt + f(t)X_1(t)dW_t, & t \in [0, T] \\ X_1(0) = 1 \end{cases}$$

Cuya solución es $X_1(t) = \exp \left\{ \int_0^t f(s)dW_s + \int_0^t \left(d(s) - \frac{1}{2}f^2(s) \right) ds \right\}$ y $(X_2(t))_{t \in [0, T]}$ es un proceso de Itô de la forma $X_2(t) = Y_0 + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t B(s)dW_s$ donde:

$$\begin{aligned} A(t) &= [c(t) - f(t)e(t)](X_1(t))^{-1} \\ B(t) &= e(t)(X_1(t))^{-1} \end{aligned}$$

Utilizando la regla del producto del cálculo estocástico, se obtiene que:

$$\begin{aligned} dX &= X_1dX_2 + X_2dX_1 + dX_1dX_2 \\ &= X_1(A(t)dt + B(t)dW_t) + X_2(d(t)X_1dt + f(t)X_1dW_t) + f(t)X_1B(t)dt \\ &= (c(t) - f(t)e(t))dt + e(t)dW_t + (d(t)Xdt + f(t)XdW_t) + f(t)e(t)dt \\ &= (c(t) + d(t)X)dt + (e(t) + f(t)X)dW_t \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X(t) = X_1(t)X_2(t)$ es la solución deseada en el intervalo $[0, T]$. Con este método podemos construir soluciones explícitas a algunos ejemplos de EDEs.

Ejemplo 1.1. Puente browniano Consideremos la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dW_t, & 0 \leq t < 1 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

Utilizando el método descrito anteriormente con las funciones $c(t) \equiv 0$, $d(t) = \frac{-1}{1-t}$, $e(t) \equiv 1$, $f(t) \equiv 0$, entonces obtenemos que los procesos $(X_1(t))_{t \in [0, 1]}$, $(X_2(t))_{t \in [0, 1]}$ son:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= 1 - t \\ X_2(t) &= \int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la EDE es $X_t = X_1(t)X_2(t)$, es decir:

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s, \quad 0 \leq t < 1$$

Además, para cada $t \in [0, 1)$ se observa que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t^2] &= \mathbb{E}\left[\left((1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(1-t)^2 \int_0^t \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 ds\right] \\ &= (1-t)^2 \left(\frac{t}{1-t}\right) \\ \mathbb{E}[X_t^2] &= (1-t)t\end{aligned}$$

Con este resultado es posible verificar que $X_t \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow 1^-$ en el sentido de la norma en $L^2(\mathbb{P})$. Debido a esta propiedad, a este proceso se le conoce como 'puente browniano', porque inicia y termina en el mismo estado.

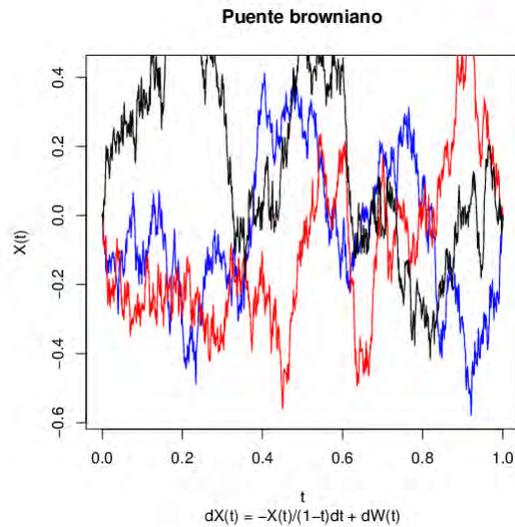


Figura 1.1: Simulación de trayectorias del puente Browniano. Se observa que $X_{1^-} = 0$ en los tres casos.

Nota 1.3. En el caso del puente Browniano es posible construir la solución utilizando el método descrito anteriormente, a pesar de que la función $d(t) = \frac{-1}{1-t}$ no satisface la condición: $\sup_{0 \leq t < 1} |d(t)| < \infty$

Ejemplo 1.2. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Sean $b, \sigma > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. La EDE de Ornstein-Uhlenbeck es:

$$\begin{cases} dX_t = -bX_t dt + \sigma dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Utilizando el mismo método de construcción de soluciones, pero ahora con las funciones $c(t) \equiv 0$, $d(t) \equiv -b$, $e(t) \equiv \sigma$, $f(t) \equiv 0$, obtenemos que los procesos $(X_1(t))_{t \geq 0}$, $(X_2(t))_{t \geq 0}$ son:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{-bt} \\ X_2(t) &= x + \sigma \int_0^t e^{bs} dW_s \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución $X_t = X_1(t)X_2(t)$ es:

$$X_t = xe^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{b(s-t)} dW_s, \quad t \geq 0$$

Además se puede ver, utilizando las propiedades de la integral estocástica de funciones deterministas, que X_t tiene distribución normal con media xe^{-bt} y varianza $\frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$ para cada $t > 0$. Con base en este resultado, podemos ver que, independientemente de la condición inicial, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck converge a una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y varianza $\frac{\sigma^2}{2b}$ conforme $t \rightarrow \infty$.

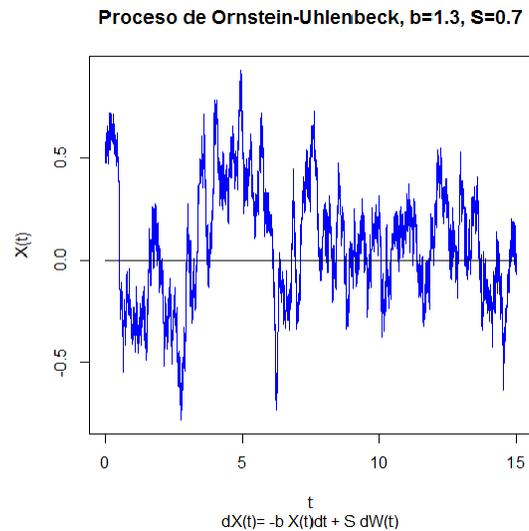


Figura 1.2: Simulación de una trayectoria del proceso Ornstein-Uhlenbeck. Se observa que el proceso presenta regresión a la media.

Estos son algunos ejemplos de EDEs para las cuales es posible construir una solución explícita y sin importar qué propiedades satisfagan las funciones $b(x)$ y $\sigma(x)$ en los

coeficientes de deriva y de difusión, respectivamente. Sin embargo, también hay casos de EDEs para los cuales la solución no se puede construir de forma explícita, pero es de interés determinar si la solución existe.

Al igual que en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, nos interesa conocer bajo qué condiciones podemos garantizar que exista un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ que satisfaga una EDE dada y qué propiedades tiene este proceso. Estas condiciones están establecidas en el siguiente teorema de existencia y unicidad para EDEs.

En este trabajo se presentarán dos versiones del teorema de existencia y unicidad, sin embargo la primera sólo se enunciará y se presentará un breve esbozo de la demostración debido a que es de mayor interés el resultado de la segunda versión que se mostrará más adelante. La demostración completa de la primera versión se puede consultar en [10].

Para ambas pruebas nos apoyaremos en el siguiente resultado:

Proposición 1.1 (Desigualdad de Grönwall). *Sean ϕ, f continuas y no negativas definidas en el intervalo $[0, T]$ y sea $C_0 \geq 0$ constante. Si, para cada $t \in [0, T]$ se satisface:*

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f(s)\phi(s)ds$$

Entonces:

$$\phi(t) \leq C_0 \exp \left\{ \int_0^t f(s)ds \right\}$$

Demostración. Definimos $\Phi(t) := C_0 + \int_0^t f(s)\phi(s)ds$. Entonces, por definición, tenemos que $\Phi'(t) = f(t)\phi(t)$. Además, se tiene que $\Phi'(t) \leq f(t)\Phi(t)$ para cada $t \in [0, T]$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} \left(\Phi(t) \exp \left\{ - \int_0^t f(s)ds \right\} \right)' &= (\Phi'(t) - f(t)\Phi(t)) \exp \left\{ - \int_0^t f(s)ds \right\} \\ &\leq (f(t)\phi(t) - f(t)\phi(t)) \exp \left\{ - \int_0^t f(s)ds \right\} \end{aligned}$$

El lado derecho de la desigualdad es igual a cero, por lo que $\Phi(t) \exp \left\{ - \int_0^t f(s)ds \right\}$ es decreciente. Entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \exp \left\{ - \int_0^t f(s)ds \right\} &\leq C_0 \\ \Phi(t) &\leq C_0 \exp \left\{ \int_0^t f(s)ds \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\phi(t) \leq \Phi(t)$:

$$\phi(t) \leq C_0 \exp \left\{ \int_0^t f(s) ds \right\}$$

□

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de soluciones para EDEs, primera versión). *Sean $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles tales que satisfacen la condición de Lipschitz, es decir, existe $C > 0$ tal que:*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C|x - y|, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Sea Z una variable aleatoria independiente de $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$ y tal que $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$. Entonces la EDE dada por:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 = Z \end{cases}$$

tiene una única solución (en el sentido \mathbb{P} -c.s.) $(X_t^Z)_{t \geq 0}$ como un proceso estocástico de trayectorias continuas \mathbb{P} -c.s., adaptado a la filtración¹ $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$ y tal que:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s|^2 ds \right] < \infty \text{ para cada } t \geq 0.$$

Demostración. La demostración de este teorema se lleva a cabo de forma similar a la demostración de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para demostrar la existencia de una solución, se construye de forma recursiva la siguiente sucesión de procesos:

$$\begin{aligned} X_t^0 &= Z \\ X_t^{n+1} &= Z + \int_0^t b(X_s^n) ds + \int_0^t \sigma(X_s^n) dW_s \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

Se demuestra que esta sucesión de procesos adaptados y de trayectorias continuas converge uniformemente en $[0, \infty)$ a un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ para casi toda $\omega \in \Omega$, por lo que el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ también será adaptado y de trayectorias continuas. Después se demuestra que, para cada $t \geq 0$ fija, la sucesión $\{X_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{P})$ y, por lo tanto, converge al límite X_t , \mathbb{P} -c.s. y este límite satisface la EDE.

¹Decimos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es adaptado a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t es \mathfrak{F}_t medible para cada $t \geq 0$

Para demostrar la unicidad, supondremos que existen $(X_t)_{t \geq 0}$ y $(\widehat{X}_t)_{t \geq 0}$ dos soluciones distintas de la EDE. Se utilizan la isometría de Itô², la condición de Lipschitz de las funciones $b(x)$ y $\sigma(x)$ y la desigualdad de Grönwall para demostrar que:

$$\mathbb{P}[|X_t - \widehat{X}_t| = 0 \text{ para cada } t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)] = 1$$

Dado que ambas soluciones tienen trayectorias continuas \mathbb{P} -casi seguramente, se tiene que la función $t \mapsto |X_t - \widehat{X}_t|$ es continua, entonces utilizando la continuidad de la probabilidad se puede concluir que:

$$\mathbb{P}[|X_t - \widehat{X}_t| = 0 \text{ para cada } t \in [0, \infty)] = 1$$

Es decir, la solución es única \mathbb{P} -casi seguramente. \square

Definición 1.1. *Un proceso de difusión (o simplemente una difusión) es un proceso estocástico a tiempo continuo $(X_t)_{t \geq 0}$ que es la solución de una ecuación diferencial estocástica del tipo (1.1). Denotaremos por $(X_t^Z)_{t \geq 0}$ al proceso que satisface la EDE: $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con condición inicial $X_0 = Z$.*

Nota 1.4. *El puente browniano es un ejemplo de difusión cuya solución explícita existe a pesar de que la función $f(x, t) = \frac{-x}{1-t}$ no satisface la condición de Lipschitz en el intervalo $[0, 1)$.*

Aunque este primer resultado de existencia y unicidad se puede aplicar a una clase muy amplia de EDE's, existen algunos ejemplos para los cuales existe una solución única, pero esta no está garantizada por este teorema. Un ejemplo de esto, y que es fundamental para este trabajo es el proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), el cual es la solución a la EDE:

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, t \geq 0 \quad (1.2)$$

La razón por la que no es posible garantizar la existencia de la solución de la EDE anterior usando solo el resultado del teorema (1.1) es porque la función $x \mapsto \sqrt{x}$ no es Lipschitz continua, sin embargo, la siguiente versión del teorema de existencia y unicidad nos permitirá demostrar que la ecuación CIR tiene solución y es única.

Teorema 1.2 (Existencia y Unicidad para EDE's (segunda versión) [9]). *Sean $\beta \leq 0$, $(\delta_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico continuo y adaptado tal que $\delta_t \geq 0$ y $\int_0^t \delta_s ds < \infty$ para*

²Isometría de Itô: Sea $(G_t)_{t \geq 0}$ un proceso adaptado a $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$ tal que $\mathbb{E} \left[\int_0^t G_s^2 ds \right] < \infty$. Entonces $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t G_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t G_s^2 ds \right]$ para cada $t \geq 0$.

cada $t > 0$ y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función tal que $g(0) = 0$ y que satisface la condición de Hölder: $|g(x) - g(y)| \leq b\sqrt{|x - y|}$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$ y para alguna $b > 0$. Entonces la EDE:

$$\begin{cases} dX_t = (2\beta X_t + \delta_t)dt + g(X_t)dW_t & , t \geq 0 \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

tiene una solución única \mathbb{P} -c.s., adaptada y de trayectorias continuas y esta solución es positiva \mathbb{P} -c.s.

Demostración. Sea $T > 0$ fijo. Primero, demostraremos la existencia de la solución para el intervalo $[0, T]$ y después extenderemos la existencia para todo \mathbb{R}^+ .

Supongamos que existe $K > 0$ tal que $\int_0^T \delta_u du \leq K$, en consecuencia tendremos que $\int_0^T \mathbb{E}[\delta_u] du \leq K$. Ahora, definimos la siguiente función $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ como:

$$\gamma(v) = \sup_{0 \leq s \leq t \leq s+v \leq T} \int_s^t \mathbb{E}[\delta_u] du$$

Notemos que $\gamma(v) \rightarrow 0$ conforme $v \rightarrow 0$.

Ahora, sea $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[0, T]$ tal que $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$. Estas particiones son de la forma:

$$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{N-1}^n < t_N^n = T$$

Para simplificar la notación, omitiremos el superíndice para cada punto de la partición. Para cada una de estas particiones, construiremos una discretización de la EDE de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X^n(0) &= x_0 \\ X^n(t_{k+1}) &= X^n(t_k) + (2\beta X^n(t_k) + \delta_{t_k})\Delta t_k + g(X_{t_k})\Delta W_{t_k} \end{aligned}$$

Dada la forma en la que estamos construyendo la discretización del proceso, es posible que estas aproximaciones tomen valores negativos, por lo que sustituiremos a la función g por la siguiente:

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Observamos que esta función g^* también satisface la condición de Hölder, por lo que no habrá problema en demostrar la existencia y unicidad de soluciones utilizando esta función y una vez que demostremos que el proceso que resuelve la EDE tiene trayectorias

con valores positivos \mathbb{P} -c.s., será posible reemplazar a la función g^* por g . Es decir, las aproximaciones que utilizaremos son de la forma:

$$\begin{aligned} X^n(0) &= x_0 \\ X^n(t_{k+1}) &= X^n(t_k) + (2\beta X^n(t_k) + \delta_{t_k})\Delta_{t_k} + g^*(X_{t_k})\Delta W_{t_k} \end{aligned}$$

Para cada subintervalo de la partición $[t_k, t_{k+1}]$ y para cada t en dichos subintervalos construiremos la interpolación lineal de la siguiente forma:

$$X^n(t) = X^n(t_k) + 2\beta X^n(t_k)(t - t_k) + \int_{t_k}^t \delta_u du + g^*(X^n(t_k))(W_t - W_{t_k})$$

Como $X^n(0) = x_0$, entonces está acotado en $L^2(\mathbb{P})$. Con base en esto, podemos ver que $X^n(t_1)$ también está acotado ya que $X^n(t_1) = x_0 + (2\beta x_0 + \delta_0)(t_1 - t_0) + g^*(x_0)(W_{t_1} - W_{t_0})$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X^n(t_1)|^2]^{\frac{1}{2}} &\leq \mathbb{E}[x_0^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[(2\beta x_0 + \delta_0)^2(t_1 - t_0)^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[(g^*(x_0))^2(W_{t_1} - W_{t_0})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq x_0 + (2|\beta|x_0 + \delta_0)\|\Delta_n\| + g^*(x_0)\|\Delta_n\| \\ &\leq x_0 + (2|\beta|x_0 + K)\|\Delta_n\| + g^*(x_0)\|\Delta_n\| \end{aligned}$$

Al repetir este proceso para cada $X^n(t_k)$, verificamos que en efecto está acotada en $L^2(\mathbb{P})$ para cada punto de la partición. En consecuencia, tendremos que $X^n(t)$ está acotado en $L^2(\mathbb{P})$ para cada $t \in [0, T]$.

Denotemos por $\eta_n(t) = t_k$ si $t \in [t_k, t_{k+1})$, entonces podemos expresar a $X^n(t)$ como:

$$X^n(t) = x_0 + \int_0^t 2\beta X^n(\eta_n(u)) du + \int_0^t \delta_u du + \int_0^t g^*(X^n(\eta_n(u))) dW_u$$

Utilizaremos esta representación para encontrar una cota superior para $\mathbb{E}[|X^n(\eta_n(t))|]$ que sea independiente de n y de t . Tenemos que:

$$\mathbb{E}[|X^n(\eta_n(t))|] \leq x_0 + |\beta| \int_0^t \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u))|] du + \int_0^t \mathbb{E}[\delta_u] du + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t g^*(X^n(\eta_n(u)))dW_u\right|\right]$$

Utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la condición de Hölder de g^* (es decir, $g^*(x) \leq b\sqrt{|x|}$), la isometría de Itô y la desigualdad $b\sqrt{x} \leq b(1 + x)$ para acotar la

siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t g^*(X^n(\eta_n(u))) dW_u \right| \right] &\leq \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t g^*(X^n(\eta_n(u))) dW_u \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathbb{E} \left[\int_0^t (g^*(X^n(\eta_n(u))))^2 du \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b \left(\int_0^t \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u))|] du \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b \left(1 + \int_0^t \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u))|] du \right)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbb{E}[|X^n(\eta_n(t))|] \leq (x_0 + \int_0^t \mathbb{E}[\delta_u] du + b) + (|2\beta| + b) \int_0^t \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u))|] du$$

Utilizando la desigualdad de Grönwall obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X^n(\eta_n(t))|] &\leq (x_0 + \int_0^t \mathbb{E}[\delta_u] du + b) e^{(|2\beta|+b)t} \\
&\leq (x_0 + \int_0^T \mathbb{E}[\delta_u] du + b) e^{(|2\beta|+b)T} \\
&\leq (x_0 + K + b) e^{(|2\beta|+b)T}
\end{aligned}$$

Denotemos por $G_T = (x_0 + K + b) e^{(|2\beta|+b)T}$ y notemos que esta cota no depende de n ni de t . Entonces, para cada $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X^n(t) - X^n(\eta_n(t))|] &= \mathbb{E} \left[\left| \int_{t_k}^t 2\beta X^n(\eta_n(u)) du + \int_{t_k}^t \delta_u du + \int_{t_k}^t g^*(X^n(\eta_n(u))) dW_u \right| \right] \\
&\leq |2\beta| \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(t))|(t - t_k)] + \int_{t_k}^t \mathbb{E}[\delta_u] du + \mathbb{E}[|g^*(X^n(\eta_n(u)))(W_t - W_{t_k})|] \\
&\leq |2\beta| G_T \|\Delta_n\| + \gamma(\|\Delta_n\|) + (\mathbb{E}[(g^*(X^n(\eta_n(u))))^2] \mathbb{E}[(W_t - W_{t_k})^2])^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |2\beta| G_T \|\Delta_n\| + \gamma(\|\Delta_n\|) + b\sqrt{G_T} \sqrt{\|\Delta_n\|} \tag{1.3}
\end{aligned}$$

Denotemos por $H_T(n)$ a la expresión del lado derecho de la desigualdad y observemos que $H_T(n) \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Utilizaremos estas desigualdades para demostrar que la sucesión de procesos $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ que acabamos de construir es de Cauchy en el espacio:

$$L^1_{C[0,T]} = \left\{ f : \Omega \rightarrow C[0, T] \mid \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \right] < \infty \right\}$$

Es decir, si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X^n(t) - X^m(t)| \right] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Para demostrar esto, construiremos una sucesión de funciones $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^2(\mathbb{R})$ que convergerá a la función valor absoluto.

Primero, sea $(a_m)_{m \geq 0}$ una sucesión decreciente con $a_0 = 1$ y tal que $\int_{a_m}^{a_{m-1}} \frac{du}{bu} = m$.

Notemos que $a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Ahora, definimos $\xi_m'' : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ como una sucesión de funciones tal que para cada $m \in \mathbb{N}$:

- i) ξ_m'' es continua.
- ii) $\xi_m''(u) = 0$ si $u \in [0, a_m] \cup [a_{m-1}, \infty)$
- iii) $0 \leq \xi_m''(u) \leq \frac{2}{mub}$ si $u \in [a_m, a_{m-1}]$
- iv) $\int_{a_m}^{a_{m-1}} \xi_m''(u) du = 1$

Bajo estas condiciones, también podemos definir la sucesión $(\xi_m')_{m \in \mathbb{N}}$ como:

$$\xi_m'(u) = \int_0^u \xi_m''(s) ds, \quad u \geq 0$$

Por la forma en que definimos ξ_m'' , observamos que para cada $m \in \mathbb{N}$:

- i) ξ_m' es continua.
- ii) $\xi_m'(u) = 0$ si $u \in [0, a_m]$
- iii) $0 \leq \xi_m'(u) \leq 1$ si $u \in [a_m, a_{m-1}]$
- iv) $\xi_m'(u) = 1$ si $u \geq a_{m-1}$

De la misma forma, definiremos a la sucesión $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ como:

$$\xi_m(u) = \int_0^u \xi_m'(s) ds, \quad u \geq 0$$

Observemos que $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^2([0, \infty))$, sin embargo esta no es la sucesión que utilizaremos, sino que a partir de ésta construimos la sucesión de funciones $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ como $\phi(u) := \xi(|u|)$. Con esta definición, tenemos que $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^2(\mathbb{R})$ y $|u| - a_{m-1} \leq \phi_m(u)$, $m \in \mathbb{N}$.

Sean $n, k \in \mathbb{N}$, sabemos que $(X^n(t))_{t \geq 0}$, $(X^k(t))_{t \geq 0}$ son procesos de Itô, entonces el proceso $(v(t) := X^n(t) - X^k(t))_{t \geq 0}$ también lo es, por lo tanto es posible utilizar la fórmula de Itô para $\phi_m(v(t))$ y obtener:

$$\begin{aligned} \phi_m(v(t)) &= \int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \\ &\quad + \int_0^t \phi'_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))dW_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \phi''_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))^2 du \end{aligned}$$

Al calcular la esperanza para esta expresión, primero obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_m(v(t))] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi'_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))dW_u \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi''_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))^2 du \right] \end{aligned}$$

El segundo término de la expresión es una integral estocástica, entonces también es una martingala, por lo que $\mathbb{E} \left[\int_0^t \phi'_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))dW_u \right] = 0$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_m(v(t))] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi''_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))^2 du \right] \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Acotaremos los dos términos restantes y mostraremos que para dicha ε , existen $n, k, m \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbb{E}[|v(t)|] \leq \mathbb{E}[\phi_m(v(t))] + a_{m-1} < \varepsilon$ para cualquier $t \in [0, T]$. Comencemos con el primer término. Para simplificar la notación escribiremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, T]$:

$$q^n(t) := X^n(\eta_n(t)) - X^n(t)$$

Utilizando esta nueva notación obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))q^n(u)du \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))q^k(u)du \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))v(u)du \right] \end{aligned}$$

Donde sumamos y restamos los elementos $X^n(u)$ y $X^k(u)$ dentro de la integral para poder agrupar los términos $q^n(u) = X^n(\eta_n(u)) - X^n(u)$, $q^k(u) = X^k(\eta_k(u)) - X^k(u)$ y $v(u) = X^n(u) - X^k(u)$. Notemos que ϕ_m es decreciente para $x \leq 0$, entonces $\phi'_m < 0$; y ϕ_m es creciente para $x > 0$, por lo que $\phi'_m > 0$. Utilizando esto y que $\beta < 0$, obtenemos que $2\beta\phi'_m(v(u))v(u) \leq 0$ para cualquier $u \in [0, t]$. En consecuencia, el último sumando de la expresión anterior es menor o igual que 0. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))q^n(u)du \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))q^k(u)du \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t |2\beta| |\phi'_m(v(u))| |q^n(u)| du \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t |2\beta| |\phi'_m(v(u))| |q^k(u)| du \right] \end{aligned}$$

Ahora, observemos que $\xi'_m(x) \leq 1$ para cualquier $x \geq 0$. Como consecuencia de esto, se tiene que $|\phi'_m(x)| \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t |2\beta| |q^n(u)| du \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t |2\beta| |q^k(u)| du \right] \\ &= |2\beta| \int_0^t \mathbb{E}[|q^n(u)|] du \\ &\quad + |2\beta| \int_0^t \mathbb{E}[|q^k(u)|] du \\ \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(v(u))(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u)))du \right] &\leq |2\beta|T(H_T(n) + H_T(k)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Recordemos que $\mathbb{E}[|q^n(u)|] \leq H_T(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por (1.3). Para acotar el tercer término, primero utilizaremos la condición de Hölder de g^* para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi''_m(v(u))(g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))^2 du \right] \\ \leq \frac{b^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi''_m(v(u)) |X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))| du \right] \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que $\xi''_m(x) < \frac{2}{mxb}$ para $x \geq 0$, obtenemos que $\phi''_m(x) < \frac{2}{m|x|b}$. Además notemos que $\|\phi''_m\|_\infty < \infty$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Utilizando estas dos propiedades

de ϕ_m'' obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_m''(v(u)) |X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))| du \right] &\leq \frac{b^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t |\phi_m''(v(u))| |q^n(u)| du \right] \\
&\quad + \frac{b^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t |\phi_m''(v(u))| |q^k(u)| du \right] \\
&\quad + \frac{b^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t |\phi_m''(v(u))| |v(u)| du \right] \\
&\leq \frac{b^2}{2} \|\phi_m''\| \mathbb{E} \left[\int_0^t |q^n(u)| du \right] \\
&\quad + \frac{b^2}{2} \|\phi_m''\| \mathbb{E} \left[\int_0^t |q^k(u)| du \right] \\
&\quad + \frac{Tb}{m}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_m''(v(u)) (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))^2 du \right] \\
\leq \frac{b^2}{2} \|\phi_m''\| (H_T(n) + H_T(k)) + \frac{Tb}{m} \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Entonces, al juntar los resultados de (1.4) y (1.5):

$$\mathbb{E}[\phi_m(X^k(t) - X^n(t))] \leq \left(|2\beta| + \frac{b^2}{2} \|\phi_m''\| \right) (H_T(n) + H_T(k)) + \frac{Tb}{m} \quad (1.6)$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, k, m \geq M$ se cumplen: $\frac{Tb}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$, $a_{m-1} < \frac{\varepsilon}{3}$ y $(|2\beta| + \frac{b^2}{2} \|\phi_m''\|)(H_T(n) + H_T(k)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces, utilizando la expresión (1.6), estas cotas y el hecho de que $|x| \leq \phi_m(x) + a_{m-1}$, obtenemos que:

$$\mathbb{E}[|X^n(t) - X^k(t)|] < \varepsilon$$

Este resultado es válido para cualquier $t \leq T$, por lo que concluimos que $(X^n(t))$ es una sucesión de Cauchy en $L^1([0, T] \times \Omega)$. Como este espacio es completo, existe un proceso $(X(t))_{t \geq 0}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^n(t, \omega) = X(t, \omega)$$

Como consecuencia de esto, también obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^n(\eta_n(t), \omega) = X(t, \omega)$$

Ahora, para demostrar que la sucesión es de Cauchy en $L^1_{C[0,T]}$, es necesario estimar y acotar $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X^n(t) - X^k(t)| \right]$ y ver que la cota que utilizamos converge a cero.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X^n(t) - X^k(t)| \right] &= \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t 2\beta(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))) du \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u)))) dW_u \right| \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t 2\beta(X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))) du \right| \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u)))) dW_u \right| \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |2\beta| |X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))| \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u)))) dW_u \right| \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |2\beta| |X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))| \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u)))) dW_u \right|^2 \right]
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad maximal de Doob³ para acotar el segundo sumando y obser-

³**Desigualdad maximal de Doob:** Sea $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala y $p > 1$, entonces:
 $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_t|^p]$

vando que el integrando en el primer sumando es positivo para cada $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X^n(t) - X^k(t)| \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^T |2\beta| |X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))| du \right] \\
&\quad + 4\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u)))) dW_u \right|^2 \right] \\
&\leq |2\beta| \int_0^T \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u)) - X(u)|] du \\
&\quad + |2\beta| \int_0^T \mathbb{E}[|X^k(\eta_k(u)) - X(u)|] du \\
&\quad + 4\mathbb{E} \left[\int_0^T (g^*(X^n(\eta_n(u))) - g^*(X^k(\eta_k(u))))^2 du \right] \\
&\leq |2\beta| \int_0^T \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u)) - X(u)|] du \\
&\quad + \int_0^T \mathbb{E}[|X^k(\eta_k(u)) - X(u)|] du \\
&\quad + 4b^2 \int_0^T \mathbb{E}[|X^n(\eta_n(u)) - X^k(\eta_k(u))|] du
\end{aligned}$$

A partir de esta última expresión, podemos ver que todos los sumandos convergen a cero conforme $n, k \rightarrow \infty$. En conclusión, la sucesión es de Cauchy en $L^1_{C[0,T]}$. Como este espacio es completo, la sucesión es convergente y converge al mismo proceso $(X(t))_{t \geq 0}$, es decir, $(X(t, \omega))_{t \geq 0} \in L^1_{C[0,T]}$ para casi toda ω . Por lo tanto, obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X^n(t) - X(t)| \right] = 0$$

Es decir, converge uniformemente en $[0, T]$ para casi toda ω . Por lo tanto existe la solución de la EDE y está dada por:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \delta_s ds + \int_0^t 2\beta X(s) ds + \int_0^t g^*(X(s)) dW_s$$

Ahora demostraremos que la solución es única \mathbb{P} -c.s. y esta unicidad es en el mismo sentido que en el teorema (1.1). Supongamos que existen dos soluciones distintas $(X_t)_{t \geq 0}$, $(Y_t)_{t \geq 0}$. Observemos que $X_t - Y_t$ tiene la siguiente forma para cada $t \in [0, T]$:

$$X_t - Y_t = \int_0^t 2\beta(X_s - Y_s) ds + \int_0^t (g^*(X_s) - g^*(Y_s)) dW_s$$

Volveremos a utilizar la sucesión $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ con la que demostramos la existencia de la solución. Aplicando la fórmula de Itô a $\phi_m(X_t - Y_t)$ obtenemos, para cualesquiera $t \in [0, T]$ y $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\phi_m(X_t - Y_t) &= \int_0^t \phi'_m(X_s - Y_s)(g^*(X_s) - g^*(Y_s))dW_s \\ &\quad + \int_0^t 2\beta\phi'_m(X_s - Y_s)(X_s - Y_s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \phi''_m(X_s - Y_s)(g^*(X_s) - g^*(Y_s))^2 ds\end{aligned}$$

Calculemos la esperanza de esta expresión. Primero, notemos que el primer sumando es una martingala, por lo tanto al tomar esperanza obtenemos:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \phi'_m(X_s - Y_s)(g^*(X_s) - g^*(Y_s))dW_s \right] = 0$$

Entonces, al calcular la esperanza se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi_m(X_t - Y_t)] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t 2\beta\phi'_m(X_s - Y_s)(X_s - Y_s)ds \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi''_m(X_s - Y_s)(g^*(X_s) - g^*(Y_s))^2 ds \right] \\ &\leq |2\beta| \mathbb{E} \left[\int_0^t |\phi'_m(X_s - Y_s)||X_s - Y_s|ds \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t |\phi''_m(X_s - Y_s)|(g^*(X_s) - g^*(Y_s))^2 ds \right]\end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que $|\phi'_m(x)| \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y la condición de Hölder de g , se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi_m(X_t - Y_t)] &\leq |2\beta| \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s - Y_s|ds \right] \\ &\quad + \frac{b^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t |\phi''_m(X_s - Y_s)||X_s - Y_s|ds \right]\end{aligned}$$

Ahora, utilizaremos que $\phi''_m(x) < \frac{2}{m|x|^b}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathbb{E}[\phi_m(X_t - Y_t)] \leq |2\beta| \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - Y_s|]ds + \frac{Tb}{m}$$

Como la sucesión $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a la función valor absoluto, al tomar el límite cuando $m \rightarrow \infty$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\mathbb{E}[|X_t - Y_t|] \leq |2\beta| \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - Y_s|] ds$$

A partir de esta expresión es posible aplicar la desigualdad de Grönwall para obtener:

$$\mathbb{E}[|X_t - Y_t|] = 0$$

Donde esto se satisface para cualquier $t \in [0, T]$. En consecuencia, $X_t = Y_t$ para toda $t \in [0, T]$ y esta igualdad se cumple \mathbb{P} -c.s.

La demostración anterior parte del supuesto $\int_0^t \delta_s ds \leq K$. Para el caso general donde $\int_0^T \delta_s ds < \infty$, construimos la sucesión de tiempos de paro $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida como:

$$\sigma_n := \inf \left\{ t \mid \int_0^t \delta_s ds \geq n \right\} \wedge T$$

Ahora, definimos $\delta_s^{(n)} := \delta_s \mathbb{I}_{[0, \sigma_n]}(s)$ y observamos que $\int_0^T \delta_s^{(n)} ds \leq K$ para alguna K y para cada $n \in \mathbb{N}$. Con base en esto, obtenemos que la EDE:

$$dX_t^{(n)} = (\delta_t^{(n)} + 2\beta X_t^{(n)}) dt + g(X_t^{(n)}) dW_t$$

tiene una solución única (dentada por $(X_t^{(n)})$) en el intervalo $[0, \sigma_n]$. De hecho, para cada $k \geq n$ se tiene que las soluciones $(X_t^{(k)})$ son iguales en dicho intervalo, por la unicidad. Como consecuencia de esto, como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, \sigma_n] \subseteq [0, T]$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $(X_t^{(n_0)})$ es igual a $(X(t))_{t \geq 0}$, la solución de la EDE.

Ahora demostraremos que la solución de esta EDE tiene trayectorias positivas \mathbb{P} -c.s. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ la solución a la EDE y $\varepsilon > 0$. Definimos los tiempos de paro:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf \{ t \mid X_t < -\varepsilon \} \wedge T \\ \sigma_1^1 &= \inf \{ t \mid X_t < -2\varepsilon \} \\ \sigma_1^2 &= \inf \{ t > \tau_1 \mid X_t = 0 \} \\ \sigma_1 &= \sigma_1^1 \wedge \sigma_1^2 \wedge T \end{aligned}$$

Notemos que $\tau_1 < \sigma_1 < T$. Definimos el conjunto $A = \left\{ \inf_{u \leq T} X_u < -2\varepsilon \right\}$.

En este conjunto se satisface la siguiente desigualdad: $\sigma_1^2 < \sigma_1^1 \leq T$. Probemos que esta

desigualdad se satisface.

Supongamos que $\sigma_1^1 < \sigma_1^2$, esto significa que $\sigma_1 = \sigma_1^1$. Por la continuidad de las trayectorias de $(X_t)_{t \geq 0}$, tenemos que $X_{\sigma_1} = -2\varepsilon$ y $X_{\tau_1} = -\varepsilon$, entonces: $X_{\sigma_1} - X_{\tau_1} = -\varepsilon < 0$. Por otra parte, observemos que $g^*(X_{\tau_1}) = g^*(X_{\sigma_1}) = 0$ y por la continuidad de las trayectorias $X_u < 0$ para cada $u \in (\tau_1, \sigma_1)$, esto implica que: $\int_{\tau_1}^{\sigma_1} g^*(X_u) dW_u = 0$, entonces:

$$X_{\sigma_1} - X_{\tau_1} = \int_{\tau_1}^{\sigma_1} \delta_u du + \int_{\tau_1}^{\sigma_1} 2\beta X_u du \geq 0$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto en el conjunto A , se cumple: $\sigma_1^2 < \sigma_1^1$, es decir, $X_{\sigma_1} = 0$. Ahora, definimos los siguientes tiempos de paro:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \inf\{t > \tau_1 \mid X_t < -\varepsilon\} \wedge T \\ \sigma_2^1 &= \inf\{t > \tau_2 \mid X_t < -2\varepsilon\} \\ \sigma_2^2 &= \inf\{t > \tau_2 \mid X_t = 0\} \\ \sigma_2 &= \sigma_2^1 \wedge \sigma_2^2 \wedge T \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de τ_1 y σ_1 , en el conjunto A tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_1 &< \sigma_1 < \tau_2 < \sigma_2 \leq T \\ X_{\sigma_2} &= 0 \end{aligned}$$

Al repetir esta construcción de tiempos de paro n veces, en el conjunto A obtenemos la sucesión creciente de tiempos de paro:

$$\tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \sigma_2 < \dots < \tau_n < \sigma_n < \dots \leq T$$

Dado que esta sucesión es creciente y acotada, existe el límite μ y, en consecuencia, todas las subsucesiones convergen a este límite. En particular las subsucesiones $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergen a μ . Pero en el conjunto A , $X_{\tau_n} = -\varepsilon$ y $X_{\sigma_n} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, el proceso evaluado en cada subsucesión es constante y, al evaluarlo en el límite de cada subsucesión obtenemos valores distintos, a pesar de que el límite es el mismo, además debido a esta sucesión de tiempos de paro observamos que en el evento A , la trayectoria del proceso nunca cruza por debajo la barrera de -2ε .

Esto significa que $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\left[\inf_{u \leq T} X_u < -2\varepsilon\right] = 0$. Al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos $\mathbb{P}\left[\inf_{u \leq T} X_u < 0\right] = 0$.

Es decir, con probabilidad cero, las trayectorias del proceso tomarán valores negativos. \square

Nota 1.5. *A los procesos estocásticos cuya existencia está garantizada por el teorema (1.2) también se les conoce como difusiones.*

Este resultado es útil porque en este trabajo utilizaremos la ecuación de Cox-Ingersoll-Ross (1.2) presentada anteriormente y ahora podremos mostrar que, en efecto, existe una única solución fuerte a esta ecuación.

Nota 1.6. *Se puede consultar una versión más general del Teorema de Existencia y Unicidad en [20] y en [19]. El primer artículo demuestra la existencia de las soluciones, mientras que el segundo demuestra la unicidad de las trayectorias, ambos bajo las mismas hipótesis sobre los coeficientes de deriva y de difusión.*

1.2. Difusiones como Procesos de Markov

En esta sección trataremos con una clase de procesos estocásticos llamados procesos de Markov, los cuales presentan una propiedad muy importante, llamada propiedad de Markov, que se puede interpretar de manera heurística como una 'independencia del proceso con respecto a la información del pasado'. Más adelante se dará una definición y una interpretación formal de esta propiedad. Se tratarán algunos aspectos básicos de la teoría de procesos de Markov y se estudiará la relación que existe entre estos procesos y las difusiones.

Definición 1.2. Una función de transición $(P_t : t \geq 0)$ en \mathbb{R} es una familia de kernels $P_t : \mathbb{R} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$ fijos: $P_t(x, \cdot)$ es medida de probabilidad en \mathbb{R} .
2. Para $t \geq 0$ y $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ fijos: $x \mapsto P_t(x, A)$ es medible.
3. Propiedad de Chapman-Kolmogorov: Para $s, t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$:

$$P_{t+s}(x, A) = \int_{\mathbb{R}} P_t(y, A) P_s(x, dy)$$

Debido a la propiedad (1) de las funciones de transición, podemos interpretarla como la probabilidad de que, a partir del estado x , se llegue al conjunto A en el instante de tiempo t . Las funciones de transición son fundamentales en el estudio de los procesos de Markov, pues éstas caracterizan a este tipo de procesos, como veremos más adelante. Dada una familia de funciones de transición, podemos definir a una familia de operadores $(\mathbf{P}_t)_{t \geq 0}$ en el espacio de funciones Borel-medibles y acotadas en sí mismo de la siguiente forma:

$$(\mathbf{P}_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(x, dy) \text{ para cada } t \geq 0$$

Este operador tiene las siguientes propiedades:

- i) $\mathbf{P}_t 1 \equiv 1$ para cada $t \geq 0$.
- ii) Si f es no negativa, entonces $(\mathbf{P}_t f)$ también lo es.
- iii) Propiedad de semigrupo: Para $t, s \geq 0$, $\mathbf{P}_{t+s} = \mathbf{P}_t \mathbf{P}_s$

Demostración de (iii). Sea f una función boreliana y acotada y sean $t, s \geq 0$. Entonces, se tiene:

$$(\mathbf{P}_{t+s}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) P_{t+s}(x, dy)$$

Por la propiedad de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} P_t(z, dy) P_s(x, dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(z, dy) P_s(y, dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(z, dy) \right) P_s(y, dz) \end{aligned}$$

Notemos que $\int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(z, dy) = (\mathbf{P}_t f)(z)$, entonces al sustituir en la igualdad anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{t+s}f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{P}_t f)(z) P_s(x, dz) \\ &= (\mathbf{P}_s (\mathbf{P}_t f))(x) \end{aligned}$$

□

Ahora que contamos con las funciones de transición y el semigrupo que se obtiene a partir de estas funciones, podemos dar la definición formal de un proceso de Markov.

Definición 1.3 (Proceso de Markov). *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad es un proceso de Markov si existe una función de transición $(P_t : t \geq 0)$ tal que, para cada función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana y acotada y para cualesquiera $s, t \geq 0$ se satisface la **propiedad de Markov**, es decir:*

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}) | \mathfrak{F}_t^X] = \mathbb{E}[f(X_s) | X_t] = (\mathbf{P}_s f)(X_t)$$

Donde $(\mathfrak{F}_t^X)_{t \geq 0}$ es la filtración generada por $(X_t)_{t \geq 0}$.

Nota 1.7. La expresión $\mathbb{E}[f(X_s) | X_t]$ también se denotará por $\mathbb{E}^{X_t}[f(X_s)]$.

Es importante mencionar que esta definición se puede ampliar en el sentido de que no necesariamente un proceso será de Markov con respecto a la filtración generada por sí mismo, sino que puede ser un proceso de Markov con respecto a cualquier filtración arbitraria $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, siempre que exista el semigrupo que satisfaga la propiedad de Markov.

Ejemplo 1.3. *El movimiento Browniano, $(W_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov con funciones de transición:*

$$P_t(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy.$$

Demostración de la propiedad de Markov para el movimiento Browniano. Sean $t, s \geq 0$ y sea $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$ la filtración generada por el movimiento Browniano. Probaremos que, en efecto, la función de transición propuesta corresponde al movimiento Browniano. Sea $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Para esta prueba, basta con mostrar que si $C \in \mathfrak{F}_s^W$, entonces:

$$\int_C \mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} d\mathbb{P} = \int_C (\mathbf{P}_t \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}})(W_s) d\mathbb{P}$$

Para probar esto, observemos que si $C \in \mathfrak{F}_s^W$, entonces existe $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tal que:

$$C = \{W_s \in B\}$$

Utilizando esto, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} | \mathfrak{F}_s^W] d\mathbb{P} &= \int_C \mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} d\mathbb{P} \\ \int_C \mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} d\mathbb{P} &= \mathbb{P}[W_{t+s} \in A, W_s \in B] \\ &= \mathbb{P}[W_{t+s} - W_s + W_s \in A, W_s \in B] \\ &= \mathbb{P}[W_{t+s} - W_s + W_s \in A | W_s \in B] \mathbb{P}[W_s \in B] \\ &= \int_B \mathbb{P}[W_{t+s} - W_s + W_s \in A | W_s \in B] dF_{W_s}(dy) \\ &= \int_B \mathbb{P}[W_{t+s} - W_s + y \in A | W_s \in B] dF_{W_s}(dy) \end{aligned}$$

Por los incrementos independientes del movimiento Browniano, se tiene que las variables aleatorias $W_{t+s} - W_s$ y W_s son independientes, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} d\mathbb{P} &= \int_B \mathbb{P}[W_{t+s} - W_s + y \in A] dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_B \mathbb{P}[W_t + y \in A] dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_B \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dx dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_B \int_A P_t(y, dx) dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_B \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}}(y) P_t(y, dx) dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_B (\mathbf{P}_t \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}})(y) dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(y) (\mathbf{P}_t \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}})(y) dF_{W_s}(dy) \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{I}_B(W_s) (\mathbf{P}_t \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}})(y) d\mathbb{P} \\
\int_C \mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} d\mathbb{P} &= \int_C (\mathbf{P}_t \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}})(y) d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Por las propiedades de las esperanza condicional, esto implica la siguiente igualdad \mathbb{P} -c.s.:

$$\mathbb{P}[W_{t+s} \in A | \mathfrak{F}_s^W] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A\}} | \mathfrak{F}_s^W] = (\mathbf{P}_t \mathbb{I}_{\{W_t \in A\}})(W_s)$$

Hasta ahora sólo hemos probado el resultado para funciones indicadoras, las cuales son Borel medibles por la forma en que las definimos. El siguiente paso es verificarlo para funciones simples, es decir, para funciones Borel medibles de la forma:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{\{W_{t+s} \in A_i\}}(x)$$

Donde $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ para cada $i = 1, \dots, n$. Finalmente, para cualquier función f Borel medible, el resultado se demuestra utilizando una sucesión creciente $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de funciones simples que converja a la función f y con la aplicación del Teorema de Convergencia Monótona. □

Este ejemplo es de suma importancia para el estudio de la relación entre los procesos de Markov y las difusiones, pues veremos que las difusiones 'heredan' la propiedad de Markov del movimiento Browniano. Más adelante probaremos que, en efecto, una

difusión es un proceso de Markov. Antes de pasar a esto, mostraremos una versión más general de los procesos de Markov, que son los procesos de Markov fuertes. Para esto, definiremos algunos conceptos que nos ayudarán a estudiar esta clase de procesos.

Definición 1.4. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de Probabilidad filtrado y $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$. Decimos que τ es un tiempo de paro (con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$) si y sólo si para cada $t \geq 0$: $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$. Si no hay ambigüedad con la filtración, simplemente se dice que τ es tiempo de paro.

Definición 1.5. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de Probabilidad filtrado y τ un $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ -tiempo de paro. Se define la σ -álgebra parada \mathfrak{F}_τ como:

$$\mathfrak{F}_\tau = \{A \in \mathfrak{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \forall t \geq 0\}$$

Es sencillo verificar que la familia de conjuntos que acabamos de definir es σ -álgebra de conjuntos de Ω . Con la ayuda de los dos objetos que definimos, ahora podemos definir un proceso de Markov fuerte.

Definición 1.6 (Proceso de Markov fuerte). Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Markov con función de transición $(P_t : t \geq 0)$. Decimos que $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov fuerte (o que tiene la propiedad fuerte de Markov) si para cualquier función boreliana y acotada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier tiempo de paro τ con respecto a $(\mathfrak{F}_t^X)_{t \geq 0}$ finito \mathbb{P} -c.s. se cumple:

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) | \mathfrak{F}_\tau^X] = \mathbb{E}[f(X_t) | X_\tau] = (\mathbf{P}_t f)(X_\tau), \text{ para } t > 0.$$

Al igual que en los procesos de Markov, esta definición no depende de la filtración generada por el proceso, sino que un proceso puede ser de Markov fuerte con respecto a cualquier filtración arbitraria siempre que exista el semigrupo (o la función de transición) que satisfaga la propiedad fuerte de Markov.

Es importante notar que si un proceso es de Markov fuerte, entonces es un proceso de Markov. Esto se debe al hecho de que cualquier función constante es tiempo de paro (con respecto a cualquier filtración) y que, para este caso particular de tiempos de paro, la σ -álgebra parada es \mathfrak{F}_t . Entonces, la propiedad fuerte de Markov se convierte en la propiedad de Markov. Sin embargo, no todos los procesos de Markov son procesos de Markov fuertes.

Un hecho que nos interesa en el estudio de los procesos de Markov fuertes, es que en el caso del movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$, se cumple que es proceso de Markov y también es un proceso de Markov fuerte. Para demostrar esto, mostraremos un resultado más general. Nos apoyaremos en el siguiente teorema:

Teorema 1.3 (Paro opcional de Doob). *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de Probabilidad filtrado y sean $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala continua y τ_1, τ_2 tiempos de paro finitos \mathbb{P} -c.s. (todos con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$) y tales que $\tau_1 \leq \tau_2$ \mathbb{P} -c.s. y $\mathbb{E}[|M_{\tau_1}|] < \infty$ y $\mathbb{E}[|M_{\tau_2}|] < \infty$. Entonces:*

$$\mathbb{E}[M_{\tau_2} | \mathfrak{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1} \text{ } \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Una demostración de este resultado se puede consultar en [3].

Teorema 1.4. *Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano estándar y sea τ un tiempo de paro finito \mathbb{P} -c.s. El proceso $(W_{\tau+t} - W_\tau)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar e independiente de (\mathfrak{F}_τ^W) .*

Demostración. Sea τ un tiempo de paro finito \mathbb{P} -c.s. con respecto a $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$. Primero, supondremos que τ es acotado \mathbb{P} -c.s. Consideremos al proceso:

$$\widehat{W}_t = W_{\tau+t} - W_\tau, t \geq 0.$$

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq t$. Utilizaremos el teorema de paro opcional de Doob con la martingala exponencial del movimiento Browniano:

$$\left(\exp \left\{ \lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right\} \right)_{t \geq 0}$$

y con los tiempos de paro $\tau+t$ y $\tau+s$ (se tiene que $\tau+t \geq \tau+s$). Entonces, al aplicar el teorema de paro opcional de Doob obtenemos:

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \lambda W_{\tau+t} - \frac{\lambda^2}{2} (\tau+t) \right\} \middle| \mathfrak{F}_{\tau+s}^W \right] = \exp \left\{ \lambda W_{\tau+s} - \frac{\lambda^2}{2} (\tau+s) \right\}$$

Entonces, utilizando este resultado, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \{ \lambda (W_{\tau+t} - W_{\tau+s}) \} \middle| \mathfrak{F}_{\tau+s}^W \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \lambda (W_{\tau+t} - W_{\tau+s}) - \frac{\lambda^2}{2} (\tau+t - \tau+s) \right\} \middle| \mathfrak{F}_{\tau+s}^W \right] \\ &= \exp \left\{ -\lambda W_{\tau+s} + \frac{\lambda^2}{2} (\tau+t) \right\} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \lambda W_{\tau+t} - \frac{\lambda^2}{2} (\tau+t) \right\} \middle| \mathfrak{F}_{\tau+s}^W \right] \end{aligned}$$

esto porque $\tau+t$, $\exp\{W_{\tau+s}\}$ son $\mathfrak{F}_{\tau+s}$ -medibles,

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ -\lambda W_{\tau+s} + \frac{\lambda^2}{2} (\tau+t) \right\} \exp \left\{ \lambda W_{\tau+s} - \frac{\lambda^2}{2} (\tau+s) \right\} \\ \mathbb{E} \left[\exp \{ \lambda (W_{\tau+t} - W_{\tau+s}) \} \middle| \mathfrak{F}_{\tau+s}^W \right] &= \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2} (t-s) \right\} \end{aligned}$$

De la última igualdad, podemos concluir que $(\widehat{W}_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de incrementos independientes y estacionarios con distribución normal con media 0 y varianza $(t - s)$, es decir, es un movimiento Browniano independiente de \mathfrak{F}_τ^W . Para el caso en el que τ no es acotado \mathbb{P} -c.s., podemos considerar la sucesión de tiempos de paro: $(\tau \wedge n)_{n \in \mathbb{N}}$ y utilizar el resultado anterior con los procesos:

$$(W_{t+\tau \wedge n} - W_{\tau \wedge n})_{t \geq 0}, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, al hacer $n \rightarrow \infty$, obtenemos el resultado para $(\widehat{W}_t)_{t \geq 0}$ □

Ahora, con este resultado, podemos demostrar que el movimiento Browniano es un proceso de Markov fuerte.

Corolario 1.1. *Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano estándar. Entonces $(W_t)_{t \geq 0}$ cumple con la propiedad fuerte de Markov.*

Demostración. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función boreliana y acotada y $t \geq 0$ fijo. Sea τ un tiempo de paro finito \mathbb{P} -c.s, entonces:

$$\mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|\mathfrak{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(W_{\tau+t} - W_\tau + W_\tau)|\mathfrak{F}_\tau]$$

Como $W_{\tau+t} - W_\tau$ es independiente de \mathfrak{F}_τ , se tiene:

$$\mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|\mathfrak{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|W_\tau]$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|W_\tau = x] = \mathbb{E}[f(W_{\tau+t} - W_\tau + W_\tau)|W_\tau = x] = \mathbb{E}[f(X_t + x)],$$

donde X_t es una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y varianza t e independiente de W_τ . Entonces:

$$\mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|W_\tau = x] = \int_{\mathbb{R}} f(x + y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

Por otra parte, tenemos:

$$\mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|\mathfrak{F}_\tau] = \int_{\mathbb{R}} f(W_\tau + y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|W_\tau] = \int_{\mathbb{R}} f(W_\tau + y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = (\mathbf{P}_t f)(W_\tau) = \mathbb{E}[f(W_{\tau+t})|\mathfrak{F}_\tau]$$

□

Ahora que contamos con la propiedad de Markov y la propiedad fuerte de Markov, es posible establecer una relación entre las difusiones y los procesos de Markov. Recordemos que denotamos por $(X_t^{Y_0})_{t \geq 0}$ al único proceso (en el sentido \mathbb{P} -c.s.) adaptado y con trayectorias continuas que satisface la EDE:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 = Y_0 \end{cases}$$

Mostraremos que $(X_t^x)_{t \geq 0}$ satisface la propiedad de Markov y la propiedad fuerte de Markov.

Teorema 1.5 (Propiedad de Markov para Difusiones [2]). *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la difusión $(X_t^{x_0})_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov homogéneo con el semigrupo: $(\mathbf{P}_t f)(x_0) = \mathbb{E}[f(X_t^{x_0})]$ para toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana y acotada. Además, por ser homogéneo se cumple que:*

$$\mathbb{E}[f(X_t^{x_0}) | \mathfrak{F}_s] = (\mathbf{P}_{t-s} f)(X_s^{x_0}), \quad 0 \leq s \leq t$$

Demostración. Para esta prueba nos basaremos en la construcción recursiva que se utiliza en la prueba de existencia y unicidad de [4]. Para esto, consideremos la siguiente función.

$$\Phi(X)_t := x_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

Definimos la siguiente sucesión:

$$X_t^0 = x_0$$

$$X_t^{n+1} = \Phi(X^n)_t \quad n \geq 0$$

Observemos que cada (X_t^n) es un proceso adaptado y lo podemos representar como un funcional de $(W_t)_{t \geq 0}$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe F_n tal que:

$$X_t^n = F_n(x_0, (W_u)_{0 \leq u \leq t})$$

Como la sucesión de procesos (X_t^n) converge a la solución $(X_t^{x_0})$ de la EDE, entonces existe un funcional F tal que:

$$X_t^{x_0} = F(x_0, (W_u)_{0 \leq u \leq t})$$

Sean $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
X_{t+s}^{x_0} &= x_0 + \int_0^{t+s} a(X_u^{x_0}) du + \int_0^{t+s} \sigma(X_u^{x_0}) dW_u \\
&= X_s^{x_0} + \int_s^{t+s} a(X_u^{x_0}) du + \int_s^{t+s} \sigma(X_u^{x_0}) dW_u \\
&= X_s^{x_0} + \int_0^t a(X_{s+u}^{x_0}) du + \int_0^t \sigma(X_{s+u}^{x_0}) d(W_{s+u} - W_s) \\
&= X_s^{x_0} + \int_0^t a(X_{s+u}^{x_0}) du + \int_0^t \sigma(X_{s+u}^{x_0}) d\widehat{W}_u
\end{aligned}$$

Donde $(\widehat{W}_u)_{u \geq 0}$ es un movimiento Browniano independiente de \mathfrak{F}_s .

Por la unicidad de las trayectorias de $(X_t^{x_0})$, tenemos que $X_{t+s}^{x_0} = F(X_s^{x_0}, (\widehat{W}_u)_{0 \leq u \leq t})$. Entonces, sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana y acotada:

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}^{x_0}) | \mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}[f(F(X_s^{x_0}, (\widehat{W}_u)_{0 \leq u \leq t})) | \mathfrak{F}_s]$$

Como $(\widehat{W}_u)_{u \geq 0}$ es independiente de \mathfrak{F}_s para toda u :

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[f(X_t^{X_s^{x_0}})] \\
\mathbb{E}[f(X_{t+s}^{x_0}) | \mathfrak{F}_s] &= (\mathbf{P}_t f)(X_s^{x_0})
\end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema mostraremos que podemos extender la propiedad de Markov para difusiones a cualquier tiempo de paro finito \mathbb{P} -c.s., es decir, mostraremos que una difusión satisface la propiedad de Markov fuerte.

Teorema 1.6 (Propiedad de Markov fuerte para difusiones [2]). *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la difusión $(X_t^{x_0})_{t \geq 0}$ satisface la propiedad de Markov fuerte con el semigrupo: $(\mathbf{P}_t f)(x_0) = \mathbb{E}[f(X_t^{x_0})]$ para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana y acotada. Es decir, para toda f boreliana y acotada, τ un tiempo de paro finito \mathbb{P} -c.s. y $t > 0$ se cumple:*

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}^{x_0}) | \mathfrak{F}_\tau] = (\mathbf{P}_t f)(X_\tau^{x_0})$$

Demostración. La demostración de este teorema se construye de la misma forma en la que demostramos la propiedad de Markov para difusiones, es decir, se demuestra que existe un funcional F tal que $X_\tau^{x_0} = F(x_0, (W_u)_{0 \leq u \leq \tau})$ para cualquier tiempo de paro τ finito \mathbb{P} -c.s. Notando que, para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
X_{\tau+t}^{x_0} &= x_0 + \int_0^{\tau+t} a(X_u^{x_0})du + \int_0^{\tau+t} \sigma(X_u^{x_0})dW_u \\
&= X_\tau^{x_0} + \int_\tau^{\tau+t} a(X_u^{x_0})du + \int_\tau^{\tau+t} \sigma(X_u^{x_0})dW_u \\
&= X_\tau^{x_0} + \int_0^t a(X_{\tau+u}^{x_0})du + \int_0^t \sigma(X_{\tau+u}^{x_0})d(W_{\tau+u} - W_\tau) \\
&= X_\tau^{x_0} + \int_0^t a(X_{\tau+u}^{x_0})du + \int_0^t \sigma(X_{\tau+u}^{x_0})d\widehat{W}_u
\end{aligned}$$

Donde $(\widehat{W}_u)_{u \geq 0}$ es un movimiento Browniano independiente de \mathfrak{F}_τ .

Con esto, mostramos que $X_{\tau+t}^{x_0} = F(X_\tau^{x_0}, (\widehat{W}_u)_{0 \leq u \leq t})$ y, por lo tanto:

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}^{x_0}) | \mathfrak{F}_\tau] = (\mathbf{P}_t f)(X_\tau^{x_0})$$

□

1.3. El Teorema de Feynman-Kac

Una aplicación importante que se ha encontrado para las difusiones es la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs). Con esto nos referimos a que se pueden expresar las soluciones de algunos casos de EDPs en términos de una difusión, a pesar de no conocer una solución analítica al problema relacionado con la EDP. Esta relación se debe a que las difusiones son procesos de Markov y las EDPs que podemos resolver a través de difusiones están dadas en términos de un operador relacionado con estos procesos conocido como el 'Generador infinitesimal'.

Definición 1.7. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una difusión con valores en \mathbb{R} . Definimos al generador infinitesimal de $(X_t)_{t \geq 0}$ como el operador:

$$\mathcal{A}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t} \quad ; x \in \mathbb{R}$$

Denotamos por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ al conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que este límite existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

Además de contar con la definición del generador, para las difusiones es posible hallar una forma explícita del generador infinitesimal y esta forma estará dada en términos de los coeficientes de deriva y de difusión, como veremos más adelante. Para llegar a la forma del generador, es necesario probar el siguiente resultado.

Proposición 1.2. Sea $(Y_t^x)_{t \geq 0}$ un proceso de Itô con valores en \mathbb{R} de la forma:

$$Y_t^x = x + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s$$

Sean $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ y τ un tiempo de paro c. r. a $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \geq 0}$ tal que $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$. Supongamos que u, v están acotadas en el conjunto $\{(t, \omega) | Y_t(\omega) \text{ pertenece al soporte de } f\}$. Entonces:

$$\mathbb{E}^x[f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \left(u(s, \omega) f'(Y_s) + \frac{1}{2} v^2(s, \omega) f''(Y_s) \right) ds \right]$$

Demostración. Sea $Z = f(Y)$, entonces al aplicar la fórmula de Itô a Z obtenemos:

$$dZ = (u f'(Y) + \frac{1}{2} v^2 f''(Y)) dt + v f'(Y) dW_t$$

Esto significa que:

$$f(Y_t^x) = f(x) + \int_0^t \left(u f'(Y_s) + \frac{1}{2} v^2 f''(Y_s) \right) ds + \int_0^t v f'(Y_s) dW_s$$

Entonces, al sustituir Y_t por Y_τ en la expresión anterior y calcular esperanzas obtenemos:

$$\mathbb{E}^x[f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \left(u f'(Y_s) + \frac{1}{2} v^2 f''(Y_s) \right) ds \right] + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau u f'(Y_s) dW_s \right]$$

Para llegar a la fórmula que queremos, basta con mostrar que $\mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau u f'(Y_s) dW_s \right] = 0$.

Notemos que si g es una función boreliana y acotada, supongamos $|g| \leq M$ para alguna $M > 0$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dW_s \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^k \mathbb{I}_{\{s < \tau\}} g(Y_s) dW_s \right] = 0$$

. Además, también se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\left(\int_0^\tau g(Y_s) dW_s - \int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dW_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E}^x \left[\int_{\tau \wedge k}^\tau g^2(Y_s) ds \right] \\ &\leq M^2 \mathbb{E}^x[\tau - \tau \wedge k] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donde el límite anterior se toma conforme $k \rightarrow \infty$. En consecuencia:

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau g(Y_s) dW_s \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dW_s \right] = 0$$

Donde el límite anterior es en el sentido de la norma en $L^2(\mathbb{P} \times dt)$.

Por lo tanto, al aplicar este resultado a $g(Y_s) = v f'(Y_s)$, obtenemos:

$$\mathbb{E}^x[f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \left(u(s, \omega) f'(Y_s) + \frac{1}{2} v^2(s, \omega) f''(Y_s) \right) ds \right]$$

□

Este resultado nos es útil porque las difusiones son procesos de Itô, por lo tanto es posible aplicarlo para encontrar la forma del Generador infinitesimal.

Teorema 1.7. Sea $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la difusión que satisface la EDE $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con $X_0 = x$. Si $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, entonces $f \in \mathcal{D}_A$ y:

$$\mathcal{A}f(x) = a(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

Demostración. Sea $t > 0$. Utilizando la fórmula de Itô para $f(X_t)$, obtenemos:

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t \left(a(X_s)f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s) \right) ds + \int_0^t a(X_s)f'(X_s) dW_s$$

A partir de esta forma para $f(X_t)$, del hecho de que $(X_t^x)_{t \geq 0}$ es un proceso de Itô y utilizando el tiempo de paro $\tau = t$, es posible aplicar la proposición (1.2) para obtener:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x[f(X_t)] &= f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^t \left(a(X_s)f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s) \right) ds \right] \\ &= f(x) + \int_0^t \mathbb{E}^x[a(X_s)f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s)] ds\end{aligned}$$

Esta expresión es una función diferenciable con respecto a t , por lo tanto el límite de la definición (1.7) existe y es de la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x) + \int_0^t \mathbb{E}^x[a(X_s)f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s)] ds - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \mathbb{E}^x[a(X_s)f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s)] ds}{t} \\ &= a(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4. *El movimiento Browniano puede ser expresado en términos de la siguiente EDE:*

$$\begin{cases} dX_t = dW_t, \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

Entonces, el generador infinitesimal del Movimiento browniano es:

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2}f''$$

Es decir, para el caso del movimiento Browniano, su generador infinitesimal es el operador Laplaciano. Este hecho también es válido para el movimiento Browniano m -dimensional, con $m \geq 1$.

Ejemplo 1.5. Movimiento Browniano geométrico Sean $a \in \mathbb{R}$ y $x_0, \sigma > 0$. El movimiento Browniano geométrico (o exponencial) es la solución de la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ S_0 = x_0 \end{cases}$$

Entonces, el generador infinitesimal para esta difusión está dado por:

$$\mathcal{A}f(x) = axf'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2f''(x)$$

Como se mencionó al inicio de esta sección, nos interesa estudiar la relación entre las difusiones y ciertos problemas de modelos de fenómenos a los cuales se les puede asociar una EDP. La relación se basa en que la solución de ciertas EDPs que están expresadas en términos del generador infinitesimal se puede expresar en términos de la difusión a la que corresponde dicho generador. Esta relación y la forma en que estará expresada nuestra solución están dadas por el Teorema de Feynman-Kac.

Teorema 1.8 (Feynman-Kac, versión 1 [15]). *Sea $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la difusión que satisface la EDE $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con $X_0 = x$ y sea \mathcal{A} su generador infinitesimal. Sean $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ y $q \in C(\mathbb{R})$ acotada inferiormente. Definimos la función:*

$$v(t, x) = \mathbb{E}^x \left[\exp \left(- \int_0^t q(X_s) ds \right) f(X_t) \right] \quad (1.7)$$

Donde $E^x[\cdot] = E[\cdot | X_0 = x]$. Entonces v satisface la EDP:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{A}v - qv; \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$v(0, x) = f(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

Demostración. Sean $Y_t = f(X_t)$ y $Z_t = \exp \left(- \int_0^t q(X_s) ds \right)$. Utilizando la fórmula de Itô para Y_t, Z_t obtenemos:

$$\begin{aligned} d(Y_t) &= \mathcal{A}f(X_t)dt + \sigma(X_t)f'(X_t)dW_t \\ d(Z_t) &= -q(X_t)Z_t dt \end{aligned}$$

Ahora, al utilizar la regla del producto del Cálculo Estocástico para el proceso $Z_t Y_t$, obtenemos:

$$\begin{aligned} d(Z_t Y_t) &= Z_t dY_t + Y_t dZ_t + dY_t dZ_t \\ &= Z_t (\mathcal{A}f(X_t) - q(X_t)) dt + Z_t \sigma(X_t) f'(X_t) dW_t \end{aligned}$$

Esta expresión nos muestra la EDE que satisface el proceso $Z_t Y_t$, cuya condición inicial es $Z_0 Y_0 = f(x)$, por lo que es posible utilizar la proposición (1.2) con $F(x) = x$ y el tiempo de paro determinista $\tau = t$ para obtener la siguiente expresión para $\mathbb{E}^x[Y_t Z_t]$:

$$\mathbb{E}^x[Z_t Y_t] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^t Z_s (\mathcal{A}f(X_s) - q(X_s)) ds \right]$$

Utilizando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración:

$$= f(x) + \int_0^t \mathbb{E}[Z_s (\mathcal{A}f(X_s) - q(X_s))] ds$$

Es decir, $v(t, x) = \mathbb{E}^x[Z_t Y_t]$ es diferenciable con respecto a t .

Sea $r > 0$:

$$\frac{1}{r}(\mathbb{E}^x[v(t, X_r)] - v(t, x)) = \frac{1}{r}(\mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_r}[Z_t f(X_t)]] - \mathbb{E}^x[Z_t f(X_t)])$$

$$\begin{aligned} \text{Utilizando la propiedad de Markov para } \mathbb{E}^{X_r}[Z_t f(X_t)] &= \mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) \exp \left(- \int_0^t q(X_{r+s}) ds \right) \middle| \mathfrak{F}_r \right] \\ &= \frac{1}{r} \left(\mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) \exp \left(- \int_0^t q(X_{r+s}) ds \right) \middle| \mathfrak{F}_r \right] \right] - \mathbb{E}^x[Z_t f(X_t)] \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) \exp \left(- \int_0^t q(X_{r+s}) ds \right) \right] - \mathbb{E}^x[Z_t f(X_t)] \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) \exp \left(- \int_r^{t+r} q(X_s) ds \right) \right] - \mathbb{E}^x[Z_t f(X_t)] \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) Z_{t+r} \exp \left(\int_0^r q(X_s) ds \right) - Z_t f(X_t) \right] \right) \\ &= \frac{1}{r} \mathbb{E}^x [f(X_{t+r}) Z_{t+r} - f(X_t) Z_t] \\ &\quad + \frac{1}{r} \mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) Z_{t+r} \left(\exp \left(\int_0^r q(X_s) ds \right) - 1 \right) \right] \\ \frac{1}{r}(\mathbb{E}^x[v(t, X_r)] - v(t, x)) &= \frac{1}{r}(v(t+r, x) - v(t, x)) \\ &\quad + \frac{1}{r} \mathbb{E}^x \left[f(X_{t+r}) Z_{t+r} \left(\exp \left(\int_0^r q(X_s) ds \right) - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Analicemos la expresión a la que llegamos. El primer sumando del lado derecho de la igualdad converge a $\frac{\partial v}{\partial t}$ conforme $r \rightarrow 0$. En el segundo sumando intervienen dos expresiones: $f(X_{t+r}) Z_{t+r}$ y $\frac{1}{r} \left(\exp \left(\int_0^r q(X_s) ds \right) - 1 \right)$. La primera de ellas converge a $f(X_t) Z_t$ conforme $r \rightarrow 0$ y la segunda converge a $q(X_0)$ cuando $r \rightarrow 0$. Como ambos límites existen, el límite del producto también existe y por el Teorema de Convergencia Dominada es posible intercambiar el límite con la esperanza y obtener:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\lim_{r \rightarrow 0} f(X_{t+r}) Z_{t+r} \left(\frac{1}{r} \left(\exp \left(\int_0^r q(X_s) ds \right) - 1 \right) \right) \right] &= \mathbb{E}^x [f(X_t) Z_t q(X_0)] \\ &= q(x) v(t, x) \end{aligned}$$

Por otra parte, la expresión en el lado izquierdo de la igualdad en (1.8) converge al generador infinitesimal de $(X_t^x)_{t \geq 0}$ aplicado a la función $v(t, x)$. Por lo tanto, al tomar en cuenta todos estos límites obtenemos:

$$\mathcal{A}v(t, x) = v_t(t, x) + q(x)v(t, x)$$

□

Como podemos ver, con el uso de este teorema podemos dar la solución de problemas con valores iniciales expresados como una EDP en la que aparezca el generador de una difusión.

Ahora veremos que se pueden modificar las hipótesis del teorema anterior para resolver no solo problemas de valores iniciales, sino que se puede condicionar a que la solución sea una función con valores en el conjunto $[0, T] \times \mathbb{R}$ y que en T , la solución se comporte de cierta forma, i.e., $v(T, x) = f(x)$ para alguna función f boreliana. A esto se le conoce como un problema con condición final y el planteamiento del Teorema de Feynman-Kac que garantiza que también es posible resolver este tipo de EDPs queda expresado de la siguiente forma. La demostración de esta versión del teorema es diferente a la anterior, ya que no haremos los cálculos explícitos del generador infinitesimal ni de las derivadas parciales de la solución propuesta. En este caso, intentaremos que nuestra solución (o una modificación de esta) sea martingala con respecto a la filtración del movimiento Browniano.

Teorema 1.9 (Feynman-Kac, versión 2 [16]). *Sea $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la difusión que satisface la EDE $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con $X_0 = x$ y sea \mathcal{A} su generador infinitesimal. Sea $q \in C(\mathbb{R})$ acotada inferiormente y h una función boreliana. Fijemos $T > 0$ y para cada $t \in [0, T]$ definimos la función:*

$$f(t, x) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T q(X_s) ds \right) h(X_T) \middle| X_t = x \right] \quad (1.9)$$

Entonces $f(t, x)$ satisface la EDP:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f = qf$$

con condición final:

$$f(T, x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Demostración. Por la definición de $f(t, x)$ y utilizando la propiedad de Markov de $(X_t^x)_{t \geq 0}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T q(X_s) ds \right) h(X_T) \middle| X_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T q(X_s) ds \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_t \right] \end{aligned}$$

Podemos ver que $(f(t, X_t)_{t \geq 0})$ no es una martingala, ya que, si $s < t$, entonces:

$$\mathbb{E}[f(t, X_t) | \mathfrak{F}_s] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T q(X_u) du \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_t \right] \middle| \mathfrak{F}_s \right]$$

Como $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$, entonces:

$$= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T q(X_u) du \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_s \right]$$

Sin embargo, $f(s, X_s) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_s^T q(X_u) du \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_s \right] \neq \mathbb{E}[f(t, X_t) | \mathfrak{F}_s]$. Para conseguir una martingala a partir del proceso $f(t, X_t)_{t \geq 0}$, es necesario que la variable que estamos condicionando no dependa de t , es decir, necesitamos modificar a nuestro proceso de tal forma que $\exp \left(- \int_t^T q(X_u) du \right) h(X_T)$ no dependa de t .

Entonces, proponemos la siguiente modificación. Sea $Z_t = \exp \left(- \int_0^t q(X_s) ds \right)$, entonces consideremos al proceso $Z_t f(t, X_t)$. Como Z_t es adaptado a $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, tenemos que:

$$Z_t f(t, X_t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T q(X_s) ds \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_t \right]$$

Comprobemos que $(Z_t f(t, X_t))_{t \geq 0}$ es martingala:

i) P.D. Para $t > 0$, $\mathbb{E}[f(t, X_t)] < \infty$:

$$(\mathbb{E}[|Z_t f(t, X_t)|])^2 = \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T q(X_s) ds \right) h(X_T) \right] \right)^2$$

Como q es continua y acotada inferiormente, entonces $\exp \left(- \int_0^T q(X_s) ds \right)$ es acotada, también $\exp \left(-2 \int_0^T q(X_s) ds \right)$ es acotada y $\mathbb{E} \left[\exp \left(-2 \int_0^T q(X_s) ds \right) \right] < \infty$ y como $\mathbb{E}[(X_T)^2] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[h^2(X_T)] < \infty$, entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$(\mathbb{E}[|Z_t f(t, X_t)|])^2 \leq \mathbb{E} \left[\exp \left(-2 \int_0^T q(X_s) ds \right) \right] \mathbb{E}[h^2(X_T)] < \infty$$

En consecuencia:

$$\mathbb{E}[|Z_t f(t, X_t)|] < \infty$$

ii) Por la definición de $(Z_t f(t, X_t))_{t \geq 0}$, tenemos que:

$$Z_t f(t, X_t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T q(X_s) ds \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_t \right]$$

es \mathfrak{F}_t -medible para toda $t \geq 0$.

iii) Sean $s < t$, entonces se tiene que:

$$\mathbb{E}[Z_t f(t, X_t) | \mathfrak{F}_s] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T q(X_u) du \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_t \right] \middle| \mathfrak{F}_s \right]$$

Como $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$, entonces:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T q(X_u) du \right) h(X_T) \middle| \mathfrak{F}_s \right] \\ &= Z_s f(s, X_s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(Z_t f(t, X_t)_{t \geq 0})$ es martingala. Ahora, por la demostración del teorema anterior, sabemos que $d(Z_t) = -q(X_t)Z_t dt$ y también tenemos que:

$$d(f(t, X_t)) = (f_t(t, X_t) + \mathcal{A}f(t, X_t))dt + \sigma(X_t)f_x(t, X_t)dW_t$$

Entonces:

$$d(Z_t f(t, X_t)) = Z_t(f_t(t, X_t) + \mathcal{A}f(t, X_t) - q(X_t)f(t, X_t))dt + Z_t \sigma(X_t)f_x(t, X_t)dW_t$$

Sabemos que $(Z_t f(t, X_t)_{t \geq 0})$ es martingala, entonces el término en dt es igual a 0, es decir:

$$Z_t(f_t(t, X_t) + \mathcal{A}f(t, X_t) - q(X_t)f(t, X_t)) = 0$$

Como $Z_t > 0$ para todo t , entonces se cumple que:

$$f_t(t, X_t) + \mathcal{A}f(t, X_t) = q(X_t)f(t, X_t)$$

□

Una forma de aplicar este resultado es para encontrar la distribución de cada variable X_t de una difusión. En general, una EDE no se puede resolver de forma explícita y tampoco es posible conocer su distribución de forma inmediata. Sin embargo, si podemos caracterizar a cada variable por su transformada de Laplace (o su función generadora de momentos), podemos darnos una idea de qué distribución tiene. La forma en que encontraremos la transformada de Laplace es a través del Teorema (1.9), fijando $T, \lambda > 0$, con $q \equiv 0$ y con condición final $h(x) = e^{\lambda x}$. Por el resultado del Teorema (1.9), sabemos que:

$$f(t, x) = \mathbb{E}[e^{\lambda X_T} | X_t = x]$$

satisface la siguiente EDP con condición final:

$$f_t + \mathcal{A}f(t, x) = 0$$

$$f(T, x) = e^{\lambda x}$$

Entonces basta con resolver (de forma explícita o a través de métodos numéricos) esta EDP y tendremos que:

$$\psi_{X_T}(\lambda) = f(0, x) = \mathbb{E}^x[e^{\lambda X_T}]$$

Donde $\psi_{X_T}(\lambda)$ es la transformada de Laplace de la variable aleatoria X_T .

Capítulo 2

Modelos de tasas de interés

En este capítulo se estudiarán los modelos de tasas de interés estocásticos. Se hace un supuesto sobre el comportamiento de la tasa corta de interés (la tasa a la que se puede prestar o pedir prestado en un período muy corto de tiempo) y con base en este comportamiento se intentará encontrar un modelo que reconstruya las tasas de interés del mercado. En particular, se estudiará el caso del modelo propuesto por Cox, Ingersoll y Ross en 1985.

En el mercado sólo se conocen tasas de interés para ciertas fechas de vencimiento (usualmente estas fechas de vencimiento son a 1 mes, 3 meses, 6 meses y un año). Al graficar estas tasas conocidas obtenemos la curva 'yield' o 'estructura de plazo'. Esta gráfica nos muestra la relación entre las tasas de interés a las que se pueden obtener préstamos el día de hoy y las fechas de vencimiento de dichos préstamos o el rendimiento que dan ciertos instrumentos de mercado dependiendo de su fecha de vencimiento.

Aunque podemos representar a la estructura de plazo como una función continua de la fecha de vencimiento, en el mercado sólo conocemos los valores de pocos puntos de la gráfica, por lo que no es posible el valuar directamente un producto cuyo precio dependa de la tasa a un vencimiento distinto de los conocidos, una de las técnicas más utilizadas es por interpolación a través de métodos numéricos.

En este trabajo, se presentarán modelos que suponen un comportamiento estocástico para las tasas de interés a partir de las cuales podremos reconstruir la estructura de plazo y, por lo tanto, será posible valuar instrumentos financieros que dependan de la tasa a cualquier vencimiento.

2.1. Valuación de un bono cupón cero

El elemento básico para la construcción de la estructura de plazo y de los modelos de tasas de interés es el bono cupón cero, el cual es un instrumento en el que una parte se compromete a pagar una unidad monetaria en cierta fecha, llamada fecha de

vencimiento.

Definición 2.1 (Bono cupón cero). *Sea $T > 0$ una fecha de vencimiento. Un Bono cupón cero es un instrumento que paga 1 unidad monetaria en la fecha T . Denotamos por $P(t, T)$ al precio del bono en tiempo t , $t \leq T$. A la fecha t se le conoce como fecha de valuación.*

De acuerdo con la definición del bono cupón cero, podemos ver que $P(T, T) = 1$ y también se deduce que $P(t, T) < 1$ si $t < T$. Dado el valor del bono a cierta fecha de vencimiento, podemos encontrar la tasa de interés $R(t, T)$ como el valor que satisface la siguiente ecuación¹:

$$\begin{aligned} P(t, T)e^{R(t, T)(T-t)} &= 1 \\ \ln(P(t, T)e^{R(t, T)(T-t)}) &= 0 \\ \ln(e^{R(t, T)(T-t)}) &= -\ln(P(t, T)) \\ R(t, T) &= \frac{-\ln(P(t, T))}{T-t} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Al calcular $R(t, T)$ a partir de precios de bonos cupón cero (u obtenerla de información de mercado) para distintas fechas de vencimiento, se obtiene la estructura de plazo de las tasas de interés, es decir, la curva que nos representa la relación existente entre las tasas de interés (rendimiento) y las fechas de vencimiento. Generalmente ésta es una curva cóncava y creciente, mostrando que un inversionista espera obtener un rendimiento mayor por la promesa a largo plazo del pago de 1 u.m. (en consecuencia, el precio que pagará el día de hoy por dicho instrumento será decreciente con respecto a la fecha de vencimiento).

Una vez que conocemos la tasa de rendimiento, podemos construir el siguiente elemento clave para la construcción de la estructura de plazo como una función continua de la fecha de vencimiento: la tasa corta.

Definición 2.2 (Tasa corta). *Se define a la tasa corta $r(t)$ como el siguiente límite:*

$$r(t) := - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(P(t, t + \Delta t))}{\Delta t} = - \left. \frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t, T)) \right|_{T=t}$$

La tasa corta es la tasa de interés que se ofrece a tiempo t y con vencimiento en dt , es decir, la tasa de interés instantánea.

Los modelos que propondremos supondrán que, bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} del mundo real, la tasa corta es un proceso estocástico $(r_t)_{t \geq 0}$ obtenido como la solución de la EDE:

¹En esta ecuación se puede sustituir la expresión $e^{R(t, T)(T-t)}$ por $1 + R(t, T)(T-t)$, dependiendo del tipo de tasa de interés que se desee calcular.

$$\begin{cases} dr(t) = b(r(t))dt + \sigma(r(t))dW_t, & t \geq 0 \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Los modelos que desarrollaremos son conocidos como modelos de un solo factor o modelos endógenos, ya que suponen que el único factor de riesgo en el comportamiento de la tasa corta recae en ella misma y no toma en cuenta otros factores externos o desconocidos.

El objetivo de este estudio será encontrar el valor de $P(t, T)$ en función del proceso de $(r(t))_{t \geq 0}$ para cualesquiera fechas t y T y, con base en esto y utilizando (2.1), encontrar el valor de $R(0, T)$ para cualquier $T \geq 0$. Esto nos llevará a construir una curva yield que replicará la curva de mercado y con la cual se podrán valorar instrumentos financieros.

Aparte del supuesto sobre el comportamiento del proceso de tasa corta, necesitamos hacer supuestos adicionales sobre el valor de $P(t, T)$. Primero, supondremos que su valor está completamente determinado por la fecha de valuación t , la fecha de vencimiento T y el valor de la tasa corta a tiempo t . En otras palabras, supondremos que existe una función $f(x_1, x_2, x_3)$ tal que $P(t, T) = f(t, T, r(t))$ y que $P(T, T) = f(T, T, r(T)) = 1$ para cualquier valor de $r(T)$. Además, supondremos que $f_t := \frac{\partial f}{\partial t}$, $f_r := \frac{\partial f}{\partial r}$, $f_{rr} := \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ existen y son continuas.

A partir de los supuestos anteriores y, utilizando la fórmula de Itô y que el proceso $(r_t)_{t \geq 0}$ satisface la EDE: $dr(t) = b(r(t))dt + \sigma(r(t))dW_t$, obtenemos que:

$$dP(t, T) = (f_t + \mathcal{A}f)dt + \sigma(r(t))f_r dW_t \quad (2.2)$$

A partir de esta última ecuación, podemos definir a la tasa de rendimiento instantánea de un bono como:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)}$$

Para valorar correctamente el bono cupón cero, es necesario construir una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ que sea equivalente a la medida del mundo real \mathbb{P} y en la que no sea posible encontrar estrategias de arbitraje para cualquier combinación de bonos con distintos vencimientos.

Para construir esta medida, nos apoyaremos en el siguiente resultado de Cálculo Estocástico: el teorema de Girsanov. De forma intuitiva, este teorema dice que si existe un espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}^1)$ en el cual está definido un movimiento Browniano $(W_t^1)_{t \geq 0}$, entonces es posible construir una medida de Probabilidad \mathbb{P}^2 en la cual el proceso $W_t^2 := W_t^1 + \int_0^t \alpha(s)ds$ es un movimiento Browniano, imponiendo algunas condiciones sobre el proceso $(\alpha(t))_{t \geq 0}$. En este trabajo sólo enunciaremos el teorema de Girsanov, sin embargo, la demostración completa puede consultarse en [15].

Teorema 2.1 (Teorema de Girsanov). *Sea $(Y_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Itô con $Y_0 = 0$ de la forma:*

$$Y_t = W_t + \int_0^t \alpha(s) ds, \quad t \geq 0$$

Donde $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano c.r. a la medida de Probabilidad \mathbb{P} . Sea $T > 0$ fija y definimos, para cada $t \in [0, T]$ al siguiente proceso:

$$M_t := \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha^2(s) ds \right\}$$

Supongamos que el proceso $(\alpha(t))_{t \geq 0}$ satisface lo siguiente para cada $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \alpha^2(s) ds \right) \right] < \infty$$

Se define a la medida de Probabilidad \mathbb{Q} como:

$$d\mathbb{Q} := M_T d\mathbb{P}$$

Entonces el proceso $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un movimiento Browniano c.r. a la medida \mathbb{Q} .

En el contexto de la valuación de un bono cupón cero, construiremos esta medida de Probabilidad al realizar un procedimiento similar al de Black-Scholes, en el que construiremos un portafolio $V(t) = \alpha P(t, T_1) + \beta P(t, T_2)$ con dos bonos $P(t, T_1)$, $P(t, T_2)$ y T_1, T_2 dos fechas de vencimiento arbitrarias y $\alpha, \beta \in [-1, 1]$. Mostraremos que existen los valores α^*, β^* para los cuales este portafolio es libre de riesgo, es decir, el rendimiento instantáneo del portafolio será el valor de la tasa corta:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = r(t) dt \tag{2.3}$$

Sea $V(t) = \alpha P(t, T_1) + \beta P(t, T_2)$ el portafolio con dos bonos arbitrarios. La tasa de rendimiento instantánea de este portafolio está dada por la suma de las tasas de rendimiento de cada bono que lo compone, es decir:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \alpha \frac{dP(t, T_1)}{P(t, T_1)} + \beta \frac{dP(t, T_2)}{P(t, T_2)}$$

Al desarrollar esta expresión utilizando (2.2) para cada bono, obtenemos:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \alpha \frac{(f_t^{T_1} + \mathcal{A}f^{T_1})dt + \sigma f_r^{T_1} dW_t}{P(t, T_1)} + \beta \frac{(f_t^{T_2} + \mathcal{A}f^{T_2})dt + \sigma f_r^{T_2} dW_t}{P(t, T_2)}$$

Donde $f^{T_i} = f(t, T_i, r)$. Para simplificar la notación, definimos $\mu_i := \frac{f_t^{T_i} + \mathcal{A}f^{T_i}}{P(t, T_i)}$, $\rho_i := \frac{\sigma f_r^{T_i}}{P(t, T_i)}$.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} &= \alpha(\mu_1 dt + \rho_1 dW_t) + \beta(\mu_2 dt + \rho_2 dW_t) \\ &= (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)dt + (\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)dW_t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como queremos que el portafolio sea libre de riesgo, el término en dW_t debe ser igual a cero, es decir:

$$\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = 0$$

Utilizando esta condición, podemos ver que los valores α^*, β^* que se necesitan para que el portafolio sea libre de riesgo son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = 0 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\alpha^* = \frac{-\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad \beta^* = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}$$

Al sustituir los valores de α^*, β^* en (2.4), se comprueba que en efecto el portafolio es libre de riesgo y que:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \left(\frac{-\rho_2\mu_1}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{\rho_1\mu_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) dt$$

Además, como el portafolio es libre de riesgo, podemos utilizar (2.3) para obtener:

$$\left(\frac{-\rho_2\mu_1}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{\rho_1\mu_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) dt = r(t)dt$$

De esta expresión, obtenemos que los términos que multiplican al término dt en cada lado de la igualdad son equivalentes, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{-\rho_2\mu_1}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{\rho_1\mu_2}{\rho_1 - \rho_2} &= r(t) \\ \rho_1\mu_2 - \rho_2\mu_1 &= (\rho_1 - \rho_2)r(t) \\ \rho_1(\mu_2 - r(t)) &= \rho_2(\mu_1 - r(t)) \\ \frac{\mu_2 - r(t)}{\rho_2} &= \frac{\mu_1 - r(t)}{\rho_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

A la cantidad $\frac{\mu_i - r(t)}{\rho_i}$ se le llama **market price of risk** y representa a la diferencia entre el retorno promedio de un bono cupón cero con vencimiento en T_i y la tasa corta,

estandarizado por la volatilidad del precio del bono. La importancia del market price of risk es que determina de forma explícita al proceso que utilizaremos como cambio de medida, de acuerdo con el Teorema de Girsanov, para construir una medida neutral al riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$ equivalente a la medida real \mathbb{P} y en la cual podremos valorar bonos cupón cero con cualquier fecha de vencimiento.

Lo que observamos en la ecuación (2.5) es que este valor no depende de la fecha de vencimiento de los bonos, sólo de la fecha de valuación. Como consecuencia, es válido suponer que existe un proceso adaptado $(\lambda(t))_{t \geq 0}$ que coincide con el market price of risk para cada t .

Volvamos a pensar en un solo bono con fecha de vencimiento $T > 0$. Sabemos que el market price of risk está dado por:

$$\lambda(t) = \frac{\mu - r(t)}{\rho}$$

$$\rho\lambda(t) = \mu - r(t)$$

Al sustituir los valores originales de μ, ρ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(t)\sigma f_r}{f} &= \frac{f_t + Af}{f} - r(t) \\ \lambda(t)\sigma f_r &= f_t + Af - r(t)f \\ f_t + (b(r(t)) - \sigma(r(t))\lambda(t))f_r + \frac{\sigma^2(r(t))}{2}f_{rr} &= r(t)f \end{aligned} \quad (2.6)$$

Notemos que la ecuación diferencial parcial (EDP) dada por (2.6) es válida para cualquier valor de $r(t)$ y no solo eso, sino que ya obtuvimos la EDP para el precio de un bono en la medida libre de riesgo. Además, podemos ver que bajo esta medida $\tilde{\mathbb{P}}$ la tasa corta aún es una difusión, pero ahora su dinámica está dada por la siguiente EDE:

$$\begin{cases} dr(t) = (b(r(t)) - \lambda(t)\sigma(r(t)))dt + \sigma(r(t))d\tilde{W}_t, & t \geq 0 \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Donde $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ dado por:

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s)ds$$

Entonces, para obtener el valor de $P(t, T)$ basta con resolver el siguiente problema con valor final:

$$\begin{cases} f_t + (b(r) - \sigma(r)\lambda(t))f_r + \frac{\sigma^2(r)}{2}f_{rr} = rf \\ f(T, T, r) = 1 \end{cases}$$

En general, no es posible determinar una solución explícita para esta EDP, por lo que sería necesario utilizar métodos numéricos para aproximar la solución; sin embargo, dado que $(r(t))_{t \geq 0}$ es una difusión, el Teorema de Feynman-Kac (1.9) garantiza que existe una solución para este problema y esta solución es:

$$f(t, T, r_0) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_0 \right]$$

Donde $\tilde{\mathbb{E}}[\cdot]$ denota a la esperanza bajo la medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$.

Con estos resultados, es posible valorar bonos cupón cero para cualquier fecha de vencimiento arbitraria y en cualquier fecha de valuación. Como consecuencia, al calcular $P(t, T)$ para $t \geq 0$ fijo y $T > t$, podemos utilizar (2.1) para obtener las tasas de rendimiento para cada fecha de vencimiento y así reconstruir la estructura de plazo de tasas de interés.

2.2. El modelo de Cox-Ingersoll-Ross

A partir de la década de 1970 se han propuesto varios modelos de tasa corta como una difusión, con la finalidad poder replicar la curva de estructura de plazo de forma verosímil y poder valorar con mayor precisión bonos y otros instrumentos derivados cuyo subyacente sea una tasa de interés.

Uno de los primeros modelos propuestos fue el de Vasicek (1977), el cual supone que el proceso de tasa corta satisface la siguiente EDE:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW_t$$

En donde se supone que la condición inicial $r(0) = r_0 > 0$ y los parámetros κ , θ , σ son constantes positivas. De hecho, podemos ver que esta EDE es muy parecida a la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck que presentamos en el capítulo anterior y que, de forma análoga a la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck, tiene una solución explícita dada por:

$$r(t) = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s$$

La existencia de una solución explícita y el hecho de que esta solución tenga distribución normal es una de las principales ventajas de este modelo. Sin embargo, el que $r(t)$ tenga distribución normal es también la principal desventaja, ya que hay probabilidad positiva de que las trayectorias del proceso tomen valores negativos. En consecuencia, es posible que no se pueda replicar adecuadamente la estructura de plazo si las condiciones del mercado no admiten tasas negativas.

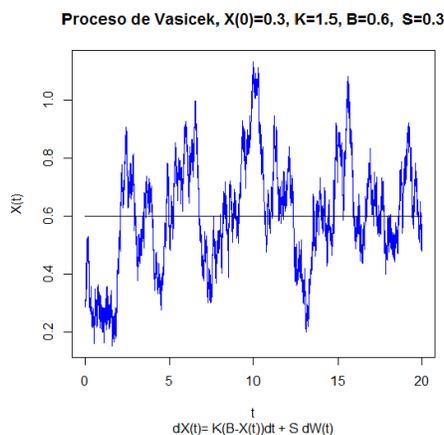


Figura 2.1: Simulación de una trayectoria del proceso de Vasicek. Observamos que, a largo plazo, las trayectorias oscilan alrededor del parámetro de regresión a la media.

En esta sección presentaremos uno de los modelos de tasa corta más conocidos: el modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Este modelo fue presentado en 1985 [8] y es una modificación al modelo de Vasicek, en el cual se supera la desventaja de las tasas negativas. La EDE que se propone para este modelo es:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW_t \quad (2.7)$$

Donde, al igual que en la ecuación de Vasicek, la condición inicial $r(0) = r_0 > 0$ y los parámetros κ , θ , σ son constantes positivas. Podemos ver que la función $x \mapsto \sqrt{x}$ satisface la condición de Hölder, por lo que el Teorema (1.2) que presentamos en el capítulo anterior nos garantiza que existe una única solución (\mathbb{P} -c.s.) para la EDE (2.7) y, además, que las trayectorias de esta solución serán positivas \mathbb{P} -c.s. Aunque no sea posible determinar una solución explícita (como en el caso de Vasicek) para las soluciones de esta EDE, veremos que es posible encontrar una distribución conocida para cada variable $r(t)$ de la solución. El hecho de que el proceso solución $(r(t))_{t \geq 0}$ tenga trayectorias positivas es una gran ventaja y nos ayudará a reconstruir de forma más acertada la curva de tasas de interés de mercado.

Los parámetros θ , κ , σ representan, respectivamente: el valor de regresión a la media, la velocidad de regresión a la media y la desviación estándar instantánea. El término regresión a la media significa que, a largo plazo, las trayectorias del proceso oscilarán alrededor de dicho valor θ , en consecuencia, la distribución de $r(t)$ para t suficientemente grande, tendrá a θ como valor esperado (sin importar la condición inicial que se elija).

Veamos que, en efecto, esta difusión presenta regresión a la media. Para esto, calcularemos $\mathbb{E}[r(t)]$ y $var(r(t))$ para cualquier $t > 0$. Primero, expresamos a $r(t)$ en forma integral, es decir:

$$r(t) = r_0 + \int_0^t \kappa(\theta - r(s)) ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r(s)} dW_s$$

Como las integrales estocásticas son martingalas, tenemos que:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma\sqrt{r(s)} dW_s \right] = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)] &= r_0 + \mathbb{E} \left[\int_0^t \kappa(\theta - r(s)) ds \right] \\ &= r_0 + \int_0^t \kappa(\theta - \mathbb{E}[r(s)]) ds \end{aligned}$$

De esta última ecuación integral, podemos ver que la función $t \mapsto \mathbb{E}[r(t)]$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden:

$$\begin{cases} y'(t) = \kappa(\theta - y), & t \geq 0 \\ y(0) = r_0 \end{cases}$$

La cual tiene como solución:

$$y(t) = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})$$

Es decir:

$$\mathbb{E}[r(t)] = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) \quad (2.8)$$

Ahora, calcularemos el segundo momento de $r(t)$. Primero, utilizando la fórmula de Itô con la función $f(x) = x^2$, obtenemos que:

$$(r(t))^2 = r_0^2 + \int_0^t (2r(s))(\kappa(\theta - r(s))) ds + \int_0^t (2r(s))\sigma\sqrt{r(s)} dW_s + \int_0^t \sigma^2 r(s) ds$$

$$\mathbb{E}[(r(t))^2] = r_0^2 + \mathbb{E} \left[\int_0^t (2r(s))(\kappa(\theta - r(s))) ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t (2r(s))\sigma\sqrt{r(s)} dW_s \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma^2 r(s) ds \right]$$

Utilizando que las integrales estocásticas son martingalas:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t (2r(s))\sigma\sqrt{r(s)} dW_s \right] = 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(r(t))^2] &= r_0^2 + \mathbb{E} \left[\int_0^t (2r(s))(\kappa(\theta - r(s))) ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma^2 r(s) ds \right] \\ &= r_0^2 + 2 \int_0^t \kappa(\theta \mathbb{E}[r(s)] - \mathbb{E}[(r(s))^2]) ds + \int_0^t \sigma^2 \mathbb{E}[r(s)] ds \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de $\mathbb{E}[r(t)]$, de la última ecuación integral y utilizando la solución obtenida en (2.8) podemos ver que la función $t \mapsto \mathbb{E}[(r(t))^2]$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} y'(t) = 2\kappa(\theta(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})) - y) + \sigma^2(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})), & t \geq 0 \\ y(0) = r_0^2 \end{cases}$$

Al resolver esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden, tenemos que la solución es de la forma:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-2\kappa t} \left[r_0^2 + (2\kappa\theta + \sigma^2) \int_0^t e^{2\kappa s} (r_0 e^{-\kappa s} + \theta(1 - e^{-\kappa s})) ds \right] \\
&= e^{-2\kappa t} \left[r_0^2 + (2\kappa\theta + \sigma^2) \left(\frac{\theta}{2\kappa} (e^{2\kappa t} - 1) + \frac{(r_0 - \theta)}{\kappa} (e^{\kappa t} - 1) \right) \right] \\
&= r_0^2 e^{-2\kappa t} + (1 - e^{-2\kappa t}) \left(\theta^2 + \frac{\sigma^2 \theta}{2\kappa} \right) + (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) \left(2r_0\theta - 2\theta^2 + \frac{r_0\sigma^2}{\kappa} - \frac{\sigma^2\theta}{\kappa} \right) \\
&= \theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} + e^{-2\kappa t} \left(r_0^2 - 2r_0\theta + \theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{\kappa} - \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} - \frac{r_0\sigma^2}{\kappa} \right) + e^{-\kappa t} \left(2r_0\theta - 2\theta^2 + \frac{r_0\sigma^2}{\kappa} - \frac{\sigma^2\theta}{\kappa} \right) \\
&= \theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} + e^{-2\kappa t} \left((r_0 - \theta)^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(\frac{\theta}{2} - r_0 \right) \right) + e^{-\kappa t} \left((r_0 - \theta) \left(\frac{\sigma^2}{\kappa} + 2\theta \right) \right)
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\mathbb{E}[(r(t))^2] = \theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} + e^{-2\kappa t} \left((r_0 - \theta)^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(\frac{\theta}{2} - r_0 \right) \right) + e^{-\kappa t} \left((r_0 - \theta) \left(\frac{\sigma^2}{\kappa} + 2\theta \right) \right) \quad (2.9)$$

Ahora, utilizaremos (2.8) y (2.9) para calcular la varianza de $r(t)$.

$$\begin{aligned}
var(r(t)) &= \mathbb{E}[(r(t))^2] - (\mathbb{E}[r(t)])^2 \\
&= \theta^2 + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} + e^{-2\kappa t} \left((r_0 - \theta)^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa} \left(\frac{\theta}{2} - r_0 \right) \right) \\
&\quad + e^{-\kappa t} \left((r_0 - \theta) \left(\frac{\sigma^2}{\kappa} + 2\theta \right) \right) - (r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}))^2 \\
var(r(t)) &= \frac{r_0\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa t})^2 \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Entonces, a pesar de no contar con una solución explícita de $r(t)$, a partir de la esperanza y varianza (dadas por (2.8) y (2.10), respectivamente) podemos comprobar que este modelo presenta la propiedad de regresión a la media, ya que la media y la varianza a largo plazo están dadas por:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r(t)] &= \theta \\
\lim_{t \rightarrow \infty} var(r(t)) &= \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}
\end{aligned}$$

A partir de la solución no solo podemos determinar la esperanza y la varianza de $r(t)$, sino que también podemos encontrar la transformada de Laplace de $r(T)$ para cada $T > 0$, aplicando el Teorema de Feynman-Kac (1.9). Utilizando esto, sabemos que la función:

$$g(t, r) = \mathbb{E}[e^{\lambda r(T)} | r(t) = r], \quad r > 0$$

Satisface la EDP:

$$\begin{aligned} g_t(t, r) + \mathcal{A}g(t, r) &= 0 \\ g_t(t, r) + \kappa(\theta - r)g_r(t, r) + \frac{\sigma^2}{2}rg_{rr}(t, r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

con condición final:

$$g(T, r_0) = e^{\lambda r_0}$$

La ecuación (2.11) se puede resolver de forma explícita, por lo que nos será posible determinar si $r(T)$ sigue alguna distribución conocida. Para determinar la solución, supongamos que es de la forma:

$$g(t, r_0) = e^{A(t) - B(t)r_0}$$

Bajo este supuesto, las derivadas parciales de g son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= (A'(t) - B'(t)r)g \\ \frac{\partial g}{\partial r} &= -B(t)g \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= B^2(t)g \end{aligned}$$

Al sustituir esto en (2.11), obtenemos:

$$(A'(t) - B'(t)r)g(t, r) + \kappa(\theta - r)(-B(t)g(t, r)) + \frac{\sigma^2 r}{2}B^2(t)g(t, r) = 0$$

Como $g > 0$ para cualesquiera $t \in [0, T]$, $r > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} (A'(t) - B'(t)r) + \kappa(\theta - r)(-B(t)) + \frac{\sigma^2 r}{2}B^2(t) &= 0 \\ A'(t) - B'(t)r - \kappa\theta B(t) + \kappa B(t)r + \frac{\sigma^2 r}{2}B^2(t) &= 0 \\ A'(t) - \kappa\theta B(t) + r(-B'(t) + \kappa B(t) + \frac{\sigma^2}{2}B^2(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

A partir de la última igualdad, se obtienen dos EDOs, dadas por:

$$\begin{cases} B'(t) = \frac{\sigma^2}{2}B^2(t) + \kappa B(t), & 0 \leq t \leq T \\ B(T) = -\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'(t) = \kappa\theta B(t), & 0 \leq t \leq T \\ A(T) = 0 \end{cases}$$

La primer EDO es una ecuación de Riccati con coeficientes constantes, cuya solución está dada por:

$$B(t) = \frac{-2\kappa\lambda e^{-\kappa(T-t)}}{\lambda\sigma^2(e^{-\kappa(T-t)} - 1) + 2\kappa}$$

Utilizando el hecho de que ya conocemos explícitamente a la función $B(t)$, podemos resolver la EDO para $A(t)$ (basta con integrar de t a T ambos lados de la igualdad y utilizar el hecho de que $A(T) = 0$) y obtener que:

$$A(t) = \ln \left(\left(\frac{\lambda\sigma^2(e^{-\kappa(T-t)} - 1) + 2\kappa}{2\kappa} \right)^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} \right)$$

En consecuencia, la solución a (2.11) es:

$$g(t, r) = \left(\frac{\lambda\sigma^2(e^{-\kappa(T-t)} - 1) + 2\kappa}{2\kappa} \right)^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{2r\kappa\lambda e^{-\kappa(T-t)}}{\lambda\sigma^2(e^{-\kappa(T-t)} - 1) + 2\kappa} \right\} = \mathbb{E}[e^{\lambda r(T)} | r(t) = r]$$

Por lo tanto, la Transformada de Laplace de $r(T)$ se obtiene al evaluar $g(t, r_0)$ en $t = 0$, para obtener:

$$\begin{aligned} M_{r(T)}(\lambda) &= \mathbb{E}[e^{\lambda r(T)} | r(0) = r_0] \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\sigma^2(1 - e^{-\kappa T})}{2\kappa} \right)^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{2r_0\kappa\lambda e^{-\kappa T}}{\lambda\sigma^2(e^{-\kappa T} - 1) + 2\kappa} \right\} \end{aligned}$$

Sea $c_T = \frac{4\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa T})}$:

$$M_{r(T)}(\lambda) = \left(1 - \frac{2\lambda}{c_T} \right)^{\frac{-2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{\frac{\lambda}{c_T}(r_0 e^{-\kappa T} c_T)}{1 - \frac{2\lambda}{c_T}} \right\}$$

Es decir, para cada $T > 0$, $r(T)$ es igual en distribución a una variable aleatoria $\frac{Y}{c_T}$, donde Y tiene distribución χ^2 no central con $\frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$ grados de libertad y parámetro de no-centralidad $r_0 c_T e^{-\kappa T}$. También podemos confirmar que el proceso $(r(t))_{t \geq 0}$ presenta regresión a la media observando que su función generadora de momentos converge a la de una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros $\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$, $\frac{2\kappa}{\sigma^2}$ conforme $t \rightarrow \infty$ (esta convergencia se debe al teorema de continuidad de Lévy²).

Recordemos que $(r(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de tasa corta, por lo que nos interesa determinar

²**Teorema de Continuidad de Lévy:** Una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a una variable aleatoria X si y sólo si para cada $t \in \mathbb{R}$ la sucesión $(\phi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones características converge a la función característica $\phi(t)$ de X

el precio de un bono cupón cero y, a partir de este precio, determinar las tasas de interés de mercado utilizando (2.1). Sin embargo, dado que la dinámica del proceso dada por (2.7) está considerada bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} del mundo real, es necesario realizar un cambio de medida que nos asegure la existencia de una medida de neutral al riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$ en la cual podamos determinar el valor de $P(t, T)$ en ausencia de arbitraje para cualesquiera $0 \leq t \leq T$. También nos interesa que la dinámica de $(r(t))_{t \geq 0}$ no sufra modificaciones sustanciales en el sentido de que se pierda la propiedad de que las trayectorias son positivas. Para garantizar esto, supongamos que el market price of risk es de la forma:

$$\lambda(t) := \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r(t)}$$

Donde λ es una constante. Utilizando esta forma del market price of risk, por el Teorema de Girsanov obtenemos que existe una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ equivalente a la medida \mathbb{P} del mundo real y en la cual está definido un movimiento Browniano de la siguiente forma:

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s) ds$$

En consecuencia, la EDE que satisface $(r(t))_{t \geq 0}$ bajo la medida de riesgo neutral es:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}(d\tilde{W}_t - \lambda(t)dt) \\ dr(t) &= (\kappa + \lambda) \left(\frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} - r(t) \right) + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_t \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es decir, bajo este supuesto sobre el market price of risk, $(r(t))_{t \geq 0}$ es un proceso CIR bajo la medida de riesgo neutral con condición inicial $r(0) = r_0$ y parámetros $\frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda}$, $\kappa + \lambda$, σ (se modificaron los parámetros de regresión a la media y velocidad de regresión a la media, pero no la condición inicial ni la volatilidad). Además, bajo esta medida, el precio del bono cupón cero $P(t, T)$ satisface la EDP (2.6) con condición final $P(T, T) = 1$. Al desarrollar la expresión en (2.6) con los parámetros de $(r(t))_{t \geq 0}$ dados por (2.13) obtenemos:

$$f_t + (\kappa\theta - (\kappa + \lambda)r)f_r + \frac{\sigma^2 r}{2} f_{rr} = rf \quad (2.14)$$

Por un parte, el Teorema de Feynman Kac (1.9) nos asegura que esta EDP tiene solución y está dada por:

$$f(t, r) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r \right]$$

Aunque con esta expresión ya nos sería posible aproximar la solución real, simulando trayectorias y estimando la esperanza, también podemos encontrar una solución explícita para (2.14).

Utilizaremos el mismo supuesto que propusimos para encontrar la Transformada de Laplace, es decir, supondremos que la solución es de la forma:

$$f(t, r) = e^{A(t) - B(t)r}$$

Entonces, al sustituir $f(t, r)$ y sus derivadas parciales en la ecuación (2.14), en un procedimiento completamente análogo al que utilizamos para calcular la Transformada de Laplace de $r(T)$, obtenemos:

$$(A'(t) - B'(t)r)f + (\kappa\theta - (\kappa + \lambda)r)(-B(t)f) + \frac{\sigma^2 r}{2} B^2(t)f = rf$$

Como $f > 0$ para cualesquiera t, r , entonces:

$$\begin{aligned} A'(t) - B'(t)r - \kappa\theta B(t) + (\kappa + \lambda)rB(t) + \frac{\sigma^2 r}{2} B^2(t) - r &= 0 \\ A'(t) - \kappa\theta B(t) + r(-B'(t) + \frac{\sigma^2}{2} B^2(t) + (\kappa + \lambda)B(t) - 1) &= 0 \end{aligned}$$

De esta última ecuación, se desprenden dos EDOs:

$$\begin{cases} B'(t) = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t) + (\kappa + \lambda)B(t) - 1, & 0 \leq t \leq T \\ B(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'(t) = \kappa\theta B(t), & 0 \leq t \leq T \\ A(T) = 0 \end{cases}$$

La primera es una ecuación de Riccati con coeficientes constantes, por lo que es posible resolverla de forma explícita y esta solución es:

$$B(t) = \frac{2(e^{h(T-t)} - 1)}{(\kappa + \lambda + h)(e^{h(T-t)} - 1) + 2h}$$

Donde $h := \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$. Ahora, podemos resolver la EDO de $A(t)$ al sustituir el valor de $B(t)$ e integrar de t a T , utilizando que $A(T) = 0$. Haciendo esto, obtenemos:

$$A(t) = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2h \exp \left\{ \frac{(\kappa + \lambda + h)(T-t)}{2} \right\}}{(\kappa + \lambda + h)(e^{h(T-t)} - 1) + 2h} \right]$$

Por lo tanto, el precio a tiempo de t de un bono cupón cero con fecha de vencimiento T está dado por:

$$P(t, T) = \left(\frac{2h \exp \left\{ \frac{(\kappa + \lambda + h)(T-t)}{2} \right\}}{(\kappa + \lambda + h)(e^{h(T-t)} - 1) + 2h} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{-2r(e^{h(T-t)} - 1)}{(\kappa + \lambda + h)(e^{h(T-t)} - 1) + 2h} \right\} \quad (2.15)$$

Esta expresión nos ayuda a valorar cualquier bono en cualquier fecha y con cualquier fecha de vencimiento, en consecuencia podemos deducir las tasas de rendimiento utilizando (2.1) y construir la curva de estructura de plazo de tasas de interés.

Con esto, podemos ver que el modelo de Cox-Ingersoll-Ross presenta algunas ventajas para modelar el comportamiento de las tasas de interés de mercado, como la positividad de las trayectorias del proceso, el hecho de que presente regresión a la media (para evitar que las tasas a largo plazo puedan tomar valores significativamente altos que serían considerados como fuera de mercado) y que exista una fórmula cerrada para el precio de un bono cupón cero, lo que nos permite utilizar (2.1) para encontrar una expresión analítica para las tasas de interés a cualquier vencimiento que queramos y así también poder replicar la curva de estructura de plazo de tasas de interés sin tener que recurrir a métodos numéricos de interpolación.

2.3. Calibración del modelo CIR

Como ya hemos estudiado en las secciones anteriores, los modelos de tasa corta se pueden utilizar para construir las curvas de tasas de interés de mercado con las cuales se pueden valorar instrumentos financieros y descontar flujos de efectivo. Para que esos modelos puedan ser aplicables, es necesario determinar si efectivamente pueden replicar las condiciones de mercado observadas de forma diaria, es decir, determinar si las tasas que calcularemos a través de los modelos que propongamos son una buena aproximación o devuelven exactamente los valores de tasas observados en el mercado, de tal forma que el resto de las tasas que se calculen se mantendrán dentro de las condiciones actuales del mercado. La forma en que esto se lleva a cabo es a través de un proceso, denominado calibración.

Definición 2.3 (Calibración). *Es un procedimiento numérico mediante el cual se estiman los parámetros de un modelo con el fin de que los valores calculados mediante dicho modelo se aproximen a los valores observados en el mercado.*

Con base en esta definición, nos podemos dar cuenta que el proceso de calibración se aplica para cualquier modelo que se proponga para replicar condiciones de mercado, no solo para modelos de tasas de interés. La importancia de llevar a cabo una calibración adecuada a un modelo propuesto radica en que existen ciertos instrumentos financieros (e.g. derivados exóticos) para cuales no existe una fórmula analítica para valuarlos, por lo que los precios se deben estimar por medio de métodos numéricos como simulación, resolución numérica de EDP's, interpolación, entre otros y un modelo con un conjunto de parámetros debidamente calibrado ayudará a dar una mejor aproximación del precio real de dichos instrumentos.

En la definición se menciona que los valores que arroje el modelo se deben aproximar a los observados en el mercado. Para determinar qué es una buena aproximación se debe elegir una función, denominada **función objetivo** y denotada por H , con la cual mediremos el tamaño de las diferencias entre los valores aproximados por el modelo y los valores observados.

Denotemos por \mathbb{O} al universo de todos los posibles parámetros para un modelo, por Θ a un conjunto particular de parámetros (i.e. $\Theta \in \mathbb{O}$), por C_i a los valores observados en el mercado y por C_i^Θ a los valores calculados por el modelo, utilizando el conjunto de parámetros Θ . Utilizando esta notación, podemos decir que el objetivo de la calibración consiste en encontrar un conjunto de parámetros $\Theta^* \in \mathbb{O}$ con el cual se minimiza la siguiente expresión:

$$\sum_i H(C_i - C_i^\Theta)$$

En esta sección se presentará la calibración del modelo CIR a la estructura de tasas de interés en el mercado mexicano. En el caso de la calibración para este modelo,

encontraremos los valores de los parámetros r_0 , κ , θ , λ , σ de la ecuación (2.13) y la función objetivo que utilizaremos será:

$$H(C_i - C_i^\Theta) = \left(\frac{C_i - C_i^\Theta}{C_i} \right)^2 \quad (2.16)$$

Esta función representa el error cuadrático entre las tasas de rendimiento calculadas con (2.1) y las tasas observadas en el mercado y es la función que intentaremos minimizar al variar los parámetros del modelo CIR. A partir de este punto, denotaremos a la función objetivo como SSR, es decir, la suma de residuales al cuadrado (Squared Sum of Residuals).

Las tasas de mercado que utilizaremos para la calibración son las Tasas de Interés Interbancario de Equilibrio (TIIE) a 28, 91 y 182 días, entonces primero daremos una breve explicación sobre la naturaleza de estas tasas. La Tasa de Interés Interbancario de Equilibrio (TIIE) es una tasa representativa de las operaciones de crédito entre bancos, su importancia en el mercado mexicano radica en que es utilizada como tasa de referencia para diversos instrumentos financieros (productos derivados, instrumentos de deuda, tarjetas de crédito) y es un indicador de las condiciones actuales del mercado mexicano. Esta tasa es publicada diariamente por el Banco de México para los plazos 28, 91 y 182 días (con excepción de la tasa a 182 días que es publicada cada 7 días), esto significa que el valor de TIIE28 es la tasa de interés para operaciones a 28 días (a partir del siguiente día hábil de su publicación en el Diario Oficial de la Federación). La metodología para el cálculo de la TIIE está explicada en el Anexo 11 la Circular 3/2012 publicada por Banco de México [1], sin embargo se puede resumir en los siguientes puntos:

- i) Banco de México informará a las Instituciones de Banca Múltiple sobre los días hábiles en los que podrán presentar sus cotizaciones de la tasa de interés, los plazos y montos.
- ii) Cada día hábil, se seleccionarán de forma aleatoria al menos seis instituciones de Banca Múltiple para que presenten sus cotizaciones de la tasa de interés junto con el plazo y monto correspondiente.
- iii) Una vez presentadas las cotizaciones por los plazos y montos, se realizará el cálculo de la TIIE para cada plazo, de acuerdo con la metodología señalada en el Anexo 11 de dicha Circular.
- iv) Banco de México presentará las tasas calculadas el mismo día en que son presentadas las cotizaciones y se publicarán el siguiente día hábil en el Diario Oficial de la Federación (DOF). Las tasas entrarán en vigor el día hábil siguiente a su publicación en el DOF.

Para efectos de este trabajo y de este ejercicio de calibración, supondremos que la estructura de plazo de tasas de interés está completamente determinada por las tres tasas de interés descritas anteriormente (TIE28, TIE91 y TIE182).

Como se mencionó al inicio de esta sección, la calibración del modelo a la estructura de tasas de interés requiere que se minimice el error cuadrático entre las tasas observadas a la fecha del cálculo, i. e., las publicadas por Banco de México y las tasas obtenidas mediante la fórmula (2.1). Al reemplazar los valores de la TIE en la función objetivo (2.16), obtenemos la expresión que intentaremos minimizar:

$$SSR_{TIE} = \sum_i \left(\frac{TIE_{Real}(i) - TIE_{Modelo}(i)}{TIE_{Real}(i)} \right)^2 \quad (2.17)$$

En esta expresión i representa a cada uno de los plazos para los cuales se cuenta con una tasa publicada. Aprovecharemos la ventaja que nos presenta el modelo CIR de contar con una fórmula cerrada para el precio de un bono cupón cero dada por (2.15) y que depende directamente de los parámetros de la ecuación CIR, por lo que el cálculo de la tasa de rendimiento es directo y no hay que recurrir a resolver la EDP por métodos numéricos o mediante simulación de trayectorias de la difusión asociada a la EDE. Aprovechando estas ventajas, el proceso para minimizar el valor de la SSR es relativamente sencillo y rápido de calcular, utilizando un optimizador numérico. (En el caso de este ejercicio, se utilizará el optimizador de Solver en Excel.)

Para efectos de este trabajo, se realizaron dos ejercicios de calibración para distintas fechas: el primero con las tasas publicadas el 16 de julio de 2015 y el segundo con tasas publicadas el 7 de enero de 2016. El procedimiento en ambos casos fue similar, se propusieron valores iniciales para los parámetros r_0 , κ , θ , λ , σ y partir de estos valores se realizó una primera estimación de las tasas de interés a los plazos conocidos, para después utilizar el optimizador numérico que minimizará la expresión (2.17). Debido a la naturaleza del proceso CIR, se agregaron al optimizador las siguientes restricciones:

- i) Todos los parámetros deben ser estrictamente positivos.
- ii) $2\kappa\theta > \sigma^2$, esto con la finalidad de asegurar que las trayectorias del proceso siempre serán positivas tanto en el sentido \mathbb{P} -c.s. como en el sentido $\tilde{\mathbb{P}}$ -c.s.

En la tabla (2.1) se muestran los valores iniciales de los parámetros que se propusieron para el primer ejercicio de calibración con datos al 16 de julio de 2015.

A partir de estas estimaciones iniciales, se obtuvieron los siguientes resultados para la estimación final de los parámetros del proceso (ver tabla (2.2)) y de las tasas calculadas al 16 de julio de 2015 (ver tabla (2.3)).

En el ejercicio de calibración para el 16 de julio de 2015 se obtuvo que el valor mínimo

r_0	0.9
κ	10
θ	0.5
λ	2.5
σ	1.2

Cuadro 2.1: Tabla con los valores iniciales propuestos para las calibración realizadaa al 16 de julio de 2015.

r_0	0.0746
κ	11.1186
θ	0.0990
λ	2.9966
σ	1.2554

Cuadro 2.2: Parámetros estimados para la estructura de tasas de interés del 16 de julio de 2015.

Plazo	TIIE Observada	TIIE Estimada
28	3,3025	3,2956
91	3,3150	3,3397
182	3,3750	3,3566

Cuadro 2.3: Comparación entre los valores de TIIE publicados el 16 de julio de 2015 contra los valores estimados por el proceso CIR. Cifras expresadas en porcentaje. Fuente: Banco de México

que alcanzó la expresión (2.17) con los parámetros estimados fue de: $8,9528 \times 10^{-5}$. Con base en los resultados reales obtenidos se observa que, aunque el error se minimizó, las tasas estimadas para los plazos de 91 y 182 días difieren de las tasas observadas en el mercado a partir del segundo decimal, lo cual indica que la aproximación no es la adecuada y al momento de intentar valuar algún instrumento de mercado cuyo valor dependa de la TIIE, se estará sobreestimando o subestimando su valor real.

Se realizó un segundo ejercicio de calibración de la estructura de tasas de la TIIE, ahora tomando datos del 7 de enero de 2016. La principal diferencia entre los datos de esta fecha y los del primer ejercicio de calibración radica en que el 17 de diciembre de 2015, Banco de México anunció un ajuste a la tasa de interés de referencia, aplicable a partir de ese día, al incrementarla en 25 puntos base (1 punto base = 0.01 %), lo cual provocó como consecuencia que los niveles de TIIE para todos los plazos aumentaran con respecto a datos anteriores.

Con base en los nuevos niveles en los que se publican las tasas de interés, se intenta probar con este ejercicio si la calibración resulta en una aproximación más certera que

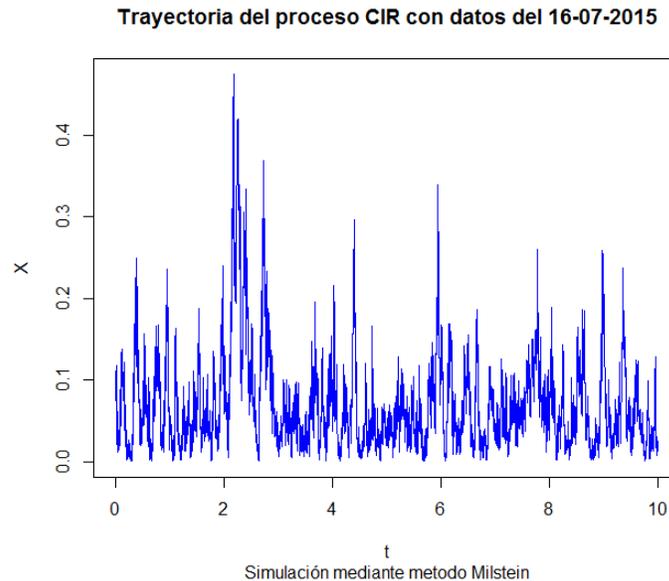


Figura 2.2: Simulación de una trayectoria del proceso Cox-Ingersoll-Ross con los parámetros estimados al 16 de julio de 2015.

con los datos anteriores. Debido a este incremento de los niveles de las tasas se propusieron distintos valores para los parámetros iniciales, los cuales se muestran en la tabla (2.4).

r_0	2
κ	12
θ	1
λ	3.5
σ	2.5

Cuadro 2.4: Tabla con los valores iniciales propuestos para la calibración realizada al 7 de enero de 2016.

La tabla (2.5) muestra los valores obtenidos para los parámetros del proceso, mientras que la tabla (2.6) muestra el comparativo entre las tasas reales publicadas por Banco de México y las calculadas mediante el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, con los parámetros estimados al 7 de enero de 2016. Para la calibración realizada a este día, obtuvimos que el valor mínimo de la expresión (2.17) que se alcanzó con los valores de los parámetros estimados en esta calibración fue de: $1,6472 \times 10^{-4}$.

Es decir, el error estimado fue mayor que en la calibración del 16 de julio y eso también

r_0	0.0791
κ	14.3439
θ	0.1110
λ	4.4084
σ	1.7849

Cuadro 2.5: Parámetros estimados para la estructura de tasas de interés del 7 de enero de 2016.

Plazo	TIIE Observada	TIIE Estimada
28	3,5600	3,5514
91	3,5892	3,6250
182	3,6770	3,6487

Cuadro 2.6: Comparación entre los valores de TIIE publicados el 7 de enero de 2016 contra los valores estimados por el proceso CIR. Cifras expresadas en porcentaje. Fuente: Banco de México

se puede notar en la tabla comparativa entre los valores observados de la TIIE y las tasas estimadas, donde en este caso todas las estimaciones difieren a partir del segundo decimal. Esto significa que para esta fecha y con el nuevo nivel de tasas de interés el ajuste del modelo no mejoró.

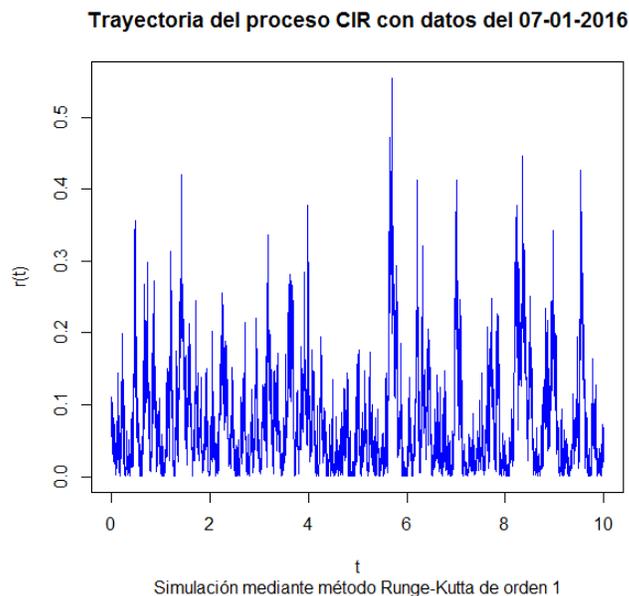


Figura 2.3: Simulación de una trayectoria del proceso CIR con parámetros estimados al 7 de enero de 2016.

Se realizó un tercer ejercicio de calibración de curvas de tasas de interés. Este ejercicio se realizó con un enfoque distinto a los dos anteriores, pues en este caso se intentó calibrar la curva cupón cero a partir del precio de bonos emitidos por el Gobierno Mexicano conocidos como Bonos M. Estos instrumentos de mercado se emiten a distintos plazos, los más usuales son emitidos a plazos de 3, 5, 10, 20 y 30 años y pagan intereses (cupones) de forma semestral (cada 182 días) a una tasa fija (determinada desde el momento de su emisión) y en la fecha de vencimiento se otorga un pago por el valor nominal del instrumento (100 pesos, en este caso) además del pago del último cupón. Para valorar estos instrumentos sólo es necesario conocer el número de días transcurridos desde el último pago de cupón d , la tasa de rendimiento a vencimiento (conocida como *yield-to-maturity* o sólo *yield*) anualizada que se quiere obtener y , el número de cupones que restan por pagar K y la tasa a la que paga cada cupón TC . Utilizando estos datos, el precio de un Bono M se puede calcular mediante la fórmula:

$$P = \left[\frac{C + C \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R(1+R)^{K-1}} \right) + \frac{100}{(1+R)^{K-1}}}{(1+R)^{\left(1-\frac{d}{360}\right)}} \right] \quad (2.18)$$

Donde:

$$C = \frac{TC * 182}{360} \quad ; \quad R = \frac{y * 182}{360}$$

Dado el precio de un Bono M, es posible deducir la tasa de rendimiento implícita, despejando y de la ecuación (2.18) o utilizando algún método numérico de aproximación. En caso de este ejercicio de calibración, se partió de precios de mercado de Bonos M al 26 de abril de 2016³ y se calcularon las tasas *yield* para cada uno de los Bonos M existentes a la fecha de cálculo, obteniendo los resultados de la tabla (2.7).

Utilizando estas tasas *yield* que calculamos, obtendremos tasas cupón cero, que serán las tasas con las que se llevará a cabo el proceso de calibración. Para obtener estas tasas cupón cero, se parte del supuesto de que cada bono es un grupo de bonos cupón cero, por lo que su precio de mercado está dado por la suma de los precios de cada bono cupón cero, es decir:

$$P = \sum_{i=1}^K \frac{C}{(1 + R_i^0 \frac{t_i}{360})} + \frac{100}{(1 + R_K^0 \frac{t_K}{360})} \quad (2.19)$$

Donde t_i es el número de días para el vencimiento de cada bono cupón cero y R_i^0 es la tasa de rendimiento correspondiente a cada bono cupón cero (conocida como *tasa cupón cero* o sólo *tasa cero*). Bajo este supuesto y con la información con la que contamos, se lleva a cabo un proceso recursivo en el cual se replica la valuación de cada uno de los Bonos M vigentes en el mercado utilizando la ecuación (2.19). El proceso es recursivo

³Obtenidos del vector de precios del 26 de abril de 2016 de PIP (Proveedor Integral de Precios)

Fecha de vencimiento	Días por vencer	Tasa cupón	Precio de mercado	Yield
16/06/2016	51	6.25	102.612847	3.787823
15/12/2016	233	7.25	104.728168	3.935679
15/06/2017	415	5.00	102.882679	4.041943
14/12/2017	597	7.75	108.652139	4.072003
14/06/2018	779	4.75	102.376445	4.429994
13/12/2018	961	8.50	112.729799	4.616975
11/12/2019	1325	5.00	102.046119	4.929997
11/06/2020	1507	8.00	113.74337	5.090998
10/06/2021	1871	6.50	107.713051	5.306995
09/06/2022	2235	6.50	107.474811	5.514995
07/12/2023	2781	8.00	117.102457	5.585242
05/12/2024	3145	10.00	132.250015	5.779993
05/03/2026	3600	5.75	99.696486	5.875000
03/06/2027	4055	7.50	114.349043	6.059992
31/05/2029	4783	8.50	123.701818	6.201060
29/05/2031	5511	7.75	116.502597	6.338996
23/11/2034	6785	7.75	116.916624	6.445998
20/11/2036	7513	10.00	143.352575	6.496055
18/11/2038	8241	8.50	126.122387	6.545700
13/11/2042	9697	7.75	117.786226	6.558062

Cuadro 2.7: Información de mercado de Bonos M al 26 de abril de 2016. A partir del precio de mercado se estimó la tasa yield.

porque primero se debe calcular la tasa cero del bono con vencimiento más próximo, el cual en nuestro caso sólo realiza un pago, por lo que es equivalente a un bono cupón cero y su tasa de rendimiento será igual a la tasa cero; después se debe replicar la valuación de los bonos en orden de vencimiento, utilizando las tasas cero calculadas en los pasos anteriores.

Una vez calculadas las tasas cero equivalentes para cada uno de los plazos de vencimiento de los Bonos M, se lleva a cabo el procedimiento de calibración, es decir, calculamos el precio de bonos cupón cero utilizando (2.15) a partir de una suposición inicial de parámetros del proceso CIR; después obtenemos la tasa de rendimiento de estos bonos cupón cero mediante la fórmula (2.1), pero ahora utilizando $(1 + R(t, T)(T - t))$ en lugar de $e^{R(t, T)(T - t)}$; y, finalmente, se utiliza un optimizador numérico para minimizar la siguiente expresión:

$$SSR_{TasasCero} = \sum_i \left(\frac{R_{Real}^0(i) - R_{Modelo}^0(i)}{R_{Real}^0(i)} \right)^2 \quad (2.20)$$

Donde i corresponde a cada uno de los periodos de pago de intereses.

En la tabla (2.8) se muestran los valores iniciales de los parámetros propuestos para el ejercicio de calibración de la curva cero de Bonos M al 26 de abril de 2016.

r_0	0.8
κ	10
θ	1.5
λ	2.5
σ	1.2

Cuadro 2.8: Parámetros iniciales propuestos para la calibración de la curva cupón cero de Bonos M al 26 de abril de 2016.

r_0	0.03564167
κ	0.210448
θ	0.08435418
λ	0.02149002
σ	0.01000027

Cuadro 2.9: Parámetros del proceso CIR obtenidos mediante el proceso de calibración.

Después de llevar a cabo el proceso de minimizar el valor de (2.20), se obtuvieron los valores mostrados en tabla (2.9), mientras que en la tabla (2.10) se muestra la comparación entre las tasas cero para cada plazo de vencimiento de los Bonos M calculadas mediante el procedimiento recursivo descrito anteriormente que utiliza la fórmula de valuación (2.19) y las tasas cero implícitas en la valuación de un bono cupón cero bajo el esquema de un proceso de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross, es decir, utilizando las fórmulas de valuación (2.15) y (2.1). En este ejercicio de calibración, la expresión (2.20) toma el valor 0.0128234.

Nota 2.1. *En el ejercicio de calibración de la curva cero de Bonos M se ejecutó de forma recursiva el optimizador numérico hasta que se alcanzó un valor mínimo para la expresión (2.20). En el caso de este ejercicio, el valor mínimo se alcanzó en la cuarta iteración.*

Es importante mencionar que para este ejercicio de calibración no es factible esperar un ajuste exacto entre las tasas cero equivalentes obtenidas utilizando la fórmula de valuación (2.19) y las calculadas suponiendo un proceso de Cox-Ingersoll-Ross que genera la estructura de tasas de interés de la curva cero para los Bonos M, dado que las primeras tasas se basan en estimaciones a través de precios de mercado; sin embargo, si con las tasas cero obtenidas bajo el esquema CIR es posible valorar Bonos M de forma

Plazo	Tasa cero equivalente	Tasa cero: Modelo CIR
51	3.787823	3.639978
233	3.947869	3.904832
415	4.097175	4.161953
597	4.172293	4.412679
779	4.613074	4.658176
961	4.898727	4.899461
1325	5.380138	5.372888
1507	5.692172	5.606541
1871	6.128338	6.070955
2235	6.622640	6.535165
2781	7.058111	7.239300
3145	7.753706	7.718650
4055	9.000101	8.972198
4783	10.162007	10.052580
5511	11.404478	11.222634
6785	13.576611	13.543948
7513	15.555828	15.061971
8241	16.984145	16.747361
9697	19.791808	20.723791

Cuadro 2.10: Comparativo entre tasas cero equivalentes calculadas a partir del precio de mercado de Bonos M y la calculadas utilizando el proceso CIR.

que el precio sea consistente con la estructura actual del mercado, entonces podremos decir que se llevó a cabo una buena calibración.

A partir de los primeros dos resultados, nos podemos dar cuenta que el modelo CIR que se propuso en los ejercicios de calibración de la curva THIE no es el adecuado, ya que no nos permite capturar con precisión la complejidad de la estructura de tasas observada ni nos permitirá realizar pronósticos sobre el comportamiento de las tasas en fechas futuras (extrapolación de la curva de tasas). En el tercer ejercicio de calibración para la curva cero de Bonos M se observó un mejor ajuste entre las tasas calculadas bajo el esquema CIR y las tasas cupón cero implícitas en la valuación de estos instrumentos, lo cual significa que si se intenta valuar cualquiera de los Bonos M existentes en el mercado utilizando esta curva y la fórmula de valuación (2.19), los precios que se obtendrán serán consistentes con el mercado. Es importante conocer si un modelo es adecuado ya que se puede incurrir en un riesgo que generaría pérdidas monetarias si se intenta implementar un modelo que no se ajusta de forma adecuada a la situación financiera

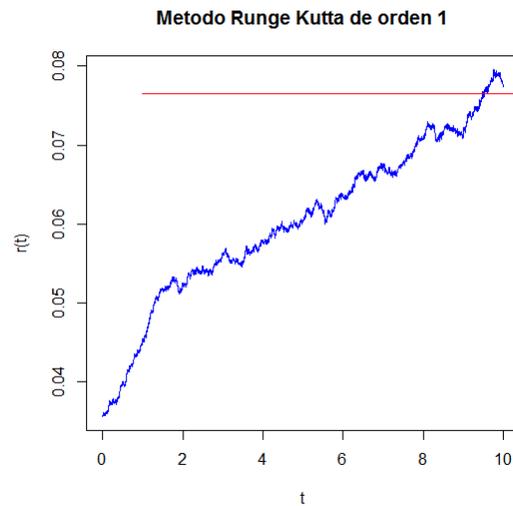


Figura 2.4: Simulación de una trayectoria del proceso Cox-Ingersoll-Ross que conduce la estructura de la curva cupón cero de Bonos M al 26 de abril de 2016. Trayectoria simulada con el Método Runge-Kutta de orden 1 para EDEs. La línea horizontal corresponde al valor del parámetro de regresión a la media.

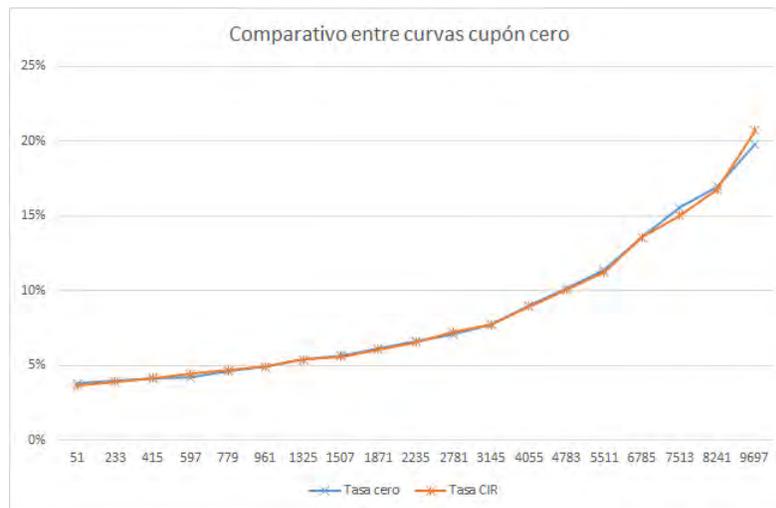


Figura 2.5: Comparación entre curvas cupón cero, para verificar que el ajuste de la curva cupón cero calculado bajo el esquema de Cox-Ingersoll-Ross es óptimo.

actual. También es importante mencionar que los resultados de la calibración se deben actualizar diariamente con los precios de mercado observados cada día, de forma que la estructura de tasas siempre capture las condiciones actuales del mercado.

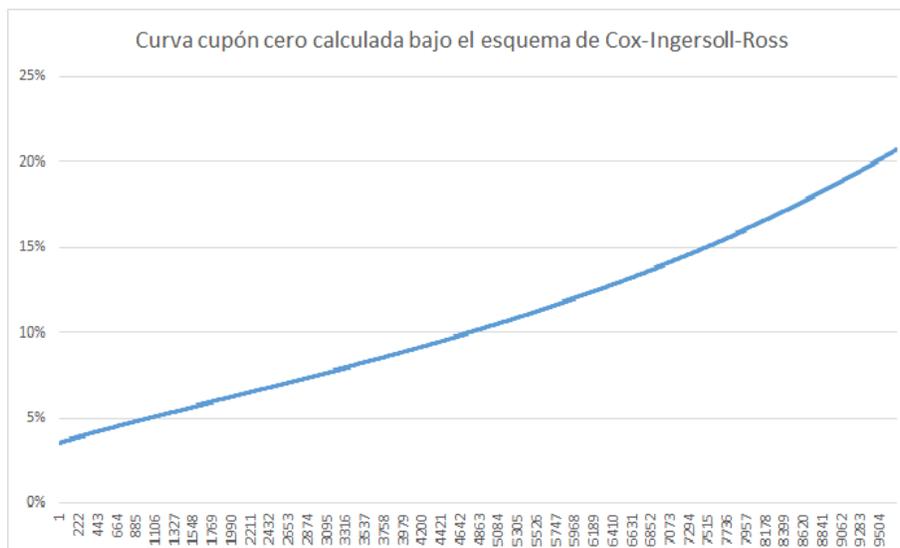


Figura 2.6: Curva cupón cero de Bonos M con los parámetros del proceso Cox-Ingersoll-Ross estimados al 26 de abril de 2016.

2.4. Conclusiones

El modelo CIR presenta muchas ventajas teóricas que permiten su estudio: es parsimonioso (en el sentido de que no requiere de muchas variables ni parámetros que expliquen su comportamiento), permite asignar una distribución conocida a cada variable del proceso, la positividad en el sentido \mathbb{P} -c.s. de las trayectorias de las soluciones, se pueden obtener fórmulas cerradas para el precio de varios instrumentos financieros y, como consecuencia de este último punto, se pueden construir con cierta facilidad las curvas de tasas de interés del mercado así como calcular el precio de instrumentos financieros cuyo valor dependa de la tasa de interés y de las curvas de mercado.

Debido a la simplicidad del modelo, observamos en los dos primeros intentos de calibración que el ajuste propuesto no fue el óptimo. Esto se puede deber, en gran parte, a que se necesitan más datos de tasas a distintos plazos para asegurar que la curva de tasas calculada mediante el modelo propuesto se adapte a cada uno de los puntos y en el caso de los ejercicios de calibración para la curva TIIE sólo se cuenta con tres datos de mercado. Para mejorar el ajuste a la curva de tasas de interés interbancarias, en [11] se propone utilizar tasas 'par swap' a plazos mayores o iguales a un año como información adicional. Estas tasas también se deben obtener a partir de cotizaciones de mercado a la fecha en que se desee realizar el cálculo.

En cambio en el tercer ejercicio de calibración se observó un mejor ajuste entre la curva cupón cero implícita en la valuación de los Bonos M y la curva generada a partir de los precios de bonos cupón cero del modelo CIR. Esto se debe a una mayor disponibilidad de datos en el mercado con los cuales realizar la calibración. En este ejercicio es impor-

tante mencionar que no se esperaba un ajuste exacto entre ambas curvas debido a que la curva cupón cero implícita no contiene tasas observables directamente en el mercado, sino que se calculó a partir de los precios de mercado de tal forma que esta nueva curva replique los precios observados. De igual forma, a partir de esta curva se estimaron los parámetros del proceso CIR y se obtuvo una curva consistente con la situación actual del mercado, es por eso que se puede concluir que se realizó una buena calibración a los parámetros del modelo. A partir de esto, es posible posible valuar no solo Bonos M sino también será posible obtener valuaciones de instrumentos derivados cuyo subyacente esté relacionado con los Bonos M y los precios obtenidos serán congruentes con la estructura vigente del mercado.

El intentar modelar la estructura de tasas de interés continúa como un problema de interés y algunos autores han propuesto modificaciones al modelo CIR para lograr que éste capture con mayor precisión la información de mercado y permita realizar valuaciones exactas. Algunas de estas modificaciones son:

- i) **Modelo CIR Multidimensional** Este modelo propone que el proceso de tasa corta $(r_t)_{t \geq 0}$ se comporta de la siguiente forma:

$$r_t = \sum_{i=1}^n y_t^{(i)}$$

Donde cada proceso $(y_t^{(i)})_{t \geq 0}$ es un proceso de tipo Cox-Ingersoll-Ross unidimensional, cada uno conducido por una familia $(W_t^{(i)})_{t \geq 0}$ de movimientos brownianos con $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matriz de correlación.

- ii) **Modelo de Hull-White** En 1990, se propuso una modificación al modelo CIR en la cual se propone la siguiente dinámica:

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t) dt + \sigma(t)\sqrt{r_t} dW_t$$

Donde $\theta(t)$, $a(t)$, $\sigma(t)$ son funciones deterministas y se eligen de tal forma que se adapten a la estructura de tasas observada en la fecha de cálculo. En este modelo se pueden realizar combinaciones como el suponer que la volatilidad es constante y los otros dos parámetros son funciones deterministas o que sólo $\theta(t)$ es una función determinista y el resto de los parámetros es constante, entre otras. De hecho, observamos que el proceso CIR presentado en este trabajo resulta ser un caso particular de este modelo.

- iii) **Modelo CIR++** En este modelo se propone que el proceso de tasa corta obedece la siguiente dinámica: $r_t = x_t + \varphi(t)$, donde $(x_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de CIR y $\varphi(t)$ es una función determinista.

- iv) **Modelo CIR con saltos** Bajo este modelo, se preserva la estructura inicial del modelo CIR y se agrega un proceso de saltos $(J_t)_{t \geq 0}$ con tasa de arribo de saltos $\alpha > 0$ y distribución de los saltos π con soporte en \mathbb{R}^+ . Al agregar esta componente de saltos, el proceso se volvería una difusión de saltos que seguiría la siguiente EDE:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t + dJ_t$$

Esta modificación también se puede realizar al proceso **CIR++** del inciso anterior; sin embargo, en ambos casos se tiene que realizar un estudio de existencia de soluciones para difusiones con saltos, para verificar que tenga sentido plantear una dinámica estocástica de esta forma.

Las modificaciones presentadas pueden mostrar ventajas en cuanto al ajuste de la estructura de tasas de interés de mercado y el hecho de que todos preservan la positividad de las trayectorias. Aunque en algunas de estas propuestas se pierde la propiedad de obtener soluciones explícitas para el precio del bono cupón cero y instrumentos derivados, esta desventaja se puede superar con relativa facilidad al aproximar numéricamente la solución de la EDP que se obtenga para el precio de cualquier instrumento y además se contará con la seguridad de que el precio obtenido será un valor cercano a los determinados por las condiciones actuales del mercado.

Por lo tanto, a pesar de que el proceso original de Cox-Ingersoll-Ross no nos garantiza un ajuste exacto a las condiciones financieras observadas, es versátil y nos provee de una base a partir de la cual se pueden obtener mejores modelos que estimen y repliquen con mayor exactitud dichas condiciones, e incluso que nos permitan pronosticar movimientos del mercado. Es por eso que conviene estudiar este modelo a fondo, analizar sus ventajas y desventajas e intentar proponer soluciones o nuevos modelos que conserven las ventajas que nos presenta y que superen las desventajas. En particular, creo que es una propuesta interesante el considerar agregar un proceso de saltos a la modelación del proceso de tasa corta, pues en ciertas curvas de tasas de mercado se pueden observar incrementos abruptos entre plazos y este incremento quedaría mejor explicado como consecuencia de saltos que haya presentado el modelo de tasa corta subyacente. Sin embargo, como ya se mencionó antes, es necesario realizar un estudio a profundidad sobre difusiones con saltos para determinar si la base del proceso CIR es compatible con los teoremas de existencia para este tipo de difusiones o si es posible proponer alguna modificación a estas hipótesis para asegurar la existencia de este tipo de procesos, así como estudiar las propiedades que resulten en caso de demostrar la existencia y, de ser posible, las modificaciones a los Teoremas de Feynman-Kac. Además, también sería un ejercicio interesante el proponer una forma de calibrar una difusión de saltos a la estructura de tasas de mercado, para estimar no solo la parte continua, sino la tasa entre llegadas de los saltos y la distribución de éstos.

Anexo: Códigos para la simulación de trayectorias de EDEs

En este anexo se presentan los códigos utilizados en este trabajo para simular trayectorias de EDEs. Todas las simulaciones se realizaron utilizando el software 'R'. La parte correspondiente al código se escribirá utilizando esta tipografía.

Trayectoria del puente browniano

Se simularán tres trayectorias del puente browniano utilizando el método de simulación de Euler-Maruyama, el cual propone la siguiente fórmula recursiva para aproximar la solución a una EDE con condición inicial x_0 , dada $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$ una partición uniforme del intervalo $[0, T]$ de tamaño Δ :

$$X(0) = x_0$$

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + a(X(t_n))\Delta + \sigma(X(t_n))(W_{t_n+\Delta} - W_{t_n})$$

`N=1000 ;Número de particiones del intervalo [0, 1]`

`delta<-1/N ;Tamaño de la partición`

Se generan los incrementos del movimiento Browniano, simulando N variables aleatorias con distribución Normal de media cero y varianza $\frac{1}{N}$

`dW<-rnorm(N,0,sqrt(delta))`

`int<-seq(0,1,by=delta) ;Partición del intervalo [0, 1] P<-NULL ;Declaración de un vector vacío que contendrá los resultados de las simulaciones`

`P[1]=0 ;La primer entrada del vector es la condición inicial de la EDE`

`K=N+1`

En este ciclo se lleva a cabo la simulación mediante el método Euler-Maruyama.

`for (i in 2:K)`

`{`

`P[i]=P[i-1]-(P[i-1]/(1-int[i-1]))*delta+dW[i-1]`

`}`

`P[N+1]=0 ;Dado que el puente Browniano se aproxima a 0 conforme $t \rightarrow 1^-$, se declara`

al último elemento del vector como 0.

P1<-NULL ;Generación de un segundo vector vacío y de nuevos incrementos del Movimiento Browniano para simular una segunda trayectoria del proceso.

```
dW1<-rnorm(N,0,sqrt(delta))
```

```
P1[1]=0
```

```
for (i in 2:K)
```

```
{
```

```
P1[i]=P1[i-1]-(P1[i-1]/(1-int[i-1]))*delta+dW1[i-1]
```

```
}
```

```
P1[N+1]=0
```

P2<-NULL ;Generación de un tercer vector vacío y de nuevos incrementos del Movimiento Browniano para simular una tercera trayectoria del proceso.

```
dW2<-rnorm(N,0,sqrt(delta))
```

```
P2[1]=0
```

```
for (i in 2:K)
```

```
{
```

```
P2[i]=P2[i-1]-(P2[i-1]/(1-int[i-1]))*delta+dW2[i-1]
```

```
}
```

```
P2[N+1]=0
```

Gráfica de las tres trayectorias simuladas:

```
plot(int,P,type='l',main='Puente browniano',col='blue',xlab='t',
```

```
ylab='X(t)',sub='dX(t) = -X(t)/(1-t)dt + dW(t)')
```

```
lines(int,P1,col='red')
```

```
lines(int,P2)
```

Trayectoria del proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Se simularán las trayectorias del proceso Ornstein-Uhlenbeck utilizando el método de Euler-Maruyama y con parámetros $b = 1,3$, $\sigma = 0,7$ y con condición inicial $x_0 = 0,5$. Se usará el mismo tamaño de partición que en la simulación anterior, pero ahora se hará en el intervalo $[0, 15]$.

Se generan incrementos del Movimiento Browniano.

```
dW<-rnorm(15*N,0,sqrt(delta))
```

Parámetros del proceso de Ornstein-Uhlenbeck:

```
b<-1.3
```

```
sig<-0.7
```

```
0<-NULL ;Declaración de un vector vacío que contendrá los resultados del las simulaciones.
```

```
0[1]<-0.5 ;El primer elemento del vector corresponde a la condición inicial de la EDE.
```

```
K1=20*N+1
```

En el siguiente ciclo se llevará a cabo la construcción de la trayectoria simulada utilizando el método Euler-Maruyama.

```
for (i in 2:K1)
```

```
{
```

```
0[i]=0[i-1] -b*0[i-1]*delta+sig*dW[i-1]
```

```
}
```

Creación de la gráfica de la trayectoria simulada:

```
plot(int2,0, type='l',main='Proceso de Ornstein-Uhlenbeck, b=1.3, S=0.7',
col='blue',xlab='t',ylab='X(t)',sub='dX(t)= -b X(t)dt + S dW(t)')
```

Inclusión de una línea horizontal sobre el eje X, para mostrar que el proceso presenta regresión a la media hacia el valor 0:

```
T<-rep(0,times=K1)
```

```
lines(int2,T)
```

Trayectoria del proceso de Vasicek

Se simulará una trayectoria del proceso de Vasicek utilizando el método de Euler-Maruyama con parámetros $\kappa = 1,5$, $\theta = 0,6$, $\sigma = 0,3$ y con condición inicial $x_0 = 0,3$. Esta trayectoria se simulará sobre el intervalo $[0, 20]$.

`dW<-rnorm(20*N,0,sqrt(delta))` ;Simulación de incrementos del Movimiento Browniano

`int2<-seq(0,20,by=delta)`

Valor de los parámetros del proceso de Vasicek:

`kappa<-1.5`

`theta<-0.6`

`sig1<-0.3`

`V<-NULL` ;Declaración de un vector vacío donde se guardará el resultado de la trayectoria simulada.

`V[1]<-0.3` ;El primer elemento del vector corresponde a la condición inicial de la EDE.

En este ciclo se generan los valores de la trayectoria simulada del proceso de Vasicek.

`for (i in 2:K1)`

{

`V[i]=V[i-1]+kappa*(theta - V[i-1])*delta+sig1*dW[i-1]`

}

Gráfica de la trayectoria simulada:

`plot(int2,V,type='l',col='blue',main='Proceso de Vasicek, X(0)=0.3, K=1.5, B=0.6, S=0.3',xlab='t',ylab='X(t)',sub='dX(t)= K(B-X(t))dt + S dW(t)')`

Inclusión en la gráfica de una línea horizontal sobre el valor θ de regresión a la media del proceso.

`TH<-rep(theta,times=K1)`

`lines(int2,TH)`

Trayectoria del proceso Cox-Ingersoll-Ross utilizando el método Milstein

Se presenta la simulación de una trayectoria del proceso de Cox-Ingersoll-Ross utilizando el método Milstein de resolución numérica de EDEs. Este es un método recursivo al igual que el método de Euler-Maruyama, que parte de una EDE de la forma $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con condición inicial $X_0 = x$ y donde $\sigma(x)$ es una función de clase C^1 . Dada una partición uniforme del intervalo $[0, T]$ de la forma $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$ y de tamaño Δ , se construye la trayectoria de la solución de la EDE de la siguiente forma:

$$X(0) = x$$

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + a(X(t_n))\Delta + \sigma(X(t_n))(\Delta W(i)) + \frac{1}{2}\sigma(X(t_n))\sigma'(X(t_n))(\Delta W(i)^2 - \Delta)$$

Donde $\Delta W(i) = W_{t_i+\Delta} - W_{t_i}$. Se utilizará este método para simular trayectorias de un proceso Cox-Ingersoll-Ross con parámetros $r_0 = 0,0746, \kappa = 11,11869861, \theta = 0,099030479, \sigma = 1,2554567772$. Las trayectorias se simularán sobre el intervalo $[0, 10]$.

T<-10 ;Declaración de la cota superior del intervalo $[0, 10]$

n=1000 ;Número de subintervalos que se tomarán para la simulación de la trayectoria.

delta<-1/n ;Tamaño de la partición.

W<-rnorm(n*T, mean=0, sd=sqrt(delta)) ;Simulación de incrementos del Movimiento Browniano.

Declaración de los parámetros del proceso CIR.

r<-0.0746

k<-11.11869861

th<-0.099030479

sigma<-1.2554567772

Declaración de un vector vacío que contendrá los resultados de las simulaciones. El primer elemento del vector corresponde a la condición inicial del proceso.

X<-NULL

X[1]=r

h<-n*T

En el siguiente ciclo se realiza la construcción de la trayectoria mediante el método Milstein.

for(i in 2:h)

(

X[i]=X[i-1]+k*(th-X[i-1])*delta+sigma*sqrt(X[i-1])*W[i]

+ .25*(sigma*sigma)*((W[i]*W[i])-delta)

)

Creación de la gráfica de la trayectoria simulada.

```
plot(X,type='l',main="Metodo Milstein")
```

Trayectoria del proceso Cox-Ingersoll-Ross utilizando el método Runge-Kutta

Se presenta la simulación de una trayectoria del proceso CIR utilizando el método Runge-Kutta de resolución numérica de EDEs. Este es un método recursivo al igual que los métodos de Euler-Maruyama y Milstein presentados en las secciones anteriores. Este método parte de una EDE de la forma $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ con condición inicial $X_0 = x$, donde $\sigma(x)$ es una función de clase C^1 , sin embargo, a diferencia del método de Milstein se utiliza una aproximación de $\sigma'(x)$. Dada una partición uniforme del intervalo $[0, T]$ de la forma $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$ y de tamaño Δ , se construye la trayectoria de la solución de la EDE de la siguiente forma:

$$X(0) = x$$

$$\widehat{X}(i) = X(i) + a(X(i))\Delta + \sigma(X(i))\sqrt{\Delta}$$

$$X(i+1) = X(i) + a(X(i))\Delta + \sigma(X(i))\Delta W(i) + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}[\sigma(\widehat{X}(i)) - \sigma(X(i))](\Delta W(i)^2 - \Delta)$$

Donde $\Delta W(i) = W_{t_i+\Delta} - W_{t_i}$. Se utilizará este método para simular trayectorias de un proceso Cox-Ingersoll-Ross con parámetros $r_0 = 0,03564167, \kappa = 0,210448, \theta = 0,08435418, \lambda = 0,02149002, \sigma = 0,01000027$. La trayectoria se simulará sobre el intervalo $[0, 10]$ y se tomará una partición uniforme de tamaño $\Delta = \frac{1}{1000}$.

T<-10 ;Declaración de la cota superior del intervalo $[0, 10]$.

n=1000

delta<-1/n ; Tamaño de la partición.

Simulación de incrementos del Movimiento Browniano.

W<-rnorm(n*T,mean=0,sd=sqrt(delta))

Declaración de los parámetros del proceso CIR.

r<-0.03564167

k<-0.210448

th<-0.08435418

lam<-0.02149002

sigma<-0.01000027

Declaración de un vector vacío donde se almacenarán los resultados de la trayectoria simulada. El primer elemento del vector corresponde a la condición inicial del proceso.

X<-NULL

X[1]=r

eje<-seq(from=0,to=T,by=delta) ;Partición del intervalo $[0, 10]$.

h<-n*T

Ciclo donde se generan los valores de la trayectoria simulada, de acuerdo con el método Runge-Kutta.

```

for(i in 2:(h+1))
{
A<-X[i-1]+(k+lam)*((k*th)/(k+lam)-X[i-1])*delta
+sigma*sqrt(X[i-1])*sqrt(delta)

X[i]<-X[i-1]+(k+lam)*((k*th)/(k+lam)-X[i-1])*delta+sigma*sqrt(X[i-1])*W[i]
+(1/(2*sqrt(delta)))*(sigma*sqrt(A)-sigma*sqrt(X[i-1]))*(W[i]*W[i]-delta)
}

```

Creación de la gráfica de la trayectoria simulada.

```

plot(eje,X,type='l',main="Metodo Runge Kutta de orden 1",col='blue',
xlab='t',ylab=' r(t)')

```

Inclusión en la gráfica de una línea horizontal que representa el valor de regresión a la media.

```

Y<-rep((k*th)/(k+lam),n*T+1)
lines(Y, col='red')

```

Bibliografía

- [1] Banco de México, *Circular 3/2012: Disposiciones aplicables a las operaciones de las instituciones de crédito y a la financiera rural*, 2012, <http://www.banxico.org.mx/disposiciones/circulares/%7B2E3F8779-20CA-B8AD-7FD2-90133EFF0FEC%7D.pdf>
- [2] Baudoin, F. , *Difussion Processes and Stochastic Calculus*, European Mathematical Society, West Lafayette, 2014
- [3] Baudoin, F., *Lecture 8. The Doob's stopping theorem*, 2012, <https://fabricebaudoin.wordpress.com/2012/03/26/lecture-8-the-doobs-stopping-theorem/>
- [4] Baudoin, F., *Lecture 26. Stochastic Differential Equations. Existence and uniqueness of solutions*, 2012, <https://fabricebaudoin.wordpress.com/2012/10/09/lecture-26-stochastic-differential-equations-existence-and-uniqueness-of-solutions/>
- [5] BBVA Research, *Handbook of Mexican Financial Instruments*, 2011, https://www.bbva.com/BBVAResearch/KETD/fbin/mult/100921_HandbookMexico_tcm348-233218.pdf
- [6] Bolder, D. J. , *Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation*, 2003, <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/02/wp01-15a.pdf>
- [7] Brigo, D. y Mercurio, F. , *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer Finance, New York, 2006
- [8] Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross, S. A. , *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, 1985, <http://efinance.org.cn/cn/FEshuo/A/%20Theory%20of%20the%20Term%20Structure%20of%20Interest%20Rates1985.pdf>
- [9] Deelstra, G. y Delbaen, F. , *Existence of Solutions of Stochastic Differential Equations Related to the Bessel Process*, 2000, https://people.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/existentie_rev.pdf

- [10] Evans, L. C., *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, Berkeley, 2013
- [11] Hirsa, A. , *Computational Methods in Finance*, Chapman and Hall, 2012
- [12] Iacus, S. M., *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2008
- [13] Kloeden, P. y Platen, E. , *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1995
- [14] Kozdron, M. , *The Characteristic Function for a Diffusion*, 2014, <http://stat.math.uregina.ca/~kozdron/Teaching/Regina/441Fall14/Notes/L33-34-Nov24.pdf>
- [15] Oksendal, B. , *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [16] Shreve, S. , *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models*, Springer Finance, New York, 2004
- [17] Stroock, D.W. y Varadhan, S.R.S , *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, New York, 1997
- [18] Varadhan, S.R.S., *Lectures on Stochastic Analysis, Fall '06*, 2006, <https://www.math.nyu.edu/faculty/varadhan/fall106.html>
- [19] Watanabe, S. y Yamada, T. , *On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations*, 1970, https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kjm/1250523691
- [20] Yamada, T., *Sur une construction des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas non-lipschitzien*, 1978, http://archive.numdam.org/ARCHIVE/SPS/SPS_1978__12_/SPS_1978__12__114_0/SPS_1978__12__114_0.pdf
- [21] Zagst, R. , *Interest Rate Management*, Springer Finance, New York, 2002