



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DOMINACIÓN ROMANA EN GRÁFICAS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A :**

**MARIO AURELIO YÁÑEZ MOLINA**



**DIRECTORA DE TESIS:  
DRA. MUCUY KAK DEL CARMEN GUEVARA  
AGUIRRE**

**2016**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

A mis padres Carmen Rosa y Mario, no tengo palabras para agradecer su apoyo incondicional sin el que no hubiera llegado aquí. A la Universidad Nacional Autónoma de México y en particular a su Facultad de Ciencias, no sé si en una vida pueda pagar todo lo que me ha dado (pero no dejaré de intentarlo). A mis hermanas y hermano, que siempre estuvieron ahí.

Muy en especial a Mucuy por la ayuda y la gran paciencia.

A mis profesores, a todos ellos. A Pilar por acompañarme académicamente y brindarme tu amistad. A Asunción por abrir mis ojos a la lógica, marcando un antes y un después en mi vida.

A mis compañeros de facultad, de los que aprendí tanto y en particular los que se convirtieron en mis amigos. Alex, Juan Manuel, Carlito, Faus.

A mis amigos, que muchas veces en mayor o menor medida tuvieron que soportar mi paso por la facultad. Rodrigo, Dinoh, Tona, Nabi.

A mi tía Andrea, gracias por todo tu apoyo y ya, ya está lista la tesis.

A Vero, por estar ahí antes, durante y después de la carrera. A Manuel por entender. A Andy por una gran amistad que ya nos ha durado. A Aránzazu por ayudarme a hacer una mejor versión de mi. A Jordi por tener en mi más fe de la que yo tenía.

A todas las personas que no mencioné pero que de formas, directas o indirectas, hicieron una contribución a éste trabajo.

Finalmente, pero no menos importante a Adra, Clo, Elvia, Gaby, Jordi, Mau y Perla (+ Luis<sup>2</sup> y Lalo) llenan mi vida de sonrisas de una forma que nunca

pensé que la búsqueda de una hamburguesa podría lograr. Espero que vivamos más aventuras juntos.

Reitero mi agradecimiento a Mauricio García que me ayudó con el diseño de portada y con las ilustraciones de mapas, siempre con una gran actitud. Muchas gracias Mau.

# Índice general

<b>0. Motivación Histórica</b>	<b>5</b>
<b>1. Teoría de Gráficas</b>	<b>9</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	9
1.1.1. Gráfica . . . . .	9
1.1.2. Subgráficas . . . . .	11
1.1.3. Conexidad . . . . .	11
1.2. Operaciones con Gráficas . . . . .	12
1.3. Algunas familias de gráficas . . . . .	13
1.4. Dominación e independencia . . . . .	16
<b>2. Dominación Romana</b>	<b>19</b>
2.1. Conceptos Previos . . . . .	19
2.2. Dominación Romana . . . . .	20
2.3. Otra caracterización para $\gamma_R$ . . . . .	32
2.4. Valores de $\gamma_R$ para algunas gráficas. . . . .	37
2.5. Gráficas Romanas . . . . .	43
2.6. Otras consideraciones respecto a $\gamma_R$ . . . . .	44
<b>3. Eficiencia</b>	<b>47</b>
<b>4. Y más allá</b>	<b>59</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>66</b>

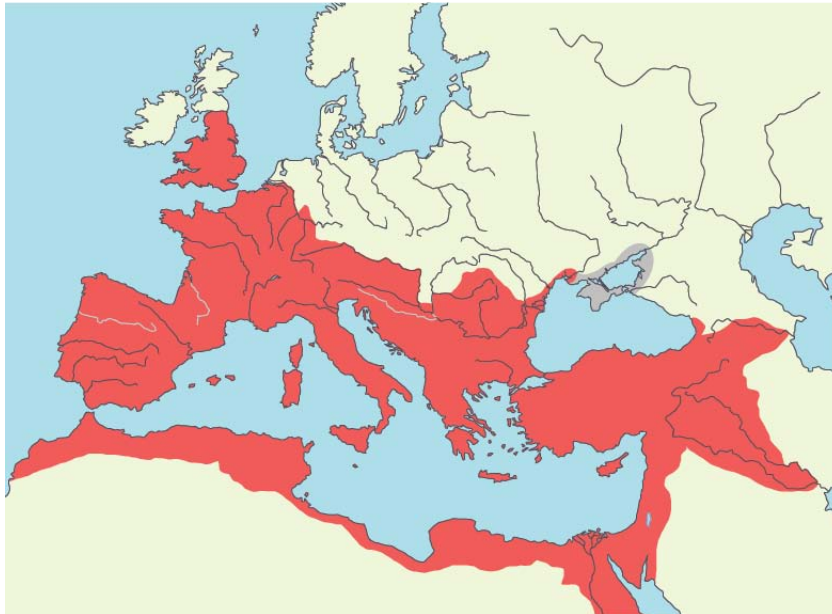


## Capítulo 0

# Motivación Histórica

A principios del siglo IV de nuestra era, Constantino fue proclamado emperador del Imperio Romano, que por entonces abarcaba gran parte de Europa, la Península Ibérica, media isla Británica, Constantinopla, el norte de África y Medio Oriente.

Figura 1: Imperio Romano.

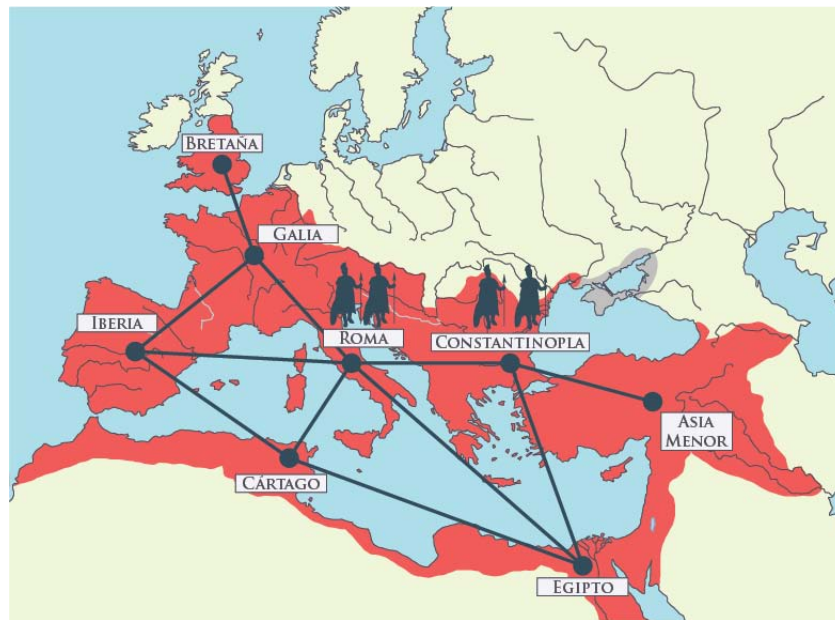




Durante los 30 años de su gobierno lidió con insurrecciones e invasiones, para hacerlo estableció reglas para el posicionamiento y movilización de tropas. Dividió sus legiones en 4 grupos y sus reglas fueron:

- Un territorio se considera asegurable si un grupo de legiones se puede mover a él en un solo movimiento (si hay tropas en un territorio éste es «seguro»).
- Un grupo de legiones se puede mover, sólo si en el territorio en el que se encuentra ya hay otro grupo de legiones, es decir, si el territorio «origen» seguirá siendo seguro después del movimiento.

Figura 2: Distribución de tropas de Constantino.



Con ésto en mente, en [1] surge el concepto de *Dominación Romana* como una forma de posicionamiento de tropas de tal forma que todo territorio que no sea seguro sea asegurable. Como muchos problemas en matemáticas, se trata de optimizar ¿Cuál es el mínimo de tropas necesarias para asegurar que un «mapa» dado es seguro o asegurable? ¿Cómo se puede hacer de forma «eficiente»? En el

presente trabajo se tratan de responder estas preguntas.

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente forma: El capítulo 1 es una breve introducción a la teoría de gráficas, donde se definen los conceptos básicos que se utilizarán, el lector que esté familiarizado, puede omitirlo sin ningún problema. En el capítulo 2 se define el concepto de «Dominación Romana», se presentan resultados básicos, se define el *número de dominación romana* de una gráfica, se presentan cotas para el mismo, un par de caracterizaciones y también se calcula para algunas familias particulares de gráficas. En el capítulo 3 se introduce el concepto de *eficiencia en dominación* y se define el concepto de *eficiencia en dominación romana* como una extrapolación natural del primero. Finalmente en el capítulo 4 se menciona brevemente la complejidad computacional del problema de encontrar una función de dominación romana con un mínimo de recursos y se plantea trabajo futuro, resultado del estudio de los artículos que hicieron posible este trabajo.



# Capítulo 1

## Teoría de Gráficas

En matemáticas definimos una relación  $R$  de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$  como un subconjunto (no vacío) de su producto cartesiano,  $R \subset A \times B$ . De particular interés son las relaciones de un conjunto  $A$  en él mismo, ya que sirven para modelar una gran cantidad de situaciones: La relación «amistad» en un grupo de personas o la relación «ser colindante» en el grupo de territorios de un mapa por decir un par de ejemplos. Las gráficas son de particular interés porque pueden modelar *gráficamente* muchos tipos de relaciones.

En este capítulo veremos una breve introducción a la teoría de gráficas, además de la notación que se usará. Como se mencionó en el capítulo anterior, el lector familiarizado puede omitirlo.

### 1.1. Conceptos básicos

#### 1.1.1. Gráfica

Una **gráfica**  $G$  es una pareja  $G = (V(G), E(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito no vacío de «vértices» y  $E(G)$  es un conjunto de parejas no ordenadas de elementos de  $V(G)$  a los que llamaremos «aristas», cuando no sea necesario especificar la gráfica escribiremos  $V$  y  $E$  respectivamente. Pediremos además

que  $E$  no tenga lazos, que son elementos del tipo  $(x, x)$ . Así, una gráfica puede ser utilizada para modelar algunos tipos de relaciones (los ejemplos anteriores incluidos). A la cantidad de vértices de una gráfica se le conoce como el **orden** de la gráfica y a la cantidad de aristas como el **tamaño**, las representaremos con las letras  $n$  y  $m$  respectivamente. Así  $n = |V|$  y  $m = |E|$  (nótese que  $n > 0$ ). Diremos que un vértice *incide* en una arista o que la arista *incide* en un vértice, cuando el vértice sea uno de los dos que definen a la arista, también que dos vértices  $u \neq v$  son **adyacentes** si ambos definen una misma arista y lo denotaremos por  $u \text{ ady}_G v$ , cuando sea claro a qué gráfica nos referimos, escribiremos únicamente  $u \text{ ady } v$ . La **vecindad abierta** (o simplemente **vecindad**) de un vértice  $v$  es el conjunto de vértices que son adyacentes a  $v$  y se denota:  $N(v) = \{x \in V : x \text{ ady } v\}$ . Mientras que la **vecindad cerrada** de  $v$  es el conjunto  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . De igual forma, si  $S \subset V$ , su **vecindad abierta** (o simplemente **vecindad**) es el conjunto  $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$  y su **vecindad cerrada** es el conjunto:  $N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v]$ , nótese que  $S \subset N[S]$ . Motivados por la definición de vecindad, diremos que dos vértices adyacentes son **vecinos**. A veces nos interesan aristas que conectan vértices dentro de dos conjuntos diferentes de vértices. Por ejemplo, si tenemos los conjuntos  $A$  y  $B$  de vértices, diremos que una  $AB$ -arista es cualquier arista que conecte algún vértice de  $A$  con algún vértice de  $B$  (lo que nos interesa no es qué vértices son, nos interesa el hecho de que hay una arista que conecta ambos conjuntos).

El nombre *gráfica* viene del hecho de que pueden ser representadas gráficamente, utilizando puntos para los vértices y líneas que los conectan para las aristas. En el *dibujo* de una gráfica no es importante ningún aspecto geométrico, lo único relevante es qué vértices están conectados y cuáles no. Así, mientras se respeten las relaciones de adyacencia, una gráfica puede ser dibujada de distintas formas.

El **grado** de un vértice es el número  $\delta(v) = |N(v)|$ , es decir,  $\delta(v)$  es la cantidad de aristas que inciden en él o la cantidad de vecinos que tiene. A un vértice de grado 0 se le conoce como *vértice aislado*. Al mínimo de los grados

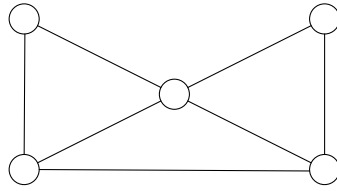


Figura 1.1: Una gráfica de orden 5 y tamaño 7.

sobre los vértices de una gráfica se le conoce como el *grado mínimo de una gráfica* y se denota  $\delta(G) = \min\{\delta(v) : v \in V\}$ . Por otra parte el *grado máximo* es el número  $\Delta(G) = \max\{\delta(v) : v \in V\}$ .

### 1.1.2. Subgráficas

Dada una gráfica  $G$ , una **subgráfica**  $H$  de  $G$  es una gráfica tal que  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$  donde  $V(H)$ ,  $V(G)$ ,  $E(H)$ ,  $E(G)$  denotan los vértices de  $H$  y de  $G$  y las aristas de  $H$  y de  $G$ , respectivamente. Una **subgráfica generadora**  $H$  de  $G$  es una subgráfica en la que  $V(H) = V(G)$ . Finalmente dado  $V' \subset V$ , la **subgráfica de  $G$  inducida** por el conjunto  $V'$  es la subgráfica con  $V'$  como conjunto de vértices y  $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$ , es denotada como  $G[V']$ .

Si  $H$  es subgráfica de  $G$  diremos simplemente que  $G$  *contiene* a  $H$  o bien que  $H$  está *contenida* en  $G$ .

### 1.1.3. Conexidad

Definiremos una **trayectoria** en una gráfica como una sucesión de vértices que son adyacentes cuando son consecutivos y no se repiten; y decimos que su *longitud* es la cantidad de aristas que contiene (así, una trayectoria de longitud 1 tiene dos vértices y una arista). Una *uv-trayectoria* es una trayectoria que comienza en el vértice  $u$  y termina en el vértice  $v$ . Diremos que una gráfica es **conexa** cuando para cualquier pareja de vértices  $u, v$  existe una *uv-trayectoria*. Definimos la **distancia** entre dos vértices  $u, v$  como la mínima longitud sobre

las  $uv$ -trayectorias, este número se denota como  $d(u, v)$ . Cuando no existe una trayectoria entre dos vértices consideraremos que su distancia como infinito.

## 1.2. Operaciones con Gráficas

Hay diversos tipos de operaciones entre gráficas, en la presente tesis trabajaremos con producto cartesiano (cuadro), complemento y subdivisión.

Dadas dos gráficas  $G$  y  $H$  definimos el **producto cartesiano** (cuadro) entre ambas como la gráfica  $G \square H$  cuyo conjunto de vértices es  $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$  y sus adyacencias se definen de la siguiente forma  $(u, v) \text{ ady}_{G \square H} (x, y)$  si  $u = x$  y  $v \text{ ady}_H y$ ; o bien  $u \text{ ady}_G x$  y  $v = y$ .

Si  $G$  es una gráfica, su *complemento* es la gráfica  $\overline{G}$  que tiene el mismo conjunto de vértices, pero su conjunto de aristas es  $E(\overline{G}) = \{(u, v) : (u, v) \notin E\}$ .

Una *subdivisión* es una operación aplicada sobre aristas de la gráfica. Se sustituye una arista por dos aristas y un vértice que las conecta. Formalmente, si tenemos una gráfica  $G = (V, E)$  y  $e = (u, v) \in E$ , la gráfica resultante de *subdividir*  $G$  por la arista  $e$ , es la gráfica  $G' = (V', E')$  donde  $V' = V \cup \{x\}$  y  $E' = (E - e) \cup \{(u, x), (x, v)\}$ .



Figura 1.2: Subdivisión de la arista  $(u, v)$ .

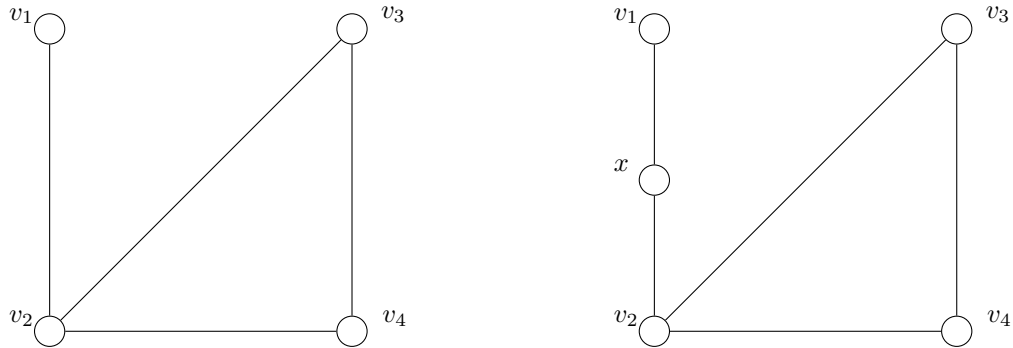


Figura 1.3:  $G$  y  $G$  con la arista  $(v_1, v_2)$  subdividida.

### 1.3. Algunas familias de gráficas

Existen gráficas que por sus características se consideran especiales, entre las que encontramos:

1. Las trayectorias como gráficas, son una sucesión de vértices adyacentes que no se repiten. Las denotamos como  $P_n$ . En la figura 1.4 se ilustra  $P_5$ .

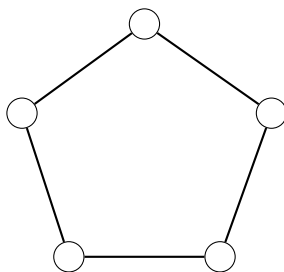
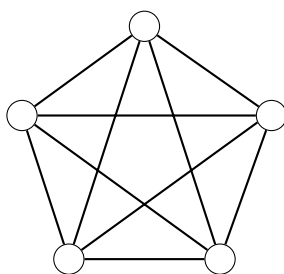


Figura 1.4:  $P_5$

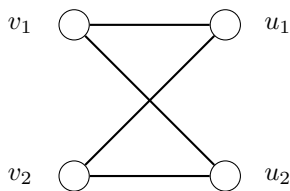
2. Los ciclos son muy parecidos a las trayectorias, salvo que son cerrados, es decir, es una sucesión de vértices en la que vértices consecutivos son adyacentes y el primer y último vértice son el mismo. Se denotan  $C_n$ . En la figura 1.5 se ilustra  $C_5$ .
3. Las gráficas completas son gráficas con todas las aristas posibles, se denotan como  $K_n$ . En la figura 1.6 se ilustra  $K_5$ .

Al complemento de las gráficas completas se les conoce como *gráficas vacías*. Son sólo un grupo de vértices aislados.



Figura 1.5:  $C_5$ .Figura 1.6:  $K_5$ .

4. Diremos que una gráfica  $G = (V, E)$  es *bipartita* cuando exista una partición de los vértices en dos conjuntos,  $A$  y  $B$  tal que  $G[A]$  y  $G[B]$  sean gráficas vacías. En la figura 1.7 se puede ver un ejemplo de una gráfica bipartita.

Figura 1.7: Gráfica bipartita con bipartición  $\{v_1, v_2\}, \{u_1, u_2\}$ .

5. Generalizando a las gráficas bipartitas diremos que una gráfica es *p-partita* si existe una partición de los vértices en  $p$  conjuntos,  $A_1, A_2, \dots, A_p$  tal que las gráficas inducidas por tales conjuntos,  $G[A_i]$ , son vacías. Notemos que cualquier gráfica es  $p$ -partita para alguna  $p$ . La figura 1.8 es una gráfica

multipartita.

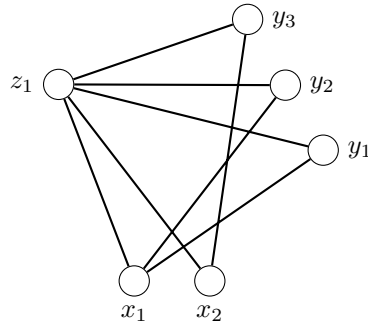


Figura 1.8: Gráfica 3-partita con partición  $\{\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2, y_3\}, \{z_1\}\}$ .

6. Los árboles son gráficas conexas que no contienen ningún ciclo como subgráfica. A los vértices de grado 1 los conocemos como vértices *terminales* (salvo por  $K_1$  todo árbol tiene por lo menos dos vértices terminales).

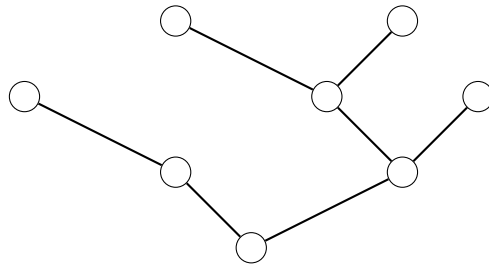


Figura 1.9: Árbol de orden 8

Respecto a las gráficas multipartitas, hay un tipo especial que mencionaremos más adelante, las multipartitas completas. Una gráfica multipartita con partición  $A_1, A_2, \dots, A_p$  es *multipartita completa* si para cualquier pareja de vértices  $u, v$  que no están en un mismo elemento de la partición se cumple que  $u$  y  $v$ , es decir, tienen todas las  $A_j A_k$ -aristas con  $j \neq k$ . A estas gráficas las denotamos como  $K_{j_1, j_2, \dots, j_p}$  donde  $j_i$  es la cardinalidad del conjunto  $A_i$ .

## 1.4. Dominación e independencia

En una gráfica  $G$  diremos que  $D \subset V$  es **dominante** cuando dado cualquier vértice  $v \in V$  o está en el conjunto  $D$  o es adyacente a algún vértice dentro del conjunto  $D$ , es decir,  $N[D] = V$ . Se conoce como el **número de dominación** de una gráfica a la mínima cardinalidad posible de un conjunto dominante y se denota como:  $\gamma(G) = \min\{S \subset V : S \text{ es dominante en } G\}$ . A un conjunto que alcance este mínimo le llamamos  **$\gamma$ -conjunto**.

También podemos establecer una relación entre dos conjuntos de vértices. Dados  $A, B \subset V$  diremos que  $A$  *domina* a  $B$  cuando todo vértice de  $B$  es adyacente a algún vértice de  $A$  y lo denotamos como  $A \succ B$ . Con esta definición podemos redefinir a  $D$  como un conjunto dominante cuando  $D \succ V - D$ .

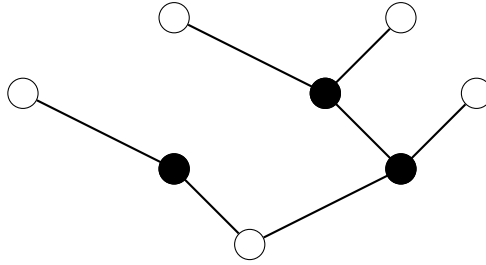


Figura 1.10: Los vértices negros forman un conjunto dominante.

Un conjunto  $S \subset V$  es **independiente** cuando no hay aristas entre sus vértices, es decir, cuando  $G[S]$  es una gráfica vacía. También diremos que un vértice  $v$  es *independiente* del conjunto  $S$  cuando no exista alguna arista incidente en  $v$  y en algún vértice de  $S$ . En la figura 1.10 los vértices blancos son un conjunto independiente.

Concluiremos el presente capítulo con un teorema sobre el número de dominación que nos servirá más adelante.

**Teorema 1.4.1.** *Si  $\gamma(G) = n$ , entonces  $G$  es una gráfica vacía.*

*Demostración.* Si  $\gamma(G) = n$ , entonces un conjunto dominante debe tener cardinalidad al menos  $n$ , el único conjunto que cumple con ello es  $V$ , de donde

todo  $V$  es el único conjunto dominante. Si hubiese una arista en  $G$ , digamos  $(u, v)$  entonces  $V - u$  es un conjunto dominante con cardinalidad  $\gamma - 1$  lo que es una contradicción. Por lo tanto, no hay aristas en  $G$ , es decir,  $G$  es una gráfica vacía.  $\square$

Nótese que el regreso también se cumple y es inmediato.



## Capítulo 2

# Dominación Romana

En el presente capítulo veremos algunos resultados básicos sobre dominación romana, se definirá el *número de dominación romana*, concepto central en dominación romana, y se calcularán cotas para el mismo, además de calcularlo para algunas familias de gráficas. Veremos dos caracterizaciones del número de dominación romana

### 2.1. Conceptos Previos

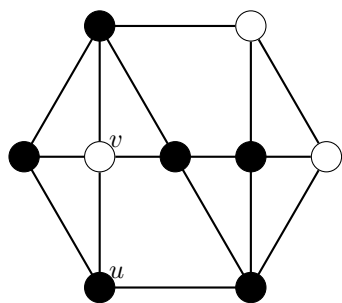
Sea  $v \in S \subset V$ . Diremos que  $u \in V$  es un *vecino privado de  $v$  respecto a  $S$*  cuando  $u \in N[v] \setminus N[S \setminus \{v\}]$  y lo denotaremos:  $u$  es un  $S$ - $pn$  de  $v$ <sup>1</sup>, le llamaremos *externo* si además  $u \notin S$ .

Al conjunto  $pn(v, S) = N[v] \setminus N[S \setminus \{v\}]$  de todos los vértices privados de  $v$  le llamamos la *vecindad privada de  $v$  con respecto a  $S$* . Si  $H$  es una subgráfica de  $G$  y cuando el contexto lo permita, relajaremos la notación y escribiremos:  $pn(v, H)$  o  $H - pn$  en vez de  $pn(v, V(H))$  o  $V(H) - pn$  respectivamente.

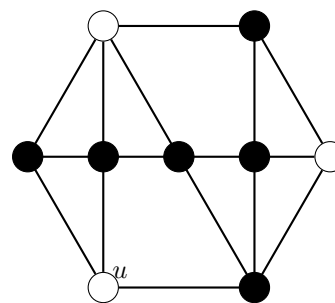
Por último,  $S$  será *no-redundante* cuando para todo  $v \in S$  se tenga que  $pn(v, S) \neq \emptyset$ .

---

<sup>1</sup>Notemos que  $v$  puede ser vecino privado de sí mismo cuando (y sólo cuando) es independiente de  $S \setminus \{v\}$



(a)  $u$  es vecino privado externo de  $v$  respecto a los vértices blancos.



(b)  $u$  es vecino privado de sí mismo respecto a los vértices blancos.

Figura 2.1: Vecinos privados.

Un conjunto  $S \subset V$  es un **2-empaque**, si para todo  $u, v \in S, u \neq v$  se cumple que  $N[u] \cap N[v] = \emptyset$ .

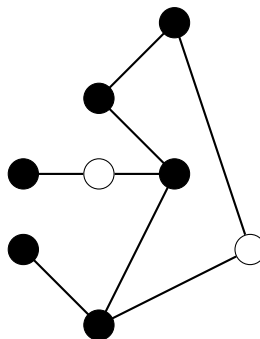


Figura 2.2: Los vértices blancos son un 2-empaque.

## 2.2. Dominación Romana

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica, una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  se dice de **dominación romana**, denotado  $f$  es una  $RDF^2$ , cuando  $f(v) = 0$  implica que hay un vértice  $u \in N(v)$  tal que  $f(u) = 2$ . Al valor de  $f(v)$  le diremos *la etiqueta de*

<sup>2</sup>por sus siglas en inglés: Roman Domination Function

$v$ .

Una RDF se puede pensar como un tipo especial de 3-coloración en el que todo vértice en la clase cromática del cero, debe ser adyacente a algún vértice en la clase cromática del dos. Denotaremos como  $V_i$  al conjunto de los vértices con etiqueta  $i$ , es decir,  $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$  y a su cardinalidad como  $n_i = |V_i|$ .

Como  $f$  es función el conjunto  $\{V_0, V_1, V_2\}$  es una partición de  $V$ , así cada RDF induce una partición de  $V$  y podemos escribir a  $f$  como  $f = (V_0, V_1, V_2)$ .

Se sigue de la definición de RDF que  $V_2 \succ V_0$  y por lo tanto  $V_1 \cup V_2$  es un conjunto dominante en  $V$ . Considerando que las RDF se pueden pensar como 3-coloraciones, para los dibujos utilizaremos vértices rellenos de negro para los de etiqueta 2, vértices con textura para los de etiqueta 1 y vértices blancos para los de etiqueta 0, como se muestra en la figura 2.3.

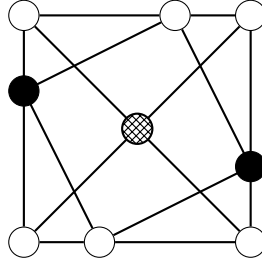


Figura 2.3: Representación gráfica de una RDF.

El peso de una RDF,  $f = (V_0, V_1, V_2)$ , es la suma de las etiquetas de los vértices:

$$f(V) = \sum_{v \in V} (v).$$

Como  $(V_0, V_1, V_2)$  es partición de  $V$ , es inmediato que  $f(V) = 2n_2 + n_1$ . El **número de dominación romana de  $G$**  es el mínimo peso de una RDF y se denota:  $\gamma_R = \min\{f(V) : f \text{ es RDF}\}$ . A una función que alcance este mínimo la llamaremos  **$\gamma_R$ -función** (análogamente que a los  $\gamma$ -conjuntos). Cuando sea claro, escribiremos  $\gamma_R$  en vez de  $\gamma_R(G)$ .

Notemos un hecho sencillo pero útil acerca de las RDF. Si  $H$  es una subgráfica generadora de  $G$  y  $f$  es RDF en  $H$ , entonces  $f$  también es RDF en  $G$  pues en



$G$  están al menos todas las adyacencias que en  $H$ . Lo anterior inmediatamente nos da el siguiente lema.

**Lema 2.2.1.** *Si  $H$  es una subgráfica generadora de  $G$ , entonces  $\gamma_R(G) \leq \gamma_R(H)$ .*

**Teorema 2.2.1.** *Para cualquier gráfica  $G$  tenemos que:*

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

*Demostración.* Sea  $S$  un  $\gamma$ -conjunto y  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función.

Como  $V_1 \cup V_2$  es conjunto dominante en  $G$  se tiene que  $\gamma \leq n_2 + n_1 \leq 2n_2 + n_1 = f(V) = \gamma_R$  con lo que tenemos la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad consideremos  $f' = (V - S, \emptyset, S)$  que es RDF pues como  $S$  es  $\gamma$ -conjunto domina a  $V - S$ . Además  $f'(V) = 2|S| = 2\gamma$  de donde se sigue que  $\gamma_R \leq f'(V) = 2\gamma$  con lo que terminamos la prueba.  $\square$

**Teorema 2.2.2.** *Si  $G$  es gráfica, entonces se cumple  $\gamma(G) = \gamma_R(G)$  si y solamente si  $G = \overline{K_n}$*

*Demostración.* Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una RDF.

Supongamos que  $\gamma = \gamma_R$ , como  $V_1 \cup V_2$  es dominante en  $G$ ,  $n_1 + n_2 \geq \gamma = \gamma_R = n_1 + 2n_2$ , i.e.,  $n_2 + n_1 \geq 2n_2 + n_1$  de donde  $n_2 = 0$  con lo que  $V_2 = \emptyset$  y así  $V_0 = \emptyset$  y por lo tanto  $\gamma = \gamma_R = n_1 = |V| = n$ ,  $\gamma = n$  y esto, como se vió en el capítulo anterior en el teorema 1.4.1 implica que  $G = \overline{K_n}$ .

Supongamos ahora que  $G = \overline{K_n}$ . Basta probar que  $n_2 = 0$ , pues esto implica que  $n_0 = 0$  lo que a su vez implica que  $n = n_1$ .

Si suponemos que  $n_2 > 0$ . Entonces hay un vértice  $v \in V$  tal que  $f(v) = 2$  pero como  $G = \overline{K_n}$   $v$  es vértice aislado, así  $f' = (V_0, V_1 \cup \{v\}, V_2 \setminus \{v\})$  es RDF, pero  $f'(V) = (2n_2 - 1) + n_1 + 1 = 2n_2 + n_1 - 1 < \gamma_R$  lo que es absurdo, de donde si  $n_2 = 0$ , entonces  $n_1 = n = \gamma_R$  y como  $G = \overline{K_n}$  implica que  $\gamma = n$  podemos concluir que  $\gamma_R = \gamma$ .  $\square$

Hemos encontrado cota superior e inferior para el número de dominación romana. La cota inferior ya se probó que es justa, pero no es interesante. La cota superior, como se probará más adelante, también es justa y las gráficas que la alcanzan son mucho más variadas que para la cota inferior, éstas gráficas tienen nombre, pero se estudiarán más adelante, al final de este capítulo. Por ahora seguiremos probando propiedades básicas sobre el número de dominación romana.

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función y sea  $H = G[V_0 \cup V_2]$ . Se cumple que:*

- (i)  $V_2$  es  $\gamma$ -conjunto en  $G[V_0 \cup V_2]$ .
- (ii)  $\Delta(G[V_1]) \leq 1$ .
- (iii) No hay aristas entre  $V_1$  y  $V_2$ .
- (iv) Si  $v \in V_0$ , entonces  $|N(v) \cap V_1| \leq 2$ .
- (v) Para todo  $v \in V_2$  se tiene que  $|pn(v, V_2)| \geq 2$ .
- (vi) Sea  $v$  es un vértice aislado en  $G[V_2]$  con exactamente un  $H$ - $pn$  externo, digamos  $w \in V_0 \Rightarrow N(w) \cap V_1 = \emptyset$ .
- (vii) Sea  $k_1$  el número de vértices no aislados en  $G[V_2]$  y sea  $C = \{v \in V_0 : |N(v) \cap V_2| \geq 2\}$  con  $|C| = c$ . Entonces  $n_0 \geq n_2 + k_1 + c$ .

*Demostración.* (i) Como  $V_2 \succ V_0$  es inmediato que  $V_2$  es  $\gamma$ -conjunto en  $G[V_0 \cup V_2]$ .

- (ii) Supongamos que  $\Delta(G[V_1]) > 1$ . Sea  $v \in G[V_1]$  con  $\delta(v) \geq 2$  así hay  $y, z \in V_1$  tales que  $(y, v, z)$  es trayectoria en  $G[V_1]$ . Consideremos  $f' = (V_0 \cup \{y, z\}, V_1 \setminus \{v, y, z\}, V_2 \cup \{v\})$ , como se aprecia en la figura 2.4 es fácil ver que es RDF y su peso  $f'(V) = f(V) - 3 + 2 = \gamma_R - 1$  lo que es absurdo, por lo tanto no hay  $v \in V_1$  tal que  $\delta_{G[V_1]}(V) \geq 2$ .

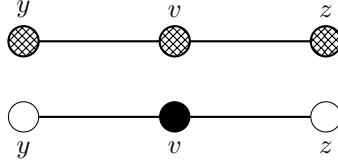


Figura 2.4: La nueva RDF tiene peso menor.

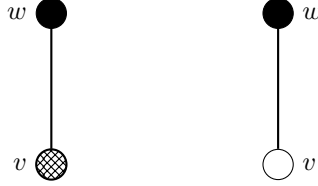
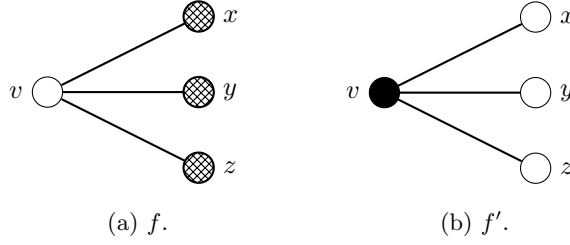


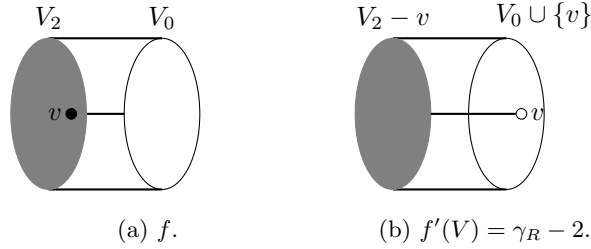
Figura 2.5: Nuevamente, la nueva RDF tiene peso menor.

- (iii) Para ver que no hay  $V_1V_2$ -aristas supongamos que existen  $v \in V_1$  y  $w \in V_2$  que cumplen  $v \text{ ady } w$ . Como se aprecia en la figura 2.5, tomando  $f' = (V_0 \cup \{v\}, V_1 \setminus \{v\}, V_2)$  tenemos una RDF con peso  $f'(V) = f(V) - 1 = \gamma_R - 1$ , una contradicción, por lo tanto  $V_1$  no-ady  $V_2$ .
- (iv) Probaremos que un vértice en  $V_0$  tiene a lo más dos vecinos con etiqueta 1. Sea  $v \in V_0$  y supongamos que  $|N(v) \cap V_1| > 2$ . Así existen  $x, y, z \in N(v) \cap V_1$  y podemos tomar la función  $f' = ((V_0 \cup \{x, y, z\}) \setminus \{v\}, V_1 \setminus \{x, y, z\}, V_2 \cup \{v\})$  que es RDF y cuyo peso es  $f'(V) = f(V) - 3 + 2 = \gamma_R - 1$  con lo que nuevamente llegamos a un absurdo. Por lo tanto  $|N(v) \cap V_1| \leq 2$ .
- (v) Sea  $v \in V_2$  y supongamos que  $|pn(v, V_2)| < 2$

**Caso 1.**  $|pn(v, V_2)| = 0$ . Así  $v$  no tiene vecinos privados respecto a  $V_2$ , incluyéndolo a él, con lo que  $v$  es dominado por alguien en  $V_2$  y todos sus vecinos en  $V_0$  son dominados por alguien más en  $V_2$ . Tomemos  $f' = (V_0 \cup \{v\}, V_1, V_2 \setminus \{v\})$  se puede ver en la figura 2.7 que es RDF con peso  $f'(V) = f(V) - 2 = \gamma_R - 2$  con lo que tenemos

Figura 2.6:  $f'$  tiene peso menor a  $f$ .

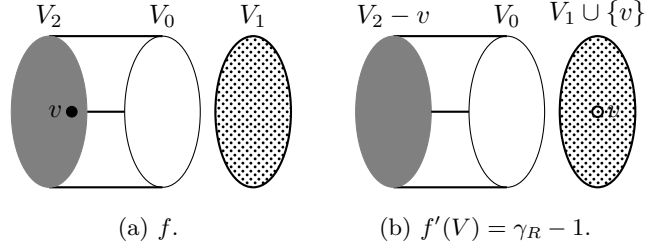
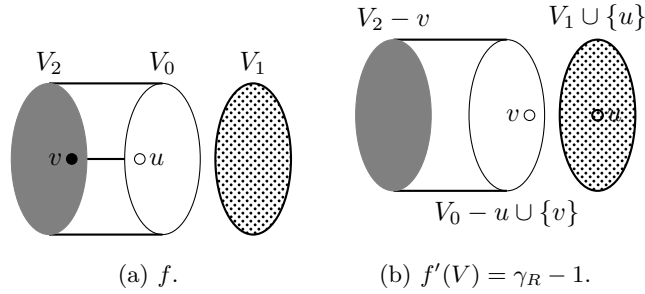
una contradicción, por lo tanto  $|pn(v, V_2)| \neq 0$ .

Figura 2.7:  $f'$  tiene peso menor a  $f$ .

**Caso 2.**  $|pn(v, V_2)| = 1$ . Es decir,  $v$  sólo tiene un vecino privado, digamos  $u \in V$ . Por el inciso (iii) sabemos que  $u \notin V_1$  así tenemos dos subcasos:

**subcaso 1.** Si  $u \in V_2$ , entonces  $u = v$ ,  $v$  es su propio vecino privado, y es único, así  $f' = (V_0, V_1 \cup \{v\}, V_2 \setminus \{v\})$  es RDF con peso  $f'(V) = f(V) - 1 = \gamma_R - 1$ , de donde este subcaso no es posible.

**subcaso 2.**  $u \in V_0$  y  $u$  es el único vecino privado de  $v$ , entonces  $v$  no es vecino privado de él mismo, por lo que algún vértice en  $V_2$  lo domina, y  $f' = ((V_0 \cup \{v\}) \setminus \{u\}, V_1 \cup \{u\}, V_2 \setminus \{v\})$  es RDF con peso  $f'(V) = f(V) - 2 + 1 = \gamma_R - 1$ , por lo tanto este subcaso tampoco es posible.

Figura 2.8:  $f'$  tiene peso menor a  $f$ .Figura 2.9:  $f'$  tiene peso menor a  $f$ .

Como ambos subcasos nos llevan a contradicciones tenemos que  $|pn(v, V_2)| \geq 2$  como se quería.

Nota: Como no hay  $V_0V_2$ -aristas, los vecinos privados de los vértices con etiqueta 2 (respecto a  $V_2$ ) sólo pueden ser ellos mismos o vértices en  $V_0$ , así como cada vértice en  $V_2$  tiene por lo menos dos vecinos privados hay tantos vértices en  $V_0$  como en  $V_2$ ; este resultado se mejora en el inciso (vii).

- (vi) Sea  $v$  vértice aislado en  $G[V_2]$  con exactamente un H-pn externo,  $w \in V_0$ , supongamos que  $N(w) \cap V_1 \neq \emptyset$ , sea  $S = N(w) \cap V_1$  y consideremos la función  $f' = (V_0 \cup \{v\} \cup S - \{w\}, V_1 \setminus S, V_2 \setminus \{v\} \cup \{w\})$ . Como se aprecia en la figura 2.10 es inmediato que  $f'$  es RDF con peso  $f'(V) = f(V) - 2 + 1 - |S| = \gamma_R - 1 - |S|$  lo que es una contradicción, por lo tanto  $N(w) \cap V_1 = \emptyset$ .
- (vii) Sea  $k_0$  la cantidad de vértices aislados en  $G[V_2]$ , entonces  $k_0 + k_1 = n_2$ .

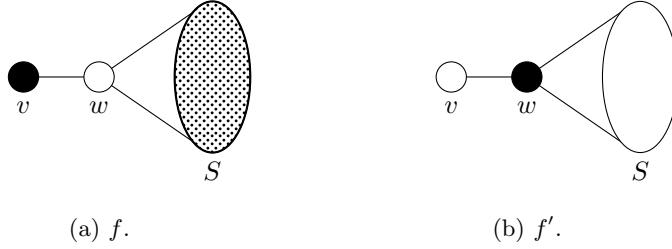


Figura 2.10:  $f'$  tiene peso  $f'(V) = \gamma_R - 1 - |S|$ .

Por otra parte, por (v) tenemos que los vértices aislados en  $G[V_2]$ , es decir,  $k_0$  tienen dos vecinos privados, ellos mismos y uno en  $V_0$ , los vértices no aislados en  $G[V_2]$ ,  $k_1$ , tienen dos vecinos privados que no son ellos mismos, por lo tanto sus dos vecinos privados deben estar en  $V_0$  y  $C$  son los vértices en  $V_0$  que no son vecinos privados de nadie en  $V_2$  de donde  $n_0 \geq k_0 + 2k_1 + c$ , pero  $k_0 + 2k_1 + c = n_2 + k_1 + c$ , por lo tanto  $n_0 \geq n_2 + k_1 + c$  como queríamos.

□

Adicionalmente a las hipótesis del teorema anterior, para el siguiente teorema se pide que  $G$  no tenga vértices aislados y que  $n_1$  sea mínimo. Nótese que siempre podemos pedir una  $\gamma_R$ -función con  $n_1$  mínimo.

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $G$  gráfica sin vértices aislados,  $H = G[V_0 \cup V_2]$  y  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función con  $n_1$  mínimo. Entonces se cumplen:*

- (i)  $V_1$  es independiente y  $V_0 \cup V_2$  es una cobertura por vértices.
- (ii)  $V_0 \succ V_1$ .
- (iii)  $v \in V_0$  es adyacente a lo más un vértice en  $V_1$ , así  $V_1$  es un 2-empaque.
- (iv) Si  $v \in G[V_2]$  tiene exactamente dos  $H$ -pn's externos, digamos  $w_1, w_2$ , entonces no existen vértices  $y_1, y_2 \in V_1$  tal que  $(y_1, w_1, v, w_2, y_2)$  es trayectoria en  $G$ .
- (v)  $n_0 \geq \frac{3n}{7}$  y esta cota es justa.

- Demostración.* (i) Supongamos que existen  $u, v \in V_1$  adyacentes, así tomando  $f' = (V_0 \cup \{u\}, V_1 - \{u, v\}, V_2 \cup \{v\})$  tenemos una RDF con el mismo peso, pero con  $n_1$  más pequeño, lo que es una contradicción.
- (ii) Tomemos  $v \in V_1$ , como  $v$  no es aislado debe tener un vecino, digamos  $u$ . Sabemos que  $u \notin V_2$  y por el inciso anterior  $u \notin V_1$  así  $u$  debe estar en  $V_0$ .
- (iii) Si  $v \in V_0$  es adyacente a más de un vértice de  $V_1$ , digamos a  $z, w \in V_1$ , entonces  $f' = ((V_0 \cup \{z, w\}) \setminus \{v\}, V_1 \setminus \{z, w\}, V_2 \cup \{v\})$  es una RDF con el mismo peso pero con  $n'_1$  más pequeño como se ve en la figura 2.11. Por otra parte  $V_1$  es independiente, cada vértice en  $V_1$  es adyacente a lo más a un vértice en  $V_0$  y no es adyacente a ningún vértice en  $V_2$ , así  $V_1$  es un 2-empaque.

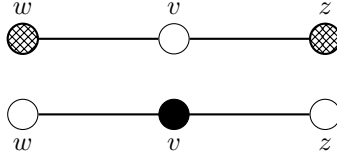


Figura 2.11: La nueva RDF tiene  $n_1$  menor, lo que es una contradicción.

- (iv) Si suponemos lo contrario,  $f' = (V_0 \cup \{v, y_1\} - \{w_2\}, V_1 - \{y_1, y_2\}, V_2 \cup \{w_2, y_1\} - \{v\})$  es también  $\gamma_R$ -función, pero  $n'_1$  es más pequeño, lo que no puede ser.
- (v) Finalmente como en el inciso (vii) del teorema 2.2.3, tomemos  $C = \{v \in V_0 : |N(v) \cap V_2| \geq 2\}$ ,  $|C| = c$ . Sean  $a_1, a_2, \dots, a_{\Delta(G)}$  el número de vértices en  $V_2$  que tienen  $1, 2, \dots, \Delta(G)$  vecinos privados en  $V_0$  respectivamente. Observemos primero que:

$$n_0 = \sum_{j=1}^{\Delta(G)} j a_j + c = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} j a_j + c \quad (2.1)$$

Ya que  $C$  son los vértices en  $V_0$  que no son vecinos privados de ningún vértice en  $V_2$ .

$$n_2 = \sum_{j=1}^{\Delta(G)} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} a_j \quad (2.2)$$

Pues por el inciso (v) del teorema 2.2.3 todos los vértices de  $V_2$  tienen al menos un vecino privado en  $V_0$ .

Finalmente tenemos la siguiente desigualdad

$$n_1 \leq a_2 + 3a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} ja_j + c \quad (2.3)$$

Esta desigualdad se da puesto que por el inciso (vi) del teorema 2.2.3 los  $a_1$  vértices en  $V_0$  con sólo un vecino privado en  $V_2$  no son adyacentes a vértices de  $V_1$ , además cada vértice en  $V_2$  con dos vecinos privados (ambos «contados» en  $a_2$ ) puede inducir a lo más a un vértice en  $V_1$  por el inciso anterior. Como la gráfica no tiene vértices aislados, se sigue la desigualdad.

Entonces:

$$\begin{aligned} n &= n_2 + n_1 + n_0 \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} a_j) + (a_2 + 3a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} ja_j + c) + n_0 \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} (j+1)a_j + c + n_0 \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \sum_{j=4}^{\Delta(G)} (j+1)a_j + c + n_0 + \frac{4}{3}(n_0 - a_1 - 2a_2 - \sum_{j=4}^{\Delta(G)} ja_j - c) \\ &= \frac{7}{3}n_0 - \frac{1}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 - \sum_{j=4}^{\Delta(G)} \left(\frac{j+3}{3}\right)a_j - \frac{c}{3} \\ &\leq \frac{7}{3}n_0. \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad se sustituyó por  $a_3$  de la ecuación 2.3, para la última obsérvese que todos los términos que se restan son no negativos.

La cota es justa como se ilustra en la siguiente gráfica:

□

El teorema siguiente tiene una primer caracterización para el número de dominación romana en gráficas conexas.



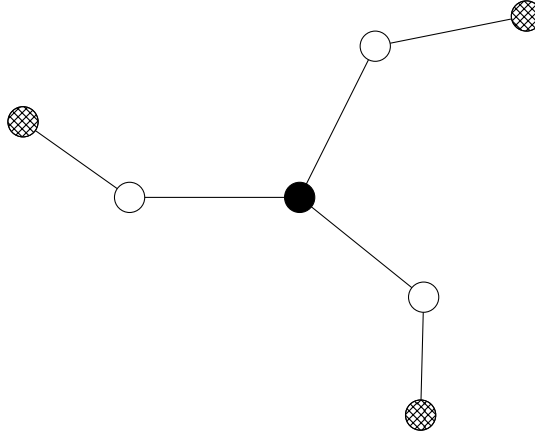


Figura 2.12: En la gráfica se cumple que  $n_0 = \frac{3n}{7}$ .

**Teorema 2.2.5.** *Para cualquier gráfica conexa,  $G \neq K_1$ , se tiene que:*

$$\gamma_R(G) = \min\{2\gamma(G - S) + |S| : S \text{ es un 2-empaque}\}$$

*Demostración.* Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función de  $G$ . Por el tercer inciso del teorema 2.2.4 tenemos que  $V_1$  es un 2-empaque. Además sabemos que  $V_2$  es dominante en  $G - V_1$ , de donde  $\gamma_R = 2n_2 + n_1 \geq 2\gamma(G - V_1) + |V_1| \geq \min\{2\gamma(G - S) + |S| : S \text{ es un 2-empaque}\}$ .

Por otra parte definiremos una nueva RDF,  $f' = (V'_0, V'_1, V'_2)$ , como sigue: tomemos como  $V'_1$  a un 2-empaque para el que  $2\gamma(G - V'_1) + |V'_1|$  es mínimo y  $V'_2$  un  $\gamma$ -conjunto de  $V - V'_1$ , así  $(V - (V'_1 \cup V'_2), V'_1, V'_2)$  es RDF y por lo tanto  $\gamma_R(G) \leq 2n'_2 + n'_1 = \min\{2\gamma(G - S) + |S| : S \text{ es un 2-empaque}\}$ .  $\square$

A pesar de que el teorema anterior nos provee de una primer caracterización para  $\gamma_R$ , buscar entre *todos* los 2-empaques de una gráfica  $G$  no es sencillo, más adelante veremos un poco más sobre la dificultad de encontrar  $\gamma_R$ .

Concluiremos con un par de cotas para  $\gamma_R$ . La demostración de la primer cota utiliza algunas nociones básicas de la probabilidad.

**Teorema 2.2.6.** *Para toda gráfica  $G$  de orden  $n$  y grado mínimo  $\delta$  se cumple:*

$$\gamma_R \leq \frac{1 + \ln\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{1 + \delta}$$

*Demostración.* Sea  $p \in [0, 1]$  la probabilidad de elegir un vértice de  $G$  y sea  $V_2$  el conjunto de los vértices seleccionados. La cardinalidad esperada de  $V_2$  es  $np$ . Ahora tomemos  $V_1 = V - N[V_2]$ , los vértices no dominados por  $V_2$ ,  $f = (V - (V_1 \cup V_2), V_1, V_2)$  es RDF ya que, por construcción de  $V_1$ , tenemos que  $V - (V_1 \cup V_2)$  es dominado por  $V_2$ .

Calcularemos el tamaño esperado de  $V_1$ . Sabemos que  $\mathbb{P}[v \in V_1] = \mathbb{P}[v \in V - N[V_2]] = \mathbb{P}[v \notin N[V_2]] = \mathbb{P}[N[v] \cap V_2 = \emptyset]$  pues  $v \in V_1$  cuando ni él, ni sus vecinos están en  $V_2$ . Como la probabilidad de que un vértice *no* esté en  $V_2$  es  $1 - p$  tenemos que  $\mathbb{P}[v \in V_1] = (1 - p)^{1+\delta(v)}$  pues es la probabilidad de que los  $\delta(v) + 1$  vértices en  $N[v]$  no estén en  $V_2$ . Por un resultado de cálculo sabemos que si  $x \geq 0$ , entonces  $e^{-x} \geq 1 - x$ ; por otra parte, como  $\delta(v) \geq \delta(G)$ , y usando ambas desigualdades, tenemos que  $\mathbb{P}[v \in V_1] \leq e^{-p(1+\delta(G))}$ ; de donde la cardinalidad esperada de  $V_1$  no puede exceder  $ne^{-p(1+\delta(G))}$ , por lo tanto, el peso esperado de  $f$  es a lo más  $2np + ne^{-p(1+\delta(G))}$ . Concluimos diciendo que tal función alcanza su mínimo para  $p$  cuando  $p = \ln \frac{(1+\delta)}{1+\delta}$ . Así sustituyendo tenemos que el peso esperado de la función es:

$$\gamma_R \leq E[f(V)] \leq 2n \frac{1 + \ln(\frac{1+\delta}{2})}{1+\delta}.$$

Tenemos ya el peso esperado de  $f$  sólo falta ver que hay gráficas que lo alcanzan, y así es, cuando  $G$  es la unión disjunta de  $\frac{n}{2}$  copias de  $K_2$ .  $\square$

Ahora una cota inferior probada en [2]:

**Teorema 2.2.7.** *Para toda gráfica  $G$  con grado máximo  $\Delta \geq 1$  se cumple que:*

$$\frac{2n}{\Delta+1} \leq \gamma_R$$

*Demostración.* Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función. Recordemos que  $\gamma_R = 2n_2 + n_1$ , así:

$$\begin{aligned} (\Delta + 1)\gamma_R &= (\Delta + 1)n_1 + (\Delta + 1)2n_2 \\ &= (\Delta + 1)n_1 + \Delta 2n_2 + 2n_2 \end{aligned}$$

Pero como cada vértice en  $V_0$  es adyacente a algún vértice en  $V_2$  tenemos que  $n_0 \leq \Delta n_2$ , de donde:

$$\begin{aligned} (\Delta + 1)\gamma_R &= (\Delta + 1)n_1 + \Delta 2n_2 + 2n_2 \\ &\geq (\Delta + 1)n_1 + 2n_0 + 2n_2 \\ &\geq 2n_1 + 2n_0 + 2n_2 \\ &= 2n. \end{aligned}$$

De donde se sigue que:

$$\frac{2n}{\Delta+1} \leq \gamma_R$$

□

La cota presentada arriba es justa para  $C_3$  (de hecho, lo es para todos los ciclos de la forma  $C_{3n}$  como se verá más adelante en la última sección del presente capítulo).

### 2.3. Otra caracterización para $\gamma_R$

El teorema 2.2.5 nos dió una primer caracterización para  $\gamma_R$  en cualquier gráfica, sin embargo, buscar *todos* los 2-empaques de una gráfica no es un problema sencillo, en esta sección veremos otra caracterización para  $\gamma_R$  en cualquier gráfica.

Por el teorema 2.2.1 sabemos que el número de dominación romana está acotado entre el número de dominación y dos veces el mismo. En esta sección estudiaremos las gráficas que cumplen  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$ ,  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2$  y concluiremos con una caracterización general para las gráficas con  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + k$  con  $1 \leq k \leq \gamma$ .

**Teorema 2.3.1.** *Si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $n$ , entonces  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$  si y solamente si hay un vértice de grado  $n - \gamma(G)$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$ . Notemos que ésto sólo puede pasar cuando  $n_1 = \gamma(G) - 1$  y  $n_2 = 1$  o cuando  $n_1 = \gamma(G) + 1$  y  $n_2 = 0$  ya que de cualquier otro modo  $n_1 + n_2 < \gamma(G)$  y sabemos que  $V_1 \cup V_2$  es dominante en  $G$ , de donde  $\gamma(G) \leq n_1 + n_2$ .

**Caso 1.** Si  $n_1 = \gamma(G) - 1$  y  $n_2 = 1$  sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  con  $V_2 = \{v\}$  como  $V_2$  domina a  $V_0$  y no hay  $V_1V_2$ -aristas,  $\delta(v) = n_0 = n - n_1 - n_2 = n - \gamma(G)$ .

**Caso 2.** Si  $n_1 = \gamma(G) + 1$  y  $n_2 = 0$ , entonces  $n_0 = 0$  pues si no hay vértices con etiqueta dos, no puede haber vértices con etiqueta cero y por lo tanto  $n = n_1$ . Por el teorema de Ore sabemos que en cualquier gráfica sin vértices aislados  $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$ . Así  $n = \gamma(G) + 1 \leq \frac{n}{2} + 1$ , resolviendo,  $n \leq 2$ , así  $G$  es  $K_2$  y el teorema se cumple.

Para el regreso sea  $v \in V$  con grado  $\delta(v) = n - \gamma$ . Definimos la función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  de la siguiente forma:  $V_2 = \{v\}$ ,  $V_1 = V - N[v]$  y  $V_0 = V - (V_1 \cup V_2)$ , entonces  $f$  es RDF y  $V_1 \cup V_2$  es dominante en  $G$ , más aún, es  $\gamma$ -conjunto pues  $\delta(v) = n - \gamma$ , y así el peso  $f(V) = \gamma - 1 + 2 = \gamma + 1$  pero sabemos que para gráficas conexas  $\gamma_R \geq \gamma + 1$  de donde  $f$  es  $\gamma_R$ -función.

□

El siguiente teorema de [] caracteriza a los árboles  $T$  que cumplen que  $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 1$ , para lo cual necesitaremos un par de nuevas definiciones.

Una **araña sana** es la gráfica que resulta de subdividir una vez todas las aristas de una estrella  $K_{1,p}$ , mientras que una **araña herida** es la gráfica que resulta de subdividir a lo más  $p - 1$  aristas de  $K_{1,p}$  (por lo menos una arista no debe ser subdividida).

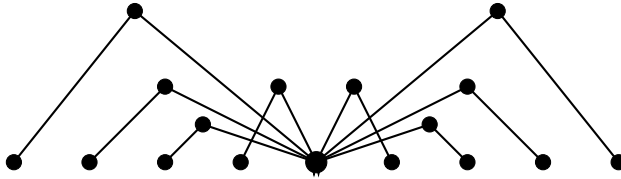


Figura 2.13: Araña sana.

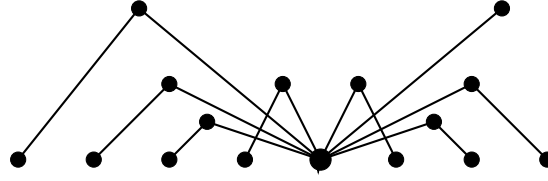


Figura 2.14: Araña herida.

En ambos casos al vértice de grado  $p$  le llamaremos *cabeza* y a los vértices no adyacentes a la cabeza les llamaremos *patas*. Para los únicos dos casos en los que no está bien definido qué vértices son patas y cabeza,  $P_2$  y  $P_4$  consideraremos que en  $P_2$  ambos vértices son cabezas y en  $P_4$  los vértices terminales serán ambos patas y los vértices de grado 2 serán ambos cabezas.

**Teorema 2.3.2.** *Si  $T$  es un árbol no trivial, entonces  $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 1$  si y solamente si  $T$  es una araña herida.*

*Demostración.* Supongamos que  $\gamma_R = \gamma + 1$  y tomemos una  $\gamma_R$ -función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  de  $T$  con  $n_1$  mínimo. Como se vió en la demostración del teorema 2.3.1,  $T$  es  $P_2$  o  $n_1 = \gamma(T) - 1$  y  $n_2 = 1$ . En el primer caso  $P_2$  es una araña herida y ya terminamos. En el segundo sea  $V_2 = \{v\}$ , entonces  $N(v) = V_0$  y por el teorema 2.3.1  $n_0 = n - \gamma(T)$ . Por el teorema 2.2.4(iii) sabemos que un vértice en  $V_0$  es adyacente a lo más a un vértice en  $V_1$ , por el mismo teorema sabemos que  $V_1$  es un conjunto independiente (es un 2-empaque). Como  $T$  es conexa,  $V_1$  es independiente y no hay  $V_1V_2$ -aristas, cada vértice en  $V_1$  es adyacente a un vértice en  $V_0$  como en la figura ???. Esta estructura sólo puede ser una araña,  $v$  la cabeza,  $V_1$  las patas y  $V_0$  los vértices intermedios. Por otra parte, debe haber un vértice en  $V_0$  que no es adyacente a ninguno en  $V_1$  (es decir,  $T$  no es una araña sana) pues de lo contrario  $V_0$  sería un  $\gamma$ -conjunto y tendríamos que  $n_0 = n_1$ ,  $n_2 = 1$  y así  $\delta(v) = n_0 < n_0 + 1 = n_1 + n_2 = n_0 + n_1 + n_2 - n_0 = n - \gamma(T)$  lo que contradice la hipótesis inicial de que  $\delta(v) = n - \gamma(T)$ . Así  $T$  es una araña herida.

Para la otra implicación. Sea  $T$  una araña herida,  $v$  el vértice cabeza y  $S$  el conjunto de los vértices no adyacentes a  $v$  (las patas), es inmediato que  $S \cup \{v\}$

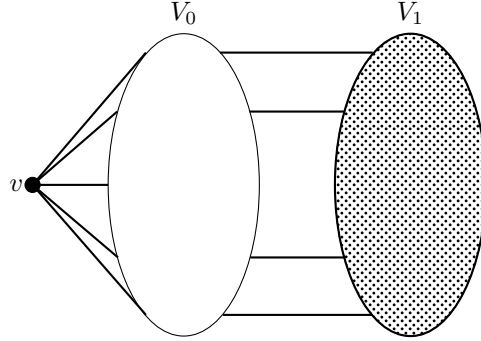


Figura 2.15:  $T$ .  $V_1$  es un 2-empaquetamiento y los vértices de  $V_0$  son adyacentes a  $v$  y a lo más a un vértice de  $V_1$ .

es  $\gamma$ -conjunto de  $T$ . Definiendo  $V_0 = V \setminus (S \cup \{v\})$ ,  $V_1 = S$  y  $V_2 = \{v\}$ , tenemos que  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es RDF con peso  $\gamma(T) + 1$ , de donde  $f$  es  $\gamma_R$ -función.

□

Ahora caracterizaremos las gráficas conexas con  $\gamma_R = \gamma + 2$ .

**Teorema 2.3.3.** *Si  $G$  es una gráfica conexas de orden  $n$ , entonces  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2$  si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones:*

- a)  $G$  no tiene un vértice de grado  $n - \gamma(G)$ .
- b)  $G$  tiene un vértice de grado  $n - \gamma(G) - 1$  o bien hay dos vértices  $u, v$  tales que  $|N[u] \cup N[v]| = n - \gamma(G) + 2$ .

*Demostración.* Supongamos primero que  $\gamma_R = \gamma + 2$ , por el teorema 2.3.1 tenemos que no hay vértices de grado  $n - \gamma$ , con lo que se verifica la primera condición. Por otra, sabemos que  $V_2 \cup V_1$  es dominante en  $G$ , de donde  $n_2 + n_1 \geq \gamma$ . Como  $\gamma_R = 2n_2 + n_1$ , tenemos que  $2n_2 + n_1 = \gamma$ , entonces  $\gamma + n_2 \leq \gamma + 2$  de donde  $n_2 \leq 2$ . Así  $\gamma_R = \gamma + 2$  es posible sólo en los tres casos siguientes: si  $n_1 = \gamma(G) + 2$  y  $n_2 = 0$ , si  $n_1 = \gamma(G)$  y  $n_2 = 1$  o si  $n_1 = \gamma(G) - 2$  y  $n_2 = 2$ .

**Caso 1.** *Para el primer caso tenemos que, como  $n_2 = 0$ , entonces  $V_1 = V$  e igual que en el caso 2 del teorema 2.3.1  $n = \gamma(G) + 2 \leq \frac{n}{2} + 2$  de donde  $n \leq 4$ .*

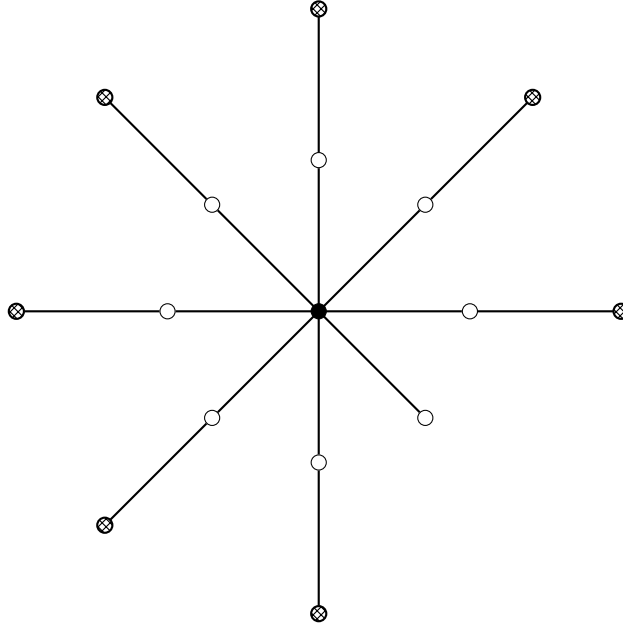


Figura 2.16: RDF de una araña herida.

Todas las gráficas con a lo más 4 vértices cumplen que  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$  y no cumple nuestra hipótesis.

**Caso 2.** Para este caso sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función con peso  $\gamma(G) + 2$  con  $n_1 = \gamma(G)$  y  $V_2 = \{v\}$ . Como no hay vértices entre  $V_1$  y  $v$  y  $v \succ V_0$ , se sigue que  $\delta(v) = n_0 = n - n_1 - n_2 = n - \gamma(G) - 1$ .

**Caso 3.** Finalmente, sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$  función con peso  $\gamma(G) + 2$  con  $n_1 = \gamma(G) - 2$  y  $n_2 = 2$ . Sea  $V_2 = \{u, v\}$ . Nuevamente, como no hay aristas entre  $V_1$  y  $V_2$  y  $V_2 \succ V_0$ , se sigue que  $|N[u] \cup N[v]| = n - n_1 = n - (\gamma(G) - 2) = n - \gamma(G) + 2$ .

Para la otra implicación, por a) sabemos que  $\gamma_R(G) > \gamma(G) + 1$ . Si hay un vértice  $v$  de grado  $n - \gamma(G) - 1$ , definimos  $V_0 = N(v)$ ,  $V_1 = V - N[v]$  y  $V_2 = \{v\}$ , así  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es RDF con peso  $f(V) = \gamma(G) + 2$ , por lo que es una  $\gamma_R$ -función. Por otra parte si hay dos vértices  $u, v$  tales que  $|N[u] \cup N[v]| = n - \gamma(G) + 2$ , definimos  $V_0 = N[u] \cup N[v] - \{u, v\}$ ,  $V_1 = V - (N[u] \cup N[v])$  y

$V_2 = \{u, v\}$ , así  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es una RDF con peso  $f(V) = \gamma(G) + 2$ , y por lo tanto es una  $\gamma_R$ -función.  $\square$

La siguiente caracterización para los árboles  $T$  que cumplen  $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 2$  se puede encontrar en [4].

**Teorema 2.3.4.** *Si  $T$  es un árbol de orden  $n \geq 2$ , entonces  $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 2$  si y sólo si  $T$  es una araña sana o  $T$  es una pareja de arañas heridas  $T_1, T_2$  con una arista  $(u, v)$  que las une, con  $u \in V(T_1), v \in V(T_2)$  que cumple:*

- (1) *si alguno de los árboles es  $P_2$ , entonces no están unidas por la cabeza,*
- (2)  *$u, v$  no son ambos vértices patas.*

Finalmente es natural preguntarse si hay una caracterización en general para las gráficas respecto al número de dominación, en [6] Xing, Chen y Chen probaron la siguiente caracterización.

**Teorema 2.3.5.** *Si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $n$ ,  $\gamma(G) \geq 2$  y  $k$  es un entero,  $2 \leq k \leq \gamma(G)$ , entonces  $\gamma_R(G) = \gamma(G) + k$  si y sólo si:*

- (a) *para cualquier entero  $s$  con  $1 \leq s \leq k - 1$ ,  $G$  no tiene un conjunto  $U_t$  de  $t$  vértices ( $1 \leq t \leq s$ ) tal que  $|\bigcup_{v \in U_t} N[v]| = n - \gamma(G) - s + 2t$ ,*
- (b) *hay un entero  $l$ ,  $1 \leq l \leq k$ , tal que hay un conjunto de  $l$  vértices  $W_l$  tal que  $|\bigcup_{v \in W_l} N[v]| = n - \gamma(G) - k + 2l$ .*

## 2.4. Valores de $\gamma_R$ para algunas gráficas.

Hasta ahora hemos calculado cotas para  $\gamma_R$  y sólo conocemos  $\gamma_R$  para la gráfica vacía. En esta sección calcularemos  $\gamma_R$  para algunas familias de gráficas.

**Lema 2.4.1.** *Sea  $G$  es una gráfica conexa no trivial de orden  $n$ , son equivalentes:*

- (i)  $\gamma = 1$



(ii)  $\gamma_R = 2$

(iii) hay un vértice de grado  $\delta(v) = n - 1$

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $\gamma = 1$ , significa que hay un vértice  $v$  que domina a todos los demás vértices. Así la función  $f = (\emptyset, \emptyset, \{v\})$  es una RDF con peso  $f(V) = 2$ , con lo que es una  $\gamma_R$ -función.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Si  $\gamma_R = 2$  hay dos vértices con etiqueta 1 o uno con etiqueta 2, si es el primer caso, la gráfica debe ser  $K_2$  y se cumple (iii), en el segundo caso, el vértice con etiqueta 2 debe ser adyacente al resto de vértices de la gráfica, con lo que también se cumple (iii). Finalmente para (iii)  $\Rightarrow$  (i) si hay un vértice adyacente a todos los demás, dicho vértice es un conjunto dominante y se cumple (i). □

Para los ciclos y las trayectorias se tiene calculado  $\gamma_R$ .

**Teorema 2.4.1.** *Para la familia de ciclos  $C_n$  y de las trayectorias  $P_n$  el número de dominación romana es:*

$$\gamma_R(C_n) = \gamma_R(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$$

*Demostración.* Para probar que  $\gamma_R(P_n) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$  construiremos una RDF con peso  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$  como se ilustra en la imagen 2.17.  $V_2 = \{v_2, v_5, \dots, v_{3k+2}\}$ ,  $V_1 = \{v_n\}$  si  $n$  es de la forma  $3j + 1$  o  $V_1 = \emptyset$  en otro caso y el resto de los vértices estarán en  $V_0$ . Para la otra desigualdad sean  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  vértices consecutivos en la trayectoria y  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una RDF cualquiera. Si en el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  cualesquiera dos tienen etiqueta 0, el otro necesariamente tiene etiqueta 2 o sus etiquetas son 0, 1, 0 respectivamente, así  $f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) \geq 2$  o  $v_1, v_3 \in V_0$  y  $v_2 \in V_1$ , pero en este caso necesariamente  $v_0, v_4 \in V_2$  y entonces  $f(v_0) + f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + f(v_4) \geq 5$  de donde  $f(V) \geq \frac{2n}{3}$  y por lo tanto  $f(V) \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$  pues  $f(V)$  es un entero. Para  $C_n$  sirve la misma función. □

Para las multipartitas completas:

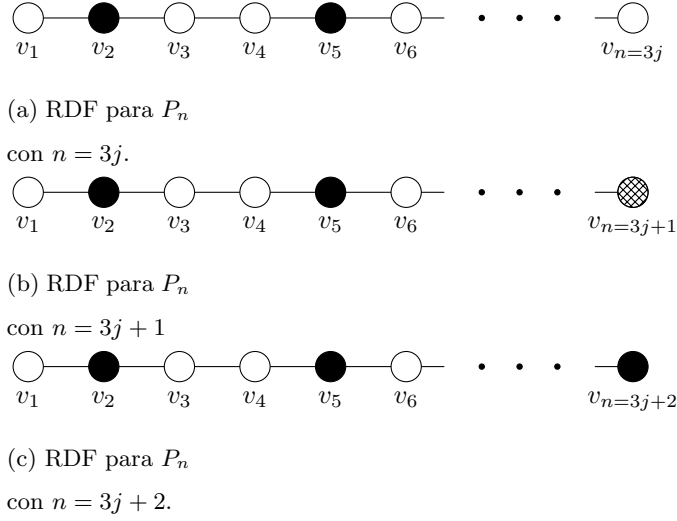


Figura 2.17: RDF para  $P_n$ .

**Teorema 2.4.2.** Si  $G = K_{k_1, k_2, \dots, k_j}$  con  $m_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_j$  y  $A_i$  la partición con cardinalidad  $k_i$ , entonces  $\gamma_R(G) = 2$  si  $k_1 = 1$ ,  $\gamma_R(G) = 3$  si  $k_1 = 2$  y  $\gamma_R(G) = 4$  en otro caso.

*Demostración.* Para el caso en el que  $k_1 = 1$  tenemos que ese vértice es adyacente a todos los demás, por lo que por el lema 2.4.1  $\gamma_R = 2$ . Cuando  $k_1 = 2$  sabemos que  $\gamma_R \geq 3$  pues no hay un vértice adyacente a todos. Digamos que  $A_1 = \{u, v\}$  y tomemos la función  $f = (V \setminus A_1, \{u\}, \{v\})$ , como  $v$  domina a todos los vértices de  $G$  excepto a  $u$   $f$  es RDF con peso  $f(V) = 3$ . Finalmente, cuando  $k_1 \geq 3$  tomamos  $u \in A_1$ ,  $v \in A_2$  y la función  $f = (V \setminus \{u, v\}, \emptyset, \{u, v\})$  es RDF pues  $v$  domina a  $V \setminus A_2$ , pero  $u$  domina a  $A_2$  y  $f(V) = 4$ ;  $\gamma_R \neq 3$  ya que en  $A_1$  hay más de 2 vértices, entonces necesitamos alguien «fuera» que los domine.  $\square$

**Teorema 2.4.3.** Si  $G$  es de orden  $n$  y no tiene vértices aislados, entonces  $\gamma_R(G) = n$  si y solamente si  $n$  es par y  $G$  son  $\frac{n}{2}$  copias de  $K_2$

*Demostración.* Para la implicación de regreso notemos que cada arista de  $G$  suma 2 para  $\gamma_R$ , de donde  $n \leq \gamma_R \leq n$ . Para la otra implicación supongamos

que  $\gamma_R(G) = n$  y que  $G$  tiene un vértice  $v$  tal que  $\delta(v) \geq 2$ , así  $v$  es adyacente a  $u, w \in V$  con  $u \neq w$ , construiremos ahora una función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  con  $V_0 = \{u, w\}, V_1 = V \setminus \{u, v, w\}, V_2 = \{v\}$ , es inmediato que es RDF y tiene peso  $f(V) = n - 3 + 2 = n - 1$  lo que contradice que  $\gamma_R = n$ .  $\square$

Ahora una cota para la  $(j, k)$ -retícula.

**Teorema 2.4.4.** *Para la  $(j, k)$ -retícula tenemos que  $\gamma_R(P_j \square P_k) \leq 2\left(\left\lceil \frac{jk}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{j}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{5} \right\rceil\right)$ .*

*Demostración.* Construiremos una función  $f$  y probaremos que es RDF en  $P_j \square P_k$  con peso a lo más  $\left\lceil \frac{jk}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{j}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{5} \right\rceil$ . Nombraremos a los vértices de  $G$  como sigue:  $V = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}, v_{2,1}, \dots, v_{2,k}, \dots, v_{j,1}, \dots, v_{j,k}\}$  y etiquetaremos de la siguiente forma: tomando los subíndices  $\text{mod}(5)$  tendremos  $f(v_{1+5h,1+5i}) = f(v_{2+5h,3+5i}) = f(v_{3+5h,5+5i}) = f(v_{4+5h,2+5i}) = f(v_{5+5h,4+5i}) = 2$  y etiqueta 0 para los demás vértices.

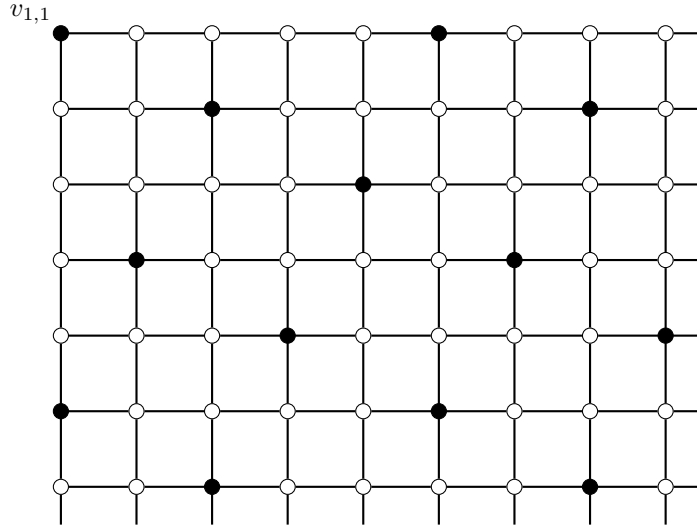


Figura 2.18: RDF para la  $(j, k)$ -retícula

$\square$

**Teorema 2.4.5.** *Para la  $(2, k)$ -retícula se tiene que  $\gamma_R(P_2 \square P_k) = k + 1$*

*Demostración.* Nombraremos al conjunto de vértices  $V = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,k}\}$ . Para la desigualdad  $k + 1 \leq \gamma_R(P_2 \square P_k)$ , notemos que si  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es RDF, un vértice en  $V_2$  puede dominar máximo a 4 vértices (él mismo y 3 vecinos) de donde  $4n_2 + n_1 \geq 2k$ . Así  $f(V) = 2n_2 + n_1 \geq 2n_2 + \frac{n_1}{2} \geq k$  y  $f$  puede alcanzar peso  $k$  únicamente cuando cada vértice en  $V_2$  es adyacente a 4 vértices únicos (ningún otro vértice en  $V_2$  es adyacente a ellos, es decir,  $V_2$  es un 2-empaque) y  $V_1 = \emptyset$ . Probaremos que tales condiciones no se pueden satisfacer simultáneamente. Supongamos que  $V_1 = \emptyset$  y consideremos dos vértices en esquinas adyacentes  $v_{1,1}$  y  $v_{2,1}$ . Como sólo defienden a 3 vértices cada uno, no pueden estar en  $V_2$ , pero para dominarlos hay que incluir a los dos vértices adyacentes a ellos,  $v_{2,1}$  y  $v_{2,2}$ . Con lo que no se cumple que  $V_2$  es un 2-empaque.

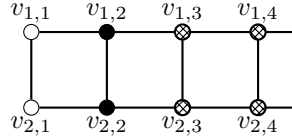


Figura 2.19: Necesariamente  $v_{1,2}$  y  $v_{2,2}$  deben estar en  $V_2$ , así  $V_2$  no puede ser un 2-empaque

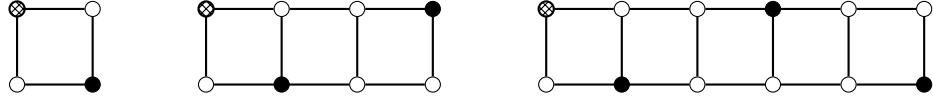
Para la otra desigualdad exhibiremos una RDF con peso  $k+1$ .  $V_2 = \{v_{2,2+4q}, v_{4+4p}\}$ ,  $V_1 = \{v_{1,1}, v_{1,k}\}$  si  $k$  es de la forma  $4s + 3$ ,  $V_1 = \{v_{1,1}, v_{2,k}\}$  si  $k$  es de la forma  $4s + 1$  y  $V_1 = \{v_{1,1}\}$  en otro caso como y  $V_0$  el resto de los vértices como se muestra en las figuras 2.20 y 2.21.



Figura 2.20: RDF's con  $k$  impar

□

Las siguientes igualdades se probaron en [4] donde además se propuso un algoritmo para calcular  $\gamma_R(P_j \square P_k)$  con  $k$  fijo en tiempo  $O(j)$ .

Figura 2.21: RDF's con  $k$  par

$$\gamma_R(P_j \square P_3) = \begin{cases} 6j + 1; & \text{para } j \text{ de la forma } 4k \\ 6j + 2; & \text{para } j \text{ de la forma } 4k + 1 \\ 6j + 4; & \text{para } j \text{ de la forma } 4k + 2 \\ 6j + 6; & \text{para } j \text{ de la forma } 4j + 3 \end{cases}$$

$$\gamma_R(P_j \square P_4) = \begin{cases} 2j + 1; & \text{si } j = 1, 2, 3, 5, 6 \\ 2j; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Recientemente en [8] se probó hasta  $k = 8$ :

Para  $k = 5$ :

$$\gamma_R(P_j \square P_5) = \begin{cases} 8; & \text{si } j = 3 \\ \lfloor \frac{12j}{5} \rfloor + 2; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para  $k = 6$ :

$$\gamma_R(P_j \square P_6) = \begin{cases} \lfloor \frac{12j}{5} \rfloor + 2; & \text{para } j < 5 \text{ o cuando } j \text{ es de la forma } 5i, 5i + 4, 5i + 4 \\ \lfloor \frac{12j}{5} \rfloor + 3; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para  $k = 7$ :

$$\gamma_R(P_j \square P_7) = \begin{cases} \lfloor \frac{16j}{5} \rfloor + 2; & \text{para } j = 1, 2, 4, 7 \text{ o para } j \text{ de la forma } 5i \\ \lfloor \frac{16j}{5} \rfloor + 3; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último para  $k = 8$ :

$$\gamma_R(P_j \square P_8) = \begin{cases} 9; & \text{si } j = 2 \\ 16; & \text{si } j = 4 \\ \lfloor \frac{18j}{5} \rfloor + 4; & \text{cuando } j \text{ es de la forma } 5i + 3 \\ \lfloor \frac{16j}{5} \rfloor + 3; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, también en [8] se calculó constructivamente  $\gamma_R$  para  $P_j \square C_k$  con  $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$  y para  $C_j \square P_k$  con  $k = 2, 3, 4, 5, 6$  y  $j \geq 3$ , pero más allá de eso no se conoce mucho sobre el número de dominación romana para otras familias

de gráficas.

## 2.5. Gráficas Romanas

En el teorema 2.2.1 se probó que el número de dominación romana está entre  $\gamma$  y  $2\gamma$ , ya vimos la estructura de las gráficas cuando  $\gamma_R$  está cerca de la cota inferior. En esta sección veremos qué pasa con las gráficas que alcanzan la cota superior.

Si una gráfica  $G$  cumple que  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ , diremos que tal gráfica es una **gráfica romana**. Ya conocemos algunas gráficas romanas, por el lema 2.4.1 sabemos que cuando hay un vértice adyacente a todos la gráfica es romana. Además sabemos por el teorema 2.4.1 que los ciclos y trayectorias de la forma:  $C_{3k}, P_{3k}, C_{3k+2}$  son gráficas romanas. También usando el teorema 2.4.2 es fácil ver que las bipartitas completas  $K_{m,n}$  con  $\min\{m, n\} \neq 2$  son romanas. Ya sea que alguna partición sólo tiene un vértice en cuyo caso hay un vértice adyacente a todos los demás, o que ambas particiones tengan por lo menos 3 vértices cada una y en este caso  $\gamma_R(K_{m,n}) = 4$  y  $\gamma(K_{m,n}) = 2$ .

Los siguientes teoremas proveen caracterizaciones sencillas para las gráficas romanas.

**Teorema 2.5.1.**  *$G$  es romana si y sólo si tiene una  $\gamma_R$ -función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  donde  $V_1 = \emptyset$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica romana, así  $\gamma_R = 2\gamma$ . Tomemos  $S$  un  $\gamma$ -conjunto de  $G$  y tomemos la función  $f = (V \setminus S, \emptyset, S)$ , es inmediato que  $f$  es RDF. El peso de  $f$  es  $f(V) = 2|S| = 2\gamma = \gamma_R$  de donde  $f$  es  $\gamma_R$ -función. Para la otra implicación, supongamos que  $f = (V_0, V_1, V_2)$  con  $V_1 = \emptyset$  es  $\gamma_R$ -función, entonces  $\gamma_R(G) = 2n_2$ . Como  $V_1 \cup V_2$  es dominante en  $V$ ,  $V_2$  es dominante en  $G$ . Por el teorema 2.2.3(i) sabemos que  $V_2$  es  $\gamma$ -conjunto en  $G[V_0 \cup V_2] = G$ , por lo tanto  $n_2 = \gamma(G)$  y así  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ , es decir,  $G$  es romana.  $\square$

**Teorema 2.5.2.**  *$G$  es romana si y sólo si  $\gamma(G) \leq \gamma(G - S) + \frac{|S|}{2}$  para cualquier 2-empaque  $S$ .*

*Demostración.* Por el teorema 2.2.5 sabemos que  $\gamma_R(G) = \min\{2\gamma(G - S) + |S| : S \text{ es un 2-empaque}\}$ , así  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$  y  $2\gamma(G) \leq 2\gamma(G - S) + |S|$  para cualquier 2-empaque, de donde  $\gamma(G) \leq \gamma(G - S) + \frac{|S|}{2}$ .

Para la otra implicación, si  $\gamma(G) \leq \gamma(G - S) + \frac{|S|}{2}$  para todo 2-empaque  $S$ , entonces  $2\gamma(G) \leq 2\gamma(G - S) + |S|$  para todo 2-empaque  $S$ . Así  $2\gamma(G) \leq \gamma_R(G)$  y por lo tanto  $2\gamma(G) = \gamma_R(G)$  y así  $G$  es romana.  $\square$

Respecto a los árboles romanos, en [5] Henning exhibió constructivamente la familia  $\mathcal{T}$  de los árboles romanos y en [4] se probó el siguiente teorema:

**Teorema 2.5.3.** *Si  $T$  es un árbol de orden  $n \geq 3$  que tiene un único  $\gamma$ -conjunto  $D$  que además es independiente, entonces  $T$  es un árbol romano; más aún, la única  $\gamma_R$ -función en  $T$  es  $f = (V \setminus D, \emptyset, D)$*

## 2.6. Otras consideraciones respecto a $\gamma_R$

Concluiremos el capítulo con un par de consideraciones. Primero. El problema de posicionamiento de tropas que da inicio a la dominación romana es fácilmente extrapolable a otros problemas, sólo necesitamos un «mapa» que «proteger», que existan dos tipos de «tropas» diferentes y que uno de ellos pueda «proteger» a sus vecinos. Por ejemplo, posicionamiento de hospitales en una ciudad, donde un tipo de hospital es grande y puede cubrir una zona más amplia, que otro, que es más pequeño y sólo se cubre a sí mismo. O posicionamiento de tiendas, con supermercados por los que un consumidor estará más dispuesto a transportarse y «minisuper» pequeños que cubrirán un área más limitada. Y segundo. Respecto a la complejidad computacional de hallar una  $\gamma_R$ -función dada una gráfica. El problema se ha abordado en [4] donde se dio un algoritmo para calcular  $\gamma_R(T)$  en tiempo  $O(n)$  donde  $T$  es un árbol. Sin embargo, como

muchos problemas en teoría de gráficas el problema general es NP-Completo, en el mismo trabajo se prueba que si existe un algoritmo que encuentre  $\gamma_R$  para una gráfica cualquiera, dicho algoritmo puede transformarse polinomialmente para resolver el problema de satisfacibilidad SAT-3 que es un conocido problema NP-Completo.





## Capítulo 3

# Eficiencia

En este capítulo introduciremos la medida de *dominación eficiente*, propuesta por Bange et al. en [9] que se aplica a dominación y la extrapolación de ésta a la dominación romana. Consideraremos que cada vértice domina a toda su vecindad cerrada (incluyéndose).

Dado  $S \subset V$ , la *influencia* de  $S$  es el número:

$$I(S) = \sum_{v \in S} (1 + \delta(v)).$$

Así por ejemplo, la influencia de un vértice  $v$  es  $1 + \delta(v)$  pues un vértice *influye* en su vecindad y en él mismo (o en su vecindad cerrada).

El *número de dominación eficiente* de una gráfica es:  $F(G) = \max\{I(S) : S \text{ es un 2-empaque}\}$ .

Notemos que cada vértice es dominado a lo más por un vértice (de ahí lo de *eficiente*) y que no necesariamente todos los vértices son dominados. Si queremos que todos los vértices sean dominados, tenemos la *redundancia*<sup>1</sup> de  $G$ :  $R(G) = \min\{I(S) : S \text{ es dominante}\}$  que mide el mínimo posible de *influencia* necesaria para dominar a toda la gráfica. Nuevamente, cuando sea claro usaremos  $F$  y  $R$  en vez de  $F(G)$  y  $R(G)$  respectivamente.

---

<sup>1</sup>a pesar de que  $R$  mide la redundancia, es  $R - n$  en realidad la «cantidad de dominación» *extra* que se usó.

El siguiente teorema nos muestra la relación entre el número de dominación eficiente, la redundancia y el orden de una gráfica.

**Teorema 3.0.1.** *Para cualquier gráfica  $G$  de orden  $n$ , tenemos que:*

$$F(G) \leq n \leq R(G), \text{ más aún, } F = n \text{ si y solamente si } R = n$$

*Demostración.* Para probar la primera parte notemos que si  $S$  es un 2-empaque, entonces  $|N[x] \cap S| \leq 1$  para cualquier  $x \in G$  es decir, un vértice es influido a lo más por un vértice de  $S$  y no necesariamente todo vértice es influido por  $S$ , como se aprecia en la figura 3.1, de donde  $F \leq n$ .

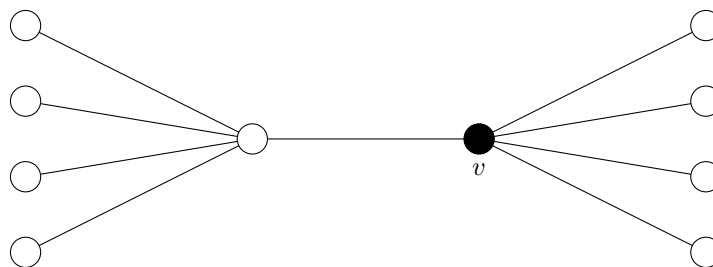


Figura 3.1: No todo vértice en  $V$  es influido por  $S = \{v\}$

Para la siguiente desigualdad veamos que, si  $D$  es dominante, entonces  $D$  influye en toda la gráfica, y que un vértice puede ser influido por más de un vértice en  $D$ . Nuevamente, gráfica anterior con un cambio de conjunto  $D$  nos sirve de ejemplo como se aprecia en el figura 3.2

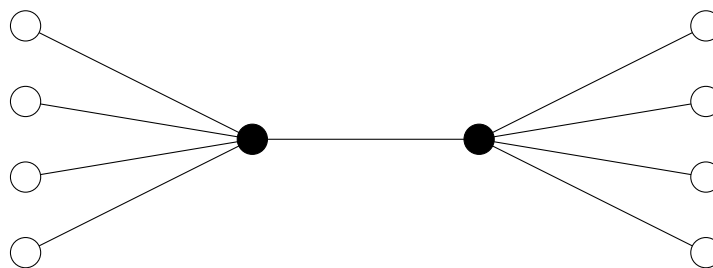


Figura 3.2:  $D$  influye en toda la gráfica. Doblemente en los vértices del mismo  $D$ .

Para probar la ida de la segunda parte basta ver que si  $F = n$  significa que tenemos un 2-empaque que domina a todos los vértices, así dicho 2-empaque es un conjunto dominante y como  $n \leq R$ , tenemos que  $R = n$ . Finalmente, si  $R = n$  tenemos un conjunto dominante  $D$ , cuya influencia es  $n$ , dicho conjunto debe ser un 2-empaque pues si hay un vértice *doblemente dominado* es decir, hay un vértice que es dominado por más de un vértice de  $D$ , al calcular la influencia de  $D$  que es la suma de las influencias de los vértices de  $D$ , dicho vértice será «contado» en más de una ocasión, lo que contradice que  $R = n$  por lo que  $D$  tiene que ser un 2-empaque con influencia  $n$  y como  $F \leq n$  se sigue que  $F = n$  con lo que finaliza la prueba.  $\square$

Ahora extenderemos este concepto a dominación romana, para lo que necesitamos la siguiente definición:

Como definieron Rubalcaba y Slater en [7], un  $(j, k)$ -**empaque** es una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, j\}$  que cumple:  $\sum_{x \in N[v]} f(x) \leq k$  para todo  $v \in V$ . Denotaremos como  $V_i = \{v \in V | f(v) = i\}$  a los vértices con etiqueta  $i$ , y si  $S \subset V$ ,  $f(S) = \sum_{u \in S} f(u)$ . Finalmente a  $f(N[x])$  le llamaremos la *suma local en  $x$* .

Se sigue casi inmediatamente el siguiente lema:

**Lema 3.0.1.** *Si  $f$  es un  $(j, k)$ -empaque, entonces  $V_k$  es un 2-empaque.*

*Demostración.* Sean  $u, v \in V_k$  y supongamos que  $d(u, v) \leq 2$  así, si  $d(u, v) = 2$  tenemos que hay un vértice  $x \in N(v) \cap N(u)$  y la suma local en  $x$ ,  $f(N[x]) \geq f(u) + f(v) = 2k$  lo que es una contradicción. Por otra parte si  $d(u, v) = 1$  es decir,  $u$  y  $v$  son adyacentes, tenemos que la suma local en  $u$ ,  $f(N[u]) \geq f(u) + f(v) = 2k$  con lo que tenemos la misma contradicción. Así,  $V_k$  es un 2-empaque.  $\square$

Podemos decir aún más:

**Lema 3.0.2.** *Sea  $f$  un  $(j, k)$ -empaque. Si  $v \in V_k$ , entonces para todo  $u \in N(v) \cup N(N(v)) \setminus \{v\}$  se tiene que  $f(u) = 0$ . Es decir, los vecinos de  $v$  y los vecinos de los vecinos de  $v$  (excepto  $v$ ) deben tener etiqueta 0.*

*Demostración.* Sea  $x \in N(v) \cup N(N(v)) \setminus \{v\}$  y supongamos que  $f(x) > 0$ . Si  $x \in N(v)$  tenemos que la suma local en  $v$  es  $f(N[v]) \geq f(v) + f(x) > k$  que es una contradicción. Si  $x \in N(N(v)) \setminus \{v\}$  tenemos que hay un vértice adyacente tanto a  $x$  como a  $v$ , digamos  $z$ , así, la suma local en  $z$  es  $f(N[z]) \geq f(v) + f(x) > k$  con lo que llegamos a la misma contradicción, por lo tanto  $f(x) = 0$ .  $\square$

Nos interesarán particularmente los  $(2, 2)$ -empaques por su parecido con las RDF, pues un  $(2, 2)$ -empaqué es una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  que cumple:  $f(N[v]) \leq 2$  para cualquier  $v \in V$ . Además, el lema 3.0.2 aplicado a  $(2, 2)$ -empaques nos garantiza que no hay  $V_1V_2$  aristas (de hecho cualquier vértice en la vecindad y en la vecindad de la vecindad de un vértice en  $V_2$  debe tener etiqueta 0, excepto el mismo vértice), también se cumple que  $\Delta(G[V_1]) \leq 1$ , es decir, en  $G[V_1]$  no hay trayectorias de longitud 2. Anotaremos lo anterior en el siguiente corolario.

**Corolario 3.0.1.** *Si  $f$  es  $(2, 2)$ -empaqué y  $v \in V_2$ , entonces los vértices que estén a distancia 1 o 2 de  $v$  tienen etiqueta 0. Además  $\Delta(G[V_1]) \leq 1$ .*

Definiremos ahora la **influencia romana** de una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  como el número:  $I_R(f) = |V_1| + |V_2| + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$ . Nótese que la influencia romana está definida en general para cualquier función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  y no sólo para los  $(2, 2)$ -empaques o las RDF, ésto nos será útil más adelante. También cabe señalar que la influencia romana de  $f$  está relacionada con la influencia «normal» en la siguiente igualdad:

$$I_R(f) = |V_1| + I(V_2)$$

Definimos el **número de dominación romana eficiente** de  $G$  como la mayor influencia romana que puede alcanzar un  $(2, 2)$ -empaqué, y lo denotamos como  $F_R(G)$ .

$$F_R(G) = \max\{I_R(f) : f \text{ es un } (2, 2)\text{-empaqué}\} .$$

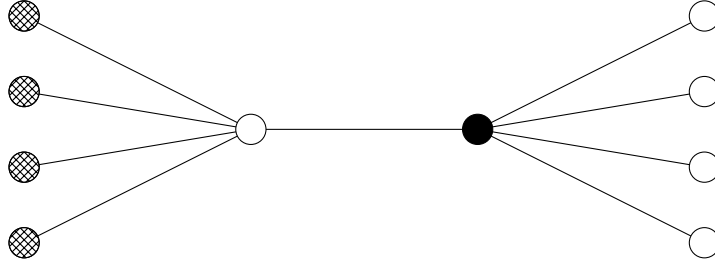


Figura 3.3:  $f$  es RmDF pero no es  $\gamma_R$

A un  $(2, 2)$ -empaquet que alcance este máximo le llamaremos  $F_R(G)$ -**función**. Como antes usaremos únicamente  $F_R$ -función cuando no sea necesario especificar la gráfica.

Finalmente, diremos que una RDF  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  es una **función de dominación romana minimal** o *RmDF*<sup>2</sup> si cumple las siguientes condiciones:

- (i) No hay  $V_1V_2$  aristas,
- (ii) si  $v \in V_2$ , entonces existe  $u \in V_0$  tal que  $N(u) \cap V_2 = \{v\}$ ,
- (iii)  $v \in V_1$  implica que  $|N(v) \cap V_1| \leq 1$ .

Notemos que la segunda condición pide que todo vértice en  $V_2$  tenga por lo menos un vecino privado respecto a  $V_2$  en  $V_0$ , mientras que la tercera asegura que no habrá trayectorias de longitud 3 en  $G[V_1]$ . Estas (y otras) condiciones las satisfacen las  $\gamma_R$ -funciones como ya se probó en el capítulo 2 en el teorema 2.2.3 por lo que toda  $\gamma_R$ -función es una RmDF.

La pregunta natural que surge es: ¿ $f$  es RmDF implica que  $f$  es  $\gamma_R$ ? La respuesta, como se ilustra en la figura 3.3 es no, pues  $f$  es RmDF pero no  $\gamma_R$ , de hecho se puede construir una RmDF cuyo peso se aleje tanto como queramos de  $\gamma_R$ .

Finalmente, definimos el **número de redundancia romana** de  $G$  como  $R_R(G) = \min\{I_R(f) : f \text{ es RmDF}\}$

<sup>2</sup>Roman minimal domination function

Ya con todas estas definiciones, lo que sigue es dar un resultado análogo para la primera parte del teorema 3.0.1 pero para dominación romana:

**Teorema 3.0.2.** *Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  sin vértices aislados, se cumple:*

$$F_R(G) \leq n \leq R_R(G)$$

*Demostración.* Sea  $f$  una  $F_R$ -función, es decir,  $f$  es un  $(2, 2)$ -empaquete con influencia romana máxima. Por el lema 3.0.2 si  $x \in V_2$  se tiene que  $N(x) \cup N(N(x) \setminus \{x\}) \subset V_0$  pues  $f$  es un  $(2, 2)$ -empaquete. Se sigue que por cada vértice con etiqueta 2, hay por lo menos un vértice con etiqueta 0 adyacente a él, así cada vértice con etiqueta 2 «cuenta» por lo menos a dos vértices de la gráfica, los vértices con etiqueta 1 sólo se cuentan a ellos mismos, de donde  $F_R \leq n$ .

Para la otra desigualdad sea  $g$  una RmDF con influencia romana máxima. Hay que probar que  $I_R(g) = |V_1| + I(|V_1| + |V_2| + \sum_{v \in V_2} \delta(v)) \geq n = |V_0| + |V_1| + |V_2|$ , así, basta probar que  $\sum_{v \in V_2} \delta(v) \geq |V_0|$ , ésto se cumple pues como  $g$  es RDF cada vértice en  $V_0$  es adyacente a algún vértice en  $V_2$ , por lo tanto  $I_R(g) = |V_1| + |V_2| + \sum_{v \in V_2} \delta(v) \geq |V_0| + |V_1| + |V_2| = n$ . Con lo que podemos concluir que  $n \leq R_R(G)$ .  $\square$

Podemos decir más respecto a la relación entre el número de dominación eficiente y el número de dominación romana eficiente:

**Teorema 3.0.3.** *Para cualquier gráfica  $G$  se cumple que  $F(G) = F_R(G)$ .*

*Demostración.* Probaremos primero que  $F(G) \geq F_R(G)$ . Sea  $g$  un  $(2, 2)$ -empaquete con  $I_R(g)$  máxima, es decir, una  $F_R$ -función. Vamos a construir un 2-empaquete,  $S$ , con influencia romana mayor a la influencia romana de  $g$ . Incluiremos en  $S$  a todos los vértices de  $V_2$ . Dado que  $g$  es  $(2, 2)$ -empaquete, por el lema 3.0.2,  $V_2$  es 2-empaquete. Supongamos que  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_j\}$  y sea  $W = V_1$ . Tomaremos  $u_1 = v_1 \in W$  lo «metemos» en  $S$  y eliminamos de  $W$  a los vértices a distancia a lo más 2 de  $u_1$ . Ahora tomamos  $u_2 \in W$ , lo metemos en  $S$  y eliminamos de  $W$  a los vértices que estén a distancia a lo más 2 de él. Repetimos hasta que

$W = \emptyset$ .  $S$  es un 2-empaque por construcción y puesto que  $V_2$  ya era 2-empaque. Calculemos la influencia de  $S$ .  $I(S) = \sum_{s \in S} (1 + \delta(s)) = |\bigcup_{s \in S} N[s]|$  puesto que  $S$  es un 2-empaque. Vamos a probar que en el  $i$ -ésimo paso del procedimiento, cuando añadimos  $u_i$  a  $S$ ,  $|N[u_i]|$  es por lo menos tan grande como los vértices que quitamos de  $W$  en este paso.

Sabemos que  $|N(u_i) \cap W| \leq 1$  pues en  $G[V_1]$  no hay trayectorias de longitud 2, por la misma razón si  $x \in N(u_i) \cap W$ ,  $N[x] \cap W = \{u_i, x\}$ . Por otra parte, si  $y \in W$  y  $d(u_i, y) = 2$  hay un vértice  $z \in N(y) \cap N(u_i)$ . Es decir, por cada vértice que quitamos de  $W$  hay otro vértice que es dominado por  $u_i$ , con lo que  $|N[u_i]|$  es por lo menos tan grande como los vértices que quitamos de  $W$  en el  $i$ -ésimo paso. De ésto se sigue que

$$I(S \cap V_1) \geq |V_1|$$

Así se cumple  $I(S) = I(S \setminus V_2) + I(V_2) = I(S \cap V_1) + I(V_2) \geq |V_1| + I(V_2) = I_R(f) = F_R(G)$  de donde  $F(G) \geq F_R(G)$ .

Para ver que  $F_R(G) \geq F(G)$ . Sea  $S$  un 2-empaque con influencia  $I(S) = F(G)$ . Definimos  $f = (V_0, V_1, V_2)$  como sigue:  $f(v) = 2$  cuando  $v \in S$  y  $\delta(v) \geq 1$ ,  $f(v) = 1$  cuando  $v \in S$  y  $\delta(v) = 0$  y  $f(v) = 0$  cuando  $v \notin S$ . Notemos que como  $S$  es un 2-empaque y  $V_2 \subset S$ , entonces  $V_2$  también es un 2-empaque. Ahora veamos que  $f$  es un  $(2, 2)$ -empaque. Si  $v \in V_0$ ,  $v$  no es vecino de vértices en  $V_1$  (ya que en  $V_1$  sólo hay vértices aislados) y  $v$  es vecino a lo más de un vértice en  $V_2$  pues  $V_2$  es un 2-empaque, así  $f(N[v]) \leq 2$ . Como  $V_1$  es un conjunto de vértices aislados, si  $v \in V_1$ ,  $f(N[v]) = 1$ . Por otra parte, si  $v \in V_2$ , todos sus vecinos tienen etiqueta 0, pues  $V_2$  es 2-empaque y  $V_1$  son vértices aislados, así  $f([v]) = 2$ . Se sigue que  $f$  es  $(2, 2)$ -empaque. Finalmente recordemos que



$F_R(G) \geq I_R(f)$  y calculemos la influencia romana de  $f$ .

$$\begin{aligned}
 I_R(f) &= |V_1| + I(V_2) \\
 &= |V_1| + |V_2| + \sum_{v \in V_2} \delta(v) \\
 &= |S| + \sum_{v \in V_2} \delta(v) \\
 &= |S| + \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)
 \end{aligned}$$

Pues al ser  $V_1$  un conjunto de vértices aislados se tiene que  $\sum_{v \in V_1} \delta(v) = 0$ , así

$$\begin{aligned}
 |S| + \sum_{v \in V_2} \delta(v) &= |S| + \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v) \\
 &= |S| + \sum_{v \in S} \delta(v) \\
 &= I(S) \\
 &= F(G)
 \end{aligned}$$

De donde podemos concluir que  $F_R(G) \geq F(G)$ . □

Con el anterior resultado podemos ver que la eficiencia y la eficiencia romana están muy relacionadas entre si, de hecho, la segunda parte del teorema 3.0.1 se cumple a medias para dominación romana. Pero antes necesitamos el siguiente teorema:

**Teorema 3.0.4.** *Si  $G$  es conexa de orden  $n \geq 3$ ,  $F_R(G) = n$  y  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es  $F_R(G)$ -función, entonces  $V_1 = \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $V_1 \neq \emptyset$  y sea  $v \in V_1$ . Como  $I_R(f) = n$ , todo vértice en  $V_0$  es adyacente a algún vértice en  $V_2$ , pero como  $f$  es  $(2, 2)$ -empaque, entonces sólo puede ser a un vértice. Es decir, todo vértice en  $V_0$  es adyacente a un solo vértice en  $V_2$ . Como  $G$  es conexa,  $v$  debe tener por lo menos un vecino  $u$ . Si  $f(u) = 0$ , entonces la suma local en  $u$  excede a 2, de igual forma, si  $f(u) = 2$  la suma local en  $u$  excede a 2. Si  $f(u) = 1$  hay otro vértice  $w$  adyacente a  $u$  o

a  $v$ , en cualquier caso  $w$  no puede tener etiqueta 1, pues contradice el corolario 3.0.1, así que estamos en el caso anterior. Por lo tanto  $V_1 = \emptyset$ .  $\square$

Lo siguiente es demostrar un lema que probará ser de utilidad para los teoremas que siguen.

**Lema 3.0.3.** *Si  $f$  es una RDF sin  $V_1V_2$ -aristas y  $V_2$  es un 2-empaquetamiento, entonces  $I_R(f) = n$*

*Demostración.* Observemos primero que como  $f$  es RDF, cada vértice con etiqueta 0 es adyacente a un vértice con etiqueta 2. Por otra parte como  $V_2$  es un 2-empaquetamiento, si  $u, v \in V_2$ , entonces  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ . De adonde se sigue que  $\sum_{v \in V_2} \delta(v) = |V_0|$  pues esta suma cuenta una vez y sólo una vez a cada vértice de  $V_0$ . Ahora calculemos la influencia romana de  $f$ :

$$\begin{aligned} I_R(f) &= |V_1| + I(V_2) \\ &= |V_1| + |V_2| + \sum_{v \in V_2} (\delta(v)) \\ &= |V_1| + |V_2| + |V_0| \\ &= n. \end{aligned}$$

$\square$

Ahora si, veamos que una parte del teorema 3.0.1 que es para eficiencia «normal», también se cumple para eficiencia romana.

**Teorema 3.0.5.** *Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  y  $F_R(G) = n$ , entonces  $R_R(G) = n$ .*

*Demostración.* Como  $F_R(G) = n$ , por el teorema 3.0.3 sabemos que  $F_R(G) = F(G)$ , así  $F(G) = n$  de donde existe un 2-empaquetamiento  $S$  con influencia  $I(S) = n$ , es decir,  $S$  domina todos los vértices de  $G$  (y sólo los domina «una vez»). Definiremos  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  como sigue:  $f(v) = 2$  cuando  $v \in S$  y  $\delta(v) > 0$ ,  $f(v) = 1$  cuando  $v \in S$  y  $\delta(v) = 0$  y  $f(v) = 0$  si  $v \notin S$ .  $f$  es RDF pues  $v \in V_0$  implica que  $v \notin S$  y como  $S$  domina a toda la gráfica, debe existir un vértice

en  $S$  que sea adyacente a  $v$ , tal vértice también está en  $V_2$ . Por otra parte como  $f$  es RDF y  $V_2$  es un 2-empaquete (pues es subconjunto de un 2-empaquete) y no hay  $V_1V_2$ -aristas pues  $V_1$  es un conjunto de vértices aislados; por el lema 3.0.3  $I_R(f) = n$ . Falta ver que  $f$  es RmDF, pero es inmediato de su construcción que se cumple (i) y (iii) pues  $V_1$  es un conjunto de vértices aislados y (ii) pues los vértices de  $V_2$  son adyacentes a vértices en  $V_0$ , y como  $V_2$  es 2-empaquete, esos vecinos en  $V_0$  no pueden ser adyacentes a otros vértices en  $V_2$ . Así,  $f$  es RmDF con  $I_R(f) = n$  que por el teorema 3.0.2 es la mínima redundancia romana que puede alcanzar una RmDF.  $\square$

Desafortunadamente el regreso no se cumple como se ilustra en el 3.4.

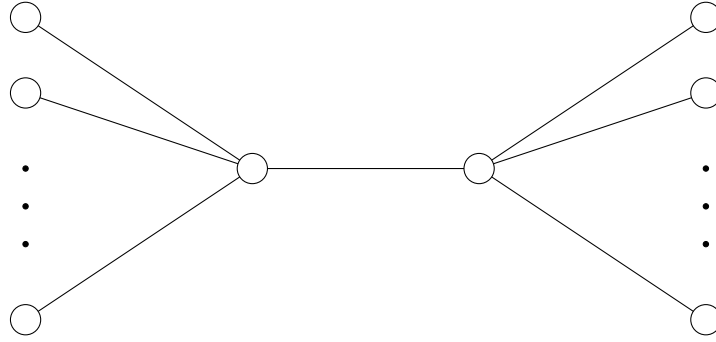


Figura 3.4:  $R_R = n$  pero  $F_R < n$

Finalmente probaremos que los árboles tienen redundancia romana  $n$ , pero para probarlo necesitamos una última definición que generaliza el concepto de *vecindad*. La  $r$ -*vecindad* de un vértice  $v$   $N_r(v) = \{x \in V \mid d(x, v) = r\}$  son los vértices que están a distancia  $r$  de  $v$ .

**Teorema 3.0.6.** *Si  $T$  es un árbol de orden  $n$ , entonces  $R_R(T) = n$ .*

*Demostración.* Primero notemos que si  $T$  es una gráfica trivial, poniendo 1 a la etiqueta de su único vértice tenemos que  $1 = n \leq R_R(T) \leq I_R(f) = 1$  y así  $R_R(T) = 1$ . Si  $T$  es una estrella  $K_{1,n-1}$ , la función  $f$  en la que  $f(v) = 2$  donde  $v$  es el vértice central y  $f(v) = 0$  para las hojas es RmDF (en realidad podemos decir que  $f$  es  $\gamma_R$ ) también cumple que  $n \leq R_R(T) \leq I_R(f) = n$  de donde

$R_R(T) = n$ . Así, podemos suponer que  $T$  tiene por lo menos 4 vértices y que  $diam(T) > 3$ . Seleccionamos un vértice  $v$ , y consideramos a  $T$  como un árbol con raíz en  $v$ , vamos a definir una RmDF de forma recursiva sobre los niveles de  $T$  como sigue:  $f(v) = 2$ , los vértices en el siguiente nivel,  $N_1(v) = N(v)$  tendrán etiqueta 0. Supongamos que  $f$  ha sido definida hasta el  $k$ -ésimo nivel, es decir hasta  $N_k(v)$  y la definiremos ahora para los sucesores de los vértices en  $N_k(v)$ , es decir, para  $N_{k+1}(v)$ . Sea  $x \in N_k(v)$  y sea  $z \in N_{k-1}(v)$  su antecesor. Si  $f(x) = 2$  sus sucesores llevarán etiqueta 0. Si  $f(x) = 0$  y  $f(z) = 2$ , los sucesores de  $x$  que sean vértices terminales tendrán etiqueta 1 y 0 en otro caso. Si  $f(x) = 0 = f(z)$  entonces elegimos a un sucesor de  $x$ , digamos  $y$  y  $f(y) = 2$ , para el resto de los sucesores de  $x$ , su etiqueta será 1 si son terminales y 0 en otro caso.

Notemos que:

- Si  $x \in V_0$ , entonces por construcción su antecesor o alguno de sus sucesores debe tener etiqueta 2, de donde se sigue que  $f$  es RDF.
- Si  $x \in V_1$ ,  $x$  es terminal y su antecesor tiene etiqueta 0, de donde no hay  $V_1V_2$ -aristas.
- Si  $x \in V_2$ , entonces  $N(x) \subset V_0$  y  $N_2(x) \subset V_0 \cup V_1$  ya que por construcción la única forma de poner etiquetas 2 es cuando sus dos sucesores tienen etiqueta 0; así,  $V_2$  es un 2-empaque.
- Como  $V_2$  es un 2-empaque, todos los vecinos de cualquiera de sus vértices son vecinos privados.

De todo lo anterior se sigue que  $f$  es una RmDF, más aún, como como  $V_2$  es un 2-empaque y no hay  $V_1V_2$ -aristas, por el lema 3.0.3  $I_R(f) = n$ . Por lo tanto  $R_R(T) = n$ .

□



## Capítulo 4

# Y más allá

Durante la realización de esta tesis, estudiando el artículo [7] de Rubalcaba y Slater, nos encontramos con el siguiente resultado (teorema 2.5, p3197):

**Afirmación.** *Si  $G$  es gráfica se cumple que  $R_R(G) \leq R(G)$ .*

Antes de analizar el argumento, observemos que si  $S \subsetneq S'$ , entonces  $I(S) < I(S')$  de donde se sigue que si un conjunto de vértices  $D$  es dominante con influencia mínima, entonces ningún subconjunto propio puede ser dominante, es decir,  $D$  es dominante minimal.

Para probar la afirmación, la idea en dicho artículo es tomar un conjunto dominante  $D$  con influencia  $I(D) = R(G)$ , y a partir de tal conjunto hallar una función  $f$  que sea RmDF y tenga influencia romana  $I_R(f) \leq I(D) = R(G)$ , como  $R_R(G) \leq I_R(f)$  probar lo anterior sería suficiente. Se propone la función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  de la forma:  $f(v) = 0$  si  $v \notin D$ ,  $f(v) = 2$  si  $v \in D$  y  $v$  tiene un vecino privado fuera de  $D$  y  $f(v) = 1$  en otro caso. Como  $D$  es minimal dominante, si existen  $u, v \in D$  adyacentes, entonces cada uno debe tener un vecino privado fuera de  $D$ , pues de lo contrario  $D - u$  es un conjunto dominante, de donde las únicas adyacencias entre vértices de  $D$  son entre vértices de  $V_2$ . Con lo anterior se verifica que no hay  $V_1V_2$ -aristas, y que si  $v \in V_1$  implica que  $|N(v) \cap V_1| \leq 1$ , es decir, las condiciones (i) y (iii) para que una

RDF sea RmDF. La condición (ii), que todo vértice en  $V_2$  tiene un vecino privado en  $V_0$  es inmediata de la construcción de  $f$ . Finalmente basta calcular la influencia romana de  $f$ .  $I_R(f) = |V_1| + I(V_2) = |V_1| + |V_2| + \sum_{v \in V_2} \delta(v) = |D| + \sum_{v \in D} \delta(v) - \sum_{v \in V_1} \delta(v) = I(D) - \sum_{v \in V_1} \delta(v) \leq I(D) = R(G)$ . Con lo que aparentemente se prueba que  $R_R(G) \leq R(G)$ .

En principio el argumento parece no tener fallos, sin embargo, nunca se probó que  $f$  es RDF. Tratamos de probar que tal función es RDF sin éxito. Después intentamos con una función  $f' \rightarrow (0, 1, 2)$  diferente,  $f'(v) = 2$  si  $v \in D$  y  $f'(v) = 0$  en otro caso. Definida así, está garantizado que  $f'$  es RDF, su influencia romana es  $I_R(f') = |V_1| + I(V_2) = I(V_2) = R(G)$  con lo que si conseguimos probar que  $f'$  es RmDF terminaríamos. Las condiciones (i) y (iii) se cumplen de manera análoga, sin embargo no pudimos garantizar la condición (ii). Aparentemente, el garantizar que  $f'$  sea RDF nos hace perder la condición (ii) y el garantizar la condición (ii) nos hace perder que  $f$  es RDF. Finalmente dimos con un contraejemplo al argumento (no al teorema), es decir, una gráfica con un conjunto dominante con influencia mínima cuya función  $f$  definida como en [7] no cumple ser RDF y  $f'$  definida anteriormente no cumple la condición (ii) para ser RmDF. Analicemos la siguiente gráfica  $G$ .

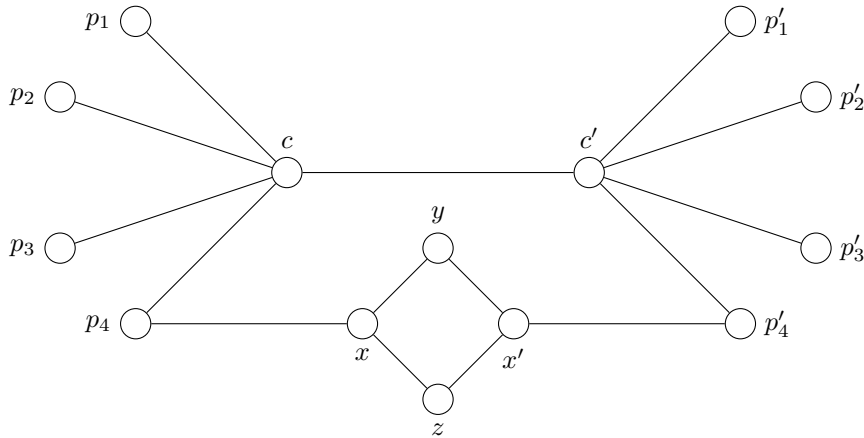


Figura 4.1: Gráfica  $G$

Halleemos un conjunto dominante  $D$  con influencia mínima  $I(D) = R(G)$ . Fijémonos primero en la subgráfica  $H$  compuesta por los vértices  $\{p_1, p_2, p_3, c\}$ .

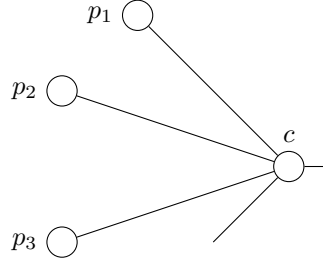
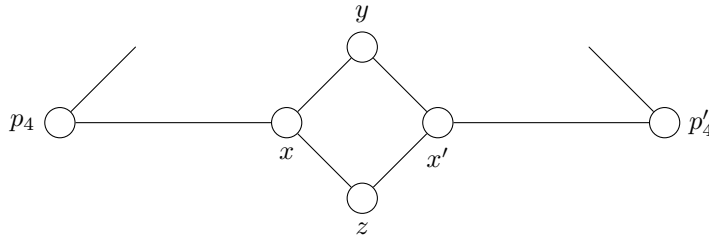


Figura 4.2:  $H$

Sea  $D$  un conjunto dominante en  $G$  con influencia mínima, es decir,  $I(D) = R_R(G)$ . Necesariamente  $p_1, p_2, p_3 \in D$  o  $c \in D$ . Supongamos que  $p_1, p_2, p_3 \in D$  y consideremos ahora al conjunto  $D' = (D \cup \{c\}) \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ . El conjunto  $D'$  también es dominante y calculando  $I(D') = I(D) + |\{c\}| + \delta(c) - |\{p_1, p_2, p_3\}| - \sum_{i=1}^3 p_i = I(D) + 1 + 5 - 3 - 3 = I(D)$  con lo que  $D'$  es dominante, y tiene la misma influencia, así podemos considerar que nuestro conjunto dominante con influencia mínima  $G$  contiene al vértice  $c$ . Con un razonamiento análogo podemos hacer que  $D$  contenga al vértice  $c'$ . En nuestro conjunto dominante tenemos a los vértices  $c, c'$  y nos restan por dominar  $\{x, x', y, z\}$ .



Revisando cada caso posible como en las figura 4.3, 4.4 y 4.5, vemos que para dominar la parte que nos falta de  $G$ , tenemos las siguientes opciones:  $\{p_4, x'\}$ ,  $\{p_4', x\}$ ,  $\{x, y\}$ ,  $\{x', y\}$ ,  $\{x, z\}$ ,  $\{x', z\}$ ,  $\{x, x'\}$  y finalmente  $\{y, z\}$ . Vemos que las primeras 6 opciones suman 7 a la influencia, la séptima suma 8 y la última



sólo suma 6.

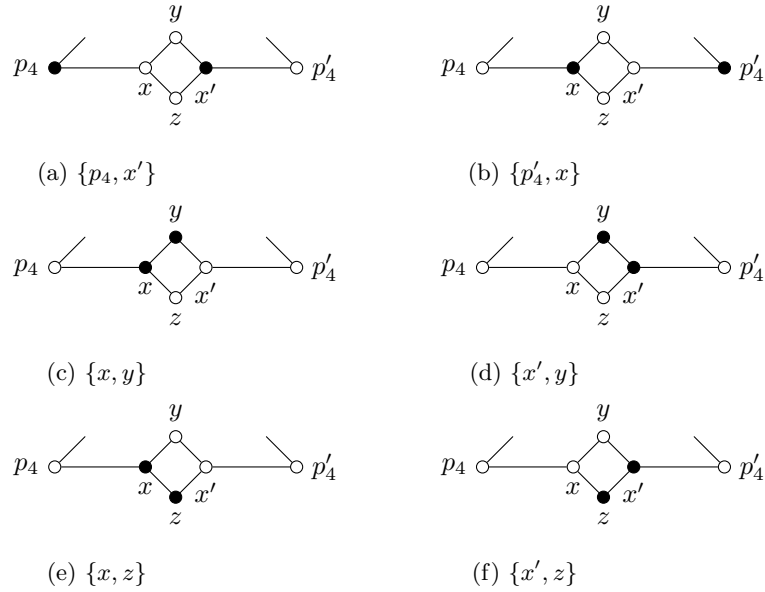


Figura 4.3: Influencia + 7

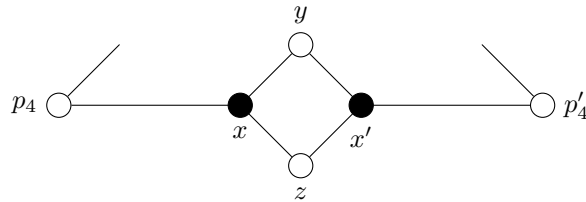


Figura 4.4:  $\{x, x'\}$  Influencia + 8

De donde nuestro conjunto dominante con influencia mínima es  $D = \{c, c', y, z\}$  con  $I(D) = 18$

Ahora, veamos quién es  $f$ . Como  $y$  y  $z$  no tienen vecinos privados,  $V_2 = \{c, c'\}$ ,  $V_1 = \{y, z\}$  y  $V_0 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, x, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, x'\}$  pero entonces ningún vértice en  $V_2$  domina a  $x$  ni a  $x'$  con lo que  $f$  no es RDF como se aprecia en la figura 4.7.

Por otra parte,  $f'$  no cumple la condición (ii) para ser RmDF, pues  $y$  y  $z$  no

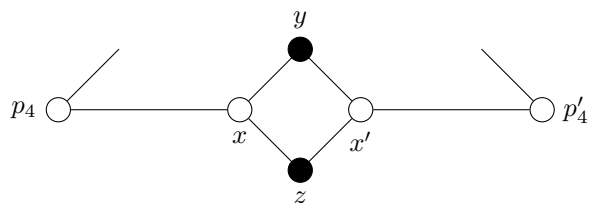


Figura 4.5:  $\{y, z\}$  Influencia + 6

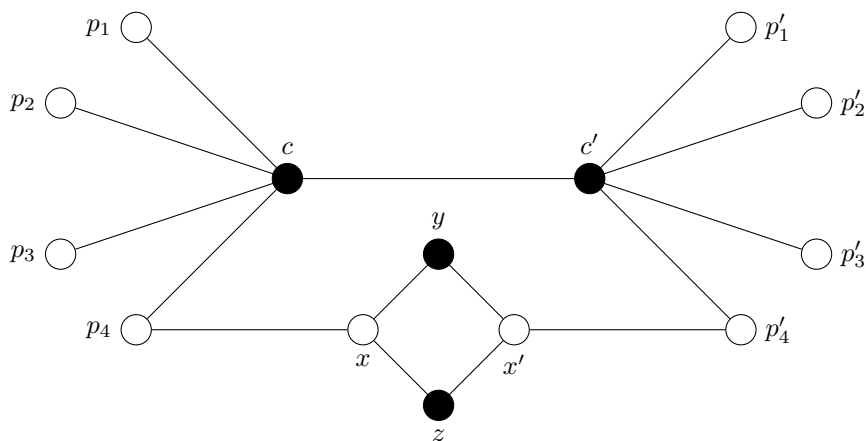
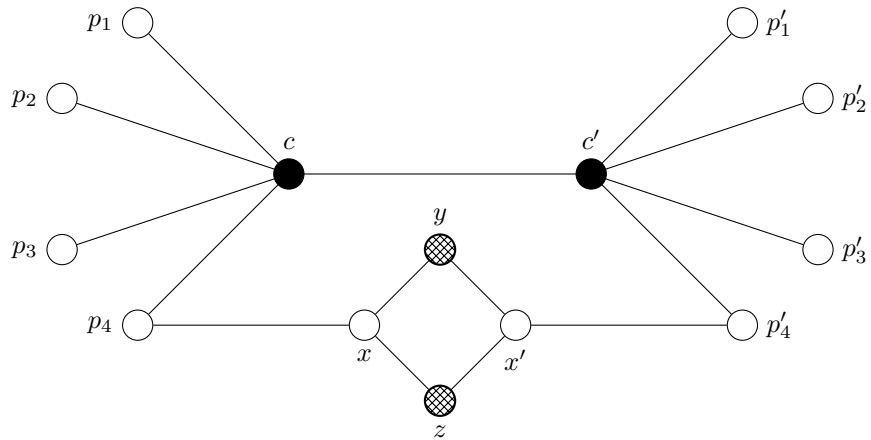
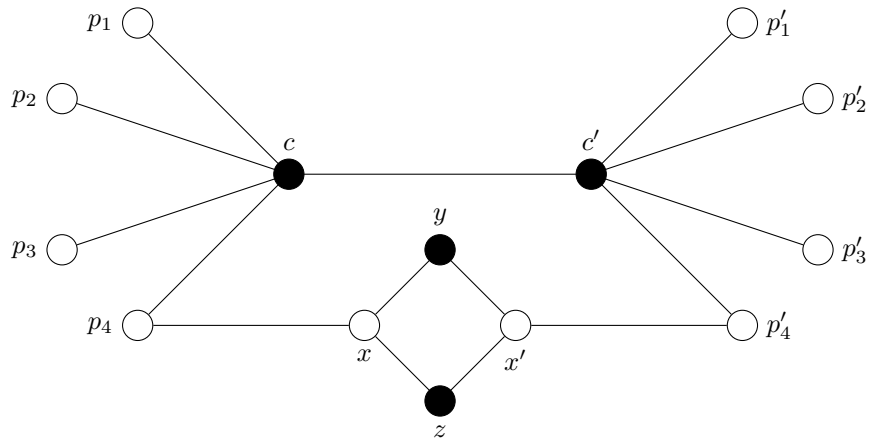


Figura 4.6:  $I(D) = 18$

tienen vecinos privados en  $V_0$  como se observa en la figura 4.8.

Sin embargo, podemos arreglar ambas funciones, ya sea cambiar la etiqueta de  $y$  (o de  $z$ ) en  $f$  por 2, o cambiar su etiqueta en  $f'$  por 1 como en la figura 4.9.

Creemos que es posible dar una función  $f$  que sea RmDF con peso menor o igual a  $R(G)$  y completar con ello la prueba, el problema es decidir qué vértices de  $D$  se deben incluir en  $V_2$  y cuáles no para asegurar que  $f$  sea RDF y que todo vértice de  $V_2$  tenga un vecino privado en  $V_0$ . Se queda como trabajo futuro.

Figura 4.7:  $f$  no es RDFFigura 4.8:  $f'$  no es RmDF

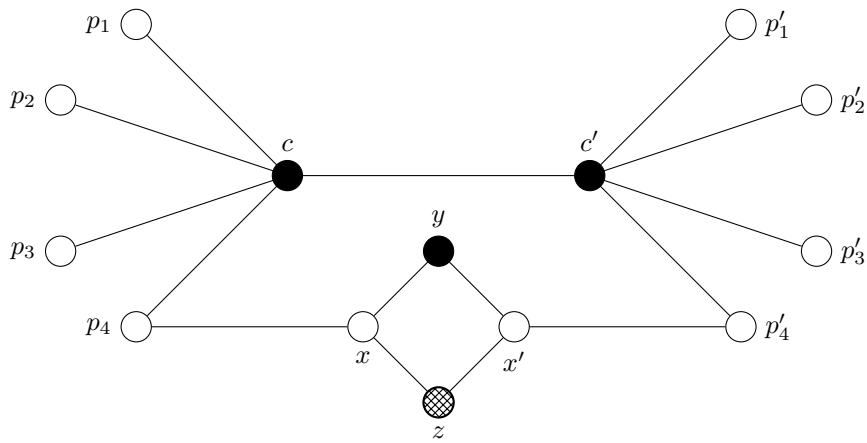


Figura 4.9:  $f''$  es RmDF con  $I_R(f'') = 16 < 18 = R(G)$

# Índice alfabético

- (2, 2)-empaquete, 49
- 2-empaquete, 20
- araña, 33
  - herida, 33
  - sana, 33
- complemento, 12
- conexidad, 11
- conjunto independiente, 16
- distancia, 11
- dominación, 16
  - $\gamma$ -conjunto, 16
  - conjunto dominante, 16
  - número de dominación, 16
- dominación romana, 20
  - $\gamma_R$ -función, 21
  - función de dominación romana, 20
  - función de dominación romana minimal, 51
  - influencia romana, 50
  - número de dominación romana, 21
  - número de dominación romana eficiente, 50
- eficiencia, 47
- $F_R$ -función, 51
- eficiencia romana, 50
- número de dominación eficiente, 47
- gráfica, 9
  - árbol, 15
  - bipartita, 14
  - ciclo, 13
  - completa, 13
  - multipartita, 14
    - completa, 15
  - trayectoria, 13
  - vacía, 13
- gráfica romana, 43
- grado, 10
  - máximo, 11
  - mínimo, 11
- influencia, 47
  - influencia romana, 50
- orden, 10
- producto cartesiano, 12
- RDF, 20
- redundancia, 47

- redundancia romana, 51
- RmDF, 51
- subdivisión, 12
- subgráfica, 11
  - generadora, 11
  - inducida, 11
- tamaño, 10
- trayectoria, 11
- vecindad, 10
  - abierta, 10
  - cerrada, 10
  - r-vecindad, 56
  - vecindad privada, 19
- vecino, 10
  - vecino privado, 19
    - vecino privado externo, 19



# Bibliografía

- [1] I. Stewart, *Defend the Roman Empire!*, Sci. Amer. 281 p136 - 139, 1999.
- [2] E. J. Cockayne, P. J. P. Grobler, W. Gründlingh, J. Munganga, J. H. van Vuuren, *Protection of a graph*, Util. Math. 67 p19 - 32, 2005.
- [3] E. J. Cockayne, P.M. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, et al., *On Roman domination in graphs*, Discrete Math. 278 p11 - 22, 2004.
- [4] P. A. Dreyer Jr., *Applications and variations of domination in graphs*, PhD Thesis, State University of New York, 2000.
- [5] M.A. Henning, *A characterization of Roman trees*, Discuss. Math. Graph Theory 22 325 - 334, 2002.
- [6] Hua-Ming Xing, Xin Chen, Xue-Gang Chen, *A note on Roman domination in graphs*, Discrete Mathematics 306 3338 - 3340, 2006.
- [7] R. R. Rubalcaba, P. J. Slater, *Roman dominating influence parameters*, Discrete Mathematics 307 3194 - 3200, 2007.
- [8] P. Pavlič, J. Žerovnik, *Roman domination number of the Cartesian products of paths and cycles*, The electronic journal of combinatorics Vol. 19 issue 3 paper 19, 2012
- [9] D. W. Bange, A. E. Barkauskas, P. J. Slater, *Disjoint dominating sets in trees*, Sandia Laboratories Report SAND 78-1087J, 1978