



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

REDES DE VISIBILIDAD Y PALABRAS EN SERIES MUSICALES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA)

PRESENTA:  
MIGUEL SÁNCHEZ ISLAS

TUTOR:  
Dr. OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL  
(INSTITUTO DE FÍSICA-U.N.A.M)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

Dr. GERMINAL COCHO ADONIS  
(INSTITUTO DE FÍSICA-U.N.A.M)

Dr. DENIS PIERRE BOYER  
(INSTITUTO DE FÍSICA-U.N.A.M)

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO DE 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Prefacio

En este trabajo se estudiarán diferentes obras musicales, de varios compositores de música clásica, de distintos periodos artísticos. Para analizarlo, se recurrirá al uso de archivos de tipo MIDI (*Musical Instrument Digital Interface*) pues contienen información acerca de las notas, la duración de éstas y las posibles voces en una pieza. Cabe aclarar que las piezas a analizar, fueron escritas para un solo instrumento.

Al examinar las obras, se usará un algoritmo conocido como: “algoritmo de visibilidad natural” el cual permitirá, establecer una conexión entre las series de tiempo y las redes complejas. Con este algoritmo (y una vez que se transformó una serie de tiempo en una red compleja) se estudiarán las características de la red asociada a la serie de tiempo.

Por otro lado, al utilizar una variante del algoritmo de visibilidad, se planea estudiar la música desde el punto de vista de un lenguaje. Pensando en un alfabeto de 12 caracteres que representarán las doce notas musicales y usando las herramientas del lenguaje (como es la entropía de Shanon), se buscará crear bloques de notas para formar palabras, es decir, asociaciones de notas que utilizó un autor o más en sus obras.

# Índice general

<b>1. Introducción redes y algoritmo de visibilidad.</b>	<b>1</b>
1.1. Redes	1
1.1.1. Definiciones Basicas y Clasificación de las redes.	3
1.1.1.1. Grado de un nodo y número de conexiones.	3
1.1.1.2. Matriz de Adyacencia y Clustering coefficient (Coeficiente de agrupamiento).	4
1.1.1.3. Redes de tipo aleatorias.	6
1.1.1.4. Redes de Mundo pequeño.	7
1.1.1.5. Redes libres de escala.	8
1.2. Natural Visibility Graph.	10
1.2.1. Algoritmo de visibilidad Horizontal.	12
1.3. De una serie a una red.	12
<b>2. Antecedentes en música.</b>	<b>17</b>
2.1. Notas Musicales.	17
2.1.1. Tono y semitono	19
2.1.2. Armonía, textura y melodía musical.	20
2.1.2.1. Melodía.	20
2.1.2.2. Textura Musical.	21
2.1.2.3. Arrmonía.	21
2.1.3. MIDI.	22
2.2. La música como serie de tiempo y redes.	25
2.2.0.1. Caminatas Musicales y Hurst.	25
2.2.0.2. Redes libres de escala musicales.	26
<b>3. Exponente de Hurst en series Musicales .</b>	<b>28</b>
3.1. Movimiento Browniano.	28
3.1.1. Movimiento Browniano Fraccional	29
3.1.2. Exponente de Hurst	30
3.1.3. Método de Conteo de Cajas y Primer Retorno	31
3.1.4. Pruebas del algoritmo de Hurst, en una serie de fBm.	33
3.2. Redes de Visibilidad y Música	37

3.2.1. Distribución de grado en los diferentes compositores estudiados. . . .	38
3.2.1.1. Bach . . . . .	38
3.2.1.2. Beethoven. . . . .	42
3.2.1.3. Chopin. . . . .	46
3.2.2. Mundo Pequeño en la música. . . . .	48
<b>4. Palabras en la música.</b>	<b>52</b>
4.1. Shannon y la Información. . . . .	52
4.1.1. Medida de la información. . . . .	52
4.2. Ecuación de Shannon de la información. . . . .	54
4.3. Visibilidad y Letras. . . . .	55
4.3.1. Autocorrelación. . . . .	56
4.3.1.1. Autocorrelación Bach . . . . .	57
4.3.1.2. Autocorrelación Beethoven . . . . .	63
4.3.1.3. Autocorrelación Chopin. . . . .	69
4.3.1.4. Función de distribución radial[27]. . . . .	70
4.3.2. Información de las palabras de los tres autores . . . . .	73
4.3.3. Comunidades en la musica. . . . .	78
<b>5. Conclusiones</b>	<b>89</b>
Bibliografía.....	100

# Capítulo 1

## Introducción redes y algoritmo de visibilidad.

En la vida diaria usualmente establecemos vínculos con otros humanos o con ciertos lugares que solemos frecuentar. Ello abre distintas posibilidades de estudio, ya que podemos analizar el tipo de enlaces que una persona establece con otras, o examinar cómo son las conexiones entre los distintos lugares que visitamos en una ciudad. Mayoritariamente cuando se hace un estudio de las amistades o los lugares que frecuentamos, es común que se haga a partir del análisis de las redes. Sin embargo, el estudio del análisis de las redes no sólo debería limitarse a las interacciones entre personas o lugares, sino también podríamos utilizarlo para estudiar las interacciones en las notas musicales, es decir, estudiar en una red secuencias de notas.

Para conocer cómo es la asociación que tienen los diferentes autores con las notas musicales, en este capítulo abordaré de manera breve la idea de una red y sus clasificaciones.

### 1.1. Redes

Una red, la podemos pensar como un conjunto en donde tenemos una conexión entre dos o más elementos de ésta [2, 29]. Los elementos a conectar, se les conoce como nodos.

Históricamente uno de los primeros ejemplos en el que se uso un grafo o una red, es el problema de los puentes de *Königsberg* (Kaliningrado, actualmente)

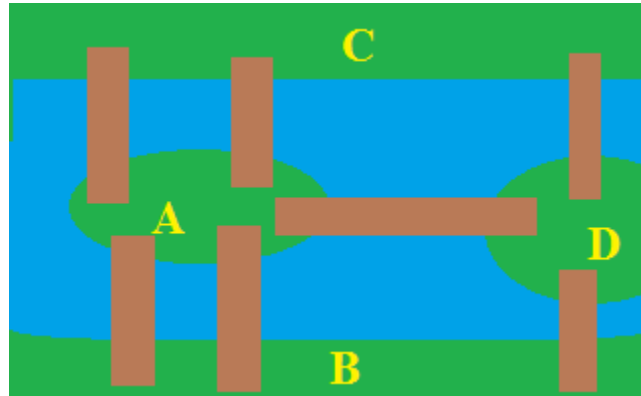


Figura 1.1: Representación del problema de los puentes de Königsberg

El problema hace alusión a una ciudad (Königsberg) que contenía siete puentes. Lo que se pretendía conocer, era si existía la posibilidad de cruzar los siete puentes con la constricción de no repetir ninguno y además debía regresar al punto de partida. Euler lo resolvió de la siguiente manera: esquematizó la ciudad en una red, sustituyó las porciones de tierra por puntos y los puentes por líneas que unían a los distintos puntos. A estos puntos, se les conoce como los nodos de la red y a las líneas que unen los nodos, se les llaman aristas.

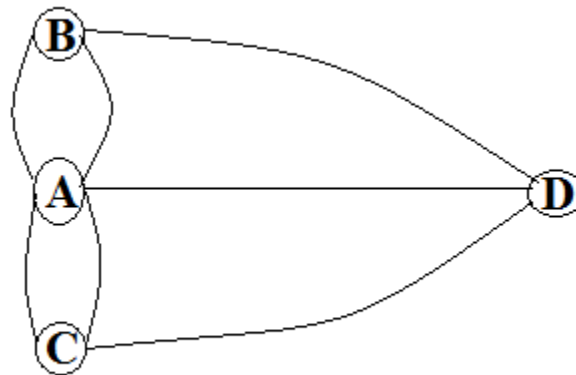


Figura 1.2: Representación de los puentes de Kronisgber en forma de red. Donde las porciones de tierra son los nodos en la red nombrados como A, B, C, o D. Y los puentes son las conexiones u aristas con los nodos

Al simplificar de esta forma el problema, todo se resumía en coger un lápiz e iniciando en un nodo cualquiera de la gráfica (sin levantar el lápiz), tratar de recorrer todo el grafo sin repetir ninguna arista, y regresar al punto de inicio. Este punto de inicio puede ser cualquiera de los cuatro nodos A, B, C o D.



Euler descubrió que en estos tipos de gráficas se pueden recorrer una sola vez sus aristas, siempre que todos sus nodos cuenten con un número de aristas par. En el caso de la gráfica 1.2 tenemos que todos los nodos son impares, es decir tenemos tres aristas por nodo. Así el problema de los puentes de Königsberg, es uno de los primeros ejemplos resuelto usando una representación en red. Dicha representación, corresponde con las cuatro porciones de tierra y de los siete puentes respectivamente. En la gráfica anterior podemos ver que cada nodo tiene un cierto número de aristas o conexiones asociadas a él.

Una definición formal de una red, la podríamos pensar de la siguiente manera: Sea una red  $\mathbf{R}$ , que consiste de un conjunto de nodos  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y un conjunto de parejas ordenadas  $E = \{v_i, v_j\} \subset V \times V$ . Cada pareja ordenada  $(v_i, v_j)$  se llama conexión dirigida del nodo  $v_i$  a  $v_j$ . Y si además tenemos la restricción de que  $(v_i, v_j) \in E$  tal que  $\exists (v_j, v_i) \in E$  entonces tenemos una red  $\mathbf{R}$ , que se conoce como no dirigida. Llamamos a todos los nodos que estén conectados directamente a un nodo  $v_j$ , vecinos de este nodo [3]. Encontramos una definición muy similar para grafos, en [9].

Como se observa en el esquema de los puentes de Euler (*véase figura 1.1*), una de las maneras en las que se representa una red es mediante el uso de puntos y líneas, o nodos y aristas respectivamente. Se puede construir fácilmente una red con base en la idea de conexiones entre nodos y vértices. Lo importante, es poder definir propiedades a partir de las características que pueden tener las distintas redes. Se ha encontrado que una forma de clasificarlas es usando el número de conexiones que tienen los nodos.

### 1.1.1. Definiciones Básicas y Clasificación de las redes.

#### 1.1.1.1. Grado de un nodo y número de conexiones.

Una de las herramientas que comúnmente se utiliza para el estudio de las redes, es el de hallar el número de conexiones de los nodos. De esta forma, si se quiere conocer el número total de conexiones, sólo deberíamos de sumar el número de conexiones por nodo. Al número de conexiones por nodo, se le conoce con el nombre de “grado”, por lo general se denota el grado de un nodo por  $K_i$ , que es el grado del  $i$ -ésimo nodo en la red. Así el número de conexiones totales estaría dado por:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k_i \quad (1.1)$$

Por ejemplo en la siguiente figura, el grado de A es de 3, mientras que el grado de B es de 5. Así el número total de conexiones es de 9.

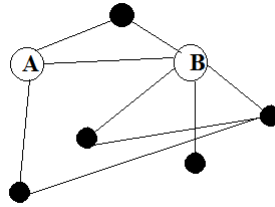


Figura 1.3: Grado de los nodos en la red. El nodo A tiene 3 aristas por lo tanto grado 3 y el nodo B grado 5.

El grado promedio de la red con  $N$  nodos se define como:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N} \quad (1.2)$$

El grado promedio de la figura anterior es de 2.5. Sabemos que el número total de conexiones es de 9 y hay 7 nodos.

Al seleccionar un nodo y obtener su respectivo grado, se puede ver con qué frecuencia aparece este mismo valor, en distintos nodos. De esta forma se obtiene una manera de clasificar las redes. Esta clasificación, se hace tomando en cuenta al grado de los nodos. A esta frecuencia de aparición de los nodos se le conoce como distribución del grado de una red, lo podemos ver como una probabilidad y a esta probabilidad se le denota por  $P_k$ . Es decir, lo podemos pensar como la probabilidad que un nodo seleccionado dentro de la red tenga un grado  $k$ . Si sumamos sobre todas las probabilidades ellas deben ser normalizadas, es decir.[2]

$$\sum_{i=0}^N P_i = 1 \quad (1.3)$$

### 1.1.1.2. Matriz de Adyacencia y Clustering coefficient (Coeficiente de agrupamiento).

Otra forma para estudiar una red, es por medio de la matriz de adyacencia. Está matriz puede cambiar si tenemos una red dirigida o si tenemos una red no dirigida. Primero tratemos el caso de una red no dirigida. Si tenemos que los nodos  $i$   $j$  tienen conexión, entonces existe la conexión  $i - j$ . Esto se representa en la matriz de adyacencia poniendo en el elemento  $A_{ji} = A_{ij} = 1$ . Sin embargo si la conexión no existe, entonces:  $A_{ij} = A_{ji} = 0$ . [2]

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0

Figura 1.4: En esta figura podemos ver como es la matriz de adyacencia no dirigida de una red. Podemos observar que es simétrica respecto a la diagonal. En donde 1 representa que están conectados y cero que están desconectados.

Cuando la red es dirigida, el grado del nodo  $i$  se puede obtener de manera sencilla, sólo sumando el número de elementos que tienen en las columnas. Lo cual quedaría representado como:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} = \sum_{i=1}^N A_{ij} \quad (1.4)$$

Si la matriz es dirigida se puede dar el caso de que un nodo  $i$  esté conectado con  $j$ . Pero que el nodo  $j$  no esté conectado con  $i$ . En la matriz tendríamos los siguientes elementos:  $A_{ij} = 1$  pero  $A_{ji} = 0$ . Claro que también se puede presentar la conexión de  $i$  a  $j$  y de  $j$  a  $i$ . Para este tipo de red dirigida, tenemos dos tipos de grados en los nodos, lo que implicaría que existen grados de entrada y grados de salida:

$$k_i^{\text{entrada}} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (1.5)$$

$$k_i^{\text{salida}} = \sum_{j=1}^N A_{ji} \quad (1.6)$$

Otras definiciones importantes en la teoría de redes complejas, es la longitud promedio y el *clustering coefficient*. La longitud promedio, es el promedio de la distancia entre los pares

de nodos en la red; es el número de elementos en la red que hay que visitar para llegar de un nodo a otro en la red.

Por otro lado el *clustering coefficient*[15], es la probabilidad de que exista una conexión entre dos nodos cuando estos son vecinos de un mismo nodo. Supongamos que  $a$  tiene como conexiones a los nodos  $b$  y  $c$ . Nada implica que  $b$  y  $c$  tienen que estar conectados. Así el *clustering coefficient*, mide que tan probable es que  $b$  y  $c$  estén conectados, tomando en cuenta que ambos están conectados con  $a$ .

Con ayuda de los conceptos anteriores y el avance en la computación se pudo hacer grandes avances en la teoría de redes. Por un tiempo se pensó que las redes podían ser aleatorias; que los enlaces se distribuían de igual manera en los distintos nodos. Pero se encontró que se podían clasificar de diferentes formas.

### 1.1.1.3. Redes de tipo aleatorias.

Erdos y Renyi fueron pioneros en el estudio de redes. Con su publicación en 1959 se pensó que en el mundo sólo existían redes de tipo aleatorio. Este tipo de redes o redes  $E-R$ , tienen la propiedad de que la mayor parte de los nodos, tienen un grado que es cercano a un grado promedio en la red.

Para modelar una red aleatoria, imaginemos que tenemos  $N$  nodos y cada pareja en la red se conecta con la misma probabilidad  $P$ . De manera más específica el algoritmo para poder construir una red aleatoria es el siguiente:[2, 11, 12, 13, 29]

- Se inicia el sistema con  $N$  nodos sin ninguna conexión.
- Se selecciona una pareja de nodos  $i, j$  con un generador de números aleatorios. Obtenemos un número entre 0 y 1 sólo si el número excede a la probabilidad  $P$ , entonces conectamos a  $i$  con  $j$ .

En este tipo de red la probabilidad de que un nodo  $i$  tenga  $k$  conexiones  $P_k$ , es el resultado de tomar en cuenta:

- La probabilidad de que  $k$  de las conexiones estén presentes, que se escribe como  $p^k$
- La probabilidad de que  $(N - 1 - k)$  conexiones no estén,  $(1 - p)^{N-1-K}$
- El número de maneras en que podemos seleccionar  $k$  conexiones de  $N-1$  posibles conexiones.  $\binom{N-1}{k}$

Multiplicando estos elementos tenemos:

$$P_k = p^k (1 - p)^{N-1-K} \binom{N-1}{k} \quad (1.7)$$

Este tipo de red en el límite  $\langle k \rangle \ll N$  sigue una distribución de tipo Poisson es decir:

$$P(k) = \frac{e^{-z} z^k}{k!} \quad (1.8)$$

En estas redes las conexiones entre los nodos son de tipo aleatoria. Dados  $k$  nodos en la red, al agregar un nodo  $n$  este tiene una probabilidad igualitaria de conectarse con cualquier otro nodo,  $k_i$  en la red. Sin embargo en la vida real o en la naturaleza, al estudiar cómo se distribuían los grados en las redes se encontró que no se comportaban como una red aleatoria. La distribución de grado seguía otro tipo de distribución y este tipo de distribución, no era de tipo Poisson.

Otra característica que presentan las redes de tipo aleatorio. Es que la longitud promedio crece como  $\log(n)$ . Mientras que el *clustering coefficient* tiende a la probabilidad de reconexión entre nodos. Es decir al ser igual para todos los nodos y al aumentar el número de nodos, la probabilidad va a tender a cero y por consiguiente, el *clustering coefficient* también.

#### 1.1.1.4. Redes de Mundo pequeño.

Al hacer más investigaciones sobre las redes, se propuso otro tipo de modelo conocido como modelo de mundo pequeño. Este modelo se introdujo con la finalidad de describir la transición de una red localmente ordenada, a una red aleatoria. Watts y Strogats ( $W - S$ ) introdujeron este un nuevo modelo, que se conoció como modelo de mundo pequeño. El modelo  $W - S$ , empieza de la siguiente forma:[42, 40, 41]

- Primero tenemos una red unidimensional de  $N$  vértices, con enlaces entre sus vecinos cercanos y su vecino cercano más próximo. Como en la siguiente figura:

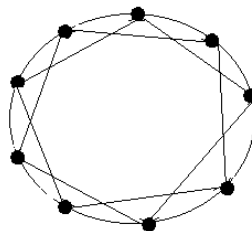


Figura 1.5: Cuando  $P_{ws}$  es decir la probabilidad de reconexión del modelo  $W - S$  es cero, obtenemos una red que es regular, este es el inicio de las condiciones para obtener una red de tipo mundo pequeño..

- Después cada enlace se reconecta con probabilidad  $P_{ws}$ . Donde reconectar significa quitar un enlace y reconectarlo a un nuevo vértice escogido aleatoriamente. Con la

limitación de que no hay dos vértices que tengan más de un enlace y no hay auto-conexiones .

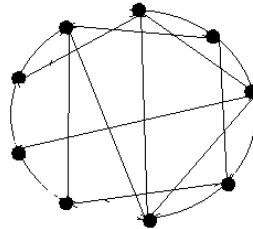


Figura 1.6: Mundo pequeño.

Cuando  $P_{ws} = 0$  la red es totalmente regular *Figura 1.5*, y la distancia  $l$  crece linealmente con  $N$  . Si  $P_{WS} = 1$  el sistema se convierte en una red aleatoria, *Figura 1.6* y  $l$  crece logarítmicamente con  $N$ . Mientras que la red de tipo  $W - S$ , se encuentra en el intervalo  $0 < P_{ws} < 1$  *Figura 1.7*.

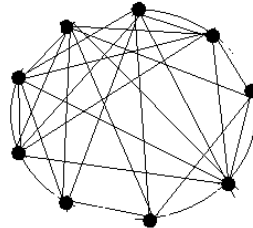


Figura 1.7: Red aleatoria.

Si la red es altamente ordenada (parecida a la *Figura 1.5*) el *clustering coefficient* tiende a ser muy elevado. Esto se debe a que los primeros vecinos de un nodo  $a$  están conectados entre sí. Pero en una red totalmente aleatoria, este coeficiente va a tender a cero. En el caso intermedio, en donde la distancia promedio es baja y el *clustering coefficient* no es ni alto ni bajo, se tiene el modelo de mundo pequeño en una red.

#### 1.1.1.5. Redes libres de escala.

Al procesar datos de redes cada vez más grandes, se observó que la distribución de grado era muy diferente a la de una red de tipo aleatoria. En las redes analizadas, su distribución de grado no era de tipo Poisson[2], era más parecida a una distribución de ley de potencias; por eso son conocidas como redes libres de escala. Se conocía como era su distribución del

grado de la red, pero no se conocía el mecanismo que originaba la formación de la red y uno de los modelos que describe de forma adecuada la distribución de grado, es el modelo de Barabasi.

En las redes libres de escala, los nodos no se conectan con la misma probabilidad como sucede en la red aleatoria. Tampoco hay un número fijo de elementos, son redes abiertas se forman por la continua adición de nuevos nodos al sistema. Así el número de nodos  $N$  se incrementa durante la vida de la red. [2, 29]

Consecuentemente la red se expande continuamente por la adición de nuevos nodos, elementos que formarán conexiones con los nodos que ya están presentes en el sistema; de la adición de nodos surge la idea del enlace preferencial. En el enlace preferencial dos nodos no son conectadas de forma aleatoria, existe una probabilidad de conectarlo con otro nuevo nodo y ésta no es uniforme. Esta probabilidad de conectarse con un nuevo nodo, depende del grado del nodo; si el grado es muy alto, la probabilidad de conexión va a ser grande.

El modelo para explicar la redes libre de escala, fue introducido por primera vez por Barabasi y se puede resumir en los siguientes puntos:

- Crecimiento de la red: Se empieza con un número pequeño de vértices, en cada lapso de tiempo se agregan nuevos vértices con  $m < m_o$  aristas.
- Enlace preferencial: Cuando escogemos los vértices con los que un nuevo vértice se conecta, existe una probabilidad de conexión. Asumimos que la probabilidad  $P_k$  con la que un nuevo vértice se conecta con un vértice  $i$  de la red, depende de la conectividad de  $k$  de ese vértice de acuerdo a :

$$P_k = \frac{2m(m+1)}{(k+2)(k+1)k} \quad (1.9)$$

De lo anterior vemos que cuando  $k$  es muy grande, se da una distribución de potencias que es:

$$P(k) \sim k^{-3} \quad (1.10)$$

Lo que se encuentra es que con este tipo de redes al hacer una gráfica de  $P$  en función del grado  $k$ , se obtiene una gráfica de la siguiente forma:

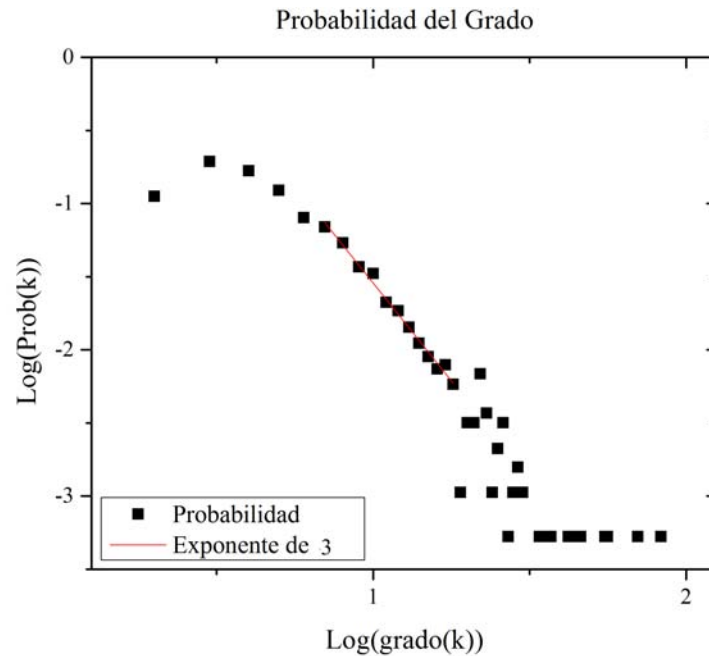


Figura 1.8: Distribución de grado en una red libre de escala. Que tiene exponente de -3

## 1.2. Natural Visibility Graph.

Recientemente se ha intentado estudiar las series de tiempo desde el punto de vista de las redes complejas. Existen algunos algoritmos que se basan en propiedades de las series de tiempo para crear una red y analizar si se trata de una red libre de escala. Si tenemos una serie de tiempo y queremos estudiarla desde el punto de vista de las redes complejas, uno de los algoritmos más fáciles de implementar es el de: “red de visibilidad natural” o por sus siglas en inglés (NVG) [20, 21, 22, 31].

Con este algoritmo lo que se busca es conectar una red, tomando en cuenta lo que un punto en la serie de tiempo es capaz de ver. Para ver, se define la siguiente ecuación. Si se cumple con el criterio, se da la visibilidad.

$$y_c < y_b + (y_a - y_b) \frac{t_b - t_a}{t_b - t_a} \quad (1.11)$$



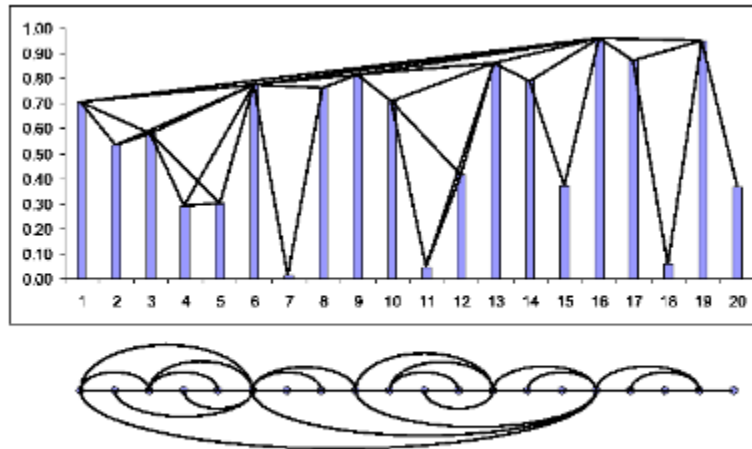


Figura 1.9: Grafica de visibilidad Natural. [20]

El algoritmo de visibilidad natural se basa en relaciones de matemáticas básicas, con el fin de establecer un criterio de conexión de nodos en una serie de tiempo. Este criterio, toma en cuenta la distancia de separación entre los puntos que queremos conectar.

Para ello se necesita comprobar que no exista un tercer punto entre estos dos que obstruya la visibilidad 1.11 . Por ejemplo; supongamos que  $y_a$  , y  $y_b$  tienen la misma altura, entonces según nuestro criterio de visibilidad 1.11, un tercer punto entre estos no obstruiría la visibilidad si es estrictamente menor a  $y_a$  o  $y_b$  que en nuestro caso es el mismo.

Pero surge la siguiente pregunta ¿Cómo se llegó a la fórmula del algoritmo de visibilidad natural? Para poder encontrar el criterio de conexión entre dos nodos lo que se hace es establecer la ecuación de la recta entre dos puntos, después comprobar que el tercer punto este estrictamente por debajo de la línea recta formada entre  $t_a$  y  $t_b$  ; es decir, que no esté contenido en dicha línea o este por arriba de está recta. Supongamos que queremos conectar los puntos  $(t_a, y_a)$  con  $(t_b, y_b)$ . Lo primero que se buscaría, es hacer la pendiente entre los dos puntos, cuya ecuación es:

$$m_{ab} = \frac{y_b - y_a}{t_b - t_a} \quad (1.12)$$

Una vez que tenemos la pendiente podemos encontrar la ordenada al origen (de antemano sabemos que la recta debe de pasar por el punto  $t_b$  ), por lo que la ordenada al origen queda como:

$$b = y_b - m_{ab}t_b \quad (1.13)$$

Una vez que tenemos esto, obtenemos la ecuación de la recta entre los puntos  $a$  y  $b$  que es de la forma:

$$y(t) = m_{ab}t + y_b - m_{ab}t_b \quad (1.14)$$

Con esta recta podemos establecer el criterio de visibilidad en el intervalo de  $[t_a, t_b]$ . Hay visibilidad si para todo  $t_c \in (t_a, t_b)$ , el valor de  $y_c$  es menor a la recta anterior, es decir:

$$y_c < m_{ab}t_c + y_b - m_{ab}t_b \quad (1.15)$$

De donde es fácil ver que se transforma en el criterio de visibilidad natural.

$$y_c < y_b + \left( \frac{y_a - y_b}{t_b - t_a} \right) (t_b + t_c) \quad (1.16)$$

Este criterio toma en cuenta la distancia de separación entre puntos y establece un buen criterio, ya que al reescalar o ante diferentes tipos de transformaciones, la conexión de visibilidad permanece invariante. Así lo único que importa es que la pendiente quede invariante. De esta forma el algoritmo es útil frente a transformaciones afines.

### 1.2.1. Algoritmo de visibilidad Horizontal.

El algoritmo de visibilidad horizontal nos permite pasar de una serie de tiempo a una red. Para saber si dos nodos están conectados, lo único que se tiene que hacer es trazar una línea entre los dos puntos. Si esa línea no es cruzada por otro punto intermedio, se dice que hay conexión. Hay conexión entre los puntos  $x_a, x_b$  en la serie de tiempo si [25, 26, 30]:

$$x_a, x_b > x_c \quad \forall c \in (a, b) \quad (1.17)$$

Este algoritmo representa una simplificación del algoritmo de visibilidad natural, por lo que está red horizontal va a estar contenida dentro de la red asociada al algoritmo de visibilidad natural. Al igual que el algoritmo de visibilidad natural, tendremos que nuestra red va a estar siempre conectada, pues continuamente va a existir visibilidad al menos con el vecino más cercano.

También es invariante frente a transformaciones de reescalamiento y frente a traslaciones. Una característica de este algoritmo, es que el mapeo entre la red y la serie de tiempo será reversible. Esta irreversibilidad se da si la matriz de adyacencia no se hace de forma binaria (1 y 0), si no mas bien con determinados pesos. Al estar conectado en vez de poner un uno, ponemos el valor de la altura en ese punto de la variable. Existe una versión más general del algoritmo [4], en donde el ángulo de visión puede cambiar, tanto como uno lo desee. Este algoritmo se podría pensar como la generalización del algoritmo de visibilidad natural.

## 1.3. De una serie a una red.

A continuación tenemos un pequeño ejemplo del algoritmo de visibilidad natural, tenemos una serie de 35000 datos y será estudiada brevemente, bajo el algoritmo de visibilidad natural. La siguiente figura es el grafico de la serie de tiempo.

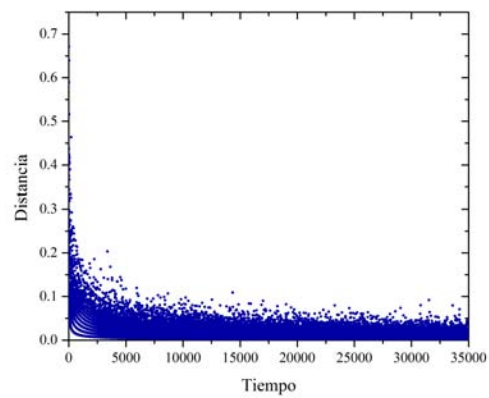


Figura 1.10: Primeros 35000 de la serie de tiempo

En la siguiente imagen podemos observar una visualización de la serie de tiempo, al ser transformada en una red por medio del algoritmo (VNG)

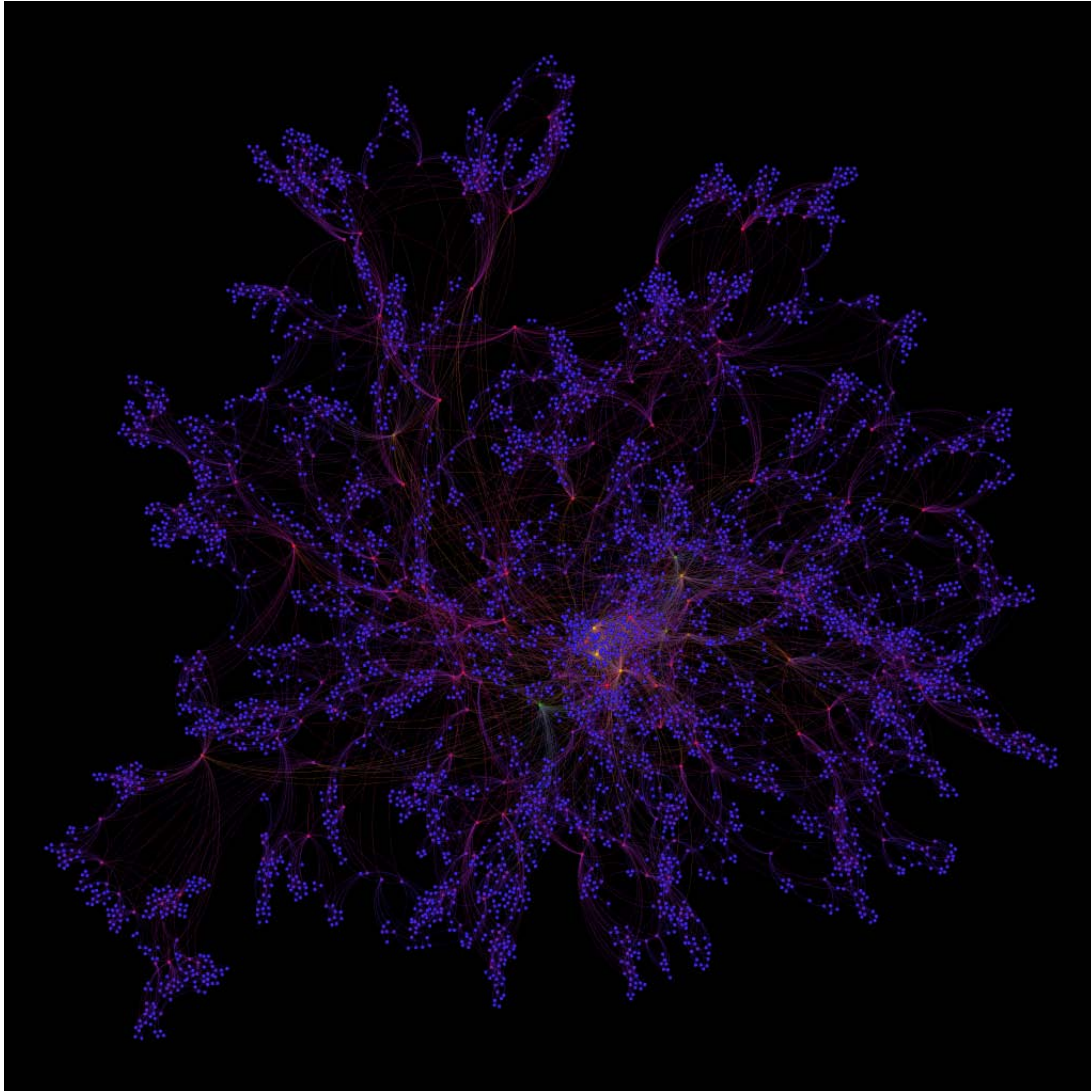


Figura 1.11: Red en terminos de las distancias de los primeras 35000 puntos de mi serie de tiempo. Se observa que hay pocos nodos que tienen muchos enlaces (Colores más amarillos.), se da el enlace preferencial de Barabasi.

Si se estudia las propiedades de la serie de tiempo en términos de la red creada, esta se comporta de manera aleatoria. Cuando se estudió el comportamiento de la longitud de la red con el tamaño de esta, se observó que crecía como una red de mundo pequeño. En este caso, no se dió la repulsión entre nodos y sucedió que algunos puntos en la red tuvieron una gran visibilidad, mientras que otros no. Ello trajo como consecuencia que se pudiera ir de un punto de la red a otro, sin recorrer un gran número de nodos. Este fenómeno también se vió reflejado en el hecho de que el comportamiento de la distribución del grado en la red, es una distribución que se asemeja a una red de tipo invariante de escala; esto es porque se da un enlace preferencial. En este ejemplo, el enlace preferencial es un enlace que tendrá una

gran visibilidad, de los demás puntos en la serie de tiempo.

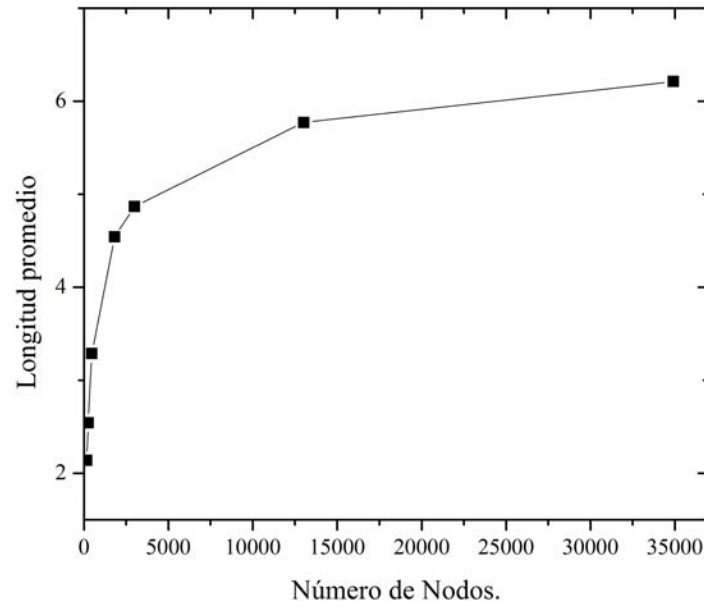


Figura 1.12: En la figura anterior se observa el comportamiento de la longitud de la red, conforme al número de nodos en la red.

En la gráfica anterior podemos observar que el comportamiento de la longitud promedio respecto al número de nodos en la red. Y se puede observar que el crecimiento es acotado, no crece de forma lineal como lo haría una red ordenada. Sin embargo al no conocer el *clustering coefficient*, no podemos saber si la red presenta la característica de mundo pequeño.

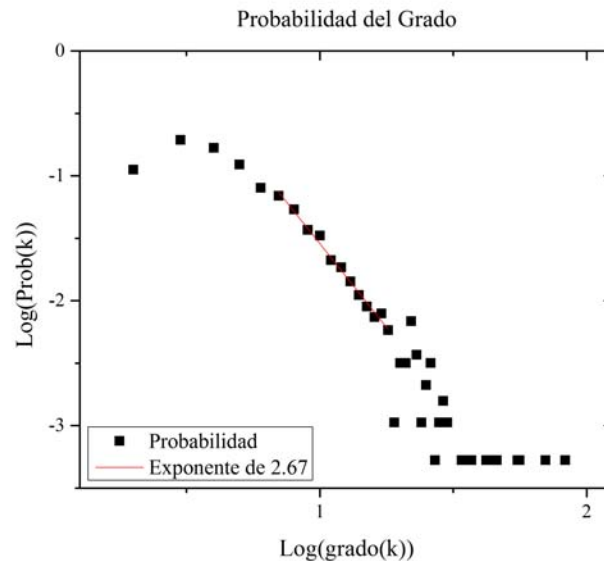


Figura 1.13: En la figura anterior podemos observar que la red tiene un comportamiento de una red libre de escala, con un factor de 2.6

De lo anterior podemos deducir, que es posible estudiar las series de tiempo usando la teoría que fue desarrollada en las redes complejas [2, 9, 29]. En los ejemplos anteriores, observamos que cuando existe una red que se comporta de forma más aleatoria a una red periódica, se da lo que Barabási llamó enlace preferencial; el enlace preferencial, lo podemos imaginar como lo que ocurriría en una ciudad con pocos edificios altos; Si existen pocos edificios altos, seguramente veríamos toda la ciudad, ello implicaría que existen un gran número de conexiones y un enlace preferencial por visibilidad. En tanto, si tenemos distribuido a lo largo de la ciudad un gran número de edificios altos de manera periódica, estos edificios nos cortarían la visibilidad y sólo podríamos ver a nuestros edificios vecinos, sin que existiera la posibilidad de ver el resto de la ciudad. De esta manera se perdería el enlace preferencial y a consecuencia de ello, la longitud promedio en la red crecería con el número de nodos.

Cabe mencionar que con el algoritmo de visibilidad natural, estudiaré propiedades asociadas a las series de tiempo que se pueden formar en la música. Se tratará a las notas musicales, como un evento en una serie de tiempo. Antes de continuar, hare una breve introducción a las notas musicales.

# Capítulo 2

## Antecedentes en música.

La música como tal, es uno de los lenguajes más universales y a diferencia de los distintos lenguajes que conocemos, como el español, el chino o el alemán; en la música, no es necesario tener un conocimiento previo de la gramática y las diferentes reglas lingüísticas para poder disfrutarla, podemos escuchar piezas de distintos compositores como Bach, Mozart o muchos otros, disfrutando de sus creaciones. Para entender un poco la música, en este capítulo introduciré algunos conceptos básicos.

### 2.1. Notas Musicales.

En el siglo X Guido de Arezzo un monje benedictino, fue quien le dio el nombre a las notas musicales; nombres que perduran hasta hoy en día. Lo que hizo Arezzo fue tomar las silabas ut-re-mi-fa-sol-la, estas silabas provenían de un himno en donde los cantores piden a San Juan el Bautista que los proteja: [17]

**Ut** queant Laxis  
**R**esonare fibris  
**M**ira gestorum  
**F**amuli tourum  
**S**olve polluti  
**L**abil reatum,  
**S**ancte **I**oannes.”

Y tiempo después se cambió el “ut” por “Do” y se introdujo el “Si” para el séptimo tono. En ocasiones (siguiendo la notación inglesa), a las notas se le pueden dar los siguientes nombres: **A**(La), **B**(Si), **C**(Do), **D**(Re), **E**(Mi), **Fa**(F), **G**(Sol).

Las notas suelen ser colocadas en un diagrama de cinco líneas horizontales conocido como pentagrama y al símbolo a la izquierda del pentagrama se le conoce como clave. La clave, da la referencia de la posición de las notas en el pentagrama; al asignar a una sola línea el valor de una nota. En el caso de la siguiente figura, la clave del pentagrama superior, se le conoce como clave de Sol. La clave de Sol, le asigna a la segunda línea del pentagrama

el valor de la nota Sol. En el pentagrama inferior, tenemos lo que se le conoce como clave de Fa. La clave de Fa le asigna a la cuarta línea del pentagrama, el valor de la nota Fa.

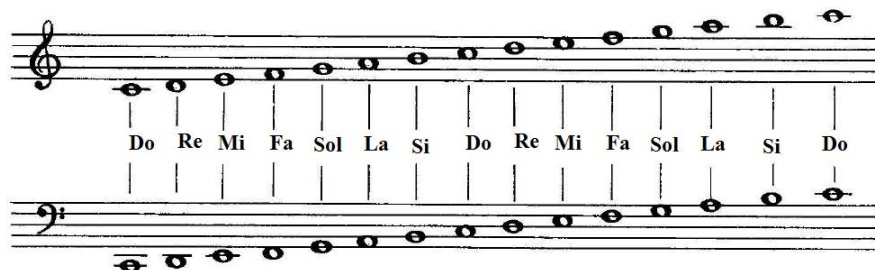


Figura 2.1: Representación de las notas musicales en el pentagrama.

El compás musical es otro símbolo que aparece en un pentagrama, éste funciona como métrica. El valor del compás, se coloca al inicio del pentagrama y utilizando líneas perpendiculares a las líneas del pentagrama, este queda dividido en compases musicales, a su vez, dentro de los compases es donde se colocan las notas musicales.

El valor del compás nos da información acerca de cuantas figuras musicales pueden estar dentro de cada compás, mientras que las figuras musicales, nos dan información de que tan rápido o lento una nota debe ser ejecutada. Por ejemplo, si tenemos un compás de  $\frac{4}{4}$ , esto significa que en cada compas se pueden colocar 4 notas negras o 4 figuras de  $\frac{1}{4}$  de tiempo .

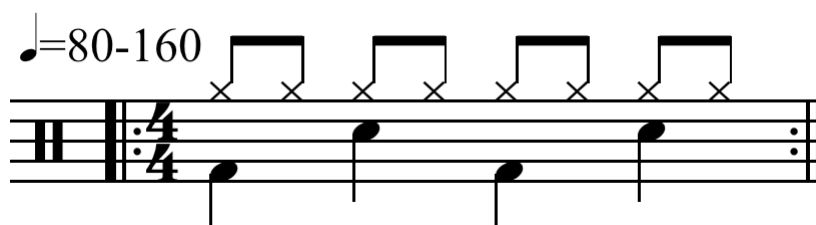


Figura 2.2: Compas de  $\frac{4}{4}$

La duración de una nota queda determinada por la forma o figura musical que pueda tener. La nota que tiene mayor duración es la Redonda. Si pensamos que la redonda dura 4 segundos, entonces la figura conocida como blanca dura 2 segundos. O dos blancas equivalen a la misma duración de una redonda. Mientras que cuatro negras, tienen la misma duración que una redonda. En términos de duración una negra duraría solamente 1 segundo. En la siguiente figura tenemos todas las posibles figuras musicales, así como su duración en segundos. Para la duración en segundos se toma como referencia la redonda, con duración de 4 segundos.










Nota	Figura	Tiempo	Tiempo en seg.
Redonda		4/4	4 seg.
Blanca		2/4	2 seg.
Negra		1/4	1 seg.
Corchea		1/8	0,5 seg.
Semicorchea		1/16	0,25 seg.
Fusa		1/32	0,125 seg.
Semifusa		1/64	0,0625 seg.

Figura 2.3: Duración en terminos de tiempo de las notas

### 2.1.1. Tono y semitono

Arenzzo sólo nombro siete notas, sin embargo existen más. Estas otras notas, se encuentran entre las notas musicales principales. Por ejemplo, entre Do y Re existe lo que se conoce como Do#. Este Do# se conoce como un semitono, mientras que al # se le conoce como sostenido. En la construcción de la escala musical conocida como temperada, se propuso que en la distancia entre un tono y un semitono hubiese un cambio en la frecuencia inicial, el cual debía de ser de  $2^{\frac{1}{12}}$  de la frecuencia. Por ejemplo para conocer la frecuencia de Do#, solo basta con saber la frecuencia de Do y multiplicar esta frecuencia por  $2^{\frac{1}{12}}$ . Se puede decir que todas las notas que existen son doce semitonos y son las siguientes:

Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si. Así tenemos que:

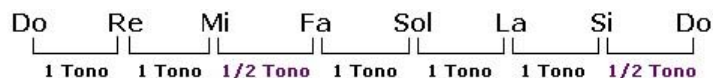


Figura 2.4: En la construcción musical se tiene que existan un total de 12 semitonos. En donde vemos que hay distancias entre notas que toman dos semitonos y se dice que existe un tono entre estas dos notas, y notas en donde la distancia es de un semitono.

Entre **Mi–Fa** y **Si–Do** existe un semitono, entre el cambio de las notas. Entre las demás notas hay dos semitonos de diferencia, por ejemplo, entre **Fa** y **Sol** está el semitono de **Fa–Fa#** y el semitono de **Fa#–Sol**. Estos dos semitonos se les conocen como tonos y el paso de dos semitonos se le considera un tono. Es decir podríamos partir de **Do** normal y aumentar un semitono, lo que nos daría un **Do#**, si a este **Do** sostenido aumentamos otro semitono, tenemos entonces un Re. En tanto que si tenemos un **Mí** y hacemos **Mi#**, esto

sería la nota **Fa**. Ya que entre las notas **Mi** y **Fa** solo existe un semitono de separación entre estas, cosa que no ocurre entre Do y Re.

Si tenemos una nota cualquiera y aumentamos por ejemplo doce semitonos, entonces llegamos a la misma nota inicial pero con el doble de su frecuencia original. Si partiéramos de la nota **Do** y nos desplazáramos doce semitonos, entonces llegaríamos otra vez a **Do**, con la diferencia de que este nuevo **Do** esta al doble de la frecuencia del **Do** inicial. Por ejemplo podríamos tener el **La** a una frecuencia de 440Hz en una octava, y en la siguiente octava tendríamos que el **La** tiene una frecuencia de 880Hz  $.880Hz$ .

Es muy común que al pensar en notas musicales, sólo se piense en las 7 notas principales. A este conjunto de notas, se le conoce como escalas diatónicas. Estas escalas están conformadas por 7 notas y se pueden diferenciar en dos tipos de escalas: las escalas diatónicas mayores y las menores.

La forma que siguen las escalas mayores:

Tono-Tono –Semitono-Tono-Tono –Tono-Semitono

La forma de las escalas menores.

Tono-Semitono-Tono-Tono-Semitono-Tono-Tono

Esta sucesión de tonos y semitonos es lo que da personalidad a cada escala musical. Se cree que las escalas diatónicas mayores suenan “brillantes”, lo cual es ideal para melodías alegres y simpáticas. Mientras que las escalas diatónicas menores, tienen una sonoridad “oscura”, por lo que son buenas para componer melodías románticas o para expresar nostalgia o emociones similares.

## 2.1.2. Armonía, textura y melodía musical.

Existen algunas definiciones en la música, que se suelen pasar por alto o que no son tomadas en cuenta en el momento en el que estamos disfrutando de una sinfonía. Esto puede ser porque no las necesitamos para comprender la música o regocijarnos con ella. Sin embargo, debemos de entender que las definiciones es lo que hace que la música sea especial y tenga cierta particularidad.

Es por ello, que conviene repasar algunas de esas definiciones. Cuando más alta sea la frecuencia (Hz) en la nota que toca un violín, su sonido será más agudo. Si la nota es tocada por un chelo, su nota será más grave pues es emitida con menor frecuencia. Conociendo la frecuencia, podemos saber la altura de la nota; entre más aguda sea una nota, estará más alta que una nota grave.

### 2.1.2.1. Melodía.

Al escuchar música no sólo se aprecian notas aisladas, sino que solemos escuchar una serie de sonidos uno tras otro, que pueden resultar agradables y otras veces no tanto. Está secuencia de sonidos, pueden tener distinta altura (así no necesariamente existe una sola nota repetida indefinidamente) y a ello se le conoce como melodía. Las agrupaciones de sonidos van a depender de las relaciones entre las frecuencias consecutivas, a estas relaciones se

les conoce como tonos o semitonos. En síntesis una melodía es una serie ordenada, que representa varias notas de distintas alturas y duraciones específicas.

#### 2.1.2.2. Textura Musical.

La textura musical es el conjunto de diferentes melodías y distintas serie de notas en una composición y la manera en que éstas se relacionan. Pueden ser de distintos tipos, hay texturas que se conocen como Monodias que representan un conjunto de notas en una sola serie y se podría pensar que sólo es un único hilo sonoro.



Figura 2.5: Monodia, una secuencia de notas una tras otra

Otro tipo de textura se le conoce como textura homófona y se caracteriza por tener notas que se tocan simultáneamente. Existe otro caso en donde la obra contiene dos o más melodías independientes, esto lo podemos imaginar cómo dos o más series de notas que se tocan de manera simultánea. Estas melodías se conocen como polifónicas, es decir tienen varias voces, como los cánones o las fugas. Cuando se dan repeticiones de un mismo motivo en distintas series o voces se les conoce como contrapunto imitativo.

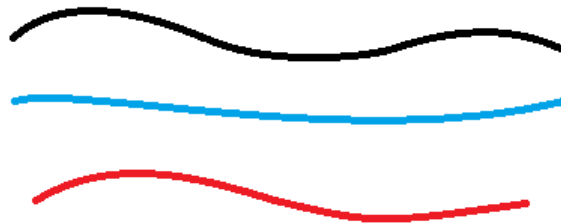


Figura 2.6: Polifonia: En donde vemos que una de las melodías es de color negro, otra de color azul y otra roja. Todas se tocan a la vez

#### 2.1.2.3. Armonía.

Cuando se tocan varias notas al mismo tiempo, se conoce como acorde. En tanto la armonía, es el arte de combinar acordes. Los acordes van arreglándose de forma que se conocen como progresión de acordes. La armonía funciona como acompañamiento de las melodías o como una base sobre la que se desarrollan varias melodías simultáneas.

### 2.1.3. MIDI.

El formato MIDI es un formato adecuado para poder estudiar la música. Este formato es la abreviatura de *Musical Instrument Digital Interface* (Interfaz Digital de Instrumentos Digitales) y contiene toda la información contenida en una partitura. Un archivo tipo MIDI, es muy diferente de cualquier formato que usualmente reproducimos para escuchar música. Se puede pensar que el formato MIDI es más un protocolo de comunicación entre instrumentos electrónicos y computadoras. La principal diferencia entre un archivo de audio normal y uno MIDI, es que un archivo de audio está diseñado para poder ser entendido al reproducirlo. Mientras que un MIDI es la partitura codificada, de tal forma que tiene sentido para una computadora. Al poseer la partitura tenemos toda la información que nos lleva a reproducir la obra.

La información de la partitura, es decir, la duración de la nota, intensidad, valor de la nota y todo lo que usualmente encontramos en una partitura, aparece codificada de la siguiente forma.

0	0	Header	1	3	240	
1	0	Start_track				
1	0	End_track				
2	0	Start_track				
2	60	Note_on_c	0	63	100	
2	120	Note_off_c	0	63	100	

Cuadro 2.1: Formato Midi

La información contenida en el cuadro de arriba es el formato de salida del programa miditocsv. Este programa es bastante simple de usar, solo se necesita tener un formato tipo MIDI. La primera columna, tiene información de en qué voz nos encontramos, si está en 0 significa que es la línea de cabecera, en esta línea se declara el tipo de archivo MIDI, cuantas voces tendrá el archivo y el tiempo que tendrá una nota negra en segundos. En nuestro ejemplo el 1 nos dice que es un archivo de formato MIDI 1, mientras que el 3 indica que van a existir 3 voces. En tanto que el tiempo nos lo da el 240 y nos dice que cada 240 pulsos del reloj de la computadora cuentan como una nota de valor negra.

En la siguiente línea de nuestro ejemplo, la primera columna pasa a ser 1. En este punto se declara toda la información respecto al autor, nombre de la obra, cuando se compuso y toda la información de este tipo, a lo cual se le conoce como metadatos, sin embargo, para nuestro trabajo no es relevante.

Cuando la primera columna pasa a ser 2, entonces tenemos la información de la primera voz y se inicia con un Start\_track, debajo de esta declaración tenemos la información de esta voz. En la primera columna tenemos un 2, luego tenemos un 0, esto nos indica que en

el valor de 0 pulsos se inicie la nota 63 del formato MIDI y esto se declara con la sentencia **Note\_on\_c**. La intensidad de la nota, o sea que tan fuerte suena, está dado por el valor 100 y la intensidad más alta en un archivo MIDI es 128, mientras que la intensidad más baja es 0. Si tenemos un 0, es lo mismo que apagar una nota musical. Algunas veces se suele usar esta notación en los archivos MIDI, en vez de poner la sentencia **Note\_off\_c**, se pone **Note\_on\_c** pero con la intensidad en 0. El programa del anexo funciona con archivos cuya intensidad es 0.

Una de las mayores dificultades en el presente trabajo, fue limpiar los archivos MIDI cuando se tiene la sentencia **Note\_off\_c**, una forma fácil de limpiar el archivo fue usando Python. De la siguiente forma :

```
import re
archivo=open('midi.csv')
for line in archivo:
line=line.rstrip()
if re.search('Note_on',line):
print line
```

*Cuadro 2.2: Código en Python, usando regular expressions, para limpiar archivos*

A continuación se observa un piano y su respectivo valor en términos del formato MIDI. Lo que podemos observar es que no empieza en 0. La nota más grave del piano tiene como valor 21, a este valor le corresponde la nota “La” de octava 0 y tiene una frecuencia de 27.5 Hz. Mientras que la nota más aguda en el piano es la 108 en valor MIDI, que corresponde a un “Do” de octava escala C8. A esta nota le corresponde una frecuencia de 4186 Hz

MIDI number	Note name	Keyboard	Frequency Hz	Period ms
21	A0		27.500	36.36
23	B0		30.868	29.135
24	C1		32.703	30.58
26	D1		36.708	34.648
27	E1		41.203	38.891
29	F1		43.654	22.91
31	G1		48.999	46.249
32	A1		55.000	51.913
33	B1		61.735	58.270
35	C2		65.406	15.29
36	D2		73.416	69.296
38	E2		82.407	77.782
40	F2		87.307	11.45
41	G2		97.999	92.499
43	A2		110.00	103.83
44	B2		123.47	116.54
45	C3		130.81	7.645
47	D3		146.83	138.59
48	E3		164.81	155.56
49	F3		174.61	5.727
50	G3		196.00	185.00
52	A3		220.00	207.65
53	B3		246.94	233.08
54	C4		<b>261.63</b>	<b>3.822</b>
55	D4		293.67	277.18
56	E4		329.63	311.13
57	F4		349.23	2.863
58	G4		392.00	369.99
59	A4		<b>440.00</b>	<b>415.30</b>
60	B4		493.88	466.16
61	C5		523.25	1.910
62	D5		587.33	554.37
63	E5		659.26	622.25
64	F5		698.46	1.432
65	G5		783.99	739.99
66	A5		880.00	830.61
67	B5		987.77	932.33
68	C6		1046.5	0.9556
69	D6		1174.7	1108.7
70	E6		1318.5	1244.5
71	F6		1396.9	0.7159
72	G6		1568.0	1480.0
73	A6		1760.0	1661.2
74	B6		1975.5	1864.7
75	C7		2093.0	0.4778
76	D7		2349.3	2217.5
77	E7		2637.0	2489.0
78	F7		2793.0	0.3580
79	G7		3136.0	2960.0
80	A7		3520.0	3322.4
81	B7		3951.1	3729.3
82	C8	J. Wolfe, UNSW	4186.0	0.2389

Figura 2.7: Notas transformadas a valores numericos en formato MIDI.

## 2.2. La música como serie de tiempo y redes.

Existen muchos trabajos en donde se ha estudiado la música. Uno de estos es el trabajo realizado por Voss y Clark [39]. Ellos usaron el espectro de potencias y encontraron un comportamiento de la forma  $1/f$ . Este tipo de comportamiento en el espectro de potencias, implica cierta autocorrelación en la serie de tiempo. El espectro de potencias lo que nos hace notar es que la música depende de los sonidos anteriores, así tiende a tener memoria y no se comporta como un simple ruido blanco. Aunque esta dependencia existe no es una dependencia muy grande con su pasado en la serie de tiempo, es decir es una dependencia de corto alcance. Esta dependencia en las frecuencias es de la forma  $1/f$ , al estudiar su espectro de potencias. Y ocurre en la mayor parte de la música, [28, 14, 38].

Otro tipo de análisis, consiste en ver a la música como un tipo de fractal y esto se puede ver en los artículos [19, 6, 33]. Pensemos en lo siguiente podríamos tocar las notas en un piano una tras otra, sin embargo esto no produce música, lo que crea música es la melodía, que consiste en una secuencia ordenada de notas. Es entonces cuando podríamos plantearnos si esta sucesión de notas es de tipo fractal, a lo que [19] responde es que sí puede pensarse en la sucesión de frecuencias como algo de tipo fractal. Otra característica de la música y de su fractalidad es que a pesar de quitar notas de una composición, esta seguiría conservando su esencia. En este punto es interesante la anécdota de las muchas notas de la obra *Die Entführung aus dem Serail KV 384*, de Mozart, al componer esta obra, el emperador Joseph Benedikt Anton, preguntó si eran necesarias tantas notas, a lo que Mozart respondió que eran sólo las necesarias. En [18] se encontró que al reducir el número de notas, tomando a Bach BWV 772, lo que resultaba seguía pareciéndose a Bach.

Recientemente se ha intentado analizar la música desde otro punto de vista. Estudiándola partiendo de los valores que uno le quiera ir dando a una nota, a partir de ello formar series musicales o redes de notas como veremos a continuación.

### 2.2.0.1. Caminatas Musicales y Hurst.

En [37] se menciona el estudio de series de tiempo mediante técnicas de movimiento browniano, en el cual se genera una serie de tiempo con base en una nota de referencia y las distancias en semitonos. Por ejemplo, pueden tomar como referencia al “Do” de la cuarta octava como valor inicial y si se desplaza a la nota “Re” de la misma escala aumenta en 2 el valor y así sucesivamente. En este caso se estudia la pieza usando el exponente del espectro de potencias del espectro de Fourier y los exponentes de Hurst. Con base en ello se encontró que existía una tendencia al analizar las series encontrando que el exponente de Hurst (Ver siguiente capítulo) era menor a 0.5. Esto tiene sentido, ya que implica que en la música hay cierta variabilidad, es decir al ser menor el exponente a 0.5 se da lo que se conoce como “antipersistencia”, en otras palabras, que la serie de tiempo se mueve de manera contraria al paso anterior. Por ejemplo si en un paso anterior tenemos una nota alta, en el siguiente paso tendremos una nota baja.

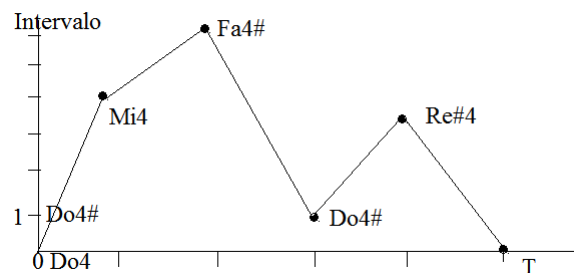


Figura 2.8: A manera de ejemplo. Supongamos que inicialmente la serie empieza en Do 4, es decir el Do de la 4 octava. Y le sigue Do# y después Fa# así sucesivamente es la sucesión de notas y generan una serie que se le conoce como: caminata musical, puesto que depende del valor base y de los tonos entre este valor base.

Al tener la serie de tiempo formada por valores de las notas y su respectivo tiempo, encontraron que el exponente de Hurst era distinto de 0.5, por lo que existía una tendencia entre los datos, pues no aparecían de manera azarosa y había una cierta correlación entre las subidas o bajadas en la serie de tiempo. Más en concreto, averiguaron que las piezas analizadas por ellos tenían un exponente de Hurst menor a 0.5, lo que significa que estaba en una zona anti persistente.

### 2.2.0.2. Redes libres de escala musicales.

Otra idea que se tuvo para estudiar la música, fue por medio del uso de herramientas como las redes complejas, [24, 23]. Por simplicidad ellos usaron sólo notas individuales a la hora de construir la red. Consideraron como nodos las distintas notas, estos nodos estarían conectados si en la pieza había una interacción de primeros vecinos, es decir si había conexión entre los nodos formados por dos notas. Si esas dos notas se tocaban de forma consecutiva y creando redes dirigidas, entonces se daba la conexión de la nota que se tocaba primero a la que le seguía, pero al revés no sucedía la misma conexión.



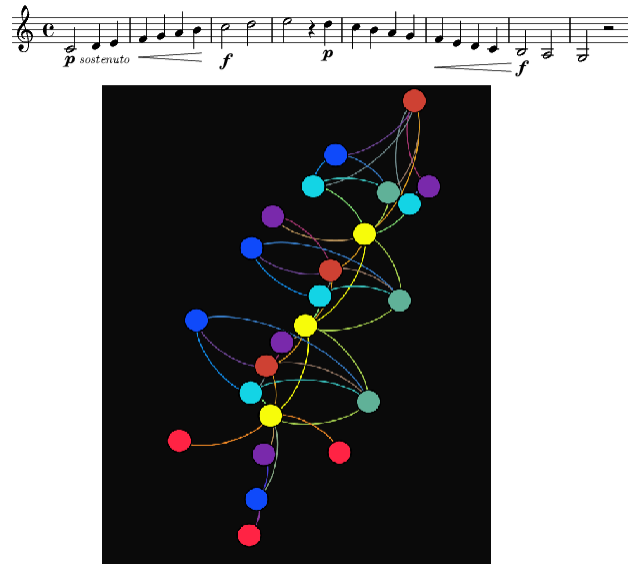


Figura 2.9: Conversión de notas a una red musical de primeros vecinos.

Xiao Fan Liu y Michael Small caracterizaron la música estudiada (Incluía obras de Bach, Mozart y Chopin), por medio de las distintas propiedades que existen en la red, como el número de nodos, el grado medio, el diámetro de la red. Encontraron la distribución de los grados en la red para las piezas examinadas y descubrieron que todas parecían comportarse como si fuesen redes libres de escala. Una vez creada la red, trataron de usarla para reproducir música[24], ya que en principio esta red tendría la información de cada autor. Para ello utilizaron distintos algoritmos, basados en la idea de hacer caminatas aleatorias en la red. Usaron los pesos en las aristas de la red para establecer conexiones y entre mayor fuese usada una determinada arista en algún nodo, era más probable que en la música creada se usara esa misma conexión. Otra forma fue utilizar el grado de los nodos para establecer las conexiones de la misma..

## Capítulo 3

# Exponente de Hurst en series Musicales .

Harold Edwin Hurst a mediados del siglo pasado durante la construcción de una presa en el Nilo, ideó una forma de estudiar eventos en una serie de tiempo que se pensaba eran de carácter aleatorio y observó que no eran tan aleatorios, sino que exhibían un cierto tipo de memoria a largo plazo. El problema que él enfrentó, era cómo diseñar un estanque para la presa de tal forma que nunca estuviese seca. Muchas personas en esa época pensaban que al depender de muchos factores externos, la cantidad de agua en la presa y la cantidad de agua en el estanque debería de tener un comportamiento caótico.

Hurst sabía que no era un proceso aleatorio como tal, revisó los registros históricos que mantenían los egipcios y observó que los flujos más grandes que el promedio, eran seguidos por sobre flujos de mayor magnitud. Después inesperadamente el proceso cambiaba a flujos menores, hasta que el flujo fuera bastante menor comparado con el promedio. Al usar los análisis estándares, se revelaba que no había ningún tipo de correlación estadísticamente significativa entre las observaciones.

### 3.1. Movimiento Browniano.

El botánico Robert Brown en 1827, notó que el polen suspendido en un fluido se movía de manera errática. Dentro de sus observaciones pudo constatar que al aumentar la temperatura del fluido, el polen se movía mucho más rápido. Si recordamos la idea detrás del movimiento Browniano, uno de los modelos con los que es más fácil visualizar este tipo de movimiento, es por medio de la ecuación de Langevin:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m\gamma \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (3.1)$$

Esta ecuación es el primer ejemplo de una ecuación diferencial de tipo estocástica, debido al termino aleatorio  $F(t)$  y resolver esta ecuación consiste en un proceso estocástico. En el modelo de Langevin, se modela las colisiones de las partículas Brownianas con las moléculas del fluido. Las colisiones se logran por medio de una fuerza de fricción que representa el termino  $m\gamma$ , y por medio de la fuerza de tipo fluctuante  $F(t)$ . La fuerza en la ecuación de

Langevin, cumple con una característica importante, la cual es que el promedio de la fuerza es cero:

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (3.2)$$

Esta hipótesis implica que la velocidad en la partícula Browniana promedio, es igual a cero, ya que no hay fuerza externa aplicada. Recordando la densidad de probabilidad de una variable aleatoria, normalmente distribuida con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.3)$$

La densidad de probabilidad de la posición de un movimiento Browniano al final de un periodo de tiempo  $[0, t]$  se obtiene al sustituir  $\mu = 0$  y  $\sigma^2$  por  $\sqrt{t}$ . Así se obtenemos la ecuación para la densidad de probabilidad para la posición:

$$\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2} \quad (3.4)$$

La distribución de probabilidad a un incremento  $B(t+u) - B(t)$ , es:

$$P[B(t+u) - B(t)] = \int \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)^2} dx \quad (3.5)$$

La distribución de probabilidad para los incrementos, depende sólo del tiempo entre los eventos, ya que la desviación estándar a un tiempo  $t$  es  $\sqrt{t}$ . Mientras más tiempo ocurre entre dos eventos, la distribución de probabilidad se ensancha. En tanto en un movimiento de tipo Browniano la varianza  $Var[B(t)] = E[B(t)^2] - (E[B(t)])^2$  es igual a  $t$  para un intervalo  $\Delta t$ , la  $Var[B(\Delta t)] = \Delta t$ . A este tipo de comportamiento, se le conoce como “variable gaussiana aleatoria”.

Otra característica de un movimiento de tipo Browniano es que los incrementos  $B(t_1) - B(t_2), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_m) - B(t_{m-1})$ , son totalmente independientes. Mandelbort y Van Ness, por medio de una integral estocástica, dieron una representación de lo que se conocería como movimiento browniano fraccional (fBm) por sus siglas en ingles, este tipo de movimiento, se basa en el movimiento Browniano normal.

### 3.1.1. Movimiento Browniano Fraccional .

El movimiento Browniano fue introducido por primera vez en 1940, con el nombre de Wiener Helix. El nombre de movimiento browniano fraccional es debido a Mandelbort y Van Ness, quienes en 1968 lo representaron de manera integral, en términos del movimiento Browniano convencional.

Normalmente se suele definir de la siguiente forma:

Sea  $H$  una constante entre  $(0, 1)$ . Un movimiento Browniano Fraccionario (fBm, Fractional Brownian motion)  $(B^H(t))_{t \geq 0}$  de exponente de Hurst  $H$  es un proceso Gaussiano continuo, con función de covarianza:

$$E[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (3.6)$$

Para  $H = \frac{1}{2}$ , el fBm se vuelve un movimiento browniano estandar.

Los movimientos de tipo fBm, se suelen dividir en tres categorías diferentes. La primera corresponde a cuando  $H$  está comprendida en el intervalo  $(0, 0.5)$ , la segunda es cuando  $H = \frac{1}{2}$ , y por último  $H$  en el intervalo  $(0.5, 1)$

La correlación entre dos puntos en un movimiento de tipo Browniano, son totalmente independientes. Sin embargo en los movimientos de tipo fBm no ocurre lo mismo, ya que dejan de ser independientes unos de otros. Dos incrementos de la forma  $B^{(H)}(t+h) - B^{(H)}(t)$  y  $B^{(H)}(t+2h) - B^{(H)}(t+h)$  tienen una correlación de tipo positiva para valores de  $H > 0.5$ . Mientras que están correlacionados de manera negativa si  $H < 0.5$ . En el primer caso, el proceso presenta un comportamiento de agregación o persistencia y a veces se le conoce como sistemas con memoria. En tanto en el segundo, se puede usar para modelar casos en donde se presenta intermitencia o antipersistencia.

### 3.1.2. Exponente de Hurst

A continuación se muestra el proceso para obtener el exponente de Hurst de una serie de tiempo:

- Se empieza con una serie de tiempo de longitud  $M$ . Se convierte esta serie de tiempo en una de longitud  $N = M - 1$ , de razones logarítmicas:

$$N_i = \log\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, (M - 1) \quad (3.7)$$

- Dividir este periodo de tiempo en  $A$  subperiodos de longitud  $n$ , tal que  $A * n = N$ . Nombrando cada subperiodo  $I_\alpha$  con  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, A$ . Cada elemento en  $I_\alpha$ , es llamado  $N_{k\alpha}$  tal que,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Para cada  $I_n$  de longitud  $n$  el promedio es:

$$e_\alpha = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n N_{k\alpha} \quad (3.8)$$

Donde  $e_\alpha$ , es el promedio de  $N_i$  contenido en el subperiodo,  $I_\alpha$  de longitud  $n$ .

- Las diferencias de cada elemento,  $N_{i\alpha}$  con respecto a la media  $e_\alpha$  para cada subperiodo  $I_\alpha$  se van sumando para obtener una serie de tiempo acumulada  $x_{k\alpha}$ .

$$x_{k\alpha} = \sum_{i=1}^k (N_{i\alpha} - e_\alpha) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.9)$$

- El rango  $R_{i\alpha}$  se define como: La diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de  $X_{k\alpha}$  para cada subperiodo de  $I_\alpha$

$$R_{i\alpha} = \text{Max}(X_{k\alpha}) - \text{Min}(X_{k\alpha}) \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.10)$$

- Se calcula la desviación estándar muestral  $SI_\alpha$  de la forma tradicional para cada periodo  $I_\alpha$

$$SI_\alpha = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k\alpha} - e_\alpha)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

- Para cada periodo  $I_\alpha$ , su rango  $R_{I_\alpha}$  se normaliza por su desviación estándar muestral  $SI_\alpha$ , correspondiente. El rango re-escalado para cada subperiodo  $I_\alpha$  es  $\frac{R_{I_\alpha}}{SI_\alpha}$ , como tenemos  $A$  periodos de tamaño  $n$  tomamos el promedio de  $\left( \frac{R_{I_\alpha}}{SI_\alpha} \right)_n$

$$\left( \frac{R_{I_\alpha}}{SI_\alpha} \right)_n = \left( \frac{1}{A} \right) \sum_{\alpha=1}^A \left( \frac{R_{I_\alpha}}{SI_\alpha} \right) \quad (3.12)$$

- La longitud se incrementa al siguiente valor posible tal que  $\frac{M-1}{n}$  sea entero. Hasta llegar a  $n = \frac{M-1}{2}$ . Después hacemos una regresión lineal de  $\log \left( \frac{R_{I_\alpha}}{SI_\alpha} \right)_n$  vs  $\log(n)$ , es decir tenemos:

$$\log \left( \frac{R_{I_\alpha}}{SI_\alpha} \right)_n = \log(c) + H \cdot \log(n) \quad (3.13)$$

En donde H es el exponente de Hurst.

### 3.1.3. Método de Conteo de Cajas y Primer Retorno

Usualmente solemos describir la dimensión de objetos que están en el espacio y les asignamos un número entero, ya sea que ocupen un volumen y sean tridimensionales o sólo representen un área y sean bidimensionales. Pero existen conjuntos en donde esta definición es un poco imprecisa y debemos de redefinir nuestra definición de dimensión. Este método, conocido como método de conteo de cajas, nos permite asignar una dimensión a un conjunto de tal manera que esta dimensión puede o no, ser un entero. Una de las propiedades al definir una dimensión que no es entera, es que suele reflejar propiedades de escalamiento.

Felix Hausdorff en 1919, sugirió una forma para definir la dimensión de algo y tiempo después fue retomada por Besicovich. Imaginemos un segmento de  $\overline{AB}$ , esta dimensión se basa en la idea de poner una cantidad  $N$  de subsegmentos iguales en el segmento  $\overline{AB}$ . Estos  $N$  segmentos guardan una relación de semejanza con  $\overline{AB}$ , que se denota como  $\varepsilon$ . Por lo que la medida total del segmento, es la suma de los  $N$  segmentos. Con estas ideas de semejanza, salió la idea de dimensión fractal por conteo de cajas (**author?**) [32]. Utilizando el factor de semejanza y el número  $N$  que se requiere para cubrir un segmento se definió la dimensión de autosemejanza.

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (3.14)$$

Supongamos que tenemos un proceso de tipo browniano fraccionario. Desplazamiento  $R$  y el número de pasos  $n$  están relacionados de acuerdo a:

$$\langle R^2 \rangle \simeq n^{2H} \quad (3.15)$$

Algunas de las preguntas que surgen son ¿Cómo están distribuidos los puntos que se intersectan con el eje  $x$  en la serie de tiempo? y ¿Cómo están distribuidos los puntos que se intersectan con la recta  $x=0$ ? [10] Ambos encontraron una forma de relacionar estos puntos, usando la idea de dimensión fractal.

La dimensión fractal de la curva, tiene una dimensión de:

$$D_1 = 2 - H \quad (3.16)$$

El 2 es la dimensión en donde está la curva de tipo fractal y los puntos en donde se intersecta esta curva con el eje  $x$ , tienen como dimensión:

$$D_2 = D_1 - H = 1 - H \quad (3.17)$$

Donde el 1 que aparece en la ecuación anterior, es la dimensión de la recta  $x$ .

Por otro lado, el número  $N(T)$  de cajas necesarias para cubrir los puntos en donde se intersecta la curva con el eje  $x$ , en un intervalo  $[0, B]$  y cada caja de tamaño  $T$ , es:

$$N(t) \sim \frac{B}{T} - \frac{\sum P(L)L}{T} \quad (3.18)$$

El término  $\frac{B}{T}$  cubre todo el intervalo, mientras que el segundo término es el número total de cajas que hay entre los intervalos que se crean al cortar la gráfica con el eje  $x$ . Y el término  $P(L)$  representa el número de segmentos de longitud  $L$ . Usando 3.14, y la dimensión que se forma en las intersecciones 3.17 tenemos:

$$1 - H = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{T}\right)} \quad (3.19)$$

Q se puede reescribir como:

$$N \simeq T^{-(1-H)} \quad (3.20)$$

Y de lo anterior. La distribución de los puntos que tocan el eje  $x$ , siguen la siguiente regla:

$$P(T) \simeq T^{H-2} \quad (3.21)$$

Con ayuda de la ecuación anterior, en (author?) [21], se planteó la idea de medir el exponente de Hurst utilizando el algoritmo de visibilidad, sólo que en vez de tomar los puntos en donde se intersectaba la gráfica con el eje x, se utilizaron los puntos máximos de la serie, ya que estos puntos son los que tienen mayor visibilidad y lo que obtuvieron fue que el exponente de Hurst, se puede medir de acuerdo a:

$$P(k) = k^{2H-3} \quad (3.22)$$

Es decir la distribución de grado en la red, depende del exponente de Hurst de la serie. Y si conocemos el exponente  $\gamma$  de la red, entonces podemos conocer el exponente de Hurst al despejarlo de la siguiente ecuación:

$$\gamma = 2H - 3 \quad (3.23)$$

### 3.1.4. Pruebas del algoritmo de Hurst, en una serie de fBm.

A continuación usaremos el algoritmo de visibilidad natural, para encontrar el exponente de Hurst. Se generaron 4 series por medio del programa R, en donde tenían diferentes valores de Hurst conocidos. Estos tienen los siguientes valores: 0.1, 0.25, 0.70, 0.95. Y la idea es ver si el algoritmo de visibilidad, nos acerca al valor de los exponentes de Hurst. A continuación se muestran sus respectivas gráficas.

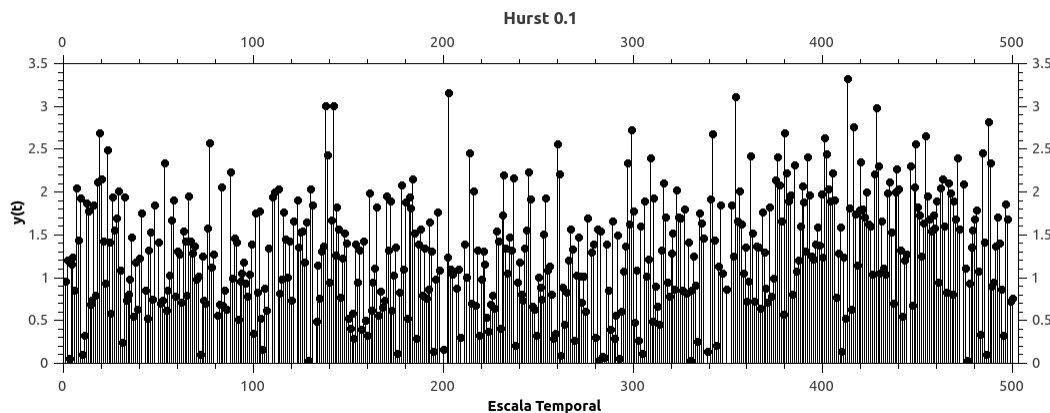


Figura 3.1: Serie de tiempo generada mediante el software *R*, con un exponente de Hurst de 0.1

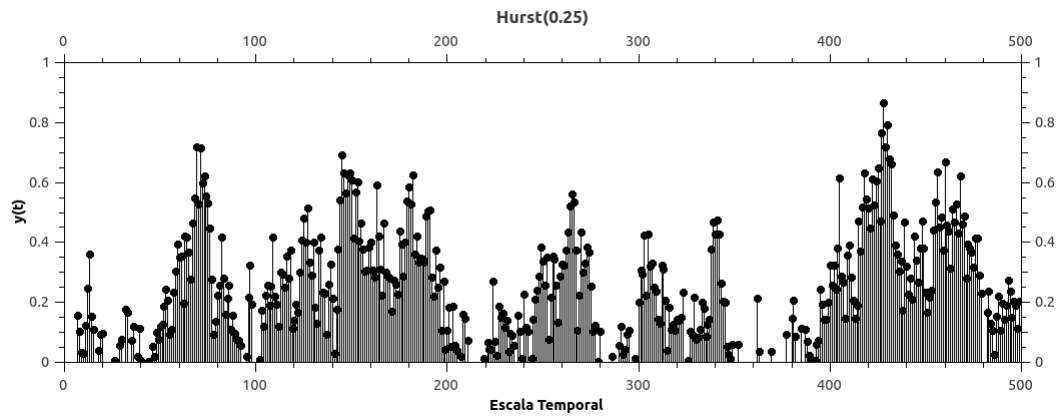


Figura 3.2: Serie de tiempo generada mediante el software  $R$ , con un exponente de Hurst de 0.25

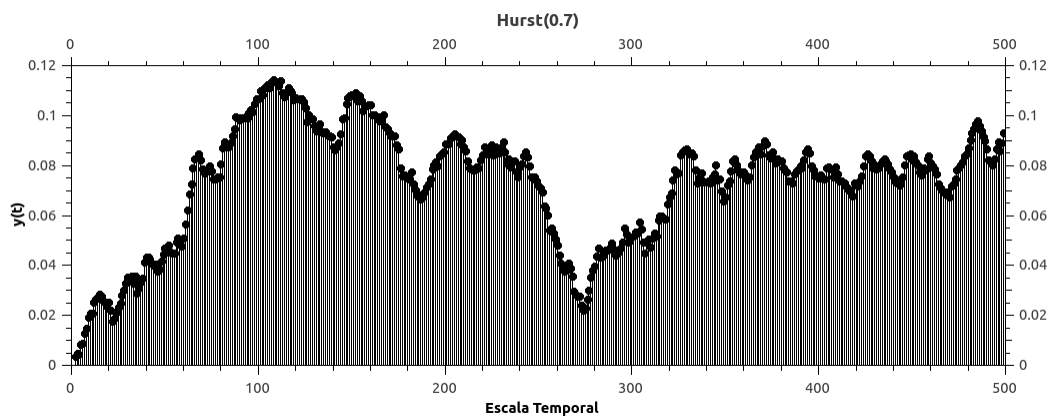


Figura 3.3: Serie de tiempo generada mediante el software  $R$ , con un exponente de Hurst de 0.7



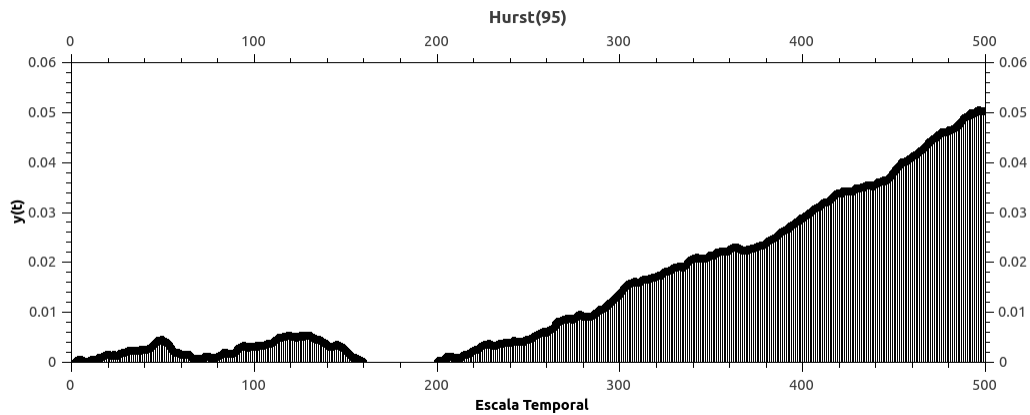


Figura 3.4: Serie de tiempo generada mediante el software *R*, con un exponente de Hurst de 0.95

Una vez que tenemos la serie de tiempo, procedemos a aplicarle el algoritmo de visibilidad para obtener el exponente de Hurst, con los resultados se llegó a las siguientes gráficas. En estas graficas, podemos ver que es muy cercano el exponente de Hurst obtenido por este método.

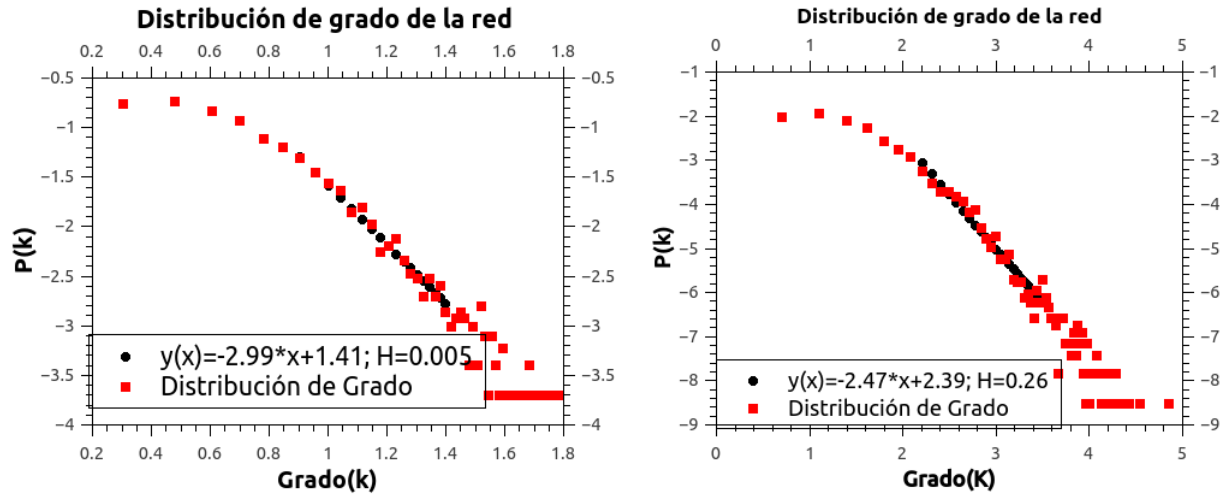


Figura 3.5: Aplicando las ideas del algoritmo de visibilidad natural, se realizó la serie de tiempo y se encontró un valor para el exponente de Hurst de las series anteriores. Con un valor calculado de  $H=0.05$ ,  $H=0.26$

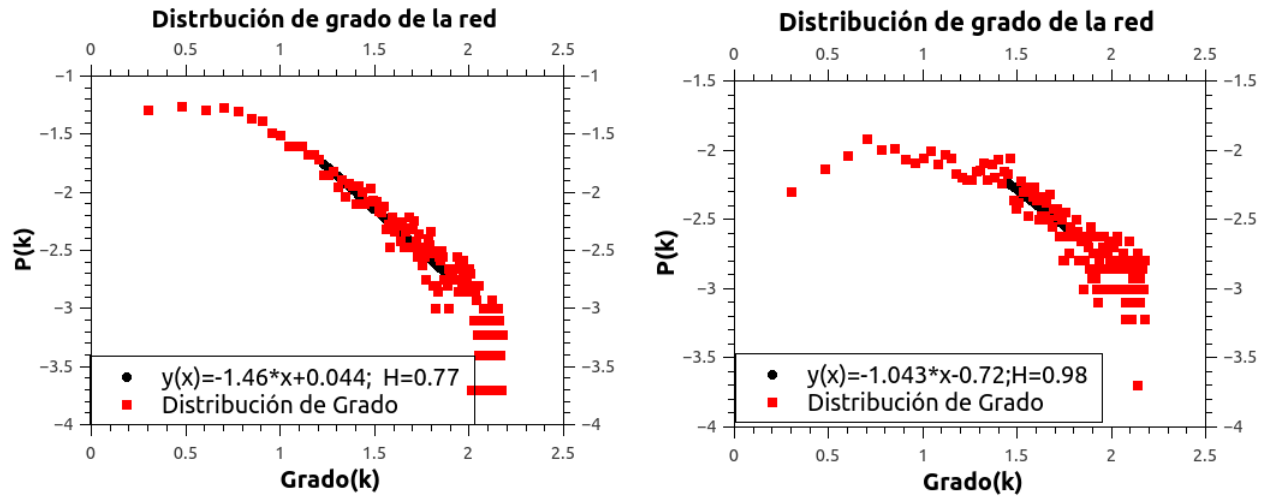


Figura 3.6: Valor calculado de  $H=0.77$ ,  $H=0.98$

La representación de la gráfica de las series de tiempo, la podemos ver en las figuras que se muestran en la parte de abajo.

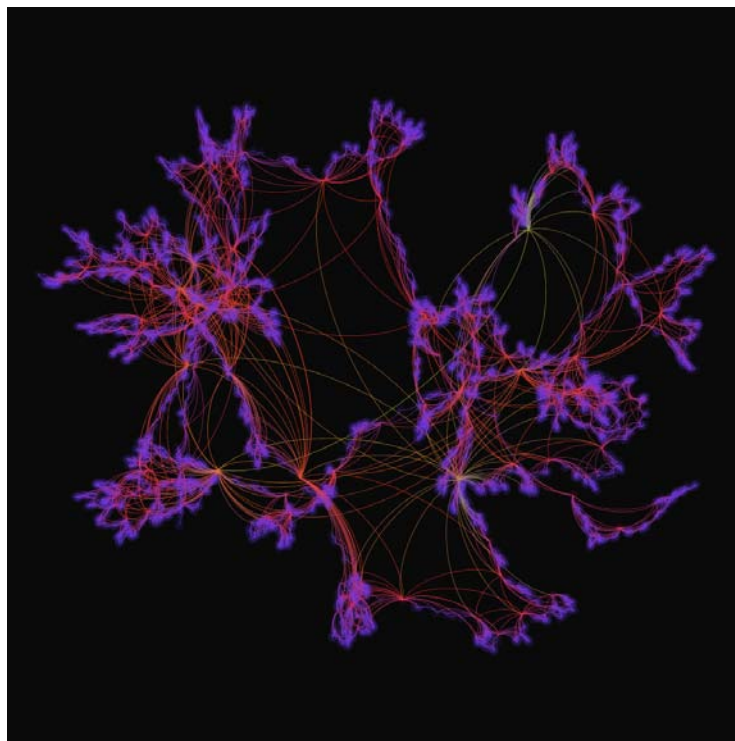


Figura 3.7: Red asociada a la serie de tiempo con exponente de Hurst de 0.7. Esta red se creó usando el algoritmo de visibilidad

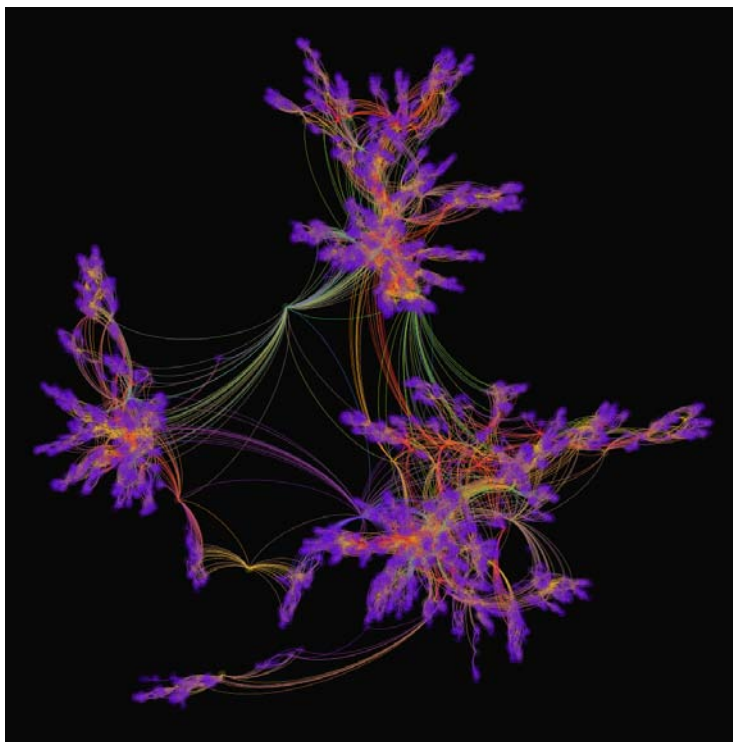


Figura 3.8: Red de la serie de tiempo con exponente  $H=0.25$

## 3.2. Redes de Visibilidad y Música

De acuerdo a lo expuesto previamente, es posible conocer el exponente de Hurst asociado a una serie de tiempo, estudiando su red de visibilidad asociada. A continuación se determinará el exponente de Hurst en series musicales.

Hay que aclarar que para la forma en las series de tiempo, se tomó a las notas más altas. Es decir si en una serie de tiempo había un acorde o un conjunto de notas que se tocaban al mismo tiempo, se tomó las notas con mayor visibilidad que son las más altas. Para hacer esto, el programa de visibilidad (ver apéndice) busca automáticamente si hay un acorde y en caso de haber uno, guarda solo la nota más alta y se reescribe la serie de tiempo en términos de la nota más alta. Esta serie de tiempo, después es analizada y de allí se extrae la información para hacer la red de visibilidad natural.

Cabe mencionar que en el caso de las piezas para piano, se estudió por separado la serie generada de las notas de la mano izquierda, que las notas que tocan la mano derecha, nos pareció una idea adecuada, ya que muchas veces no solo escuchamos la idea principal, sino que escuchamos tanto la idea principal como el acompañamiento.

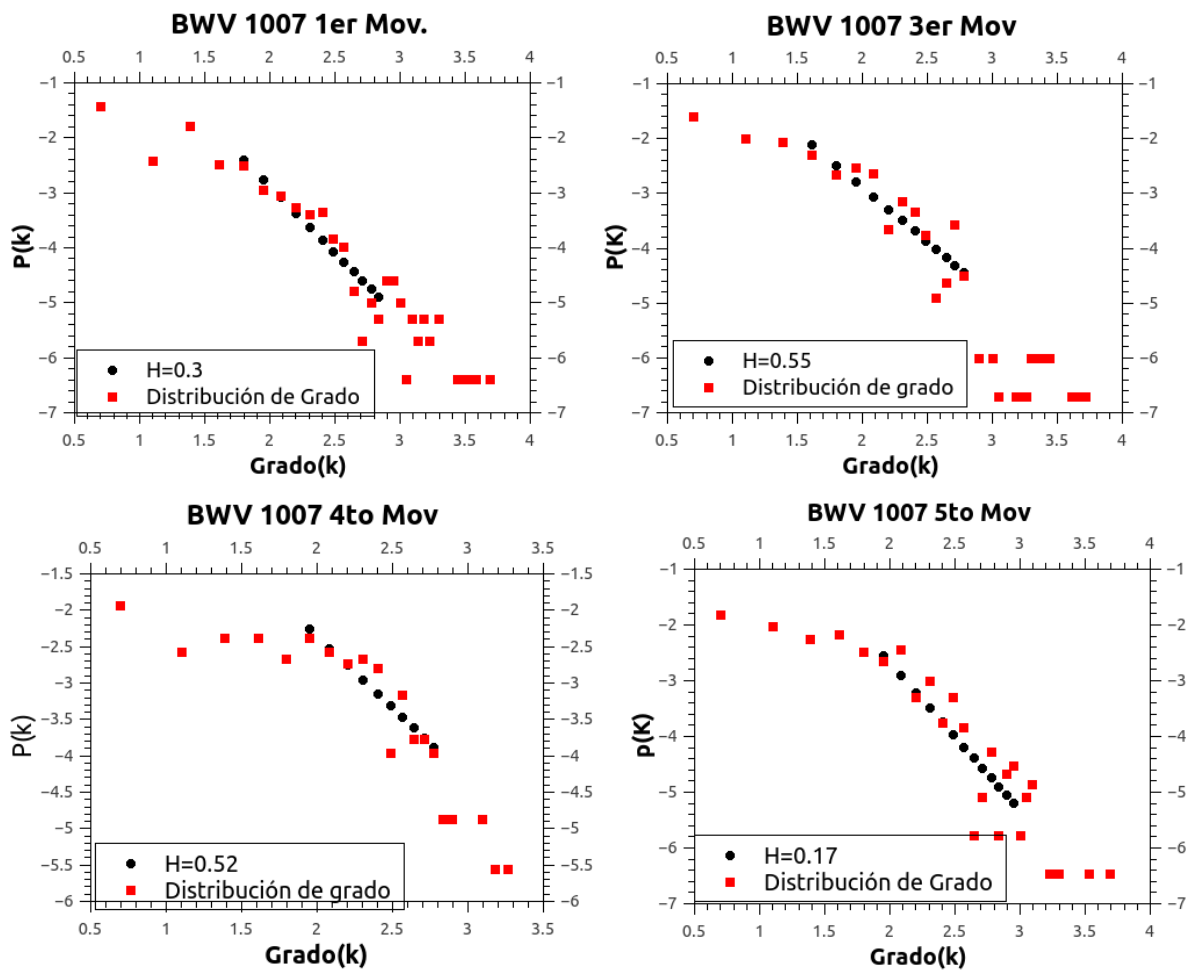
El estudio consta de 3 compositores que son de distintos periodos artísticos, los compo-

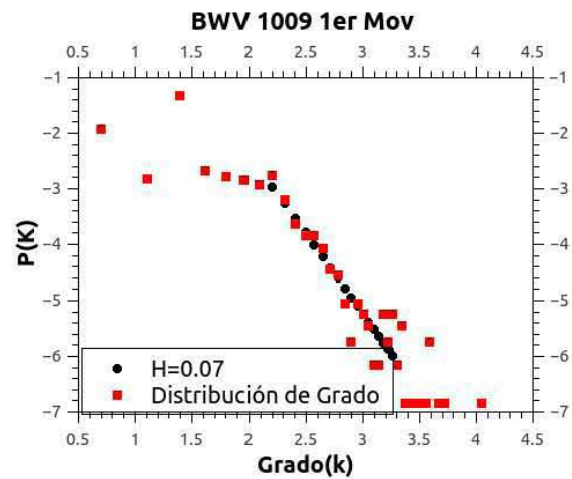
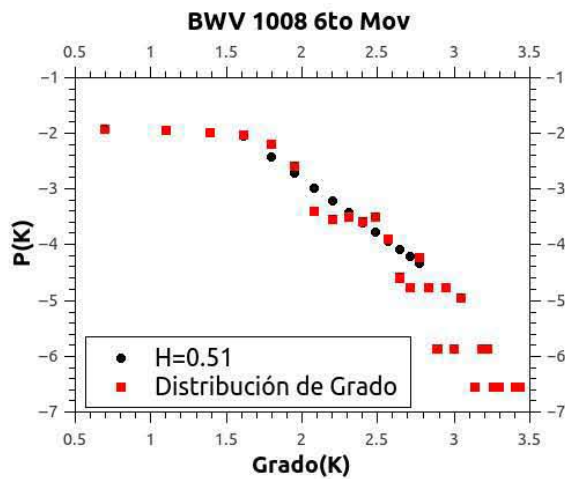
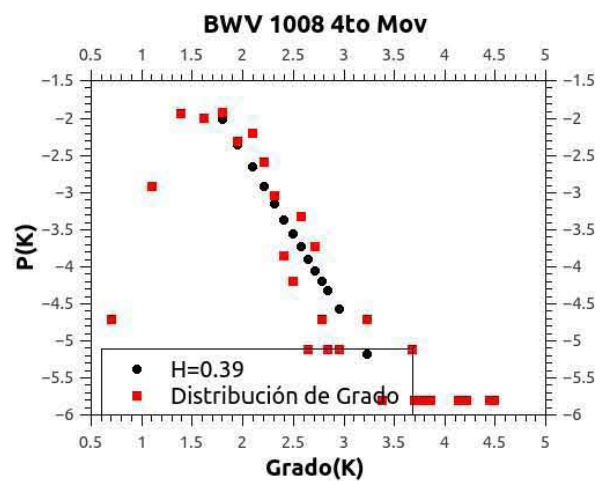
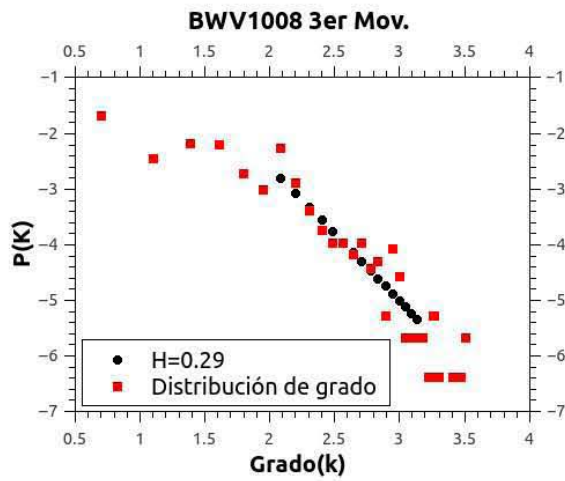
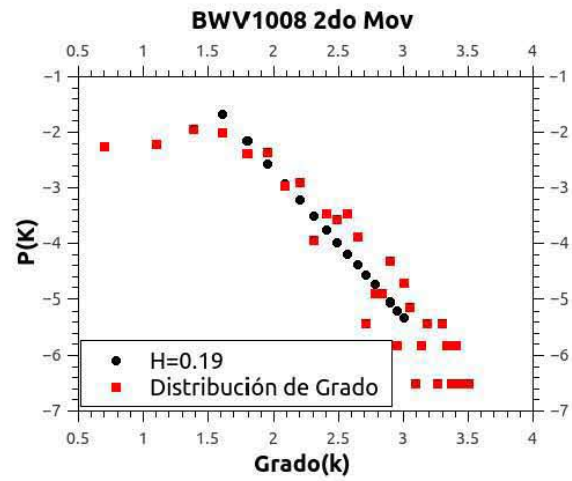
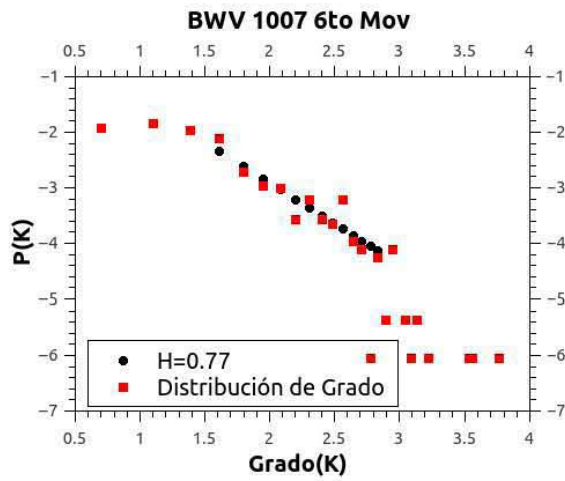
sitores a estudiar son: Johann Sebastian Bach, Ludwig van Beethoven, Fryderyk Franciszek Chopin.

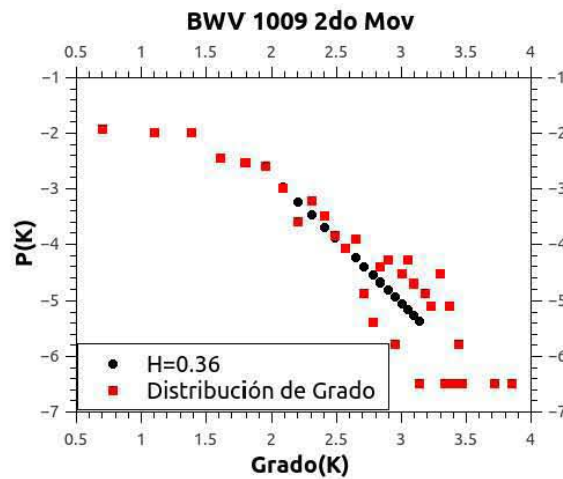
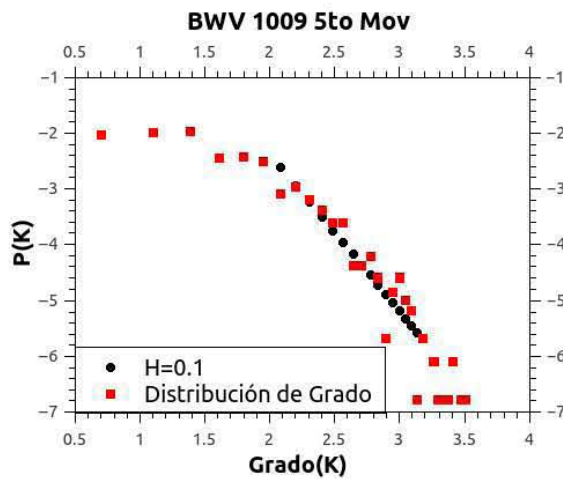
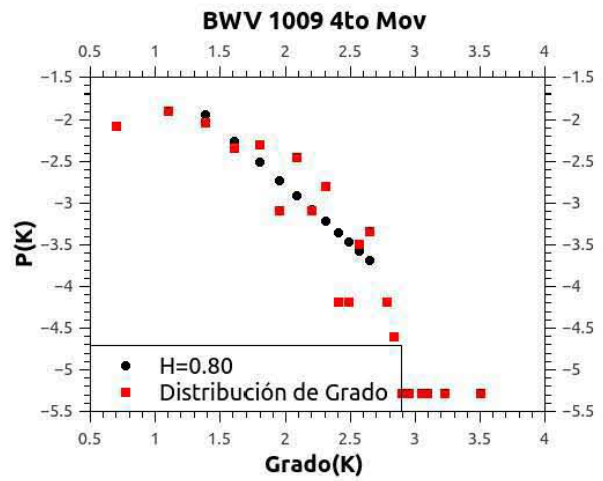
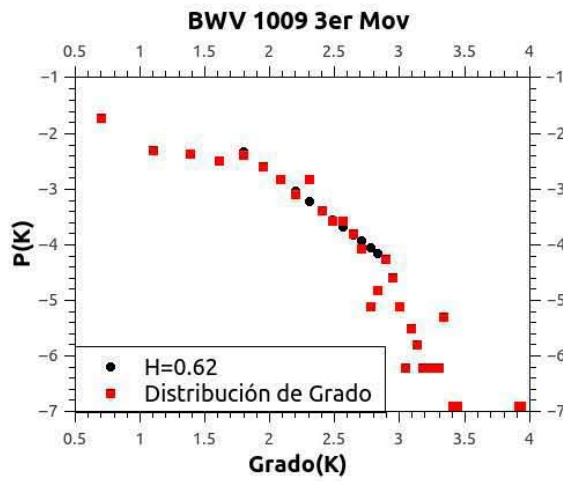
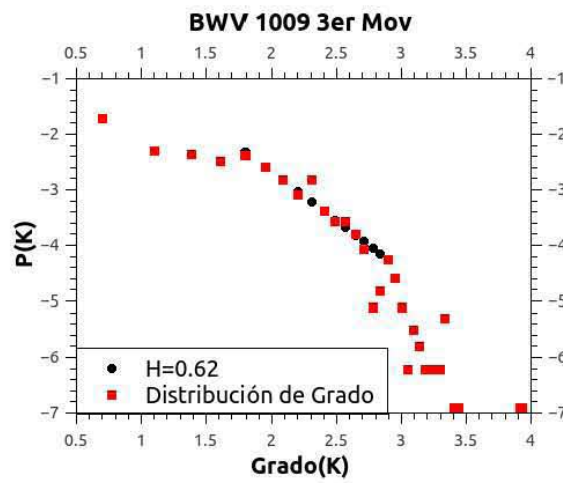
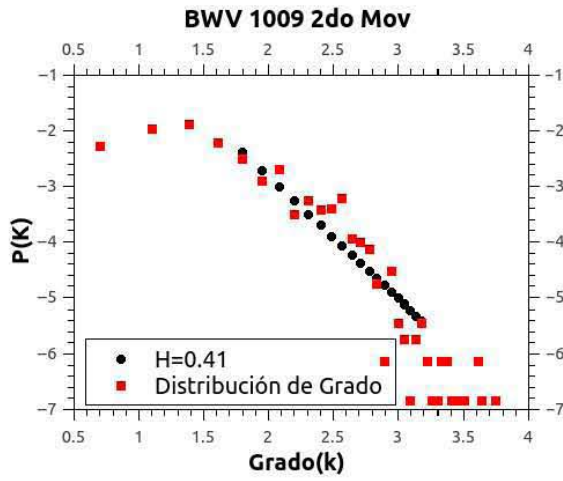
### 3.2.1. Distribución de grado en los diferentes compositores estudiados.

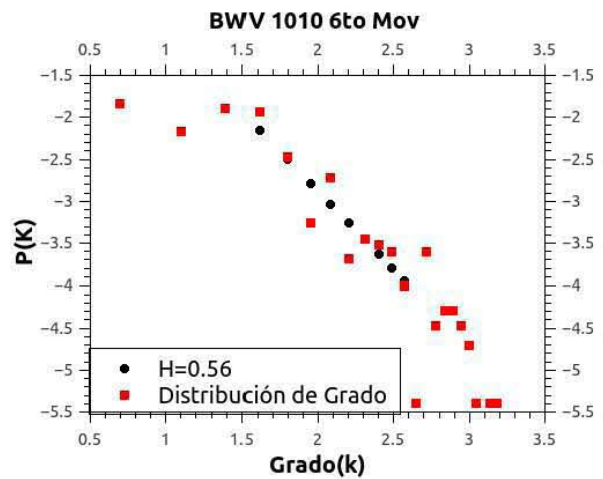
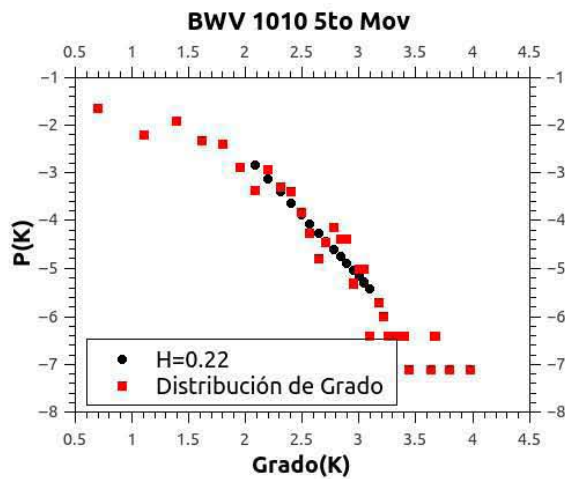
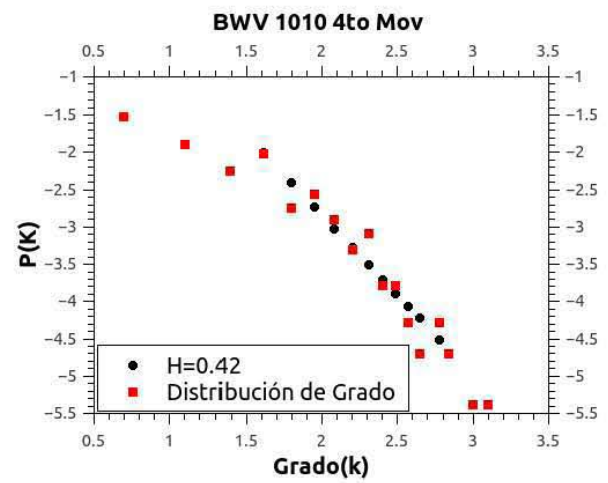
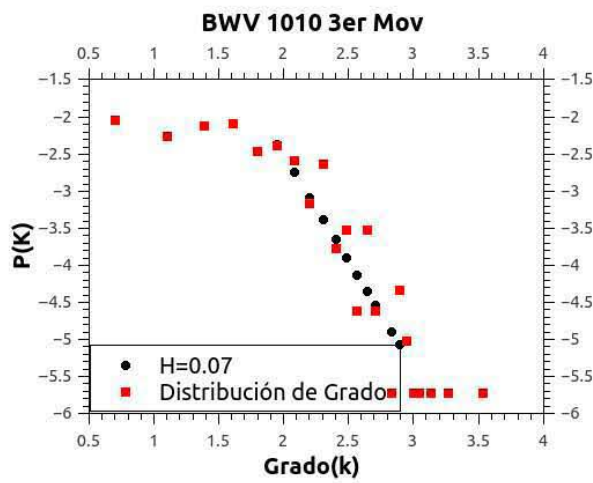
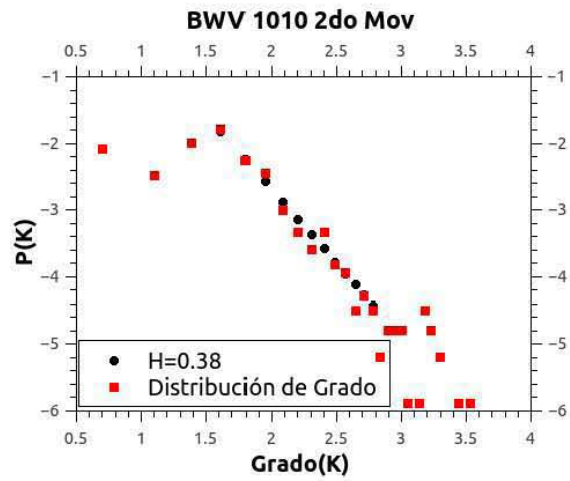
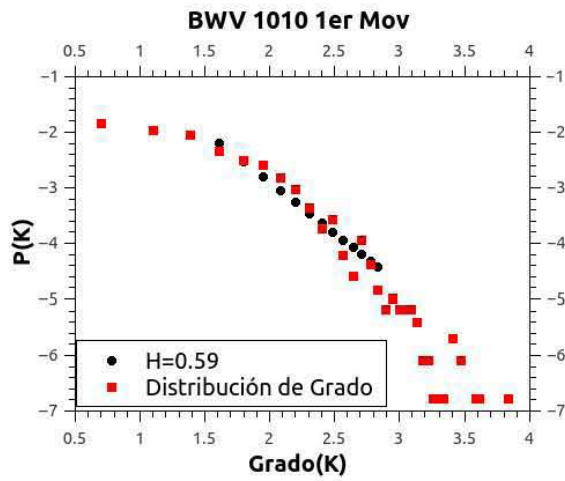
#### 3.2.1.1. Bach

A continuación mostramos gráficamente algunos resultados obtenidos







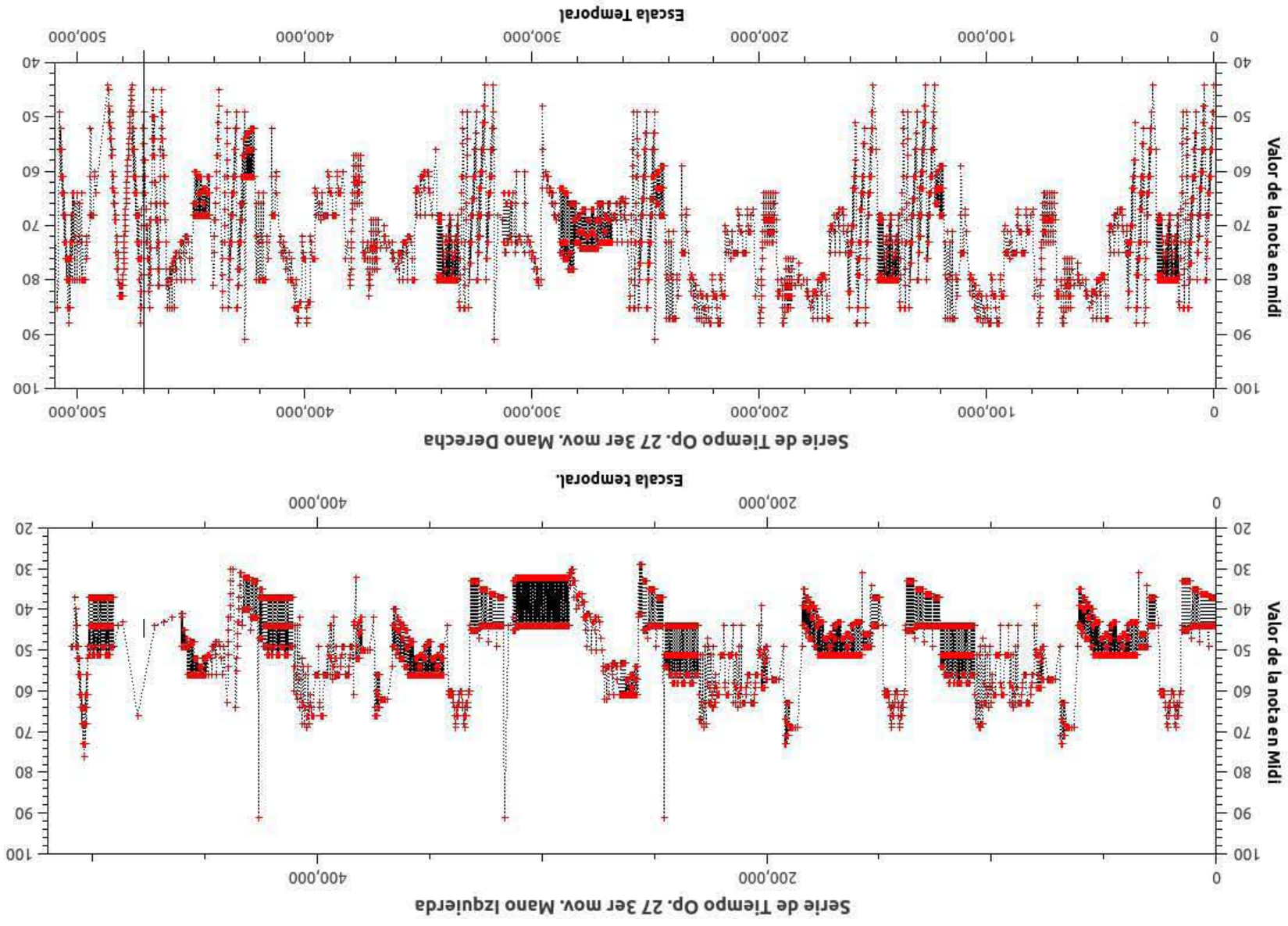


### 3.2.1.2. Beethoven.

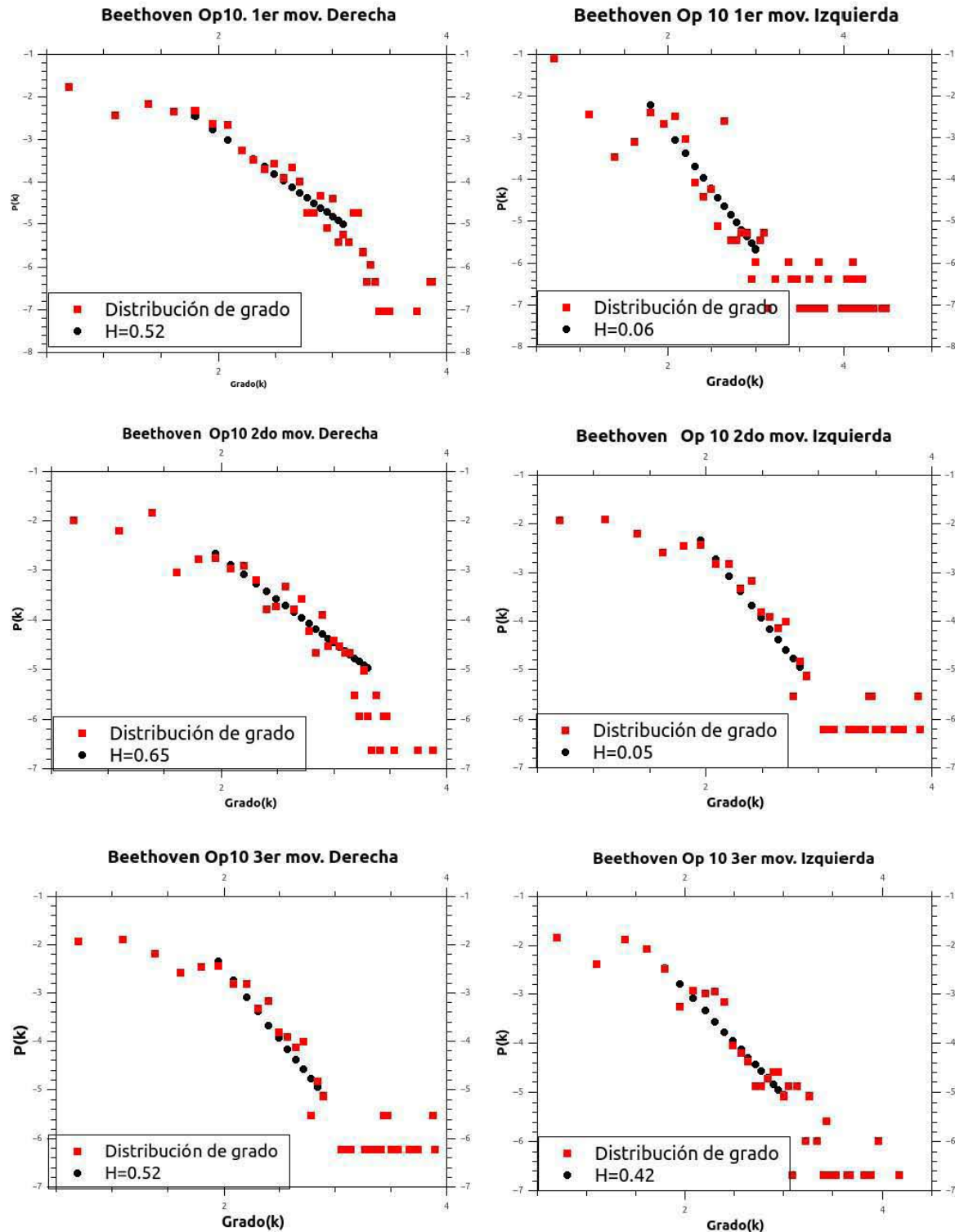
A continuación se mostrarán los resultados obtenidos al analizar la música de Beethoven, en este compositor se estudiaron algunas sonatas para piano. Las sonatas constituyen una de las obras más fascinantes escritas para ese instrumento, muchas de estas piezas tienen en común que fueron escritas a manera de dedicatoria para algunos personajes o personas que influyeron en la vida del compositor. En el caso de la Sonata no. 23 op.57 fue dedicada a un conde alemán de nombre Gabriel von Waldstein, que ayudó a Beethoven; Otro ejemplo es la Sonata no. 14 op.27 dedicada a una condesa de nombre Giulietta Guicciardi, esta pieza es normalmente conocido como Claro de Luna. En este estudio utilizaremos las siguientes piezas para piano: Sonata no. 5 op.10, Sonata no. 8 op.13, Sonata no.14 op.27 y Sonata no.23 op.57.

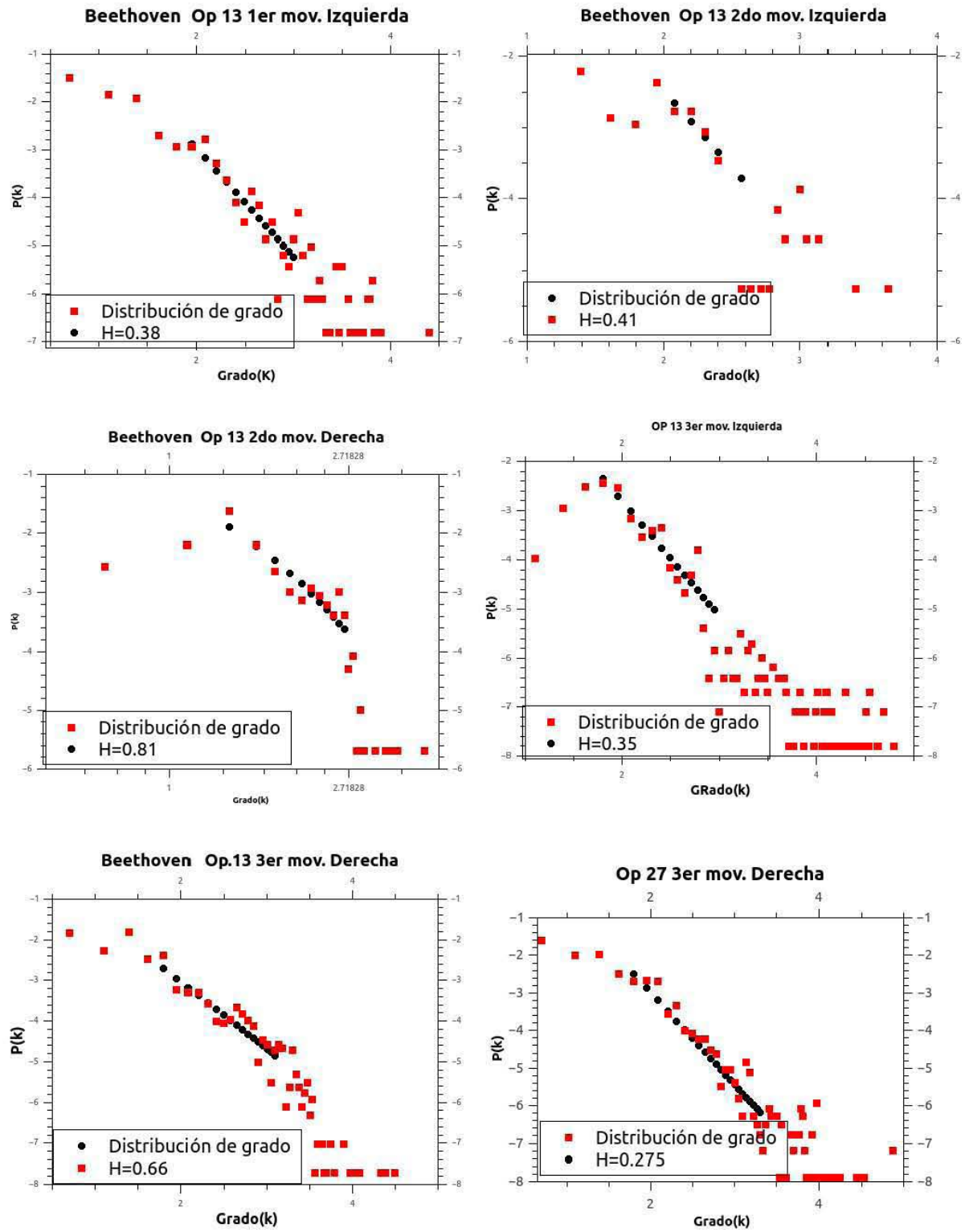
Se analizarán por separado las distribuciones de grado, debidas a las manos derechas e izquierdas. En las siguientes gráficas podemos ver algunas de las series de tiempo que se obtuvieron de sólo tomar en cuenta el valor más alto de la nota, para las dos manos.

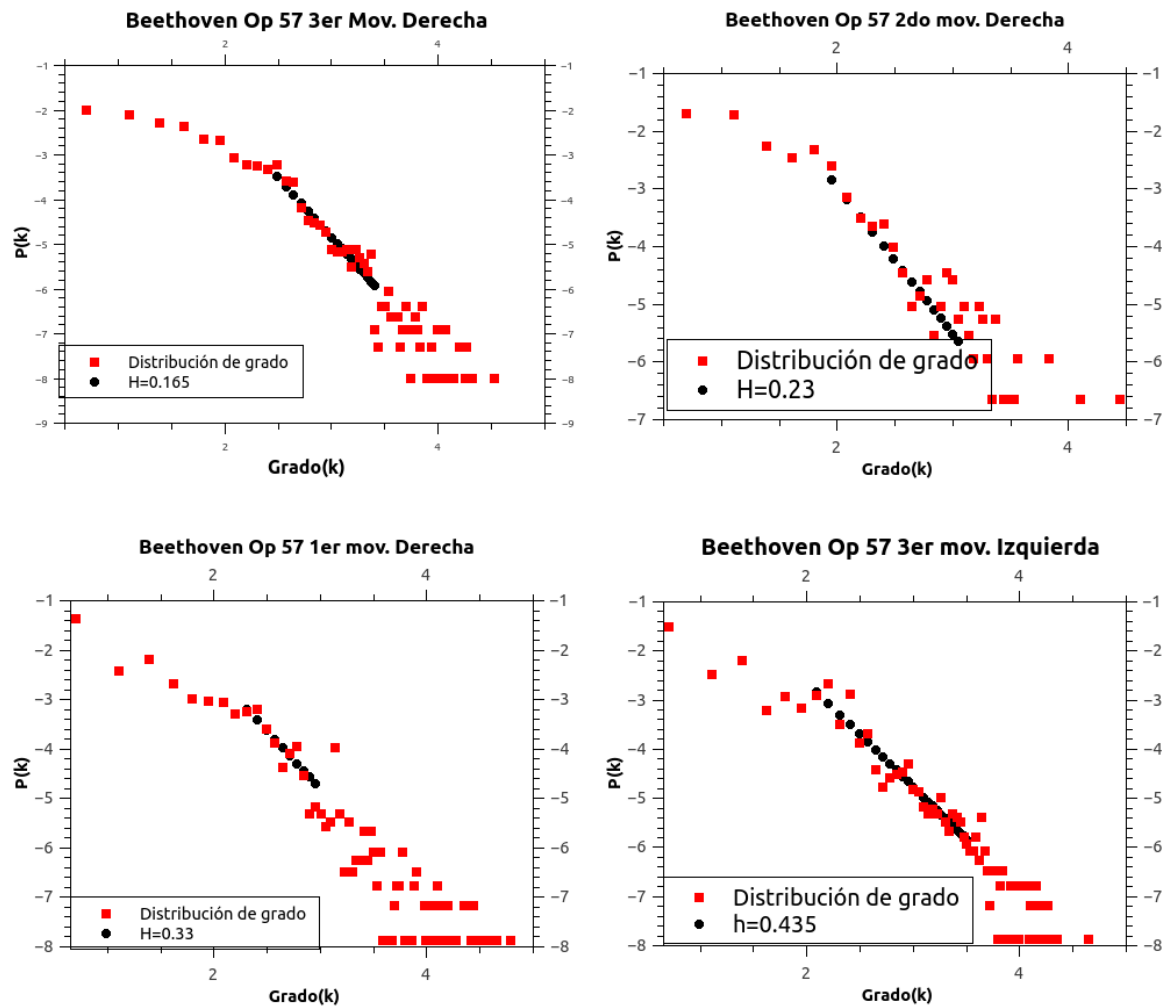




Analizando todas las series por medio del algoritmo de visibilidad, obtenemos las distribuciones de probabilidad de los grados en la red:

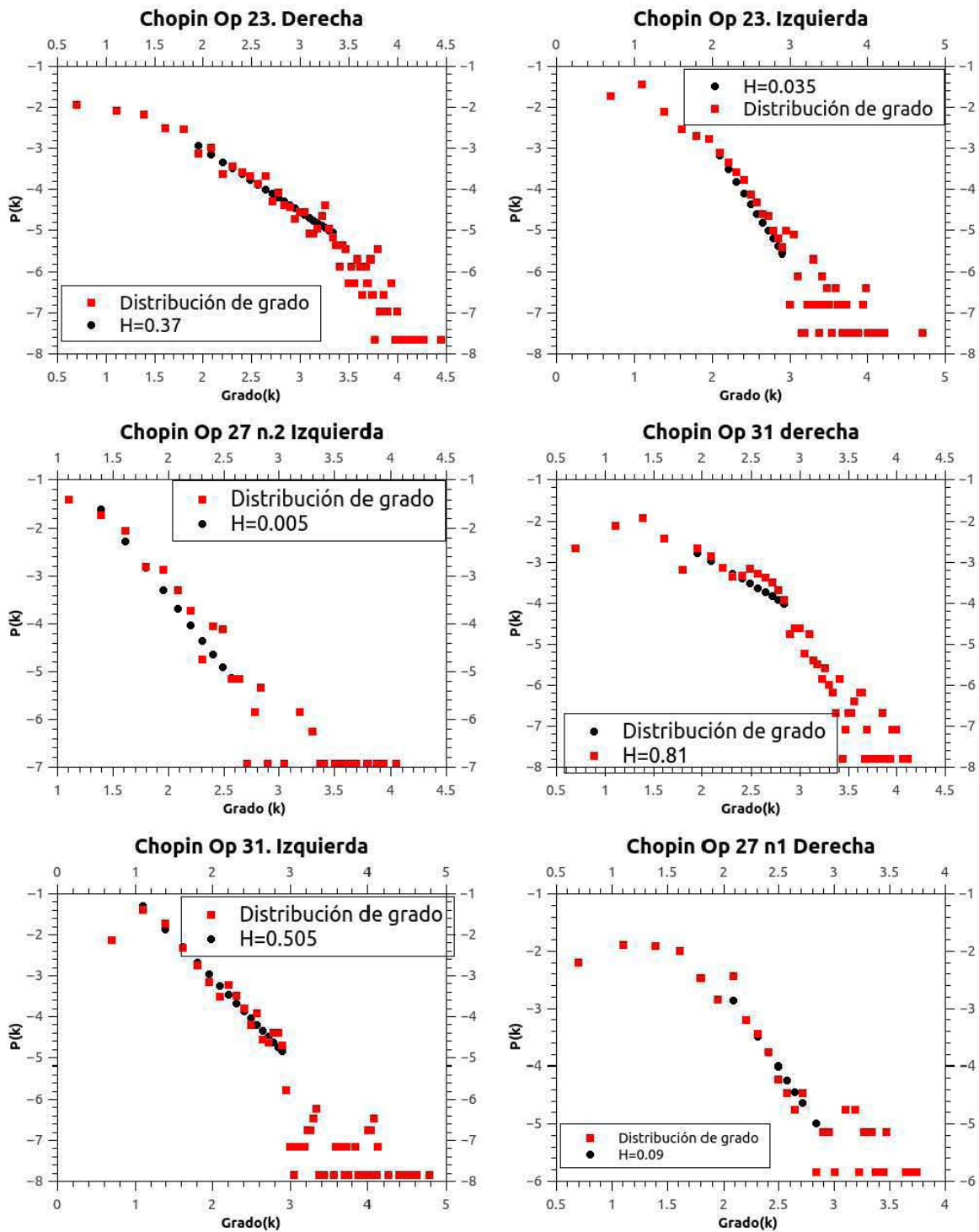


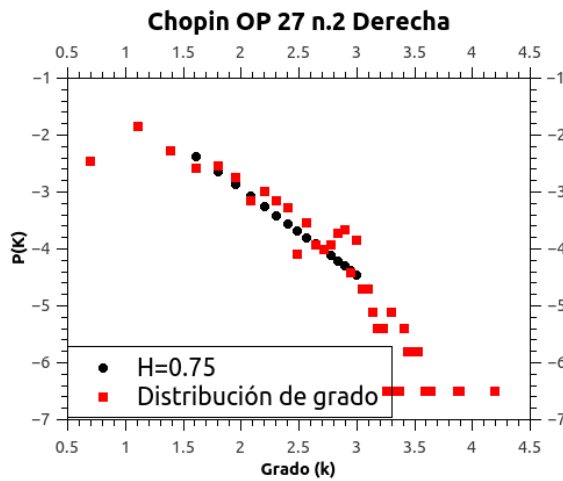




### 3.2.1.3. Chopin.

En el caso de Chopin se estudiaron las siguientes obras: Balada no.1 Op 23, Nocturno no.1 Op27, y Scherzo no.2 Op31. A continuación presentaré algunas graficas de las series de tiempo obtenidas y al igual que en los casos anteriores, se dividió en mano izquierda y mano derecha.





En las gráficas anteriores, podemos ver que en su mayoría el índice de Hurst, tiende a estar por debajo de 0.5. Esto tiene sentido, ya que se da la antipersistencia en la música, es decir que no es muy parecida una nota a otra. Si las notas fueran similares, entonces la música sería muy predecible, aburrida y monótona. De los resultados anteriores, se obtuvo los siguientes resultados:

Compositor	E. Hurst Izquierdo	E. Hurst Derecho	E. Hurst promedio
Beethoven	0.31	0.45	0.38
Chopin	0.18	0.23	0.20

Cuadro 3.1: Resultado promedio del exponente de Hurst de los compositores estudiados.

Hay que resaltar que en el caso de Bach, no se tomó en cuenta la parte izquierda ni la derecha, a diferencia del caso de Beethoven y Chopin.

Compositor	E. Hurst promedio
Bach	0.4

Cuadro 3.2: Resultado promedio del exponente de Hurst de Bach.

Podemos ver que las series tienen un comportamiento antipersistente en general. Al dividir las obras de los compositores entre mano izquierda y mano derecha, se observa que una de las manos tiende a ser un poco más persistente que la otra. En general, se observó que la mano izquierda es menos persistente que la mano derecha.

### 3.2.2. Mundo Pequeño en la música.

A continuación se mostrarán algunas de las redes asociadas al algoritmo de visibilidad, en representación de una red. Para ello se utilizó el programa Ghepi, en donde podemos



observar la red de visibilidad de algunas obras de Beethoven y Chopin. Se realizó un análisis sobre el comportamiento de la longitud promedio de la red, en función del número de nodos.

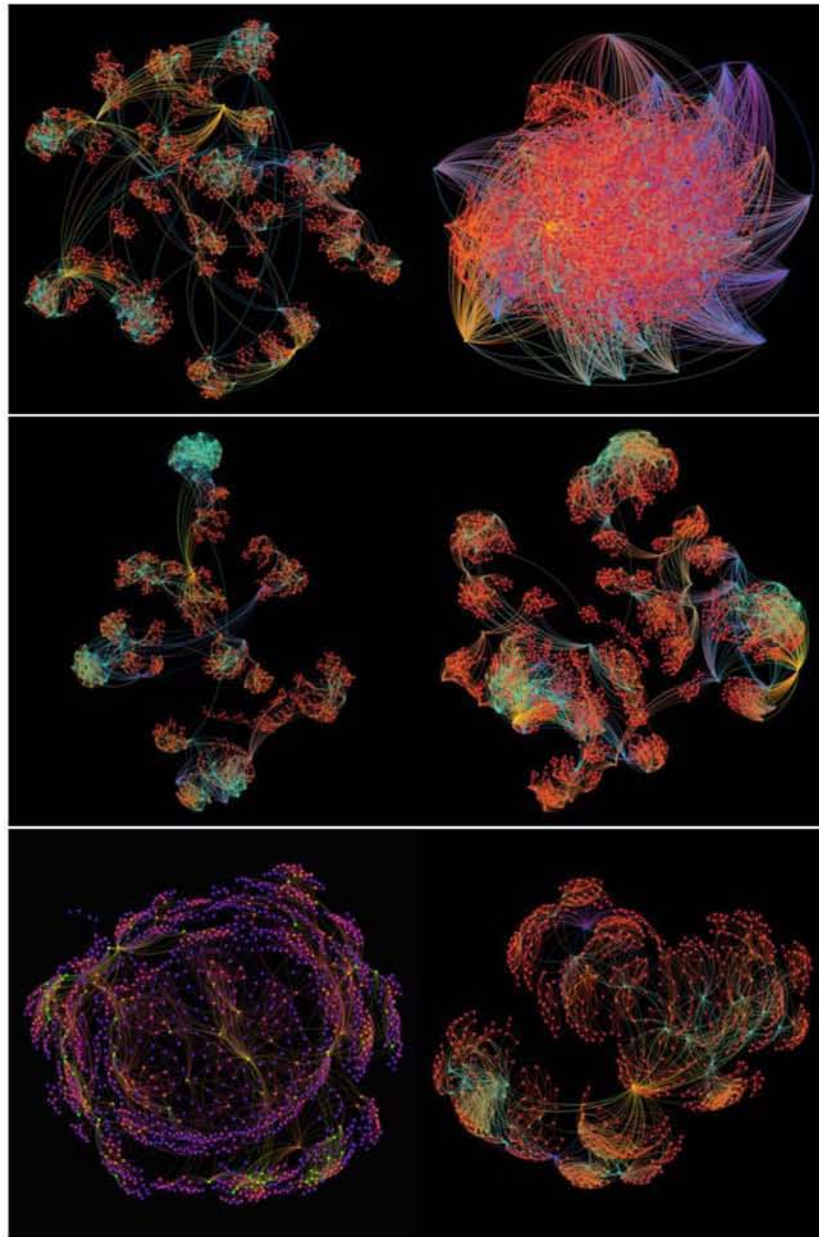


Figura 3.9:

Analizando los caminos promedio en función del número de nodos en la red, se encontró que en la música existe un comportamiento de mundo pequeño, como se puede mostrar en la siguiente gráfica:

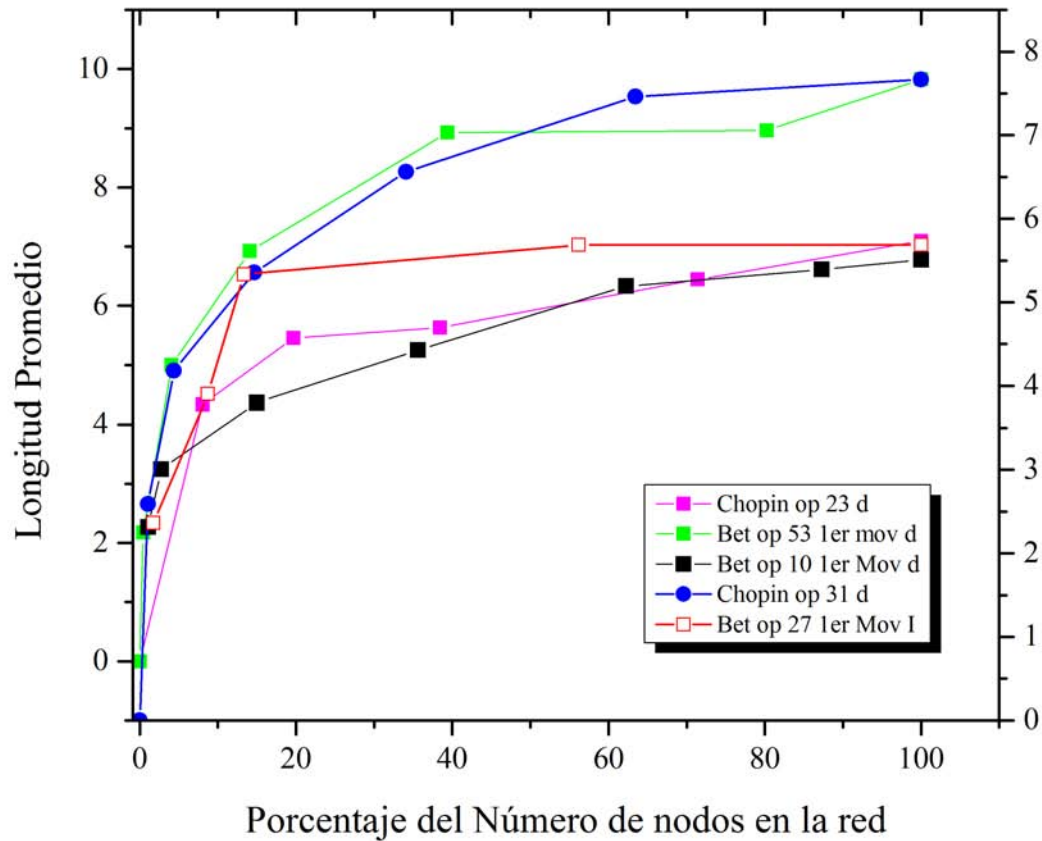


Figura 3.10: Mundo pequeño en la música

Para saber si las redes analizadas son de mundo pequeño, calculamos el *Clustering Coefficient*. Si se da el mundo pequeño, el valor no debe ser cercano a uno ni a cero. A continuación se muestran los resultados obtenidos.



	Clustering Coeficient	Longitud Promedio	No. de Nodos
Chopin Op23 Der	0.35	7.095	2098
Chopin Op 31 Der	0.362	7.667	2376
Chopin Op 31 Izq	0.361	7.37	1372
Beethoven Op 10 Der	0.365	6.774	1126
Beethoven Op 10 Izq	0.37	8.087	1161
Beethoven Op 27 Der	0.35	5.688	803
Beethoven Op 27 Izq	0.372	4.15	110
Chopin Op 27 Der	0.382	8.002	1056
Chopin Op 27 Izq	0.371	5.811	341
Beeth. Op 53 1er Mov. Der	0.355	9.824	3759

Cuadro 3.3: Calculo del *Clustering Coeficient*

El hecho de que sea de mundo pequeño las redes de visibilidad asociadas a la musica, nos indica que no se da una repulsión entre hubs. Los hubs no aparecen de forma continua, ya que de ser así, la longitud promedio crecería de manera más rápida conforme aumentará el número de nodos en la red. Podemos ver que esto no ocurre, pues en promedio todas las redes analizadas tienen una longitud promedio de 6, cuando se tomaba la red completa.

# Capítulo 4

## Palabras en la música.

Es muy común pensar en la música como un lenguaje, pero a diferencia de los lenguajes convencionales que solemos utilizar, la música es una secuencia de sonidos, que se representan por medio de notas musicales. Desde este punto de vista es muy diferente a los idiomas, en el sentido de que no tiene palabras y espacios establecidos. Cuando hablamos español utilizamos palabras propias del español, que se caracterizan por tener una longitud promedio y que son muy diferentes de las palabras usadas en otro idioma. Si hablamos en inglés, utilizamos palabras características de este idioma.

Cuando escuchamos música, solemos escuchar diferentes tipos de composiciones. La pregunta que surge es ¿Podemos definir de alguna forma un tipo de lenguaje, es decir, una forma de encontrar palabras dentro de la música? En este capítulo lo que se intenta, es utilizar el algoritmo de visibilidad natural para este propósito.

### 4.1. Shannon y la Información.

#### 4.1.1. Medida de la información.

A mediados del siglo pasado, Shannon[34, 35, 36] introdujo la teoría de la información, que sirve para cuantificar la información que tenemos. Para ello, propuso lo siguiente: Supongamos que hemos recibido algún tipo de información, tenemos un evento  $E$  y este tipo de información ocurre con una probabilidad  $P(E)$ . Al recibir esta información o ser conscientes de este evento, hemos recibido una cantidad de información [35, 7, 8, 1, 34] igual a:

$$I(E) = \log \frac{1}{P(E)} \quad (4.1)$$

La definición anterior mide la cantidad de información y nos dice que la información en un sistema es proporcional al logaritmo de posibles estados de ese sistema en particular. Por ejemplo, pensemos en un idioma que contiene 5 letras  $a, e, i, o, u$  supongamos además que la letra “ $a$ ”, es la letra o el evento que hemos recibido, si resulta además que esta letra es la más probable, con una probabilidad  $P_a$  entonces hemos recibido  $I_a$  unidades de información. Si

por el contrario recibimos la letra "u" en donde además sabemos que es la menos probable, entonces hemos obtenido mayor información, del evento de recibir a la letra "u", ya que la información depende del recíproco de la probabilidad y como la probabilidad debe ser un número entre 0 y 1 entonces a menor probabilidad mayor información. Por el contrario, si es algo que ocurre de manera frecuente de tal manera que ocurre siempre la información obtenida sería de cero. La definición anterior nos da en cierta forma una medida de qué tanta información hemos ganado en cada evento en función de la probabilidad de ocurrencia de dicho evento.

Una característica de definir la información de esta manera es que podemos cambiar la definición o mejor dicho la medida de la información en términos de la base del logaritmo elegida.

$$I(E) = \log_b\left(\frac{1}{P(E)}\right) \quad (4.2)$$

Y dependiendo del logaritmo utilizado entonces tenemos diferentes nombres de la unidad de medición de la información, por ejemplo si utilizamos logaritmos base dos, tenemos como unidad al bit (Binary unit). Si tenemos logaritmos naturales entonces tenemos lo que se conoce como nats (natural units). Otra unidad es el Hartley, esta se basa en logaritmos base 10. Por ejemplo, un nat equivale a 1.44 bits, mientras que un Hartley es 3.32 bits.

Lo que representa la base del logaritmo lo podemos ver a través del siguiente ejemplo, suponiendo que la información es proporcional al logaritmo natural

los posibles eventos  $E$ , [5] es decir.

$$I(E) = K \cdot \ln(E) \quad (4.3)$$

Supongamos que tenemos  $n$  posibles cartas, donde cada carta tiene un 1 o un 0. El número total, de posibilidades es:

$$E = 2^n \quad (4.4)$$

De la ecuación de información tenemos que la información es igual a:

$$I = K \cdot (-n) \ln(2) \quad (4.5)$$

Si queremos identificar a la información obtenida con el número total de cartas, entonces tenemos que:

$$K = \frac{1}{\ln(2)} \quad (4.6)$$

De donde obtenemos, que:

$$I = \frac{1}{\ln(2)} \ln(2^{-n}) = \log_2 E \quad (4.7)$$

De lo anterior tenemos la definición de un bit, este es la cantidad de información que obtenemos cuando uno de dos posibles estados ocurre y tienen la misma probabilidad, es decir cada uno de 0.5 o lo que es lo mismo solo hay dos eventos posibles  $E = 2$ , con  $n = 1$ .

La función del logaritmo se usa en la información ya que la información queremos que sea aditiva, pensemos en que esta vez tenemos dos conjuntos de cartas separados, cada conjunto contiene 32 cartas cada uno y son diferentes. De estos queremos escoger una carta de cada conjunto, por lo tanto el número total de eventos posibles es:

$$E = E_1 E_2 \quad (4.8)$$

En donde el número de posibles eventos individuales es:

$$E_1 = E_2 = 2^5 = 32 \quad (4.9)$$

Aplicando la ecuación 4.6 tenemos:

$$I = \log_2(E_1 E_2) = \log_2(E_1) + \log_2(E_2) = 10 \text{bits} \quad (4.10)$$

Es decir es la suma de cada evento y de sacar las dos cartas tendríamos en total 10 bits de información ganada.

## 4.2. Ecuación de Shannon de la información.

Recordemos que en un gas de fermi tenemos  $N$  posibles estados. Hay un número  $N_0$  de estados desocupados y otro número  $N_1$  de estados que están ocupados. De tal forma que  $N = N_0 + N_1$  es la probabilidad de que un estado este ocupado, mientras que la probabilidad de que un estado esté desocupado es respectivamente[5]:

$$P_1 = \frac{N_1}{N} \quad P_0 = \frac{N_0}{N} \quad (4.11)$$

Con:

$$P_1 + P_0 = 1 \quad (4.12)$$

Podemos encontrar las distintas maneras de que se ocupen los distintos estados  $N$ , es decir todas las posibles formas  $E$  4.13 de llenar los niveles. Esto simplemente es a través de la siguiente ecuación:

$$E = \frac{N!}{N_0! N_1!} \quad (4.13)$$

Lo anterior en terminos de información podríamos pensarlo como un mensaje, usando solo el 1 y el 0, ya que tenemos una cantidad  $E = \frac{N!}{N_0! N_1!}$  de eventos posibles para llenar los  $N$  posibles estados. Cada una de las distintas formas de llenar los  $E$  niveles lo podemos ver como un determinado mensaje o una determinada forma de información. Por lo que  $E$  es

el número de posibles mensajes usando un alfabeto de dos palabras usando el estado 0  $N_0$  veces, y el estado 1,  $N_1$  veces.

Si le aplicamos la ecuación 4.3, entonces tenemos:

$$I = K \cdot \text{Ln}(N! - N_0! - N_1!) \quad (4.14)$$

Usando la aproximación de Stirling tenemos:

$$I = K(N(\text{Ln}(N) - 1) - N_0(\text{Ln}(N_0) - 1) - N_1(\text{Ln}(N) - 1)) \quad (4.15)$$

O escrito de otra forma, usando dos veces  $N = N_0 + N_1$  tenemos:

$$I \simeq KG \left( \frac{N_0}{N} \text{Ln} \frac{N_0}{N} + \frac{N_1}{N} \text{Ln} \frac{N_1}{N} \right) \quad (4.16)$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $N$  tenemos:

$$i = k(P_0 \text{Ln}(P_0^{-1}) + P_1 \text{Ln}(P_1^{-1})) \quad (4.17)$$

Es decir la información por símbolo del mensaje que es la formula de Shannon para dos símbolos se suele escribir como:

$$i = \sum_j P_j \text{Ln}(P_j^{-1}) \quad (4.18)$$

### 4.3. Visibilidad y Letras.

En este capítulo analizaré la música desde la perspectiva de un lenguaje, para poder realizar esto lo que haré es una nueva serie de tiempo que será congruente módulo 12 a las series originales de los MIDIs. De esta forma tendremos las principales 12 notas, sin importar que estén en diferentes escalas, así tendremos un alfabeto de 12 letras, desde el “Do” hasta el “Si” con los semitonos entre cada nota.

Una vez hecho esto, utilizaré el algoritmo de visibilidad que usé anteriormente para obtener las redes, pero en este caso para intentar formar palabras. Esta forma de establecer palabras tiene la ventaja que se basa entre las pendientes entre dos notas consecutivas, y dependiendo de la altura de las notas intermedias, se obtiene el tamaño de la palabra. Por lo que si un autor repite la misma configuración de notas en algún otro punto de la serie música, el algoritmo lo traducirá como la misma palabra. Es por esto que se eligió este algoritmo para transformar la serie de tiempo a palabras.

Esta es una de las posibles formas de establecer palabras, otra podría ser usar el algoritmo de visibilidad horizontal [16]. O por ejemplo podríamos establecer de antemano una longitud promedio. Pero al hacerlo de esta manera, podríamos tener muchas palabras que en esencia serían las mismas.

Usando el algoritmo de visibilidad, una vez que se interrumpe la visibilidad, entonces desde el punto inicial hasta donde termino la visibilidad. Serían las notas que compondrían nuestra palabra, Por ejemplo:

### 4.3.1. Autocorrelación.

Una manera de ver si el algoritmo es capaz de reproducir las mismas palabras en la serie de tiempo, es usar la función de autocorrelación. De manera que si tenemos las mismas palabras en algún punto de la serie de tiempo, tendríamos un pico en nuestro correlograma.

La función de autocorrelación mide que tan parecida es la serie en distintos tiempo, al ir desplazando la serie y compararla con la serie original. En este caso no solo vamos a tener la serie de tiempo de las notas, será una serie formada por palabras, en donde el valor numérico de cada punto representa una palabra.

A continuación se muestra el correlograma de la serie de tiempo formado por palabras. Lo que queremos ver, es si después de un número grande de tiempo, la serie vuelve a estar altamente correlacionada. Al desplazarse un gran número de tiempo en mi serie, que tanto se parecerá la composición en términos de palabras. Si se llegasen a parecer tendremos líneas horizontales, para que sea confiable el resultado obtenido deben de estar dentro del 95% de confianza. Esto ocurre cuando pasamos de la línea punteada azul del correlograma. Si la línea horizontal, es positiva entonces la serie esta correlacionada. Mientras que si está en la parte negativa entonces, se dice que esta anticorrelacionada. En ambos casos el valor debe ser mayor al valor de la línea punteada azul para que pueda ser tomada en cuenta.

4.3.1.1. Autocorrelación Bach

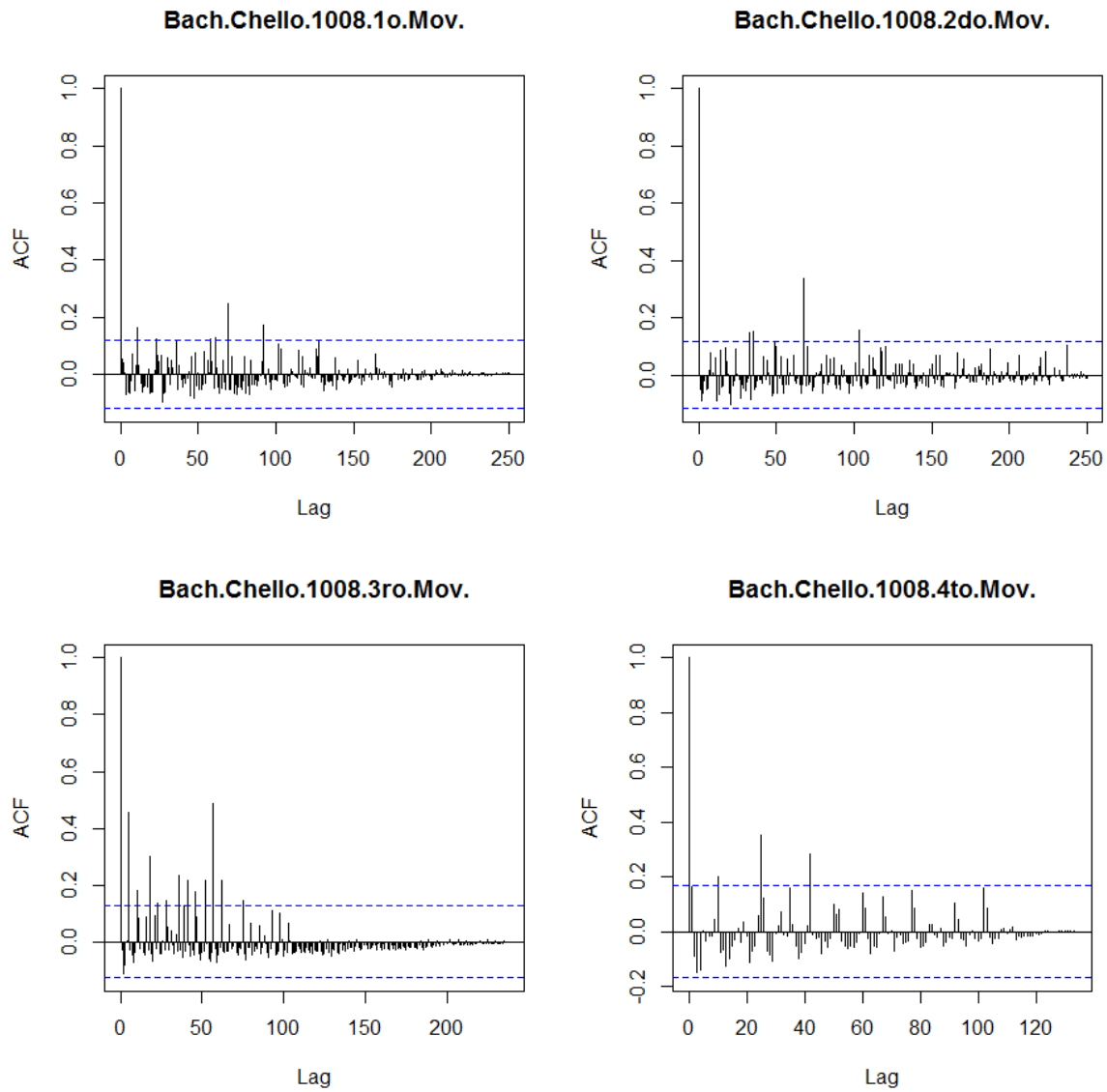


Figura 4.1: Correlograma de las suites de Bach, en términos de series de palabras

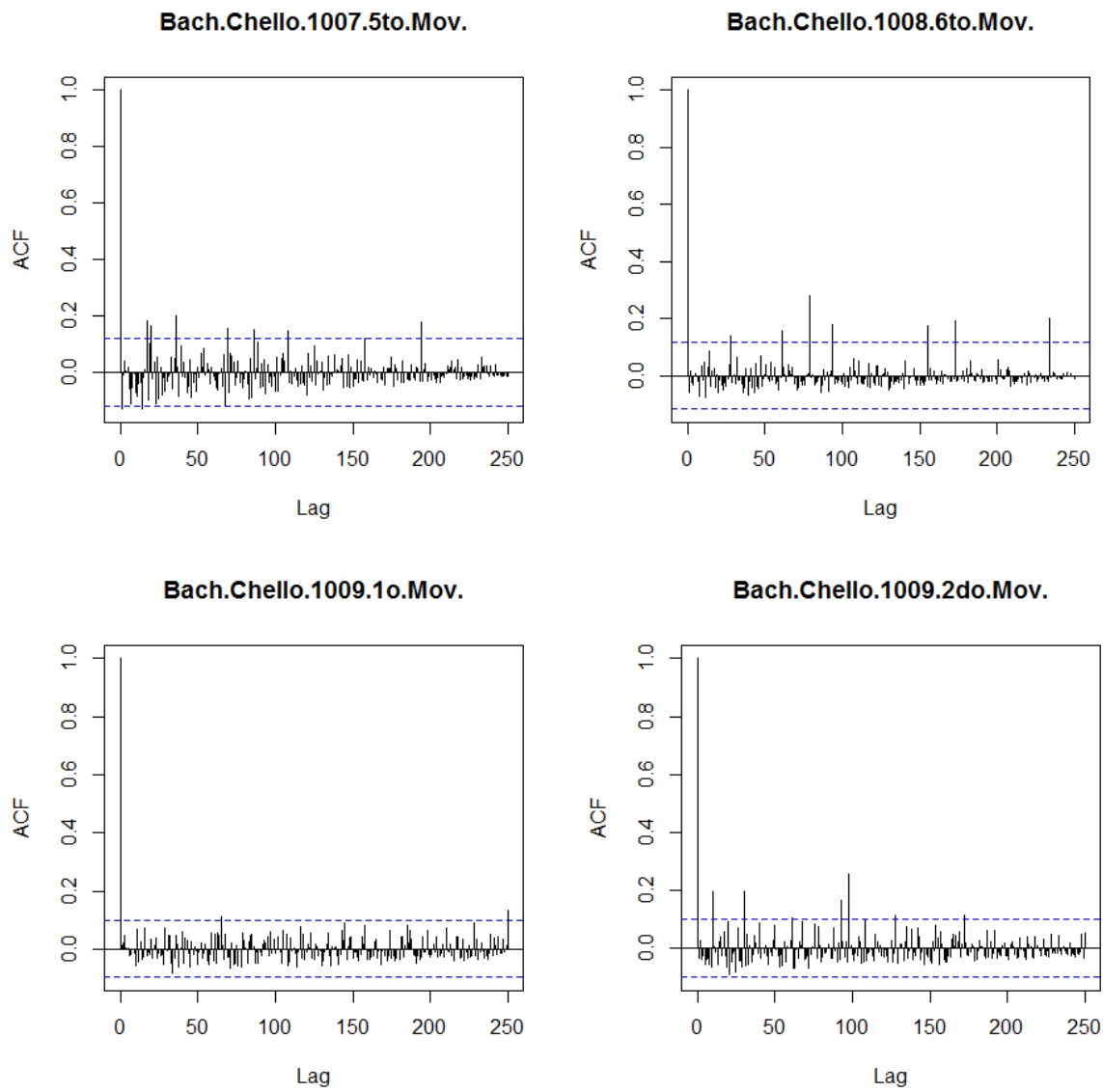


Figura 4.2: Correlograma de las suites de Bach, en términos de series de palabras



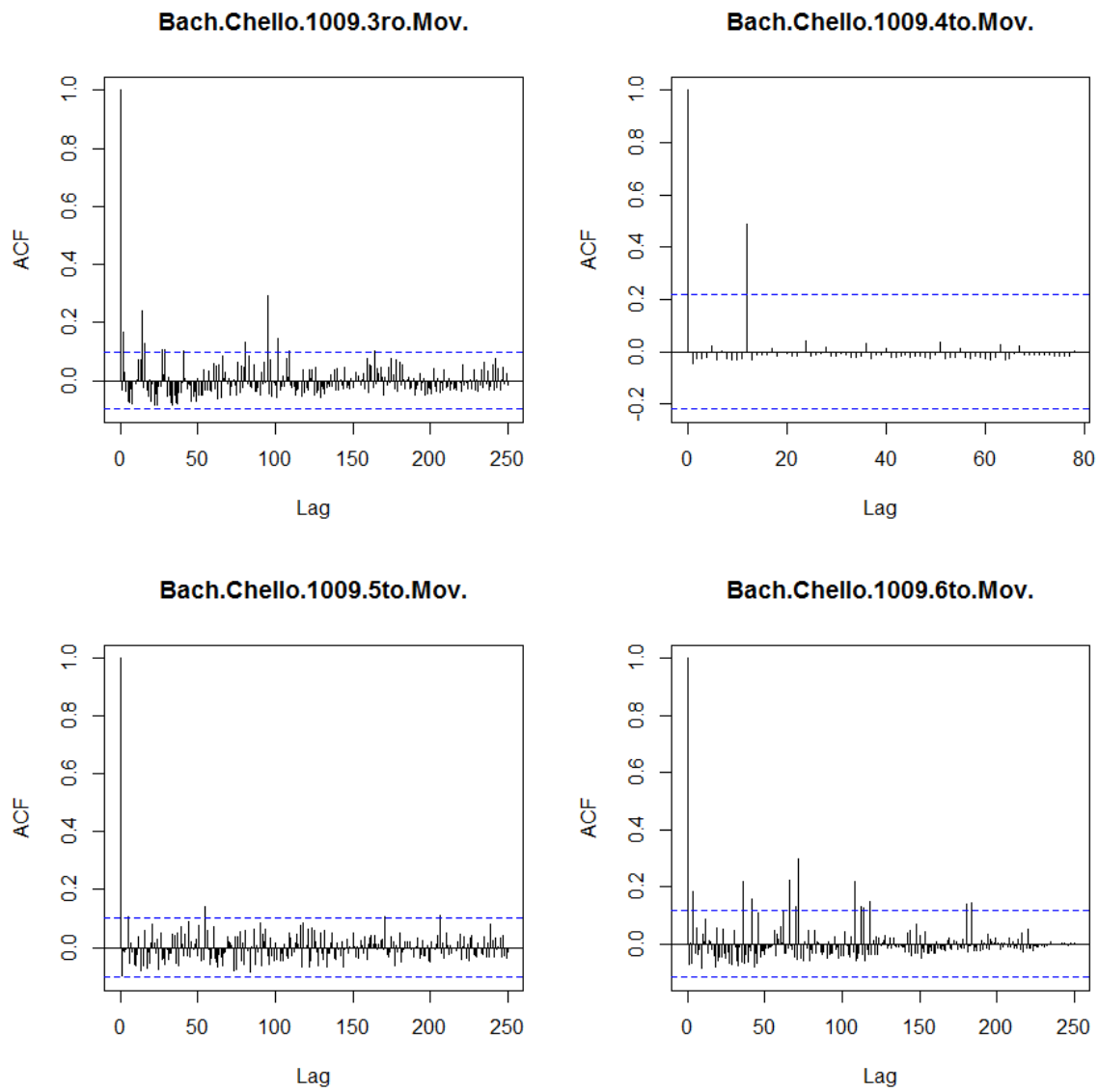


Figura 4.3: Correlograma de las suites de Bach, en términos de series de palabras

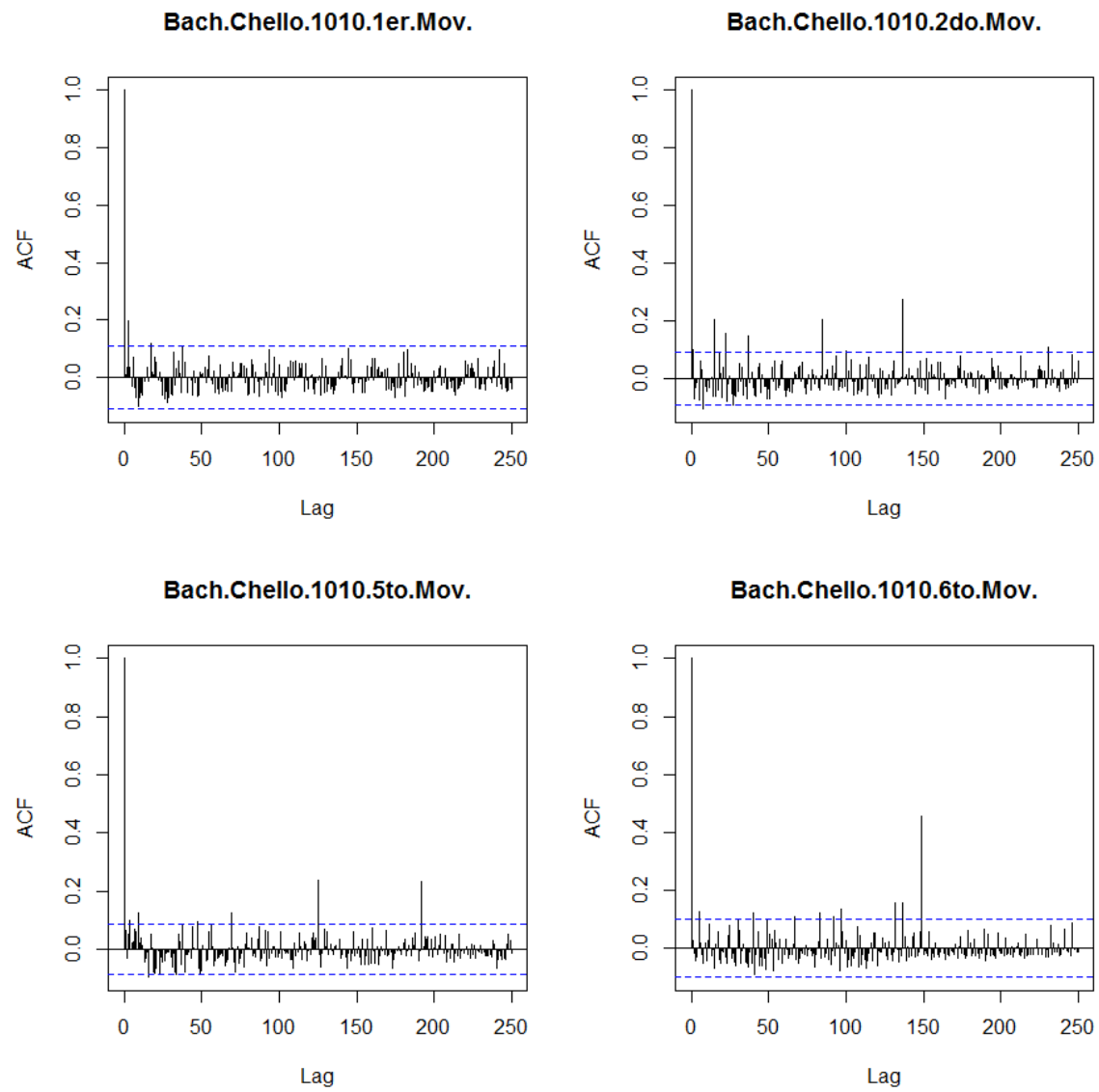


Figura 4.4: Correlograma de las suites de Bach, en términos de series de palabras

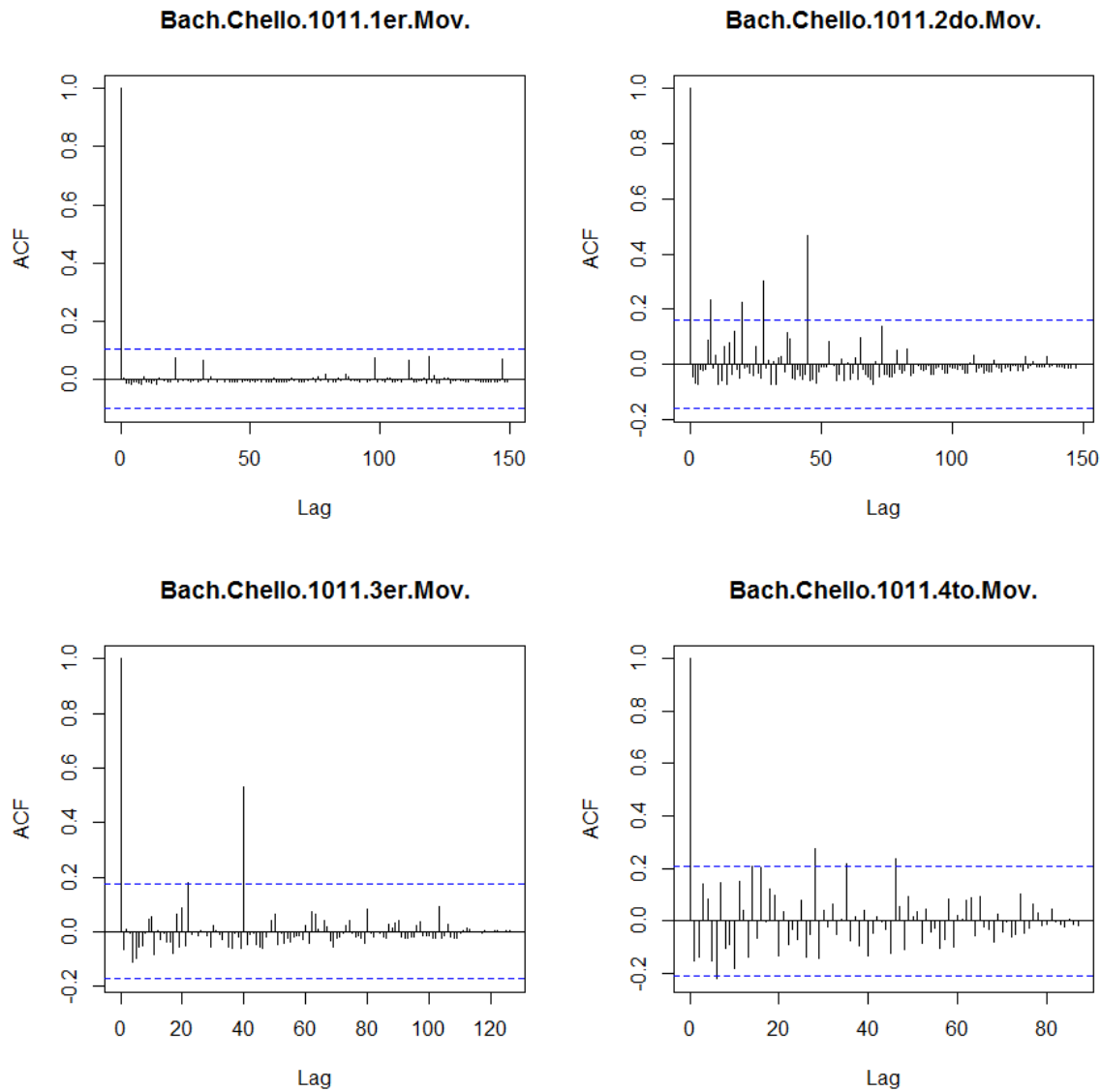


Figura 4.5: Correlograma de las suites de Bach, en términos de series de palabras

De los correlogramas anteriores, podemos ver que para el caso de Bach hay algunas piezas en donde tiende a poner cada cierto tiempo las mismas palabras. Por ejemplo si pensamos en el 3<sup>er</sup> movimiento de la suite BWV 1008 y podemos ver lo siguiente la serie en términos de números empieza 7, 7 2, 7 11, 0, 2 0, 11 9, 11 2, 7 2, 7 7, 9. En donde cada bloque es una palabra en el algoritmo de visibilidad natural. Poco después vemos la siguiente secuencia de palabras en la misma series 11, 0, 11 0, 9 0, 11 0, 9 2, 0, 11 9, 11 .

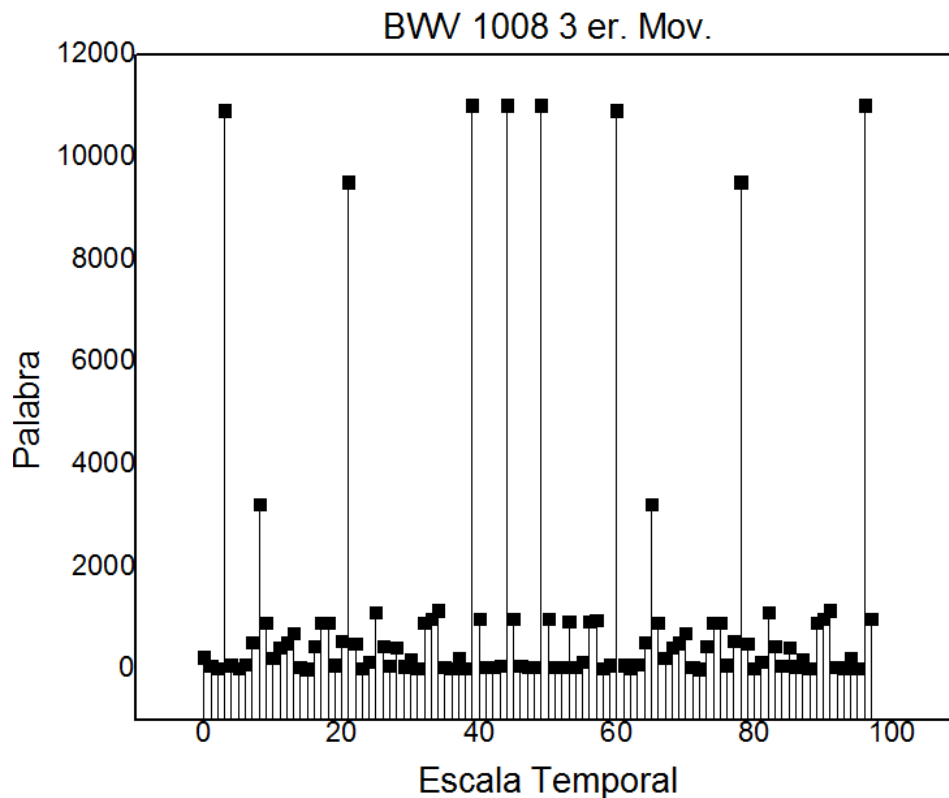


Figura 4.6: Primeras 100 palabras de BWV 1008 3er. Mov. Las palabras son expresadas en términos de su valor numérico.

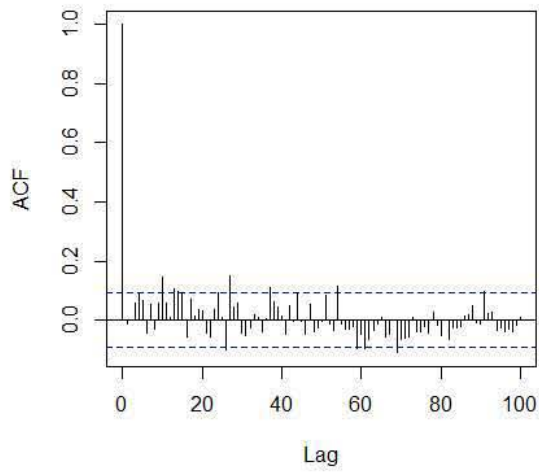
De la gráfica anterior podemos notar que hay palabras que se repiten después de un cierto intervalo de tiempo. Y eso es lo que mide el correlograma, teniendo en cuenta que cada palabra, tiene un cierto valor numérico. La palabra formada por las notas SiLa#Do# numéricamente sería 11,10,1; como bloque tendrá el valor numérico 11101.

Por bloque tenemos la manera de ver que tan correlacionada es nuestra serie en términos de bloques de notas. Lo que podemos ver de los correlogramas de Bach es que utiliza palabras que son muy parecidas a lo mejor en un punto usa 1101, pero en otro punto de la serie usa 1105.

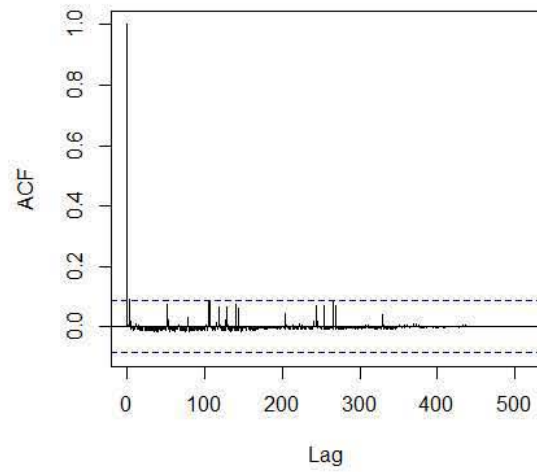
En la siguiente sección haremos un análisis de los distintos bloques de palabras que utiliza Bach. Podemos ver que hay correlogramas, en donde las líneas horizontales nos indican una a veces alta autocorrelación. Mientras que hay piezas, muy pocas, en donde no se nota mucho que se de esta autocorrelación.

4.3.1.2. Autocorrelación Beethoven

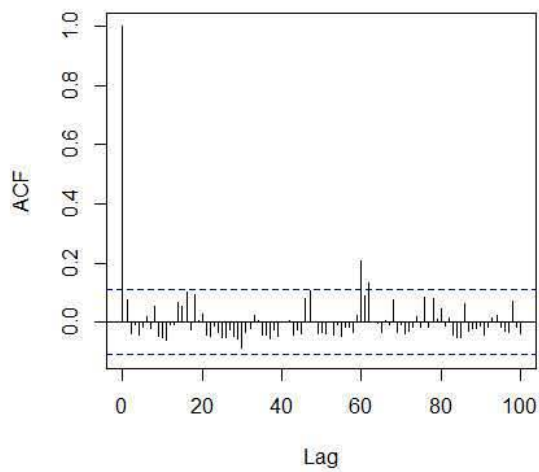
Beethoven.Op.10.1er.mov.Derecha



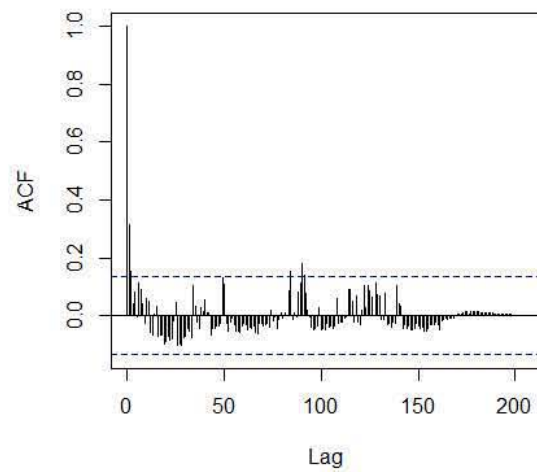
Beethoven.Op.10.1ro.mov.Izquierda



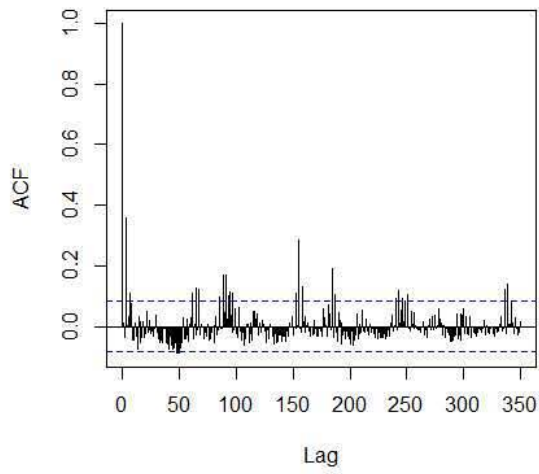
Beethoven.Op.10.2do.mov.Derecha



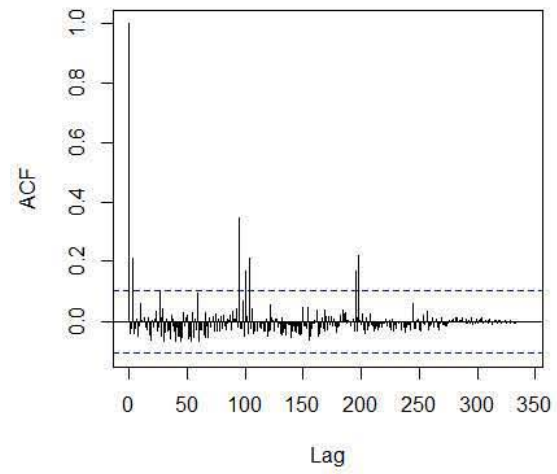
Beethoven.Op.10.2do.mov.Izquierda



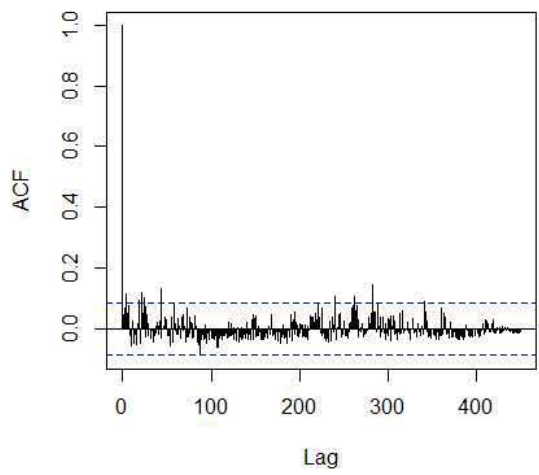
**Beethoven.Op.10.3er.mov.Derecha**



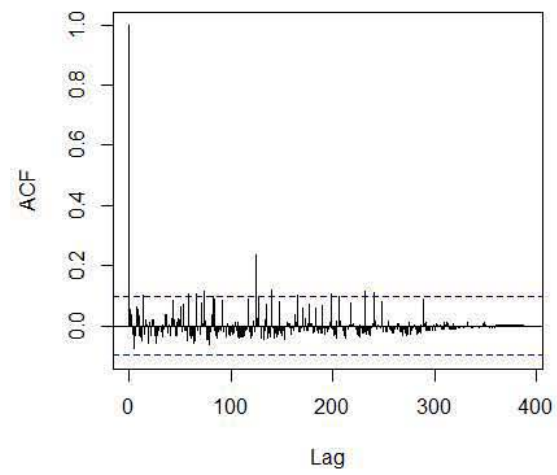
**Beethoven.Op.10.3er.mov.Izquierda**



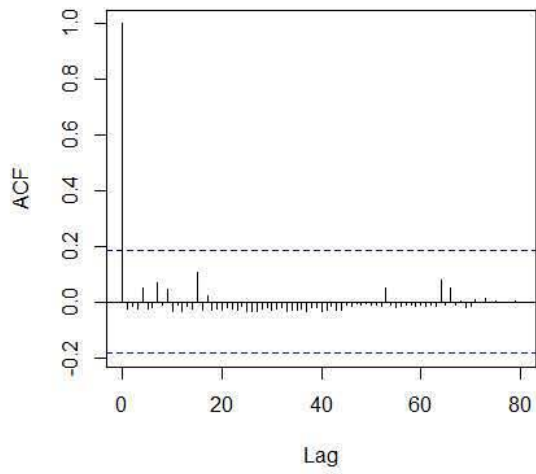
**Beethoven.Op.13.1er.mov.Derecha**



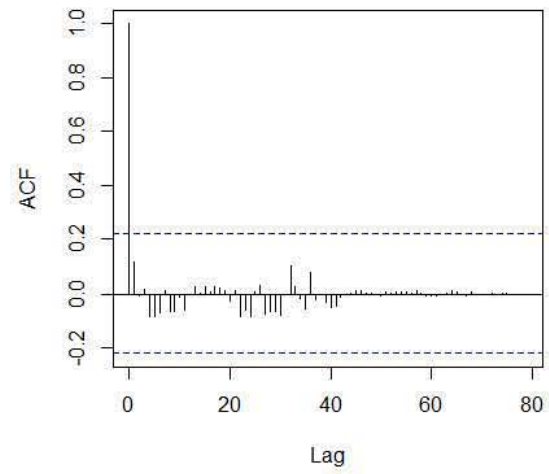
**Beethoven.Op.13.1er.mov.Izquierda**



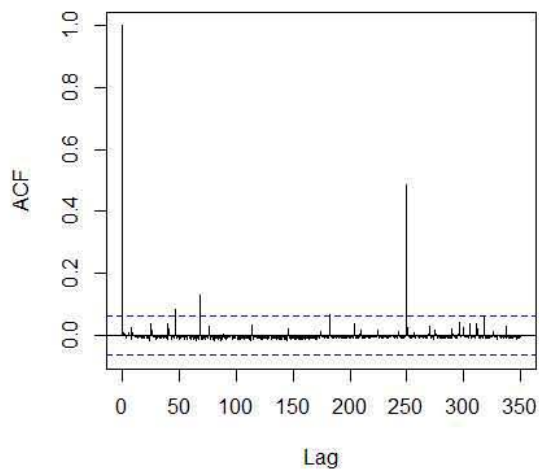
**Beethoven.Op.13.2do.mov.Derecha**



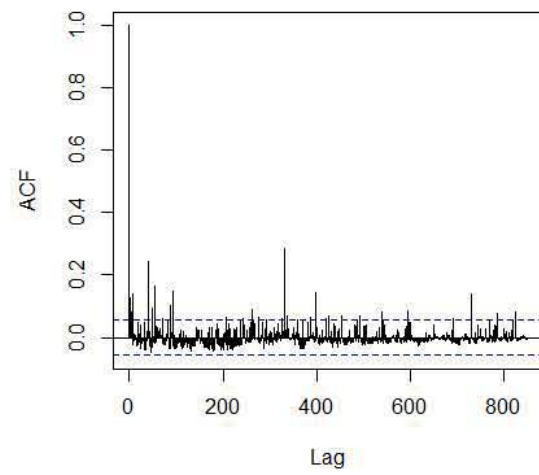
**Beethoven.Op.13.2do.mov.Izquierda**



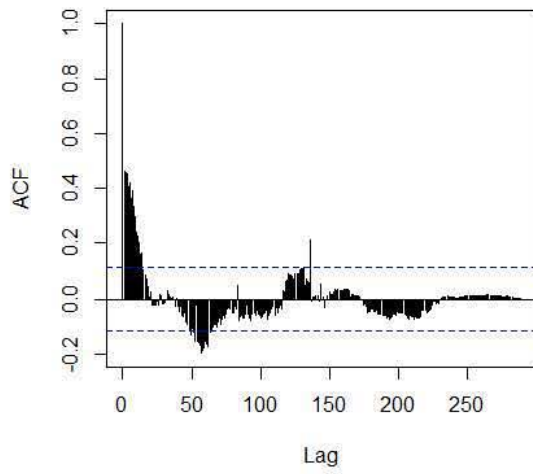
**Beethoven.Op.13.3ro.mov.Derecha**



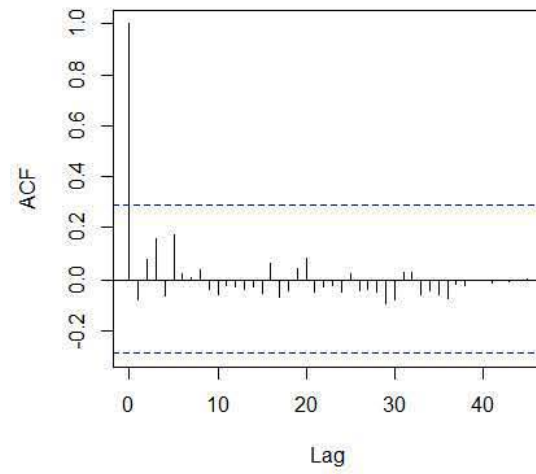
**Beethoven.Op.13.3ro.mov.Izquierda**



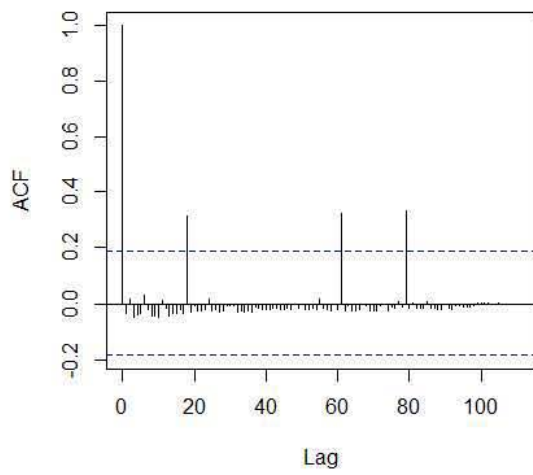
**Beethoven.Op.27.1er.mov.Derecha**



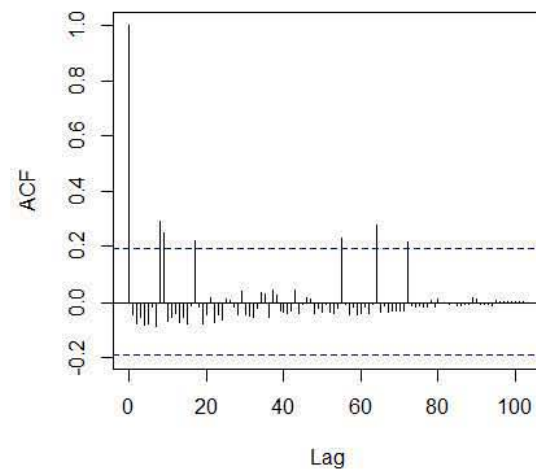
**Beethoven.Op.27.1er.mov.Izquierda**



**Beethoven.Op.27.2do.mov.Derecha**

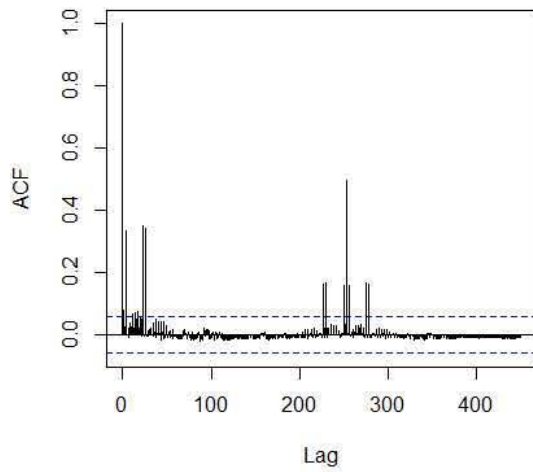


**Beethoven.Op.27.2do.mov.Izquierda**

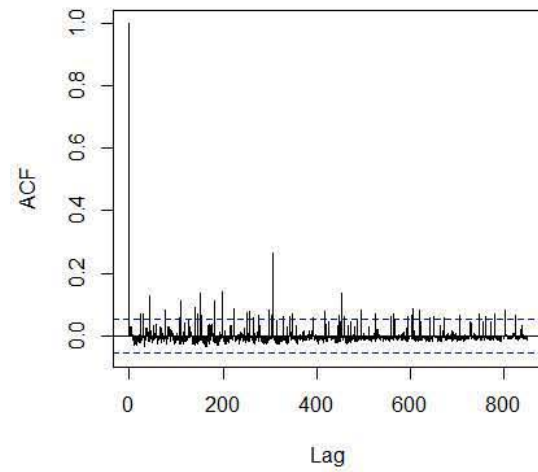




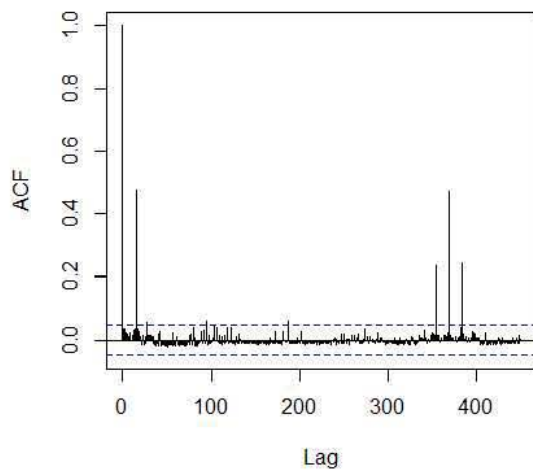
**Beethoven.Op.27.3er.mov.Derecha**



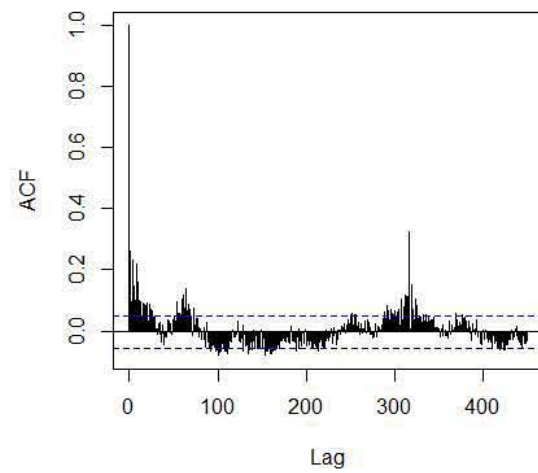
**Beethoven.Op.27.3er.mov.Izquierda**

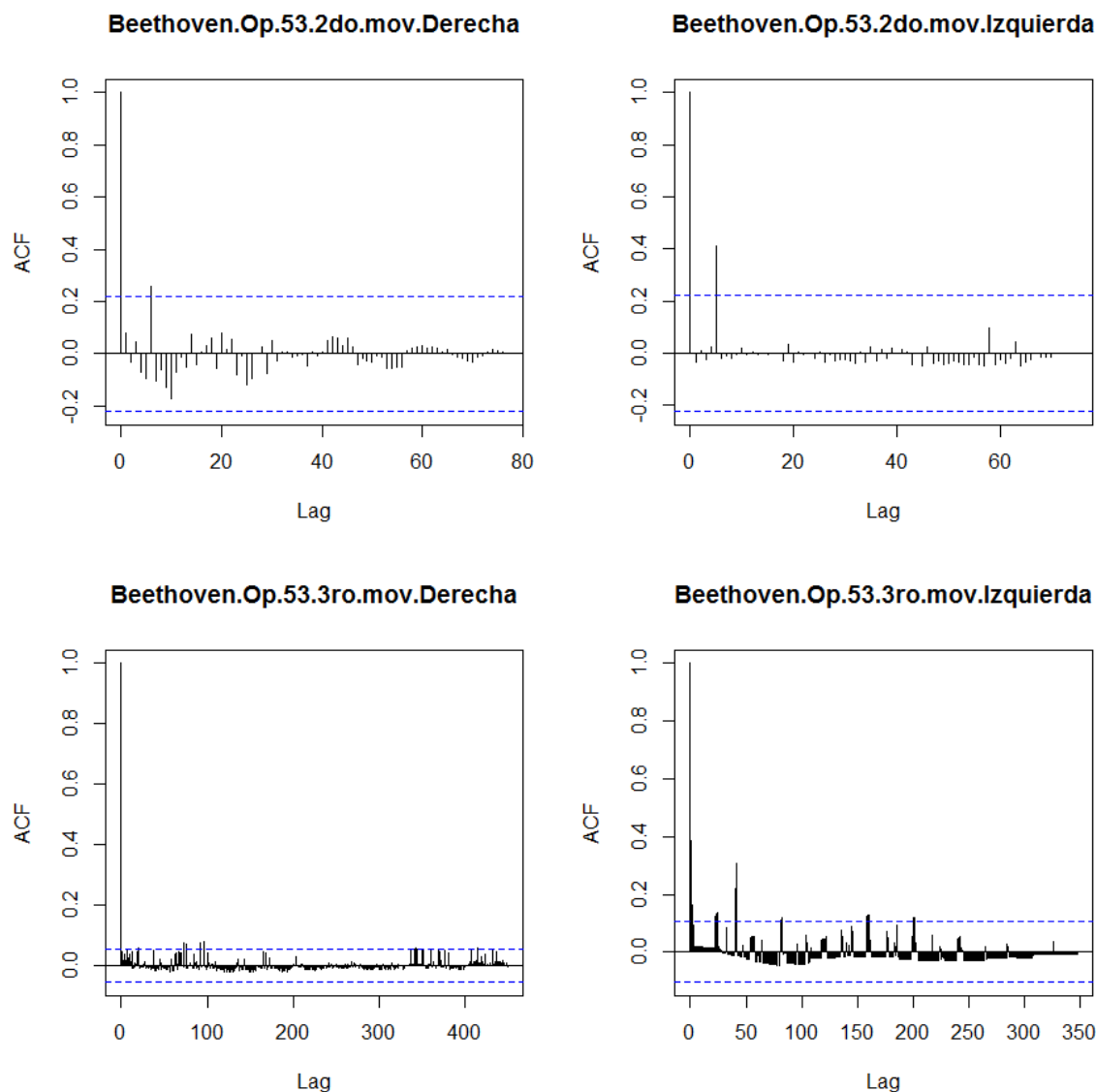


**Beethoven.Op.53.1er.mov.Derecha**



**Beethoven.Op.53.1er.mov.Izquierda**

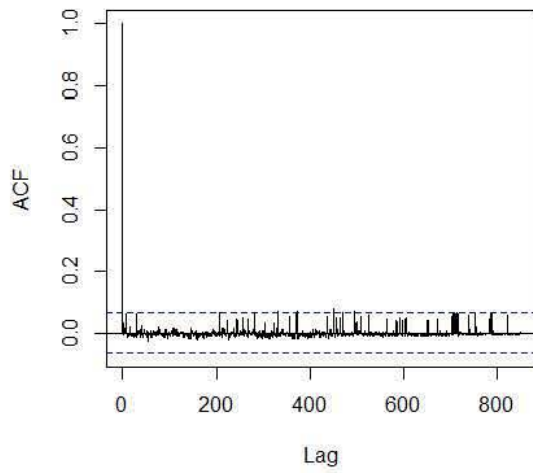




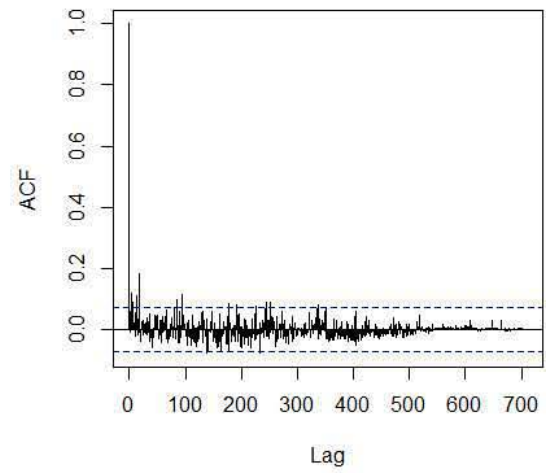
En este caso al poder diferenciar entre mano derecha y mano izquierda, tenemos más información sobre el compositor. En algunas series de tiempo una mano tiende a ser más repetitiva que la otra. Por ejemplo en la Op 13 último movimiento, la mano izquierda tiende a ser más altamente autocorrelacionada en cuestión de las palabras que toca esta mano, sobre todo al inicio y a la mitad de la serie. Mientras que la mano derecha solo una sola vez casi al final de la serie. Sin embargo, en la Op 27 1er movimiento, la mano derecha es altamente autocorrelacionada, mientras que la mano izquierda no lo es. En general vemos que el autor, tiende a usar a veces, las mismas ideas a veces usa estas ideas muy seguidas en el principio, y luego a la mitad de la pieza. En general no hay distinción de que solo una de las manos sea más correlacionada que otra. A diferencia de Bach, en algunas piezas, la persistencia en el corto plazo es grande.

4.3.1.3. Autocorrelación Chopin.

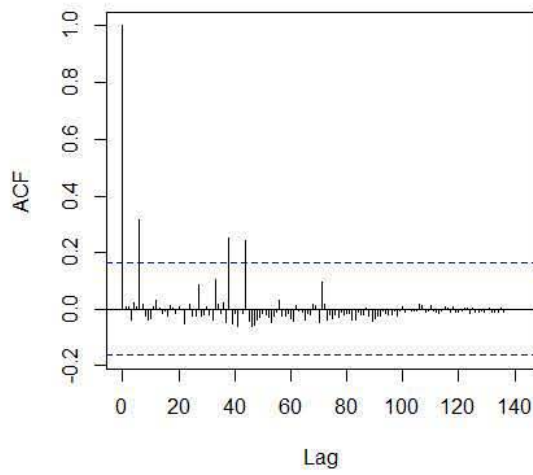
Chopin.Op.23.Derecha



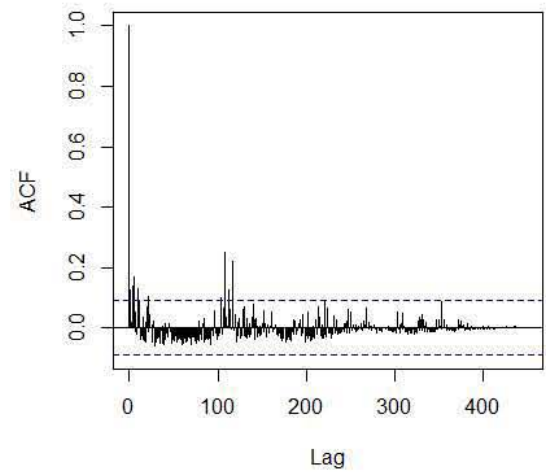
Chopin.Op.23.Izquierda

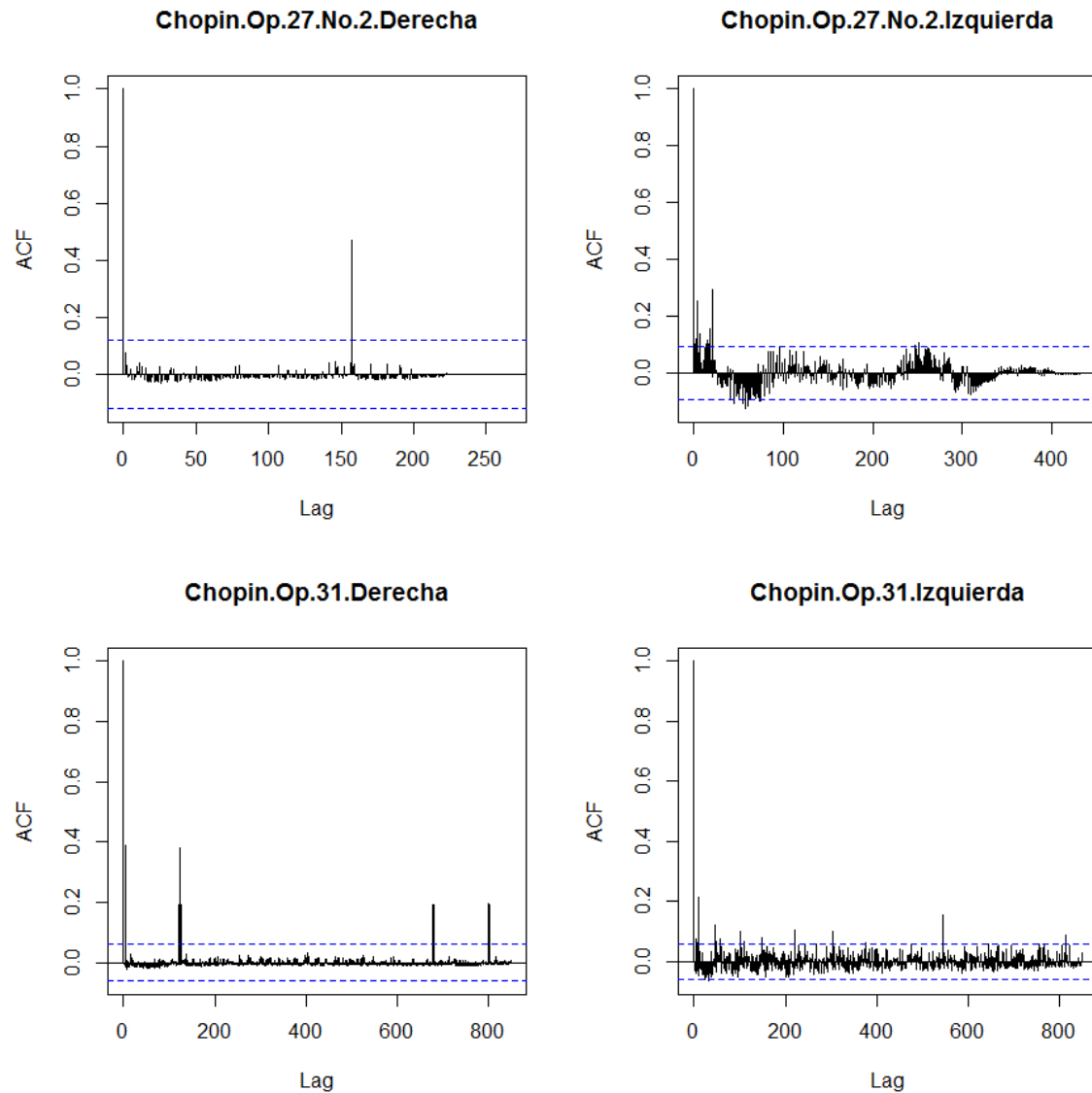


Chopin.Op.27.No.1.Derecha



Chopin.Op.27.No.1.Izquierda





Por ultimo en el caso de Chopin vemos, la persistencia se da de mayor manera en la mano izquierda, aunque si se llega a presentar en la mano derecha. En los tres casos podemos ver que la función de autocorrelación es muy diferente para los tres autores. De esta forma, vemos que de alguna forma el algoritmo de visibilidad, si funciona, en el sentido de encontrar similitudes en la serie de tiempo, y poner estas similitudes como la misma palabra. De otra forma no habría ningún tipo de persistencia, en el correlograma.

#### 4.3.1.4. Función de distribución radial[27].

Si consideramos un sistema de  $N$  partículas en un volumen  $V$  y una temperatura  $T$ . La probabilidad de que una molécula 1 este en  $d^3r_1$  en el punto  $r_1$ , y una molécula 2 en  $d^3r_2$

en  $r_2 \dots$  es:

$$P(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) d^3 r_1 \dots d^3 r_n = \frac{e^{-\frac{U(r_1, \dots, r_n)}{kT}}}{Z} d^3 r_1 \dots d^3 r_n \quad (4.19)$$

La probabilidad de que la molécula 1 este en el elemento  $d^3 r_1$  y en el punto  $r_1$ , y la molécula  $n$ , en el elemento  $d^3 r_n$  y en el punto  $r_n$  sin importar la configuración de las restantes  $N - n$  es obtenida de integrar la ecuación anterior sobre las coordenadas desde  $n + 1$  hasta  $N$ :

$$P^n(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) = \frac{\int \dots \int e^{-\frac{U(r_1, \dots, r_n)}{kT}} d^3 r_{n+1} \dots d^3 r_N}{Z} \quad (4.20)$$

Si queremos la probabilidad de que cualquier molécula este en el elemento  $d^3 r_1$  en  $r_1$  y cualquier molécula pueda estar en el elemento  $d^3 r_n$  y en el punto  $r_n$ , sin importar el resto de las moléculas tenemos:

$$\rho^{(n)}(r_1, \dots, r_n) = \frac{N!}{(N - n)!} P^n(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \quad (4.21)$$

La cantidad  $\rho^{(1)}(r_1)$  representa la probabilidad de que una molécula se encuentre en el elemento  $dr_1$ . Para un cristal esta función es una función periódica, con máximos en los puntos de la lattice del cristal. Sin embargo para un fluido, todos los puntos en un volumen  $V$  son equivalentes y  $\rho^{(1)}(r_1)$  es independiente de  $r_1$ . Para un fluido, se suele escribir como:

$$\frac{1}{V} \int \rho^{(1)}(r_1) dr_1 = \frac{N}{V} \quad (4.22)$$

Se puede definir la función de correlación  $g^{(n)}(r_1, \dots, r_n)$  de acuerdo a:

$$g^{(n)}(r_1, \dots, r_n) = \frac{N!}{(N - n)!} P^n(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) \quad (4.23)$$

A  $g^{(n)}$  se le conoce como la función de correlación ya que si las moléculas son independientes una de otra,  $\rho^{(n)}$  sería entonces  $\rho^n$ , y el factor  $g^{(n)}$  es la correlación entre moléculas. En general solo se suele usar  $g^{(2)}(r_{12})$ , ya que es de gran importancia en la teoría de líquidos y esta función solo depende de las distancias entre las moléculas 1 y 2 y se denota solamente como  $g(r)$

El factor  $\rho g(r)dr$ , es la “probabilidad” de observar una segunda partícula en  $dr$  suponiendo que hay una molécula en el origen de  $r$ .

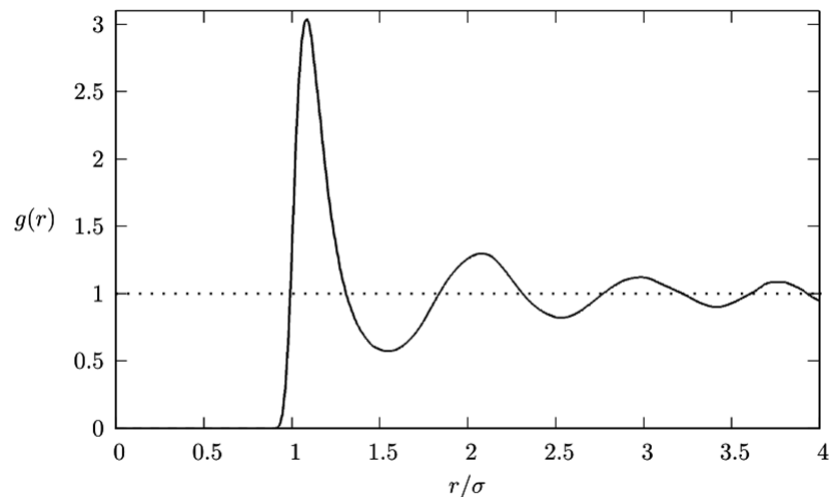


Figura 4.7: Función de correlación para un líquido. Se puede observar que existen picos. Estos picos representan son los primeros vecinos, segundos vecinos, etc . En cierta forma es un remanente del ordenamiento que tenía el sólido.

La función de distribución radial se puede obtener por medio de difracción de rayos X, ya sea en líquidos o en sólidos. La transformada de Fourier del difractograma nos da la función de autocorrelación o de distribución radial. En un sólido las moléculas al estar arregladas de manera regular, originan líneas delgadas en su espectro de difracción.

Al observar la función de autocorrelación que encontramos en las palabras musicales, se observa que en algunos casos se comporta muy parecido a la función de distribución radial obtenida de un líquido, por ejemplo Beethoven Op27 1er mov. La función de distribución radial nos mide como están distribuidas las partículas espacialmente. Por lo que podemos decir que en el caso de la música hay regiones donde las palabras que usa un autor, están distribuidas como las moléculas en un líquido, solo que en vez de espacialmente en nuestro caso es temporalmente.

Si observamos el caso de Bach podemos ver que existe una tendencia a tener un comportamiento de sólido. Es decir las palabras en Bach tienden a tener un mayor orden o a

ser muy parecidas, cada determinado lapso de tiempo. Lo que nos indica que Bach tendía a poner cada cierto tiempo las misma idea o palabras, por lo que su correlograma se parece más al de un sólido.

También podemos observar que hay correlogramas en donde la función decae de manera abrupta, esto se lo podríamos atribuir a un estado gaseoso en donde la correlación decae muy rápidamente. Esto no se observó para Bach pero si fue observado para el caso de Beethoven y Chopin.

### 4.3.2. Información de las palabras de los tres autores

En vista de que el algoritmo de visibilidad puede encontrar palabras y similitudes en las piezas de los autores, se puede juntar todas las piezas estudiadas de un solo autor. Con ésta lista calculemos la probabilidad de aparición, de cada una de las distintas palabras que obtengamos y medir la cantidad de información en bits. Usando la siguiente ecuación:

$$i = -k \sum_j P_j \ln(P_j) \quad (4.24)$$

Donde  $\mathbf{P}$  representa la probabilidad de aparición de cada bloque de palabras. Antes de calcular la entropía por bloques de símbolos asociada a cada autor. Se mostrara las palabras más y menos repetidas por cada autor. Hay que tener en cuenta que entre menos repetida sea una palabra, más información tendrá de acuerdo a la teoría de Shannon. Estas palabras se obtuvieron de la serie al relacionarlas de la siguiente forma:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Cuadro 4.1: Relación entre las notas musicales y sus respectivas letras.

A continuación se muestran las principales palabras utilizadas por Bach. En la tabla se puede ver la probabilidad de ocurrencia, así como la frecuencia de ocurrencia de estas palabras.

De las siguientes tablas podemos ver que los compositores estudiados, usaban más ciertos grupos de palabras sobre otros. Bach tiende a usar más frecuente mente las palabras, Do-Si, Do-Re, Do-Do-La#, La-Si; si nos fijamos en las palabras que usa Beethoven, podemos ver que incluye algunas de las palabras de Bach, sin embargo tienden a ser distintas a las de Bach.

Para Beethoven tenemos que usar las siguientes palabras, Sol#-Sol#, Do-Si, Sol-Sol, Sol-La, Do-Sol, Do#-Do#; mientras que para Chopin tenemos, Do-Do#-Sol#, Do#-Fa,

Mi-Sol#, Sol#-Sol#, Fa-Sol#. De lo anterior podemos ver que a veces un autor tiende a repetir una palabra que es muy usada por otro, como Beethoven y Chopin ambos usan G#-G#, pero uno más que otro. Esto podría pensarse en que un autor influye en el otro.

Notas Musicales	Probabilidad	Frecuencia
CB	0.031469	242
CD	0.025878	199
CCA#	0.025618	197
AB	0.022367	172
FG	0.021847	168
GA	0.020936	161
DE	0.018466	142
CA	0.016905	130
DG	0.016775	129
D#F	0.016775	129
AG	0.015995	123
AA#	0.014044	108
G#G	0.014044	108
DB	0.013654	105
DCB	0.013264	102
CG	0.013134	101
D#D	0.012744	98
FD#D	0.011313	87
FE	0.010793	83
GF	0.010273	79
CD#G	0.010143	78
AGF#	0.009493	73
CE	0.009103	70
GA#	0.008973	69
CD#	0.008973	69
EF#	0.008583	66
DA	0.008192	63
EF	0.008062	62
GB	0.007672	59
D#DD#	0.007542	58

Cuadro 4.2: Palabras más frecuentemente usadas en las suites para chelo de Bach. Estas palabras se obtuvieron con el algoritmo de visibilidad.

Por otro lado podemos ver las palabras menos frecuentes de Bach. En ambos casos podemos observar que las palabras tienen longitud de dos o tres caracteres.



Notas Musicales	Probabilidad	Frecuencia
G#D#B	0.00013	1
G#FG#	0.00013	1
F#DD#	0.00013	1
AF#F	0.00013	1
FF#A#	0.00013	1
D#F#A#	0.00013	1
F#D#E	0.00013	1
G#DD#	0.00013	1
A#D#F	0.00013	1
D#DD	0.00013	1
AA#B	0.00013	1
GGG#	0.00013	1
GG#B	0.00013	1
GD#F#	0.00013	1
FCD	0.00013	1
AD#D	0.00013	1
A#CD#	0.00013	1
GFG#	0.00013	1
FCD#	0.00013	1
BCD#	0.00013	1
A#D#A	0.00013	1
F#CA#	0.00013	1
GDD	0.00013	1
G#FB	0.00013	1
A#FE	0.00013	1
G#D#	0.00013	1
G#GG	0.00013	1
A#AA	0.00013	1
A#DD	0.00013	1
DDD#	0.00013	1
D#D#G	0.00013	1

Cuadro 4.3: Palabras menos frecuentemente usadas en las suites para chelo de Bach. Estas palabras se obtuvieron con el algoritmo de visibilidad.

Para el caso de Beethoven tenemos que las palabras más frecuentes son:

Notas Musicales	Frecuencia	Probabilidad
G#G#	376	0.028617
CB	353	0.026867
GG	317	0.024127
GA	310	0.023594
CG	289	0.021996
D#D#	289	0.021996
CC	233	0.017733
D#G#	224	0.017048
C#CA#	222	0.016896
DG	219	0.016668
CD#G	206	0.015679
CD	190	0.014461
CE	187	0.014232
CA#	184	0.014004
C#G#	179	0.013624
FF	178	0.013547
CG#	170	0.012939
CF	162	0.01233
D#A#	155	0.011797
EG#	151	0.011493
DF	147	0.011188
G#B	147	0.011188
DB	145	0.011036
G#G	142	0.010808
BB	140	0.010655
D#B	131	0.00997
FG	127	0.009666
CGB	123	0.009361
GG#	119	0.009035
G#A#	116	0.008829
D#F	114	0.008676
AA	113	0.0086
EG	113	0.0086
EE	110	0.008372
GA#	107	0.008144
D#E	100	0.007611
DD	98	0.007459
AB	95	0.00723

Cuadro 4.4: Palabras más frecuentemente usadas en Beethoven. Estas palabras se obtuvieron con el algoritmo de visibilidad.

Y finalmente tenemos las palabras más frecuentes de Chopin:

Notas Musicales	Probabilidad	Frecuencia
CC#G#	144	0.029162
C#F	121	0.024504
EG#	94	0.019036
G#G#	78	0.015796
FG#	77	0.015593
D#G#	65	0.013163
CC#E	64	0.012961
D#A#	63	0.012758
FA#	58	0.011746
CA#	57	0.011543
A#A#	57	0.011543
CG#	56	0.011341
DA#	56	0.011341
EE	56	0.011341
G#B	55	0.011138
EC#C#	55	0.011138
D#F	54	0.010936
G#F#	52	0.010531
EF	51	0.010328
AA#	49	0.009923
CB	44	0.00891
EF#	43	0.008708
G#A	42	0.008505
CF#	42	0.008505
F#G#	41	0.008303
F#F#	39	0.007898
CD#	38	0.007695
EC#C	36	0.00729
C#A	35	0.007088
G#A#	35	0.007088
C#B	35	0.007088
C#F#	34	0.006885
DA	33	0.006683
C#D#	32	0.00648

Cuadro 4.5: Palabras más frecuentemente usadas en Chopin. Estas palabras se obtuvieron con el algoritmo de visibilidad.

Con las probabilidades obtenidas de todas las palabras encontradas por autor, se puede calcular la información por bloque de letra. Lo que se observa es que hay una diferencia entre los tres compositores. Bach es el compositor que da menos información por palabra. Esto implica que suele repetir más veces las palabras. Mientras que en Chopin la información por palabra aumenta.

Autor	Información(Bites)/Palabra
Bach	5.27
Beethoven	5.28
Chopin	5.54

Cuadro 4.6: Información por palabra en terminos de los tres autores. Chopin da más información por bloque de palabras

Solemos encontrar más información en Chopin y esto puede ser a que utilice menos veces la misma palabra. Esto concuerda con que los correlogramas del compositor, que son distintos a los de los otros dos estudiados.

En el caso de Bach podemos ver que las palabras más frecuentes son las que incluyen las combinaciones Si, Do, y La , Si. Existe la creencia de que Bach solía poner su nombre en las partituras. En el alemán el Si a veces se solía poner como H, de aqui tendríamos las siguientes letras **B, H, A, C** . Es posible de acuerdo a lo encontrado que utilizara su nombre como firma en las composiciones. La forma en la que se encontraron las palabras no concuerda exactamente con su nombre. Si no que es de la forma “*AB*”, “*BC*” sin la “H” y en un orden diferente el La y el Si. Se podría pensar que a veces experimentaba cambiando un poco el orden de su nombre, o alterándolo un poco. A pesar de que Beethoven también utiliza palabras que suelen ser frecuentes en Bach, estas palabras en común no son las que Beethoven utiliza mayoritariamente.

Mientras que en Chopin, el número de veces que utiliza la misma palabra, es mucho menor que el caso de los otros compositores. Esto implica que obtengamos más información por palabra.

### 4.3.3. Comunidades en la musica.

De las tablas anteriores podemos ver que existen algunas parecen ser más importantes, a la hora de componer música, suelen ser frecuentes y las encontramos en diferentes autores. A continuación lo que se hará, es juntar todas las palabras obtenidas de los tres compositores generando más de 25 000 palabras. En ésta hay muchas que son repetidas, para poder estudiar como son sus conexiones se pasaron a una red. Para hacer esto solo se unieron a primeros vecinos las palabras que se obtuvieron de Bach, Chopin y Beethoven. Se obtuvo



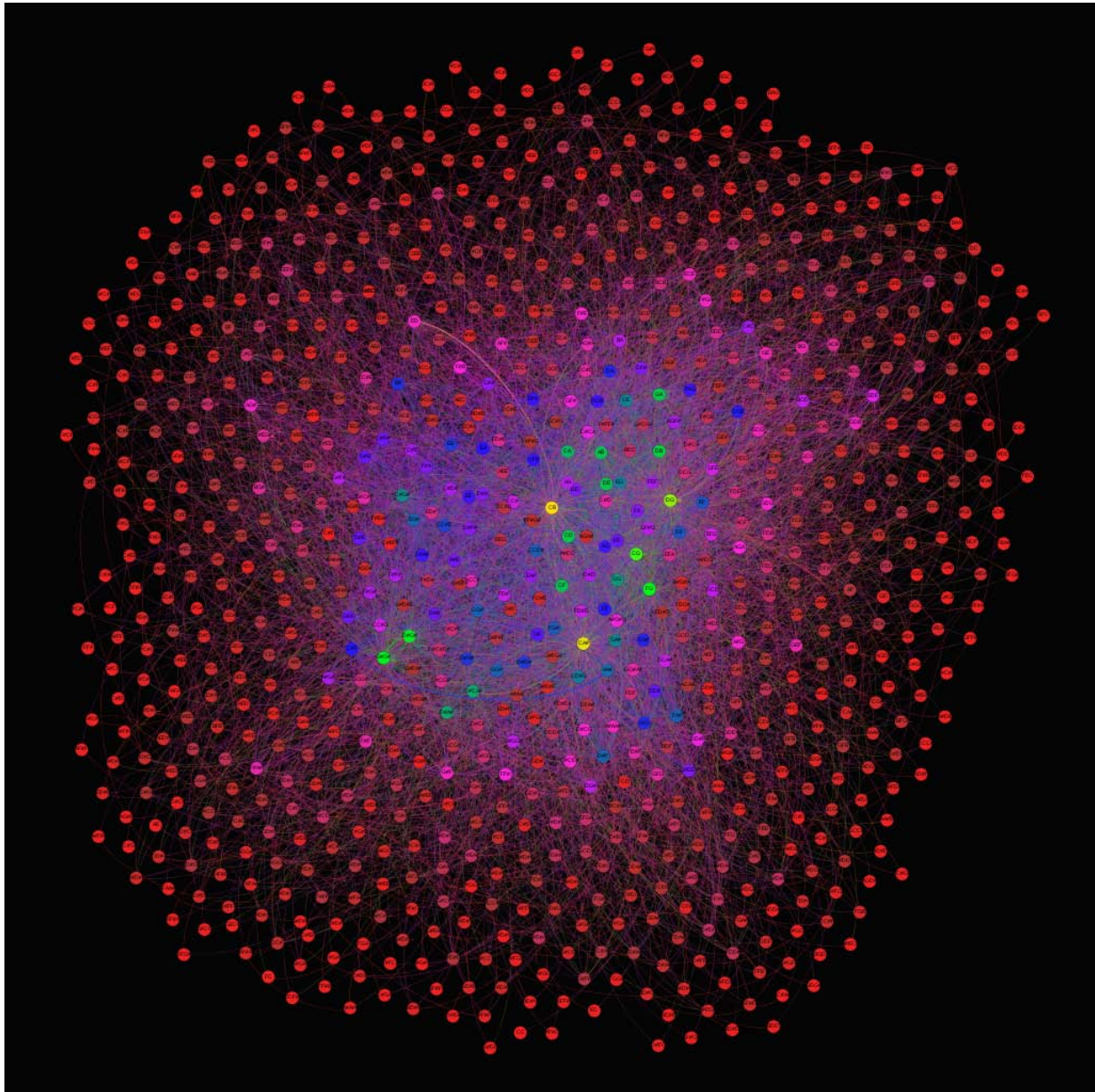


Figura 4.9: Red del conjunto de palabras de los tres autores. Entre más cerca del centro de la red el nodo tendrá mayor grado.

A esta red lo que se hizo para estudiarla, es usar la idea de comunidades en una red. Al buscar si existían comunidades, ver si hay agrupaciones específicas a la hora de estructurar la música, se obtuvo es que solo hay 7 distintas comunidades.



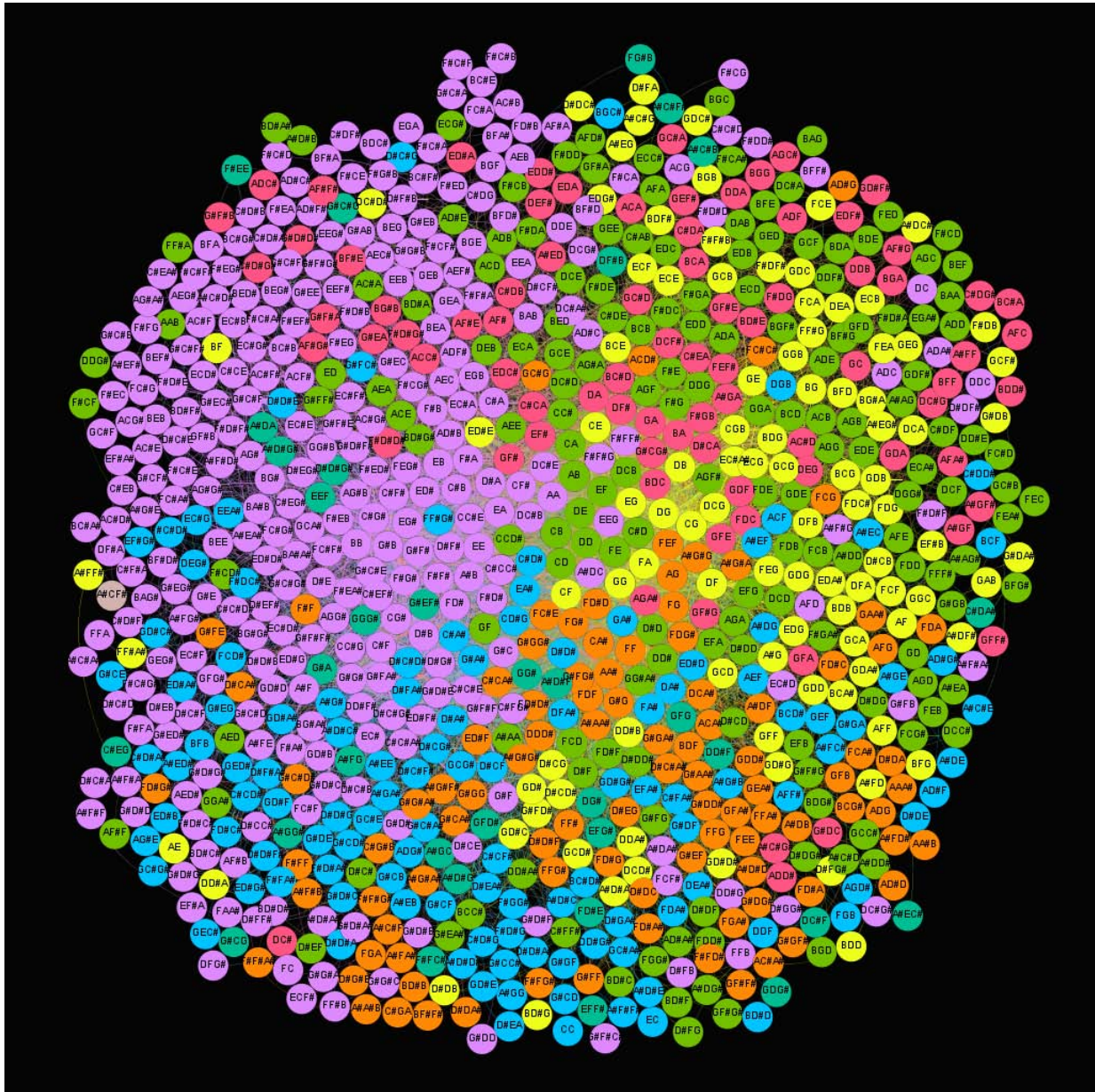


Figura 4.10: Se observa que existen solo 7 comunidades, amarillo, rosa, rosa mexicano, azul, verde, verde claro, naranja

Que existan 7 comunidades podría tener sentido si pensamos que en la música, como cualquier otro lenguaje hay uniones que se favorecen más. Por ejemplo se suele escribir normalmente la casa, la mesa la... , palabras que suelen terminar en “a” y eso mismo puede ocurrir en la música. En estas comunidades, están ciertas reglas de asociación entre las

distintas notas. Podemos tener la información de que palabras se podrían, con otras y que genere sonidos agradables.

Para generar una oración no es suficiente con conocer las palabras, puesto que podríamos tener las palabras correctas, pero tener frases sin estructura. Aquí es donde radica la importancia de las 7 comunidades, en estas podemos encontrar información de cómo estructurar la música. Por otro lado, no es posible desde este punto de vista poder distinguir entre autores, es decir que un cierto autor permanezca a una sola comunidad. Ya que en el caso de los autores estudiados, todos utilizan elementos de cada una de las siete comunidades encontradas.

Al restringir la red a los nodos y poner los que tienen mayor grado podemos volver a hacer la red. Solo existen 4 principales comunidades en la nueva red y podemos observar que gran parte de las notas usadas por Bach, están dentro de dos comunidades en la verde y en la color naranja; mientras que en el caso de Beethoven gran parte de las palabras que usa están en las comunidades azules y naranjas; para Chopin se encuentran dentro de la comunidad morada. La última comunidad, las notas de color naranja, son usadas frecuentemente por varios autores.

En esta red tenemos información a primeros vecinos de cómo están conectados estos nodos. Supongamos que analizamos la forma en la que las notas están unidas, partiendo de las palabras más frecuentemente utilizadas por Bach. Usemos la palabra “AB”(La,Si), que aparece 172 veces, al restringir la red entre los nodos de mayor grado podemos ver con que palabras está conectado este nodo “AB”. En estas redes, que se mostraran más adelante, tienen la característica de que solo la parte que es visible representa los nodos conectados, con la palabra AB ver Figura 4.13. Si no se alcanzan a distinguir, significa que no tienen una conexión directa.



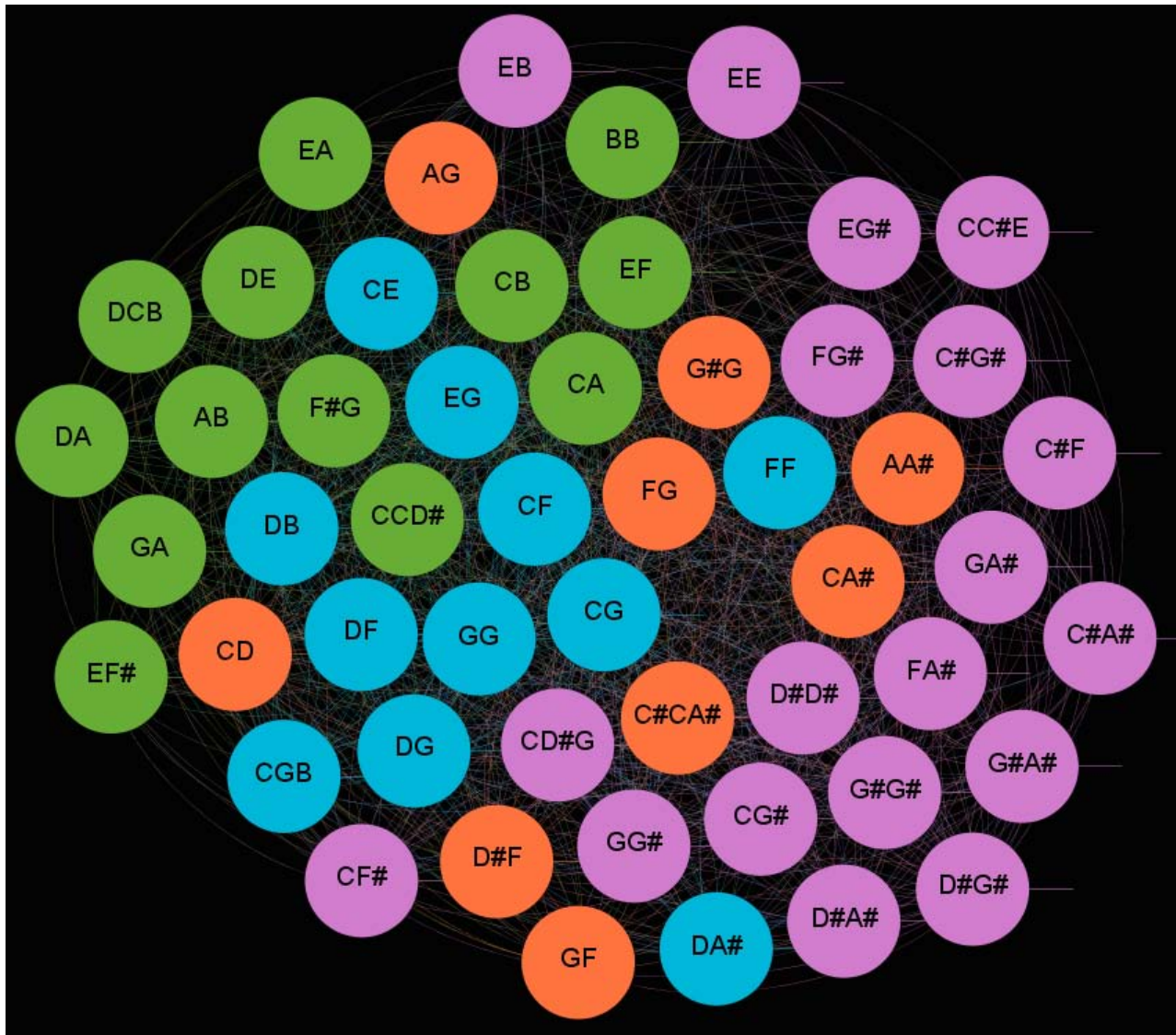


Figura 4.11: Podemos ver que la palabra  $CF\#$ , igual que  $EG\#$ , pertenecen a la comunidad de color morado. Y estas palabras son las más usadas por Chopin. Por otro lado,  $AB$ ,  $DA$ , y  $GA$ , son mayormente usadas por el compositor Bach, las cuales están de color verde. Mientras que  $GG$ ,  $FF$ ,  $CE$ , son usadas mayoritariamente por Beethoven.

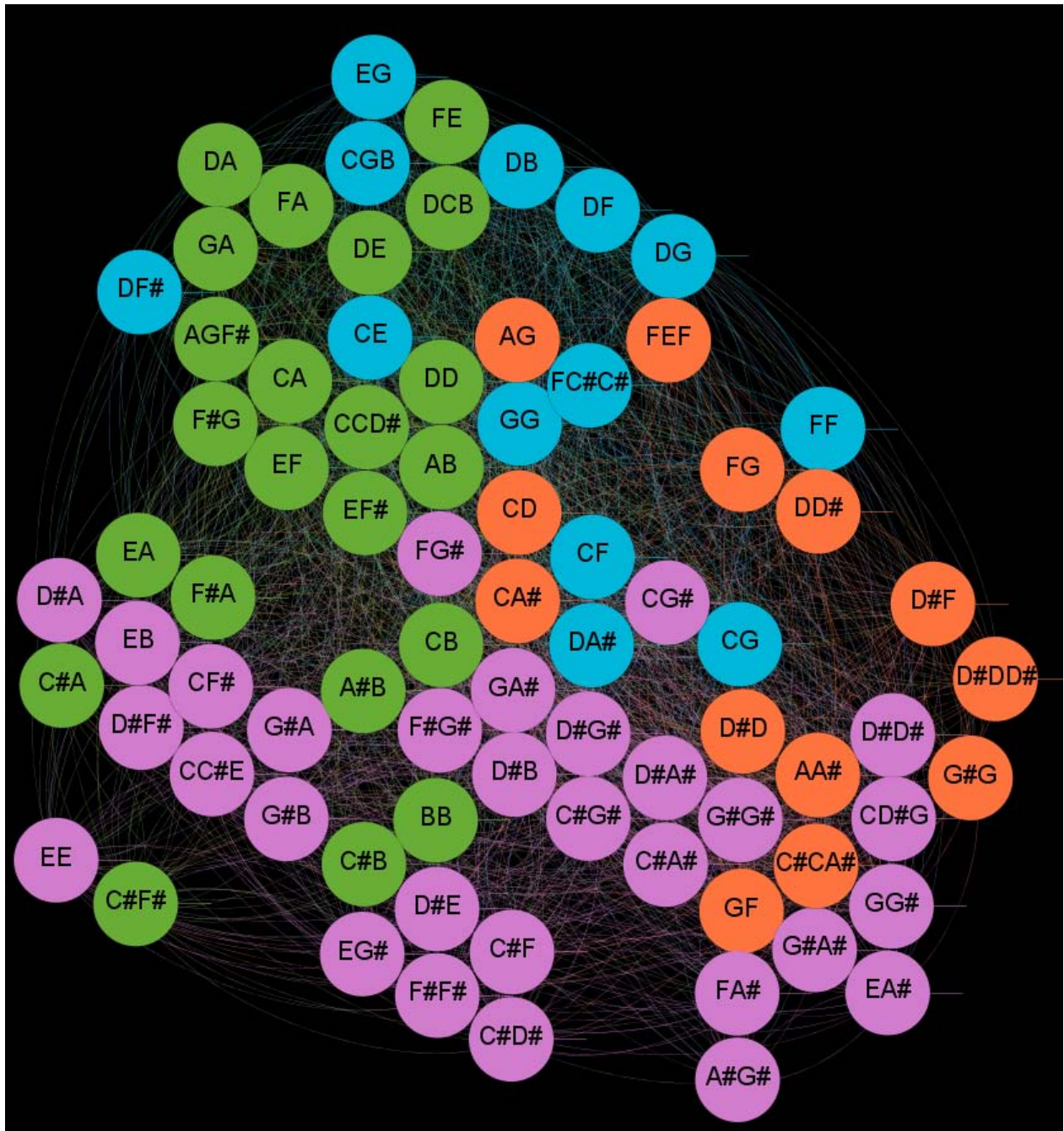


Figura 4.12: Aumentando el número de nodos de la red anterior siguen existiendo 4 comunidades principales.

A continuación mostramos las palabras que se ven en la red anterior, se muestra su respectiva comunidad, así como su frecuencia de ocurrencia por autor.

Compositor(Frecuencia de ocurrencia)	Palabra	Comunidad
Bach (83 ), Beethoven(40 ), Chopin (15 ),	FE	Verde
Bach(172 ), Beethoven(95), Chopin (20)	AB	Verde
Bach(102), Beethoven(80), Chopin (1)	DCB	Verde
Bach(199), Beethoven(353), Chopin(15)	CD	Naranja
Bach(130), Chopin(24), Beethoven(80)	CA	Verde
Bach (63), Beethoven(79), Chopin (33)	DA	Verde
Bach(53), Beethoven(63), Chopin (1)	F#G	Verde
Bach(14), Beethoven(151), Chopin (94)	EG#	Morado
Bach(108), Beethoven(73), Chopin (49)	AA#	Naranja
Bach(168), Beethoven(127), Chopin (12)	FG	Naranja
Bach(35), Beethoven(58), Chopin (14)	DD#	Naranja
Bach(31), Beethoven( 72), Chopin (58)	FA#	Morado
Bach(69), Beethoven(0), Chopin (18)	GA#	Morado
Bach(6 ), Beethoven( 58), Chopin (121)	C#F	Morado
Bach(40), Beethoven(73 ), Chopin (77)	FG#	Morado
Bach(14), Beethoven( 151), Chopin (94 )	EG#	Azul
Bach(11), Beethoven( 289), Chopin (19)	D#D#	Naranja
Bach(108), Beethoven(142 ), Chopin (14)	G#G	Naranja
Bach(83), Beethoven( 178), Chopin (31)	FF	Azul
Bach(52), Beethoven( 113), Chopin (27)	EG	Azul
Bach(101), Beethoven(289 ), Chopin (19)	CG	Azul
Bach(52), Beethoven(184 ), Chopin (56)	DA#	Azul

Cuadro 4.7: Comunidades y clasificación de algunas palabras.

Una vez que hemos visto que si podemos distinguir en comunidades a los autores al reducir los nodos, y poner solo los más relevantes. Podemos retomar la idea expuesta anteriormente de ver como se conectan a primeros vecinos estos nodos.

Lo que podemos ver de la siguiente gráfica es cuales palabras son primeros vecinos de la palabra AB. Si queremos que aparezcan palabras utilizadas por Bach, entonces habría que relacionar la lista de palabras del compositor, con las conexiones a primeros vecinos con la palabra AB. También podríamos tomar palabras de las comunidades verde y naranja. La palabra CB, forma parte de la misma comunidad y está conectada con AB. También podemos ver que la palabra AB está relacionada con la palabra CC#E. Esta última palabra es más usada por Chopin.



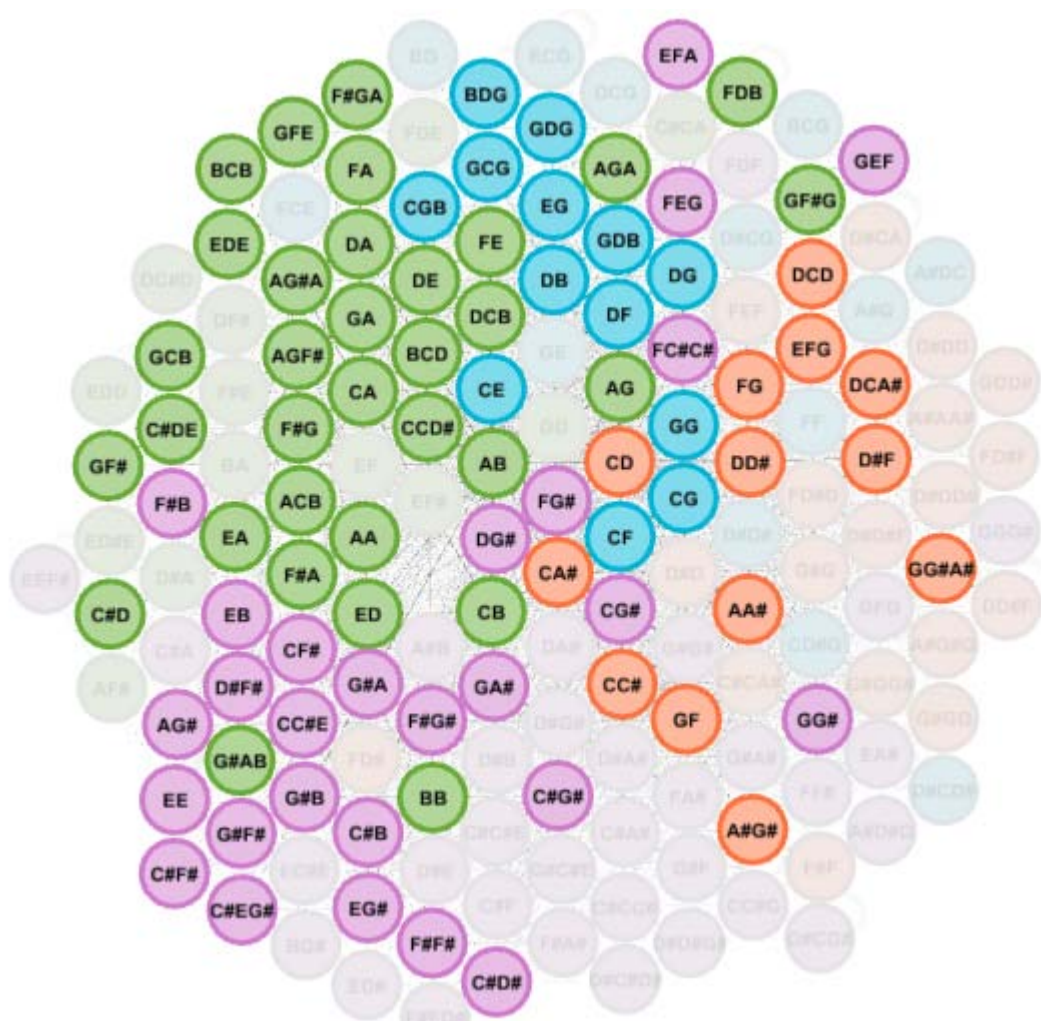


Figura 4.13: Conexiones a primeros vecinos con la palabra “AB”

Desde el punto de vista de la teoría de la información, utilizar la palabra que más ocurre con más frecuencia, es usar palabras que menos información tienen. Al ser la palabra que el autor suele utilizar más veces nos da información de que palabras pueden ir unidas con el conector, si es que pensamos que las palabras de mayor frecuencia funcionan así. Lo mismo tendríamos que el conector “la” es ampliamente utilizado en el español, que el conector “el”. El conector “la” no lo puedo unir con palabras como libro carro, si no que encontraríamos que el conector se une con palabras como la mesa, la casa... En nuestro caso estaríamos obteniendo palabras que se pueden unir a un conector que solía utilizar un compositor.

Podemos hacer lo anterior con la siguiente palabra de Bach CB(Do, Si), aparece en Bach cerca de 242 veces, siendo la que es más usada por el autor.

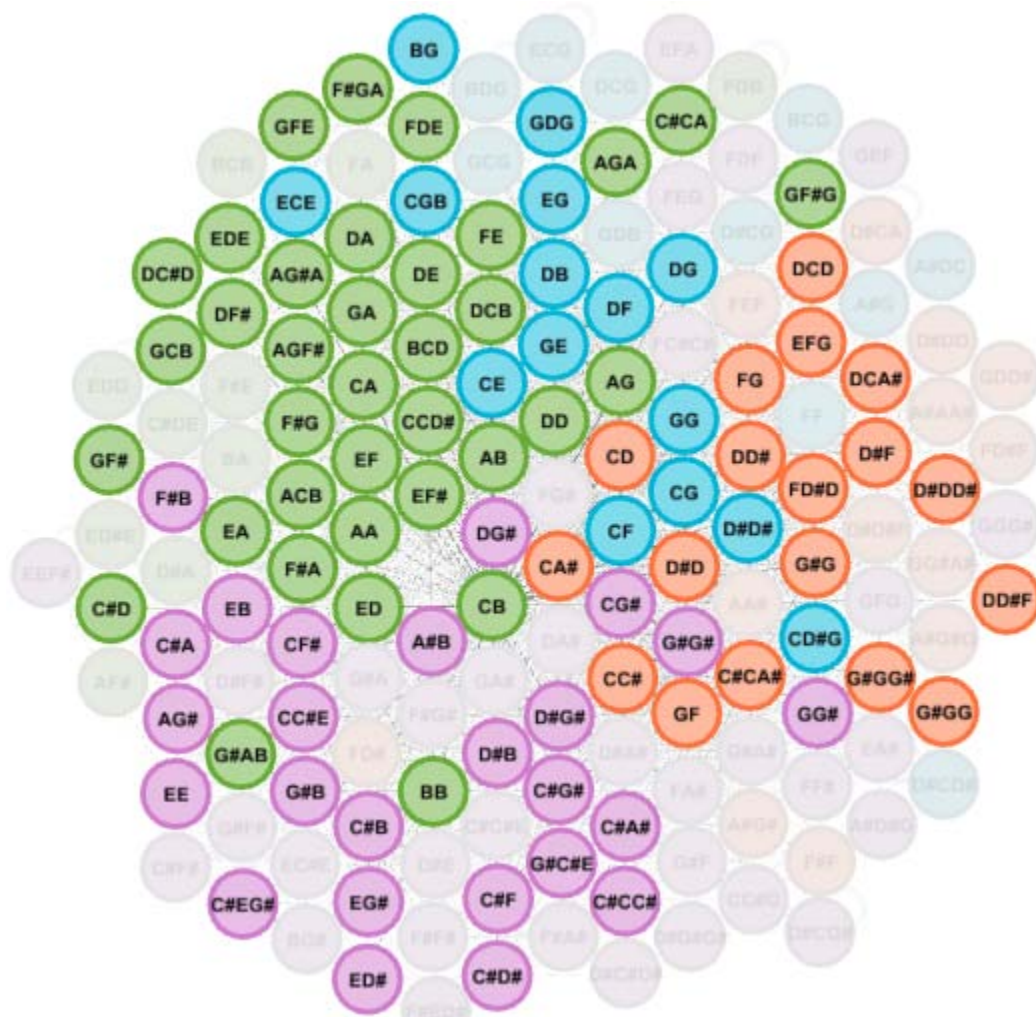


Figura 4.14: Conexiones a primeros vecinos con la palabra “CB”

Es decir podríamos intentar hacer música, haciendo una caminata aleatoria entre los nodos que están conectados con el nodo  $AB$ , o con los nodos que están conectados a  $CB$ . Claro que hay muchos nodos que están conectados a  $AB$  y puede que no pertenezcan a Bach o que sean menos utilizados por Bach. Por lo que al hacer la caminata sobre estos nodos podríamos descartar los que no pertenezcan a Bach o sean menos utilizados por este.

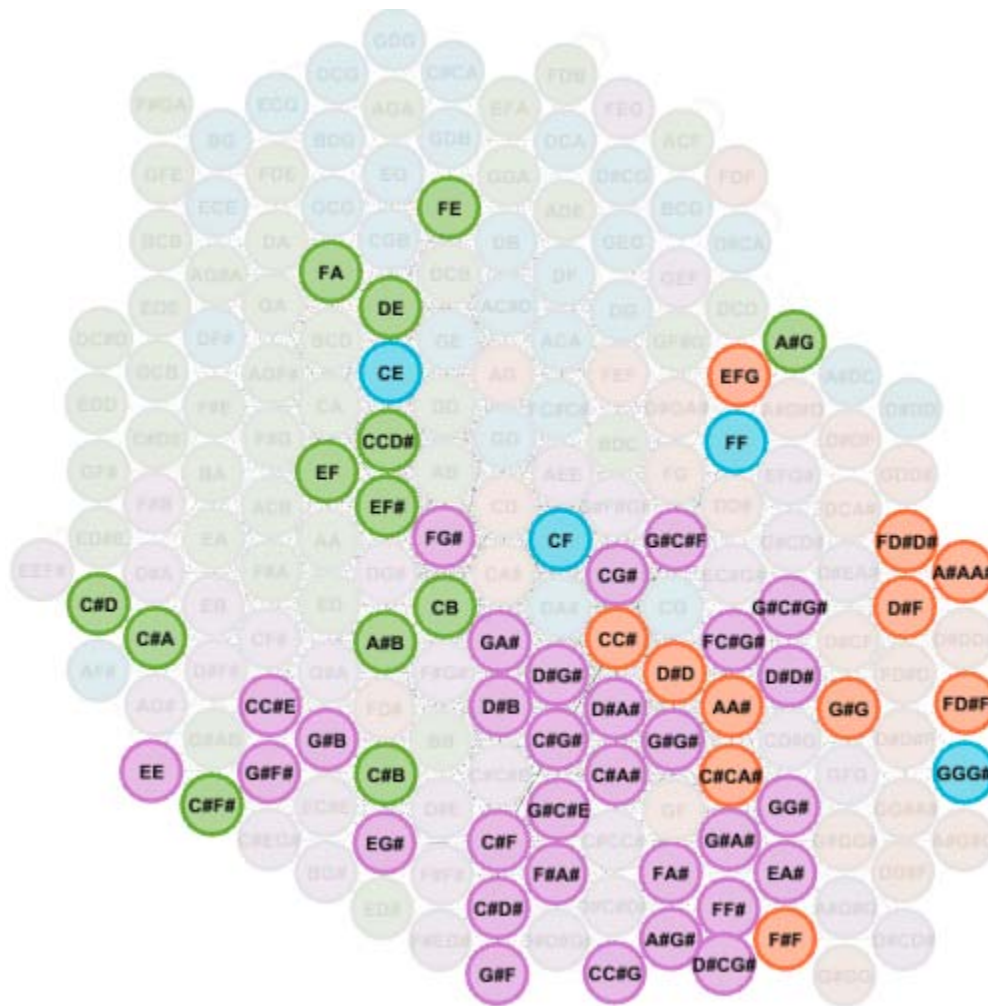


Figura 4.15: Primeros vecinos de la palabra  $C\#F$ , palabra muy utilizada por Chopin

En la gráfica anterior podemos ver los primeros vecinos de la palabra  $C\#F$ , podemos observar que está conectada con más palabras de la comunidad morada. Esto es debido a que la comunidad morada tiene gran parte de la información de Chopin como  $G\#F$ ,  $CG\#$ . A pesar de que no podemos decir que una sola comunidad tiene toda la información de un solo autor, sí podemos ver que en las comunidades tenemos gran información de un solo compositor, aun cuando compartan información de otros compositores. Estas 4 comunidades solo se lograron observar al reducir el número de nodos en la red y dejar solo los nodos más importantes, es decir con mayor grado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

De todos los lenguajes que existen en el mundo, uno de los más sorprendentes es la música. En este trabajo se intentó pensar en la música de ésta forma y se usó el algoritmo de visibilidad para estudiar series musicales. Este algoritmo permite transformar una serie de tiempo en una red. La conexión es posible entre dos puntos  $a$  y  $b$  de la serie de tiempo, si al hacer la recta entre estos dos puntos, no hay un punto intermedio que corte dicha recta.

Para obtener las series de tiempo se usaron archivos MIDI, que permiten extraer información como si se tuviera una partitura, la única diferencia es que en vez de tener una representación por notas en un pentagrama, se tiene una representación por medio de números en un archivo CSV. Para algunas de las obras analizadas, el archivo nos permitió diferenciar entre mano derecha y mano izquierda, lo cual nos ayudó a crear series de tiempo para ambas manos.

Con la representación de la serie de tiempo en una red, se observó que era libre de escala, pues su distribución de grado seguía una ley de potencias. La tendencia de esta distribución ayudó a obtener el exponente de Hurst, que en promedio era menor a 0.5. Lo cual indicó que las series de tiempo tenían un comportamiento antipersistente. Por otro lado, para los casos en los que se diferenció entre mano izquierda y mano derecha, se encontró que una mano era ligeramente más persistente que la otra, el exponente de la mano derecha era ligeramente superior al de la mano izquierda.

Cuando se graficó el comportamiento del número de nodos contra la longitud promedio, se observó que la longitud no crecía de manera lineal, sino de forma acotada. Al ver este comportamiento se determinó el “*clustering coefficient*” de las series, encontrando que el valor promedio era cercano a 0.4. Estos resultados nos indicaron que la conexión entre vecinos de un nodo no era ni baja ni alta, por lo que hubo un comportamiento de mundo pequeño.

Al analizar las series de tiempo se observaron oscilaciones grandes, lo cual se vio reflejado en su exponente de Hurst. Al estudiarlo, se pensó en establecer un alfabeto de 12 notas (**Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si**), éstas notas fueron utilizadas porque se repiten, es decir podemos tener la misma nota en diferente octava. Al tener una nota en diferente octava en un archivo MIDI, el resultado es un número totalmente

diferente, aun siendo la misma nota. Posteriormente se creó una nueva serie de tiempo que difería módulo 12 de la original, así se construyó una serie de tiempo sin octavas.

A pesar de que teníamos el alfabeto y las series de tiempo sin octavas, carecíamos de las posibles palabras con las cuales identificar las notas. Para resolver éste problema, se pensó en crear algoritmos que interpretarían como palabras cierto intervalo de notas, por lo que se usó el algoritmo de visibilidad por sus propiedades de conexión en la búsqueda de palabras.

Se estableció que una palabra sería un conjunto de notas consecutivas que permitiría la visibilidad entre la primera y última nota. Con estos bloques de símbolos, se crearon series de palabras o bloques de notas para que las notas no estuvieran aisladas. Así se construyó una serie de tiempo usando las palabras encontradas, con esta nueva serie aplicamos la función de autocorrelación y se observaron distintos comportamientos.

En Bach, la función de autocorrelación era muy parecida a lo que se encuentra en un sólido. La función de autocorrelación en un sólido, se relaciona por medio de la transformada de Fourier del espectro de difracción de rayos X del sólido, esto origina una función de autocorrelación con determinados picos que dependen de la estructura del cristal. Una cosa que se puede ver en sus autocorrelogramas es que cambian la distribución de los picos. Posiblemente los cambios se deban a que en las obras estudiadas había distintos movimientos, es decir, algunas obras se ejecutan más rápido y otras más lento. Esto pudo originar que el autor cambiara la forma de distribuir los bloques de notas. En síntesis podemos decir que Bach compone de manera que algunos bloques de notas tienden a ser periódicos.

Para Beethoven y Chopin, se observó un comportamiento muy distinto en su función de autocorrelación, a veces tendía a comportarse como un líquido y otras como un gas. Lo cual nos indica que los compositores ponían cierta estructura al repetir alguna palabra en específico, pero no tanta como el caso de Bach.

Suponiendo que la longitud de las palabras sea de 3 notas musicales, entonces existen 1728 posibles palabras. Si pensamos en palabras con 2 notas de longitud, existirían 144 posibles palabras. En este trabajo al usar el algoritmo de visibilidad, las palabras eran de dos o tres notas, en conjunto contábamos con 890 distintas palabras entre los tres autores estudiados. Si suponemos que sólo hay palabras de 3 notas de longitud, existen 838 palabras que no se están utilizando en las series de tiempo analizadas, es decir, hay un número de combinaciones que estos autores no toman en cuenta.

Utilizando las ideas de Shannon, se encontró que la información por bloque de notas es muy distinta entre cada autor. Bach es el que menor información da por bloque de nota, mientras que Chopin entrega más información. Esto concuerda con la idea de que Bach componía de manera más periódica, pues al ser más repetitivo en algunas ideas obtendríamos menor información por palabra. En el caso de Chopin, se observa que la forma en que las palabras están acomodadas no se parece a un sólido, sino al comportamiento de un gas o un líquido, esto implica que las palabras no son tan repetidas en sus obras y origina un aumento en la información por palabra.

Al analizar las palabras más usadas por Bach se encontró que las más frecuentes contenían las siguientes combinaciones de notas: **Si, Do, La, Sib**. Esto nos indica que para Bach, estas notas eran de gran importancia y ello lo podemos corroborar tanto como his-



tóricamente y al usar el algoritmo de visibilidad. Se cree que Bach solía usar su nombre como firma y el algoritmo de visibilidad encontró similitudes con su firma y las palabras formadas, ya que en el alemán la nota **Sib** se le solía denominar como **H**, el **Do** como **C**, **La** como **A** y **Si** como **B**, de esta forma tenemos **B,A,C,H**, como las notas más frecuentes del compositor y que a su vez utilizaba como firma

Con todas las palabras obtenidas se volvió a crear una red con la finalidad de observar como estaban conectadas, se advirtió que con los nodos más importantes en la red se formaban 4 comunidades principales. En tres de estas comunidades se puede ver que cada una contenía las notas más usada por cada uno de los autores, por lo que en una de estas tres comunidades teníamos las principales palabras por autor y la cuarta comunidad se forma con las palabras que más usaban varios compositores. A pesar de que cada comunidad contenía las palabras más importantes de cada autor, se observó que contenía palabras que también eran usadas por los otros compositores, pero en menor medida. Con esta información se puede hacer una aproximación del lenguaje como lo hacía Shannon. En el primer intento no creó algo que se pudiera reconocer como inglés, pero al menos las palabras creadas tenían una longitud parecida a las que se encontraba en el idioma. En el caso de la música, si sólo nos quedamos en qué notas aparecen más y las ponemos de acuerdo a sus respectivas probabilidades, tendríamos una primera aproximación a éste lenguaje. Podemos seguir haciendo aproximaciones del idioma. Una segunda aproximación es dada una letra, la siguiente letra es la más probable en base en la primer palabra, es decir una probabilidad condicionada. Otra aproximación consiste en tomar palabras y ponerlas una tras otra, ésta aproximación tiene la característica de que las palabras sí pertenecen al lenguaje, pero no necesariamente se pueden crear oraciones coherentes. Se puede aproximar aún más si ponemos las palabras de forma condicionada. Una vez que tenemos los bloques de cada autor podemos hacer una aproximación tipo Shannon; tomar los más usados por Bach y hacer una caminata de acuerdo a como están conectados estos bloques de notas. Al hacer esto podemos crear combinaciones de notas que creen música, de esta forma se obtuvo la siguiente partitura:

Primer Intento

The musical score is written in 3/4 time with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). It consists of three systems of staves. The first system shows a simple melody with quarter and eighth notes. The second system introduces a more complex rhythmic pattern with sixteenth notes and rests. The third system features a dense texture with many sixteenth notes and rests, creating a busy, rhythmic feel. The score is oriented vertically on the page.

# Apéndice Programas.

## Programa Visibilidad Natural.

```
/******  
#include <stdio.h>  
#include <stdlib.h>  
void main()  
{  
int **mp=NULL,dim,nuelm;  
FILE *fp,*f1,*f2,*f3;  
if((fp =fopen("appass3midi2.csv","r"))==NULL) printf("no hay archivo");  
f1 =fopen("listordenapas.csv","wt");  
f2=fopen("gradoap.csv","wt");  
f3=fopen("matriz.csv","wt");  
int i=0;  
float z,x,y;  
/******lectura de datos *****/  
/******Contamos el número de elementos del programa*****/  
while(1)  
{  
i++;  
fscanf(fp,"%f,%f,%f\n",&x,&y,&z);  
iffeof(fp))  
break;  
}  
/******Reiniciamos el cursor y le asignamos memoria a los vectores*****/  
fseek (fp, 0, SEEK_SET);  
nuelm=i;  
dim=i+1;  
i=0;  
float V[dim],T[dim],N[dim],Vf[dim],Tf[dim],Nf[dim];  
/******Leemos los vectores*****/  
/******T=tiempo N=note, V=vel de duracion*****/  

```

```

while(1)
{
i++;
fscanf(fp," %f, %f, %f\n",&T[i],&N[i],&V[i]);
if(feof(fp))
break;
//printf(" %.2f%.10.2f%.10.2f\n",T[i],N[i],V[i]);
}
/*****
/*****Fin de lectura de datos*****/
/*****
/*****Declarare alguna variables*****/
i=0;
int j=0,h,dis,mayor,temp,dif,cl=0;
/*****Discriminamos los valores de acordes y duracion cero*****/
for(i=0;i<=nuelm;i++)
{
if(V[i]!=0)
{
h=i;
j=0;
if(T[i]==T[i+1])
{
cl++;
while(1)
{
j++;
if(T[i]!=T[i+1])
break; i+=1;
}
/*****Regresamos el contador para el siguiente for*****/
dif=i-(j-1);
/*****Ordenamos de Mayor a menor*****/
for(mayor=dif;mayor<=i;mayor++)
{
for(dis=dif;dis<=(i-1);dis++)
{
if(N[dis]<N[dis+1])
{
temp=N[dis];
N[dis]=N[dis+1];
N[dis+1]=temp;

```

```

}
}
}
/*****Nos quedamos con el mayor*****/
for(mayor=dif;mayor<=i;mayor++)
printf(" %f——— %d——— %f\n",N[mayor], mayor,N[dif]);
j=0;
Tf[cl]=T[i];
Nf[cl]=N[dif];
fprintf(f1, " %f, %f \n", Tf[cl],Nf[cl] );
/*****El número mas grande se guarda en el elemento dist*****/
}
//fin de if else
{
cl++;
Tf[cl]=T[i];
Nf[cl]=N[i];
fprintf(f1, " %f, %f \n", Tf[cl],Nf[cl] );
}
} //fin de if de velocidad
} //fin de for
/*****FIN de discriminacion de datos*****/
/*****Inicializamos punteros *****/
int dimarr=cl+1;
printf(" %d\n",dimarr);
j=0;
/*****Asignamos memoria*****/
//Asignar memoria para el array de punteros
if ((mp = (int **) malloc (dimarr * sizeof(int *))) == NULL)
{
printf("\n\nInsuficiente espacio de memoria");
exit(0);
}
//Asignar memoria para cada fila
for (j = 0; j < dimarr; j++)
{
if ((mp[j] = (int *) malloc (dimarr* sizeof(int))) == NULL)
{
printf("\n\nInsuficiente espacio de memoria"); exit(0);
}
}
}
}
}

```

```

}
}
/*****Iniciamos todas las filas y renglones a cero*****/
int f,c;
for (f = 0; f < dimarr; f++)
for (c = 0; c < dimarr; c++)
*(*(mp+f)+c) = 0;
/*****
/*****
/*****Serie a red *****/
/*****
float funcion,cociente;
int contadordegrado=0,switchr=0,m,gradomat,fila,columna,ncolt,b;
/*****
for(i=0;i<dimarr;++i)
{
contadordegrado=1;
b=i+2;
j=i+3;
fila=i;
columna=i+1;
*(*(mp+fila)+columna)=1;
do{
switchr=0;
cociente=(Tf[j]-Tf[b])/(Tf[j]-Tf[i+1]);
funcion=Nf[j]+(Nf[i+1]-Nf[j])*(cociente);
if( funcion<=Nf[b] )
{
b=i+2; //brincamos un en j y regresamos el max j++; switchr=1;
}
/*checamos si existe visibilidad si no avanzamos en max con el ultimo else pero no en j
*/
if( funcion>Nf[b] )
{
b+=1;
if((b)>=j)
{
ncolt=j-1;
contadordegrado+=1;
*(*(mp+i)+ncolt)=1;
j+=1; b=i+2;
}
}
}
}

```

```

}
}while( j<=dimarr);
} /*****Hacemos una red que sea simetrica*****/
for (f = 0; f < dimarr ; f ++)
{
for (c = 0; c < dimarr; c++)
*(*(mp+c)+f)=*(*(mp+f)+c);
}
/*****/
for (f = 0; f < 80; f ++)
{
for (c = 0; c <80; c++)
printf(" %d",*(*(mp+f)+c));
printf("\n");
}
/*****/
for (f = 0; f < 1000; f ++)
{
for (c = 0; c <1000; c++)
{
fprintf(f3, " %d,",*(*(mp+f)+c));
}
fprintf(f3, "\n");
}
/*****/
int grado=0;
for(f=0;f<dimarr;f++)
{
grado =0;
for(c=0;c<dimarr;c++)
{
if(*(*(mp+c)+f)==1)
{
grado++;
}
}
}
fprintf(f2, " %d\n",grado);
}
/*****/
/*****/
/*****/
printf("Se esta liberando memoria\n\n"); //Liberar la memoria asignada a cada fila

```

```

for (f = 0; f < z; f++)
free (*(mp+f)); //Liberar la memoria asignada al array de punteros free (mp);
printf("\n\n");
}

```

## Programa Contador de Grado.

```

/*****
include<stdio.h>
#include<math.h>
#include <stdlib.h>
main()
{
/*****Declaracion de Variables Para el Programa*****/
int mod,n; int *num=NULL;
int i1,j, s,k,es,c=0,z=1,part;
float proba,cuenta,probteor,div;
/***** Abrir archivos*****/
FILE *fp,*f1;
fp=fopen("gradoap1v3.csv","r");
f1=fopen("probgradoapp1v3.csv","wt");
/*****lectura de datos*****/
fscanf(fp,"%d, \n",&n);
/*****Asignamos memoria*****/
if ((num = (int *) malloc (n* sizeof(int *))) == NULL)
{
printf("\n\nInsuficiente espacio de memoria");
exit(0);
}
div=n;
for(j=0;j<=150;j++)
{
part=0;
for(i1=1;i1<=n;i1++)
{
fscanf(fp,"%d\n",& num[i1]);
if(num[i1]==j)
{
part+=1;
}
}
}

```



```
if(part!=0)
{
cuenta=part;
proba=cuenta/div;
//probteor=(1.0/3.0)*(pow((2.0/3.0),(j-2)));
printf(" %d, %0.5f\n",j,proba);
fprintf(f1, " %d, %0.5f\n",j,proba);
}
}
free(num);
printf("\n\n\tSe libero memoria\n");
}
```

# Bibliografía

- [1] ABRAMSON, N. Information theory and coding.
- [2] ALBERT, R., AND BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics* 74, 1 (2002), 47.
- [3] ALDANA, M. Redes complejas. <http://www.fis.unam.mx/~max/English/notasredes.pdf> (2006).
- [4] BEZSUDNOV, I., AND SNARSKII, A. From the time series to the complex networks: The parametric natural visibility graph. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 414 (2014), 53–60.
- [5] BRILLOUIN, L. *Science and information theory*. Courier Corporation, 2013.
- [6] CAMPBELL, P. The music of digital computers.
- [7] COVER, T. M., AND THOMAS, J. A. Information theory and statistics. *Elements of Information Theory* (1991), 279–335.
- [8] COVER, T. M., AND THOMAS, J. A. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, 2012.
- [9] DIESTEL, R. *Graduate texts in mathematics: Graph theory*. Springer, 2000.
- [10] DING, M., AND YANG, W. Distribution of the first return time in fractional brownian motion and its application to the study of on-off intermittency. *Physical Review E* 52, 1 (1995), 207.
- [11] ERDŐS, P., AND RÉNYI, A. Asymmetric graphs. *Acta Mathematica Hungarica* 14, 3-4 (1963), 295–315.
- [12] ERDŐS, P., AND RÉNYI, A. Probabilistic methods in group theory. *Journal d'Analyse Mathématique* 14, 1 (1965), 127–138.
- [13] ERDŐS, P., AND RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. *Sel. Pap. Alfréd Rényi* 2 (1976), 482–525.

- [14] GARDNER, M. White and brown music, fractal curves and one-over-f fluctuations. *Scientific American* 238, 4 (1978), 16–27.
- [15] GUILLAUME, J.-L., AND LATAPY, M. A realistic model for complex networks. *arXiv preprint cond-mat/0307095* (2003).
- [16] GUTIN, G., MANSOUR, T., AND SEVERINI, S. A characterization of horizontal visibility graphs and combinatorics on words. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390, 12 (2011), 2421–2428.
- [17] HONOLKA, K., AND RICHTER, L. *Historia de la música*. Editorial Edaf, 2005.
- [18] HSÜ, K. J., AND HSÜ, A. Self-similarity of the "1/f noise" called music. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 88, 8 (1991), 3507–3509.
- [19] HSÜ, K. J., AND HSÜ, A. J. Fractal geometry of music. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 87, 3 (1990), 938–941.
- [20] LACASA, L., LUQUE, B., BALLESTEROS, F., LUQUE, J., AND NUNO, J. C. From time series to complex networks: The visibility graph. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105, 13 (2008), 4972–4975.
- [21] LACASA, L., LUQUE, B., LUQUE, J., AND NUNO, J. C. The visibility graph: A new method for estimating the hurst exponent of fractional brownian motion. *EPL (Europhysics Letters)* 86, 3 (2009), 30001.
- [22] LACASA, L., NUNEZ, A., ROLDÁN, É., PARRONDO, J. M., AND LUQUE, B. Time series irreversibility: a visibility graph approach. *The European Physical Journal B* 85, 6 (2012), 1–11.
- [23] LIU, X., CHI, K. T., AND SMALL, M. Composing music with complex networks. In *Complex Sciences*. Springer, 2009, pp. 2196–2205.
- [24] LIU, X. F., CHI, K. T., AND SMALL, M. Complex network structure of musical compositions: Algorithmic generation of appealing music. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389, 1 (2010), 126–132.
- [25] LUQUE, B., LACASA, L., BALLESTEROS, F., AND LUQUE, J. Horizontal visibility graphs: Exact results for random time series. *Physical Review E* 80, 4 (2009), 046103.
- [26] LUQUE, B., LACASA, L., BALLESTEROS, F. J., AND ROBLEDO, A. Analytical properties of horizontal visibility graphs in the feigenbaum scenario. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22, 1 (2012), 013109.
- [27] MCQUARRIE, D. Statistical mechanics. 2000. *Sausalito, Calif.: University Science Books* 12, 258.

- [28] MENDES, R. S., RIBEIRO, H., FREIRE, F., TATEISHI, A., AND LENZI, E. K. Universal patterns in sound amplitudes of songs and music genres. *Physical Review E* 83, 1 (2011), 017101.
- [29] NEWMAN, M. E. The structure and function of complex networks. *SIAM review* 45, 2 (2003), 167–256.
- [30] NUNEZ, A., LACASA, L., VALERO, E., GÓMEZ, J. P., AND LUQUE, B. Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22, 07 (2012), 1250160.
- [31] NUÑEZ, A. M., LUQUE, B., GOMEZ, J. P., AND LACASA, L. *Visibility algorithms: A short review*. Citeseer, 2012.
- [32] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [33] SCHROEDER, M. Is there such a thing as fractal music?
- [34] SHANNON, C. E. Communication theory of secrecy systems\*. *Bell system technical journal* 28, 4 (1949), 656–715.
- [35] SHANNON, C. E., MONTES, S., WEAVER, W., MACHADO, T. B., AND PÉREZ-AMAT, R. *Teoría matemática de la comunicación*. 1981.
- [36] SHANNON, C. E., AND WEAVER, W. The mathematical theory of information.
- [37] SU, Z.-Y., AND WU, T. Music walk, fractal geometry in music. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 380 (2007), 418–428.
- [38] VOSS, R. F. Random fractals: Self-affinity in noise, music, mountains, and clouds. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 38, 1 (1989), 362–371.
- [39] VOSS, R. F., AND CLARKE, J. 1/f noise in music: Music from 1/f noise. *The Journal of the Acoustical Society of America* 63, 1 (1978), 258–263.
- [40] WATTS, D. J. Networks, dynamics, and the small-world phenomenon 1. *American Journal of sociology* 105, 2 (1999), 493–527.
- [41] WATTS, D. J. *Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness*. Princeton university press, 1999.
- [42] WATTS, D. J., AND STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small-world networks. *nature* 393, 6684 (1998), 440–442.